THOMAS
CÁLCULO
UNA VARIABLE

Decimosegunda edición

PEARSON

THOMAS
CÁLCULO
UNA VARIABLE

Decimosegunda edición

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

Revisada por

Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

Traducción

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Escuela de Actuaría
Universidad Anáhuac - México Norte

Revisión técnica

Carlos Bosch Giral
César Luis García García
Claudia Gómez Wulschner
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Manuel Robles Bernal
Instituto Politécnico Nacional

Addison-Wesley

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

THOMAS

Cálculo una variable
Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2010

ISBN: 978-607-32-0164-3
Área: Matemáticas

Formato: 21.5 × 27.5 cm Páginas: 800

ISBN 9780321637420

Edición en inglés
Editor-in-Chief: Deirdre Lynch
Senior Acquisitions Editor: William Hoffman
Senior Project Editor: Rachel S. Reeve
Associate Editor: Caroline Celano
Associate Project Editor: Leah Goldberg
Senior Managing Editor: Karen Wernholm
Senior Production Supervisor: Sheila Spinney
Senior Design Supervisor: Andrea Nix
Digital Assets Manager: Marianne Groth
Media Producer: Lin Mahoney
Software Development: Mary Durnwald and Bob Carroll
Executive Marketing Manager: Jeff Weidenaar
Marketing Assistant: Kendra Bassi
Senior Author Support/Technology Specialist: Joe Vetere
Senior Prepress Supervisor: Caroline Fell
Manufacturing Manager: Evelyn Beaton
Production Coordinator: Kathy Diamond
Composition: Nesbitt Graphics, Inc.
Illustrations: Karen Heyt, IllustraTech
Cover Design: Rokusek Design

Edición en español
Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN, 2010

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0164-3
ISBN E-BOOK: 978-607-32-0165-0
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0166-7

Addison-Wesley
es una marca de
PEARSON

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 13 12 11 10

Revisión técnica

Adelia Copas
Enrique Santillán
ESIME, Zacatenco-Instituto Politécnico Nacional

Javier Mosqueda Lafarga
Instituto Tecnológico de Culiacán

Elio César Ramos
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Aguascalientes

María Guadalupe Lomelí Plascencia
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Guadalajara

Daniel Flores Barriga
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Morelia

Eduardo Soberanes Lugo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Sinaloa

Roberto Núñez
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente

Enrique Fernández Díaz
Gabriel Martínez Chávez
Instituto Tecnológico de Hermosillo

Socorro del Rivero Jiménez
Instituto Tecnológico Superior de Cajeme

Mario Mesino
Universidad Autónoma de Guadalajara

Cutberto Romero Meléndez
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Azcapotzalco

Lucía González Rendón
Universidad de Guadalajara

AGRADECIMIENTOS

Pearson Educación agradece a los centros de estudio y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Cálculo, una variable*.

Argentina
Emilio Suárez
Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Haydee Castelletti
Silvia Adriana Mamone
Universidad de Belgrano

Viviana Niselman
Universidad de Buenos Aires

Gladis Beatriz Astargo
Horacio Day
Universidad Nacional de Cuyo

Isabel Weinberg
Universidad Nacional de la Matanza

Ángela Maldonado
Augusto Melgarejo
Delicia Tisera
Diego Vallejo
José Suárez
Laura Langoni
María Inés Otegui
María Teresa Guardarucci
Mariel Lavaña
Mercedes Trípoli
Miguel Sanservino
Néstor Bucari
Universidad Nacional de la Plata

Angélica Arnulfo
Beatriz Introcaso
Emilio Sastre
José Botto
María Susana Montelar
Mónica Caserío
Universidad Nacional de Rosario

Elena Arlauskas
Gabriela Righetti
Universidad Tecnológica Nacional Regional Avellaneda

Colombia
Bernardo Aldana Gómez
Néstor Raúl Pachón
Escuela Colombiana de Ingeniería-Bogotá

Elías Cardona
ICESI

Antonio Merchán
Fernando Novoa
Gerardo Tole
Héctor Linares
Irina Reyes
Ismael García
Jaime Gómez
Juan Carlos Quintero
Liliana Barreto
Moisés Aranda
Nazly Esmeralda Salas
Rafael Castro
Pontificia Universidad Javeriana

Laureano Valencia
Oswaldo Rodríguez Díaz
Universidad Autónoma de Occidente-Cali

Mario Bravo
Universidad de San Buenaventura-Cali

José Villada
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Chile
Juan Duarte
Universidad de Antofagasta

Clarita Balbontín
Universidad de los Andes

Julio Hugo Ramírez
Universidad de Viña del Mar

Ecuador
Eduardo Alba
Universidad San Francisco de Quito

España
Patricia Barral Rodiño
Universidad de Santiago de Compostela

México
Alicia Ordóñez Segura
Celerino Federico Navarrete Cruz
Fernando Arenas García
Isidro Rodríguez Montoro
Jesús Solano Roano
Jorge Almanza Pérez
José Luis Almanza Pérez
Julio Ernesto Hoyos Ochoa
Salvador Hoyos Ochoa
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Jalapa

Miguel Hernández de la Torre
Omar Olmos López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey - Campus Toluca

Mauricio Cirilo Méndez Canseca
Raúl Chávez
Universidad Anáhuac - México Sur

Angélica Tovar Gómez
Bertha Alicia Arellano Silva
Elvia Loera Hernández
Javier Cantú Rodríguez
Karla Guajardo Cosío
Universidad Autónoma de Nuevo León

Ramiro Garza Molina
Universidad Autónoma de Tamaulipas

David Elizarraraz Martínez
Jaime Grabinsky Steider
José Ventura Becerril Espinosa
Judith Omaña Pulido
Marina Salazar Antunez
Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco

Mauro Ernesto Espinoza García
Universidad Cristóbal Colón - Veracruz

Ana María González Piña
Javier Barrón
Karla Violeta Martínez Facundo
Maribel Fuentes Dávila
Patricia González
Universidad de Monterrey

Alma Rosa Griselda Zetina Vélez
Martín Cruz Cuevas
Miriam Lemus
Roberto Bautista Atenógenes
Sandra Chimal Garma
Universidad La Salle

Dolores Vera Dector
Felipe Hernández Hernández
Ricardo Victoria Carrera
Universidad Veracruzana

Perú
Luis Díaz Bazurco
Wilber Ramos Lovón
Universidad Católica de Santa María-Arequipa

José Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

Venezuela
Elvira Sabal
Milagros Bosquetti
Universidad Católica Andrés Bello

Jesús Hernández
José Luis Quinteros
María de Armas
María Luisa Vonna
Marienma Sánchez
Universidad Central de Venezuela

Contenido

7 Funciones trascendentes 361

8 Técnicas de integración 435

9 Ecuaciones diferenciales de primer orden 496

10 Sucesiones y series infinitas 532

14 Derivadas parciales 747

15 Integrales múltiples 836

16 Integración en campos vectoriales 901

Prefacio

Revisamos exhaustivamente esta edición de *Cálculo de Thomas* con la finalidad de cubrir las necesidades de los profesores y los estudiantes actuales. El resultado es un libro con más ejemplos, más ejercicios de nivel medio, mayor cantidad de figuras y mejor flujo conceptual, además de mayores claridad y precisión. Al igual que las ediciones anteriores, esta nueva edición ofrece una introducción moderna al cálculo que apoya la comprensión conceptual, pero conserva los elementos esenciales de un curso tradicional. Tales mejoras se relacionan estrechamente con una versión ampliada del texto de MyMathLab® (al que nos referiremos más adelante), el cual brinda apoyo adicional a los estudiantes y flexibilidad a los profesores.

Muchos de nuestros alumnos estuvieron expuestos a la terminología y los aspectos computacionales del cálculo durante el bachillerato. A pesar de la familiaridad con el álgebra y la trigonometría, sus habilidades en estas materias con frecuencia son insuficientes para alcanzar el éxito en el cálculo universitario. Con este texto buscamos equilibrar la escasa experiencia de los estudiantes con el cálculo y el desarrollo de habilidades algebraicas que podrían necesitar, todo sin socavar o minar su confianza. Además, hemos tenido cuidado de presentar suficiente material, soluciones detalladas paso a paso y ejercicios que apoyen una comprensión completa para alumnos de todos los niveles.

Animamos a los estudiantes a ir más allá de la memorización de las fórmulas para generalizar conceptos conforme éstos se presenten. Nuestro deseo es que después de cursar cálculo, ellos tengan confianza en sus habilidades para razonar y resolver problemas. El dominio de un tema maravilloso con aplicaciones prácticas al mundo será su recompensa, pero el verdadero regalo será la habilidad para pensar y generalizar. Creemos que este libro brindará respaldo y apoyo para ambas cosas.

Cambios en la decimosegunda edición

CONTENIDO En la preparación de esta edición hemos conservado la estructura básica de la tabla de contenido de la edición anterior. Hemos puesto atención a las peticiones de los usuarios y los revisores de posponer la introducción de ecuaciones paramétricas hasta después de explicar las coordenadas polares, y de presentar el tema de la regla de L'Hôpital después de las funciones trascendentes. Realizamos numerosas revisiones a la mayoría de los capítulos, como se detalla a continuación.

- **Funciones** Condensamos este capítulo aún más para centrarnos en la revisión de los conceptos sobre funciones. El material de requisito que cubre números reales, intervalos, incrementos, líneas rectas, distancias, circunferencias y parábolas se presenta en los apéndices 1 a 3.
- **Límites** Para mejorar la continuidad en este capítulo, combinamos las ideas de límites que incluyen infinito y su relación con las asíntotas en las gráficas de las funciones, colocándolas juntas al final de la última sección del capítulo.
- **Derivadas** Aunque utilizamos tasas de cambio y tangentes a curvas como motivación para el estudio del concepto de límite, ahora presentamos el concepto de derivada en un solo capítulo. Reorganizamos e incrementamos el número de ejemplos de tasas relacionadas y agregamos nuevos ejemplos y ejercicios sobre graficación de funciones racionales.

- **Antiderivadas e integración** Conservamos la organización de la decimoprimera edición al colocar las antiderivadas como el último tema referente a las aplicaciones de las derivadas. Nuestro objetivo es exponer "la forma de recuperar una función a partir de su derivada", como la solución del tipo más sencillo de una ecuación diferencial de primer orden. Las integrales, como "límites de sumas de Riemann", estudiadas sobre todo a la luz del problema de determinar áreas de regiones generales con fronteras curvas, son un nuevo tema que forma la parte sustancial del capítulo 5. Después de un cuidadoso desarrollo del *concepto* de integral, pusimos nuestra atención en su evaluación y su relación con las antiderivadas, relación que se plasma en el teorema fundamental del cálculo. Las aplicaciones correspondientes *definen* diversas ideas geométricas de área, volumen, longitudes de trayectorias y centroides, todas como límites de sumas de Riemann que dan lugar a integrales definidas que pueden evaluarse determinando una antiderivada del integrando. Posteriormente, regresamos al tema de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden más complicadas; después de ello, definimos y establecemos las funciones trascendentes y sus propiedades.
- **Ecuaciones diferenciales** Algunas universidades prefieren que este tema se incluya en un curso aparte de cálculo. Aunque nosotros tratamos las soluciones de ecuaciones diferenciales con variables separables, cuando tratamos las aplicaciones de crecimiento y decaimiento exponenciales en el capítulo de funciones trascendentes, organizamos todo nuestro material en dos capítulos (que pueden omitirse para seguir la secuencia de cálculo). En el capítulo 9 damos un tratamiento introductorio a las ecuaciones diferenciales de primer orden. El capítulo incluye una nueva sección sobre sistemas y planos fase, con aplicaciones a modelos que incluyen presas y depredadores. En el capítulo 17 presentamos una introducción a ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se incluye en MyMathLab, así como en el sitio Web del texto, **www.pearsoneducacion.net/thomas**.
- **Series** Conservamos la estructura organizacional de la decimoprimera edición para los temas de sucesiones y series. Agregamos nuevas figuras y nuevos ejercicios a diversas secciones, pero además revisamos algunas de las demostraciones relacionadas con la convergencia de series de potencia para mejorar la accesibilidad del material a los estudiantes. Uno de los usuarios del texto nos dijo que cualquier modificación que hiciéramos "para que este material resultara más sencillo para los estudiantes" sería bienvenida en su facultad; ese comentario nos guió para hacer las revisiones de este capítulo.
- **Ecuaciones paramétricas** Varios usuarios pidieron incluir este tema en el capítulo 11, donde también se tratan coordenadas polares y secciones cónicas. Lo hicimos luego de comprender que muchos departamentos eligen cubrir tales temas al inicio de Cálculo III, como preparación para tratar el cálculo con vectores y de varias variables.
- **Funciones de variables vectoriales** Redujimos los temas de este capítulo para dar mayor énfasis a los conceptos que fundamentan el material sobre derivadas parciales, el vector gradiente y las integrales de línea. Compactamos el análisis del marco de Frenet y las tres leyes de Kepler acerca del movimiento de los planetas.
- **Cálculo de varias variables** En estos tres capítulos resaltamos el diseño, además de añadir muchas figuras, ejemplos y ejercicios nuevos. Reorganizamos el material inicial sobre integrales dobles. Combinamos en una sola sección las aplicaciones de integrales dobles y triples a masas y momentos; se presentan casos tanto de dos como de tres dimensiones. Dicha reorganización permite una mejor exposición de los conceptos clave, junto con sus propiedades y sus aspectos computacionales. Al igual que en la edición anterior, en ésta continuamos haciendo las conexiones de las ideas de varias variables con sus análogos de una variable que se estudian antes en el texto.
- **Campos vectoriales** Dedicamos un considerable esfuerzo para mejorar la claridad y precisión matemática de nuestro estudio de cálculo integral vectorial, incluyendo ejemplos, figuras y ejercicios adicionales. Los teoremas y los resultados importantes se enuncian con mayor claridad y en forma completa; se incluyen explicaciones amplias de sus hipótesis y consecuencias matemáticas. El área de una superficie ahora se organiza en una sola sección, mientras las superficies definidas, explícita o implícitamente, se tratan como casos especiales de la representación paramétrica más general. Las integrales de superficie y sus aplicaciones se estudian en una sección separada. El teorema de Stokes y el teorema de la divergencia se siguen presentando como generalizaciones del teorema de Green a tres dimensiones.

EJERCICIOS Y EJEMPLOS Sabemos que los ejercicios y los ejemplos son componentes fundamentales en el aprendizaje del cálculo. En virtud de tal importancia, actualizamos, mejoramos y ampliamos el número de ejercicios en casi todas las secciones del libro. En la presente edición incluimos más de 700 nuevos ejercicios. Continuamos nuestra organización y la agrupación de ejercicios por tema, como en las ediciones anteriores, pasando de problemas computacionales a problemas aplicados y teóricos. Los ejercicios que requieren del uso de sistemas de cómputo (como *Maple*® o *Mathematica*®) se colocaron al final de cada sección de ejercicios con el título **Exploraciones con computadora**. La mayoría de los ejercicios aplicados tienen un subtítulo para indicar la clase de aplicación adecuada del problema.

Muchas secciones incluyen ejemplos nuevos para clarificar y profundizar en el significado del tema que se estudia, así como para ayudar a los estudiantes a comprender las consecuencias matemáticas o las aplicaciones a la ciencia y la ingeniería. Al mismo tiempo, eliminamos ejemplos que repetían material presentado con anterioridad.

DISEÑO Por su importancia en el aprendizaje del cálculo, continuamos con la mejora de figuras existentes en este texto e incluimos un número significativo de nuevas figuras. Continuamos con el uso del color de manera consistente y pedagógica para resaltar la idea conceptual que se ilustra. También revisamos todas las leyendas de las figuras, poniendo mucha atención a la claridad y precisión en los enunciados cortos.

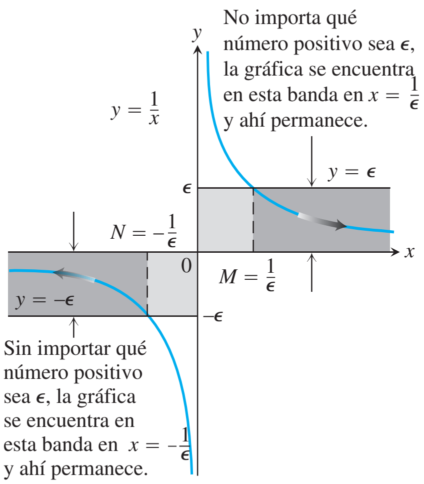


FIGURA 2.50 La geometría dentro del argumento del ejemplo 1.

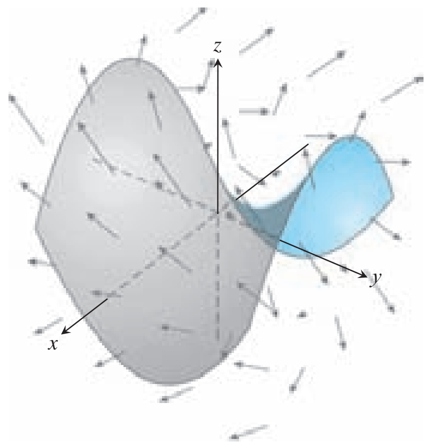


FIGURA 16.9 Una superficie, como una red o un paracaídas, en un campo vectorial que representa los vectores velocidad del flujo de agua o aire. Las flechas muestran la dirección y sus longitudes indican la rapidez.

MYMATHLAB Y MATHXL El aumento en el uso y la demanda de sistemas de tareas en línea ha llevado a cambios en MyMathLab y MathXL® para el texto. El curso **MyMathLab** ahora incluye muchos más ejercicios de todo tipo. Los nuevos applets Java™ se agregan a la ya significativa colección, para ayudar a los estudiantes a visualizar los conceptos y generalizar el material.

Otras características destacadas

RIGOR El nivel de formalidad es consistente con el de las ediciones anteriores. Seguimos distinguiendo entre análisis formal e informal, y señalamos sus diferencias. Consideramos que iniciar con una idea más intuitiva y menos formal ayuda a los estudiantes a comprender un concepto nuevo y difícil, de manera que luego ellos puedan apreciar cabalmente su precisión matemática y los resultados. Ponemos atención en definir las ideas de una manera detallada y en probar los teoremas adecuados para estudiantes de cálculo, aunque mencionamos temas más profundos o sutiles que ellos estudiarán en un curso más avanzado. Nuestra organización y las distinciones entre tratamiento informal y formal dan al profesor un considerable grado de flexibilidad en la cantidad y la profundidad de cobertura de los diferentes temas. Por ejemplo, no demostramos el teorema del valor intermedio ni el teorema del valor extremo para funciones continuas en $a \leq x \leq b$, pero enunciamos dichos teoremas de manera muy precisa, ilustramos su significado en numerosos ejemplos y los utilizamos para demostrar otros resultados importantes. Además, para aquellos profesores que deseen una mayor profundidad, en el apéndice 6 estudiamos la validez de tales teoremas con base en la completez de los números reales.

EJERCICIOS DE ESCRITURA Los ejercicios de escritura colocados en todo el texto piden a los estudiantes explicar una variedad de conceptos y variaciones del cálculo. Además, al final de cada capítulo se incluye una lista de preguntas para que revisen y sinteticen lo que aprendieron. Muchos de estos ejercicios son buenas tareas de redacción.

REPASO Y PROYECTOS DE FINAL DE CAPÍTULO Además de los problemas que aparecen en cada sección, cada capítulo termina con preguntas de repaso, ejercicios de práctica que cubren todo el capítulo, y una serie de ejercicios adicionales y avanzados que sirven para incluir problemas más desafiantes o que sintetizan el conocimiento. La mayoría de los capítulos también incluyen descripciones de varios **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden desarrollarse de manera individual o por grupos en un periodo más prolongado. Dichos proyectos requieren el uso de una computadora con *Mathematica* o *Maple*, y de material adicional, el cual está disponible en Internet en **www.pearsoneducacion.net/thomas** y en MyMathLab.

ESCRITURA Y APLICACIONES Como siempre, este texto continúa siendo fácil de leer, pues tiene un estilo conversacional al tiempo que es rico matemáticamente. Cada nuevo tema se plantea mediante ejemplos claros y fáciles de comprender; además, el tema se refuerza mediante aplicaciones a problemas del mundo real y de interés inmediato para los estudiantes. Un sello distintivo del libro han sido sus aplicaciones del cálculo a la ciencia y la ingeniería. Estos problemas aplicados se han actualizado, mejorado y ampliado de manera continua durante las últimas ediciones.

TECNOLOGÍA En un curso que utilice el texto, la tecnología puede incorporarse de acuerdo con el criterio de cada profesor. Cada sección contiene ejercicios que requieren el uso de tecnología; si es pertinente el uso de una calculadora o una computadora, se incluye un símbolo T en los ejercicios, o bien, éstos se agrupan bajo el título **Exploraciones con computadora** si se requiere del uso de un sistema algebraico computacional (SAC, como *Maple* o *Mathematica*).

Complementos multimedia y apoyo en línea

MANUALES DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

Maple Manual de James Stapleton, North Carolina State University
Mathematica Manual de Marie Vanisko, Carroll College
TI-Graphing Calculator Manual de Elaine McDonald-Newman, Sonoma State University
Estos manuales cubren *Maple 13*, *Mathematica 7* y las TI-83 Plus/TI-84 Plus y TI-89, respectivamente. Cada manual ofrece una guía detallada para integrar un paquete específico o una calculadora graficadora a lo largo de todo el curso, incluyendo sintaxis y comandos. Los manuales están disponibles para profesores calificados a través del Centro de Recursos para el Profesor de Pearson, **www.pearsonhighered/irc** y MyMathLab.

SITIO WEB www.pearsoneducacion.net/thomas

El sitio Web de *Cálculo de Thomas* contiene el capítulo sobre ecuaciones de segundo orden, incluyendo las respuestas a problemas de número impar; además, presenta las biografías históricas ampliadas y los ensayos a que hace referencia el texto. También está disponible una colección de módulos en *Maple* y *Mathematica*, así como los **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden usarse como proyectos para los alumnos, ya sea que trabajen de manera individual o por grupos.

Curso en línea con MyMathLab (se requiere un código de acceso)

MyMathLab es un curso en línea específico del texto y fácil de personalizar que integra instrucciones interactivas de multimedios con contenido del texto. MyMathLab da al profesor las herramientas que necesita para poner todo su curso o una parte de éste en línea, si sus alumnos están en un laboratorio o bien trabajan en su casa.

- **Ejercicios interactivos**, correlacionados con el libro de texto en el nivel de objetivos, se generan de manera algorítmica para práctica y dominio ilimitados. La mayoría de los ejercicios son de respuesta abierta y presentan soluciones guiadas, problemas de ejemplo y apoyo al aprendizaje para ayuda adicional.
- **Capítulo "Cómo prepararse":** incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda.
- **Plan de estudio personalizado**, generado cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vínculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensión y desempeño.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensión y desempeño.
- **Administrador de evaluaciones:** permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en línea, que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor.
- **Libro de calificaciones:** diseñado específicamente para matemáticas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones.
- **Diseñador de ejercicios MathXL:** permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en línea. El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio.

MyMathLab es activado por CourseCompassTM, entornos de enseñanza y aprendizaje de Pearson Educación, y por MathXL, nuestro sistema en línea de tareas, tutoriales y trabajos. MyMathLab está disponible para maestros calificados que adopten el texto. Para mayor información, comuníquese con su representante de ventas local de Pearson.

Video clases con captura opcional

Las presentaciones de las clases incluyen ejemplos y ejercicios del texto, además de que apoyan un enfoque que enfatiza la visualización y la resolución de problemas. Está disponible por medio de MyMathLab y MathXL.

Cursos en línea con MathXL (se requiere código de acceso)

MathXL es un sistema en línea para tareas, tutoría y asignación de trabajos que acompaña a libros de texto en matemáticas y estadística de Pearson.

- **Ejercicios interactivos**, correlacionados con el libro de texto en el nivel de objetivos; se generan de manera algorítmica para práctica y dominio ilimitados. La mayoría de los ejercicios son de respuesta abierta y ofrecen soluciones guiadas, problemas de ejemplo y apoyo al aprendizaje para ayuda adicional.
- **Capítulo "Cómo prepararse":** incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda.
- **Plan de estudio personalizado:** se genera cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; además, indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vínculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensión y desempeño.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensión y desempeño.

- **Libro de calificaciones:** diseñado específicamente para matemáticas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones.
- **Diseñador de ejercicios MathXL:** permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en línea. El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio.
- **Administrador de evaluaciones:** permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en línea que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor.

MathXL está disponible para profesores calificados que adopten el libro. Para mayor información, comuníquese con su representante de ventas local de Pearson.

TestGen®

TestGen permite a los maestros construir, editar, imprimir y administrar exámenes utilizando un banco de preguntas computarizado, el cual fue desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene como base un algoritmo que permite a los profesores crear múltiples versiones, aunque equivalentes, de la misma pregunta o examen con tan sólo hacer clic en un botón. Los profesores también pueden modificar las preguntas del banco respectivo o agregar nuevas preguntas. Es posible imprimir los exámenes o administrarlos en línea.

Diapositivas de clases en PowerPoint®

Estas diapositivas de presentaciones de clases fueron diseñadas específicamente para la secuencia y filosofía de la serie de *Cálculo de Thomas*. Se incluyen gráficas clave del libro para ayudar a hacer vívidos los conceptos en el salón de clases.

Manual de soluciones para el profesor

El *Manual de soluciones para el profesor*, de William Ardis, Collin County Community College, contiene soluciones completamente desarrolladas de todos los ejercicios del texto.

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a las personas que hicieron muchas e invaluables contribuciones a esta edición conforme se desarrollaba en sus diferentes etapas:

Revisores

Blaise DeSesa
Paul Lorczak
Kathleen Pellissier
Lauri Semarne
Sarah Streett
Holly Zullo

Revisores de la decimosegunda edición

Meighan Dillon, *Southern Polytechnic State University*
Anne Dougherty, *University of Colorado*
Said Fariabi, *San Antonio College*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Tim Flood, *Pittsburg State University*
Rick Ford, *California State University, Chico*
Robert Gardner, *East Tennessee State University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Joshua Brandon Holden, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Alexander Hulpke, *Colorado State University*
Jacqueline Jensen, *Sam Houston State University*
Jennifer M. Johnson, *Princeton University*
Hideaki Kaneko, *Old Dominion University*
Przemo Kranz, *University of Mississippi*
Xin Li, *University of Central Florida*
Maura Mast, *University of Massachusetts, Boston*
Val Mohanakumar, *Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus*
Aaron Montgomery, *Central Washington University*
Cynthia Piez, *University of Idaho*
Brooke Quinlan, *Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus*
Rebecca A. Segal, *Virginia Commonwealth University*
Andrew V. Sills, *Georgia Southern University*
Alex Smith, *University of Wisconsin, Eau Claire*
Mark A. Smith, *Miami University*
Donald Solomon, *University of Wisconsin, Milwaukee*
Blake Thornton, *Washington University in St. Louis*
David Walnut, *George Mason University*
Adrian Wilson, *University of Montevallo*
Bobby Winters, *Pittsburg State University*
Dennis Wortman, *University of Massachusetts, Boston*

1
FUNCIONES

INTRODUCCIÓN Las funciones son fundamentales en el estudio del cálculo. En este capítulo repasamos lo que son las funciones, cómo se dibujan sus gráficas, cómo se combinan y se transforman, así como las formas en las que se pueden clasificar. Además, revisamos las funciones trigonométricas y analizamos las representaciones erróneas que pueden ocurrir cuando se utilizan calculadoras o computadoras para obtener la gráfica de una función. En los apéndices se revisa el sistema de los números reales, así como las coordenadas cartesianas, las líneas rectas, las parábolas y las circunferencias. En el capítulo 7 se tratan las funciones inversas, exponenciales y logarítmicas.

1.1 Las funciones y sus gráficas

Las funciones son una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos. Una función puede representarse mediante una ecuación, una gráfica, una tabla numérica o mediante una descripción verbal; a lo largo de este texto utilizaremos las cuatro representaciones. Esta sección revisa tales ideas de función.

Funciones: Dominio y rango

La temperatura a la cual hierve el agua depende de la altitud sobre el nivel del mar (el punto de ebullición es más bajo conforme se asciende). El interés que se paga por una inversión depende del tiempo que ésta se conserve. El área de un círculo depende de su radio. La distancia que recorre un objeto a una rapidez constante a lo largo de una trayectoria recta depende del tiempo transcurrido.

En cada caso, el valor de una cantidad variable, digamos y, depende del valor de otra cantidad variable, que podríamos llamar x. Decimos que "y es una función de x", lo que en forma simbólica escribimos como

$$y = f(x) \qquad (\text{“}y \text{ es igual a } f \text{ de } x\text{”}).$$

En esta notación, el símbolo f representa a la función, la letra x es la **variable independiente** que representa el valor de entrada de f, mientras que y es la **variable dependiente** o variable de salida de f en x.

> **DEFINICIÓN** Una **función** f de un conjunto D a un conjunto Y es una regla que asigna a cada elemento $x \in D$ un solo o *único* elemento $f(x) \in Y$.

El conjunto D de todos los valores posibles de entrada se denomina **dominio** de la función. El conjunto de todos los valores de $f(x)$ cuando x varía por todos los valores de D se denomina **rango** de la función. El rango podría no incluir a todos los elementos del conjunto Y. El dominio y el rango de una función pueden ser cualquier conjunto de objetos, aunque en cálculo con frecuencia se trata de conjuntos de números reales, los cuales se interpretan como puntos de una recta coordenada. (En los capítulos 13 a 16 encontraremos funciones para las que los elementos son puntos en el plano coordenado o en el espacio).

Con frecuencia una función se expresa mediante una fórmula que describe cómo calcular el valor de salida a partir de la variable de entrada. Por ejemplo, la ecuación $A = \pi r^2$ es una regla que permite calcular el área A de un círculo de radio r (así, r se interpreta como una longitud, que en esta fórmula sólo puede ser positiva). Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y, el llamado **dominio natural**. Si de alguna manera queremos restringir el dominio, debemos establecerlo. El dominio de $y = x^2$ es todo el conjunto de los números reales. Para restringir el dominio de la función, digamos a valores positivos para x, escribiríamos "$y = x^2, x > 0$".

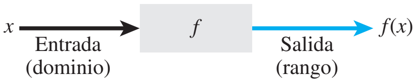


FIGURA 1.1 Diagrama que muestra una función como una especie de máquina.

Por lo regular, al cambiar el dominio para el que aplicamos una fórmula, se modifica también el rango. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$. El rango de $y = x^2, x \geq 2$, es el conjunto de todos los números reales que se obtienen al elevar al cuadrado números mayores o iguales a 2. En la notación de conjuntos (véase el apéndice 1), el rango es $\{x^2 | x \geq 2\}$ o $\{y | y \geq 4\}$ o $[4, \infty)$.

Cuando el rango de una función es un subconjunto de números reales, se dice que la función tiene **valores reales** (o que es real valuada). Los dominios y rangos de muchas funciones con valores reales de una variable real son intervalos o combinaciones de intervalos. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados y semiabiertos, así como finitos o infinitos. El rango de una función no siempre es sencillo de determinar.

Una función f es como una máquina que produce el valor de salida $f(x)$ en su rango, siempre que le demos el valor de entrada x de su dominio (figura 1.1). Las teclas de funciones en una calculadora ofrecen un ejemplo de una función vista como una máquina. Por ejemplo, la tecla $\sqrt{x}$ en una calculadora da el valor de salida (la raíz cuadrada) siempre que se introduce un número no negativo x y se presiona la tecla $\sqrt{x}$.

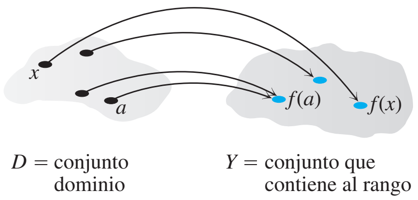


FIGURA 1.2 Una función del conjunto D a un conjunto Y asigna un único elemento de Y a cada elemento en D.

Una función también se puede representar como un **diagrama de flechas** (figura 1.2). Cada flecha asocia un elemento del dominio D con un único elemento en el conjunto Y. En la figura 1.2 las flechas indican que $f(a)$ está asociada con a, $f(x)$ está asociada con x y así sucesivamente. Observe que una función puede tener el mismo *valor* en dos elementos de entrada diferentes en el dominio [como ocurre con $f(a)$ en la figura 1.2], pero a cada elemento de entrada x se le asigna un *solo* valor de salida $f(x)$.

EJEMPLO 1 Verifique los dominios naturales y los rangos asociados de algunas funciones sencillas. En cada caso, los dominios son los valores de x para los que la fórmula tiene sentido.

Función	**Dominio (x)**	**Rango (y)**
$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = 1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

Solución La fórmula $y = x^2$ da un valor real y para cualquier número real x, así que el dominio es $(-\infty, \infty)$. El rango de $y = x^2$ es $[0, \infty)$, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo y todo número no negativo y es el cuadrado de su raíz cuadrada, $y = \left(\sqrt{y}\right)^2$ para $y \geq 0$.

La fórmula $y = 1/x$ será un valor real y para toda x, excepto para $x = 0$. De acuerdo con las reglas aritméticas, *no podemos dividir un número entre cero*. El rango de $y = 1/x$, el conjunto de los recíprocos de todos los números reales distintos de cero, es precisamente el conjunto de todos los números reales distintos de cero, ya que $y = 1/(1/y)$. Esto es, para $y \neq 0$, el número $x = 1/y$ es la entrada asignada al valor de salida y.

La fórmula $y = \sqrt{x}$ da un valor real de y sólo si $x \geq 0$. El rango de $y = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$, porque cada número no negativo es la raíz cuadrada de algún número (es decir, es la raíz cuadrada de su propio cuadrado).

En $y = \sqrt{4 - x}$ la cantidad $4 - x$ no puede ser negativa. Es decir, $4 - x \geq 0$ o $x \leq 4$. La fórmula da valores reales de y para todas las $x \leq 4$. El rango de $\sqrt{4 - x}$ es $[0, \infty)$, el conjunto de todos los números no negativos.

La fórmula $y = \sqrt{1 - x^2}$ da un valor real de y para toda x en el intervalo cerrado de -1 a 1. Fuera de este dominio, $1 - x^2$ es negativo y su raíz cuadrada no es un número real. Los valores de $1 - x^2$ y sus raíces varían de 0 a 1 en el dominio dado. El rango de $\sqrt{1 - x^2}$ es [0, 1]. ■

Gráficas de funciones

Si f es una función con dominio D, su **gráfica** consiste en los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son las parejas de entrada-salida de f. En notación de conjuntos, la gráfica es

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

La gráfica de la función $f(x) = x + 2$ es el conjunto de puntos con coordenadas (x, y) para los que $y = x + 2$. Su gráfica es la línea recta que se bosqueja en la figura 1.3.

La gráfica de una función f es una representación útil de su comportamiento. Si (x, y) es un punto en la gráfica, entonces $y = f(x)$ es la altura de la gráfica en el punto x. La altura puede ser positiva, negativa o cero, lo cual depende del valor de $f(x)$ (figura 1.4).

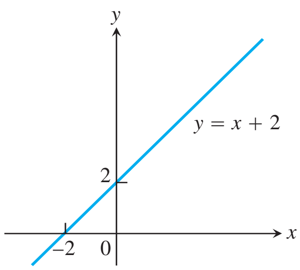


FIGURA 1.3 La gráfica de $f(x) = x + 2$ es el conjunto de puntos (x, y) para los cuales y tiene el valor $x + 2$.

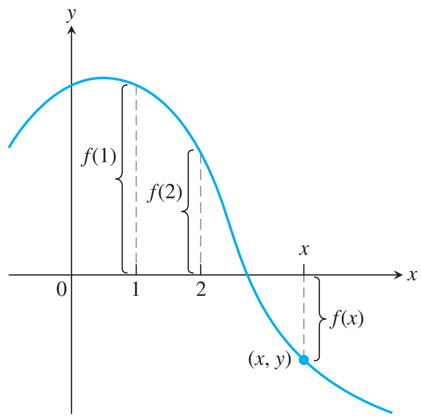


FIGURA 1.4 Si (x, y) pertenece a la gráfica de f, entonces el valor de $y = f(x)$ es la altura de la gráfica arriba de x (o abajo de x si $f(x)$ es negativa).

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de la función $y = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución Elabore una tabla de parejas xy que satisfagan la ecuación $y = x^2$. Trace los puntos (x, y) cuyas coordenadas aparecen en la tabla y dibuje una curva *suave* por los puntos trazados (rotule la curva con su ecuación) (véase la figura 1.5). ■

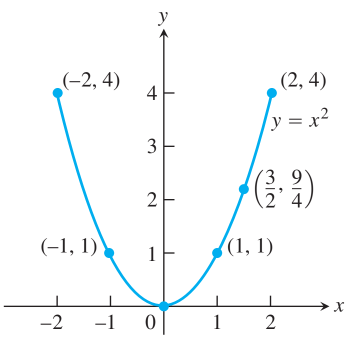
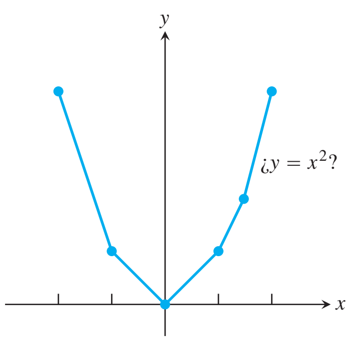
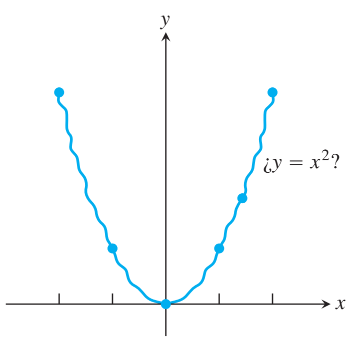


FIGURA 1.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2.

¿Cómo sabemos que la gráfica de $y = x^2$ no será como una de estas curvas?





Para averiguarlo, podríamos tabular más puntos. Pero, ¿cómo los conectamos? La pregunta original se sostiene: ¿de qué manera sabremos con certeza cuál es el aspecto de la gráfica entre los puntos que tabulamos? El cálculo responde esta pregunta, como veremos en el capítulo 4. Mientras tanto, nos conformaremos con tabular puntos y conectarlos lo mejor que sea posible.

Representación en forma numérica de una función

Vimos cómo puede representarse una función de forma algebraica mediante una fórmula (la función del área de un círculo) y visualmente mediante una gráfica (ejemplo 2). Otra manera de hacerlo es en **forma numérica** por medio de una tabla de valores. Los ingenieros y científicos con frecuencia utilizan las representaciones numéricas. Con una adecuada tabla de valores, se obtiene la gráfica de una función al aplicar el método que se ilustró en el ejemplo 2, posiblemente con ayuda de una computadora. La gráfica que consiste en sólo los puntos de la tabla se denomina **diagrama de dispersión**.

EJEMPLO 3 Las notas musicales son ondas de presión en el aire. Los datos en la tabla 1.1 indican la variación de presión registrada contra el tiempo en segundos de una nota musical producida por un diapasón. La tabla es una representación de la función de presión a lo largo del tiempo. Si primero trazamos un diagrama de dispersión y luego conectamos los puntos (t, p) de la tabla, obtendremos la gráfica que se muestra en la figura 1.6.

TABLA 1.1 Datos del diapasón

Tiempo	Presión	Tiempo	Presión
0.00091	−0.080	0.00362	0.217
0.00108	0.200	0.00379	0.480
0.00125	0.480	0.00398	0.681
0.00144	0.693	0.00416	0.810
0.00162	0.816	0.00435	0.827
0.00180	0.844	0.00453	0.749
0.00198	0.771	0.00471	0.581
0.00216	0.603	0.00489	0.346
0.00234	0.368	0.00507	0.077
0.00253	0.099	0.00525	−0.164
0.00271	−0.141	0.00543	−0.320
0.00289	−0.309	0.00562	−0.354
0.00307	−0.348	0.00579	−0.248
0.00325	−0.248	0.00598	−0.035
0.00344	−0.041		

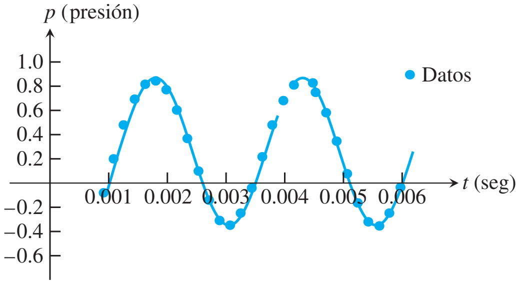


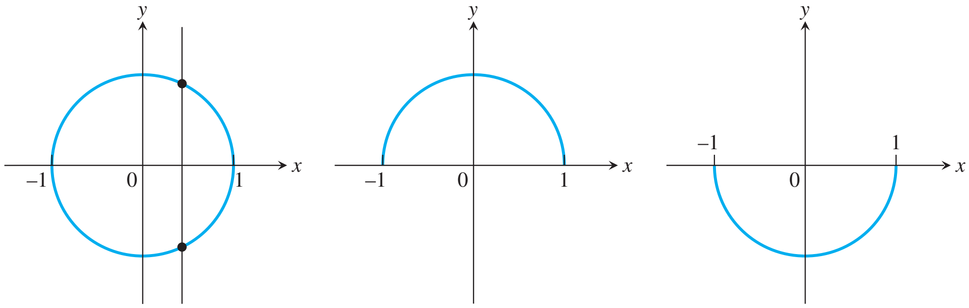
FIGURA 1.6 La curva suave que pasa por los puntos trazados según la tabla 1.1 forma una gráfica que representa a la función de presión (ejemplo 3).

■

La prueba de la recta vertical para una función

No cualquier curva en el plano coordenado puede ser la gráfica de una función. Una función f sólo puede tener un valor $f(x)$ para cada x en su dominio, por lo que *ninguna recta vertical* interseca más de una vez a la gráfica de una función. Si a está en el dominio de la función f, entonces la recta vertical $x = a$ intersecará a la gráfica de f en un único punto $(a, f(a))$.

Una circunferencia no puede ser la gráfica de una función, ya que algunas rectas verticales intersecan a la circunferencia dos veces. Sin embargo, la circunferencia en la figura 1.7a contiene las gráficas de dos funciones de x: la semicircunferencia superior, definida mediante la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y la semicircunferencia inferior definida mediante la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (figuras 1.7b y 1.7c).



(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1 - x^2}$

FIGURA 1.7 (a) La circunferencia no es la gráfica de una función; no satisface el criterio de la recta vertical. (b) La semicircunferencia superior es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (c) La semicircunferencia inferior es la gráfica de la función $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

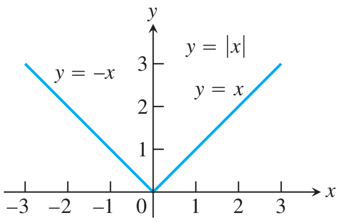


FIGURA 1.8 La función valor absoluto tiene dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $[0, \infty)$.

Funciones definidas por partes

A veces una función se describe mediante el uso de fórmulas diferentes en distintas partes de su dominio. Un ejemplo es la función **valor absoluto**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

cuya gráfica se observa en la figura 1.8. El lado derecho de la ecuación significa que la función es igual a x si $x \geq 0$, e igual a $-x$ si $x < 0$. A continuación veremos algunos otros ejemplos.

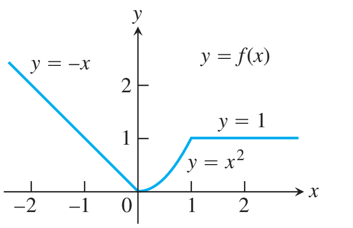


FIGURA 1.9 Para graficar la función $y = f(x)$, que se muestra aquí, aplicamos fórmulas diferentes a las distintas partes del dominio (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La función

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

está definida en toda la recta real, pero sus valores están dados por distintas fórmulas, lo cual depende de la posición de x. Los valores de f están dados por $y = -x$, cuando $x < 0$, por $y = x^2$ cuando $0 \leq x \leq 1$, y por $y = 1$ cuando $x > 1$. Sin embargo, la función es *simplemente una función* cuyo dominio es todo el conjunto de los números reales (figura 1.9). ■

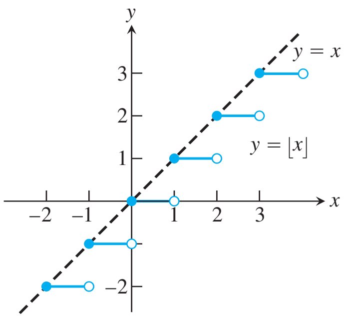


FIGURA 1.10 La gráfica de la función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ está sobre o debajo de la recta $y = x$, por lo que proveé un piso entero para x (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La función cuyo valor en cualquier número x es el *mayor entero menor o igual a x* se denomina **función mayor entero** o **función piso entero**. Se denota $\lfloor x \rfloor$. La figura 1.10 muestra la gráfica. Observe que

$$\begin{aligned} &\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad &&\lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad &&\lfloor 0 \rfloor = 0, \quad &&\lfloor -1.2 \rfloor = -2, \\ &\lfloor 2 \rfloor = 2, &&\lfloor 0.2 \rfloor = 0, &&\lfloor -0.3 \rfloor = -1 &&\lfloor -2 \rfloor = -2. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 6 La función cuyo valor en cualquier número x es el *menor entero mayor o igual a x* se conoce como **función menor entero** o **función techo entero**. Se denota $\lceil x \rceil$. La figura 1.11 muestra la gráfica. Para valores positivos de x, esta función podría representar, por ejemplo, el costo de permanecer x horas en un estacionamiento que cobra $1 por cada hora o fracción de una hora. ■

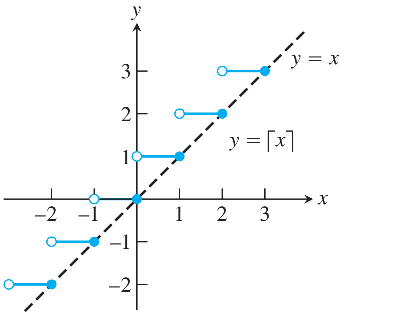


FIGURA 1.11 La gráfica de la función menor entero $y = \lceil x \rceil$ está sobre o arriba de la recta $y = x$, por lo que proporciona un techo entero para x (ejemplo 6).

Funciones crecientes y decrecientes

Si la gráfica de una función *asciende* o *sube* cuando usted se mueve de izquierda a derecha, consideramos que la función es *creciente*. Si la gráfica *desciende* o *baja* cuando se mueve de izquierda a derecha, la función es *decreciente*.

> **DEFINICIONES** Sea f una función definida en un intervalo I y sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos en I.
>
> **1.** Si $f(x_2) > f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **creciente** en I.
>
> **2.** Si $f(x_2) < f(x_1)$, siempre que $x_1 < x_2$, entonces se dice que f es **decreciente** en I.

Es importante notar que las definiciones de funciones crecientes y decrecientes deben satisfacerse para *toda* pareja de puntos x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$. Puesto que utilizamos la desigualdad $<$ para comparar los valores de la función, en lugar de $\leq$, en ocasiones se dice que f es *estrictamente* creciente o decreciente en I. El intervalo I puede ser finito (también se le llama acotado) o infinito (no acotado) y, por definición, el intervalo nunca puede consistir de un solo punto (apéndice 1).

EJEMPLO 7 La función que se graficó en la figura 1.9 es decreciente en $(-\infty, 0]$ y es creciente en $[0, 1]$. La función no es creciente ni decreciente en el intervalo $[1, \infty)$, a consecuencia de que, en las definiciones, se utilizaron desigualdades estrictas para comparar los valores de la función. ■

Funciones pares y funciones impares: Simetría

Las gráficas de funciones *pares* y de funciones *impares* tienen las propiedades características de la simetría.

> **DEFINICIONES** Una función $y = f(x)$ es una
>
> **función par de x** si $f(-x) = f(x)$,
>
> **función impar de x** si $f(-x) = -f(x)$,
>
> para toda x en el dominio de la función.

Los nombres *par* e *impar* provienen de las potencias de x. Si y es una potencia par de x, como en $y = x^2$ o en $y = x^4$, es una función par de x, ya que $(-x)^2 = x^2$ y $(-x)^4 = x^4$. Si y es una potencia impar de x, como en $y = x$ o en $y = x^3$, es una función impar de x, porque $(-x)^1 = -x$ y $(-x)^3 = -x^3$.

La gráfica de una función par es **simétrica con respecto al eje y**. Como $f(-x) = f(x)$, el punto (x, y) está en la gráfica si y sólo si el punto $(-x, y)$ lo está (figura 1.12a). Una reflexión con respecto al eje y deja a la gráfica sin cambio.

La gráfica de una función impar es **simétrica con respecto al origen**. Como $f(-x) = -f(x)$, el punto (x, y) está en la gráfica si y sólo si el punto $(-x, -y)$ también lo está (figura 1.12b). De forma equivalente, una gráfica es simétrica con respecto al origen si una rotación de 180°, en relación con el origen, deja sin cambios a la gráfica. Observe que las definiciones implican que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f.

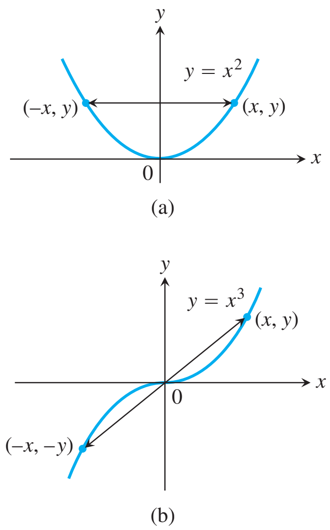


FIGURA 1.12 (a) La gráfica de $y = x^2$ (una función par) es simétrica con respecto al eje y. (b) La gráfica de $y = x^3$ (una función impar) es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 8

$f(x) = x^2$	Función par: $(-x)^2 = x^2$ para toda x; simetría con respecto al eje y.
$f(x) = x^2 + 1$	Función par: $(-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ para toda x; simetría con respecto al eje y (figura 1.13a).
$f(x) = x$	Función impar: $(-x) = -x$ para toda x; simetría con respecto al origen.
$f(x) = x + 1$	No es impar: $f(-x) = -x + 1$, pero $f(x) = -x - 1$. No son iguales. No es par: $(-x) + 1 \neq x + 1$, para toda $x \neq 0$ (figura 1.13b). ■

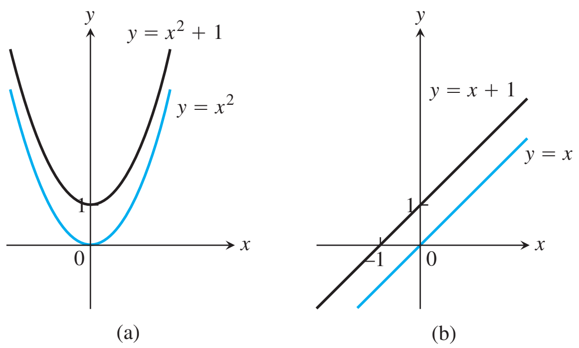


FIGURA 1.13 (a) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x^2$, la función resultante $y = x^2 + 1$ sigue siendo par y su gráfica sigue siendo simétrica con respecto al eje y. (b) Cuando sumamos el término constante 1 a la función $y = x$, la función resultante $y = x + 1$ ya no es impar. Se pierde la simetría con respecto al origen (ejemplo 8).

Funciones comunes

Con frecuencia, en cálculo aparecen una variedad de tipos importantes de funciones. Vamos a identificarlas y a describirlas brevemente.

Funciones lineales Una función de la forma $f(x) = mx + b$, para constantes m y b, se denomina **función lineal**. La figura 1.14a muestra un arreglo de rectas $f(x) = mx$ donde $b = 0$, por lo que tales rectas pasan por el origen. La función $f(x) = x$ donde $m = 1$ y $b = 0$, se denomina **función identidad**. Las funciones constantes se presentan cuando la pendiente $m = 0$ (figura 1.14b). Una función lineal con pendiente positiva cuya gráfica pasa por el origen se denomina relación de *proporcionalidad*.

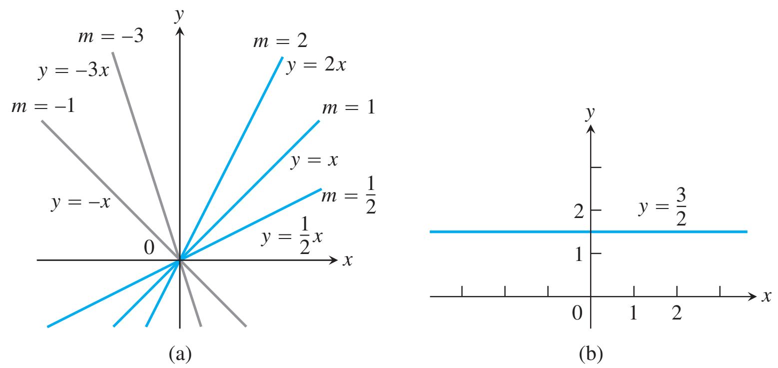


FIGURA 1.14 (a) Rectas con pendiente m que pasan por el origen. (b) Una función constante con pendiente $m = 0$.

DEFINICIÓN Dos variables y y x son **proporcionales** (una con respecto a la otra) si una siempre es un múltiplo constante de la otra; esto es, si $y = kx$ para alguna constante k distinta de cero.

Si la variable y es proporcional al recíproco $1/x$, entonces algunas veces se dice que y es **inversamente proporcional** a x (puesto que $1/x$ es el inverso multiplicativo de x).

Funciones potencia Una función $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se denomina **función potencia**. Existen varios casos importantes a considerar.

(a) $a = n$, un entero positivo.

La gráfica de $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$, se muestra en la figura 1.15. Dichas funciones están definidas para todos los valores reales de x. Observe que cuando la potencia n crece, en el intervalo $(-1, 1)$, las curvas se aplanan hacia el eje x y también crecen cada vez más rápidamente para $|x| > 1$. Cada curva pasa por el punto $(1, 1)$ y por el origen. Las gráficas de las funciones con potencia par son simétricas con respecto al eje y, mientras que aquellas con potencia impar son simétricas con respecto al origen. Las funciones con potencia par son decrecientes en el intervalo $(-\infty, 0]$ y crecientes en $[0, \infty)$, en tanto que las funciones con potencia impar son crecientes en toda la recta real $(-\infty, \infty)$.

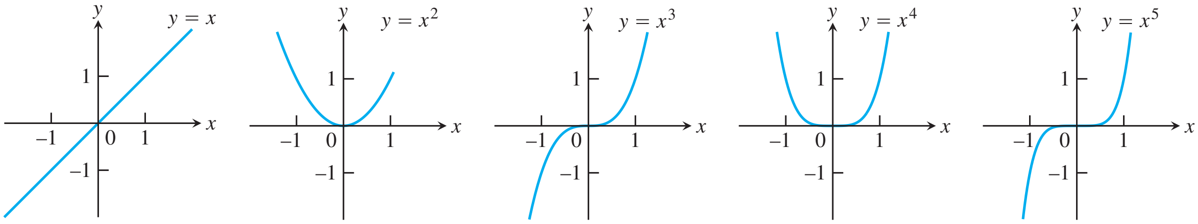


FIGURA 1.15 Gráficas de $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, definidas para $-\infty < x < \infty$.

(b) $a = -1$, o bien, $a = -2$.

Las gráficas de las funciones $f(x) = x^{-1} = 1/x$ y $g(x) = x^{-2} = 1/x^2$ se muestran en la figura 1.16. Ambas funciones están definidas para toda $x \neq 0$ (nunca se puede dividir entre cero). La gráfica de $y = 1/x$ es la hipérbola $xy = 1$, la cual tiende al eje de las abscisas cuando se aleja del origen. La gráfica de $y = 1/x^2$ también tiende al eje de las abscisas. La gráfica de la función f es simétrica con respecto al origen; f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y también en el intervalo $(0, \infty)$. La gráfica de la función g es simétrica con respecto al eje y; g es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$.

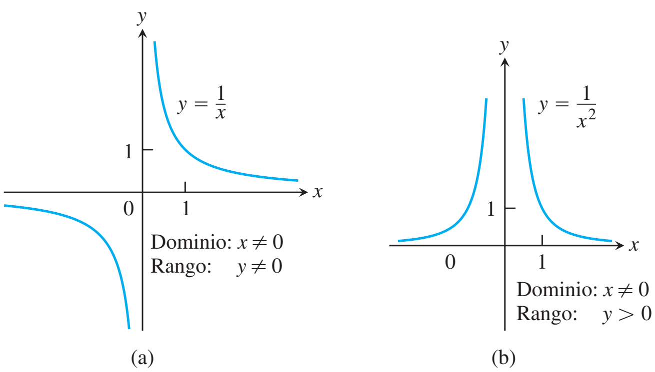


FIGURA 1.16 Gráficas de las funciones potencia $f(x) = x^a$ para el inciso (a) $a = -1$ y para el inciso (b) $a = -2$.

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Las funciones $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ son las funciones **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente. El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, \infty)$, pero la función raíz cúbica está definida para todo real x. Sus gráficas se muestran en la figura 1.17 junto con las gráficas de $y = x^{3/2}$ y $y = x^{2/3}$. (Recuerde que $x^{3/2} = (x^{1/2})^3$ y $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$).

Funciones polinomiales Una función p es **polinomial** si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo, y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales (denominados **coeficientes** del polinomio). Todos los polinomios tienen dominio $(-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$ y $n > 0$, entonces a n se le llama el **grado** del polinomio. Las fun-

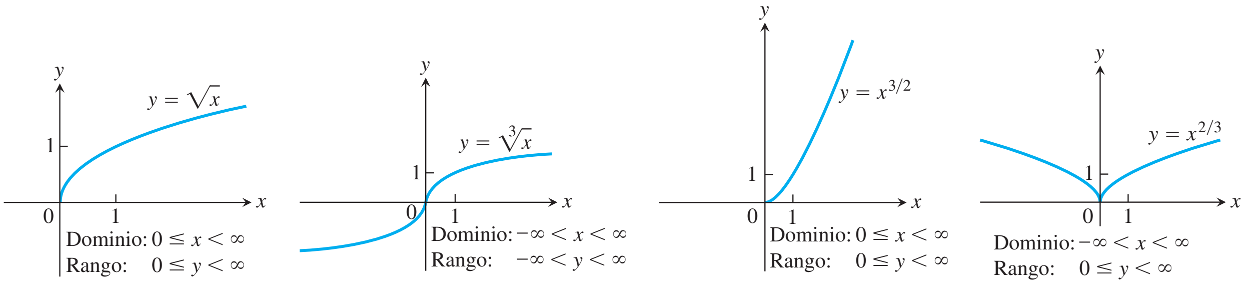


FIGURA 1.17 Gráficas de las funciones potencia $f(x) = x^a$ para $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

ciones lineales con $m \neq 0$ son polinomios de grado 1. Los polinomios de grado 2 por lo regular se escriben como $p(x) = ax^2 + bx + c$ y se conocen como **funciones cuadráticas**. De la misma forma, las **funciones cúbicas** son polinomios, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, de grado 3. La figura 1.18 muestra las gráficas de tres polinomios. En el capítulo 4 se estudian técnicas para graficar polinomios.

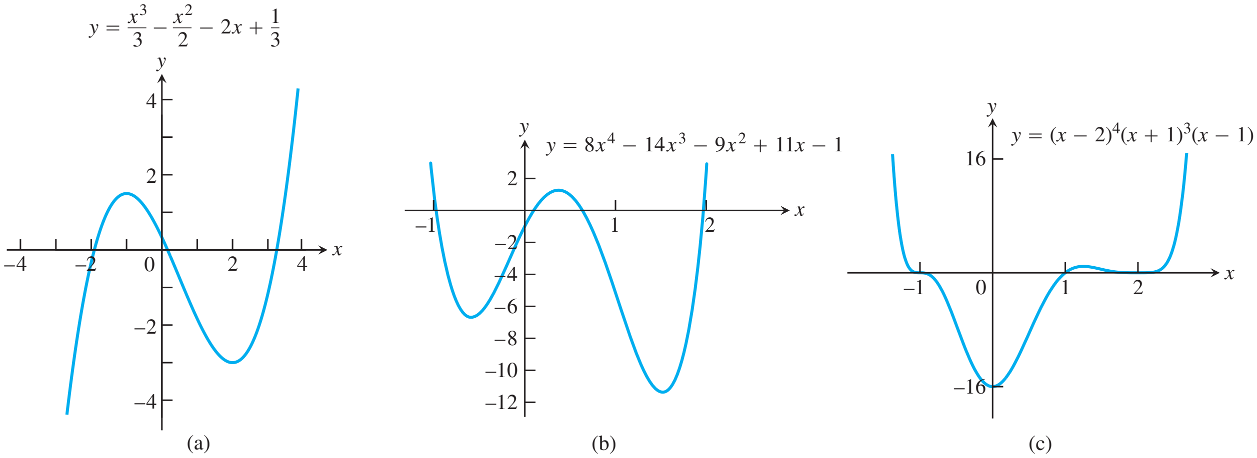


FIGURA 1.18 Gráficas de tres funciones polinomiales.

Funciones racionales Una **función racional** es un cociente o una razón $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x para los que $q(x) \neq 0$. Las gráficas de varias funciones racionales se muestran en la figura 1.19.

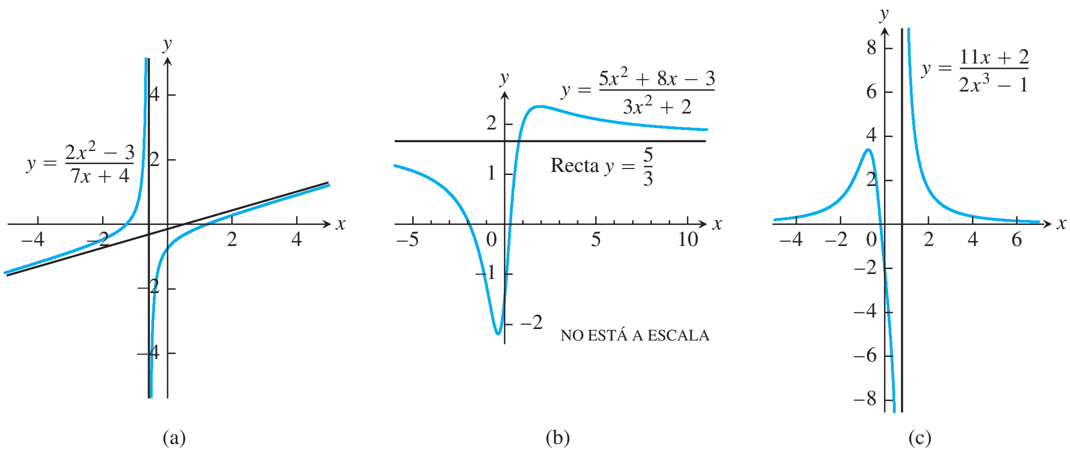


FIGURA 1.19 Gráficas de tres funciones racionales. Las líneas rectas se denominan *asíntotas* y no son parte de la gráfica.

Funciones algebraicas Cualquier función que se construyen mediante polinomios y utilizando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces) está en la clase de las **funciones algebraicas**. Todas las funciones racionales son algebraicas, pero también están incluidas funciones más complicadas (como $y^3 - 9xy + x^3 = 0$, que se estudian en la sección 3.7). La figura 1.20 muestra las gráficas de tres funciones algebraicas.

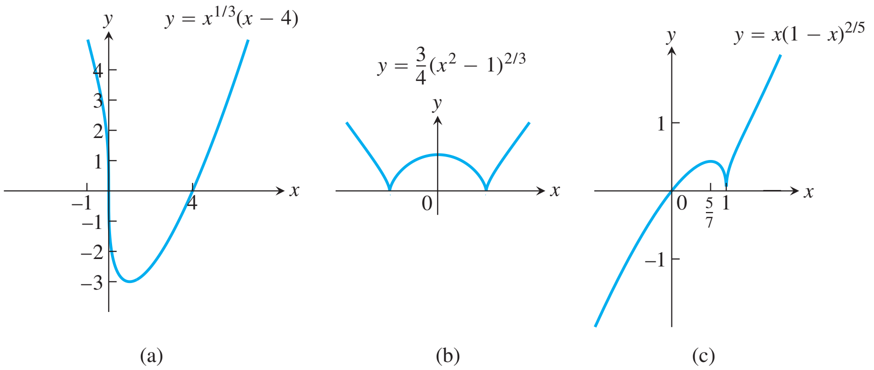


FIGURA 1.20 Gráficas de tres funciones algebraicas.

Funciones trigonométricas Las seis funciones trigonométricas básicas se revisan en la sección 1.3. Las gráficas de las funciones seno y coseno se muestran en la figura 1.21.

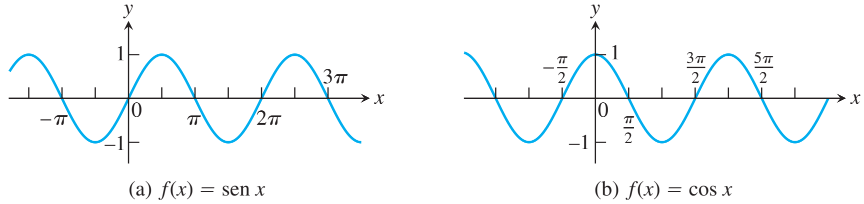


FIGURA 1.21 Gráficas de las funciones seno y coseno.

Funciones exponenciales Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base $a > 0$ es una constante positiva y $a \neq 1$, se denominan **funciones exponenciales**. Todas las funciones exponenciales tienen dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$, de manera que una función exponencial nunca toma el valor 0. En la sección 7.3 estudiaremos las funciones exponenciales. Las gráficas de algunas funciones exponenciales se muestran en la figura 1.22.

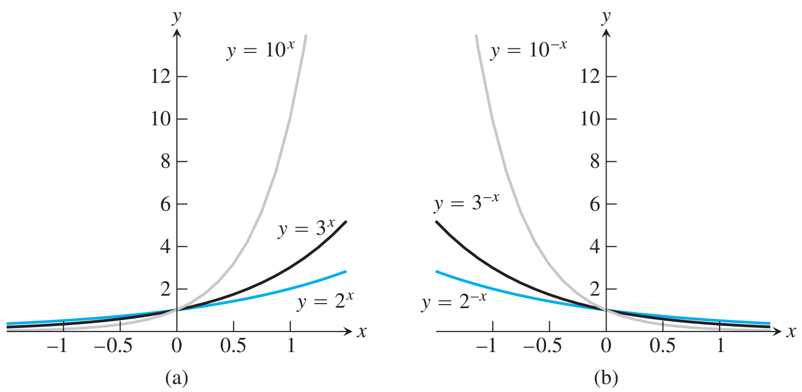


FIGURA 1.22 Gráficas de funciones exponenciales.

Funciones logarítmicas Éstas son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base $a \neq 1$ es una constante positiva. Las *funciones inversas* de las funciones exponenciales y el cálculo de tales funciones se analizan en el capítulo 7. La figura 1.23 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso, el dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

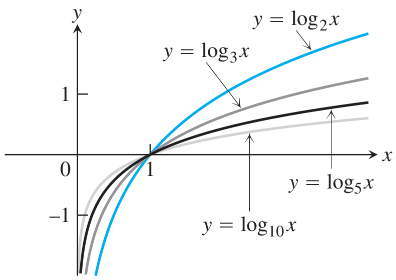


FIGURA 1.23 Gráficas de cuatro funciones logarítmicas.

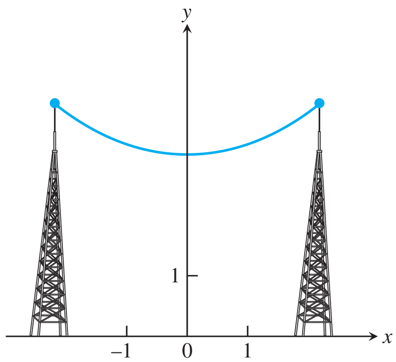


FIGURA 1.24 Gráfica de una catenaria o cable colgante. (La palabra latina *catena* significa "cadena").

Funciones trascendentales Se trata de funciones que no son algebraicas e incluyen las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas, así como muchas otras funciones. Un ejemplo particular de una función trascendental es una **catenaria**. Su gráfica tiene la forma de un cable, como el de una línea telefónica o un cable eléctrico, que cuelga libremente bajo su propio peso de un soporte a otro (figura 1.24). La función que define la gráfica se analiza en la sección 7.7.

Ejercicios 1.1

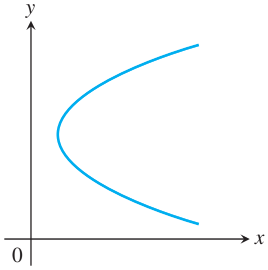
Funciones

En los ejercicios 1 a 6, determine el dominio y el rango de cada una de las funciones.

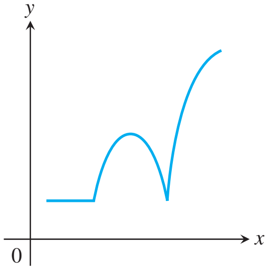
1. $f(x) = 1 + x^2$
2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$
4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$
6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

En los ejercicios 7 y 8, ¿cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

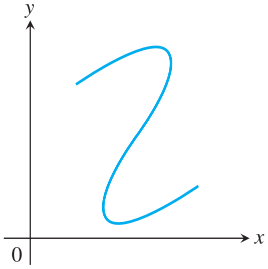
7. a.



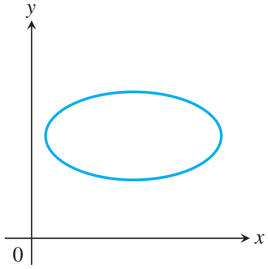
b.



8. a.



b.



Determinación de fórmulas para funciones

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

11. Exprese la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

13. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Escriba L como función de x.

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de y.

Las funciones y sus gráficas

En los ejercicios 15 a 20, determine el dominio y grafique las funciones.

15. $f(x) = 5 - 2x$ **16.** $f(x) = 1 - 2x - x^2$

17. $g(x) = \sqrt{|x|}$ **18.** $g(x) = \sqrt{-x}$

19. $F(t) = t/|t|$ **20.** $G(t) = 1/|t|$

21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x + 3}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$.

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$.

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$ **b.** $y^2 = x^2$

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|x| + |y| = 1$ **b.** $|x + y| = 1$

Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones.

25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

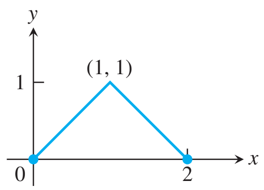
26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

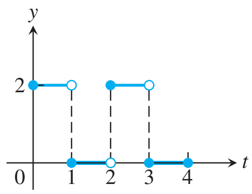
28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32.

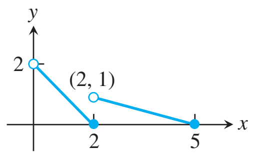
29. a.



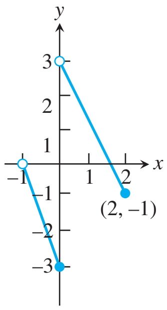
b.



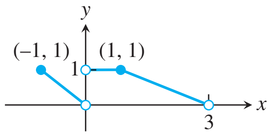
30. a.



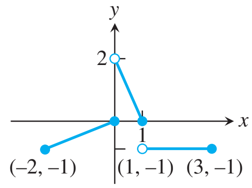
b.



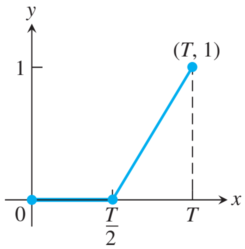
31. a.



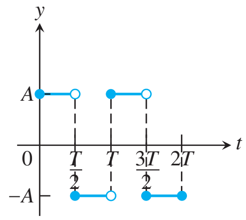
b.



32. a.



b.



Las funciones mayor entero y menor entero

33. ¿Para qué valores de x es

a. $\lfloor x \rfloor = 0$? **b.** $\lceil x \rceil = 0$?

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

35. ¿Es cierto que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para todo número real x? Justifique su respuesta.

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0. \end{cases}$$

¿Por qué $f(x)$ se denomina *parte entera* de x?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y = -x^3$ **38.** $y = -\dfrac{1}{x^2}$

39. $y = -\dfrac{1}{x}$ **40.** $y = \dfrac{1}{|x|}$

41. $y = \sqrt{|x|}$ **42.** $y = \sqrt{-x}$

43. $y = x^3/8$ **44.** $y = -4\sqrt{x}$

45. $y = -x^{3/2}$ **46.** $y = (-x)^{2/3}$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$ **48.** $f(x) = x^{-5}$

49. $f(x) = x^2 + 1$ **50.** $f(x) = x^2 + x$

51. $g(x) = x^3 + x$ **52.** $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **54.** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

55. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$ **56.** $h(t) = |t^3|$

57. $h(t) = 2t + 1$ **58.** $h(t) = 2|t| + 1$

Teoría y ejemplos

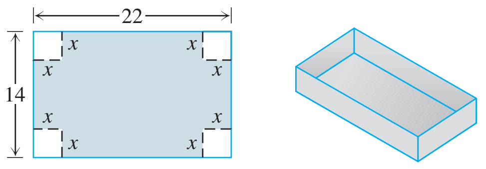
59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

60. Energía cinética La energía cinética K de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12{,}960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?

61. Las variables r y s son inversamente proporcionales, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

62. Ley de Boyle La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14.7$ lb/in^2 cuando $V = 1000$ in^3, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23.4$ lbs/in^2?

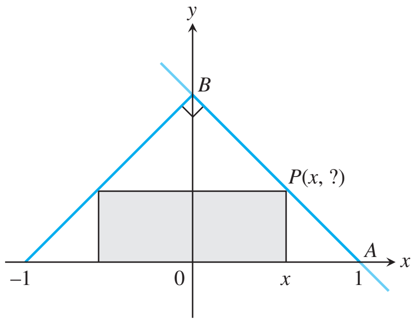
63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados, como en la figura. Exprese el volumen V de la caja como una función de x.



64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

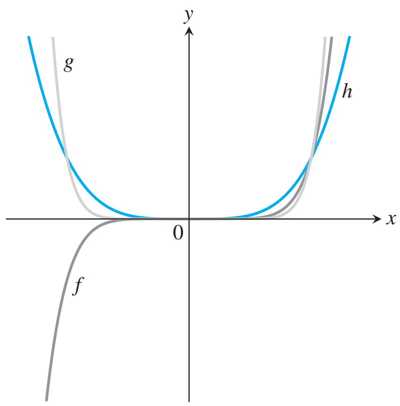
a. Exprese la coordenada y de P en términos de x. (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.

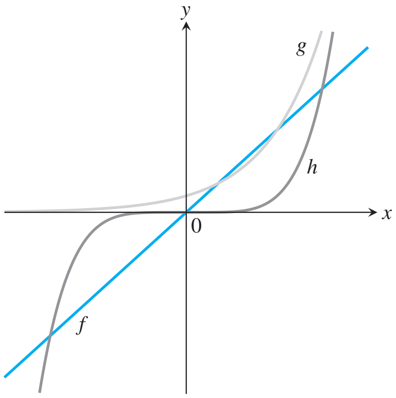


En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. a. $y = x^4$ **b.** $y = x^7$ **c.** $y = x^{10}$



66. a. $y = 5x$ **b.** $y = 5x$ **c.** $y = x^5$



T 67. a. Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}.$$

b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso *a*).

T 68. a. Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x - 1)$ y $g(x) = 2/(x + 1)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}.$$

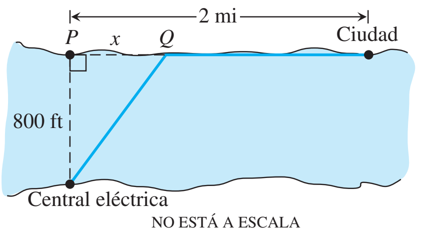
b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso *a*).

69. Para que una curva sea *simétrica con respecto al eje* x, el punto (x, y) debe estar en la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función a menos que la función sea $y = 0$.

70. Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de (300)(\$40) = \$12,000. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

71. Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de x pies (ft) e hipotenusa de longitud h ft. Si los costos de la cerca son de \$5/ft para los catetos y \$10/ft para la hipotenusa, escriba el costo total C de la construcción como una función de h.

72. Costos industriales Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de \$180 por ft que cruce el río y \$100 por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.



a. Suponga que el cable va de la planta al punto Q, en el lado opuesto, lugar que se encuentra a x ft del punto P, directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x.

b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto Q es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto P.

1.2 Combinación de funciones; traslación y cambio de tamaño de funciones

En esta sección examinaremos las principales formas en las que las funciones se combinan o transforman para obtener nuevas funciones.

Sumas, diferencias, productos y cocientes

Al igual que los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto si el denominador es cero) para obtener nuevas funciones. Si f y g son funciones, entonces para cada x que esté en el dominio tanto de f como de g (esto es, para $x \in D(f) \cap D(g)$), definimos las funciones $f + g$, $f - g$ y fg mediante las fórmulas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Observe que el signo de $+$ en el lado izquierdo de la primera ecuación representa la operación de suma de *funciones*, mientras que el signo $+$ en el lado derecho de la ecuación significa la suma de los números reales $f(x)$ y $g(x)$.

En cualquier punto de $D(f) \cap D(g)$, en el cual $g(x) \neq 0$, podemos definir también la función f/g con la fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (\text{donde } g(x) \neq 0).$$

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida para toda x en el dominio de f mediante

$$(cf)(x) = cf(x).$$

EJEMPLO 1 Las funciones definidas mediante las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{1 - x}$$

tienen dominios $D(f) = [0, \infty)$ y $D(g) = (-\infty, 1]$. Los puntos comunes a tales dominios son los puntos

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1].$$

La siguiente tabla resume las fórmulas y los dominios para diferentes combinaciones algebraicas de las dos funciones. Además, escribimos $f \cdot g$ para la función producto fg.

Función	Fórmula	Dominio
$f + g$	$(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$	$[0, 1] = D(f) \cap D(g)$
$f - g$	$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x}$	$[0, 1]$
$g - f$	$(g - f)(x) = \sqrt{1 - x} - \sqrt{x}$	$[0, 1]$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1 - x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$	$[0, 1)$ (excluido $x = 1$)
g/f	$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$	$(0, 1]$ (excluido $x = 0$)

■

La gráfica de la función $f + g$ se obtiene a partir de las gráficas de f y g, donde se suman las ordenadas $f(x)$ y $g(x)$ en cada punto $x \in D(f) \cap D(g)$, como en la figura 1.25. En la figura 1.26 se muestran las gráficas de $f + g$ y $f \cdot g$ del ejemplo 1.

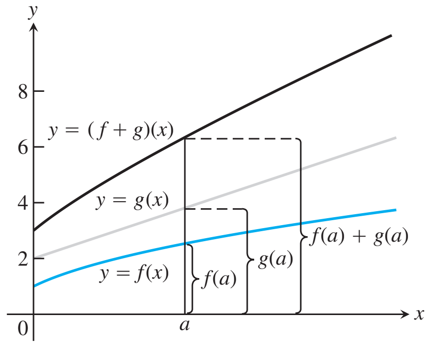


FIGURA 1.25 Suma gráfica de dos funciones.

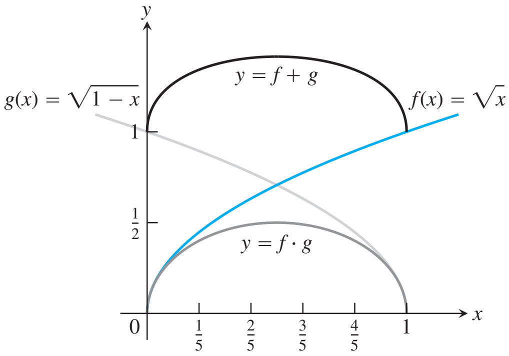


FIGURA 1.26 El dominio de la función $f + g$ es la intersección de los dominios de f y g, el intervalo $[0, 1]$ en el eje x donde estos dominios se traslapan. Además, este intervalo es el dominio de la función $f \cdot g$ (ejemplo 1).

Composición de funciones

La composición es otro método para combinar funciones.

> **DEFINICIÓN** Si f y g son funciones, la función **composición** $f \circ g$ ("f compuesta con g") se define por
>
> $$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
>
> El dominio de $f \circ g$ consiste de todos los números x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f.

La definición implica que $f \circ g$ puede formarse cuando el rango de g está en el dominio de f. Para encontrar $(f \circ g)(x)$, *primero* encontramos $g(x)$ y *después* $f(g(x))$. La figura 1.27 representa a $f \circ g$ como el diagrama de una máquina, en tanto que la figura 1.28 muestra la composición mediante un diagrama de flechas.

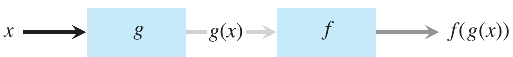


FIGURA 1.27 Dos funciones pueden componerse en x siempre que el valor de una función de x esté en el dominio de la otra. La composición se denota mediante $f \circ g$.

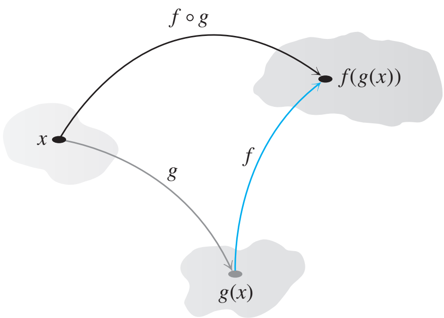


FIGURA 1.28 Diagrama de flechas para $f \circ g$.

Para evaluar la composición $g \circ f$ (cuando está definida), invertimos el orden para encontrar primero $f(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de f, tales que $f(x)$ esté en el dominio de g.

Por lo general, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son muy diferentes.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, determine

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$ **(c)** $(f \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ g)(x)$

Solución

	Composición	**Dominio**
(a)	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + 1}$	$[-1, \infty)$
(b)	$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
(c)	$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
(d)	$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

Para ver por qué el dominio de $f + g$ es $[-1, \infty)$, observe que $g(x) = x + 1$ está definida para todos los valores reales x, pero pertenece al dominio de f sólo si $x + 1 \geq 0$, es decir, si $x \geq -1$. ■

Observe que si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. Sin embargo, el dominio de $f \circ g$ es $[0, \infty)$, no $(-\infty, \infty)$, ya que $\sqrt{x}$ requiere que $x \geq 0$.

Traslación de la gráfica de una función

Una forma común para obtener una nueva función a partir de una ya existente es mediante la suma de una constante a cada salida de la función dada, o a su variable de entrada. La gráfica de la nueva función es la gráfica de la función original trasladada vertical u horizontalmente, como se indica a continuación.

Fórmulas de traslación

Traslación vertical

$y = f(x) + k$ Si $k > 0$, la gráfica de f se recorre k unidades hacia *arriba*.
Si $k < 0$, la gráfica de f se recorre $|k|$ unidades hacia *abajo*.

Traslación horizontal

$y = f(x + h)$ Si $h > 0$, la gráfica de f se recorre h unidades hacia la *izquierda*.
Si $h < 0$, la gráfica de f se recorre $|h|$ unidades hacia la *derecha*.

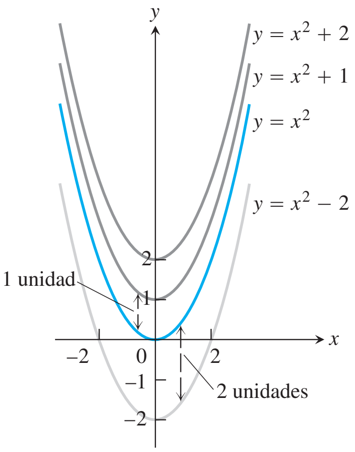


FIGURA 1.29 Para trasladar la gráfica de $f(x) = x^2$ hacia arriba (o hacia abajo) sumamos constantes positivas (o negativas) a la fórmula para f (ejemplos 3*a* y *b*).

EJEMPLO 3

(a) Sumar 1 al lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 + 1$ traslada la gráfica una unidad hacia arriba (figura 1.29).

(b) Sumar -2 al lado derecho de la fórmula $y = x^2$ para obtener $y = x^2 - 2$, traslada la gráfica dos unidades hacia abajo (figura 1.29).

(c) Sumar 3 a x en $y = x^2$ para obtener $y = (x + 3)^2$, traslada la gráfica 3 unidades a la izquierda (figura 1.30).

(d) Sumar -2 a x en $y = |x|$ y luego sumar -1 al resultado da $y = |x - 2| - 1$ y traslada la gráfica 2 unidades a la derecha y una unidad hacia abajo (figura 1.31). ■

Cambio de tamaño y reflexión de la gráfica de una función

Cambiar el tamaño de la gráfica de una función $y = f(x)$ es alargarla o comprimirla, vertical u horizontalmente. Lo anterior se realiza mediante la multiplicación de la función f, o la variable independiente x, por una constante apropiada c. Las reflexiones con respecto a los ejes coordenados son casos especiales donde $c = -1$.

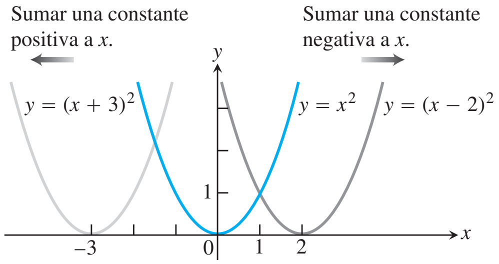


FIGURA 1.30 Para trasladar la gráfica de $y = x^2$ hacia la izquierda sumamos una constante positiva a x (ejemplo 3c). Para desplazar la gráfica a la derecha, sumamos una constante negativa a x.

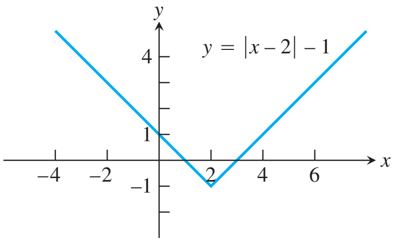


FIGURA 1.31 Traslación de la gráfica de $y = |x|$, 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo (ejemplo 3d).

Fórmulas para cambiar la escala vertical u horizontal y la reflexión de una gráfica

Para $c > 1$, la gráfica modifica su escala:

$y = cf(x)$	Alarga la gráfica de f verticalmente en un factor de c.
$y = \frac{1}{c} f(x)$	Comprime la gráfica de f verticalmente en un factor de c.
$y = f(cx)$	Comprime horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.
$y = f(x/c)$	Alarga horizontalmente la gráfica de f por un factor de c.

Para $c = -1$, la gráfica de f se refleja:

$y = -f(x)$	con respecto al eje x.
$y = f(-x)$	con respecto al eje y.

EJEMPLO 4 En este ejemplo cambiamos el tamaño y reflejamos la gráfica de $y = \sqrt{x}$.

(a) **Cambio vertical:** Al multiplicar el lado derecho de $y = \sqrt{x}$ por 3 para obtener $y = 3\sqrt{x}$, la gráfica se alarga verticalmente en un factor de 3, mientras que al multiplicar por $1/3$ se comprime en un factor de 3 (figura 1.32).

(b) **Cambio horizontal:** La gráfica de $y = \sqrt{3x}$ es una compresión horizontal de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 y $y = \sqrt{x/3}$ es un alargamiento horizontal por un factor de 3 (figura 1.33). Observe que $y = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ por lo que una compresión horizontal *podría* corresponder a un alargamiento vertical por un factor de escala diferente. Del mismo modo, un alargamiento horizontal podría corresponder a una compresión vertical de un factor de escala diferente.

(c) **Reflexión:** La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es una reflexión de $y = \sqrt{x}$ con respecto al eje x y $y = \sqrt{-x}$ es una reflexión con respecto al eje y (figura 1.34). ■

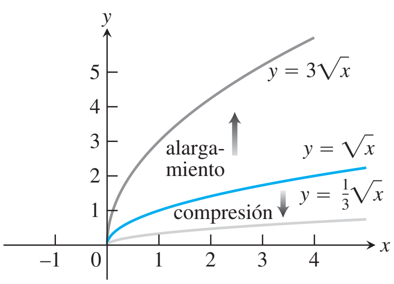


FIGURA 1.32 Alargamiento y compresión vertical de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 4a).

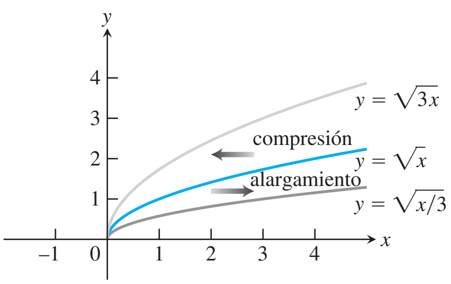


FIGURA 1.33 Alargamiento y compresión horizontal de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ por un factor de 3 (ejemplo 4b).

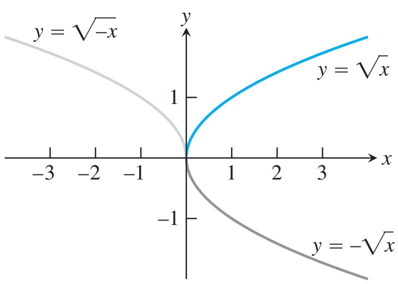


FIGURA 1.34 Reflexiones de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ con respecto a los ejes de coordenadas (ejemplo 4c).

EJEMPLO 5 Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (figura 1.35a), determine fórmulas para

(a) comprimir la gráfica horizontalmente por un factor de 2, seguida por una reflexión con respecto al eje y (figura 1.35b).

(b) comprimir la gráfica verticalmente por un factor de 2, seguida por una reflexión con respecto al eje x (figura 1.35c).

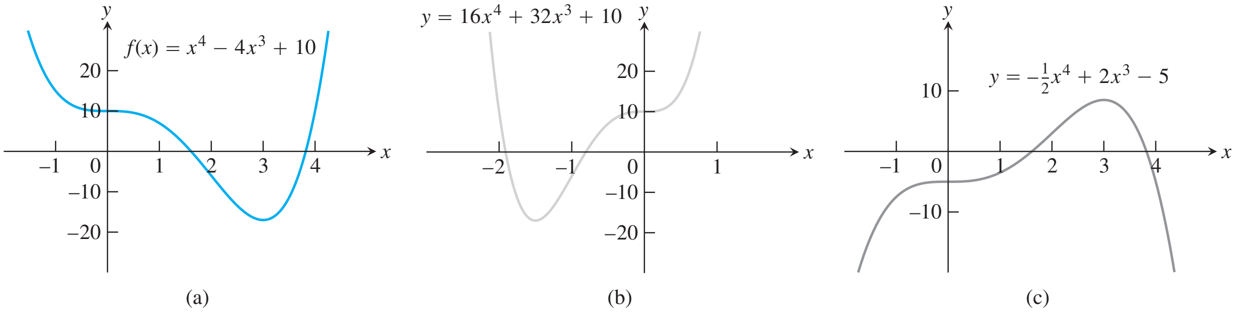


FIGURA 1.35 (a) Gráfica original de f. (b) Compresión horizontal por un factor de 2 de $y = f(x)$ del inciso (a), seguida por una reflexión con respecto al eje y. (c) Compresión vertical por un factor de 2 de $y = f(x)$ del inciso (a), seguida por una reflexión con respecto al eje x (ejemplo 5).

Solución

(a) Multiplicamos x por 2 para obtener la compresión horizontal y por -1 para dar la reflexión con respecto al eje y. La fórmula que se obtiene al sustituir x con $-2x$, en el lado derecho de la ecuación para f, es:

$$\begin{aligned} y = f(-2x) &= (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 \\ &= 16x^4 + 32x^3 + 10 \end{aligned}$$

(b) La fórmula es

$$y = -\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 5.$$

Elipses

Aunque no son gráficas de funciones, las circunferencias pueden estirarse o comprimirse, tanto horizontal como verticalmente, de la misma forma que las gráficas de las funciones. La ecuación estándar para una circunferencia con radio r y centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Al sustituir x por cx, en la ecuación estándar para una circunferencia (figura 1.36a), se obtiene

$$c^2x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

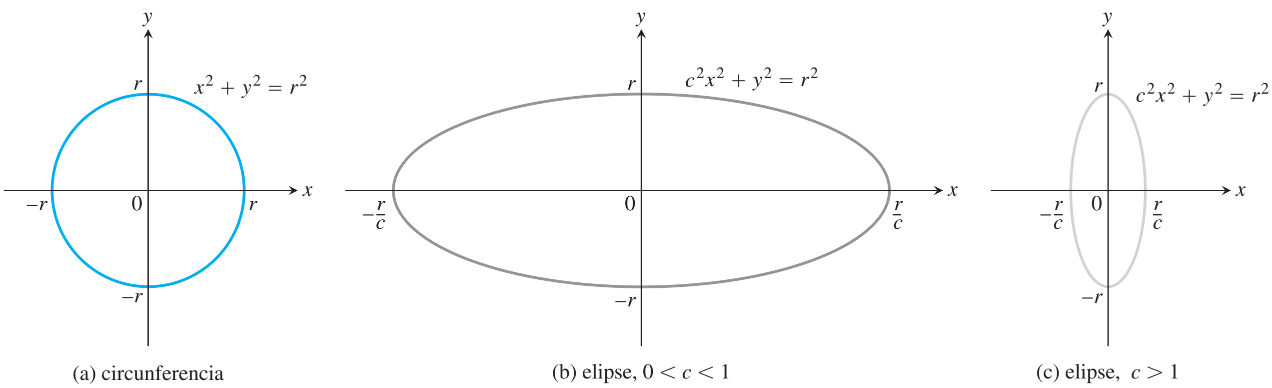


FIGURA 1.36 El alargamiento o compresión horizontal de una circunferencia produce gráficas de elipses.

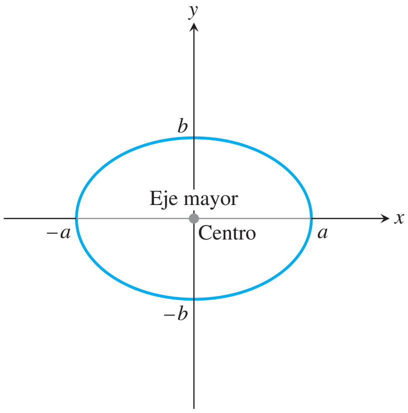


FIGURA 1.37 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, donde el eje mayor es horizontal.

Si $0 < c < 1$, la gráfica de la circunferencia, ecuación (1), se alarga horizontalmente; si $c > 1$, la circunferencia se comprime horizontalmente. En cualquiera de los casos, la gráfica de la ecuación (1) es una elipse (figura 1.36). Observe en la figura 1.36 que las intersecciones con el eje y de las tres gráficas siempre son $-r$ y r. En la figura 1.36b, el segmento que une los puntos $(\pm r/c, 0)$ se denomina **eje mayor** (o eje principal) de la elipse; el **eje menor** es el segmento de recta que une $(0, \pm r)$. Los ejes de la elipse se invierten en la figura 1.36c: el eje mayor es el segmento de recta que une los puntos $(0, \pm r)$, mientras que el eje menor es el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$. En ambos casos, el eje principal es el mayor segmento de recta.

Si dividimos ambos lados de la ecuación (1) entre r^2, obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

donde $a = r/c$ y $b = r$. Si $a > b$, el eje mayor es horizontal; si $a < b$, el eje mayor es vertical. El **centro** de la elipse, dada por la ecuación 2, es el origen (figura 1.37).

En la ecuación (2), al sustituir x por $x - h$, y y por $y - k$, el resultado es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

La ecuación (3) es la **ecuación estándar de una elipse** con centro en (h, k). La definición geométrica y las propiedades de las elipses se estudian en la sección 11.6.

Ejercicios 1.2

Combinaciones algebraicas

En los ejercicios 1 y 2, determine dominios y rangos de f, g, $f + g$ y $f \cdot g$.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

2. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 3 y 4, determine dominios y rangos de f, g, f/g y g/f.

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Composición de funciones

5. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, determine lo siguiente:

a. $f(g(0))$ **b.** $g(f(0))$
c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
e. $f(f(-5))$ **f.** $g(g(2))$
g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$

6. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$, determine lo siguiente.

a. $f(g(1/2))$ **b.** $g(f(1/2))$
c. $f(g(x))$ **d.** $g(f(x))$
e. $f(f(2))$ **f.** $g(g(2))$
g. $f(f(x))$ **h.** $g(g(x))$

En los ejercicios 7 a 10, escriba una fórmula para $f \circ g \circ h$.

7. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4 - x$

8. $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2$

9. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad g(x) = \frac{1}{x + 4}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$

10. $f(x) = \frac{x + 2}{3 - x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad h(x) = \sqrt{2 - x}$

Sean $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ y $j(x) = 2x$. Exprese cada una de las funciones de los ejercicios 11 y 12 como una composición de funciones que incluyan a una o más de f, g, h y j.

11. **a.** $y = \sqrt{x} - 3$ **b.** $y = 2\sqrt{x}$
c. $y = x^{1/4}$ **d.** $y = 4x$
e. $y = \sqrt{(x - 3)^3}$ **f.** $y = (2x - 6)^3$

12. **a.** $y = 2x - 3$ **b.** $y = x^{3/2}$
c. $y = x^9$ **d.** $y = x - 6$
e. $y = 2\sqrt{x - 3}$ **f.** $y = \sqrt{x^3 - 3}$

13. Copie y complete la siguiente tabla:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	$\sqrt{x}$	?
b.	$x + 2$	$3x$	?
c.	?	$\sqrt{x - 5}$	$\sqrt{x^2 - 5}$
d.	$\frac{x}{x - 1}$	$\frac{x}{x - 1}$	?
e.	?	$1 + \frac{1}{x}$	x
f.	$\frac{1}{x}$	?	x

14. Copie y complete la siguiente tabla.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$\dfrac{1}{x-1}$	$\lvert x \rvert$	?
b.	?	$\dfrac{x-1}{x}$	$\dfrac{x}{x+1}$
c.	?	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$
d.	$\sqrt{x}$	?	$\lvert x \rvert$

15. Evalúe cada expresión utilizando la siguiente tabla de valores.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	0	-2	1	2
$g(x)$	2	1	0	-1	0

a. $f(g(-1))$ **b.** $g(f(0))$ **c.** $f(f(-1))$
d. $g(g(2))$ **e.** $g(f(-2))$ **f.** $f(g(1))$

16. Evalúe cada expresión con el uso de las funciones

$$f(x) = 2 - x, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

a. $f(g(0))$ **b.** $g(f(3))$ **c.** $g(g(-1))$
d. $f(f(2))$ **e.** $g(f(0))$ **f.** $f(g(1/2))$

En los ejercicios 17 y 18, **(a)** escriba fórmulas para $f \circ g$ y $g \circ f$, luego determine **(b)** el dominio y **(c)** el rango de cada una.

17. $f(x) = \sqrt{x+1}, \; g(x) = \dfrac{1}{x}$

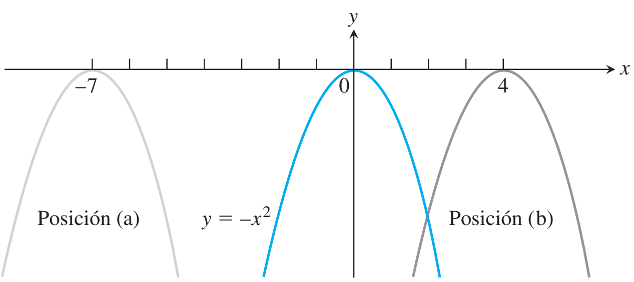
18. $f(x) = x^2, \; g(x) = 1 - \sqrt{x}$

19. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$. Determine una función $y = g(x)$, de manera que $(f \circ g)(x) = x$.

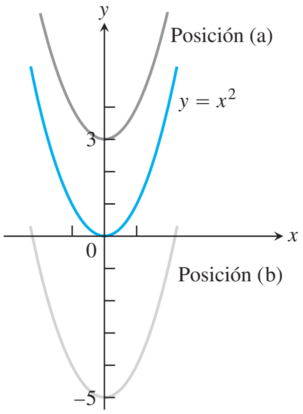
20. Sea $f(x) = 2x^3 - 4$. Determine una función $y = g(x)$ de tal forma que $(f \circ g)(x) = x + 2$.

Gráficas trasladadas

21. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ recorrida a dos nuevas posiciones. Escriba las ecuaciones para las nuevas gráficas.

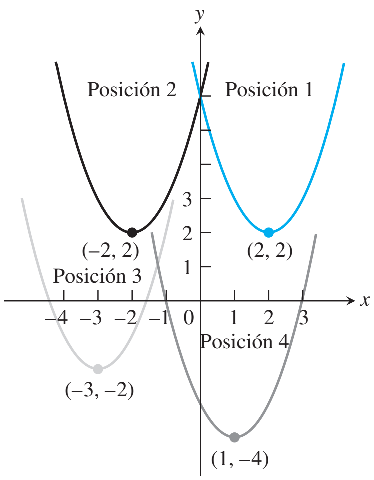


22. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = x^2$ recorrida a dos nuevas posiciones. Escriba las ecuaciones para las nuevas gráficas.

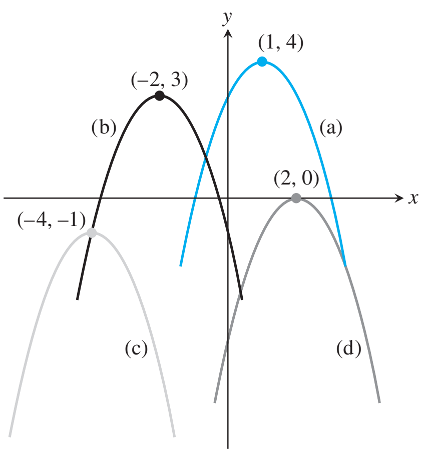


23. Relacione las ecuaciones listadas en los incisos (a) a (d) con las gráficas que aparecen más abajo:

a. $y = (x-1)^2 - 4$ **b.** $y = (x-2)^2 + 2$
c. $y = (x+2)^2 + 2$ **d.** $y = (x+3)^2 - 2$



24. La siguiente figura muestra la gráfica de $y = -x^2$ recorrida a cuatro posiciones nuevas. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas nuevas.



Los ejercicios 25 a 34 indican cuántas unidades y en qué dirección se recorre la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas. Dé una ecuación para la gráfica trasladada. Luego haga un bosquejo de las dos gráficas juntas y anote al lado de cada gráfica su ecuación respectiva.

25. $x^2 + y^2 = 49$ Hacia abajo 3, a la izquierda 2

26. $x^2 + y^2 = 25$ Hacia arriba 3, a la izquierda 4

27. $y = x^3$ A la izquierda 1, hacia abajo 1

28. $y = x^{2/3}$ Hacia la derecha 1, hacia abajo 1

29. $y = \sqrt{x}$ A la izquierda 0.81

30. $y = -\sqrt{x}$ A la derecha 3

31. $y = 2x - 7$ Hacia arriba 7

32. $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 5$ Hacia abajo 5, a la derecha 1

33. $y = 1/x$ Hacia arriba 1, a la derecha 1

34. $y = 1/x^2$ A la izquierda 2, hacia abajo 1

Grafique las funciones de los ejercicios 35 a 54.

35. $y = \sqrt{x + 4}$

36. $y = \sqrt{9 - x}$

37. $y = |x - 2|$

38. $y = |1 - x| - 1$

39. $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

40. $y = 1 - \sqrt{x}$

41. $y = (x + 1)^{2/3}$

42. $y = (x - 8)^{2/3}$

43. $y = 1 - x^{2/3}$

44. $y + 4 = x^{2/3}$

45. $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

46. $y = (x + 2)^{3/2} + 1$

47. $y = \frac{1}{x - 2}$

48. $y = \frac{1}{x} - 2$

49. $y = \frac{1}{x} + 2$

50. $y = \frac{1}{x + 2}$

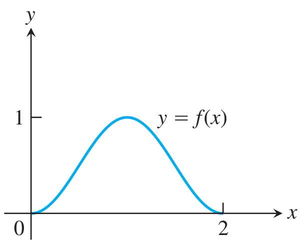
51. $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$

52. $y = \frac{1}{x^2} - 1$

53. $y = \frac{1}{x^2} + 1$

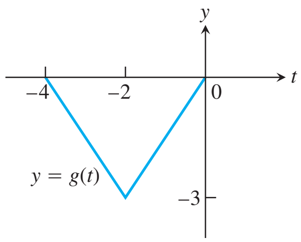
54. $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$

55. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones y haga un bosquejo de sus gráficas.



a. $f(x) + 2$
b. $f(x) - 1$
c. $2f(x)$
d. $-f(x)$
e. $f(x + 2)$
f. $f(x - 1)$
g. $f(-x)$
h. $-f(x + 1) + 1$

56. La siguiente figura muestra la gráfica de una función $f(x)$ con dominio $[-4, 0]$ y rango $[-3, 0]$. Determine los dominios y los rangos de las siguientes funciones y haga un bosquejo de sus gráficas.



a. $g(-t)$
b. $-g(t)$
c. $g(t) + 3$
d. $1 - g(t)$
e. $g(-t + 2)$
f. $g(t - 2)$
g. $g(1 - t)$
h. $-g(t - 4)$

Cambios de tamaño vertical y horizontal

Los ejercicios 57 a 66 indican el factor y la dirección en los que las gráficas de las funciones dadas se alargan o se comprimen. Dé una ecuación para la gráfica que se alargó o comprimió.

57. $y = x^2 - 1$, alargamiento vertical por un factor de 3

58. $y = x^2 - 1$, compresión horizontal por un factor de 2

59. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, compresión vertical por un factor de 2

60. $y = 1 + \frac{1}{x^2}$, alargamiento horizontal por un factor de 3

61. $y = \sqrt{x + 1}$, compresión horizontal por un factor de 4

62. $y = \sqrt{x + 1}$, alargamiento vertical por un factor de 3

63. $y = \sqrt{4 - x^2}$, alargamiento horizontal por un factor de 2

64. $y = \sqrt{4 - x^2}$, compresión vertical por un factor de 3

65. $y = 1 - x^3$, compresión horizontal por un factor de 3

66. $y = 1 - x^3$, alargamiento horizontal por un factor de 2

Graficación

En los ejercicios 67 a 74, grafique cada función; no lo haga graficando puntos, inicie con la gráfica de una de las funciones estándar presentadas en las figuras 1.14 a 1.17 y mediante la aplicación de una transformación adecuada.

67. $y = -\sqrt{2x + 1}$

68. $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$

69. $y = (x - 1)^3 + 2$

70. $y = (1 - x)^3 + 2$

71. $y = \frac{1}{2x} - 1$

72. $y = \frac{2}{x^2} + 1$

73. $y = -\sqrt[3]{x}$

74. $y = (-2x)^{2/3}$

75. Grafique la función $y = |x^2 - 1|$.

76. Grafique la función $y = \sqrt{|x|}$.

Elipses

Los ejercicios 77 a 82 presentan ecuaciones de elipses. Ponga cada ecuación en la forma estándar y haga un bosquejo de la elipse.

77. $9x^2 + 25y^2 = 225$

78. $16x^2 + 7y^2 = 112$

79. $3x^2 + (y - 2)^2 = 3$

80. $(x + 1)^2 + 2y^2 = 4$

81. $3(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 6$

82. $6\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 54$

83. Escriba una ecuación para la elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$, trasladada 4 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. Haga un bosquejo de la elipse, luego identifique su centro y su eje mayor.

84. Escriba una ecuación para la elipse $(x^2/4) + (y^2/25) = 1$, trasladada 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Haga un bosquejo de la elipse, luego identifique su centro y su eje mayor.

Combinación de funciones

85. Suponga que f es una función par y g es una función impar, y que tanto f como g están definidas en toda la recta real, $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes funciones (donde estén definidas) son pares? ¿Cuáles impares?

a. fg	**b.** f/g	**c.** g/f
d. $f^2 = ff$	**e.** $g^2 = gg$	**f.** $f \circ g$
g. $g \circ f$	**h.** $f \circ f$	**i.** $g \circ g$

86. ¿Puede una función ser simultáneamente par e impar? Justifique su respuesta.

T **87.** (*Continuación del ejemplo 1.*) Grafique las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$ junto con (a) su suma, (b) su producto, (c) sus diferencias, (d) sus cocientes.

T **88.** Sean $f(x) = x - 7$ y $g(x) = x^2$. Grafique f y g junto con $f \circ g$ y $g \circ f$.

1.3 Funciones trigonométricas

En esta sección se revisan la medida en radianes y las funciones trigonométricas básicas.

Ángulos

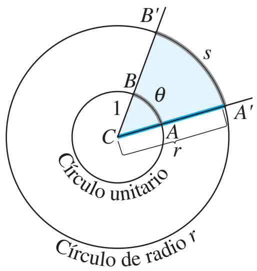


FIGURA 1.38 La medida en radianes del ángulo central $A'CB'$ es el número $\theta = s/r$. Para un círculo unitario de radio $r = 1$, θ es la longitud del arco AB que el ángulo central ACB determina sobre el círculo unitario.

Los ángulos se miden en grados y radianes. La medida en **radianes** del ángulo central $A'CB'$ en un círculo de radio r se define como el número de "radios" contenidos en el arco s, subtendido por el ángulo central. Si denotamos este ángulo central por θ cuando se mide en radianes, esto significa que $\theta = s/r$ (figura 1.38), o

$$s = r\theta \qquad (\theta \text{ en radianes}). \tag{1}$$

Si el círculo es un círculo unitario que tiene radio $r = 1$, entonces, con base en la figura 1.38 y la ecuación (1), vemos que el ángulo central θ, medido en radianes, es justamente la longitud del arco determinado por el ángulo al cortar el círculo unitario. Como una vuelta completa del círculo unitario es 360° o 2π radianes, tenemos

$$\pi \text{ radianes} = 180° \tag{2}$$

y

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} (\approx 57.3) \text{ grados} \qquad \text{o} \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} (\approx 0.017) \text{ radianes.}$$

La tabla 1.2 muestra la equivalencia entre medidas en grados y radianes para algunos ángulos básicos.

TABLA 1.2 Ángulos medidos en grados y radianes

Grados	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Se dice que un ángulo en el plano xy está en **posición estándar** si su vértice se encuentra en el origen y su rayo inicial está a lo largo de la parte positiva del eje x (figura 1.39). A los ángulos medidos en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, a partir de la parte positiva del eje x, se les asigna medidas positivas, mientras que a los ángulos que se miden en sentido del giro de las manecillas del reloj se les asignan medidas negativas.

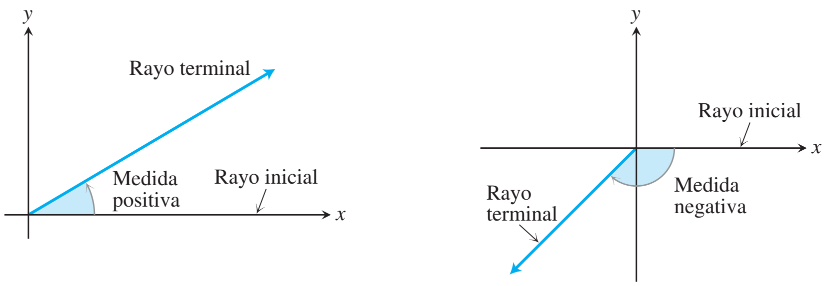


FIGURA 1.39 Ángulos en posición estándar en el plano xy.

Los ángulos que describen rotaciones en contra de las manecillas del reloj pueden ir más allá de 2π radianes o 360°. De forma análoga, los ángulos que giran en sentido de las manecillas del reloj pueden tener medidas negativas de cualquier tamaño (figura 1.40).

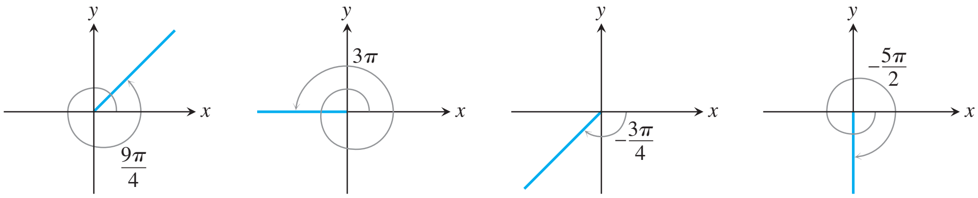
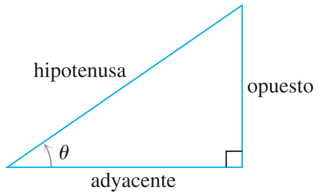


FIGURA 1.40 Las medidas en radianes, distintas de cero, pueden ser positivas o negativas, e ir más allá de 2π.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

FIGURA 1.41 Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Convención para ángulos: Uso de radianes A partir de ahora, en este libro se supondrá que todos los ángulos se miden en radianes, a menos que se indiquen explícitamente grados u otra unidad. Cuando hablemos acerca del ángulo $\pi/3$, queremos decir $\pi/3$ radianes (que es 60°), no $\pi/3$ grados. Utilizamos radianes, porque eso simplifica muchas de las operaciones en cálculo; algunos resultados que obtendremos, los cuales incluyen funciones trigonométricas, no son válidos cuando los ángulos se miden en grados.

Las seis funciones trigonométricas básicas

Quizás esté familiarizado con la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo en términos de los lados de un triángulo rectángulo (figura 1.41). Ampliamos esta definición a ángulos obtusos y negativos, colocando primero el ángulo en forma estándar en un círculo de radio r. Luego definimos las funciones trigonométricas en términos de las coordenadas del punto $P(x, y)$, donde el rayo terminal interseca al círculo (figura 1.42).

$$\textbf{seno:}\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \textbf{cosecante:}\quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\textbf{coseno:}\quad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \textbf{secante:}\quad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\textbf{tangente:}\quad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{cotangente:}\quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

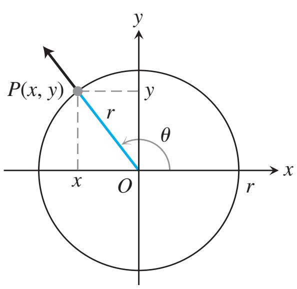


FIGURA 1.42 Las funciones trigonométricas de un ángulo general θ están definidas en términos de x, y y r.

Estas definiciones ampliadas coinciden con las definiciones en el triángulo rectángulo cuando el ángulo es agudo.

Tenga en cuenta también que siempre que los cocientes estén definidos,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

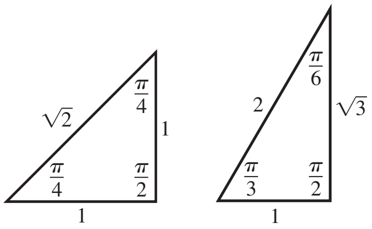


FIGURA 1.43 Ángulos en radianes y longitudes de lados de dos triángulos comunes.

Como se observa, tan θ y sec θ no están definidas si $x = \cos\theta = 0$. Lo anterior significa que no están definidas si θ es $\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ De forma análoga, cot θ y csc θ no están definidas para valores de θ para los cuales $y = \operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, para $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

Los valores exactos de estas razones trigonométricas para algunos ángulos pueden deducirse a partir de los triángulos en la figura 1.43. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

El acrónimo "tose taco" (figura 1.44) es útil para recordar cuándo las funciones trigonométricas básicas son positivas o negativas. Por ejemplo, con base en el triángulo de la figura 1.45, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

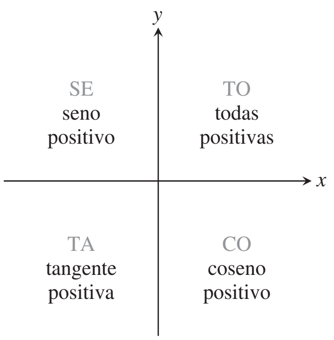


FIGURA 1.44 El acrónimo "tose taco", que se forma a partir de "todas positivas", "seno positivo", "tangente positiva" y "coseno positivo" nos ayuda a recordar cuáles de las funciones trigonométricas son positivas en cada uno de los cuadrantes.

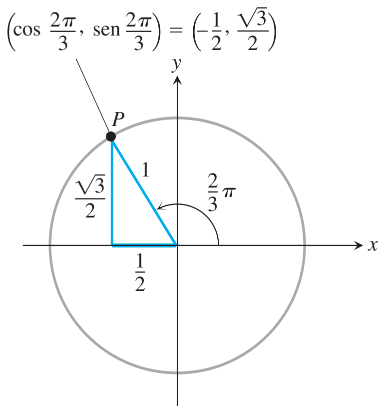


FIGURA 1.45 Triángulo para calcular el seno y el coseno de $2\pi/3$ radianes. Las longitudes de los lados se pueden obtener de la geometría de triángulos rectángulos.

Mediante el uso de un método semejante, determinamos los valores de sen θ, cos θ y tan θ que se muestran en la tabla 1.3.

TABLA 1.3 Valores de sen θ, cos θ y tan θ para valores seleccionados de θ

Grados	**−180**	**−135**	**−90**	**−45**	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**270**	**360**
θ (radianes)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
cos θ	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
tan θ	0	1		−1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

Periodicidad y gráficas de las funciones trigonométricas

Cuando un ángulo de medida θ y un ángulo con medida $\theta + 2\pi$ están en posición estándar, sus rayos terminales coinciden. Por lo tanto, las funciones trigonométricas de los dos ángulos tienen los mismos valores: $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$, $\tan(\theta + 2\pi)$, etcétera. De forma análoga, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos(\theta)$, $\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}(\theta)$, etcétera. Describimos este comportamiento repetitivo diciendo que las seis funciones trigonométricas son *periódicas*.

Periodos de las funciones trigonométricas

Periodo π: $\tan(x + \pi) = \tan x$
$\cot(x + \pi) = \cot x$

Periodo 2π: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sec(x + 2\pi) = \sec x$
$\csc(x + 2\pi) = \csc x$

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es **periódica** si existe un número positivo p, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de estos valores de p es el **periodo** de f.

Cuando graficamos las funciones trigonométricas en el plano coordenado, por lo regular denotamos a la variable independiente con x en vez de θ. La figura 1.46 muestra que las funciones tangente y cotangente tienen periodo $p = \pi$, en tanto que las otras cuatro funciones tienen periodo 2π. Además, las simetrías de estas gráficas revelan que las funciones coseno y secante son pares, mientras que las otras cuatro funciones son impares (aunque esto no demuestra dichos resultados).

Par

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sec(-x) = \sec(x)$

Impar

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\csc(-x) = -\csc x$

$\cot(-x) = -\cot x$

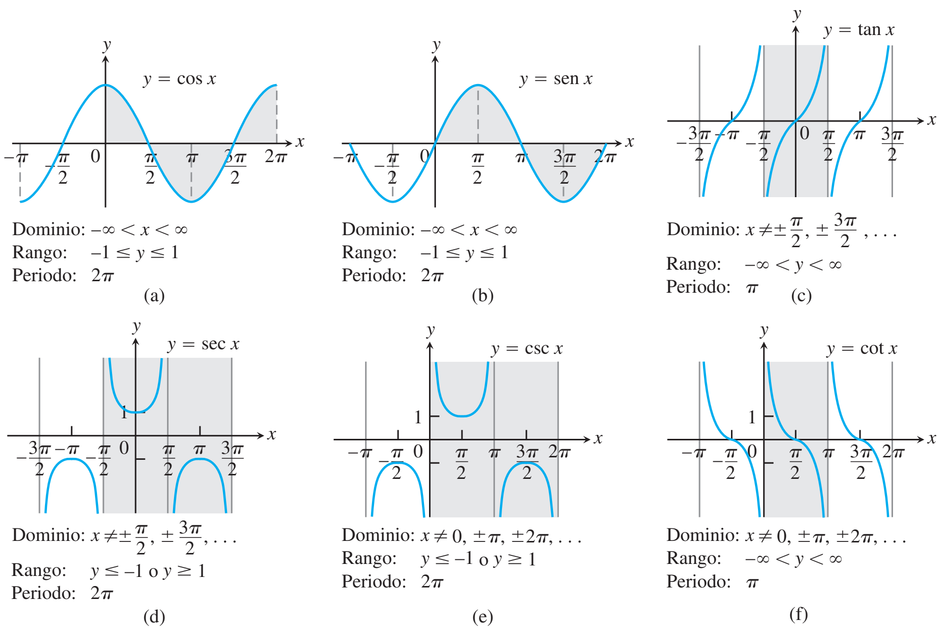


FIGURA 1.46 Gráficas de las seis funciones trigonométricas básicas, con los ángulos medidos en radianes. En cada función, el sombreado indica su periodicidad.

Identidades trigonométricas

Las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$ en el plano pueden expresarse en términos de la distancia r del punto al origen y el ángulo θ que el rayo OP forma con la parte positiva del eje x (figura 1.42). Como $x/r = \cos\theta$ y $y/r = \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

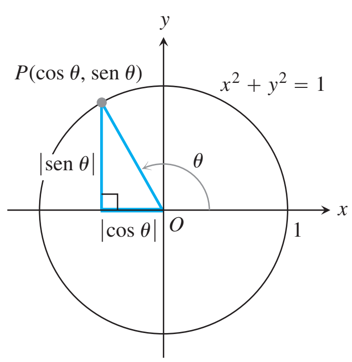


FIGURA 1.47 El triángulo de referencia para un ángulo general θ.

Cuando $r = 1$, es posible aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de referencia de la figura 1.47 y obtener la ecuación

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1. \tag{3}$$

Esta ecuación, verdadera para todos los valores de θ, es la identidad que se utiliza con mayor frecuencia en trigonometría. Al dividir esta identidad primero entre $\cos^2\theta$ y luego entre $\operatorname{sen}^2\theta$ se obtiene

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Las siguientes fórmulas se cumplen para todos los ángulos A y B (ejercicio 58).

Fórmulas para la suma

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\\ \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A\cos B + \cos A\operatorname{sen} B\end{aligned} \tag{4}$$

Existen fórmulas análogas para $\cos(A - B)$ y $\operatorname{sen}(A - B)$ (ejercicios 35 y 36). Todas las identidades trigonométricas necesarias en este libro se deducen de las ecuaciones (3) y (4). Por ejemplo, al sustituir A y B por θ en la fórmula de la suma, se obtiene

Fórmulas para el ángulo doble

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\\ \operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{5}$$

Se pueden deducir otras fórmulas si se combinan las ecuaciones

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \qquad \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta.$$

Sumamos las dos ecuaciones para obtener $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ y restamos la segunda de la primera para obtener $2\operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\cos 2\theta$. Esto lleva a las identidades siguientes, que son útiles en cálculo integral.

Fórmulas para el ángulo medio

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{6}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{7}$$

Ley de los cosenos

Si a, b y c son lados de un triángulo ABC, y θ es el ángulo opuesto a c, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \tag{8}$$

Esta ecuación se denomina **ley de los cosenos**.

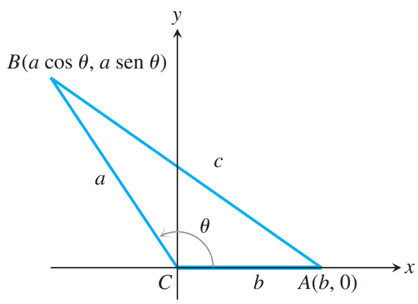


FIGURA 1.48 El cuadrado de la distancia entre A y B da la ley de los cosenos.

Podemos ver por qué se cumple la ley si introducimos ejes coordenados con el origen en C y la parte positiva del eje x a lo largo de un lado del triángulo, como se muestra en la figura 1.48. Las coordenadas de A son $(b, 0)$; las coordenadas de B son $(a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta)$. Por lo tanto, el cuadrado de la distancia entre A y B

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \cos \theta - b)^2 + (a \operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= a^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}_{1} + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \end{aligned}$$

La ley de los cosenos generaliza el teorema de Pitágoras. Si $\theta = \pi/2$, entonces $\cos \theta = 0$ y $c^2 = a^2 + b^2$.

Transformaciones de las gráficas trigonométricas

En el siguiente diagrama se hace un resumen de las reglas para trasladar, alargar, comprimir y reflejar la gráfica de una función aplicadas a las funciones trigonométricas que analizamos en esta sección.

Alargamiento o compresión vertical; si a es negativa, reflexión con respecto al eje x

Traslación vertical

$$y = af(b(x + c)) + d$$

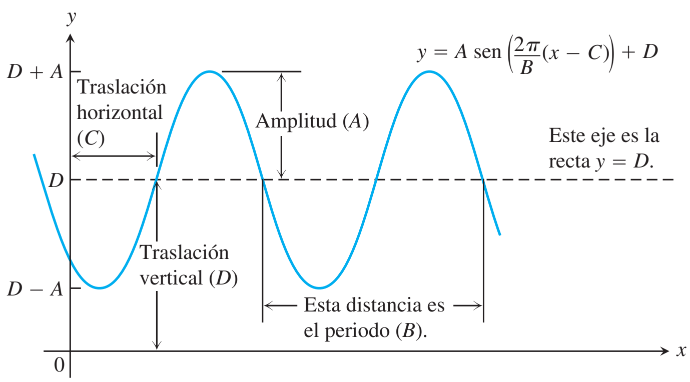
Alargamiento o compresión horizontal; si b es negativa, reflexión con respecto al eje y

Traslación horizontal

Las reglas de transformación aplicadas a la función seno dan lugar a la fórmula **general de funciones senos** o **sinusoides**

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D,$$

donde $|A|$ es la *amplitud*, $|B|$ es el *periodo*, C es la *traslación* (o *corrimiento*) *horizontal*, y D es la *traslación* (o *corrimiento*) *vertical*. A continuación se presenta una interpretación gráfica de los diferentes términos.



Dos desigualdades especiales

Para cualquier ángulo θ, medido en radianes, se cumple

$$\boxed{-|\theta| \leq \operatorname{sen} \theta \leq |\theta| \qquad \text{y} \qquad -|\theta| \leq 1 - \cos \theta \leq |\theta|.}$$

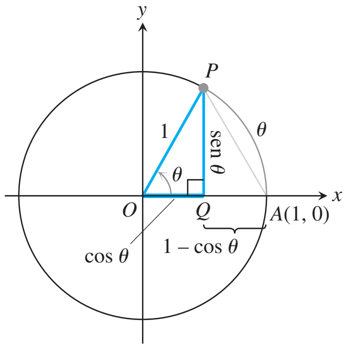


FIGURA 1.49 Con base en la geometría de esta figura, hecha para $\theta > 0$, obtenemos la desigualdad $\text{sen}^2\,\theta + (1 - \cos\theta)^2 \le \theta^2$.

Para establecer estas desigualdades, representamos a θ como un ángulo distinto de cero en posición estándar (figura 1.49). En la figura, el círculo es unitario, así que $|\theta|$ es igual a la longitud del arco circular AP. Por lo tanto, la longitud del segmento de recta AP es menor que $|\theta|$.

El triángulo APQ es un triángulo rectángulo con lados de longitud

$$QP = |\text{sen}\,\theta|, \qquad AQ = 1 - \cos\theta.$$

Con base en el teorema de Pitágoras y el hecho de que $AP < |\theta|$, obtenemos

$$\text{sen}^2\,\theta + (1 - \cos\theta)^2 = (AP)^2 \le \theta^2. \tag{9}$$

Ambos términos en el lado izquierdo de la ecuación (9) son positivos, así que cada uno es menor que su suma y, por lo tanto, menor o igual a θ^2;

$$\text{sen}^2\,\theta \le \theta^2 \qquad \text{y} \qquad (1 - \cos\theta)^2 \le \theta^2.$$

Al sacar raíces cuadradas, lo anterior es equivalente a decir que

$$|\text{sen}\,\theta| \le |\theta| \qquad \text{y} \qquad |1 - \cos\theta| \le |\theta|,$$

por lo que

$$-|\theta| \le \text{sen}\,\theta \le |\theta| \qquad \text{y} \qquad -|\theta| \le 1 - \cos\theta \le |\theta|.$$

Tales desigualdades serán útiles en el siguiente capítulo.

Ejercicios 1.3

Radianes y grados

1. En un círculo de radio de 10 m, ¿cuál es la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de **(a)** $4\pi/5$ radianes? **(b)** 110°?
2. Un ángulo central en un círculo de radio 8 está subtendido por un arco de longitud 10π. Determine la medida del ángulo en radianes y en grados.
3. Usted quiere construir un ángulo de 80° marcando un arco en el perímetro de un disco, con diámetro de 12 in, y dibujando líneas de los extremos de este arco hacia el centro del disco. ¿Cuál debe ser la longitud del arco? (Aproxime al décimo más cercano).
4. Si se hace rodar a nivel del piso una rueda de 1 m de diámetro 30 cm hacia delante, ¿qué ángulo giró la rueda? Responda en radianes (al décimo más cercano) y en grados (al grado más cercano).

Evaluación de funciones trigonométricas

5. Copie y complete la siguiente tabla de valores de funciones. Si la función no está definida en un ángulo dado, escriba INDEF. No utilice calculadora ni tablas.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
sen θ					
cos θ					
tan θ					
cot θ					
sec θ					
csc θ					

6. Copie y complete la siguiente tabla de valores de funciones. Si la función no está definida en un ángulo dado, escriba INDEF. No utilice calculadora ni tablas.

θ	$-3\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/6$
sen θ					
cos θ					
tan θ					
cot θ					
sec θ					
csc θ					

En los ejercicios 7 a 12 se establece ya sea sen x, cos x o tan x. Determine los otros dos si x pertenece al intervalo que se especifica.

7. $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{5}, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$
8. $\tan x = 2, \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
9. $\cos x = \dfrac{1}{3}, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$
10. $\cos x = -\dfrac{5}{13}, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$
11. $\tan x = \dfrac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$
12. $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{2}, \quad x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Graficación de funciones trigonométricas

Grafique las funciones en los ejercicios 13 a 22. ¿Cuál es el periodo de cada función?

13. sen $2x$
14. sen $(x/2)$
15. $\cos \pi x$
16. $\cos \dfrac{\pi x}{2}$
17. $-\text{sen}\,\dfrac{\pi x}{3}$
18. $-\cos 2\pi x$
19. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
20. $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

21. $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ **22.** $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) - 2$

En el plano ts (el eje t es horizontal y el eje s es vertical) grafique las funciones en los ejercicios 23 a 26. ¿Cuál es el periodo de cada función? ¿Qué simetrías tienen las gráficas?

23. $s = \cot 2t$ **24.** $s = -\tan \pi t$

25. $s = \sec\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$ **26.** $s = \csc\left(\dfrac{t}{2}\right)$

T **27.** **a.** Grafique juntas $y = \cos x$ y $y = \sec x$, para $-3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. Comente sobre el comportamiento de $\sec x$ con respecto a los signos y los valores de $\cos x$.

b. Grafique juntas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \csc x$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$. Comente sobre el comportamiento de $\csc x$ con respecto a los signos y los valores de $\operatorname{sen} x$.

T **28.** Grafique juntas $y = \tan x$ y $y = \cot x$ para $-7 \leq x \leq 7$. Comente sobre el comportamiento de $\cot x$ con respecto a los signos y los valores de $\tan x$.

29. Grafique juntas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lfloor \operatorname{sen} x \rfloor$?

30. Grafique juntas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \lceil \operatorname{sen} x \rceil$. ¿Cuáles son el dominio y el rango de $\lceil \operatorname{sen} x \rceil$?

Aplicación de las fórmulas para la suma

Utilice las fórmulas para la suma para deducir las identidades en los ejercicios 31 a 36.

31. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ **32.** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

33. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ **34.** $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

35. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ (el ejercicio 57 brinda una deducción diferente).

36. $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$.

37. ¿Qué sucede si toma $B = A$ en la identidad trigonométrica $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$? ¿El resultado coincide con algo que ya conoce?

38. ¿Qué sucede si toma $B = 2\pi$ en las fórmulas para la suma? ¿Los resultados coinciden con algo que ya conoce?

En los ejercicios 39 a 42 exprese la cantidad dada en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

39. $\cos(\pi + x)$ **40.** $\operatorname{sen}(2\pi - x)$

41. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$ **42.** $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

43. Evalúe $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$ como $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

44. Evalúe $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ como $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

45. Evalúe $\cos\dfrac{\pi}{12}$. **46.** Evalúe $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}$.

Aplicación de las fórmulas para el doble de un ángulo

Determine los valores de la función en los ejercicios 47 a 50.

47. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ **48.** $\cos^2\dfrac{5\pi}{12}$

49. $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{12}$ **50.** $\operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{8}$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para los ejercicios 51 a 54 determine el ángulo θ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

51. $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{3}{4}$ **52.** $\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

53. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$ **54.** $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$

Teoría y ejemplos

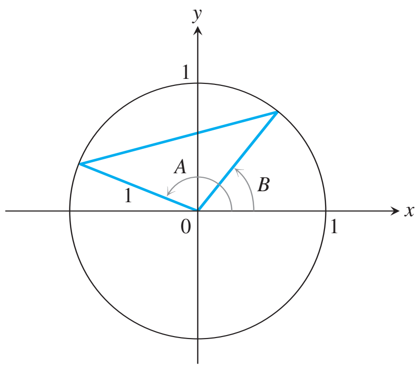
55. **Fórmula para la tangente de la suma** La fórmula estándar para la tangente de la suma de dos ángulos es

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Deduzca la fórmula.

56. (*Continuación del ejercicio 55*). Deduzca una fórmula para $\tan(A - B)$.

57. Aplique la ley de los cosenos al triángulo de la siguiente figura, con la finalidad de deducir la fórmula para $\cos(A - B)$.



58. **a.** Aplique la fórmula para $\cos(A - B)$ a la identidad $\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ para obtener la fórmula para la suma $\operatorname{sen}(A + B)$.

b. Deduzca la fórmula para $\cos(A + B)$ mediante la sustitución de $-B$ por B en la fórmula para $\cos(A - B)$ del ejercicio 35.

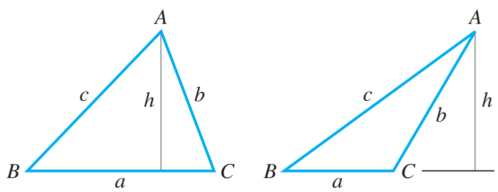
59. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y ángulo $C = 60°$. Determine la longitud del lado c.

60. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y ángulo $C = 40°$. Determine la longitud del lado c.

61. **Ley de los senos** La *ley de los senos* establece que si a, b y c son los lados opuestos de los ángulos A, B y C, en un triángulo, entonces

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Utilice las siguientes figuras y, si se requiere, la identidad $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ para deducir la ley.



62. Un triángulo tiene lados $a = 2$ y $b = 3$, y el ángulo $C = 60°$ (como en el ejercicio 59). Determine el seno del ángulo B mediante la ley de los senos.

63. Un triángulo tiene lado $c = 2$ y ángulos $A = \pi/4$ y $B = \pi/3$. Determine la longitud a del lado opuesto al ángulo A.

T **64. La aproximación sen $x \approx x$** Con frecuencia es útil saber que, cuando x se mide en radianes, sen $x \approx x$ para valores de x numéricamente pequeños. En la sección 3.9 veremos por qué esta aproximación es cierta. El error de la aproximación es menor que 1 en 5000 si $|x| < 0.1$.

a. Con su graficadora en modo de radianes, grafique juntas $y =$ sen x y $y = x$ en una ventana alrededor del origen. ¿Qué sucede cuando x está cerca del origen?

b. Con su graficadora en modo de grados, grafique juntas $y =$ sen x y $y = x$ en una ventana, alrededor del origen, otra vez. ¿Qué tan diferente es con respecto a la gráfica que obtuvo en modo de radianes?

Curvas senoidales generales

Para

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D,$$

identifique A, B, C y D para las funciones seno de los ejercicios 65 a 68 y bosqueje sus gráficas.

65. $y = 2 \operatorname{sen}(x + \pi) - 1$

66. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

67. $y = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \frac{1}{\pi}$

68. $y = \frac{L}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 69 a 72 explorará de forma gráfica la función seno

$$f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

conforme cambian los valores de las constantes A, B, C y D. Utilice un sistema algebraico computacional (SAC) o una calculadora graficadora para realizar los pasos dados en los ejercicios.

69. El periodo *B* Fije las constante $A = 3$, $C = D = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa lo que sucede a la gráfica de la función seno conforme aumenta el periodo.

b. ¿Qué sucede a la gráfica para valores negativos de B? Pruebe con $B = -3$ y $B = -2\pi$.

70. El desplazamiento horizontal *C* Establezca las constantes $A = 3$, $B = 6$, $D = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores de $C = 0$, 1 y 2, en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa lo que sucede a la gráfica de la función seno cuando C aumenta en valores positivos.

b. ¿Qué sucede a la gráfica para valores negativos de C?

c. ¿Cuál es el valor positivo más pequeño que debe asignarse a C de manera que la gráfica no exhiba un desplazamiento horizontal? Confirme su respuesta con una gráfica.

71. El desplazamiento vertical *D* Establezca las constantes $A = 3$, $B = 6$, $C = 0$.

a. Grafique $f(x)$ para los valores de $D = 0$, 1 y 3, en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$. Describa lo que sucede a la gráfica de la función seno cuando D aumenta en valores positivos.

b. ¿Qué sucede a la gráfica para valores negativos de D?

72. La amplitud *A* Establezca las constantes $B = 6$, $C = D = 0$.

a. Describa lo que sucede a la gráfica de la función seno cuando A aumenta en valores positivos. Confirme su respuesta graficando $f(x)$ para los valores de $A = 1$, 5 y 9.

b. ¿Qué sucede a la gráfica para valores negativos de A?

1.4 Graficación por medio de calculadoras y computadora

Una calculadora graficadora o una computadora con un software para graficar nos permiten graficar con alta precisión funciones complicadas. Muchas de estas funciones no podrían graficarse con facilidad de otra forma. Sin embargo, debemos tener cuidado cuando se utilicen tales dispositivos con propósitos de graficación; en esta sección tratamos algunos de los temas relacionados. En el capítulo 4 veremos cómo el cálculo nos ayuda a determinar que consideremos con precisión todas las características importantes de la gráfica de una función.

Ventana de graficación

Cuando utilizamos una calculadora graficadora o una computadora como una herramienta de graficación, parte de la gráfica se muestra en una **pantalla** o **ventana** rectangular. Con frecuencia, la ventana predeterminada ofrece una representación incompleta o engañosa de la gráfica. Utilizamos el término *ventana cuadrada* cuando las unidades o las escalas en ambos ejes son iguales. Este término no significa que la ventana sea cuadrada (por lo regular es rectangular), significa que la unidad en el eje x (unidad x) es igual que la unidad en el eje y (unidad y).

Cuando una gráfica se muestra en la ventana predeterminada, la unidad en el eje x puede diferir de la unidad en el eje y para ajustar la gráfica a la ventana. La ventana se fija especificando un intervalo $[a, b]$ para los valores de x y un intervalo $[c, d]$ para los valores de y. La máquina selecciona valores igualmente espaciados de x en $[a, b]$ y luego traza los puntos $(x, f(x))$. Un punto se grafica si y sólo si x está en el dominio de la función y $f(x)$ pertenece al intervalo $[c, d]$. Luego se traza un pequeño segmento de recta entre cada punto graficado y su siguiente punto vecino. Ahora daremos ejemplos ilustrativos de algunos problemas comunes que ocurren con este procedimiento.

EJEMPLO 1 Grafique la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ en cada una de las siguientes ventanas.

(a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ **(b)** $[-4, 4]$ por $[-50, 10]$ **(c)** $[-4, 10]$ por $[-60, 60]$

Solución

(a) Seleccionamos $a = -10$, $b = 10$, $c = -10$ y $d = 10$ para especificar el intervalo de valores de x y el rango de valores de y para la ventana. La gráfica resultante se muestra en la figura 1.50a. Parece que la ventana corta la parte inferior de la gráfica y que el intervalo de valores para x es demasiado grande. Probemos con la siguiente ventana.

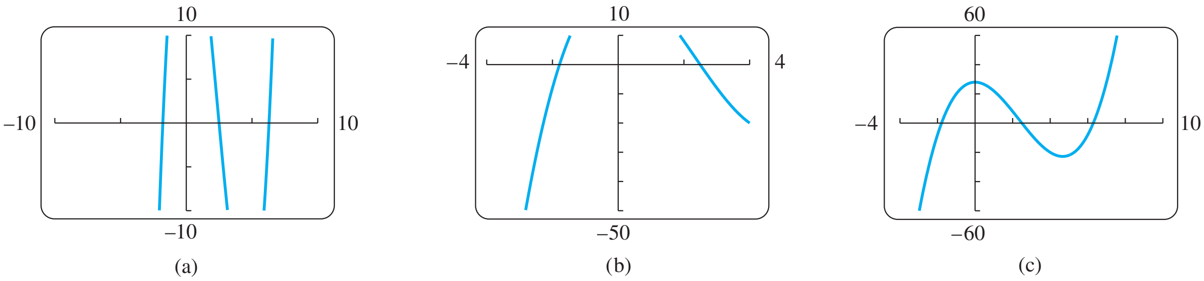


FIGURA 1.50 La gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$ en diferentes ventanas. Con frecuencia, seleccionar una ventana que dé una representación clara de una gráfica es un proceso de prueba y error (ejemplo 1).

(b) Ahora vemos más características de la gráfica (figura 1.50b), pero la parte superior se pierde y necesitamos ver más a la derecha de $x = 4$. La siguiente ventana debería ayudar.

(c) La figura 1.50c muestra la gráfica en esta nueva ventana. Observe que obtenemos una representación más completa de la gráfica en esta ventana, que es una gráfica razonable de un polinomio de tercer grado. ■

EJEMPLO 2 Cuando se muestra una gráfica, la unidad en el eje x puede diferir de la unidad en el eje y, como se observa en las gráficas de las figuras 1.50b y 1.50c. El resultado es una distorsión de la representación que podría ser engañosa. La ventana podría hacerse cuadrada mediante una compresión o un alargamiento de las unidades en uno de los ejes para hacer coincidir la escala con el otro, lo que da como resultado la gráfica verdadera. Muchos sistemas tienen integradas funciones para hacer "cuadrada" la ventana. Si su sistema no es así, deberá hacer algunos cálculos y fijar el tamaño de la ventana en forma manual para obtener una ventana cuadrada o aplicar a la ventana conocimientos previos de la representación verdadera.

La figura 1.51a muestra las gráficas de las rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$ junto con la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$, en una ventana no cuadrada $[-6, 6]$ por $[-6, 8]$. Observe la distorsión. Las rectas no parecen ser perpendiculares, y la semicircunferencia tiene forma elíptica.

La figura 1.51b muestra las gráficas de las mismas funciones en una ventana cuadrada en la que las unidades en x se han hecho iguales a las unidades en y. Observe que la ventana $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$ tiene el mismo eje x en ambas figuras, 1.51a y 1.51b, pero al cambiar la escala en el eje x se ha comprimido en la figura 1.51b para obtener la ventana cuadrada. La figura 1.51c ofrece una vista ampliada de la figura 1.51b gracias a una ventana cuadrada de $[-3, 3]$ por $[0, 4]$. ■

Si el denominador de una función racional es cero para algún valor de x en la ventana, una calculadora o el software de graficación de una computadora producirían un segmento de recta muy inclinado, casi vertical, de la parte superior a la parte inferior de la ventana. A continuación tenemos un ejemplo.

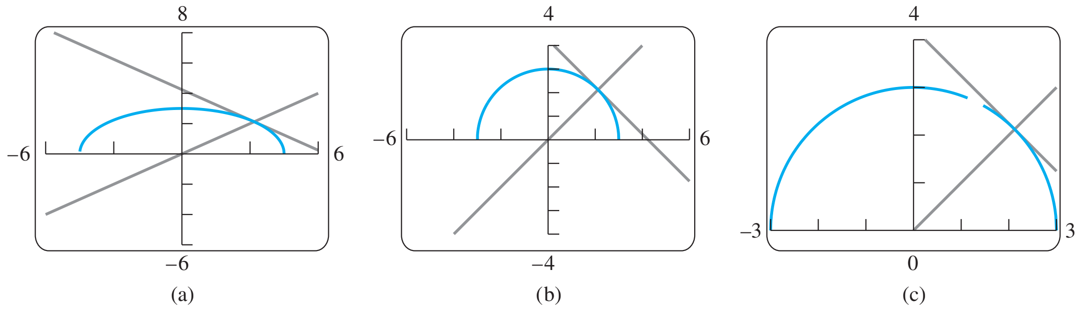


FIGURA 1.51 Gráficas de rectas perpendiculares $y = x$ y $y = -x + 3\sqrt{2}$, y la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$ aparecen distorsionadas (a) en una ventana no cuadrada, pero son claras en (b) y (c), que son ventanas cuadradas (ejemplo 2).

EJEMPLO 3 Grafique la función $y = \dfrac{1}{2 - x}$.

Solución La figura 1.52a muestra la gráfica en la ventana cuadrada predeterminada $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ de nuestro software de graficación. Observe el segmento de recta casi vertical en $x = 2$. En realidad no es parte de la gráfica, y $x = 2$ no pertenece al dominio de la función. Por prueba y error logramos eliminar la recta si cambiamos el tamaño de la ventana a una menor de $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$, que muestra mejor la gráfica (figura 1.52b). ■

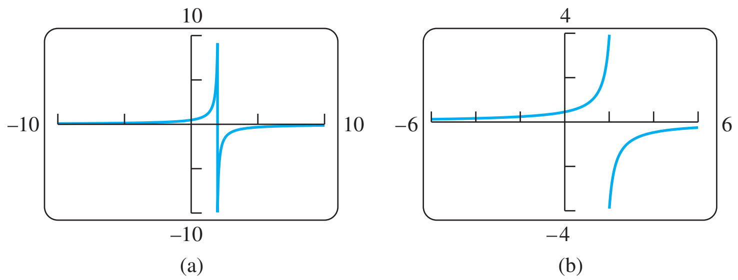


FIGURA 1.52 Gráficas de la función $y = \dfrac{1}{2 - x}$. Sin una cuidadosa elección de la ventana, podría aparecer una recta vertical (ejemplo 3).

En ocasiones la gráfica de una función trigonométrica oscila muy rápido. Cuando una calculadora o el software trazan los puntos de la gráfica y los conectan, se pierden muchos de los puntos máximos y mínimos. La gráfica resultante es muy engañosa.

EJEMPLO 4 Grafique la función $f(x) = \text{sen } 100x$.

Solución La figura 1.53a muestra la gráfica de f en la ventana de $[-12, 12]$ por $[-1, 1]$. Vemos que la gráfica se ve muy extraña, ya que la curva senoidal debe oscilar periódicamente entre -1 y 1. El comportamiento no se exhibe en la figura 1.53a. Podríamos experimentar con

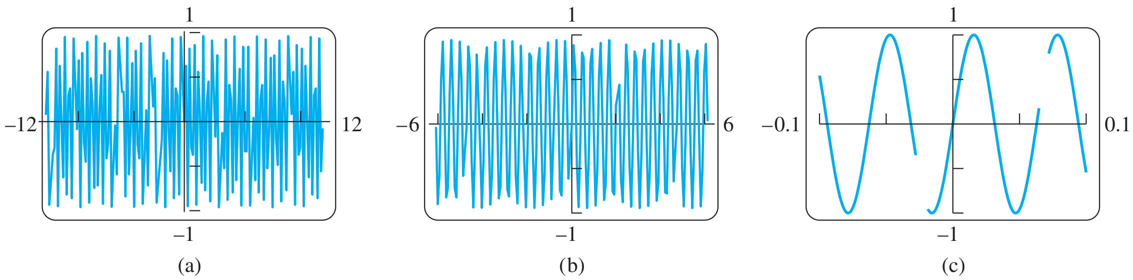


FIGURA 1.53 Gráficas de la función $y = \text{sen } 100x$ en tres ventanas. Puesto que el periodo es $2\pi/100 \approx 0.063$, la ventana más pequeña en (c) muestra mejor los aspectos reales de esta función que oscila rápidamente (ejemplo 4).

una ventana más pequeña, digamos $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$, pero la gráfica no es mejor (figura 1.53b). La dificultad es que el periodo de la función trigonométrica $y = \operatorname{sen} 100x$ es muy pequeño $(2\pi/100 \approx 0.063)$. Si elegimos la ventana mucho más pequeña $[-0.1, 0.1]$ por $[-1, 1]$, obtenemos la gráfica que se observa en la figura 1.53c. Esa gráfica revela las oscilaciones esperadas de una curva senoidal. ■

EJEMPLO 5 Grafique la función $y = \cos x + \frac{1}{50}\operatorname{sen} 50x$.

Solución En la ventana $[-6, 6]$ por $[-1, 1]$ la gráfica se parece mucho a la función coseno con algunas pequeñas perturbaciones en ella (figura 1.54a). Obtenemos una mejor imagen cuando reducimos en forma significativa la ventana a $[-0.6, 0.6]$ por $[0.8, 1.02]$, para obtener la gráfica de la figura 1.54b. Ahora vemos las pequeñas pero rápidas oscilaciones del segundo término, $(1/50)\operatorname{sen} 50x$, que se añaden a los valores relativamente mayores de la curva coseno. ■

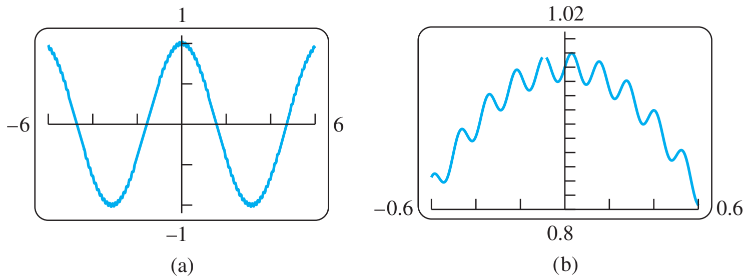


FIGURA 1.54 En (b) vemos la imagen de un acercamiento de la función $y = \cos x + \frac{1}{50}\operatorname{sen} 50x$ cuya gráfica está en (a). El término $\cos x$ claramente domina al segundo término, $\frac{1}{50}\operatorname{sen} 50x$, que produce las oscilaciones rápidas a lo largo de la curva coseno. Ambas imágenes son necesarias para tener una idea clara de la gráfica (ejemplo 5).

Cómo obtener una gráfica completa

Algunos dispositivos no mostrarán la parte de la gráfica de $f(x)$ cuando $x < 0$. Por lo regular eso sucede a consecuencia del procedimiento que el dispositivo utiliza para calcular los valores de la función. En ocasiones obtenemos la gráfica completa al definir la fórmula para la función de una manera diferente.

EJEMPLO 6 Grafique la función $y = x^{1/3}$.

Solución Algunos dispositivos para graficar muestran la gráfica que aparece en la figura 1.55a. Cuando la comparamos con la gráfica de $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ en la figura 1.17, vemos que se pierde la rama izquierda para $x < 0$. La razón de que las gráficas difieran es que muchas

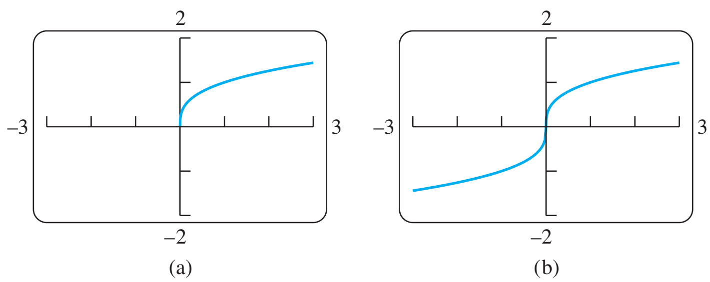


FIGURA 1.55 En (a) se pierde la rama izquierda de la gráfica de $y = x^{1/3}$. En (b) graficamos la función $f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$, en donde se obtienen ambas ramas. (Véase el ejemplo 6).

calculadoras y muchos programas de graficación calculan $x^{1/3}$ como $e^{(1/3)\ln x}$. Puesto que la función logaritmo no está definida para valores negativos de x, el dispositivo de cómputo sólo logra producir la rama derecha, donde $x > 0$. (En el capítulo 7 se presentan las funciones logarítmica y exponencial).

Para obtener la representación completa que muestre ambas ramas, podemos graficar la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}.$$

Esta función es igual a $x^{1/3}$, excepto en $x = 0$ (donde f no está definida, aunque $0^{1/3} = 0$). La gráfica de f se presenta en la figura 1.55b. ■

Ejercicios 1.4

Selección de una ventana

T En los ejercicios 1 a 4 utilice una calculadora graficadora o una computadora para determinar cuál de las ventanas dadas muestra mejor la gráfica de la función que se especifica.

1. $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$

a. $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
c. $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ **d.** $[-5, 5]$ por $[-25, 15]$

2. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

a. $[-1, 1]$ por $[-5, 5]$ **b.** $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
c. $[-5, 5]$ por $[-10, 20]$ **d.** $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$

3. $f(x) = 5 + 12x - x^3$

a. $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$ **b.** $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
c. $[-4, 4]$ por $[-20, 20]$ **d.** $[-4, 5]$ por $[-15, 25]$

4. $f(x) = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

a. $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ **b.** $[-2, 6]$ por $[-1, 4]$
c. $[-3, 7]$ por $[0, 10]$ **d.** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

Determinación de una ventana

T En los ejercicios 5 a 30 determine una ventana adecuada para la función dada y utilícela para mostrar su gráfica.

5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 15$ **6.** $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10$ **8.** $f(x) = 4x^3 - x^4$

9. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ **10.** $f(x) = x^2(6 - x^3)$

11. $y = 2x - 3x^{2/3}$ **12.** $y = x^{1/3}(x^2 - 8)$

13. $y = 5x^{2/5} - 2x$ **14.** $y = x^{2/3}(5 - x)$

15. $y = |x^2 - 1|$ **16.** $y = |x^2 - x|$

17. $y = \frac{x + 3}{x + 2}$ **18.** $y = 1 - \frac{1}{x + 3}$

19. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ **20.** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

21. $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$ **22.** $f(x) = \frac{8}{x^2 - 9}$

23. $f(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{4x^2 - 10x}$ **24.** $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

25. $y = \operatorname{sen} 250x$ **26.** $y = 3 \cos 60x$

27. $y = \cos\left(\frac{x}{50}\right)$ **28.** $y = \frac{1}{10} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{10}\right)$

29. $y = x + \frac{1}{10} \operatorname{sen} 30x$ **30.** $y = x^2 + \frac{1}{50} \cos 100x$

31. Grafique la mitad inferior de la circunferencia definida por la ecuación $x^2 + 2x = 4 + 4y - y^2$.

32. Grafique la rama superior de la hipérbola $y^2 - 16x^2 = 1$.

33. Grafique cuatro periodos de la función $f(x) = -\tan 2x$.

34. Grafique dos periodos de la función $f(x) = 3 \cot \frac{x}{2} + 1$.

35. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$.

36. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

T Graficación en modo de puntos (Dot)

Otra forma de evitar conexiones incorrectas cuando se utiliza un dispositivo de graficación es por medio del uso del "modo de puntos" (dot) que traza sólo los puntos. Si su dispositivo de graficación le permite ese modo, úselos para trazar las funciones en los ejercicios 37 a 40.

37. $y = \frac{1}{x - 3}$ **38.** $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

39. $y = x\lfloor x \rfloor$ **40.** $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Capítulo 1 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Su rango? ¿Qué es un diagrama de flechas para una función? Dé ejemplos.

2. ¿Qué es la gráfica de una función con valores reales de una variable real? ¿Cuál es la prueba de la recta vertical?

3. ¿Qué es una función definida por partes? Dé ejemplos.

4. ¿Cuáles son los tipos importantes de funciones que se encuentran con frecuencia en cálculo? Dé un ejemplo de cada tipo.

5. ¿Qué se entiende por función creciente? ¿Y por función decreciente? Dé un ejemplo de cada una.

6. ¿Qué es una función par? ¿Qué es una función impar? ¿Cuáles son las propiedades de simetría que tienen las gráficas de tales funciones? De esto, ¿qué ventajas se pueden aprovechar? Dé un ejemplo de una función que no sea par ni impar.

7. Si f y g son funciones reales, ¿cómo están relacionados los dominios de $f + g$, $f - g$, fg y f/g con los dominios de f y g? Dé ejemplos.

8. ¿Cuándo es posible realizar la composición de una función con otra? Dé ejemplos de composiciones y sus valores en varios puntos. ¿Importa el orden en el que se lleva a cabo la composición de funciones?

9. ¿Cómo debe cambiar la ecuación $y = f(x)$ para trasladar su gráfica $|k|$ unidades verticalmente hacia a arriba o hacia abajo? ¿Horizontalmente hacia la derecha o hacia la izquierda? Dé ejemplos.

10. ¿Cómo debe cambiar la ecuación $y = f(x)$ para comprimir o alargar su gráfica por un factor $c > 1$? ¿Para reflejar la gráfica con respecto a un eje de coordenadas? Dé ejemplos.

11. ¿Cuál es la ecuación estándar de una elipse con centro en (h, k)? ¿Cuál es su eje mayor? ¿Cuál es su eje menor? Dé ejemplos.

12. ¿Qué es una medida en radianes? ¿Cómo se convierte de radianes a grados? ¿Cómo se convierte de grados a radianes?

13. Realice la gráfica de cada una de las seis funciones trigonométricas. ¿Qué simetrías tienen sus gráficas?

14. ¿Qué es una función periódica? Dé ejemplos. ¿Cuál es el periodo de cada una de las seis funciones trigonométricas?

15. Comenzando con la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y las fórmulas para $\cos(A + B)$ y $\operatorname{sen}(A + B)$, muestre cómo se pueden deducir varias de las identidades trigonométricas.

16. ¿Cómo está relacionada la fórmula general para la función seno, $f(x) = A \operatorname{sen}((2\pi/B)(x - C)) + D$, con el desplazamiento, el alargamiento, la compresión y la reflexión de su gráfica? Dé ejemplos. Trace la gráfica de la curva del seno e identifique cómo actúan las constantes A, B, C y D.

17. Mencione tres problemas que podrían surgir cuando se grafican funciones mediante una calculadora o una computadora con un programa de graficación. Dé ejemplos.

Capítulo 1 Ejercicios de práctica

Funciones y sus gráficas

1. Exprese el área y la circunferencia de un círculo como funciones del radio del círculo. Luego exprese el área como función de la circunferencia.

2. Exprese el radio de una esfera como función del área de la superficie de la esfera. Luego exprese el área de la superficie como función del volumen.

3. Un punto P, en el primer cuadrante, está en la parábola $y = x^2$. Exprese las coordenadas de P como función del ángulo de inclinación de la recta que une a P con el origen.

4. Un globo de aire caliente que se eleva verticalmente desde el nivel del suelo es localizado por una estación rastreadora ubicada a 500 ft del punto de lanzamiento. Exprese la altura del globo como una función del ángulo que forma la recta, que va de la estación al globo, con el suelo.

En los ejercicios 5 a 8, determine si la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje y, al origen o a ninguno de los dos.

5. $y = x^{1/5}$
6. $y = x^{2/5}$
7. $y = x^2 - 2x - 1$
8. $y = e^{-x^2}$

En los ejercicios 9 a 16, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

9. $y = x^2 + 1$
10. $y = x^5 - x^3 - x$
11. $y = 1 - \cos x$
12. $y = \sec x \tan x$
13. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 - 2x}$
14. $y = x - \operatorname{sen} x$
15. $y = x + \cos x$
16. $y = x \cos x$

17. Suponga que tanto f como g son funciones impares definidas sobre toda la recta real. ¿Cuáles de las siguientes (donde estén definidas) son pares? ¿Cuáles son impares?

a. fg **b.** f^3 **c.** $f(\operatorname{sen} x)$ **d.** $g(\sec x)$ **e.** $|g|$

18. Si $f(a - x) = f(a + x)$, demuestre que $g(x) = f(x + a)$ es una función par.

En los ejercicios 19 a 28, determine **(a)** el dominio y **(b)** el rango.

19. $y = |x| - 2$
20. $y = -2 + \sqrt{1 - x}$
21. $y = \sqrt{16 - x^2}$
22. $y = 3^{2-x} + 1$
23. $y = 2e^{-x} - 3$
24. $y = \tan(2x - \pi)$
25. $y = 2 \operatorname{sen}(3x + \pi) - 1$
26. $y = x^{2/5}$
27. $y = \ln(x - 3) + 1$
28. $y = -1 + \sqrt[3]{2 - x}$

29. Indique si cada una de las funciones es creciente, decreciente o ninguna de éstas.

a. El volumen de una esfera como función de su radio.

b. La función mayor entero.

c. La altura sobre el nivel del mar en la Tierra como función de la presión atmosférica (suponiéndola distinta de cero).

d. La energía cinética como una función de la velocidad de una partícula.

30. Determine el mayor intervalo en el cual la función dada es creciente.

a. $f(x) = |x - 2| + 1$ **b.** $f(x) = (x + 1)^4$

c. $g(x) = (3x - 1)^{1/3}$ **d.** $R(x) = \sqrt{2x - 1}$

Funciones definidas por partes

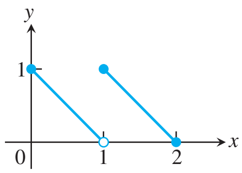
En los ejercicios 31 y 32, determine **(a)** el dominio y **(b)** el rango.

31. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x \le 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \le 4 \end{cases}$

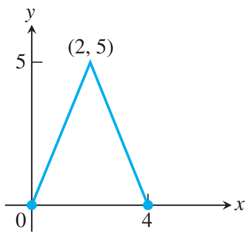
32. $y = \begin{cases} -x - 2, & -2 \le x \le -1 \\ x, & -1 < x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

En los ejercicios 33 y 34, escriba una fórmula definida por partes para la función.

33.



34.



Composición de funciones

En los ejercicios 35 y 36, determine

a. $(f \circ g)(-1)$. **b.** $(g \circ f)(2)$.

c. $(f \circ f)(x)$. **d.** $(g \circ g)(x)$.

35. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

36. $f(x) = 2 - x, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

En los ejercicios 37 y 38, **(a)** escriba las fórmulas para $f \circ g$ y para $g \circ f$; para cada una de ellas determine **(b)** el dominio y **(c)** el rango.

37. $f(x) = 2 - x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x+2}$

38. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = \sqrt{1-x}$

Para los ejercicios 39 y 40, haga un bosquejo de las gráficas de f y de $f \circ f$.

39. $f(x) = \begin{cases} -x-2, & -4 \le x \le -1 \\ -1, & -1 < x \le 1 \\ x-2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Composición con valores absolutos En los ejercicios 41 a 48, grafique juntas f_1 y f_2. Luego describa cómo la aplicación de la función valor absoluto en f_2 afecta a la gráfica de f_1.

	$f_1(x)$	$f_2(x)$
41.	x	$\lvert x\rvert$
42.	x^2	$\lvert x\rvert^2$
43.	x^3	$\lvert x^3\rvert$
44.	$x^2 + x$	$\lvert x^2 + x\rvert$
45.	$4 - x^2$	$\lvert 4 - x^2\rvert$
46.	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
47.	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\lvert x\rvert}$
48.	sen x	sen $\lvert x\rvert$

Traslación y cambio de tamaño de gráficas

49. Suponga que se tiene la gráfica de g. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen, a partir de la gráfica de g, mediante traslación, cambio de tamaño o reflexión, como se indica.

a. Hacia arriba $\frac{1}{2}$ unidad, a la derecha 3

b. Hacia abajo 2 unidades, a la izquierda $\frac{2}{3}$

c. Reflexión con respecto al eje y

d. Reflexión con respecto al eje x

e. Alargamiento vertical en un factor de 5

f. Compresión horizontal en un factor de 5

50. Describa cómo se obtiene cada gráfica teniendo como base la gráfica de $y = f(x)$.

a. $y = f(x - 5)$ **b.** $y = f(4x)$

c. $y = f(-3x)$ **d.** $y = f(2x + 1)$

e. $y = f\left(\dfrac{x}{3}\right) - 4$ **f.** $y = -3f(x) + \dfrac{1}{4}$

En los ejercicios 51 a 54, grafique cada función; no lo haga mediante el trazado de puntos, sino iniciando con la gráfica de una de las funciones estándar que se presentaron en las figuras 1.14 a 1.17; luego aplique una transformación adecuada.

51. $y = -\sqrt{1 + \dfrac{x}{2}}$ **52.** $y = 1 - \dfrac{x}{3}$

53. $y = \dfrac{1}{2x^2} + 1$ **54.** $y = (-5x)^{1/3}$

Trigonometría

En los ejercicios 55 a 58 realice un bosquejo de la gráfica dada. ¿Cuál es el periodo de la función?

55. $y = \cos 2x$ **56.** $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

57. $y = \operatorname{sen} \pi x$ **58.** $y = \cos \dfrac{\pi x}{2}$

59. Grafique $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

60. Grafique $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

En los ejercicios 61 a 64, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Los lados a, b y c son opuestos a los ángulos A, B y C, respectivamente.

61. a. Determine a y b, si $c = 2$, $B = \pi/3$.

b. Determine a y c, si $b = 2$, $B = \pi/3$.

62. a. Exprese a en términos de A y c.

b. Exprese a en términos de A y b.

63. a. Exprese a en términos de B y b.

b. Exprese C en términos de A y a.

64. a. Exprese sen A en términos de a y c.

b. Exprese sen A en términos de b y c.

65. Altura de un poste Dos cables van de la parte superior T de un poste vertical a dos puntos B y C en el suelo, donde C está 10 m más cerca a la base del poste que el punto B. Si el cable BT forma un ángulo de 35° con la horizontal, mientras que el cable CT forma un ángulo de 50° con la horizontal, ¿cuál es la altura del poste?

66. Altura de un globo meteorológico Dos observadores ubicados en A y B, separados 2 km entre sí, miden de forma simultánea el ángulo de elevación de un globo aerostático; las medidas son 40° y 70°, respectivamente. Si el globo está directamente arriba de un punto del segmento de recta que une a A y B, determine la altura del globo.

T **67. a.** Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos(x/2)$.

b. ¿Cuál parece ser el periodo de esta función?

c. Confirme de forma algebraica su respuesta al inciso (b).

T **68. a.** Grafique $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$.

b. ¿Cuáles son el dominio y el rango de f?

c. ¿Es f periódica? Justifique su respuesta.

Capítulo 1 Ejercicios adicionales y avanzados

Las funciones y sus gráficas

1. ¿Existen dos funciones f y g, tales que $f \circ g = g \circ f$? Justifique su respuesta.

2. ¿Existen dos funciones f y g con la siguiente propiedad? Las gráficas de f y g no son líneas rectas, pero la gráfica de $f \circ g$ es una recta. Justifique su respuesta.

3. Si $f(x)$ es impar, ¿puede decir algo de $g(x) = f(x) - 2$? ¿Qué ocurriría si f fuera par? Justifique su respuesta.

4. Si $g(x)$ es una función impar definida para todos los valores de x, ¿qué puede decir acerca de $g(0)$? Justifique su respuesta.

5. Grafique la ecuación $|x| + |y| = 1 + x$.

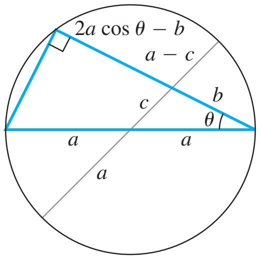
6. Grafique la ecuación $y + |y| = x + |x|$.

Deducciones y demostraciones

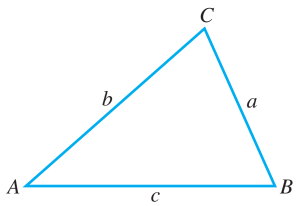
7. Demuestre las siguientes identidades.

a. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ **b.** $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$

8. Explique la siguiente "demostración sin palabras" de la ley de los cosenos. (Fuente: "Proof without Words: The Law of Cosines", Sidney H. Kung, *Mathematics Magazine*, vol. 63, núm. 5, diciembre de 1990, p. 342).



9. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $(1/2)ab \operatorname{sen} C = (1/2)bc \operatorname{sen} A = (1/2)ca \operatorname{sen} B$.



10. Demuestre que el área del triángulo ABC está dada por $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde $s = (a + b + c)/2$, es el semiperímetro del triángulo.

11. Demuestre que si f es tanto par como impar, entonces $f(x) = 0$ para toda x en el dominio de f.

12. a. Descomposiciones par-impar Sea f una función cuyo dominio es simétrico con respecto al origen, esto es, siempre que x esté en el dominio, $-x$ también lo estará. Demuestre que f es la suma de una función par y de una función impar:

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

donde P es una función par e I es una función impar. (*Sugerencia:* Sea $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Demuestre que $P(-x) = P(x)$, así que P es par. Luego demuestre que $I(x) = f(x) - P(x)$ es impar).

b. Unicidad Demuestre que sólo existe una forma de escribir f como la suma de una función par y una función impar. (*Sugerencia:* Una forma se presenta en el inciso (a). Si además, $f(x) = P_1(x) + I_1(x)$, donde P_1 es par e I_1 es impar, demuestre que $P - P_1 = I_1 - I$. Luego utilice el ejercicio 11 para demostrar que $P = P_1$ e $I = I_1$.

Exploraciones con graficadoras-efectos de los parámetros

13. ¿Qué sucede con la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, cuando

a. a cambia, mientras que b y c permanecen fijas?

b. b cambia (a y c permanecen fijas, con $a \neq 0$)?

c. c cambia (a y b permanecen fijas, con $a \neq 0$)?

14. ¿Qué sucede con la gráfica de $y = a(x + b)^3 + c$, cuando

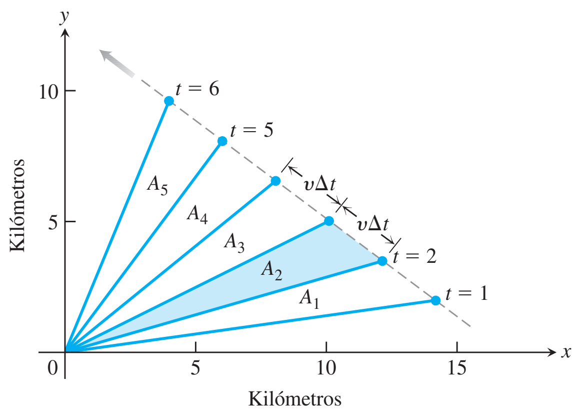
a. a cambia, mientras que b y c permanecen fijas?

b. b cambia (a y c permanecen fijas, con $a \neq 0$)?

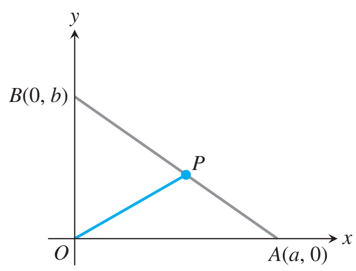
c. c cambia (a y b permanecen fijas, con $a \neq 0$)?

Geometría

15. El centro de masa de un objeto se mueve a velocidad constante v, a lo largo de una recta. La siguiente figura ilustra el sistema de coordenadas y la recta de movimiento. Los puntos indican las posiciones del objeto cada segundo. ¿Por qué las áreas $A_1, A_2, \ldots, A_5$ de la figura son iguales? Como en la ley de áreas iguales de Kepler [véase la sección 13.6 (volumen 2)], la recta que une el centro de masa del objeto con el origen barre áreas iguales en tiempos iguales.



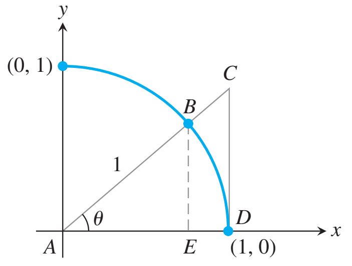
16. a. Determine la pendiente de la recta que va del origen al punto medio, P, del lado AB del triángulo de la siguiente figura ($a, b > 0$).



b. ¿Cuándo es OP perpendicular a AB?

17. Considere el cuarto del círculo de radio 1 y los triángulos rectángulos ABE y ACD de la siguiente figura. Utilice las fórmulas comunes del área para concluir que

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$



18. Sean $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$. ¿Qué condiciones deben satisfacer las constantes a, b, c y d para que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo valor de x?

Capítulo 1 Proyectos de aplicación tecnológica

Una panorámica de Mathematica

Un panorama de *Mathematica* es suficiente para completar los módulos de *Mathematica* que aparecen en el sitio Web.

Módulo Mathematica/Maple:

Modelación del cambio: Resortes, conducción segura, radiactividad, árboles, peces y mamíferos

Construya e interprete modelos matemáticos, analícelos y mejórelos; luego haga predicciones con base en ellos.

2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCIÓN Los matemáticos del siglo XVII estuvieron profundamente interesados en el estudio del movimiento de objetos en la Tierra o cerca de ella, así como en el movimiento de los planetas y las estrellas. Este estudio incluyó tanto la rapidez de los objetos como la dirección de su movimiento en cualquier instante; los matemáticos sabían que la dirección era tangente a la trayectoria del movimiento. El concepto de límite es fundamental para determinar la velocidad de un objeto en movimiento y la tangente a una curva. En este capítulo desarrollamos tal concepto, primero de una manera intuitiva y luego formalmente. Utilizamos límites para describir la forma en que una varía función. Algunas funciones varían *continuamente*, cambios pequeños en x producen sólo cambios pequeños en $f(x)$. Otras funciones pueden tener valores que "saltan", varían erráticamente, o tienden a aumentar o disminuir sin cota. La noción de límite brinda una forma precisa de distinguir entre dichos comportamientos.

2.1 Tasas de cambio y tangentes a curvas

El cálculo es una herramienta que sirve para ayudarnos a comprender cómo cambian las relaciones funcionales, tal como la posición o la rapidez de un objeto en movimiento como una función del tiempo, o bien, el cambio de la pendiente de una curva por la cual se desplaza un punto. En esta sección presentamos las ideas de tasas de cambio promedio e instantánea y mostramos que están muy relacionadas con la pendiente de una curva en un punto P en la curva. En el siguiente capítulo estudiaremos desarrollos precisos de conceptos tan importantes, pero por ahora utilizaremos un enfoque informal, el cual permitirá ver al lector cómo esos conceptos conducen de una manera natural a la idea central de este capítulo: el *límite*. Veremos que los límites desempeñan un papel fundamental en cálculo y en el estudio del cambio.

Rapidez promedio y rapidez instantánea

BIOGRAFÍA HISTÓRICA*

Galileo Galilei
(1564–1642)

A finales del siglo XVI, Galileo descubrió que si un sólido, cerca de la superficie terrestre, se deja caer a partir del reposo (es decir, cuando no está en movimiento) y se le permite caer libremente, recorrerá una distancia proporcional al cuadrado del tiempo durante el que ha caído. Este tipo de movimiento se denomina **caída libre**. Se supone que la resistencia que ejerce el aire para detener la caída del objeto es despreciable y que la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravedad. Si y denota la distancia recorrida en pies (ft) después de t segundos, entonces la ley de Galileo es

$$y = 16t^2,$$

donde 16 es la constante de proporcionalidad (aproximada). (Si y se mide en metros, la constante es 4.9).

La **rapidez promedio** de un objeto en movimiento durante un intervalo de tiempo se determina dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido al recorrer esa distancia. La unidad de medida es longitud por unidad de tiempo: kilómetros por hora, pies (o metros) por segundo o cualquiera que sea adecuada para el problema del que se trate.

* Para aprender más acerca de los personajes históricos mencionados en el texto, así como sobre el desarrollo de muchos elementos importantes y temas de cálculo, visite **www.aw.com/thomas**.

EJEMPLO 1 Se deja caer una roca desde lo alto de un acantilado. ¿Cuál es la rapidez promedio

(a) durante los primeros 2 segundos de la caída?

(b) durante el intervalo de un segundo entre el segundo 1 y el segundo 2?

Solución La rapidez promedio de la roca durante el intervalo de tiempo dado es el cambio en la distancia, Δy, dividido entre el intervalo de tiempo, Δt. (En el apéndice 3 se revisan incrementos tales como Δy y Δt). Si medimos la distancia en ft y el tiempo en segundos, tenemos los siguientes cálculos:

(a) Para los primeros 2 segundos: $$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32\,\frac{\text{ft}}{\text{seg}}$$

(b) Del segundo 1 al segundo 2: $$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48\,\frac{\text{ft}}{\text{seg}}$$

Buscamos una forma para determinar la rapidez de un objeto que cae en el instante t_0, en vez de utilizar su rapidez promedio en un intervalo de tiempo. Para hacer esto, examinamos lo que sucede cuando calculamos la rapidez promedio en intervalos cada vez más pequeños, iniciando en t_0. El siguiente ejemplo muestra el proceso. Aquí, nuestro análisis es informal, pero se hará con mayor precisión en el capítulo 3.

EJEMPLO 2 Determine la rapidez de la roca que cae en el ejemplo 1, en $t = 1$ y en $t = 2$ segundos.

Solución Podemos calcular la rapidez promedio de la roca en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, que tiene una longitud $\Delta t = h$, como

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16{t_0}^2}{h}. \tag{1}$$

No es posible utilizar esta fórmula para calcular la rapidez "instantánea" en el momento exacto t_0 haciendo simplemente la sustitución $h = 0$, ya que no podemos dividir entre cero. Pero *podemos* usarla para calcular la rapidez promedio en intervalos de tiempo cada vez más pequeños iniciando en $t_0 = 1$ y $t_0 = 2$. Cuando hacemos esto, vemos un patrón (tabla 2.1).

TABLA 2.1 Valores de rapidez promedio en intervalos de tiempo pequeños $[t_0, t_0 + h]$

Rapidez promedio: $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(t_0 + h)^2 - 16{t_0}^2}{h}$

Longitud del intervalo de tiempo h	Rapidez promedio en el intervalo de longitud h que inicia en $t_0 = 1$	Rapidez promedio en el intervalo de longitud h que inicia en $t_0 = 2$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

La rapidez promedio en intervalos que inician en $t_0 = 1$, cuando la longitud del intervalo disminuye, parece que se aproxima a un valor límite de 32. Esto sugiere que la roca, en $t_0 = 1$ seg, cae con una rapidez de 32 ft/seg. Confirmemos esto algebraicamente.

Si consideramos que $t_0 = 1$, luego desarrollamos el numerador en la ecuación (1) y simplificamos, encontraremos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(1+2h+h^2) - 16}{h}$$

$$= \frac{32h + 16h^2}{h} = 32 + 16h.$$

Para valores de h diferentes de cero, las expresiones de los lados derecho e izquierdo son equivalentes, y la rapidez promedio es de $32 + 16\text{h}$ ft/seg. Ahora vemos por qué la rapidez promedio tiene el valor límite $32 + 16(0) = 32$ ft/seg, cuando h se aproxima a cero.

De forma análoga, si en la ecuación (1) se establece que $t_0 = 2$, el procedimiento da como resultado

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 64 + 16h$$

para valores de h diferentes de cero. Cuando h está cada vez más cercana a cero, para $t_0 = 2$, la rapidez promedio tiene el valor límite de 64 ft/seg, como lo sugiere la tabla 2.1. ■

La rapidez promedio de un objeto que cae es un ejemplo de una idea más general, la cual se analiza a continuación.

Tasas de cambio promedio y rectas secantes

Dada una función arbitraria $y = f(x)$, calculamos la tasa de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ al dividir el cambio en el valor de y, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ entre la longitud $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ del intervalo durante el cual ocurre el cambio. (Para simplificar la notación, aquí y posteriormente, utilizamos el símbolo h en lugar de Δx).

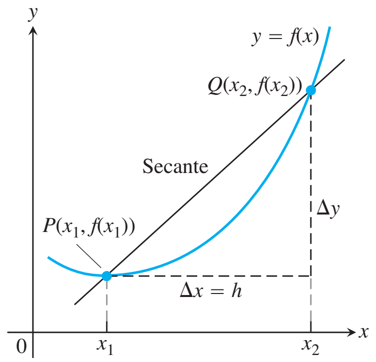


FIGURA 2.1 Una secante a la gráfica de $y = f(x)$. Su pendiente es $\Delta y/\Delta x$, la tasa de cambio promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

DEFINICIÓN La **tasa de cambio promedio** de $y = f(x)$ con respecto a x, en el intervalo $[x_1, x_2]$, es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Geométricamente, la tasa de cambio de f en $[x_1, x_2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$ (figura 2.1). En geometría, una recta que une dos puntos de una curva es una **secante** de esa curva. Así, la tasa de cambio promedio de f de x_1 a x_2 es la misma que la pendiente de la secante PQ. Considere lo que sucede cuando el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva, de manera que la longitud h del intervalo en el que ocurre el cambio se aproxima a cero.

Definición de la pendiente de una curva

Sabemos lo que significa la pendiente de una recta, que nos indica la razón a la cual se eleva o desciende, esto es, su tasa de cambio como la gráfica de una función lineal. Pero, ¿qué significa *la pendiente de una curva* en un punto P de ésta? Si existe una recta *tangente* a la curva en P (una recta que sólo toca la curva, como la tangente a una circunferencia) sería razonable identificar *la pendiente de la tangente* como la pendiente de la curva en P. Así, necesitamos un significado preciso para la tangente en un punto de esta curva.

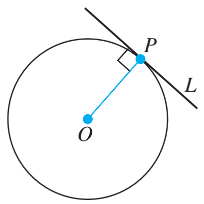


FIGURA 2.2 L es tangente a la circunferencia en P si pasa por P de manera perpendicular al radio OP.

Para circunferencias, la tangencia es directa. Una recta, L, es tangente a una circunferencia en un punto P si L pasa por P perpendicularmente al radio en P (figura 2.2). Tal recta sólo *toca* la circunferencia. Pero, ¿qué significa decir que una recta L es tangente a alguna curva C en el punto P?

Con la finalidad de definir tangencia para curvas generales, necesitamos un enfoque que tome en cuenta el comportamiento de las secantes que pasan por P y puntos cercanos Q, cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva (figura 2.3). A continuación presentamos la idea:

1. Inicie con lo que *podemos* calcular, es decir, la pendiente de la secante PQ.
2. Investigue el valor límite de la pendiente de la recta secante cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. (En la siguiente sección aclaramos la idea de *límite*).
3. Si el *límite* existe, tómelo como la pendiente de la curva en P y *defina* la tangente a la curva en P como la recta que pasa por P con esta pendiente.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Pierre de Fermat
(1601–1665)

Seguimos este procedimiento en el problema de la roca que caía analizado en el ejemplo 2. El siguiente ejemplo ilustra la idea geométrica para la tangente a una curva.

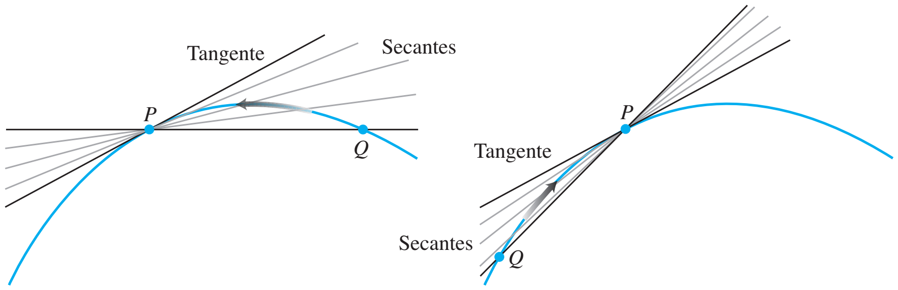


FIGURA 2.3 La tangente a la curva en P es la recta que pasa por P cuya pendiente es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $Q \to P$ por ambos lados.

EJEMPLO 3 Seguimos este procedimiento en el problema de la roca que caía analizado en el ejemplo 2. El siguiente ejemplo ilustra la idea geométrica para la tangente a una curva.

Solución Iniciamos con una recta secante que pasa por $P(2, 4)$ y $Q(2 + h, (2 + h)^2)$, un punto cercano. Luego escribimos una expresión para la pendiente de la secante PQ e investigamos lo que sucede a la pendiente cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva:

$$\text{Pendiente de la secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Si $h > 0$, entonces Q está arriba y a la derecha de P, como en la figura 2.4. Si $h < 0$, entonces Q está a la izquierda de P (no se muestra). En cualquier caso, cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, h se aproxima a cero y la pendiente de la secante $h + 4$ se aproxima a 4. Tomamos 4 como la pendiente de la parábola en P.

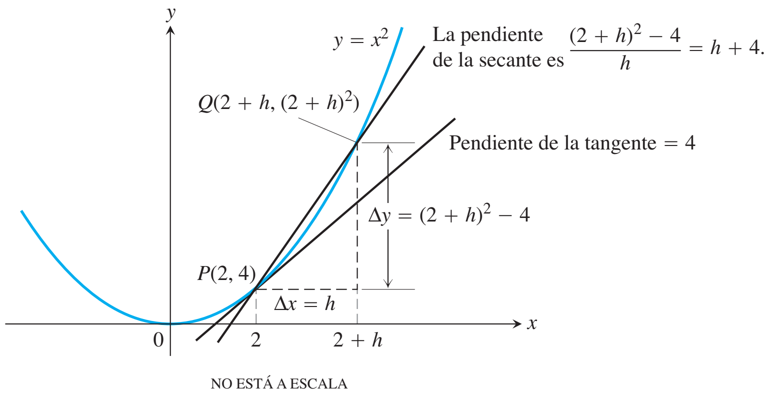


FIGURA 2.4 Determinación de la pendiente de la parábola $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ como el límite de las pendientes de las rectas secantes (ejemplo 3).

La tangente a la parábola en P es la recta que pasa por P con pendiente 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \qquad \text{Ecuación punto pendiente}$$
$$y = 4x - 4.$$

Tasas de cambio instantáneas y rectas tangentes

Los valores de rapidez (tasas de cambio) a la que caía la roca en el ejemplo 2 en los instantes $t = 1$ y $t = 2$ se denominan *tasas de cambio instantáneas*. Éstas y las pendientes de rectas tangentes están estrechamente relacionadas, como veremos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 La figura 2.5 muestra cómo una población p de moscas de la fruta (*Drosophila*) crece en un experimento de 50 días. El número de moscas se contó en intervalos regulares, tales valores se graficaron con respecto al tiempo t y los puntos se unieron mediante una curva suave (de color naranja) en la figura 2.5. Determine la tasa promedio de crecimiento del día 23 al día 45.

Solución Había 150 moscas el día 23, y 340 el día 45. Así que el número de moscas se incrementó en $340 - 150 = 190$ en $45 - 23 = 22$ días. La tasa de cambio promedio de la población del día 23 al día 45 fue

$$\text{Tasa de cambio promedio: } \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23} = \frac{190}{22} \approx 8.6 \text{ moscas/día}.$$

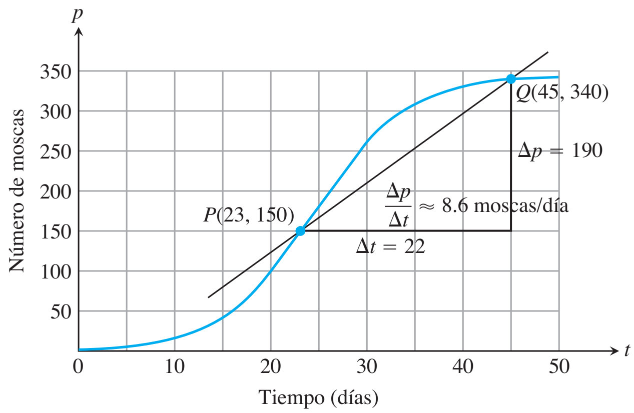


FIGURA 2.5 Crecimiento de una población de moscas de la fruta en un experimento controlado. La tasa promedio de cambio durante los 22 días es la pendiente $\Delta p/\Delta t$ de la recta secante (ejemplo 4).

Este promedio es la pendiente de la secante que pasa por los puntos P y Q en la gráfica de la figura 2.5.

La tasa de cambio promedio del día 23 al día 45, que se calculó en el ejemplo 4, no nos dice qué tan rápido cambia la población el día 23. Para eso necesitamos examinar intervalos de tiempo más cercanos al día en cuestión.

EJEMPLO 5 ¿Qué tan rápido aumentó, en el día 23, el número de moscas en la población del ejemplo 4?

Solución Para responder la pregunta, examinamos las tasas de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños que inicien en el día 23. En términos geométricos, encontramos dichas tasas mediante el cálculo de las pendientes de las rectas secantes de P a Q, para una sucesión de puntos Q que se aproximan a P a lo largo de la curva (figura 2.6).

Q	Pendiente de $PQ = \Delta p/\Delta t$ (moscas/día)
(45, 340)	$\dfrac{340 - 150}{45 - 23} \approx 8.6$
(40, 330)	$\dfrac{330 - 150}{40 - 23} \approx 10.6$
(35, 310)	$\dfrac{310 - 150}{35 - 23} \approx 13.3$
(30, 265)	$\dfrac{265 - 150}{30 - 23} \approx 16.4$

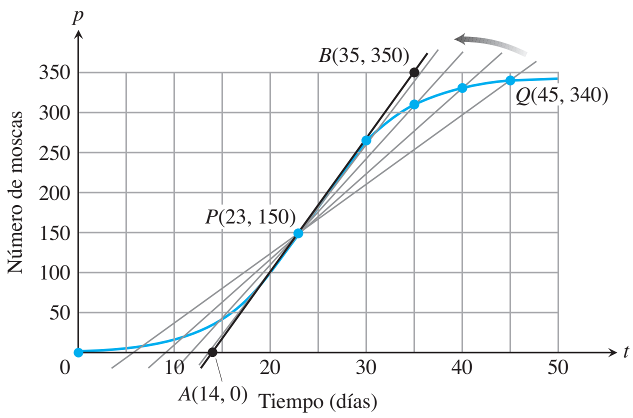


FIGURA 2.6 Las posiciones y pendientes de cuatro secantes que pasan por el punto P en la gráfica de la mosca de la fruta (ejemplo 5).

Los valores en la tabla indican que las pendientes de las secantes aumentan de 8.6 a 16.4 cuando la coordenada t de Q disminuye de 45 a 30; esperaríamos que las pendientes aumenten un poco cuando t continúe hacia 23. Geométricamente, las secantes giran alrededor de P y, en la figura, parece que se aproximan a la recta en negro. Como esta recta parece que pasa por los puntos (14, 0) y (35, 350), tiene pendiente

$$\frac{350 - 0}{35 - 14} = 16.7 \text{ moscas/día (aproximadamente).}$$

En el día 23 la población se incrementaba a una razón de alrededor de 16.7 moscas/día. ■

Se encontró que las tasas instantáneas, en el ejemplo 2, eran los valores de la rapidez promedio, o tasas de cambio promedio, cuando la longitud del intervalo de tiempo, h, se aproximaba a cero. Esto es, la tasa instantánea es el valor al que se aproxima la tasa promedio cuando la longitud h del intervalo, en el que ocurre el cambio, se aproxima a cero. La tasa de cambio promedio corresponde a la pendiente de una recta secante; la tasa instantánea corresponde a la pendiente de la recta tangente cuando la variable independiente se aproxima a un valor fijo. En el ejemplo 2, la variable independiente, t, se aproximó a los valores $t = 1$ y $t = 2$. En el ejemplo 3, la variable independiente x se aproximó al valor $x = 2$. Así, vemos que las tasas instantáneas y las pendientes de rectas tangentes están estrechamente relacionadas. Estudiaremos tal relación a lo largo del siguiente capítulo, pero para hacerlo necesitamos del concepto de *límite*.

Ejercicios 2.1

Tasas de cambio promedio

En los ejercicios 1 a 6, encuentre la tasa de cambio promedio de la función en el intervalo o intervalos dados.

1. $f(x) = x^3 + 1$
 a. $[2, 3]$ **b.** $[-1, 1]$

2. $g(x) = x^2$
 a. $[-1, 1]$ **b.** $[-2, 0]$

3. $h(t) = \cot t$
 a. $[\pi/4, 3\pi/4]$ **b.** $[\pi/6, \pi/2]$

4. $g(t) = 2 + \cos t$
 a. $[0, \pi]$ **b.** $[-\pi, \pi]$

5. $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$; $[0, 2]$

6. $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$; $[1, 2]$

Pendiente de una curva en un punto

En los ejercicios 7 a 14, utilice el método del ejemplo 3 para determinar **(a)** la pendiente de la curva en el punto dado P y **(b)** una ecuación de la recta tangente en P.

7. $y = x^2 - 3$, $P(2, 1)$

8. $y = 5 - x^2$, $P(1, 4)$

9. $y = x^2 - 2x - 3$, $P(2, -3)$

10. $y = x^2 - 4x$, $P(1, -3)$

11. $y = x^3$, $P(2, 8)$

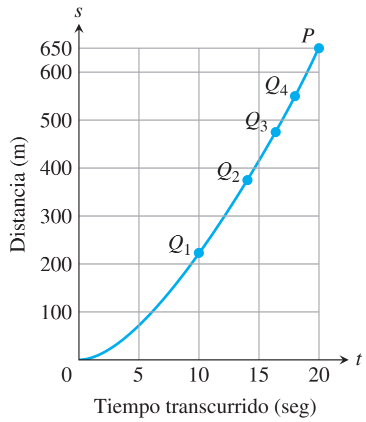
12. $y = 2 - x^3, \quad P(1, 1)$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

Tasas de cambio instantáneas

15. **Rapidez de un automóvil** La siguiente figura muestra la gráfica distancia-tiempo para un automóvil deportivo que acelera a partir del reposo.



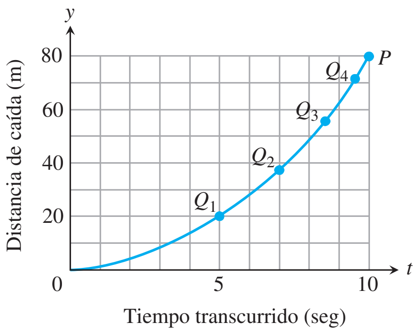
a. Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, luego anote los valores en una tabla como en la figura 2.6. ¿Cuáles son las unidades adecuadas para estas pendientes?

b. Después estime la rapidez del automóvil en el instante $t = 20$ seg.

16. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia contra el tiempo de caída para un objeto que cae de un módulo lunar desde una altura de 80 m con respecto a la superficie de la Luna.

a. Estime las pendientes de las secantes PQ_1, PQ_2, PQ_3 y PQ_4, luego anote los valores en una tabla como en la figura 2.6.

b. ¿Qué tan rápido iba el objeto cuando chocó con la superficie lunar?



T 17. En la siguiente tabla se indican las utilidades de una compañía pequeña para cada uno de los primeros cinco años de operación.

Año	Utilidad en miles de dólares
2000	6
2001	27
2002	62
2003	111
2004	174

a. Trace los puntos que representan la utilidad como una función del año y únalos mediante una curva suave.

b. ¿Cuál es la tasa promedio de aumento de la utilidad entre 2002 y 2004?

c. Utilice su gráfica para estimar la razón a la cual cambiaron las utilidades en 2002.

T 18. Construya una tabla de valores para la función $F(x) = (x + 2)/(x - 2)$ en los puntos $x = 1.2$, $x = 11/10$, $x = 101/100$, $x = 1001/1000$, $x = 10001/10000$ y $x = 1$.

a. Con base en su tabla, determine la tasa promedio de cambio de $F(x)$ en los intervalos $[1, x]$ para cada $x \neq 1$.

b. Si es necesario, amplíe la tabla para tratar de determinar la tasa de cambio de $F(x)$ en $x = 1$.

T 19. Sea $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

a. Determine la tasa de cambio promedio de $g(x)$ con respecto a x en los intervalos $[1, 2]$, $[1, 1.5]$ y $[1, 1 + h]$.

b. Construya una tabla de valores de la tasa promedio de cambio de g con respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$ para algunos valores de h que se aproximen a cero, digamos, $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ y 0.000001.

c. De acuerdo con su tabla, ¿cuál es el valor de la tasa de cambio de $g(x)$ con respecto a x en $x = 1$?

d. Calcule el límite de la tasa de cambio promedio de $g(x)$ con respecto a x en el intervalo $[1, 1 + h]$, cuando h se aproxima a cero.

T 20. Sea $f(t) = 1/t$ para $t \neq 0$.

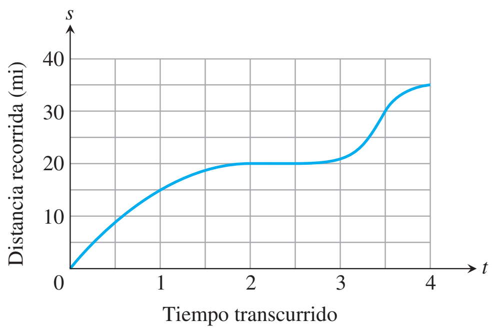
a. Determine la tasa de cambio promedio de f con respecto a t en los intervalos (i) desde $t = 2$ a $t = 3$ y (ii) de $t = 2$ a $t = T$.

b. Construya una tabla de valores de la tasa de cambio promedio de f con respecto a t en el intervalo $[2, T]$ para algunos valores de t que se aproximen a 2, digamos, $t = 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, 2.00001$ y 2.000001.

c. ¿Qué valor indica su tabla para la tasa de cambio de f con respecto a t en $t = 2$?

d. Calcule el límite cuando t se aproxima a 2 de la tasa de cambio promedio de f con respecto a t en el intervalo de 2 a T. Tendrá que trabajar con un poco de álgebra antes de poder sustituir $t = 2$.

21. La siguiente gráfica muestra la distancia total s recorrida por un ciclista después de t horas.

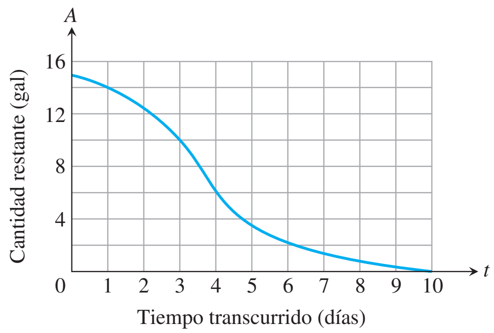


a. Estime la rapidez promedio del ciclista durante los intervalos de tiempo $[0, 1]$, $[1, 2.5]$ y $[2.5, 3.5]$.

b. Estime la rapidez instantánea del ciclista en los instantes $t = 1/2$, $t = 2$ y $t = 3$.

c. Estime la rapidez máxima del ciclista y el momento específico cuando esto ocurre.

22. La siguiente gráfica muestra la cantidad total de gasolina, A, en el tanque de gasolina de un automóvil después de haberlo conducido durante t días.



a. Estime la tasa promedio de consumo de gasolina durante los intervalos de tiempo [0, 3], [0, 5] y [7, 10].

b. Estime la tasa instantánea de consumo de gasolina en los instantes $t = 1$, $t = 4$ y $t = 8$.

c. Estime la tasa máxima de consumo de gasolina y el instante específico en el que ocurre.

2.2 Límite de una función y leyes de los límites

En la sección 2.1 vimos que los límites surgen cuando determinamos la tasa instantánea de cambio de una función o la tangente a una curva. Aquí iniciamos con una definición informal de *límite* y mostramos cómo calcular los valores de límites. En la siguiente sección se presenta una definición precisa.

Ensayo histórico

Límites

Límites de los valores de una función

Con frecuencia, cuando estudiamos una función $y = f(x)$, estamos interesados en el comportamiento de la función *cerca* de un punto particular x, pero no en x_0. Por ejemplo, éste podría ser el caso si x_0 es un número irracional, como π o $\sqrt{2}$, cuyos valores sólo pueden aproximarse mediante números racionales "cercanos" en los que en realidad evaluamos la función. Otra situación ocurre cuando tratamos de evaluar una función en x_0, lo cual lleva a una división entre cero, que no está definida. Esta última circunstancia la encontramos al buscar la tasa instantánea de cambio en y considerando el cociente $\Delta y/h$ para h muy cercano a cero. A continuación damos un ejemplo específico donde exploramos numéricamente cómo se comporta una función cerca de un punto particular en el que no es posible evaluar directamente la función.

EJEMPLO 1 ¿Cuál es el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

cerca de $x = 1$?

Solución La fórmula dada define a f para todos los números reales x, excepto $x = 1$ (no podemos dividir entre cero). Para cualquier $x \neq 1$, es posible simplificar la fórmula al factorizar el numerador y cancelar los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \qquad \text{para} \qquad x \neq 1.$$

La gráfica de f es la recta $y = x + 1$, a la cual se le *quita* el punto (1, 2). Este punto se muestra como un círculo vacío o "agujero" en la figura 2.7. Aunque $f(1)$ no está definida, es claro que podemos hacer el valor de $f(x)$ *tan cercano* a 2 como se quiera si se selecciona a x *suficientemente cerca* de 1 (véase la tabla 2.2). ■

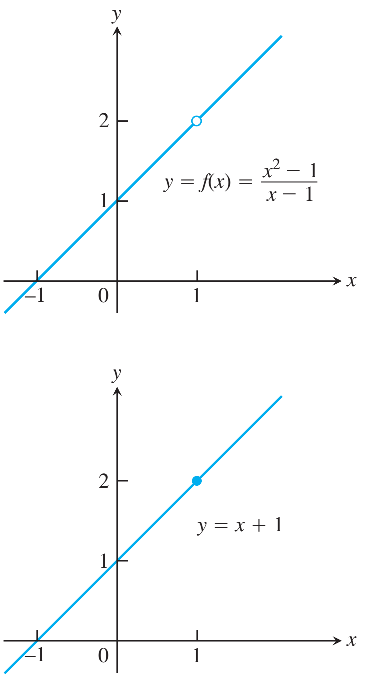


FIGURA 2.7 La gráfica de f es idéntica a la de la recta $y = x + 1$, excepto en $x = 1$, donde f no está definida (ejemplo 1).

TABLA 2.2 Cuanto más cerca esté x de 1, más cerca parecerá estar $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ de 2

Valores de x menores y mayores a 1	$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1}$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

Ahora generalizamos la idea ilustrada en el ejemplo 1.

Suponga que $f(x)$ está definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, *excepto posiblemente en* x_0. Si $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L (tan cercano como queramos) para toda x suficientemente cercana a x_0, decimos que f se aproxima al **límite** L cuando x tiende a x_0 y escribimos

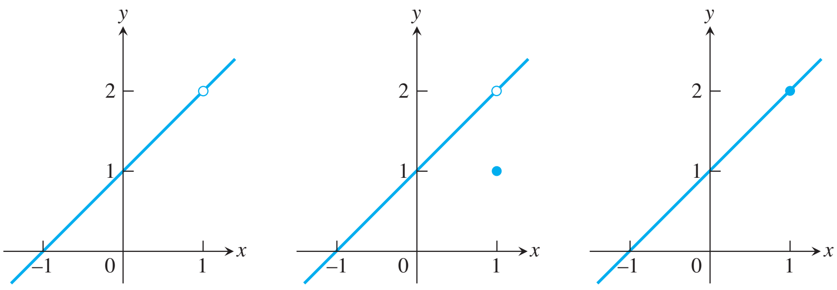
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

que se lee: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L". En el ejemplo 1 diríamos que $f(x)$ tiende al *límite* 2 cuando x se aproxima a 1 y escribimos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

En esencia, la definición dice que los valores de $f(x)$ están cercanos al número L siempre que x sea cercana a x_0 (a cualquier lado de x_0). La definición es "informal", porque las frases *arbitrariamente cercana* y *suficientemente cerca* no son precisas; su significado depende del contexto. (Para un mecánico que fabrica un pistón, *cercano* significaría *a unos cuantos milésimos de una pulgada*. Para un astrónomo que estudia galaxias distantes, *cercano* sería *a unos cuantos miles de años luz*). No obstante, la definición es suficientemente clara para permitirnos reconocer y evaluar límites de funciones específicas. Sin embargo, necesitaremos la definición precisa de la sección 2.3 cuando demostremos teoremas acerca de límites. A continuación están algunos ejemplos más que exploran la idea de límites.

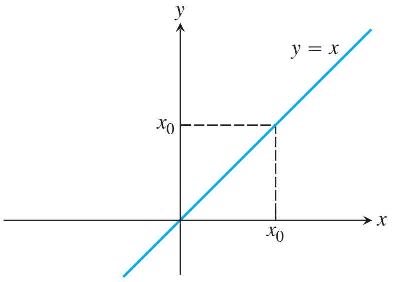
EJEMPLO 2 Este ejemplo ilustra que el valor límite de una función no depende de cómo esté definida la función en el punto al que se está aproximando. Considere las tres funciones en la figura 2.8. La función f tiene límite 2 cuando $x \to 1$, aunque f no esté definida en $x = 1$.



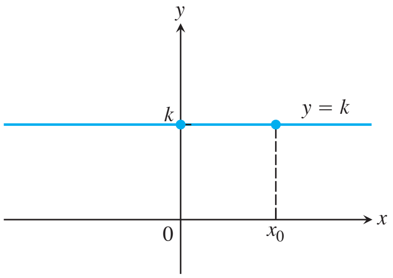
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (c) $h(x) = x + 1$

FIGURA 2.8 Los límites de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son iguales a 2 cuando x tiende a 1. Sin embargo, sólo $h(x)$ tiene el mismo valor de la función que su límite en $x = 1$ (ejemplo 2).

La función g tiene límite 2 cuando $x \to 1$, aunque $2 \neq g(1)$. La función h es la única de las tres funciones, en la figura 2.8, cuyo límite cuando $x \to 1$ es igual a su valor en $x = 1$. Para h, tenemos $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$. Esta igualdad del límite y el valor de la función son importantes; regresaremos a ello en la sección 2.5. ■



(a) Función identidad



(b) Función constante

FIGURA 2.9 Las funciones en el ejemplo 3 tienen límites en todos los puntos x_0.

EJEMPLO 3

(a) Si f es la **función identidad**, $f(x) = x$, entonces para cualquier valor de x_0 (figura 2.9a),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

(b) Si f es la **función constante**, $f(x) = k$ (función con el valor constante k), entonces para cualquier valor de x_0 (figura 2.9b),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k.$$

Como ejemplos de cada una de estas reglas, tenemos

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -7} (4) = \lim_{x\to 2} (4) = 4.$$

En el ejemplo 3 de la sección 2.3 demostramos estas reglas. ■

Algunas formas en las que los límites no existen se ilustran en la figura 2.10; se describen en el siguiente ejemplo.

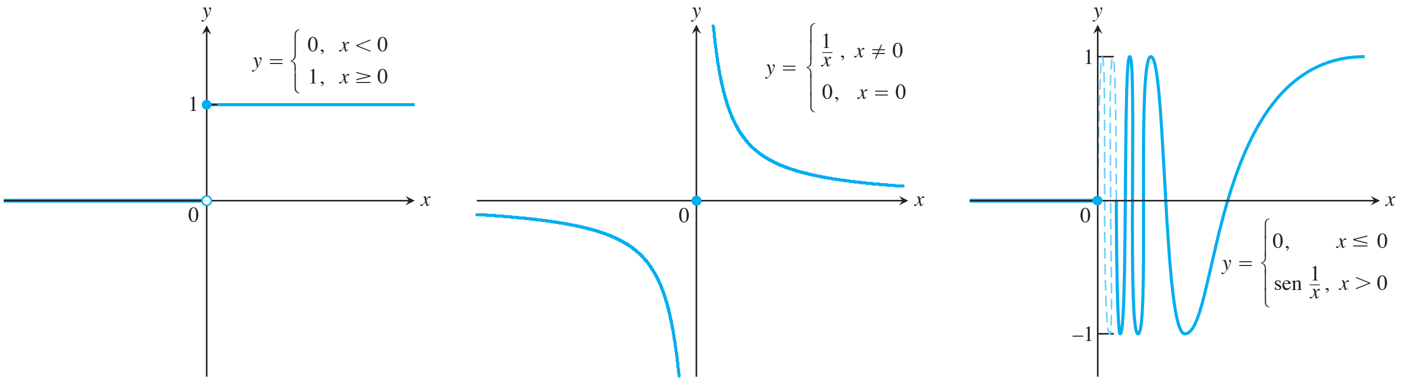


FIGURA 2.10 Ninguna de estas funciones tienen límite cuando x tiende a 0 (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Analice el comportamiento de las siguientes funciones cuando $x \to 0$.

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Solución

(a) La función tiene un *salto*: La **función escalón unitario** $U(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$, ya que sus valores saltan en $x = 0$. Para valores negativos de x, arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 0$. Para valores positivos de x, arbitrariamente cercanos a cero, $U(x) = 1$. No existe un único valor L al que se aproxime $U(x)$ cuando $x \to 0$ (figura 2.10a).

(b) La *función "crece" demasiado y no tiene límite:* $g(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$, ya que los valores de g crecen arbitrariamente en valor absoluto cuando $x \to 0$ y no permanecen cercanos a *algún* número real fijo (figura 2.10b).

(c) La *función oscila demasiado y no tiene límite:* $f(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$, ya que los valores de la función oscilan entre $+1$ y -1 en cada intervalo abierto que contenga a 0. Los valores no permanecen cerca de algún número cuando $x \to 0$ (figura 2.10c). ■

Leyes de los límites

Cuando se estudian límites, en ocasiones utilizamos la notación $x \to x_0$, si queremos enfatizar el punto x_0 que se considera en el proceso del límite (por lo regular, para mayor claridad de un análisis o un ejemplo particular). En otras ocasiones, tal como en los enunciados del teorema siguiente, emplearemos la notación más sencilla $x \to c$ o $x \to a$, que evita el uso del subíndice en x_0. En todos los casos, los símbolos x_0, c y a se refieren a un solo punto en el eje x que puede o no pertenecer al dominio de la función que se estudie. Para calcular límites de funciones, que son a su vez combinaciones aritméticas de funciones con límites conocidos, utilizamos varias reglas sencillas.

TEOREMA 1: Leyes de los límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regla del producto:* $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$, n es un entero positivo.
7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo

(Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$.)

En palabras, la regla de la suma dice que el límite de una suma es la suma de los límites. De forma análoga, las siguientes reglas indican que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites; el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función; el límite de un producto es el producto de los límites; el límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0); el límite de una potencia (o raíz) entera positiva de una función es la potencia (o raíz) entera del límite (siempre que la raíz del límite sea un número real).

Es razonable que las propiedades en el teorema 1 sean verdaderas (aunque tales argumentos intuitivos no constituyan demostraciones). Con base en nuestra definición informal de límite, si x es suficientemente cercana a c, entonces $f(x)$ es cercana a L, y $g(x)$ es cercana a M. Entonces es razonable que $f(x) + g(x)$ sea cercana a $L + M$; $f(x) - g(x)$ sea cercana a $L - M$; $kf(x)$ sea cercana a kL; $f(x)g(x)$ sea cercana a LM, y $f(x)/g(x)$ sea cercana a L/M, si M no es cero. En la sección 2.3, con base en una definición precisa de límite, demostraremos la regla de la suma. Las reglas 2 a 5 se demuestran en el apéndice 4. La regla 6 se obtiene al aplicar la regla 4 de manera repetida. La regla 7 se demuestra en textos más avanzados. Las reglas de la suma, de la diferencia y del producto pueden extenderse a cualquier número de funciones, no sólo para dos.

EJEMPLO 5 Utilice las observaciones $\lim_{x\to c} k = k$ y $\lim_{x\to c} x = c$ (ejemplo 3) las propiedades de los límites para determinar los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3)$ **(b)** $\lim_{x\to c}\dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$ **(c)** $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3}$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) &= \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 && \text{Reglas de la suma y de la diferencia}\\ &= c^3 + 4c^2 - 3 && \text{Reglas de la potencia y del múltiplo}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} &= \frac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)} && \text{Regla del cociente}\\ &= \frac{\lim_{x\to c} x^4 + \lim_{x\to c} x^2 - \lim_{x\to c} 1}{\lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5} && \text{Reglas de la suma y de la diferencia}\\ &= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5} && \text{Reglas de la potencia y el producto}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3} &= \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)} && \text{Regla de la raíz con } n = 2\\ &= \sqrt{\lim_{x\to -2} 4x^2 - \lim_{x\to -2} 3} && \text{Regla de la diferencia}\\ &= \sqrt{4(-2)^2 - 3} && \text{Reglas del producto y del múltiplo}\\ &= \sqrt{16 - 3}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$
■

Dos consecuencias del teorema 1 simplifican aún más la tarea de calcular límites de funciones polinomiales y racionales. Para evaluar el límite de una función polinomial cuando x se aproxima a c, basta con sustituir x por c en la fórmula de la función. Para evaluar el límite de una función racional cuando x se aproxima a un punto c, *en el que el denominador no sea cero*, sustituya la x por c en la fórmula de la función. (Véase los ejemplos 5a y 5b). Veremos los resultados formalmente en los siguientes teoremas.

TEOREMA 2: Límites de polinomios

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

TEOREMA 3: Límites de funciones racionales

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

EJEMPLO 6 Los siguientes cálculos ilustran los teoremas 2 y 3.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$ ■

Identificación de factores comunes
Puede demostrarse que si $Q(x)$ es un polinomio y $Q(c) = 0$, entonces $(x - c)$ es un factor de $Q(x)$. Así que si en una función racional de x, tanto el numerador como el denominador son iguales a cero en $x = c$, entonces éstos tienen $(x - c)$ como un factor común.

Eliminación algebraica de denominadores iguales a cero

El teorema 3 sólo se aplica si el denominador de la función racional no es cero en el punto límite c. Si el denominador es cero, al cancelar los factores comunes en el denominador y el numerador, es posible reducir la fracción a una cuyo denominador ya no sea cero en c. Si esto sucede, mediante sustitución en la fracción simplificada, encontraremos el límite.

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}.$$

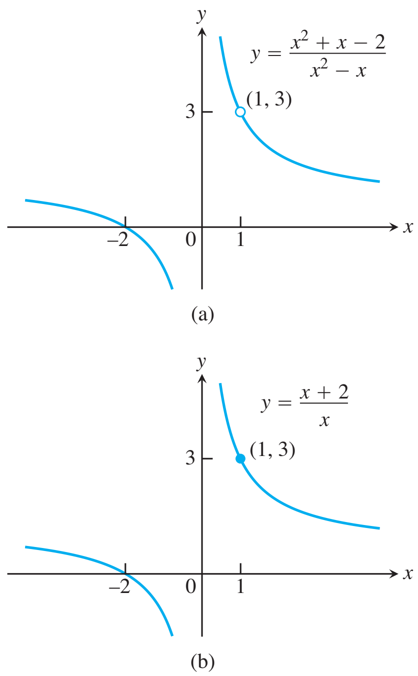


FIGURA 2.11 La gráfica de $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x^2 - x)$ en el inciso (a) es la misma que la gráfica de $g(x) = (x + 2)/x$ en el inciso (b), excepto en $x = 1$, donde f no está definida. Las funciones tienen el mismo límite cuando $x \to 1$ (ejemplo 7).

Solución No podemos sustituir $x = 1$, ya que eso convierte en cero al denominador. Probamos para ver si el numerador también es cero en $x = 1$. Sí es el caso; por lo tanto, tiene un factor común $(x - 1)$, con el denominador. Al cancelar $(x - 1)$, se obtiene una fracción más sencilla con los mismos valores que la original para $x \neq 1$:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}, \qquad \text{si } x \neq 1.$$

Con la fracción más sencilla, mediante sustitución, es posible determinar el límite cuando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3.$$

Véase la figura 2.11. ■

Uso de calculadoras y computadoras para estimar límites

Cuando no podemos utilizar la regla del cociente del teorema 1 porque el límite del denominador es cero, tratamos de utilizar una calculadora o una computadora para hacer una conjetura numérica del límite cuando x está cada vez más cercana de c. Utilizamos dicho enfoque en el ejemplo 1, pero las calculadoras y las computadoras en ocasiones dan valores incorrectos o impresiones erróneas para funciones que no se definen en un punto o no tienen límite allí, como lo ilustramos a continuación.

EJEMPLO 8 Estime el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$.

Solución La tabla 2.3 lista los valores de la función para varios valores cercanos a $x = 0$. Cuando x se aproxima a 0 mediante los valores ± 1, ± 0.5, ± 0.10 y ± 0.01, la función parece aproximarse al número 0.05.

Cuando tomamos valores aún más pequeños de x, ± 0.0005, ± 0.0001, ± 0.00001 y ± 0.000001, parece que la función se aproxima al valor cero.

¿La respuesta es 0.05 o 0, o algún otro valor? En el siguiente ejemplo contestamos la pregunta. ■

TABLA 2.3 Valores de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ cerca $x = 0$

x	$f(x)$	
± 1	0.049876	¿Se aproxima a 0.05?
± 0.5	0.049969	
± 0.1	0.049999	
± 0.01	0.050000	
± 0.0005	0.080000	¿Se aproxima a 0?
± 0.0001	0.000000	
± 0.00001	0.000000	
± 0.000001	0.000000	

Con una computadora o una calculadora se podrían obtener resultados ambiguos, como en el último ejemplo. En el problema, no es posible sustituir $x = 0$, y el numerador y el denominador no tienen factores comunes evidentes (como en el ejemplo 7). Sin embargo, en ocasiones podemos crear un factor común algebraicamente.

EJEMPLO 9 Evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Solución Éste es el límite que consideramos en el ejemplo 8. Es posible crear un factor común mediante la multiplicación tanto del numerador como del denominador por la expresión radical conjugada $\sqrt{x^2 + 100} + 10$ (que se obtiene al cambiar el signo que está después de la raíz cuadrada). Mediante propiedades algebraicas, racionalizamos el numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} \\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2 + 100} + 10\right)} && \text{Factor común } x^2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10}. && \text{Para } x \neq 0, \text{ cancelar } x^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 100} + 10} && \text{El denominador no es 0 en } x = 0\text{; sustituir} \\
&= \frac{1}{20} = 0.05.
\end{aligned}$$

Tales cálculos dan la respuesta correcta, en contraste con los resultados ambiguos en el ejemplo 8 obtenidos mediante una computadora. ■

No siempre podemos resolver algebraicamente el problema de determinar el límite de un cociente donde el denominador se vuelve cero. En algunos casos, el límite podría determinar-

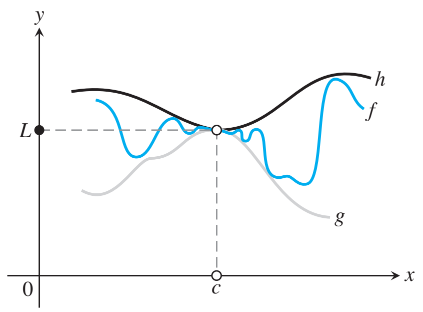


FIGURA 2.12 La gráfica de f está atrapada entre las gráficas de g y h.

se con ayuda de un poco de geometría aplicada al problema (véase la demostración del teorema 7 en la sección 2.4) o mediante métodos de cálculo (ilustrados en la sección 7.5). El teorema que aparece a continuación también es útil.

El teorema de la compresión (o del sándwich)

El siguiente teorema nos permite calcular una variedad de límites. Se denomina teorema de la compresión o del sándwich porque se refiere a una función f cuyos valores quedan entre los valores de otras dos funciones g y h, que tienen el mismo límite L en el punto c. Al quedar atrapados entre los valores de dos funciones que se aproximan a L, los valores de f también deben aproximarse a L (figura 2.12). En el apéndice 4, encontrará la demostración.

TEOREMA 4: Teorema de la compresión Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$. También suponga que

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$

Entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

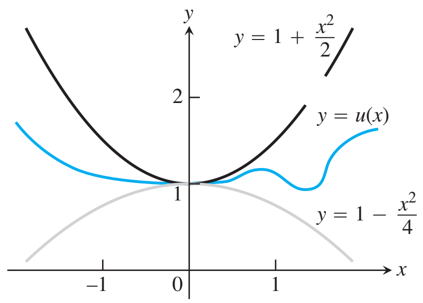


FIGURA 2.13 Cualquier función $u(x)$ cuya gráfica está en la región entre $y = 1 + (x^2/2)$ y $y = 1 - (x^2/4)$ tiene límite 1 cuando $x \to 0$ (ejemplo 10).

El teorema de la compresión también se denomina teorema del emparedado o teorema del sándwich.

EJEMPLO 10 Puesto que

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} \qquad \text{para toda } x \neq 0,$$

determine $\lim_{x\to 0} u(x)$, no importa qué tan complicada sea u.

Solución Como

$$\lim_{x\to 0}(1 - (x^2/4)) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}(1 + (x^2/2)) = 1,$$

el teorema del sándwich implica que $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ (figura 2.13). ■

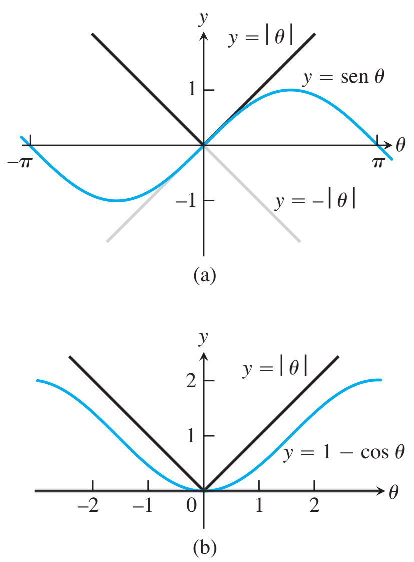


FIGURA 2.14 El teorema de la compresión confirma los límites del ejemplo 11.

EJEMPLO 11 El teorema de la compresión nos ayuda a establecer varias reglas importantes de límites:

(a) $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$ **(b)** $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

(c) Para cualquier función f, $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ implica $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

Solución

(a) En la sección 1.3 establecimos que $-|\theta| \leq \operatorname{sen}\theta \leq |\theta|$ para toda θ (figura 2.14a). Como $\lim_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim_{\theta\to 0}|\theta| = 0$, tenemos

$$\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0.$$

(b) Con base en la sección 1.3, $0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$ para toda θ (figura 2.14b); tenemos $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$ o

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1.$$

(c) Como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ y $-|f(x)|$ y $|f(x)|$ tienen límite igual a cero cuando $x \to c$, se sigue que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. ■

Otra propiedad importante de los límites se expone en el teorema que veremos a continuación, y en la siguiente sección presentaremos una demostración.

TEOREMA 5 Si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$, y los límites de f y g existen cuando x se aproxima a c, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

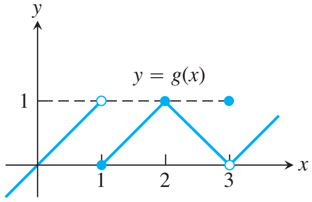
Es falsa la afirmación que resulta de cambiar, en el teorema 5, la desigualdad menor o igual ($\leq$) por la desigualdad estricta menor que ($<$). La figura 2.14a indica que para $\theta \neq 0$, $-|\theta| < \operatorname{sen}\theta < |\theta|$, pero que en el límite cuando $\theta \to 0$, se cumple la igualdad.

Ejercicios 2.2

Límites y gráficas

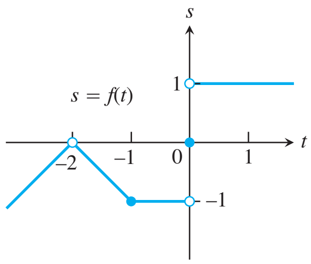
1. Para la función $g(x)$, que se grafica a continuación, determine los límites siguientes o explique por qué no existen.

a. $\lim_{x \to 1} g(x)$ **b.** $\lim_{x \to 2} g(x)$ **c.** $\lim_{x \to 3} g(x)$ **d.** $\lim_{x \to 2.5} g(x)$



2. Para la función $f(t)$, que se grafica aquí, determine los límites siguientes o explique por qué no existen.

a. $\lim_{t \to -2} f(t)$ **b.** $\lim_{t \to -1} f(t)$ **c.** $\lim_{t \to 0} f(t)$ **d.** $\lim_{t \to -0.5} f(t)$



3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados, con respecto a la función $y = f(x)$ graficada aquí, son verdaderos y cuáles son falsos?

a. $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe.

b. $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

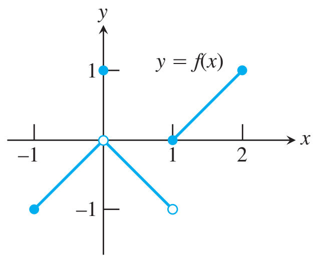
c. $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

d. $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

e. $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

f. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe para todo punto x_0 en $(-1, 1)$.

g. $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.



4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados, con respecto a la función $y = f(x)$ graficada aquí, son verdaderos y cuáles son falsos?

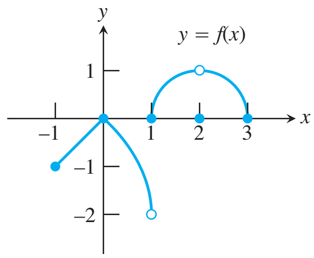
a. $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

b. $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

d. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe para todo punto x_0 en $(-1, 1)$.

e. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe para todo punto x_0 en $(1, 3)$.



Existencia de límites

En los ejercicios 5 y 6, explique por qué los límites no existen.

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ **6.** $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1}$

7. Suponga que una función $f(x)$ está definida para todos los valores reales de x, excepto para $x = x_0$. ¿Puede decir algo acerca de la existencia de $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Dé razones para su respuesta.

8. Suponga que una función $f(x)$ está definida para toda x en $[-1, 1]$. ¿Puede decir algo acerca de la existencia de $\lim_{x \to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

9. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, debe estar definida en $x = 1$? Si es así, ¿debe ser $f(1) = 5$? ¿Puede concluir *algo* acerca de los valores de f en $x = 1$? Explique.

10. Si $f(1) = 5$, ¿$\lim_{x\to 1} f(x)$ debe existir? Si es así, ¿entonces debe cumplirse que $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$? ¿Es posible concluir *algo* acerca de $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

Cálculo de límites

En los ejercicios 11 a 22, determine los límites.

11. $\lim_{x\to -7} (2x + 5)$

12. $\lim_{x\to 2} (-x^2 + 5x - 2)$

13. $\lim_{t\to 6} 8(t - 5)(t - 7)$

14. $\lim_{x\to -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

15. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x + 3}{x + 6}$

16. $\lim_{s\to 2/3} 3s(2s - 1)$

17. $\lim_{x\to -1} 3(2x - 1)^2$

18. $\lim_{y\to 2} \dfrac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$

19. $\lim_{y\to -3} (5 - y)^{4/3}$

20. $\lim_{z\to 0} (2z - 8)^{1/3}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$

22. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

Límites de cocientes Determine los límites en los ejercicios del 23 a 42.

23. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

24. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

25. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

26. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

27. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$

28. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$

29. $\lim_{x\to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

30. $\lim_{y\to 0} \dfrac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$

31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}}{x}$

33. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$

34. $\lim_{v\to 2} \dfrac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$

35. $\lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

36. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

38. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$

39. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$

40. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

41. $\lim_{x\to -3} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x + 3}$

42. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4 - x}{5 - \sqrt{x^2 + 9}}$

Límites con funciones trigonométricas Determine los límites en los ejercicios del 43 a 50.

43. $\lim_{x\to 0} (2 \operatorname{sen} x - 1)$

44. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x$

45. $\lim_{x\to 0} \sec x$

46. $\lim_{x\to 0} \tan x$

47. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + x + \operatorname{sen} x}{3 \cos x}$

48. $\lim_{x\to 0} (x^2 - 1)(2 - \cos x)$

49. $\lim_{x\to -\pi} \sqrt{x + 4} \cos (x + \pi)$

50. $\lim_{x\to 0} \sqrt{7 + \sec^2 x}$

Aplicación de las reglas de los límites

51. Suponga que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Indique las reglas del teorema 1 que se usaron para realizar los pasos (a), (b) y (c) de los siguientes cálculos.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x\to 0} (f(x) + 7)^{2/3}} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} \left(f(x) + 7\right)\right)^{2/3}} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{2 \lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1 + 7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

52. Sean $\lim_{x\to 1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} p(x) = 1$, y $\lim_{x\to 1} r(x) = 2$. Indique las reglas del teorema 1 que se usaron para realizar los pasos (a), (b) y (c) de los siguientes cálculos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4 - r(x))} = \frac{\lim_{x\to 1} \sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1} (p(x)(4 - r(x)))} \quad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} \left(4 - r(x)\right)\right)} \quad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5 \lim_{x\to 1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to 1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to 1} 4 - \lim_{x\to 1} r(x)\right)} \quad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4 - 2)} = \frac{5}{2}$$

53. Suponga que $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Determine

a. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ **b.** $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ **d.** $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

54. Suponga que $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Determine

a. $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$ **b.** $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c. $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ **d.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

55. Suponga que $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ y $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Determine

a. $\lim_{x\to b} (f(x) + g(x))$ **b.** $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to b} 4g(x)$ **d.** $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

56. Suponga que $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$, y $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$. Determine

a. $\lim_{x\to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

b. $\lim_{x\to -2} p(x) \cdot r(x) \cdot s(x)$

c. $\lim_{x\to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Límites de tasas de cambio promedio

Debido a su relación con las rectas secantes, tangentes y tasas instantáneas, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

aparecen con mucha frecuencia en cálculo. En los ejercicios 57 a 62, evalúe este límite para el valor dado de x y la función f.

57. $f(x) = x^2, \quad x = 1$

58. $f(x) = x^2, \quad x = -2$

59. $f(x) = 3x - 4, \quad x = 2$

60. $f(x) = 1/x, \quad x = -2$

61. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$

62. $f(x) = \sqrt{3x + 1}, \quad x = 0$

Aplicación del teorema de la compresión

63. Si $\sqrt{5 - 2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5 - x^2}$ para toda $-1 \le x \le 1$, determine $\lim_{x \to 0} f(x)$.

64. Si $2 - x^2 \le g(x) \le 2 \cos x$ para toda x, determine $\lim_{x \to 0} g(x)$.

65. a. Puede demostrarse que las desigualdades

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x} < 1$$

se cumplen para todos los valores de x cercanos a cero. ¿Nos indica algo acerca de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}?$$

Justifique su respuesta.

T **b.** Grafique juntas $y = 1 - (x^2/6)$, $y = (x \operatorname{sen} x)/(2 - 2\cos x)$, y $y = 1$ para $-2 \le x \le 2$. Comente algo sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

66. a. Suponga que las desigualdades

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

se cumplen para valores de x cercanos a cero. (Son válidas, como lo verá en la sección 10.9). ¿Qué nos indica esto con respecto al

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}?$$

Justifique su respuesta.

T **b.** Grafique juntas las ecuaciones $y = (1/2) - (x^2/24)$, $y = (1 - \cos x)/x^2$, y $y = 1/2$ para $-2 \le x \le 2$. Comente algo sobre el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

T Estimación de límites

Para los ejercicios 67 a 74 será útil manejar una calculadora graficadora

67. Sea $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$.

a. Construya una tabla de valores de f en los puntos $x = -3.1$, -3.01, -3.001 y así sucesivamente, tanto como lo permita su calculadora. Luego estime $\lim_{x \to -3} f(x)$. ¿Cuál es la estimación si ahora evalúa f en $x = -2.9, -2.99, -2.999, \ldots$?

b. Respalde sus conclusiones del inciso (a) mediante la gráfica de f cerca de $x_0 = -3$, así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to -3$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to -3} f(x)$ como en el ejemplo 7.

68. Sea $g(x) = (x^2 - 2)/(x - \sqrt{2})$.

a. Construya una tabla de valores de g en los puntos $x = 1.4$, 1.41, 1.414 y así sucesivamente con aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$. Estime $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$.

b. Respalde su conclusión del inciso (a) mediante la gráfica de g cerca de $x_0 = \sqrt{2}$ así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to \sqrt{2}$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to \sqrt{2}} g(x)$.

69. Sea $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$.

a. Construya una tabla de valores de G en los puntos $x = -5.9$, -5.99, -5.999, y así sucesivamente. Luego estime $\lim_{x \to -6} G(x)$. ¿Cuál es la estimación si ahora evalúa G en $x = -6.1, -6.01, -6.001, \ldots$?

b. Respalde sus conclusiones del inciso (a) mediante la gráfica de G, así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to -6$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to -6} G(x)$.

70. Sea $h(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x^2 - 4x + 3)$.

a. Construya una tabla de valores de h en $x = 2.9, 2.99, 2.999$ y así sucesivamente. Luego estime $\lim_{x \to 3} h(x)$. ¿Cuál es la estimación si ahora evalúa h en $x = 3.1, 3.01, 3.001, \ldots$?

b. Respalde sus conclusiones del inciso (a) mediante la gráfica de h cerca de $x_0 = 3$, así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to 3$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to 3} h(x)$.

71. Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$.

a. Construya una tabla de valores de f en valores de x que se aproximen a $x_0 = -1$, tanto por arriba como por abajo. Luego estime $\lim_{x \to -1} f(x)$.

b. Respalde su conclusión del inciso (a) mediante la gráfica de f cerca de $x_0 = -1$, así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to -1$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to -1} f(x)$.

72. Sea $F(x) = (x^2 + 3x + 2)/(2 - |x|)$.

a. Construya una tabla de valores de f en valores de x que se aproximen a $x_0 = -2$, por arriba y por abajo. Luego estime $\lim_{x \to -2} F(x)$.

b. Respalde su conclusión del inciso (a) mediante la gráfica de f cerca de $x_0 = -2$, así como utilizando las funciones Zoom y Trace para estimar valores de y en la gráfica cuando $x \to -2$.

c. Determine algebraicamente $\lim_{x \to -2} F(x)$.

73. Sea $g(\theta) = (\operatorname{sen} \theta)/\theta$.

a. Construya una tabla de valores de g para valores de θ que se aproximen a $\theta_0 = 0$, por arriba y por abajo. Luego estime $\lim_{\theta \to 0} g(\theta)$.

b. Respalde su conclusión del inciso (a) mediante la gráfica de f cerca de $\theta_0 = 0$.

74. Sea $G(t) = (1 - \cos t)/t^2$.

a. Construya tablas de valores de G para valores de t que se aproximen a $t_0 = 0$, por arriba y por abajo. Luego estime $\lim_{t \to 0} G(t)$.

b. Respalde su conclusión en el inciso (a) con la gráfica de G cerca de $t_0 = 0$.

Teoría y ejemplos

75. Si $x^4 \le f(x) \le x^2$ para x en $[-1, 1]$ y $x^2 \le f(x) \le x^4$ para $x < -1$ y $x > 1$, ¿en qué puntos c usted puede conocer automáticamente $\lim_{x \to c} f(x)$? ¿Qué puede decir acerca del valor del límite en estos puntos?

76. Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda $x \neq 2$ y que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5.$$

¿Puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x = 2$? ¿Es posible que $f(2) = 0$? ¿Es posible que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$? Justifique sus respuestas.

77. Si $\lim_{x\to 4} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 1$, determine $\lim_{x\to 4} f(x)$.

78. Si $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, determine

a. $\lim_{x\to -2} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$

79. a. Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, determine $\lim_{x\to 2} f(x)$.

b. Si $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$, determine $\lim_{x\to 2} f(x)$.

80. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, determine

a. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

T **81. a.** Grafique $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para estimar $\lim_{x\to 0} g(x)$, en caso necesario, haga un acercamiento (zoom) en el origen.

b. Mediante una demostración, confirme su resultado del inciso (a).

T **82. a.** Grafique $h(x) = x^2 \cos(1/x^3)$ para estimar $\lim_{x\to 0} h(x)$, en caso necesario, haga un acercamiento (zoom) en el origen.

b. Confirme su estimación del inciso (a) mediante una demostración.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Estimación gráfica de límites

En los ejercicios 83 a 88, utilice un SAC para realizar los siguientes pasos:

a. Trace la función cerca del punto x_0 al que se aproxima.

b. Con base en su gráfica, haga una conjetura acerca del valor del límite.

83. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

84. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(x + 1)^2}$

85. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{x}$

86. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$

87. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$

88. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{3 - 3\cos x}$

2.3 La definición formal de límite

Ahora ponemos nuestra atención en la definición formal de límite. Reemplazamos las frases vagas como “se acerca arbitrariamente a” de la definición informal con condiciones específicas que pueden aplicarse a cualquier ejemplo particular. Con una definición precisa, es posible demostrar las propiedades de los límites que se dieron en la sección anterior y establecer muchos límites específicos.

Para demostrar que el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ es igual al número L, necesitamos demostrar también que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse “tan pequeña como queramos” si x se mantiene “suficientemente cerca” de x_0. Veamos lo que esto requerirá si especificamos el tamaño de la distancia entre $f(x)$ y L.

EJEMPLO 1 Considere la función $y = 2x - 1$ cerca de $x_0 = 4$. Intuitivamente parece que y estará cerca de 7 cuando x esté cerca a 4, por lo que $\lim_{x\to 4}(2x - 1) = 7$. Sin embargo, ¿qué tan cerca de $x_0 = 4$ debe estar x para hacer que $y = 2x - 1$ difiera de 7, digamos en menos de dos unidades?

Solución Preguntamos: ¿Para qué valores de x es $|y - 7| < 2$? Para determinar la respuesta, primero expresamos $|y - 7|$ en términos de x:

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|.$$

Entonces la pregunta se transforma en: ¿qué valores de x satisfacen $|2x - 8| < 2$? Para encontrarlos, resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1. \end{aligned}$$

Al mantener x a menos de una unidad de $x_0 = 4$, mantendremos a y a menos de dos unidades de $y_0 = 7$ (figura 2.15). ■

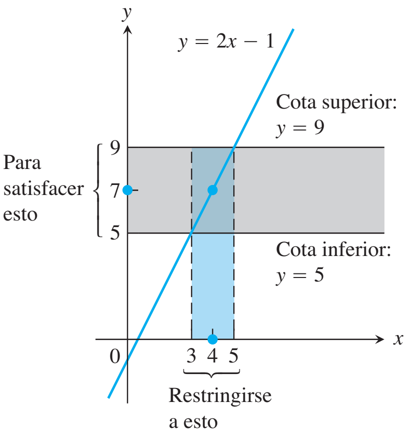


FIGURA 2.15 Si se mantiene x a una unidad de $x_0 = 4$, el valor de y se mantendrá a dos unidades de $y_0 = 7$ (ejemplo 1).

En el ejemplo anterior, determinamos qué tan cerca debe estar x de un valor particular x_0 para asegurar que las salidas $f(x)$ de alguna función estén dentro de un intervalo preestablecido alrededor del valor límite L. Para mostrar que el límite de $f(x)$, cuando $x \to x_0$ en realidad es igual a L, debemos ser capaces de mostrar que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse menor que *cualquier error prescrito*, sin importar cuán pequeño sea éste, manteniendo a x suficientemente cerca a x_0.

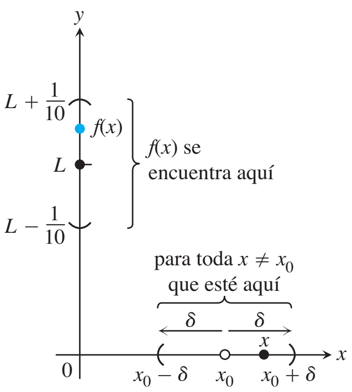


FIGURA 2.16 ¿Cómo debemos definir $\delta > 0$ de manera que manteniendo a x dentro del intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ el valor de $f(x)$ se mantenga dentro del intervalo $\left(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10}\right)$?

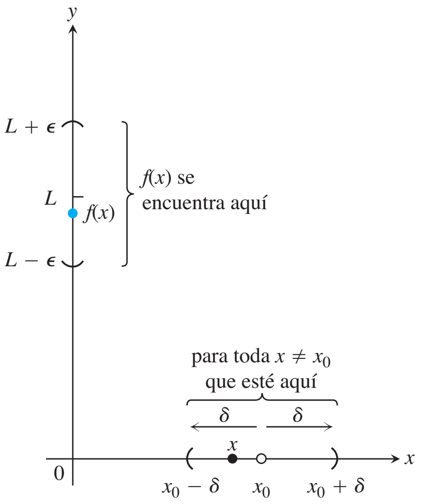


FIGURA 2.17 La relación de δ y ϵ en la definición de límite.

Definición de límite

Suponga que vemos los valores de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 (sin tomar en cuenta el valor mismo x_0). Desde luego, queremos ser capaces de decir que $f(x)$ está a menos de un décimo de unidad de L tan pronto como x esté a menos de alguna distancia δ de x_0 (figura 2.16). Pero, en sí mismo, eso no es suficiente, ya que cuando x continúa su camino hacia x_0, ¿qué impediría a $f(x)$ oscilar en un intervalo de $L - (1/10)$ a $L + (1/10)$ sin tender hacia L?

Podríamos decir que el error no es mayor que $1/100$ o $1/1000$ o $1/100{,}000$. Cada vez determinamos un nuevo intervalo δ alrededor de x_0, de manera que si mantenemos a x dentro de ese intervalo se satisface la nueva tolerancia de error. Cada vez existe la posibilidad de que $f(x)$ oscile y se aleje de L en alguna etapa.

Las figuras de la siguiente página ilustran el problema. Puede pensar en esto como una discusión entre un escéptico y un académico. El escéptico presenta ϵ-retos para mostrar que el límite no existe o, con mayor precisión, que hay lugar a dudas. El académico responde cada reto con un δ-intervalo alrededor de x_0 que mantiene los valores de la función a menos de ϵ unidades de L.

¿Cómo acabar con esta, en apariencia, serie sin fin de retos y respuestas? Al mostrar que para cada tolerancia de error ϵ que el retador proponga, podemos encontrar, calcular o conjeturar una distancia δ correspondiente que mantenga a x "suficientemente cerca" de x_0 para que $f(x)$ esté dentro del rango de tolerancia de L (figura 2.17). Lo anterior lleva a la definición formal de límite.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0. Decimos que el **límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 es el número L** y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

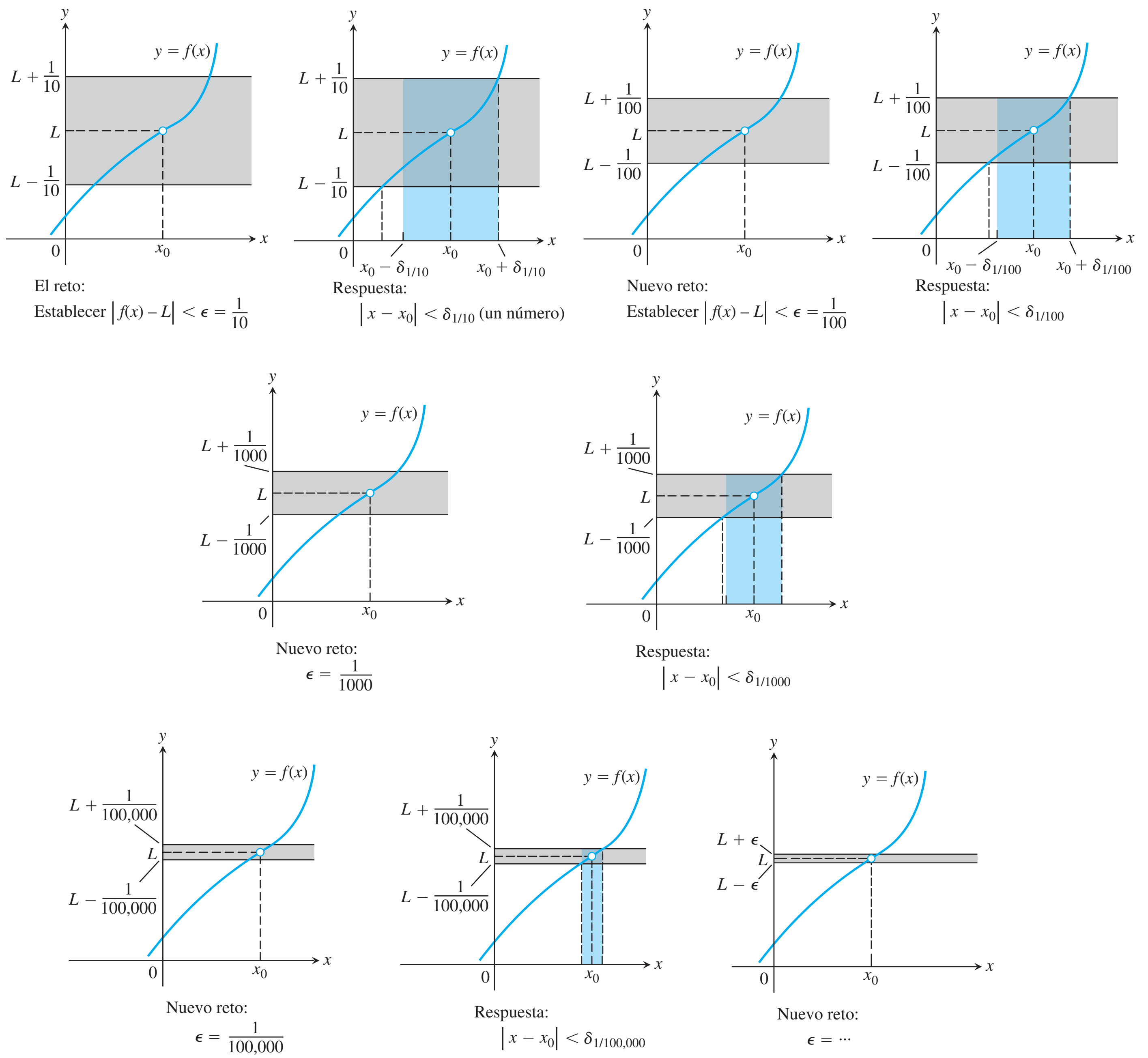
si, para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que para toda x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Una manera de interpretar tal definición es suponer que operamos un taladro de precisión. Podemos intentar obtener el diámetro L, pero como nada es perfecto, debemos quedar satisfechos con un diámetro $f(x)$ entre $L - \epsilon$ y $L + \epsilon$. La δ es la medida de qué tan preciso habremos de establecer el control para x de forma que se garantice este grado de precisión en el diámetro del orificio. Observe que cuanto más estricta sea la tolerancia para el error, tal vez tendremos que ajustar δ. Esto es, el valor de δ (que determina qué tan estricto debe ser nuestro control) depende del valor ϵ, que es la tolerancia de error.

Ejemplos: Comprobación de la definición

La definición formal de límite no dice cómo determinar el límite de una función, pero nos permite verificar que un límite supuesto es correcto. Los siguientes ejemplos muestran cómo puede usarse la definición para verificar los límites en el caso de funciones específicas. Sin embargo, el propósito real de la definición no es para hacer cálculos como éstos, sino para comprobar teoremas generales de manera que los cálculos de límites específicos puedan simplificarse.



EJEMPLO 2 Demuestre que

$$\lim_{x \to 1} (5x - 3) = 2.$$

Solución Establecemos $x_0 = 1$, $f(x) = 5x - 3$, y $L = 2$ en la definición de límite. Para cualquier $\epsilon > 0$ dado, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ adecuado, de manera que si $x \neq 1$ y x está a una distancia menor a δ de $x_0 = 1$, esto es, siempre que

$$0 < |x - 1| < \delta,$$

se cumple que $f(x)$ está a una distancia menor a ϵ de $L = 2$, es decir,

$$|f(x) - 2| < \epsilon.$$

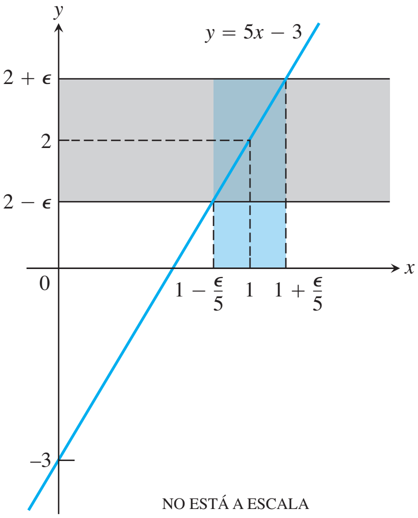


FIGURA 2.18 Si $f(x) = 5x - 3$, entonces $0 < |x - 1| < \epsilon/5$ garantiza que $|f(x) - 2| < \epsilon$ (ejemplo 2).

Determinamos el valor de δ si trabajamos hacia atrás a partir de la desigualdad con ϵ:

$$\begin{aligned} |(5x-3)-2| = |5x-5| &< \epsilon \\ 5|x-1| &< \epsilon \\ |x-1| &< \epsilon/5. \end{aligned}$$

Así, tomamos $\delta = \epsilon/5$ (Figura 2.18). Si $0 < |x-1| < \delta = \epsilon/5$, entonces

$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5(\epsilon/5) = \epsilon,$$

lo cual prueba que $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$.

El valor de $\delta = \epsilon/5$ no es el único que hará que $0 < |x-1| < \delta$ implique $|5x-5| < \epsilon$. Cualquier valor positivo más pequeño para δ también funcionará. La definición no pregunta por el “mejor” valor positivo de δ, sólo por uno que funcione. ■

EJEMPLO 3 Pruebe los siguientes resultados, presentados gráficamente en la sección 2.2.

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ **(b)** $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ (k constante)

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |x - x_0| < \epsilon.$$

La implicación se cumplirá si δ es igual a ϵ o cualquier número positivo menor (figura 2.19). Lo anterior prueba que $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |k - k| < \epsilon.$$

Como $k - k = 0$, utilizamos cualquier número positivo para δ y la implicación se cumplirá (figura 2.20). Esto prueba que $\lim_{x\to x_0} k = k$. ■

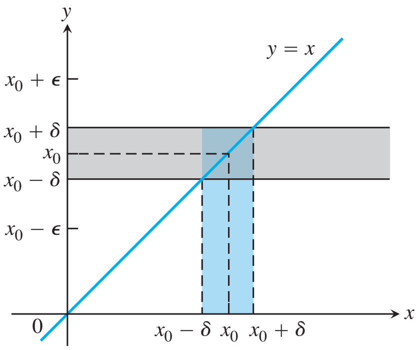


FIGURA 2.19 Para la función $f(x) = x$, encontramos que $0 < |x - x_0| < \delta$ garantizará que $|f(x) - x_0| < \epsilon$ siempre que $\delta \le \epsilon$ (ejemplo 3a).

Determinación algebraica de delta para épsilon dada

En los ejemplos 2 y 3, el intervalo de valores alrededor de x_0, para el cual $|f(x) - L|$ es menor que ϵ, fue simétrico con respecto a x_0, por lo que podríamos tomar δ como un medio de la longitud de ese intervalo. Cuando no se tiene tal simetría, lo cual es bastante común, tomamos δ como la distancia de x_0 al extremo más cercano del intervalo.

EJEMPLO 4 Para el límite $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$, determine una $\delta > 0$ que funcione para $\epsilon = 1$. Esto es, determine $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - 5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1.$$

Solución Organizamos la búsqueda en dos pasos, como se describe a continuación.

1. *Resuelva la desigualdad* $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ *para encontrar un intervalo que contenga a* $x_0 = 5$, *en el que la desigualdad se cumpla para toda* $x \neq x_0$.

$$\begin{gathered} |\sqrt{x-1} - 2| < 1 \\ -1 < \sqrt{x-1} - 2 < 1 \\ 1 < \sqrt{x-1} < 3 \\ 1 < x - 1 < 9 \\ 2 < x < 10 \end{gathered}$$

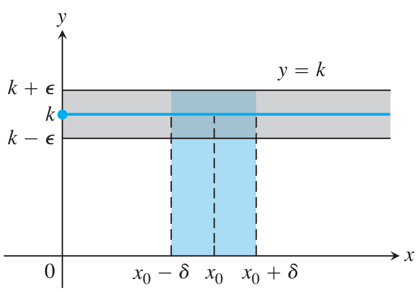


FIGURA 2.20 Para la función $f(x) = k$, encontramos que $|f(x) - k| < \epsilon$ para cualquier δ positivo (ejemplo 3b).

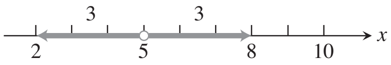


FIGURA 2.21 Un intervalo abierto de radio 3 alrededor de $x_0 = 5$ estará dentro del intervalo abierto (2, 10).

La desigualdad se cumple para toda x en el intervalo abierto (2, 10), así que también se cumple para toda $x \neq 5$ en ese intervalo.

2. *Determine un valor de* $\delta > 0$ *para colocar el intervalo centrado* $5 - \delta < x < 5 + \delta$ (centrado en $x_0 = 5$) *dentro del intervalo* (2, 10). La distancia de 5 al extremo más cercano de (2, 10) es 3 (figura 2.21). Si tomamos $\delta = 3$ o cualquier número positivo más pequeño, entonces la desigualdad $0 < |x - 5| < \delta$ automáticamente colocará a x entre 2 y 10 para hacer $|\sqrt{x-1} - 2| < 1$ (figura 2.22):

$$0 < |x - 5| < 3 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x-1} - 2| < 1. \qquad \blacksquare$$

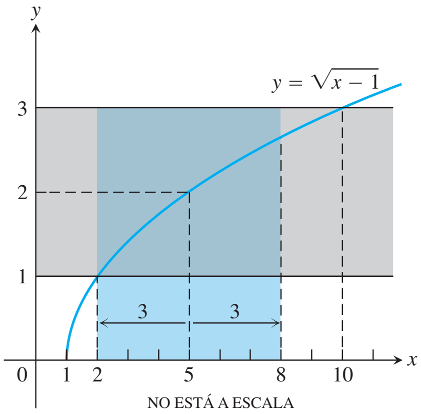


FIGURA 2.22 La función y los intervalos del ejemplo 4.

Dados f, L, x_0 y $\epsilon > 0$, ¿cómo determinar algebraicamente una δ?

El proceso para determinar una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

puede realizarse en dos pasos.

1. *Resuelva la desigualdad* $|f(x) - L| < \epsilon$ para determinar un intervalo abierto (a, b) que contenga a x_0 en el cual se cumpla la desigualdad para toda $x \neq x_0$.
2. *Determine un valor de* $\delta > 0$ que coloque un intervalo abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con centro en x_0 dentro del intervalo (a, b). La desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$ se cumplirá para toda $x \neq x_0$ en este δ-intervalo.

EJEMPLO 5 Pruebe que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ si

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2. \end{cases}$$

Solución Nuestra tarea es mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda x

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

1. *Resuelva la desigualdad* $|f(x) - 4| < \epsilon$ *para determinar un intervalo abierto que contenga* $x_0 = 2$ *en el que la desigualdad se cumpla para toda* $x \neq x_0$.

Para $x \neq x_0 = 2$, tenemos $f(x) = x^2$, por lo que la desigualdad a resolver es $|x^2 - 4| < \epsilon$:

$$|x^2 - 4| < \epsilon$$
$$-\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon$$
$$4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

Suponga que $\epsilon < 4$; lea más adelante.

$$\sqrt{4-\epsilon} < |x| < \sqrt{4+\epsilon}$$
$$\sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}.$$

Un intervalo abierto alrededor de $x_0 = 2$ que resuelve la desigualdad.

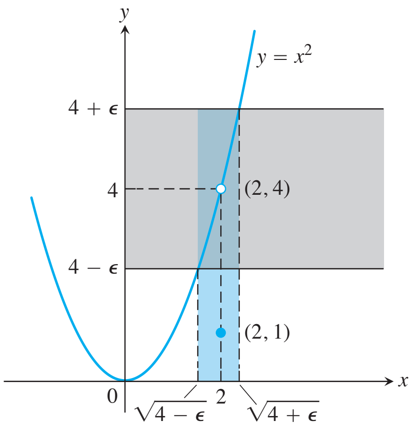


FIGURA 2.23 Un intervalo que contiene a $x = 2$, de manera que la función del ejemplo 5 satisfaga $|f(x) - 4| < \epsilon$.

La desigualdad $|f(x) - 4| < \epsilon$ se cumple para $x \neq 2$ en el intervalo abierto $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$ (figura 2.23).

2. *Determine un valor* $\delta > 0$ *que coloque el intervalo centrado* $(2 - \delta, 2 + \delta)$ *dentro del intervalo* $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$.

Tome δ como la distancia de $x_0 = 2$ al extremo más cercano de $\left(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}\right)$. En otras palabras, tome $\delta = \text{mín}\left\{2 - \sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon} - 2\right\}$, el *mínimo* (el menor) de los dos números $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$. Si δ tiene éste o cualquier valor positivo menor, la desigualdad $0 < |x - 2| < \delta$ automáticamente colocará a x entre $\sqrt{4 - \epsilon}$ y $\sqrt{4 + \epsilon}$ para hacer $|f(x) - 4| < \epsilon$. Para toda x,

$$0 < |x - 2| < \delta \qquad \text{Q} \qquad |f(x) - 4| < \epsilon.$$

Lo anterior completa la prueba para $\epsilon < 4$.

Si $\epsilon \geq 4$, entonces tomamos δ como la distancia de $x_0 = 2$ al extremo más cercano del intervalo $\left(0, \sqrt{4 + \epsilon}\right)$. En otras palabras, tomamos $\delta = \text{mín}\left\{2, \sqrt{4 + \epsilon} - 2\right\}$. (Véase la figura 2.23). ■

Uso de la definición para demostrar teoremas

Pocas veces empleamos la definición formal de límite para verificar límites específicos, como los de los ejemplos anteriores. En vez de ello, recurrimos a los teoremas generales de límites, en particular a los teoremas de la sección 2.2. La definición se utiliza para demostrar dichos teoremas (véase el apéndice 4). Como un ejemplo, demostramos la parte 1 del teorema 1, la regla de la suma.

EJEMPLO 6 Dado que $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$ y $\text{lím}_{x \to c} g(x) = M$, demuestre que

$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$ dado. Queremos encontrar un número positivo δ, tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon.$$

Reagrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Desigualdad del triángulo:
$|a + b| \leq |a| + |b|$

Como $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon/2.$$

De forma análoga, como $\text{lím}_{x \to c} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - M| < \epsilon/2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, el menor de δ_1 y δ_2. Si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|x - c| < \delta_1$, así que $|f(x) - L| < \epsilon/2$, y $|x - c| < \delta_2$, así que $|g(x) - M| < \epsilon/2$. Por lo tanto,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto prueba que $\text{lím}_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$. ■

Ahora demostramos el teorema 5 de la sección 2.2.

EJEMPLO 7 Dado que $\text{lím}_{x \to c} f(x) = L$ y $\text{lím}_{x \to c} g(x) = M$, y además, $f(x) \leq g(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente a c mismo), demuestre que $L \leq M$.

Solución Utilizamos el método de demostración por contradicción. Suponga, por el contrario, que $L > M$. Así, por la regla del límite de una diferencia del teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L.$$

Por lo tanto, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como, por hipótesis, $L - M > 0$, tomamos $\epsilon = L - M$ en particular y tenemos un número $\delta > 0$ tal que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Como para cualquier número a, $a \le |a|$, tenemos

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

que se reduce a

$$g(x) < f(x) \qquad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Pero esto contradice $f(x) \le g(x)$. Así, la desigualdad $L > M$ debe ser falsa. Por lo tanto, $L \le M$. ■

Ejercicios 2.3

Intervalos centrados en un punto

En los ejercicios 1 a 6, trace un bosquejo del intervalo (a, b) en el eje x con el punto x_0 dentro. Luego, determine un valor de $\delta > 0$ tal que para toda x, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow a < x < b$.

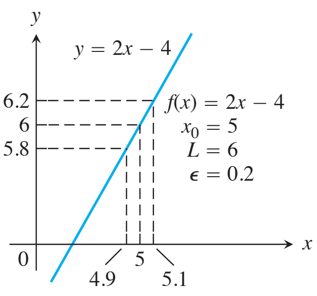
1. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 5$
2. $a = 1, \quad b = 7, \quad x_0 = 2$
3. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3$
4. $a = -7/2, \quad b = -1/2, \quad x_0 = -3/2$
5. $a = 4/9, \quad b = 4/7, \quad x_0 = 1/2$
6. $a = 2.7591, \quad b = 3.2391, \quad x_0 = 3$

Determinación gráfica de deltas

En los ejercicios 7 a 14, utilice las gráficas para encontrar una $\delta > 0$ tal que para toda x

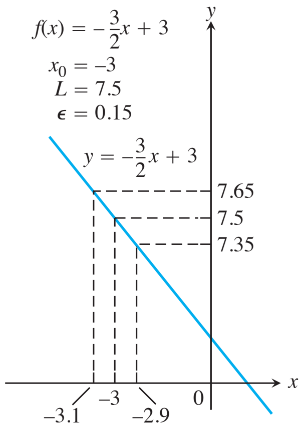
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

7.



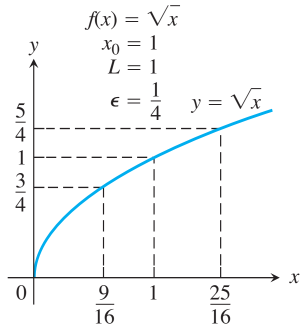
NO ESTÁ A ESCALA

8.

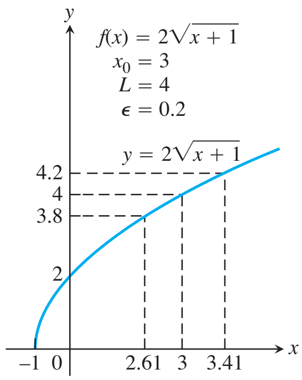


NO ESTÁ A ESCALA

9.

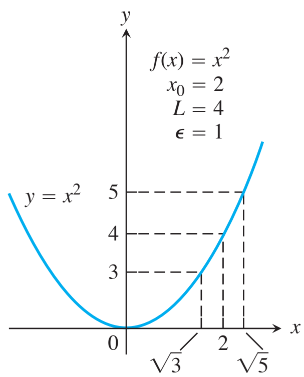


10.



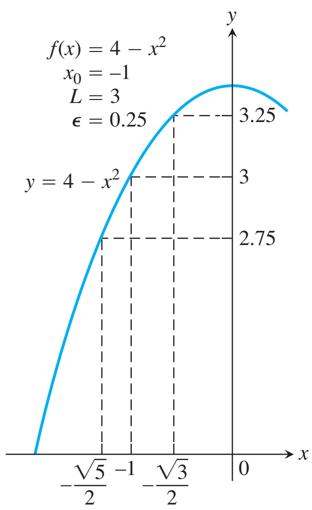
NO ESTÁ A ESCALA

11.



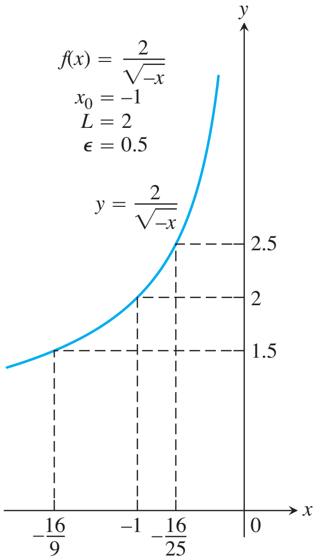
NO ESTÁ A ESCALA

12.

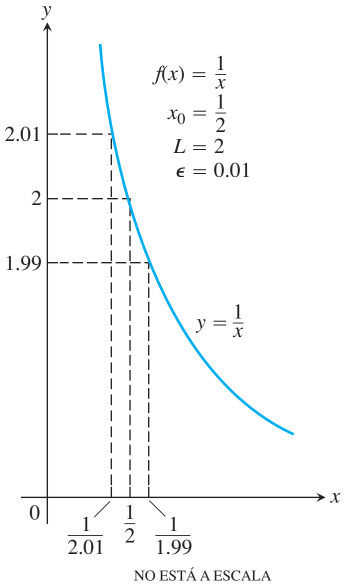


NO ESTÁ A ESCALA

13.



14.



Determinación algebraica de deltas

En cada uno de los ejercicios 15 a 30 se da una función $f(x)$, así como números L, x_0 y $\epsilon > 0$. En cada caso, determine un intervalo abierto alrededor de x_0 en el que se cumpla la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$. Luego, dé un valor para $\delta > 0$ tal que para toda x que satisface $0 < |x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - L| < \epsilon$.

15. $f(x) = x + 1, \quad L = 5, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.01$

16. $f(x) = 2x - 2, \quad L = -6, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.02$

17. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad L = 1, \quad x_0 = 0, \quad \epsilon = 0.1$

18. $f(x) = \sqrt{x}, \quad L = 1/2, \quad x_0 = 1/4, \quad \epsilon = 0.1$

19. $f(x) = \sqrt{19 - x}, \quad L = 3, \quad x_0 = 10, \quad \epsilon = 1$

20. $f(x) = \sqrt{x - 7}, \quad L = 4, \quad x_0 = 23, \quad \epsilon = 1$

21. $f(x) = 1/x, \quad L = 1/4, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 0.05$

22. $f(x) = x^2, \quad L = 3, \quad x_0 = \sqrt{3}, \quad \epsilon = 0.1$

23. $f(x) = x^2, \quad L = 4, \quad x_0 = -2, \quad \epsilon = 0.5$

24. $f(x) = 1/x, \quad L = -1, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.1$

25. $f(x) = x^2 - 5, \quad L = 11, \quad x_0 = 4, \quad \epsilon = 1$

26. $f(x) = 120/x, \quad L = 5, \quad x_0 = 24, \quad \epsilon = 1$

27. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 2m, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.03$

28. $f(x) = mx, \quad m > 0, \quad L = 3m, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = c > 0$

29. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = (m/2) + b,$
$x_0 = 1/2, \quad \epsilon = c > 0$

30. $f(x) = mx + b, \quad m > 0, \quad L = m + b, \quad x_0 = 1,$
$\epsilon = 0.05$

Aplicación de la definición formal

En los ejercicios 31 a 36 se presenta una función $f(x)$, un punto x_0 y un número positivo ϵ. Determine $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Luego, encuentre un número $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

31. $f(x) = 3 - 2x, \quad x_0 = 3, \quad \epsilon = 0.02$

32. $f(x) = -3x - 2, \quad x_0 = -1, \quad \epsilon = 0.03$

33. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.05$

34. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x + 5}, \quad x_0 = -5, \quad \epsilon = 0.05$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, \quad x_0 = -3, \quad \epsilon = 0.5$

36. $f(x) = 4/x, \quad x_0 = 2, \quad \epsilon = 0.4$

En los ejercicios 37 a 50, pruebe los límites que se proponen.

37. $\lim\limits_{x \to 4} (9 - x) = 5$

38. $\lim\limits_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

39. $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

41. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

42. $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 4 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$

43. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

44. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$

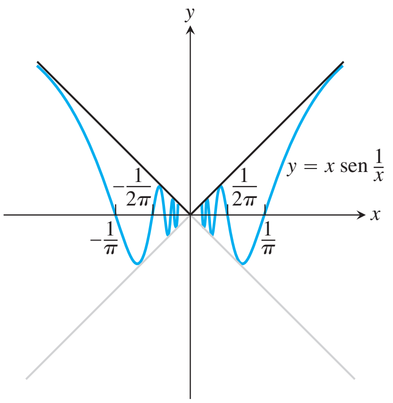
45. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

46. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

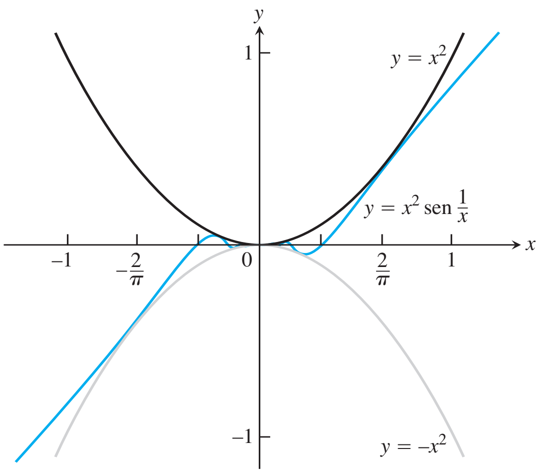
47. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x < 1 \\ 6x - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ x/2, & x \geq 0 \end{cases}$

49. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$



50. $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$



Teoría y ejemplos

51. Explique lo que significa $\lim_{x \to 0} g(x) = k$.

52. Pruebe que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{h \to 0} f(h + c) = L$.

53. **Una afirmación errónea acerca de límites** Por medio de un ejemplo demuestre que la siguiente afirmación es errónea.

    El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si $f(x)$ se hace muy cercano a L cuando x se aproxima a x_0.

    Explique por qué la función en su ejemplo no tiene el valor dado de L como límite cuando $x \to x_0$.

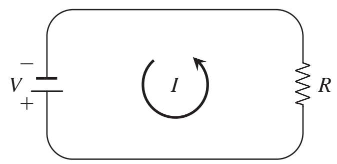
54. **Otra afirmación errónea acerca de límites** Mediante un ejemplo demuestre que la siguiente afirmación es errónea.

    El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un valor de x para el que $|f(x) - L| < \epsilon$.

    Explique por qué la función en su ejemplo no tiene el valor dado de L como límite cuando $x \to x_0$.

T 55. **Fabricación de cilindros** Antes de solicitar la fabricación de cilindros para motor de automóvil con área transversal de 9 in^2, necesita conocer cuánta desviación del diámetro ideal del cilindro, que es de $x_0 = 3.385$ in, se puede permitir para, aun así, obtener un área que no difiera más de 0.01 in^2 con respecto a las 9 in^2 requeridas. Para hacerlo, considere $A = \pi(x/2)^2$ y busque el intervalo en el cual debe estar x para hacer que $|A - 9| \leq 0.01$. ¿Cuál es ese intervalo?

56. **Fabricación de resistores eléctricos** La ley de Ohm para circuitos eléctricos, como el que se ilustra en la siguiente figura, establece que $V = RI$. En esta ecuación, V es un voltaje constante, I es la corriente en amperes y R es la resistencia en ohms. A su empresa le han solicitado suministrar los resistores para un circuito en el que V será de 120 volts e I será 5 ± 0.1 amperes. ¿En qué intervalo debe estar R para que I esté a menos de 0.1 amperes del valor $I_0 = 5$?



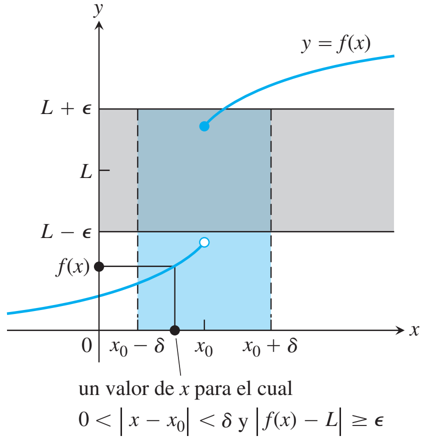
¿Cuándo un número L no es el límite de $f(x)$ conforme $x \to x_0$?

Demostración de que L no es el límite Podemos probar que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ determinando una $\epsilon > 0$ tal que no exista posible $\delta > 0$ que satisfaga la condición

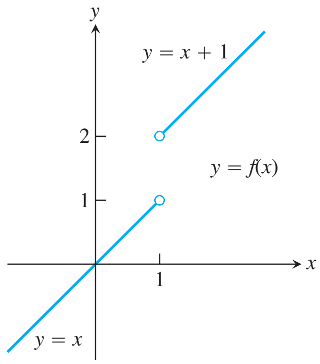
$$\text{para toda } x, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Realizamos esto para nuestro candidato ϵ, mostrando que para cada $\delta > 0$ existe un valor de x tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| \geq \epsilon.$$



57. Sea $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$



a. Sea $\epsilon = 1/2$. Demuestre que no existe posible $\delta > 0$ que satisfaga la siguiente condición:

$$\text{Para toda } x, \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < 1/2.$$

Esto es, para cada $\delta > 0$ demuestre que existe un valor de x tal que

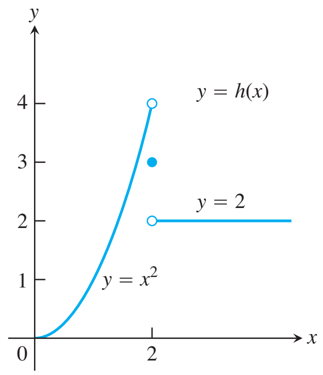
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - 2| \geq 1/2.$$

Lo anterior demostrará que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$.

b. Demuestre que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$.

c. Demuestre que $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1.5$.

58. Sea $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2. \end{cases}$



Demuestre que

a. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 4$

b. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 3$

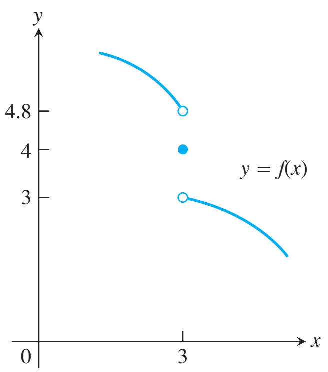
c. $\lim_{x \to 2} h(x) \neq 2$

59. Para la función que se grafica a continuación, explique por qué

a. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4$

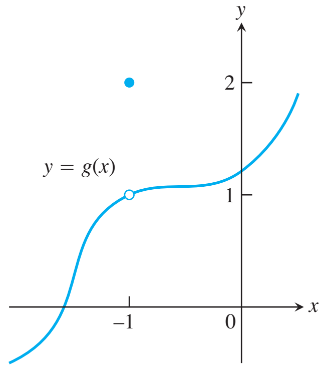
b. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 4.8$

c. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq 3$



60. **a.** Para la función graficada a continuación, demuestre que $\lim_{x \to -1} g(x) \neq 2$.

b. ¿Parece que existe $\lim_{x \to -1} g(x)$ Si es así, ¿cuál es el valor del límite? Si no existe, ¿por qué?



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 61 a 66, explorará con mayor detalle la determinación gráfica de deltas. Utilice un SAC para realizar los siguientes pasos:

a. Trace la función $y = f(x)$ cerca del punto x_0 al que se quiere aproximar.

b. Conjeture acerca del valor del límite L y luego evalúe simbólicamente el límite para ver si su suposición fue correcta.

c. Utilizando el valor $\epsilon = 0.2$, en la misma gráfica trace las rectas de la banda $y_1 = L - \epsilon$ y $y_2 = L + \epsilon$, junto con la función f cerca de x_0.

d. Con base en su gráfica del inciso (c), estime una $\delta > 0$ tal que para toda x,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Compruebe su estimación al graficar f, y_1 y y_2 en el intervalo $0 < |x - x_0| < \delta$. Para la ventana utilice $x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta$ y $L - 2\epsilon \leq y \leq L + 2\epsilon$. Si algunos valores de la función están fuera del intervalo $[L - 2\epsilon, L + 2\epsilon]$ significa que eligió una δ demasiado grande. Intente con una estimación más pequeña.

e. Repita los incisos (c) y (d) sucesivamente para $\epsilon = 0.1$, 0.05 y 0.001.

61. $f(x) = \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}, \quad x_0 = 3$

62. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2}{2x^5 + 3x^2}, \quad x_0 = 0$

63. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}, \quad x_0 = 0$

64. $f(x) = \dfrac{x(1 - \cos x)}{x - \operatorname{sen} x}, \quad x_0 = 0$

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

66. $f(x) = \dfrac{3x^2 - (7x + 1)\sqrt{x} + 5}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

2.4 Límites laterales

En esta sección ampliaremos el concepto de límite a *límites laterales* (o de un solo lado), que son límites cuando x se aproxima al número c sólo por el lado izquierdo (donde $x < c$) o sólo por el lado derecho ($x > c$).

Límites laterales

Para tener un límite L cuando x tiende a c, una función debe estar definida en *ambos lados* de c y sus valores $f(x)$ deben aproximarse a L cuando x se aproxima a c. Debido a ello, los límites ordinarios se denominan **límites bilaterales**.

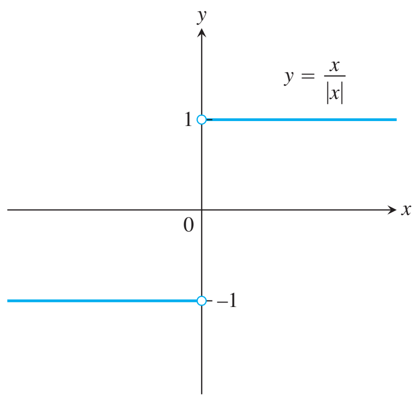


FIGURA 2.24 Diferentes límites laterales, por la derecha y por la izquierda, en el origen.

Si f carece de límite bilateral en c, podría tener un límite lateral, esto es, un límite si la aproximación es sólo por un lado. Si tal aproximación se da por la derecha, el límite es un **límite por la derecha**. Si es por la izquierda, es un **límite por la izquierda**.

La función $f(x) = x/|x|$ (figura 2.24) tiene límite 1 cuando x se aproxima a 0 por la derecha, y límite igual a -1 cuando x tiende a 0 por la izquierda. Como dichos valores para los límites laterales son diferentes, no existe un solo número al que $f(x)$ se aproxime cuando x tiende a 0. Así que $f(x)$ no tiene límite (bilateral) en 0.

De manera intuitiva, si $f(x)$ está definida en el intervalo (c, b), con $c < b$, y se aproxima arbitrariamente a L cuando x tiende a c dentro de ese intervalo, entonces f tiene **límite por la derecha** igual a L en c. Escribimos

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

El símbolo $x \to c^+$ significa que sólo consideramos valores de x mayores a c.

De forma análoga, si $f(x)$ está definida en un intervalo (a, c), con $a < c$, y se aproxima arbitrariamente a M cuando x tiende a c dentro de ese intervalo, entonces f tiene **límite por la izquierda** igual a M en c. Escribimos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = M.$$

El símbolo $x \to c^-$ significa que sólo consideramos valores de x menores que c.

Tales definiciones informales de límites laterales se ilustran en la figura 2.25. Para la función $f(x) = x/|x|$ en la figura 2.24 tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

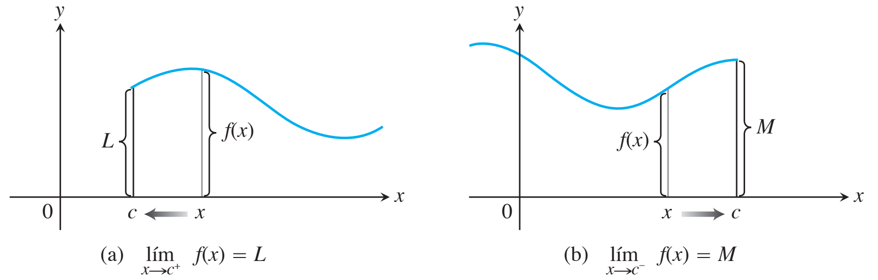


FIGURA 2.25 (a) Límite por la derecha cuando x se aproxima a c. (b) Límite por la izquierda cuando x se aproxima a c.

EJEMPLO 1 El dominio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es $[-2, 2]$; su gráfica es la semicircunferencia de la figura 2.26. Tenemos

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0.$$

La función no tiene límite por la izquierda en $x = -2$ ni límite por la derecha en $x = 2$. No tiene límite ordinario bilateral en -2 ni en 2. ■

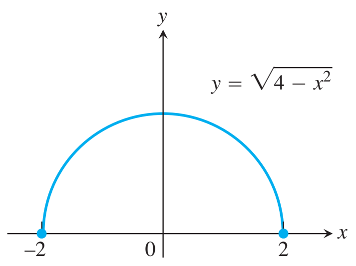


FIGURA 2.26 $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ y $\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (ejemplo 1).

Los límites laterales tienen todas las propiedades que se listan en el teorema 1 de la sección 2.2. El límite por la derecha de la suma de dos funciones es la suma de sus límites por la derecha y así sucesivamente. Los teoremas para límites de polinomios y funciones racionales se cumplen con límites laterales, así como el teorema del sándwich y el teorema 5. Los límites laterales se relacionan con los límites de la siguiente manera.

TEOREMA 6 Una función $f(x)$ tiene un límite cuando x tiende a c si y sólo si ahí tiene límites por la derecha y por la izquierda, y además si estos límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

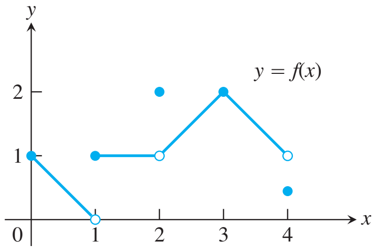


FIGURA 2.27 Gráfica de la función en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Para la función que aparece en la figura 2.27,

En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existen. La función no está definida a la izquierda de $x = 0$.

En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ aunque $f(1) = 1$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. Los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales.

En $x = 2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ aunque $f(2) = 2$.

En $x = 3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$.

En $x = 4$: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ aunque $f(4) \neq 1$,
$\lim_{x\to 4^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existen. La función no está definida a la derecha de $x = 4$.

En cualquier otro punto c, en [0, 4], $f(x)$ tiene límite igual a $f(c)$. ■

Definición formal de límites laterales

La definición formal del límite de la sección 2.3 se puede modificar fácilmente para los límites laterales.

DEFINICIONES Decimos que $f(x)$ tiene **límite por la derecha igual a L en x_0**, por lo que escribimos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \qquad \text{(véase la figura 2.28)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que para toda x

$$x_0 < x < x_0 + \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Decimos que f tiene **límite por la izquierda igual a L en x_0**, por lo que escribimos

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \qquad \text{(véase la figura 2.29)}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ correspondiente tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

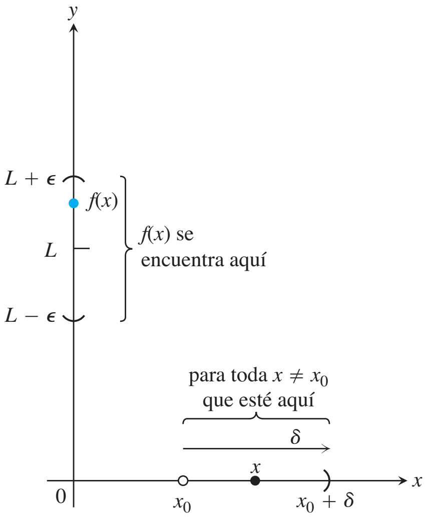


FIGURA 2.28 Intervalos asociados con la definición de límite por la derecha.

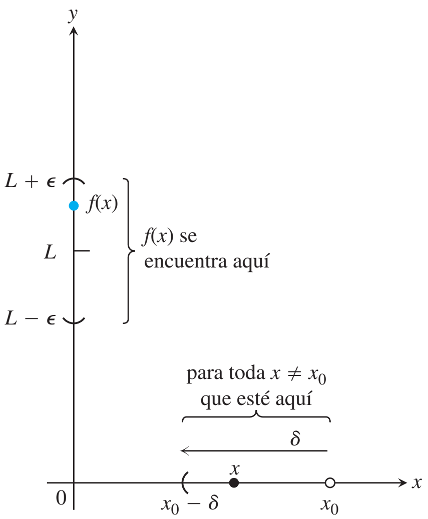


FIGURA 2.29 Intervalos asociados con la definición de límite por la izquierda.

EJEMPLO 3 Demuestre que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Solución Sea $\epsilon > 0$ dado. Aquí $x_0 = 0$ y $L = 0$, así que necesitamos determinar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon,$$

o bien

$$0 < x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \epsilon.$$

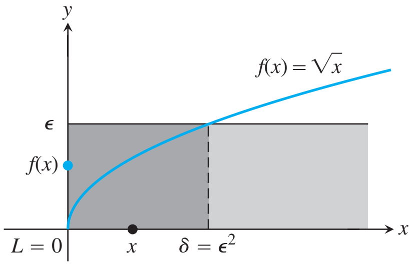


FIGURA 2.30 $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ en el ejemplo 3.

Al elevar ambos lados de la última desigualdad al cuadrado, se obtiene

$$x < \epsilon^2 \qquad \text{si} \qquad 0 < x < \delta.$$

Si elegimos $\delta = \epsilon^2$, tenemos

$$0 < x < \delta = \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \epsilon,$$

o bien

$$0 < x < \epsilon^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\sqrt{x} - 0| < \epsilon.$$

De acuerdo con la definición, esto muestra que $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ (figura 2.30). ■

Las funciones analizadas hasta ahora tienen algún tipo de límite en cada punto de interés. En general, esto no necesariamente ocurre.

EJEMPLO 4 Muestre que $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite cuando x tiende a cero por cualquier lado (figura 2.31).

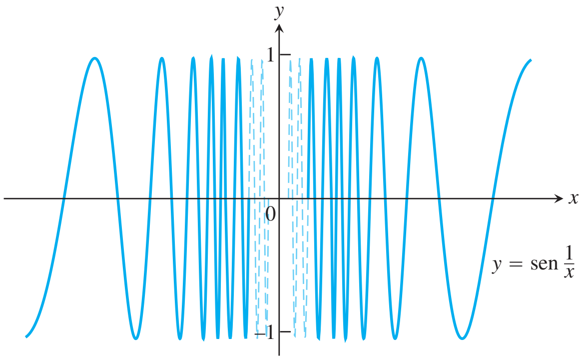


FIGURA 2.31 La función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite por la derecha ni límite por la izquierda cuando x tiende a cero (ejemplo 4). En la gráfica se omiten valores muy cercanos al eje y.

Solución Cuando x tiende a cero, su recíproco, $1/x$, crece sin cota y los valores de $\operatorname{sen}(1/x)$ se repiten de manera cíclica de -1 a 1. No existe un número L al que los valores de la función estén suficientemente cercanos cuando x se aproxima a cero. Esto es cierto incluso si restringimos x a valores positivos o a valores negativos. La función no tiene límite por la izquierda ni límite por la derecha en $x = 0$. ■

Límites que incluyen a $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$

Un hecho importante acerca de $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es que, medido en radianes, su límite $\theta \to 0$ es 1. En la figura 2.32 podemos ver esto y confirmarlo de manera algebraica si aplicamos el teorema de la compresión. Verá la importancia de este límite en la sección 3.5, donde se estudiarán las tasas instantáneas de cambio de las funciones trigonométricas.

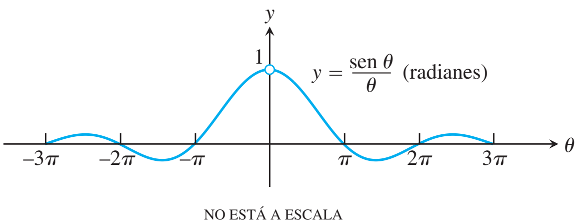


FIGURA 2.32 La gráfica de $f(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ sugiere que ambos límites, por la derecha y por la izquierda, cuando θ se aproxima a cero son iguales a 1.

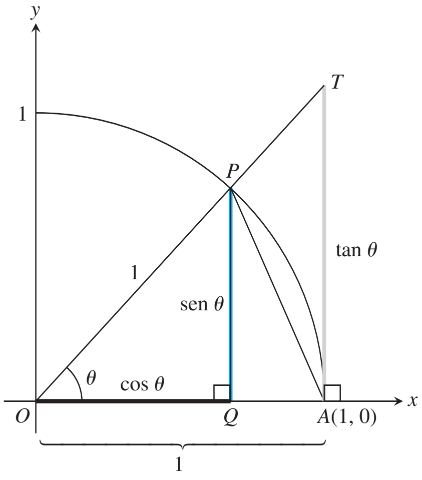


FIGURA 2.33 Figura para la demostración del teorema 7. Por definición, $TA/OA =$ $\tan\theta$, pero $OA = 1$, por lo que $TA = \tan\theta$.

La ecuación (2) es donde interviene la medida en radianes: el área del sector OAP es $\theta/2$ sólo si θ se mide en radianes.

TEOREMA 7

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ en radianes}) \tag{1}$$

Prueba El plan es mostrar que tanto el límite por la derecha como el límite por la izquierda son iguales a 1. Entonces sabremos que el límite bilateral también es 1.

Para mostrar que el límite por la derecha es 1, iniciamos con valores positivos de θ menores que $\pi/2$ (figura 2.33). Observe que

$$\text{Área de } \Delta OAP < \text{área del sector } OAP < \text{área de } \Delta OAT.$$

Podemos expresar estas áreas en términos de θ como sigue

$$\begin{aligned}
\text{Área de } \Delta OAP &= \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta \\
\text{Área del sector } OAP &= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2} \\
\text{Área de } \Delta OAT &= \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Así que,

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta.$$

Esta última desigualdad no se altera si dividimos los tres términos entre el número $(1/2)\operatorname{sen}\theta$, el cual es positivo, ya que $0 < \theta < \pi/2$:

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Al tomar recíprocos, las desigualdades se invierten:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Puesto que $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ (ejemplo 11b, sección 2.2), el teorema del sándwich nos da

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Recuerde que $\operatorname{sen}\theta$ y θ son *funciones impares* (sección 1.1). Por lo tanto, $f(\theta) = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ es una *función par*, con una gráfica simétrica con respecto al eje y (figura 2.32). Esta simetría implica que el límite por la izquierda en 0 existe y tiene el mismo valor que el límite por la derecha:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

así que por el teorema 6 se tiene $\lim_{\theta\to 0}(\operatorname{sen}\theta)/\theta = 1$. ■

EJEMPLO 5 Muestre que **(a)** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ y **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \frac{2}{5}.$

Solución

(a) Utilizando la fórmula del ángulo medio, $\cos h = 1 - 2\,\text{sen}^2(h/2)$, calculamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\,\text{sen}^2(h/2)}{h}$$

$$= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Sea } \theta = h/2.$$

$$= -(1)(0) = 0. \qquad \text{Ecuación (1) y ejemplo 11a de la sección 2.2.}$$

(b) La ecuación (1) no se aplica a la fracción original. En el denominador necesitamos $2x$, no $5x$. Para obtenerlo, multiplicamos numerador y denominador por $2/5$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot \text{sen}\,2x}{(2/5)\cdot 5x}$$

$$= \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,2x}{2x} \qquad \text{Ahora, la ecuación (1) se aplica con } \theta = 2x.$$

$$= \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

■

EJEMPLO 6 Determine $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t}$.

Solución Con base en la definición de $\tan t$ y $\sec 2t$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t} = \frac{1}{3} \lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}\,t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t}$$

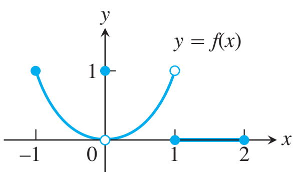
$$= \frac{1}{3}(1)(1)(1) = \frac{1}{3}. \qquad \text{Ecuación (1) y ejemplo 11b de la sección 2.2.}$$

■

Ejercicios 2.4

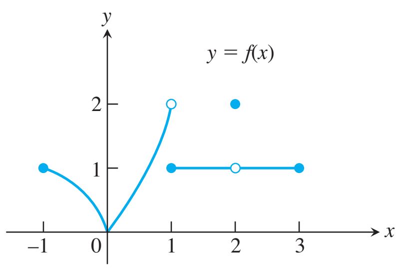
Determinación gráfica de límites

1. De los siguientes enunciados, respecto de la función $y = f(x)$ que aparece graficada, ¿cuáles son verdaderos y cuáles son falsos?



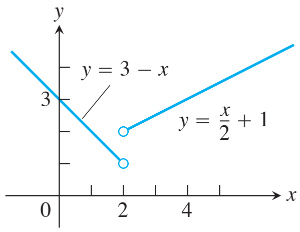
a. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$
b. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
c. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$
d. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$
e. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.
f. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
g. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
h. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
i. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
j. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$
k. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)$ no existe.
l. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

2. De los siguientes enunciados, respecto de la función $y = f(x)$ que aparece graficada, ¿cuáles son verdaderos y cuáles son falsos?



a. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$
b. $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.
c. $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
d. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$
e. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$
f. $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.
g. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$
h. $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(-1, 1)$.
i. $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x)$ existe para toda c en el intervalo abierto $(1, 3)$.
j. $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$
k. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$ No existe.

3. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1, & x > 2. \end{cases}$



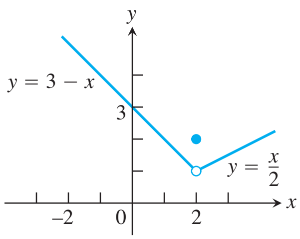
a. Determine $\text{lím}_{x\to 2^+} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to 2^-} f(x)$.

b. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 2} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

c. Determine $\text{lím}_{x\to 4^-} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to 4^+} f(x)$.

d. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 4} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

4. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \dfrac{x}{2}, & x > 2. \end{cases}$



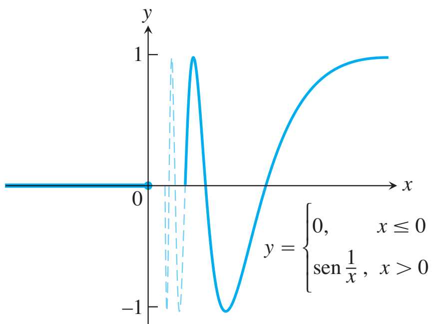
a. Determine $\text{lím}_{x\to 2^+} f(x)$, $\text{lím}_{x\to 2^-} f(x)$, y $f(2)$.

b. ¿Existe el $\text{lím}_{x-2} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

c. Determine $\text{lím}_{x\to -1^-} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to -1^+} f(x)$.

d. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

5. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

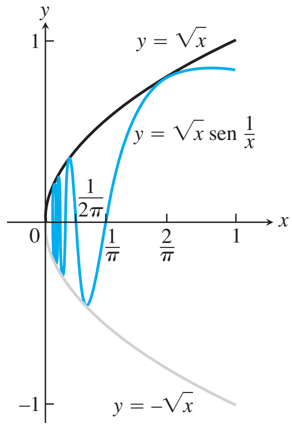


a. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0^+} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

b. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0^-} f(x)$? existe? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

c. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

6. Sea $g(x) = \sqrt{x}\,\text{sen}(1/x)$.



a. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0^+} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

b. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0^-} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

c. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 0} g(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

7. a. Grafique $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

b. Determine $\text{lím}_{x\to 1^-} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to 1^+} f(x)$.

c. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

8. a. Grafique $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$

b. Determine $\text{lím}_{x\to 1^+} f(x)$ y $\text{lím}_{x\to 1^-} f(x)$.

c. ¿Existe el $\text{lím}_{x\to 1} f(x)$? Si es así, ¿cuál es? Si no existe, ¿por qué?

Grafique las funciones en los ejercicios 9 y 10. Luego responda estas preguntas.

a. ¿Cuál es el dominio y cuál el rango de f?

b. ¿En qué puntos c, si los hay, existe $\text{lím}_{x\to c} f(x)$?

c. ¿En qué puntos sólo existe el límite por la izquierda?

d. ¿En qué puntos sólo existe el límite por la derecha?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \text{ o } 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$

Determinación algebraica de límites laterales

Calcule los límites en los ejercicios 11 a 18.

11. $\displaystyle \text{lím}_{x\to -0.5^-} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 1}}$

12. $\displaystyle \text{lím}_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}}$

13. $\displaystyle \text{lím}_{x\to -2^+} \left(\frac{x}{x + 1}\right)\left(\frac{2x + 5}{x^2 + x}\right)$

14. $\displaystyle \text{lím}_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x + 1}\right)\left(\frac{x + 6}{x}\right)\left(\frac{3 - x}{7}\right)$

15. $\displaystyle \text{lím}_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2 + 4h + 5} - \sqrt{5}}{h}$

16. $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{5h^2 + 11h + 6}}{h}$

17. a. $\lim\limits_{x\to -2^+} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$ **b.** $\lim\limits_{x\to -2^-} (x+3)\dfrac{|x+2|}{x+2}$

18. a. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}\,(x-1)}{|x-1|}$

Utilice la gráfica de la función máximo entero $y = \lfloor x \rfloor$ (figura 1.10 de la sección 1.1) para ayudarse a encontrar los límites en los ejercicios 19 y 20.

19. a. $\lim\limits_{\theta\to 3^+} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$ **b.** $\lim\limits_{\theta\to 3^-} \dfrac{\lfloor \theta \rfloor}{\theta}$

20. a. $\lim\limits_{t\to 4^+} (t - \lfloor t \rfloor)$ **b.** $\lim\limits_{t\to 4^-} (t - \lfloor t \rfloor)$

Uso de $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

En los ejercicios 21 a 42, determine los límites.

21. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$ **22.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} kt}{t}$ (k constante)

23. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3y}{4y}$ **24.** $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h}{\operatorname{sen} 3h}$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$ **26.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{\tan t}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \csc 2x}{\cos 5x}$ **28.** $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$ **30.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + \operatorname{sen} x}{2x}$

31. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$ **32.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 3x}$

33. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$ **34.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h}$

35. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$ **36.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$

37. $\lim\limits_{\theta\to 0} \theta\cos\theta$ **38.** $\lim\limits_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta\cot 2\theta$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\operatorname{sen} 8x}$ **40.** $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

41. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta^2\cot 3\theta}$ **42.** $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta\cot 4\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cot^2 2\theta}$

Teoría y ejemplos

43. Si usted sabe que en un punto interior del dominio de f, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ entonces ¿se cumplirá $\lim_{x\to a} f(x)$? Justifique su respuesta.

44. Si sabe que existe $\lim_{x\to c} f(x)$ ¿puede encontrar su valor calculando $\lim_{x\to c^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

45. Suponga que f es una función impar de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ le indica algo acerca de $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? Justifique su respuesta.

46. Suponga que f es una función par de x. ¿Saber que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ le indica algo acerca de $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ o de $\lim_{x\to -2^+} f(x)$? Justifique su respuesta.

Definiciones formales de límites laterales

47. Dado $\epsilon > 0$, determine un intervalo $I = (5, 5+\delta)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I entonces $\sqrt{x-5} < \epsilon$. ¿Qué límite se verifica y cuál es su valor?

48. Dado $\epsilon > 0$, determine un intervalo $I = (4-\delta, 4)$, $\delta > 0$, tal que si x está en I entonces $\sqrt{4-x} < \epsilon$. ¿Qué límite se verifica y cuál es su valor?

En los ejercicios 49 y 50, utilice las definiciones de límite por la derecha y límite por la izquierda para probar los siguientes enunciados acerca de límites.

49. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$ **50.** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|} = 1$

51. Función máximo entero Determine **(a)** $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ y **(b)** $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$; luego utilice las definiciones de límites para verificar sus resultados. **(c)** Con base en sus conclusiones de los incisos (a) y (b), ¿qué puede decir acerca de $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$? Justifique su respuesta.

52. Límites laterales Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0. \end{cases}$

Determine **(a)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y **(b)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; luego utilice las definiciones de límites para verificar sus resultados. **(c)** Con base en sus conclusiones de los incisos (a) y (b), ¿qué puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique su respuesta.

2.5 Continuidad

Cuando trazamos valores de una función generados en un laboratorio o recolectados en el campo de estudio, con frecuencia los unimos con una curva continua para mostrar los valores de la función en los tiempos que no medimos (figura 2.34). Al hacerlo, suponemos que trabajamos con una *función continua*, de forma que sus salidas varían continuamente con las entradas y no saltan de un valor a otro sin tomar los valores intermedios. El límite de una función continua, cuando x se aproxima a c, puede encontrarse con el simple cálculo del valor de la función en c. (En el teorema 2 vimos que esto es cierto para polinomios).

De manera intuitiva, cualquier función $y = f(x)$, cuya gráfica puede trazarse en todo su dominio con un movimiento continuo sin levantar el lápiz, es un ejemplo de una función continua. En esta sección estudiaremos de manera más precisa lo que significa que una función sea

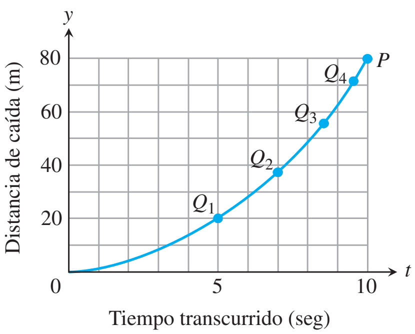


FIGURA 2.34 Los puntos de los datos experimentales $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ para un objeto que cae están conectados mediante una línea curva sin rupturas.

continua. También estudiaremos las propiedades de funciones continuas y veremos que muchas de las funciones presentadas en la sección 1.1 son continuas.

Continuidad en un punto

Para entender la continuidad es útil considerar una función como la de la figura 2.35, cuyos límites analizamos en el ejemplo 2 de la última sección.

EJEMPLO 1 Determine los puntos en los que la función f de la figura 2.35 es continua y los puntos donde f no es continua.

Solución La función f es continua en todo punto de su dominio [0, 4], excepto en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. En estos puntos, la gráfica se corta. Observe la relación entre el límite de f y el valor de f en cada punto del dominio de la función.

Puntos en los que la función es continua:

En $x = 0$, $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

En $x = 3$, $\qquad \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

En $0 < c < 4,\ c \neq 1, 2$, $\qquad \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Puntos en los que la función no es continua:

En $x = 1$, $\qquad \lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

En $x = 2$, $\qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 1$, pero $1 \neq f(2)$.

En $x = 4$, $\qquad \lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, pero $1 \neq f(4)$.

En $c < 0,\ c > 4$, $\qquad$ tales puntos no están en el dominio de f. ■

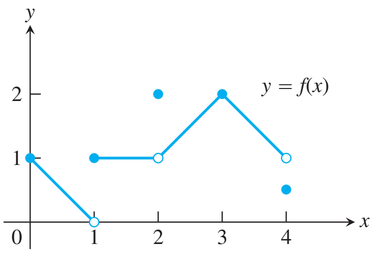


FIGURA 2.35 La función es continua en [0, 4] excepto en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$ (ejemplo 1).

Para definir continuidad en un punto en el dominio de una función, necesitamos definir continuidad en un punto interior (que implica un límite por los dos lados) y continuidad en un extremo (que implica un límite lateral) (figura 2.36).

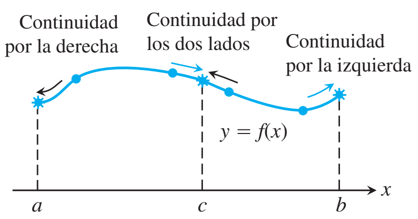


FIGURA 2.36 Continuidad en los puntos a, b y c.

DEFINICIÓN

Punto interior: Una función $y = f(x)$ es **continua en un punto interior c** de su dominio si

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Punto extremo: Una función $y = f(x)$ es **continua en un extremo izquierdo a** o es **continua en un extremo derecho b** de su dominio si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b), \quad \text{respectivamente}.$$

Si una función f no es continua en un punto c, decimos que f es **discontinua** en c, y que c es un **punto de discontinuidad** de f. Observe que c no necesita estar en el dominio de f.

Una función f es **continua por la derecha (continua desde la derecha)** en un punto $x = c$ en su dominio si $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$. Es **continua por la izquierda (continua desde la izquierda)** en c si $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$. Así, una función es continua en un extremo izquierdo a

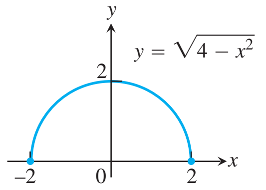


FIGURA 2.37 Una función que es continua en todo punto de su dominio (ejemplo 2).

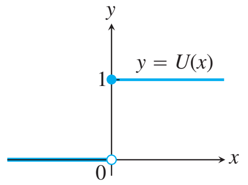


FIGURA 2.38 Una función que tiene una discontinuidad de salto en el origen (ejemplo 3).

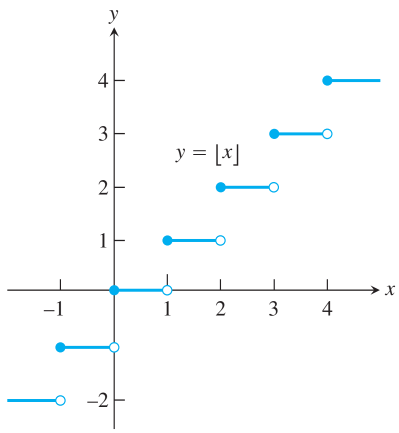


FIGURE 2.39 La función máximo entero es continua en todo punto no entero. Es continua por la derecha, pero no es continua por la izquierda, en cada punto entero (ejemplo 4).

de su dominio si es continua por la derecha en a, y es continua en un extremo derecho b de su dominio si es continua por la izquierda en b. Una función es continua en un punto interior c de su dominio si y sólo si es continua por la derecha y continua por la izquierda en c (figura 2.36).

EJEMPLO 2 La función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continua en todo punto de su dominio $[-2, 2]$ (figura 2.37) si incluye a $x = -2$, donde f es continua por la derecha, y en $x = 2$, donde es continua por la izquierda. ■

EJEMPLO 3 La función escalón unitario $U(x)$, que se grafica en la figura 2.38, es continua por la derecha en $x = 0$, pero no es continua por la izquierda ni continua allí. Tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$. ■

Resumimos continuidad en un punto en la forma de una prueba o un criterio.

> **Prueba de continuidad**
> Una función $f(x)$ es continua en un punto interior $x = c$ de su dominio si y sólo si cumple las siguientes tres condiciones:
>
> **1.** $f(c)$ existe (c pertenece al dominio de f).
>
> **2.** Existe el $\lim_{x \to c} f(x)$ (f tiene límite cuando $x \to c$).
>
> **3.** $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (el límite es igual al valor de la función).

Para la continuidad lateral y la continuidad en un punto extremo, los límites en las partes 2 y 3 de la prueba deben reemplazarse por los límites laterales apropiados.

EJEMPLO 4 La función $y = \lfloor x \rfloor$, que se presentó en la sección 1.1, está graficada en la figura 2.39. Es discontinua en cada entero, puesto que los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales cuando $x \to n$:

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

Como $\lfloor n \rfloor = n$, la función máximo entero es continua por la derecha en cada entero n (pero no es continua por la izquierda).

La función máximo entero es continua en cada número real que no sea entero. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1.5} \lfloor x \rfloor = 1 = \lfloor 1.5 \rfloor .$$

En general, si $n - 1 < c < n$, n es un entero, entonces

$$\lim_{x \to c} \lfloor x \rfloor = n - 1 = \lfloor c \rfloor .$$ ■

La figura 2.40 muestra varios tipos de discontinuidades. La función en la figura 2.40a es continua en $x = 0$. La función en la figura 2.40b sería continua si tuviera $f(0) = 1$. La función en la figura 2.40c sería continua si $f(0)$ fuera 1 en vez de 2. Las discontinuidades en la figura 2.40b y c son **removibles** (o evitables). Cada función tiene límite cuando $x - 0$; podemos evitar la discontinuidad si hacemos $f(0)$ igual a este límite.

Las discontinuidades en la figura 2.40d a 1.40f son más serias: $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe y no hay forma de mejorar la situación cambiando f en 0. La función escalonada en la figura 2.40d tiene una **discontinuidad de salto**. Los límites laterales existen, pero con valores diferentes. La función $f(x) = 1/x^2$ en la figura 2.40e tiene una **discontinuidad infinita**. La función en la figura 2.40f tiene una **discontinuidad oscilante**. Oscila demasiado para tener límite cuando $x \to 0$.

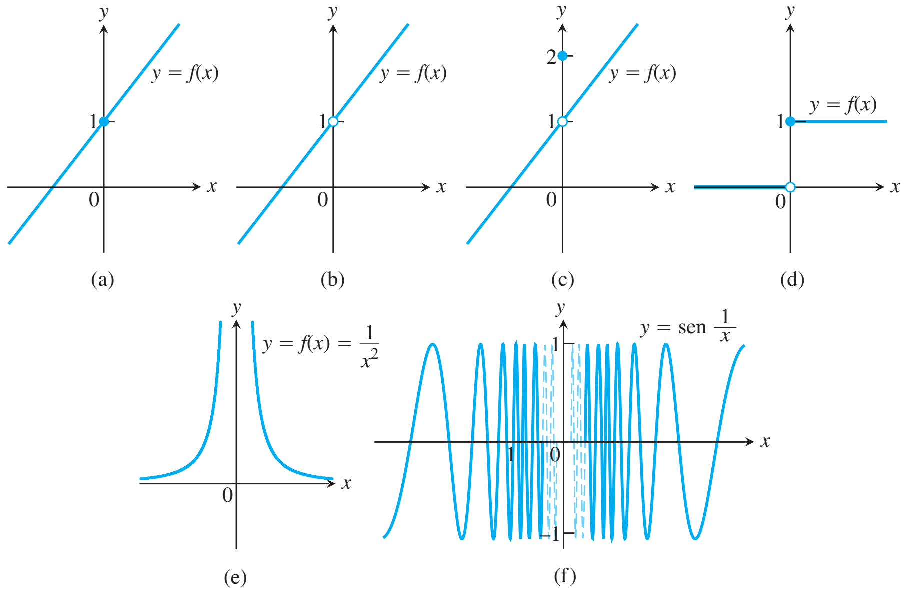


FIGURA 2.40 La función en (a) es continua en $x = 0$; las funciones en las gráficas (b) a (f) no lo son.

Funciones continuas

Una función es **continua en un intervalo** si y sólo si es continua en cada punto del intervalo. Por ejemplo, la función semicircunferencia graficada en la figura 2.37 es continua en el intervalo $[-2, 2]$, que es su dominio. Una **función continua** es aquella que es continua en cada punto de su dominio. Una función continua no necesita ser continua en todos los intervalos.

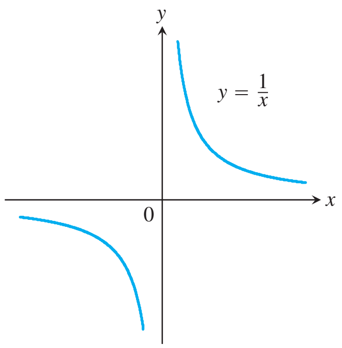


FIGURA 2.41 La función $y = 1/x$ es continua en cada valor de x excepto en $x = 0$. Tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5

(a) La función $y = 1/x$ (figura 2.41) es una función continua, ya que es continua en todo punto de su dominio. Tiene un punto de discontinuidad en $x = 0$; sin embargo, como no está definida allí, es discontinua en cualquier intervalo que contenga a $x = 0$.

(b) De acuerdo con el ejemplo 3 de la sección 2.3, la función identidad $f(x) = x$ y las funciones constantes son continuas para todo número real. ■

Combinaciones algebraicas de funciones continuas son continuas donde estén definidas.

TEOREMA 8: Propiedades de las funciones continuas Si las funciones f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes combinaciones son continuas en $x = c$.

1. *Sumas:* $f + g$
2. *Diferencias:* $f - g$
3. *Múltiplos constantes:* $k \cdot f$, para cualquier número k
4. *Productos:* $f \cdot g$
5. *Cocientes:* f/g, siempre que $g(c) \neq 0$
6. *Potencias:* f^n, donde n es un entero positivo
7. *Raíces:* $\sqrt[n]{f}$, siempre que esté definida en un intervalo que contenga a c, donde n es un entero positivo.

La mayoría de los resultados del teorema 8 se deducen de las reglas de los límites del teorema 1, sección 2.2. Por ejemplo, para probar la propiedad de la suma, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c}(f+g)(x) &= \lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) \\
&= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x), && \text{Regla de la suma, teorema 1} \\
&= f(c)+g(c) && \text{Continuidad de } f \text{ y } g \text{ en } c \\
&= (f+g)(c).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $f + g$ es continua.

EJEMPLO 6

(a) Todo polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es continuo, ya que, por el teorema 2, sección 2.2, se tiene $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$.

(b) Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $P(x)/Q(x)$ es continua siempre que esté definida ($Q(c) \neq 0$) por el teorema 3, sección 2.2. ■

EJEMPLO 7 La función $f(x) = |x|$ es continua en todo valor de x. Si $x > 0$, tenemos $f(x) = x$, un polinomio. Si $x < 0$, tenemos $f(x) = -x$, otro polinomio. Por último, en el origen, $\lim_{x \to 0}|x| = 0 = |0|$. ■

Las funciones $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son continuas en $x = 0$ por el ejemplo 11 de la sección 2.2. De hecho, ambas funciones son continuas en todos los reales (ejercicio 68). Con base en el teorema 8, se deduce que las seis funciones trigonométricas son continuas siempre que estén definidas. Por ejemplo, $y = \tan x$ es continua en $\cdots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup \cdots$.

Composición de funciones

Toda composición de funciones continuas es continua. La idea es que si $f(x)$ es continua en $x = c$, y $g(x)$ es continua en $x = f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en $x = c$ (figura 2.42). En este caso, el límite cuando $x \to c$ es $g(f(c))$.

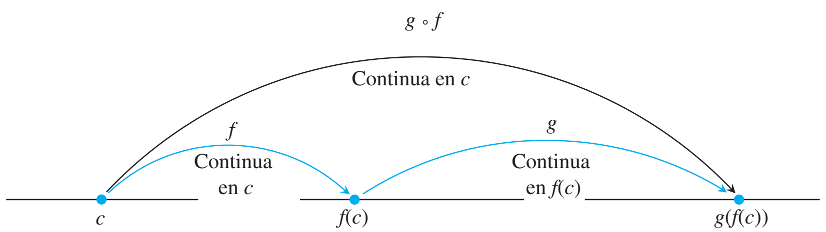


FIGURA 2.42 Las composiciones de funciones continuas son continuas.

TEOREMA 9: Composición de funciones continuas Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en c.

De manera intuitiva, el teorema 9 es razonable, ya que si x es cercana a c, entonces $f(x)$ es cercana a $f(c)$, y como g es continua en $f(c)$ se sigue que $g(f(x))$ es cercana a $g(f(c))$.

La continuidad de la composición se cumple para cualquier número finito de funciones. El único requisito es que cada función sea continua donde se aplique. En el ejercicio 6 del apéndice 4 aparece un esquema de la prueba del teorema 9.

EJEMPLO 8 Demuestre que las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios respectivos.

(a) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ **(b)** $y = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x^4}$

(c) $y = \left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2}\right|$ **(d)** $y = \left|\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2}\right|$

Solución

(a) La función raíz cuadrada es continua en $[0, \infty)$, ya que es una raíz de la función identidad $f(x) = x$, que es continua (parte 7, teorema 8). Entonces, la función dada es la composición del polinomio $f(x) = x^2 - 2x - 5$ con la función raíz cuadrada $g(t) = \sqrt{t}$, por lo tanto es continua en su dominio.

(b) El numerador es la raíz cúbica de la función identidad elevada al cuadrado; el denominador es un polinomio que siempre es positivo. Por lo tanto, el cociente es continuo.

(c) El cociente $(x - 2)/(x^2 - 2)$ es continuo para toda $x \neq \pm\sqrt{2}$, y la función es la composición de este cociente con la función valor absoluto, que es continua (ejemplo 7).

(d) Puesto que la función seno es continua en todos los reales (ejercicio 68), entonces el término del numerador $x \operatorname{sen} x$ es el producto de funciones continuas, y el término del denominador $x^2 + 2$ es un polinomio siempre positivo. La función dada es la composición de un cociente de funciones continuas con la función continua valor absoluto (figura 2.43). ■

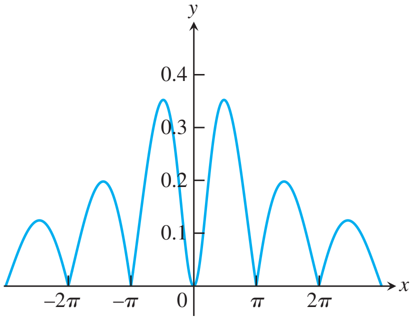


FIGURA 2.43 La gráfica sugiere que $y = |(x \operatorname{sen} x)/(x^2 + 2)|$ es continua (ejemplo 8d).

En realidad, el teorema 9 es una consecuencia de un resultado más general que ahora estableceremos y demostraremos.

TEOREMA 10: Límites de funciones continuas Si g es continua en el punto b y $\lim_{x\to c} f(x) = b$, entonces

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to c} f(x)).$$

Prueba Sea $\epsilon > 0$ dado. Ya que g es continua en b, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |y - b| < \delta_1.$$

Puesto que $\lim_{x\to c} f(x) = b$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \delta_1 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

Si hacemos $y = f(x)$, entonces tenemos que

$$|y - b| < \delta_1 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta,$$

lo que, con base en el primer enunciado, implica que $|g(y) - g(b)| = |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$. De la definición de límite, esto prueba que $\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b)$. ■

EJEMPLO 9 Como una aplicación del teorema 10, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2} \cos\left(2x + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) &= \cos\left(\lim_{x\to\pi/2} 2x + \lim_{x\to\pi/2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right)\\ &= \cos(\pi + \operatorname{sen} 2\pi) = \cos\pi = -1.\end{aligned}$$ ■

Extensión continua hacia un punto

La función $y = f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ es continua en todo punto, excepto en $x = 0$. En esto se parece a la función $y = 1/x$. Pero $y = (\operatorname{sen} x)/x$ es diferente de $y = 1/x$ en que tiene un límite finito cuando $x \to 0$ (teorema 7). Por lo tanto, es posible extender el dominio de la función para incluir el punto $x = 0$, de tal manera que la función ampliada sea continua en $x = 0$. Definimos una nueva función

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\[2ex] 1, & x = 0. \end{cases}$$

La función $F(x)$ es continua en $x = 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = F(0)$$

(figura 2.44).

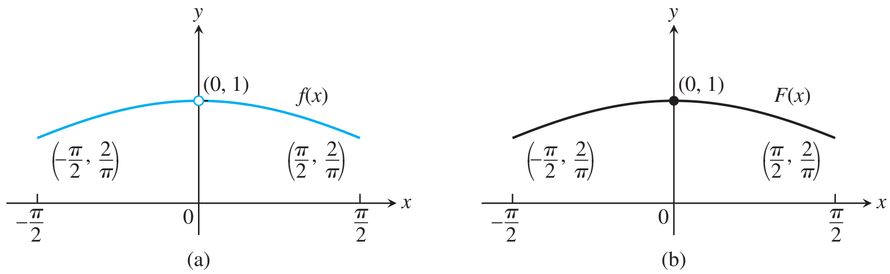


FIGURA 2.44 La gráfica (a) de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ no incluye al punto $(0, 1)$, ya que la función no está definida en $x = 0$. (b) Es posible eliminar la discontinuidad de la gráfica si se define la nueva función $F(x)$ con $F(0) = 1$ y $F(x) = f(x)$ en todos los demás puntos. Observe que $F(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

Con mayor generalidad, una función (tal como una función racional) puede tener límite, aunque en ese punto no esté definida. Si $f(c)$ no está definida, pero existe el $\lim_{x \to c} f(x) = L$ definimos una nueva función $F(x)$ mediante la regla

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \text{ está en el dominio de } f \\ L, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

La función f es continua en $x = c$. Se denomina **extensión continua de *f*** para $x = c$. Para funciones racionales f, las extensiones continuas por lo regular se determinan cancelando los factores comunes.

EJEMPLO 10 Demuestre que

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}, \qquad x \neq 2$$

tiene una extensión continua para $x = 2$ y determine esa extensión.

Solución Aunque $f(2)$ no está definida, si $x \neq 2$, tenemos

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}.$$

La nueva función

$$F(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$$

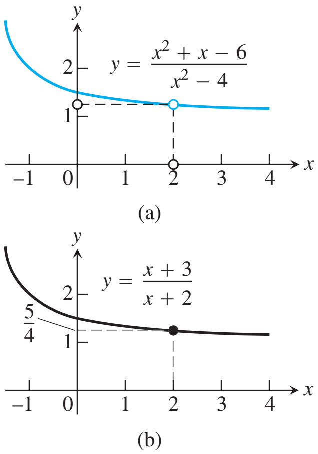


FIGURA 2.45 (a) La gráfica de $f(x)$ y (b) la gráfica de su extensión continua $F(x)$ (ejemplo 10).

es igual a $f(x)$ para $x \neq 2$, pero es continua en $x = 2$, con valor igual a $5/4$. Por lo tanto, f es la extensión continua de f para $x = 2$ y

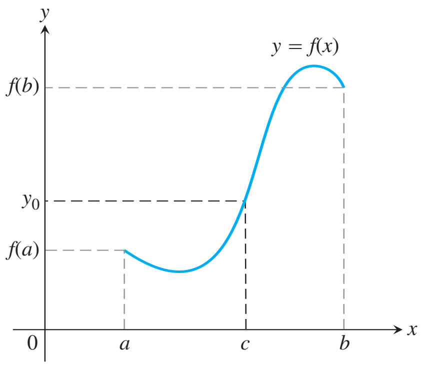
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} f(x) = \frac{5}{4}.$$

La gráfica de f se presenta en la figura 2.45. La extensión continua f tiene la misma gráfica, salvo que no muestra un agujero en $(2, 5/4)$. En efecto, f es la función f con su punto de discontinuidad en $x = 2$ removido. ■

Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Las funciones que son continuas en intervalos tienen propiedades que las hacen particularmente útiles en matemáticas y sus aplicaciones. Una de éstas es la propiedad del valor intermedio. Se dice que una función tiene la propiedad del valor intermedio si siempre que toma dos valores, también toma todos los valores entre esos dos.

TEOREMA 11: Teorema del valor intermedio para funciones continuas Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si y_0 es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $y_0 = f(c)$ para algún c en $[a, b]$.



El teorema 11 dice que funciones continuas en intervalos *cerrados finitos* tienen la propiedad del valor intermedio. Geométricamente, el teorema del valor intermedio indica que cualquier recta horizontal $y = y_0$ que cruza el eje y entre los números $f(a)$ y $f(b)$ cruzará la curva $y = f(x)$ al menos una vez en el intervalo $[a, b]$.

La prueba del teorema del valor intermedio depende de la propiedad de completez del sistema de los números reales (apéndice 6) y puede encontrarse en textos más avanzados.

La continuidad de f en el intervalo es esencial para el teorema 11. Si f es discontinua, aunque sea en un solo punto del intervalo, la conclusión del teorema podría no cumplirse, como sucede para la función graficada en la figura 2.46 (basta seleccionar y_0 como cualquier número entre 2 y 3).

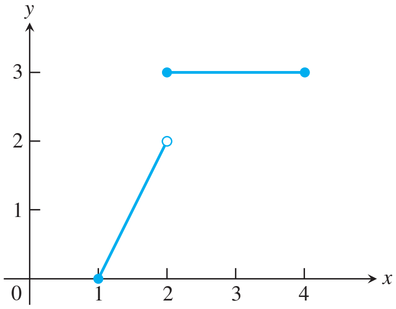


FIGURA 2.46 La función
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$
no toma todos los valores entre $f(1) = 0$ y $f(4) = 3$; le faltan todos los valores entre 2 y 3.

Una consecuencia para la graficación: Conectividad El teorema 11 implica que la gráfica de una función **continua**, en un intervalo, no puede tener rupturas en el intervalo. Será conexa, esto es, una curva sin cortes. No tendrá saltos, como la gráfica de la función máximo entero (figura 2.39), ni ramas separadas como la gráfica de $1/x$ (figura 2.41).

Una consecuencia para la determinación de raíces Una solución de la ecuación $f(x) = 0$ se llama **raíz** de la ecuación o **cero** de la función f. El teorema del valor intermedio nos dice que si f es continua, entonces cualquier intervalo en el que f cambia de signo tendrá un cero de la función.

En términos prácticos, cuando en una pantalla de computadora vemos que la gráfica de una función continua cruza el eje horizontal, sabemos que no brinca el eje. En realidad, existe un punto donde el valor de la función es cero.

EJEMPLO 11 Demuestre que entre 1 y 2, existe una raíz de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$.

Solución Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. Como $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ y $f(2) = 23 - 2 - 1 = 5 > 0$, vemos que $y_0 = 0$ es un valor entre $f(1)$ y $f(2)$. Como f es una función continua, el teorema del valor intermedio dice que existe un cero de f entre 1 y 2. La figura 2.47 muestra el resultado de hacer acercamientos para ubicar la raíz alrededor de $x = 1.32$. ■

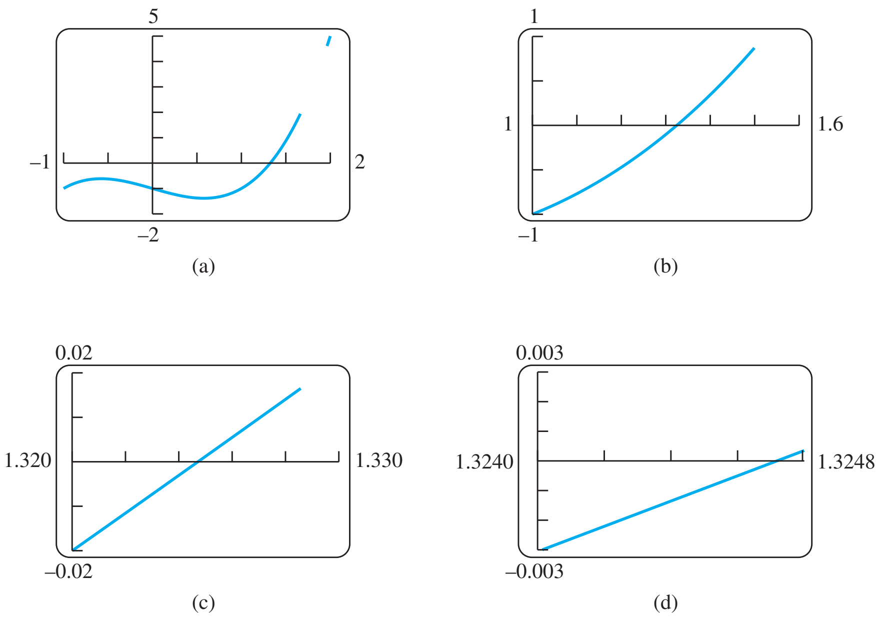


FIGURA 2.47 Acercamiento a un cero de la función $f(x) = x^3 - x - 1$. El cero está cerca de $x = 1.3247$ (ejemplo 11).

EJEMPLO 12 Utilice el teorema del valor intermedio para probar que la ecuación

$$\sqrt{2x + 5} = 4 - x^2$$

tiene una solución (figura 2.48).

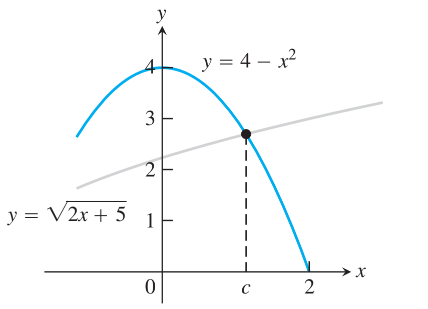


FIGURA 2.48 Las curvas $y = \sqrt{2x + 5}$ y $y = 4 - x^2$ y $y = 4 - x^2$ tienen el mismo valor en $x = c$ cuando $\sqrt{2x + 5} = 4 - x^2$ (ejemplo 12).

Solución Rescriba la ecuación como

$$\sqrt{2x + 5} + x^2 = 4,$$

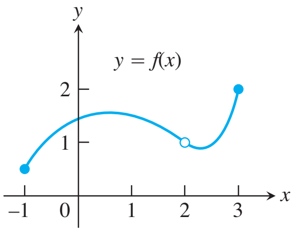
y establezca que $f(x) = \sqrt{2x + 5} + x^2$. Ahora $g(x) = \sqrt{2x + 5}$ es continua en el intervalo $[-5/2, \infty)$, ya que es la composición de la función raíz cuadrada con la función lineal no negativa $y = 2x + 5$. Entonces f es la suma de la función g y la función cuadrática $y = x^2$, la cual es continua para todos los valores de x. Se sigue que $f(x) = \sqrt{2x + 5} + x^2$ es continua en el intervalo $[-5/2, \infty)$. Por ensayo y error, encontramos los valores de la función $f(0) = \sqrt{5} \approx 2.24$ y $f(2) = \sqrt{9} + 4 = 7$, observe que f también es continua en el intervalo cerrado $[0, 2] - [-5/2, \infty)$. Como el valor $y_0 = 4$ está entre los números 2.24 y 7, por el teorema del valor intermedio, existe un número $c - [0, 2]$ tal que $f(c) = 4$. Esto es, el número c resuelve la ecuación original. ■

Ejercicios 2.5

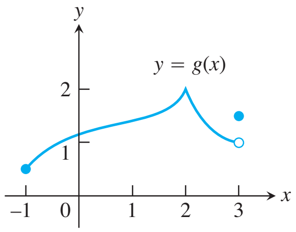
Continuidad de las gráficas

En los ejercicios 1 a 4, indique si la función graficada es continua en $[-1, 3]$. Si no, ¿en dónde no es continua y por qué?

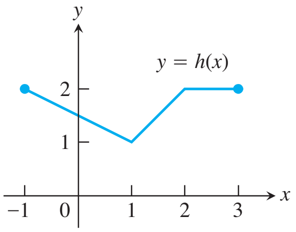
1.



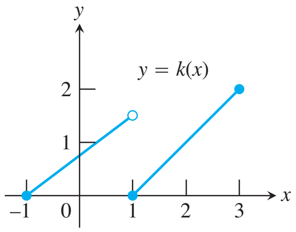
2.



3.



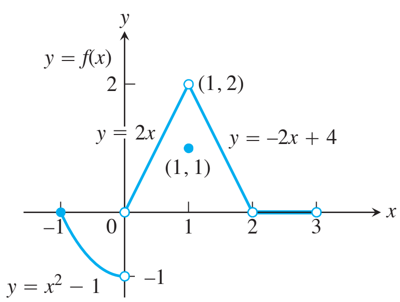
4.



Los ejercicios 5 a 10 se refieren a la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

que se grafica a continuación.



Gráfica para los ejercicios 5 a 10.

5. a. ¿Existe $f(-1)$?

b. ¿Existe $\lim_{x\to -1^+} f(x)$?

c. ¿$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$?

d. ¿La función f es continua en $x = -1$?

6. a. ¿Existe $f(1)$?

b. ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

c. ¿$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

d. ¿La función f es continua en $x = 1$?

7. a. ¿Está f definida en $x = 2$? (Véase la definición de f).

b. ¿f es continua en $x = 2$?

8. ¿En cuáles valores de x la función f es continua?

9. ¿Qué valor debe asignarse a $f(2)$ para hacer que la función extendida sea continua en $x = 2$?

10. ¿A qué nuevo valor debe cambiarse $f(1)$ para eliminar la discontinuidad?

Aplicación del criterio de continuidad

¿En qué puntos no son continuas las funciones de los ejercicios 11 y 12? ¿En cuáles, si acaso, las discontinuidades son removibles? ¿En cuáles no son removibles? Justifique sus respuestas.

11. Ejercicio 1, sección 2.4

12. Ejercicio 2, sección 2.4.

¿En qué puntos las funciones de los ejercicios 13 a 30 son continuas?

13. $y = \dfrac{1}{x - 2} - 3x$

14. $y = \dfrac{1}{(x + 2)^2} + 4$

15. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

16. $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$

17. $y = |x - 1| + \operatorname{sen} x$

18. $y = \dfrac{1}{|x| + 1} - \dfrac{x^2}{2}$

19. $y = \dfrac{\cos x}{x}$

20. $y = \dfrac{x + 2}{\cos x}$

21. $y = \csc 2x$

22. $y = \tan \dfrac{\pi x}{2}$

23. $y = \dfrac{x \tan x}{x^2 + 1}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 1}}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$

25. $y = \sqrt{2x + 3}$

26. $y = \sqrt[4]{3x - 1}$

27. $y = (2x - 1)^{1/3}$

28. $y = (2 - x)^{1/5}$

29. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \ne 2, x \ne -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$

Límites que incluyen funciones trigonométricas

Determine los límites en los ejercicios 31 a 36. En el punto al que se aproximan, ¿las funciones son continuas?

31. $\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$

32. $\lim_{t\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

33. $\lim_{y\to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

34. $\lim_{x\to 0} \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos(\operatorname{sen} x^{1/3})\right)$

35. $\lim_{t\to 0} \cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{19 - 3\sec 2t}}\right)$

36. $\lim_{x\to\pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

Extensiones continuas

37. Defina $g(3)$ de manera que extienda $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ para que sea continua en $x = 3$.

38. Defina $h(2)$ de manera que extienda $h(t) = (t^2 + 3t - 10)/(t - 2)$ para que sea continua en $t = 2$.

39. Defina $f(1)$ de manera que extienda $f(s) = (s^3 - 1)/(s^2 - 1)$ para que sea continua en $s = 1$.

40. Defina $g(4)$ de manera que extienda

$$g(x) = (x^2 - 16)/(x^2 - 3x - 4)$$

para que sea continua en $x = 4$.

41. ¿Para qué valores de a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

es continua en toda x?

42. ¿Para qué valores de b

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

es continua en toda x?

43. ¿Para qué valores de a

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

es continua en toda x?

44. ¿Para qué valores de b

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - b}{b + 1}, & x < 0 \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}$$

es continua en toda x?

45. ¿Para qué valores de a y b

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ ax - b, & -1 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

es continua en toda x?

46. ¿Para qué valores de a y b

$$g(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

es continua en toda x?

T En los ejercicios 47 a 50, grafique la función f para ver si parece que tiene una extensión continua en el origen. Si es así, utilice las funciones Trace y Zoom para determinar un buen candidato para el valor de la función extendida en $x = 0$. Si la función no parece tener una extensión continua, ¿podrá extenderse para que sea continua en el origen por la derecha o por la izquierda? Si es así, ¿cuál(es) debería(n) ser el(los) valore(s) de la función extendida?

47. $f(x) = \dfrac{10^x - 1}{x}$

48. $f(x) = \dfrac{10^{|x|} - 1}{x}$

49. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

50. $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

Teoría y ejemplos

51. Se sabe que una función continua $y = f(x)$ es negativa en $x = 0$ y positiva en $x = 1$. ¿Por qué la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución entre $x = 0$ y $x = 1$? Ilustre con un bosquejo.

52. Explique por qué la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución.

53. Raíces de una cúbica Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ tiene tres soluciones en el intervalo $[-4, 4]$.

54. Valor de una función Demuestre que la función $F(x) = (x - a)^2 \cdot (x - b)^2 + x$ toma el valor $(a + b)/2$ para algún valor de x.

55. Resolución de una ecuación Si $f(x) = x^3 - 8x + 10$, demuestre que existen valores c para los que $f(c)$ es igual a **(a)** π; **(b)** $-\sqrt{3}$; **(c)** 5,000,000.

56. Explique por qué los siguientes cinco enunciados piden la misma información.

a. Determine las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

b. Determine la abscisa de los puntos donde la curva $y = x^3$ cruza a la recta $y = 3x + 1$.

c. Determine todos los valores de x para los que $x^3 - 3x = 1$.

d. Determine las abscisas de los puntos donde la curva cúbica $y = x^3 - 3x$ cruza a la recta $y = 1$.

e. Resuelva la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$.

57. Discontinuidad removible Dé un ejemplo de una función $f(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad removible. Explique cómo sabe que f es discontinua en $x = 2$ y cómo sabe que la discontinuidad es removible.

58. Discontinuidad no removible Dé un ejemplo de una función $g(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad no removible. Explique cómo sabe que g es discontinua allí y por qué la discontinuidad es no removible.

59. Una función discontinua en todo punto

a. Con base en el hecho de que todo intervalo no vacío de números reales contiene tanto números racionales como irracionales, demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todo punto.

b. ¿En algún punto f es continua por la derecha o continua por la izquierda?

60. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $0 \leq x \leq 1$, ¿podría ser $f(x)/g(x)$ discontinua en algún punto de $[0, 1]$? Justifique su respuesta.

61. Si la función producto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿las funciones $f(x)$ y $g(x)$ deben ser continuas en $x = 0$? Justifique su respuesta.

62. Composición discontinua de funciones continuas Dé un ejemplo de funciones f y g, ambas continuas en $x = 0$, para las cuales la composición $f \circ g$ sea discontinua en $x = 0$. ¿Esto contradice el teorema 9? Justifique su respuesta.

63. Funciones continuas que nunca son cero ¿Es cierto que una función continua que nunca es cero en un intervalo nunca cambia de signo en ese intervalo? Justifique su respuesta.

64. Estiramiento de una liga de hule ¿Es cierto que si estira una liga, moviendo un extremo hacia la derecha y otro hacia la izquierda, algún punto de la liga quedará en su posición original? Justifique su respuesta.

65. Un teorema de punto fijo Suponga que una función f es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$, y que $0 \le f(x) \le 1$ para toda x en $[0, 1]$. Demuestre que debe existir un número c en $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$ (a c se le denomina punto fijo de f).

66. La propiedad de conservar el signo de las funciones continuas Sea f definida en un intervalo (a, b) y suponga que $f(c) \neq 0$ en algún c, donde f es continua. Demuestre que existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ alrededor de c donde f tiene el mismo signo que $f(c)$.

67. Pruebe que f es continua si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c).$$

68. Utilice el ejercicio 67 junto con las identidades

$$\operatorname{sen}(h + c) = \operatorname{sen} h \cos c + \cos h \operatorname{sen} c,$$

$$\cos(h + c) = \cos h \cos c - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} c$$

para probar que $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en todo punto c.

Resolución gráfica de ecuaciones

T En los ejercicios 69 a 76 utilice el teorema del valor intermedio para probar que cada ecuación tiene una solución. Luego utilice una computadora o una calculadora graficadora para resolver las ecuaciones.

69. $x^3 - 3x - 1 = 0$

70. $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

71. $x(x - 1)^2 = 1$ (una raíz)

72. $x^x = 2$

73. $\sqrt{x} + \sqrt{1 + x} = 4$

74. $x^3 - 15x + 1 = 0$ (tres raíces)

75. $\cos x = x$ (una raíz). Asegúrese de utilizar el modo radianes.

76. $2 \operatorname{sen} x = x$ (tres raíces). Asegúrese de utilizar el modo radianes.

2.6 Límites que incluyen al infinito; asíntotas de gráficas

En esta sección estudiamos el comportamiento de una función cuando la magnitud de la variable independiente x se hace cada vez más grande, o $x - \pm\infty$. Además, ampliamos el concepto de límite al de *límites infinitos*, que no son límites como los que hemos estudiado hasta ahora, sino que implican un nuevo uso del término de límite. Los límites infinitos ofrecen símbolos y lenguaje útiles para describir el comportamiento de funciones cuyos valores se hacen arbitrariamente grandes en magnitud. Utilizamos tales ideas de límites para analizar las gráficas de funciones que tienen *asíntotas horizontales* o *asíntotas verticales*.

Límites finitos cuando $x \to \pm\infty$

El símbolo de infinito (∞) no representa un número real. Utilizamos ∞ para describir el comportamiento de una función cuando los valores de su dominio o rango rebasan cualquier cota finita. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida para toda $x \neq 0$ (figura 2.49). Cuando x es positiva y se vuelve arbitrariamente grande, $1/x$ se vuelve muy pequeño. Cuando x es negativa y su magnitud cada vez es más grande, $1/x$ de nuevo se vuelve muy pequeño (en magnitud). Resumimos tales observaciones diciendo que $f(x) = 1/x$ tiene límite 0 cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, o que 0 es un *límite de* $f(x) = 1/x$ *en infinito o en menos infinito*. A continuación damos definiciones más precisas.

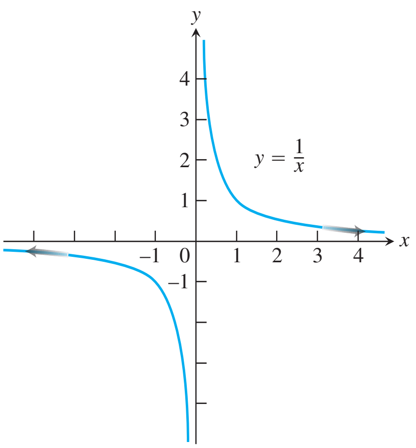


FIGURA 2.49 La gráfica de $y = 1/x$ tiende a cero cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

DEFINICIONES

1. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende a infinito** y escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si, para todo número $\epsilon > 0$, existe un número M correspondiente tal que para toda x

$$x > M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

2. Decimos que $f(x)$ tiene el **límite L cuando x tiende a menos infinito** y escribimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si, para todo número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente N tal que para toda x

$$x < N \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivamente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si, cuando x se aleja del origen en la dirección positiva, $f(x)$ se hace muy cercana a L. De forma análoga, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ si, cuando x se aleja del origen en la dirección negativa, $f(x)$ se hace cada vez más cercana a L.

La estrategia para calcular límites de funciones cuando $x \to \pm\infty$ es semejante a la de los límites finitos de la sección 2.2. Allí, primero encontramos los límites de las funciones constante e identidad, $y = k$ y $y = x$. Luego ampliamos dichos resultados para otras funciones al aplicar el teorema 1 de límites de combinaciones algebraicas. Aquí hacemos lo mismo, salvo que las funciones iniciales son $y = k$ y $y = 1/x$, en vez de $y = k$ y $y = x$.

Los hechos básicos que se verifican mediante la aplicación de la definición formal son

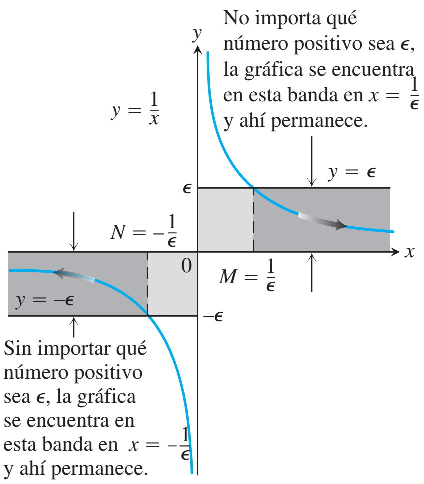


FIGURA 2.50 La geometría dentro del argumento del ejemplo 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} k = k \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0. \tag{1}$$

Probamos el segundo resultado, pero dejamos el primero para los ejercicios 87 y 88.

EJEMPLO 1 Demuestre que

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$. Debemos determinar un número M tal que para toda x

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

La implicación se cumplirá si $M = 1/\epsilon$ o cualquier número positivo mayor (figura 2.50). Lo anterior demuestra que $\lim_{x\to\infty}(1/x) = 0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$. Debemos determinar un número N tal que para toda x

$$x < N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon.$$

La implicación se cumplirá si $N = -1/\epsilon$ o cualquier número menor que $-1/\epsilon$ (figura 2.50). Esto prueba que $\lim_{x\to-\infty}(1/x) = 0$. ■

Los límites en infinito tienen propiedades similares a las de los límites finitos.

TEOREMA 12 Todas las leyes de límites en el teorema 1 se cumplen cuando remplazamos $\lim_{x\to c}$ por $\lim_{x\to\infty}$ o bien, $\lim_{x\to-\infty}$. Esto es, la variable x puede tender a un número finito c o a $\pm\infty$.

EJEMPLO 2 Las propiedades en el teorema 12 se utilizan para calcular límites de la misma forma que cuando x se aproxima a un número finito c.

(a)
$$\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \qquad \text{Regla de la suma}$$
$$= 5 + 0 = 5 \qquad \text{Límites conocidos}$$

(b)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 \qquad \text{Límites conocidos}$$
■

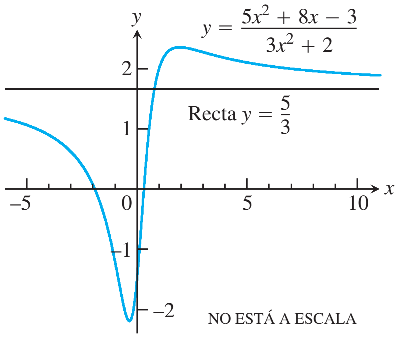


FIGURA 2.51 La gráfica de la función en el ejemplo 3a. La gráfica tiende a la recta $y = 5/3$ cuando $|x|$ crece.

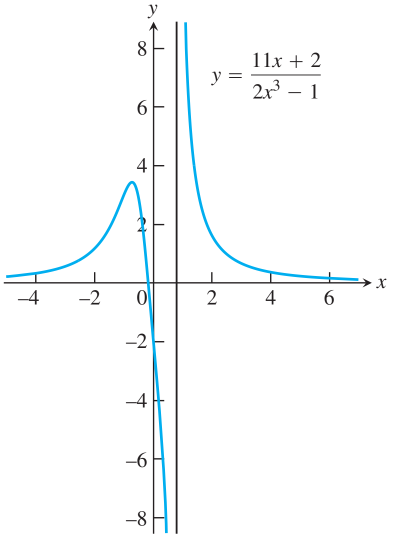


FIGURA 2.52 La gráfica de la función en el ejemplo 3b. La gráfica tiende al eje x cuando $|x|$ aumenta.

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de funciones racionales cuando $x \to \pm\infty$, primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia más alta de x en el denominador. De esta forma, el resultado depende de los grados de los polinomios que aparecen.

EJEMPLO 3 Estos ejemplos ilustran lo que sucede cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador.

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$ Dividir el numerador y el denominador entre x^2.

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$ Véase la figura 2.51.

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{11x + 2}{2x^3 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(11/x^2) + (2/x^3)}{2 - (1/x^3)}$$ Dividir el numerador y el denominador entre x^3.

$$= \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0$$ Véase la figura 2.52. ■

Un caso para el cual el grado del numerador es mayor que el grado del denominador se ilustra en el ejemplo 8.

Asíntotas horizontales

Si la distancia entre la gráfica de una función y alguna recta fija tiende a cero, cuando un punto en la gráfica se mueve cada vez más lejos del origen, decimos que la gráfica se aproxima asintóticamente a la recta y que la recta es una *asíntota* de la gráfica.

Al examinar la gráfica de $f(x) = 1/x$ (figura 2.49), observamos que el eje x es una asíntota de la curva por la derecha, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

y también por la izquierda, porque

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Decimos que el eje x es una *asíntota horizontal* de la gráfica de $f(x) = 1/x$.

DEFINICIÓN Una recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$$

que se bosquejó en el figura 2.51 (ejemplo 3a) tiene la recta $y = 5/3$ como una asíntota horizontal, tanto por la derecha como por la izquierda, puesto que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{5}{3}.$$

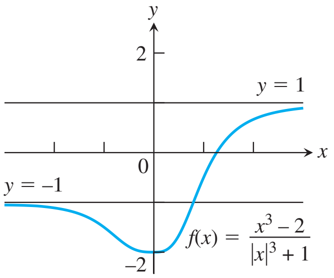


FIGURA 2.53 La gráfica de la función del ejemplo 4 tiene dos asíntotas horizontales.

EJEMPLO 4 Determine las asíntotas horizontales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}.$$

Solución Calculamos los límites cuando $x \to \pm\infty$.

$$\text{Para } x \geq 0: \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2}{x^3 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - (2/x^3)}{1 + (1/x^3)} = 1.$$

$$\text{Para } x < 0: \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 2}{(-x)^3 + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - (2/x^3)}{-1 + (1/x^3)} = -1.$$

Las asíntotas horizontales son $y = -1$ y $y = 1$. La gráfica se muestra en la figura 2.53. Observe que la gráfica cruza la asíntota horizontal $y = -1$ para un valor positivo de x. ■

EJEMPLO 5 Determine **(a)** $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(1/x)$ y **(b)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$.

Solución

(a) Introducimos la nueva variable $t = 1/x$. A partir del ejemplo 1, sabemos que $t \to 0^+$ cuando $x \to \infty$ (figura 2.49). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \operatorname{sen} t = 0.$$

Asimismo, podemos investigar el comportamiento de $y = f(1/x)$ cuando $x \to 0$ si analizamos el valor de $y = f(t)$ cuando $t \to \pm\infty$, donde $t = 1/x$.

(b) Calculamos los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

La gráfica se presenta en la figura 2.54. Vemos también que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal. ■

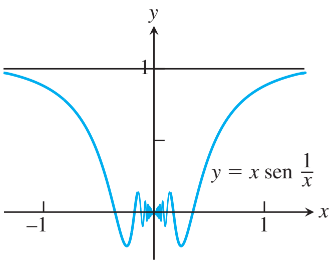


FIGURA 2.54 La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función que se grafica aquí (ejemplo 5b).

El teorema del sándwich también se cumple cuando $x \to \pm\infty$. Aunque usted debe asegurarse que la función, cuyo límite trata de determinar, permanezca entre las funciones que la acotan para valores de x muy grandes en magnitud, es decir, cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

EJEMPLO 6 Mediante el uso del teorema del sándwich, determine la asíntota horizontal de la curva

$$y = 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Solución Nos interesa el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. Como

$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

y $\lim_{x\to\pm\infty} |1/x| = 0$, por el teorema del sándwich, tenemos $\lim_{x\to\pm\infty} (\operatorname{sen} x)/x = 0$. De aquí que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2 + 0 = 2,$$

y la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva, tanto por la izquierda como por la derecha (figura 2.55).

Este ejemplo ilustra que una curva puede cruzar una de sus asíntotas horizontales muchas veces. ■

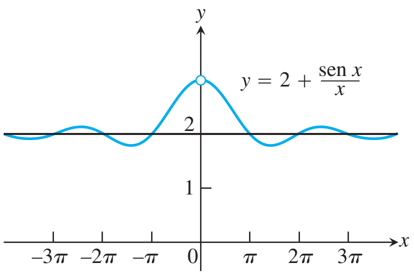


FIGURA 2.55 Una curva puede cruzar una de sus asíntotas un número infinito de veces (ejemplo 6).

EJEMPLO 7 Determine $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+16}\right)$.

Solución Ambos términos, x y $\sqrt{x^2+16}$ tienden al infinito cuando $x \to \infty$, por lo que no es claro lo que le sucede a la diferencia (no es posible restar ∞ de ∞, puesto que el símbolo no representa un número real). En esta situación podemos multiplicar el numerador y el denominador por la expresión radical conjugada para obtener una expresión algebraica equivalente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+16}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+16}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{x+\sqrt{x^2+16}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+16)}{x+\sqrt{x^2+16}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}.$$

Cuando $x \to \infty$, el denominador en la última expresión se hace arbitrariamente grande, con lo que vemos que el límite es 0. También podemos obtener este resultado mediante un cálculo directo usando las leyes de los límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{16}{x}}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{16}{x^2}}} = \frac{0}{1+\sqrt{1+0}} = 0.$$

■

Asíntotas oblicuas

Si el grado del numerador de una función racional difiere del grado del denominador en 1, la gráfica tiene una **asíntota oblicua** o **inclinada**. Al dividir el numerador entre el denominador determinamos una ecuación para expresar f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$.

EJEMPLO 8 Determine la asíntota oblicua de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

de la figura 2.56.

Solución Estamos interesados en el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$. Dividimos (x^2-3) entre $(2x-4)$:

$$\begin{array}{r} \frac{x}{2} + 1 \\ 2x - 4\,\overline{)\,x^2 - 3} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ 2x - 3 \\ \underline{2x - 4} \\ 1 \end{array}$$

Esto nos dice que

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4} = \underbrace{\left(\frac{x}{2}+1\right)}_{\text{lineal } g(x)} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x-4}\right)}_{\text{residuo}}.$$

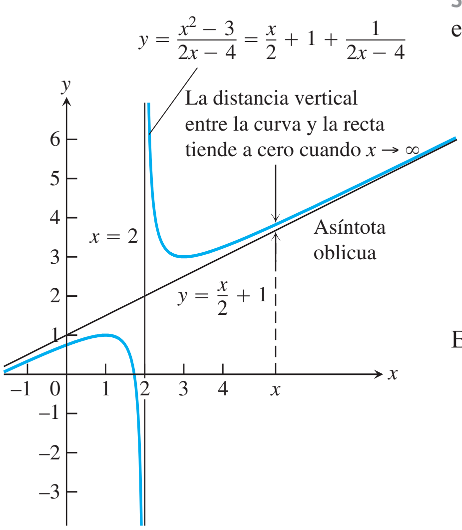


FIGURA 2.56 La gráfica de la función en el ejemplo 8 tiene una asíntota oblicua.

Cuando $x \to \pm\infty$, el residuo, cuya magnitud da la distancia vertical entre las gráficas de f y g, tiende a cero, hace de la recta inclinada

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

una asíntota de la gráfica de f (figura 2.56). La recta $y = g(x)$ es una asíntota tanto por la derecha como por la izquierda. El siguiente apartado confirmará que la función $f(x)$ se hace arbitrariamente grande en valor absoluto cuando $x \to 2$ (donde el denominador se hace cero) como se muestra en la gráfica. ■

En el ejemplo 8, observe que si el grado del numerador en una función racional es mayor que el grado del denominador, entonces el límite cuando $|x|$ se hace grande es $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del signo que toman el numerador y el denominador.

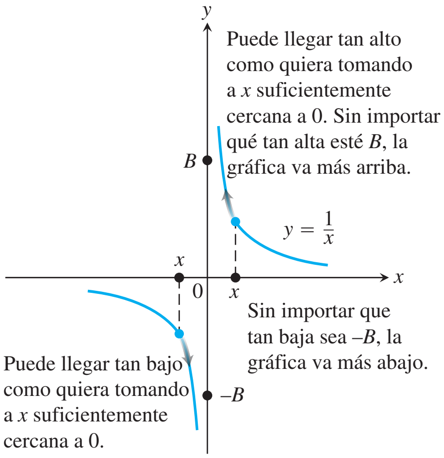


FIGURA 2.57 Límites laterales infinitos: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Límites infinitos

Veamos de nuevo la función $f(x) = 1/x$. Cuando $x \to 0^+$, los valores de f crecen sin cota y en algún momento sobrepasan a cualquier número real positivo dado. Esto es, dado cualquier número real positivo B, no importa lo grande que sea, los valores de f se hacen aún mayores que éste (figura 2.57). Así, f no tiene límite cuando $x \to 0^+$. Sin embargo, es conveniente describir el comportamiento de f diciendo que $f(x)$ tiende a ∞ cuando $x \to 0^+$. Escribimos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Al dar esta ecuación, *no* estamos diciendo que el límite existe. Ni afirmamos que existe un número real ∞, porque no hay tal número. Mejor dicho, aseguramos que $\lim_{x\to 0^+} (1/x)$ *no existe, porque $1/x$ se hace arbitrariamente grande y positivo cuando $x \to 0^+$.*

Cuando $x \to 0^-$, los valores de $f(x) = 1/x$ se vuelven negativos y de magnitud arbitrariamente grande. Dado cualquier número real negativo $-B$, los valores de f tarde o temprano estarán abajo de $-B$. (Véase la figura 2.57). Escribimos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Nuevamente, no decimos que el límite exista y sea igual al número $-\infty$. No hay número real $-\infty$. Describimos el comportamiento de una función cuyo límite cuando $x : 0^-$ *no existe porque sus valores se hacen negativos y arbitrariamente grandes en magnitud*.

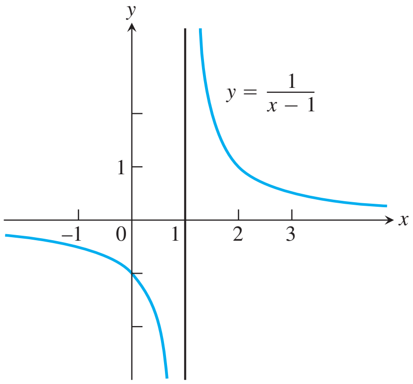


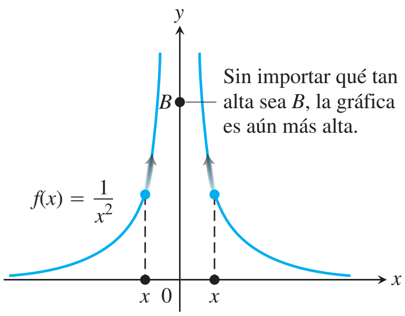
FIGURA 2.58 Cerca de $x = 1$, la función $y = 1/(x - 1)$ se comporta igual que la función $y = 1/x$ cerca de $x = 0$. Su gráfica es la gráfica de $y = 1/x$ desplazada 1 unidad hacia la derecha (ejemplo 9).

EJEMPLO 9 Determine $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x - 1}$ y $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x - 1}$.

Solución geométrica La gráfica de $y = 1/(x - 1)$ es la gráfica de $y = 1/x$ recorrida 1 unidad hacia la derecha (figura 2.58). Por lo tanto, $y = 1/(x - 1)$ se comporta cerca de 1 exactamente como se comporta $y = 1/x$ cerca de 0:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x - 1} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty.$$

Solución analítica Considere el número $x - 1$ y su recíproco. Cuando $x \to 1^+$, tenemos que $(x - 1) \to 0^+$ y $1/(x - 1) \to \infty$. Cuando $x \to 1^-$, tenemos que $(x - 1) \to 0^-$ y $1/(x - 1) \to -\infty$. ■



(a)

FIGURA 2.59 La gráfica de $f(x)$ en el ejemplo 10 tiende a infinito cuando $x \to 0$.

EJEMPLO 10 Analice el comportamiento de

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0.$$

Solución Cuando x se aproxima a cero por cualquier lado, los valores de $1/x^2$ son positivos y se hacen arbitrariamente grandes (figura 2.59). Esto significa que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$ ■

La función $y = 1/x$ no muestra un comportamiento consistente cuando $x \to 0$. Tenemos que $1/x \to \infty$ si $x \to 0^+$, pero $1/x \to -\infty$ si $x \to 0^-$. Todo lo que podemos decir acerca de $\lim_{x\to 0}(1/x)$ es que no existe. La función $y = 1/x^2$ es diferente. Sus valores tienden a infinito cuando x, por cualquier lado, se aproxima a cero, entonces afirmamos que $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = \infty$.

EJEMPLO 11 Los siguientes ejemplos ilustran que las funciones racionales pueden tener diferentes comportamientos cerca de los ceros del denominador.

(a) $$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

(c) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$$

Los valores son negativos para $x > 2$, con x cerca de 2.

(d) $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty$$

Los valores son positivos para $x < 2$, con x cerca de 2.

(e) $$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ no existe.}$$

Véase los incisos (c) y (d).

(f) $$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

En los incisos (a) y (b) el efecto del cero en el denominador en $x = 2$ se cancela porque el numerador también es cero allí. Así que existe un límite finito. Esto no se cumple en el inciso (f), donde la cancelación aún deja un factor cero en el denominador. ■

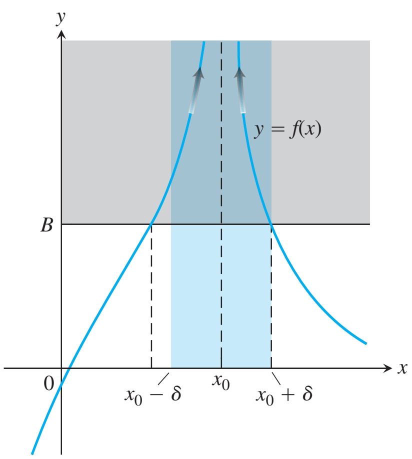


FIGURA 2.60 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, la gráfica de $f(x)$ está por arriba de la recta $y = B$.

Definición formal de límites infinitos

En vez de pedir que $f(x)$ esté arbitrariamente cerca de un número finito L, para toda x suficientemente cercana a x_0, las definiciones de límites infinitos piden que $f(x)$ esté arbitrariamente lejos del cero. Excepto por este cambio, el lenguaje es muy similar al que ya vimos. Las figuras 2.60 y 2.61 ilustran tales definiciones.

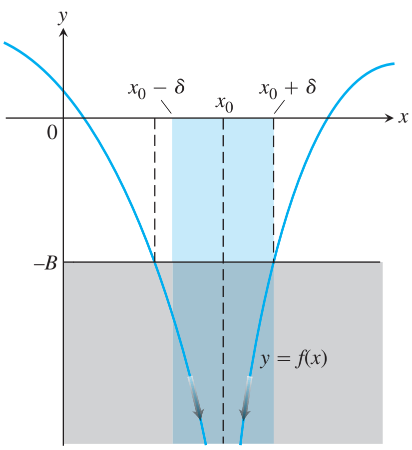


FIGURA 2.61 Para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, la gráfica de $f(x)$ está por abajo de la recta $y = -B$.

DEFINICIONES

1. Decimos que **$f(x)$ tiende a infinito cuando x se aproxima a x_0**, y escribimos
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$
si para todo número real positivo B existe un correspondiente $\delta > 0$, tal que para toda x
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad f(x) > B.$$

2. Decimos que **$f(x)$ tiende a menos infinito cuando x se aproxima a x_0**, y escribimos
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$
si para todo número real negativo $-B$ existe un correspondiente $\delta > 0$, tal que para toda x
$$0 < |x - x_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad f(x) < -B.$$

Las definiciones precisas de límites laterales infinitos en x_0 son análogas y se establecen en los ejercicios.

EJEMPLO 12 Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

Solución Dada $B>0$, queremos encontrar $\delta>0$ tal que si

$$0<|x-0|<\delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^2}>B.$$

Ahora,

$$\frac{1}{x^2}>B \qquad \text{si y sólo si } x^2<\frac{1}{B}$$

o, de manera equivalente,

$$|x|<\frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Así, al seleccionar $\delta=1/\sqrt{B}$ (o cualquier número positivo menor que éste), vemos que

$$|x|<\delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}\geq B.$$

Por lo tanto, por definición,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

Asíntotas verticales

Observe que la distancia entre un punto de la gráfica de $f(x)=1/x$ y el eje y tiende a cero cuando el punto se mueve verticalmente y se aleja del origen y a lo largo de la gráfica (figura 2.62). La función $f(x)=1/x$ no está acotada cuando x se aproxima a 0, ya que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Decimos que la recta $x=0$ (el eje y) es una *asíntota vertical* de la gráfica de $f(x)=1/x$. Observe que el denominador es cero en $x=0$ y que allí la función no está definida.

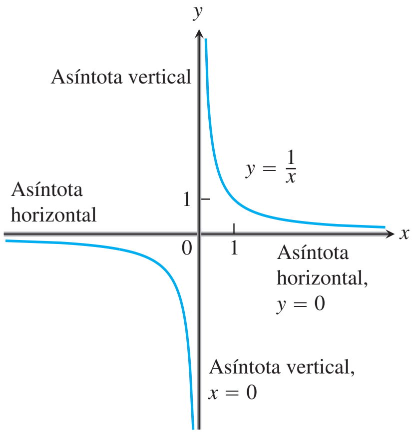


FIGURA 2.62 Los ejes de coordenadas son asíntotas de ambas ramas de la hipérbola $y=1/x$.

DEFINICIÓN Una recta $x=a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función $y=f(x)$ si

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty.$$

EJEMPLO 13 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la curva

$$y=\frac{x+3}{x+2}.$$

Solución Nos interesa el comportamiento cuando $x\to\pm\infty$ y el comportamiento cuando $x\to -2$, donde el denominador es cero.

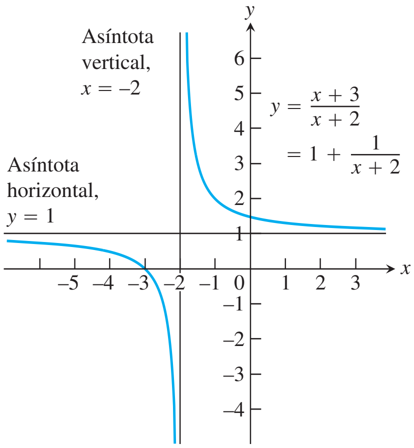


FIGURA 2.63 Las rectas $y = 1$ y $x = -2$ son las asíntotas de la curva en el ejemplo 13.

Las asíntotas se descubren rápidamente si escribimos la función racional como un polinomio con un residuo, al dividir $(x + 3)$ entre $(x + 2)$:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x + 2\overline{)\,x + 3} \\ \underline{x + 2} \\ 1 \end{array}$$

Este resultado nos permite rescribir y como:

$$y = 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, la curva se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$; cuando $x \to -2$, la curva tiende a la asíntota vertical $x = -2$. Vemos que la curva en cuestión es la gráfica de $f(x) = 1/x$ recorrida 1 unidad hacia arriba y 2 unidades hacia la izquierda (figura 2.63). Las asíntotas, en vez de ser los ejes de coordenadas, ahora son las rectas $y = 1$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 14 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de

$$f(x) = -\frac{8}{x^2 - 4}.$$

Solución Nos interesa el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$ y cuando $x \to \pm 2$, donde el denominador es cero. Observe que f es una función par de x, así que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

(a) *Comportamiento cuando* $x \to \pm\infty$. Ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, la recta $y = 0$ la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, por la derecha, de la gráfica. Por simetría, también es una asíntota por la izquierda (figura 2.64). Observe que la curva tiende al eje x sólo por la parte negativa (o por abajo). Además, $f(0) = 2$.

(b) *Comportamiento cuando* $x \to \pm 2$. Como

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,$$

la recta $x = 2$ es una asíntota vertical tanto por la derecha como por la izquierda. Por simetría, la recta $x = -2$ también es una asíntota vertical.

No hay otras asíntotas, ya que f tiene un límite finito en todos los demás puntos. ■

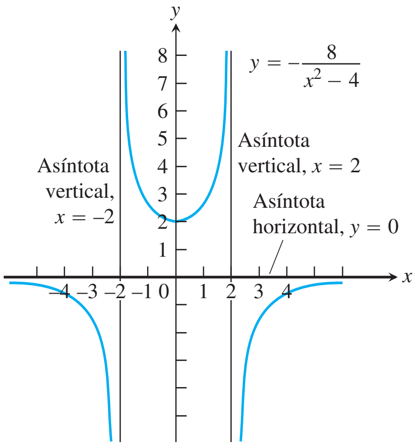


FIGURA 2.64 Gráfica de la función en el ejemplo 14. Observe que la curva tiende al eje x sólo por un lado. Las asíntotas no tienen que ser por ambos lados.

EJEMPLO 15 Las curvas

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{y} \qquad y = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

tienen asíntotas verticales en múltiplos impares de $\pi/2$, donde $\cos x = 0$ (figura 2.65).

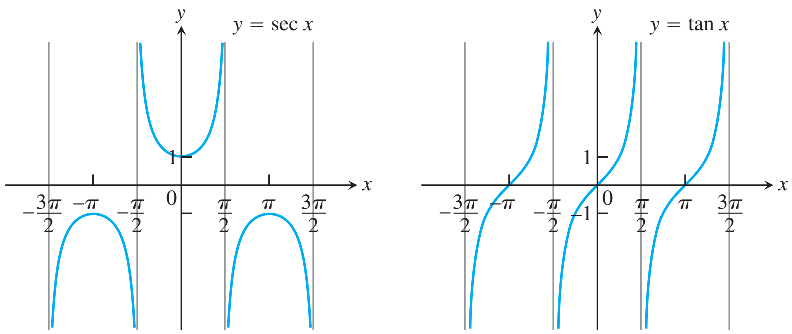


FIGURA 2.65 Las gráficas de sec x y tan x tienen un número infinito de asíntotas verticales (ejemplo 15). ■

Términos dominantes

En el ejemplo 8 vimos que mediante el proceso de división podríamos rescribir la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

como una función lineal más un residuo:

$$f(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2x - 4}\right).$$

De inmediato, esto nos dice que

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad \text{Para } x \text{ numéricamente grande, } \frac{1}{2x-4} \text{ se acerca a } 0.$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2x - 4} \qquad \text{Para } x \text{ cerca de 2; este término es muy grande.}$$

Si queremos conocer el comportamiento de f, ésta es la forma de hacerlo. Se comporta como $y = (x/2) + 1$ cuando x es numéricamente grande y la contribución de $1/(2x - 4)$ al valor total de f es insignificante. Se comporta como $1/(2x - 4)$ cuando x se acerca tanto a 2 que $1/(2x - 4)$ hace la contribución dominante.

Decimos que $(x/2) + 1$ **domina** cuando x es numéricamente grande, y que $1/(2x - 4)$ domina cuando x se acerca a 2. Los **términos dominantes** como éstos nos ayudan a predecir el comportamiento de una función.

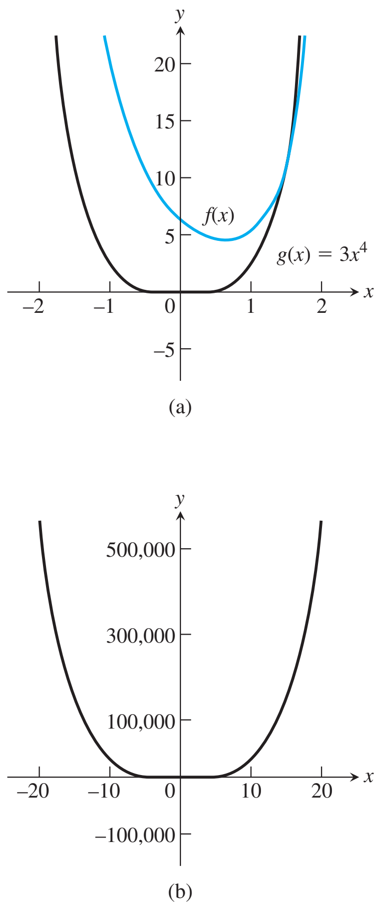


FIGURA 2.66 Las gráficas de f y g son (a) distintas para $|x|$ pequeño, y (b) casi idénticas para $|x|$ grande (ejemplo 16).

EJEMPLO 16 Sean $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ y $g(x) = 3x^4$. Demuestre que aunque f y g son muy diferentes para valores de x pequeños, son prácticamente iguales para $|x|$ muy grande, en el sentido de que sus cocientes se aproximan a 1 cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Solución Las gráficas de f y g se comportan de forma muy diferente cerca del origen (figura 2.66a), pero parecen casi idénticas a una escala muy grande (figura 2.66b).

Podemos probar que el término $3x^4$ en f, representado gráficamente por g, domina al polinomio f para valores grandes de x si examinamos la razón de las dos funciones cuando $x \to \pm\infty$. Encontramos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

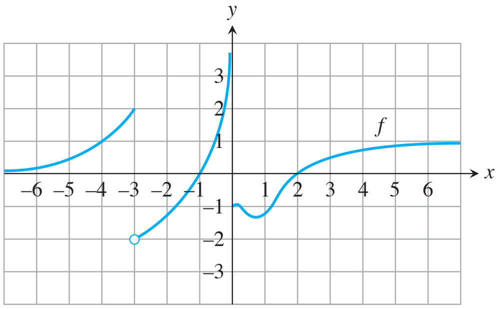
lo cual significa que f y g son casi idénticas para $|x|$ grande. ■

Ejercicios 2.6

Determinación de límites

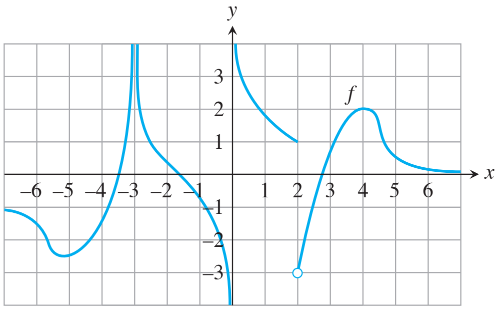
1. Para la función f, cuya gráfica se muestra a continuación, determine los siguientes límites.

   a. $\lim_{x\to 2} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$
   d. $\lim_{x\to -3} f(x)$ **e.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **f.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
   g. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **h.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$ **i.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



2. Para la función f, cuya gráfica se muestra, determine los siguientes límites.

   a. $\lim_{x\to 4} f(x)$ **b.** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **c.** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
   d. $\lim_{x\to 2} f(x)$ **e.** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ **f.** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$
   g. $\lim_{x\to -3} f(x)$ **h.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **i.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
   j. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **k.** $\lim_{x\to \infty} f(x)$ **l.** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



En los ejercicios 3 a 8, determine los límites de cada una de las funciones **(a)** cuando $x \to \infty$ y **(b)** cuando $x \to -\infty$. (Podría ser útil visualizar su respuesta con ayuda de una calculadora graficadora o una computadora).

3. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$

4. $f(x) = \pi - \dfrac{2}{x^2}$

5. $g(x) = \dfrac{1}{2 + (1/x)}$

6. $g(x) = \dfrac{1}{8 - (5/x^2)}$

7. $h(x) = \dfrac{-5 + (7/x)}{3 - (1/x^2)}$

8. $h(x) = \dfrac{3 - (2/x)}{4 + (\sqrt{2}/x^2)}$

Determine los límites en los ejercicios 9 a 12.

9. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

10. $\lim_{\theta\to-\infty} \dfrac{\cos\theta}{3\theta}$

11. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{2 - t + \operatorname{sen} t}{t + \cos t}$

12. $\lim_{r\to\infty} \dfrac{r + \operatorname{sen} r}{2r + 7 - 5 \operatorname{sen} r}$

Límites de funciones racionales

En los ejercicios 13 a 22, determine el límite de cada función racional **(a)** cuando $x \to \infty$ y **(b)** cuando $x \to -\infty$.

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

21. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

22. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Límites cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$

El proceso mediante el cual determinamos límites de funciones racionales se aplica de la misma forma a cocientes de potencias no enteras o negativas de x; divida el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador y proceda a partir de ahí. Determine los límites en los ejercicios 23 a 36.

23. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}\right)^{1/3}$

25. $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1 - x^3}{x^2 + 7x}\right)^5$

26. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$

27. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

28. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

29. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

33. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

34. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$

36. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

Límites infinitos

Determine los límites en los ejercicios 37 a 48.

37. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3x}$

38. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{5}{2x}$

39. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x - 2}$

40. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x - 3}$

41. $\lim_{x\to -8^+} \dfrac{2x}{x + 8}$

42. $\lim_{x\to -5^-} \dfrac{3x}{2x + 10}$

43. $\lim_{x\to 7} \dfrac{4}{(x - 7)^2}$

44. $\lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2(x + 1)}$

45. **a.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2}{3x^{1/3}}$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2}{3x^{1/3}}$

46. **a.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x^{1/5}}$ **b.** $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x^{1/5}}$

47. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4}{x^{2/5}}$ **48.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2/3}}$

Determine los límites en los ejercicios 49 a 52.

49. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$ **50.** $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

51. $\lim_{\theta\to 0^-} (1 + \csc\theta)$ **52.** $\lim_{\theta\to 0} (2 - \cot\theta)$

Determine los límites en los ejercicios 53 a 58.

53. $\lim \dfrac{1}{x^2 - 4}$ cuando

a. $x \to 2^+$ **b.** $x \to 2^-$

c. $x \to -2^+$ **d.** $x \to -2^-$

54. $\lim \dfrac{x}{x^2 - 1}$ cuando

a. $x \to 1^+$ **b.** $x \to 1^-$

c. $x \to -1^+$ **d.** $x \to -1^-$

55. $\lim \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$ cuando

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$

c. $x \to \sqrt[3]{2}$ **d.** $x \to -1$

56. $\lim \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$ cuando

a. $x \to -2^+$ **b.** $x \to -2^-$

c. $x \to 1^+$ **d.** $x \to 0^-$

57. $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ cuando

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 2^+$

c. $x \to 2^-$ **d.** $x \to 2$

e. ¿Qué puede decir acerca del límite cuando $x \to 0$?

58. $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$ cuando

a. $x \to 2^+$ **b.** $x \to -2^+$

c. $x \to 0^-$ **d.** $x \to 1^+$

e. ¿Qué puede decir acerca del límite cuando $x \to 0$?

Determine los límites en los ejercicios 59 a 62.

59. $\lim \left(2 - \dfrac{3}{t^{1/3}}\right)$ cuando

a. $t \to 0^+$ **b.** $t \to 0^-$

60. $\lim \left(\dfrac{1}{t^{3/5}} + 7\right)$ cuando

a. $t \to 0^+$ **b.** $t \to 0^-$

61. $\lim \left(\dfrac{1}{x^{2/3}} + \dfrac{2}{(x - 1)^{2/3}}\right)$ cuando

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$

c. $x \to 1^+$ **d.** $x \to 1^-$

62. $\lim \left(\dfrac{1}{x^{1/3}} - \dfrac{1}{(x - 1)^{4/3}}\right)$ cuando

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$

c. $x \to 1^+$ **d.** $x \to 1^-$

Graficación de funciones racionales sencillas

En los ejercicios 63 a 68, grafique las funciones racionales. Incluya las gráficas y ecuaciones de las asíntotas y los términos dominantes.

63. $y = \dfrac{1}{x - 1}$ **64.** $y = \dfrac{1}{x + 1}$

65. $y = \dfrac{1}{2x + 4}$ **66.** $y = \dfrac{-3}{x - 3}$

67. $y = \dfrac{x + 3}{x + 2}$ **68.** $y = \dfrac{2x}{x + 1}$

Creación de gráficas y funciones

En los ejercicios 69 a 72 elabore un bosquejo de la gráfica de una función $y = f(x)$ que satisfaga las condiciones indicadas. No se piden fórmulas, sólo rotule los ejes de coordenadas y realice un bosquejo adecuado de la gráfica. (Las respuestas no son únicas, así que sus gráficas podrían no ser exactamente las que aparecen en la sección de respuestas).

69. $f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(-1) = -2,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

70. $f(0) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$

71. $f(0) = 0,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$

72. $f(2) = 1,\ f(-1) = 0,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

En los ejercicios 73 a 76, determine una función que satisfaga las condiciones indicadas y elabore un bosquejo de su gráfica. (Aquí, las respuestas no son únicas. Cualquier función que cumpla con las condiciones es aceptable. Tenga la libertad de utilizar fórmulas definidas por partes, si esto le ayuda).

73. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

74. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0,\ \lim_{x\to 3^-} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

75. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1,\ \lim_{x\to\infty} h(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$

76. $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 1,\ \lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 1^+} k(x) = -\infty$

77. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en x y que $\lim_{x\to\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. ¿Qué puede concluir sobre $\lim_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$? Fundamente su respuesta.

78. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en x. Si $g(x)$ nunca es cero, ¿puede tener una asíntota la gráfica de $f(x)/g(x)$? Fundamente su respuesta.

79. La gráfica de una función racional, ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener? Justifique su respuesta.

Determinación de límites de diferencias cuando $x \to \pm\infty$

Determine los límites en los ejercicios 80 a 86.

80. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + 9} - \sqrt{x + 4}\right)$

81. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 25} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

82. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} + x\right)$

83. $\lim_{x\to-\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 + 3x - 2}\right)$

84. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 - x} - 3x\right)$

85. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

86. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

Aplicación de las definiciones formales

Utilice las definiciones formales de los límites cuando $x\to\pm\infty$ para establecer los límites de los ejercicios 87 y 88.

87. Si f tiene el valor constante $f(x)=k$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$.

88. Si f tiene el valor constante $f(x)=k$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k$.

Utilice las definiciones formales para probar las proposiciones acerca de límites en los ejercicios 89 a 92.

89. $\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}=-\infty$

90. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

91. $\lim_{x\to 3}\dfrac{-2}{(x-3)^2}=-\infty$

92. $\lim_{x\to -5}\dfrac{1}{(x+5)^2}=\infty$

93. A continuación aparece la definición de **límite lateral (por la derecha) infinito**.

> Decimos que $f(x)$ tiende a infinito cuando x se aproxima a x_0 por la derecha, y escribimos
>
> $$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty,$$
>
> si, para todo número real positivo B, existe un $\delta>0$ correspondiente tal que para toda x
>
> $$x_0<x<x_0+\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)>B.$$

Modifique la definición de manera que sea válida para los siguientes casos.

a. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

b. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

c. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

Utilice las definiciones formales del ejercicio 93 para probar los límites que aparecen en los ejercicios 94 a 98.

94. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$

95. $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

96. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$

97. $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\infty$

98. $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=\infty$

Asíntotas oblicuas

Grafique las funciones racionales en los ejercicios 99 a 104. Incluya las gráficas y ecuaciones de las asíntotas.

99. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

100. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

101. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

102. $y=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

103. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$

104. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

Ejercicios adicionales de graficación

T En los ejercicios 105 a 108, grafique las curvas. Explique las relaciones entre la fórmula de la curva y lo que usted ve.

105. $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

106. $y=\dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

107. $y=x^{2/3}+\dfrac{1}{x^{1/3}}$

108. $y=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2+1}\right)$

T En los ejercicios 109 y 110, grafique las funciones. Luego responda las siguientes preguntas.

a. ¿Cómo se comporta la gráfica cuando $x\to 0^+$?

b. ¿Cómo se comporta la gráfica cuando $x\to\pm\infty$?

c. ¿Cómo se comporta la gráfica cerca de $x=1$ y de $x=-1$?

Justifique sus respuestas.

109. $y=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2/3}$

110. $y=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2/3}$

Capítulo 2 Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de la función $g(t)$ sobre el intervalo de $t=a$ a $t=b$? ¿Cómo está relacionada con la recta secante?

2. ¿Qué límite debe calcularse para determinar la tasa de cambio de una función $g(t)$ en $t=t_0$?

3. Dé una definición informal del límite

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L.$$

¿Por qué esta definición es "informal"? Dé ejemplos.

4. ¿La existencia y el valor del límite de una función $f(x)$, cuando x tiende a x_0, depende siempre de lo que pase en $x=x_0$? Explique y dé ejemplos.

5. Para que el límite no exista, ¿qué comportamientos puede tener una función?

6. ¿Qué teoremas se tienen para el cálculo de los límites? Dé ejemplos de cómo se utilizan los teoremas.

7. ¿Cómo se relacionan los límites laterales con los límites? ¿Cómo puede utilizarse esta relación, en algunos casos, para calcular un límite o probar que el límite no existe? Dé ejemplos.

8. ¿Cuál es el valor de $\lim_{\theta\to 0}((\operatorname{sen}\theta)/\theta)$? ¿Importa si θ está medido en grados o en radianes? Explique.

9. Exactamente, ¿qué significa $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$? Dé un ejemplo en el que, para la definición formal de límite, determine una $\delta>0$ para f, L, x_0 y $\epsilon>0$ dados.

10. Dé las definiciones precisas de los siguientes enunciados.

a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5$

b. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$

c. $\lim_{x\to 2} f(x)=\infty$

d. $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$

11. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función si es continua en un punto interior de su dominio? ¿Cuáles si el punto es un punto extremo?
12. ¿Cómo puede ayudarle observar la gráfica de una función para determinar en dónde ésta es continua?
13. ¿Qué significa que una función sea continua por la derecha en un punto? ¿Qué significa que sea continua por la izquierda? ¿Cómo están relacionadas las continuidades laterales con la continuidad?
14. ¿Qué significa que una función sea continua en un intervalo? Dé ejemplos para ilustrar el hecho de que una función, la cual no es continua en todo su dominio, puede ser continua en intervalos seleccionados de su dominio.
15. ¿Cuáles son los tipos básicos de discontinuidad? Dé un ejemplo de cada uno. ¿Qué es una discontinuidad removible (o evitable)? Dé un ejemplo.
16. ¿Qué significa que una función tenga la propiedad del valor intermedio? ¿Cuáles condiciones garantizan que una función tenga esta propiedad en un intervalo? ¿Cuáles son las consecuencias para la graficación y la resolución de la ecuación $f(x) = 0$?
17. ¿En qué circunstancias puede extender una función $f(x)$ para que sea continua en un punto $x = c$? Dé un ejemplo.
18. Exactamente, ¿qué significan $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$? Dé ejemplos.
19. ¿Qué son $\lim_{x\to\pm\infty} k$ (k constante) y $\lim_{x\to\pm\infty} (1/x)$? ¿Cómo puede ampliar estos resultados a otras funciones? Dé ejemplos.
20. ¿Cómo se determina el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$? Dé ejemplos.
21. ¿Qué son las asíntotas horizontales y las asíntotas verticales? Dé ejemplos.

Capítulo 2 Ejercicios de práctica

Límites y continuidad

1. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le -1 \\ -x, & -1 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Luego analice a detalle los límites, los límites laterales, la continuidad y la continuidad lateral de f en $x = -1$, 0 y 1. ¿Hay alguna discontinuidad que sea removible? Explique.

2. Repita las instrucciones del ejercicio 1 para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 1/x, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. Suponga que $f(t)$ y $g(t)$ están definidas para toda t y que $\lim_{t\to t_0} f(t) = -7$ y $\lim_{t\to t_0} g(t) = 0$. Determine el límite cuando $t \to t_0$ de las siguientes funciones.

a. $3f(t)$
b. $(f(t))^2$
c. $f(t) \cdot g(t)$
d. $\dfrac{f(t)}{g(t) - 7}$
e. $\cos (g(t))$
f. $|f(t)|$
g. $f(t) + g(t)$
h. $1/f(t)$

4. Suponga que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas para toda x y que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1/2$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \sqrt{2}$. Determine los límites cuando $x \to 0$ de las siguientes funciones.

a. $-g(x)$
b. $g(x) \cdot f(x)$
c. $f(x) + g(x)$
d. $1/f(x)$
e. $x + f(x)$
f. $\dfrac{f(x) \cdot \cos x}{x - 1}$

En los ejercicios 5 y 6 determine el valor que debe tener el $\lim_{x\to 0} g(x)$ si se satisface el límite indicado.

5. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{4 - g(x)}{x}\right) = 1$
6. $\lim_{x\to -4} \left(x \lim_{x\to 0} g(x)\right) = 2$

7. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a. $f(x) = x^{1/3}$
b. $g(x) = x^{3/4}$
c. $h(x) = x^{-2/3}$
d. $k(x) = x^{-1/6}$

8. ¿En qué intervalos son continuas las siguientes funciones?

a. $f(x) = \tan x$
b. $g(x) = \csc x$
c. $h(x) = \dfrac{\cos x}{x - \pi}$
d. $k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Determinación de límites

En los ejercicios 9 a 24 determine el límite o explique por qué no existe.

9. $\lim \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

a. cuando $x \to 0$
b. cuando $x \to 2$

10. $\lim \dfrac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3}$

a. cuando $x \to 0$
b. cuando $x \to -1$

11. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

12. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x^4 - a^4}$

13. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}}{x}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

17. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

18. $\lim_{x\to 64} \dfrac{x^{2/3} - 16}{\sqrt{x} - 8}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan (2x)}{\tan (\pi x)}$

20. $\lim_{x\to \pi^-} \csc x$

21. $\lim_{x\to \pi} \operatorname{sen} \left(\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen} x\right)$

22. $\lim_{x\to \pi} \cos^2 (x - \tan x)$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{8x}{3 \operatorname{sen} x - x}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x}$

En los ejercicios 25 a 28, determine el límite de $g(x)$ cuando x tiende al valor indicado.

25. $\lim_{x\to 0^+} (4g(x))^{1/3} = 2$

26. $\lim_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{1}{x + g(x)} = 2$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 1}{g(x)} = \infty$

28. $\lim_{x\to -2} \dfrac{5 - x^2}{\sqrt{g(x)}} = 0$

Extensión continua

29. ¿La función $f(x) = x(x^2 - 1)/|x^2 - 1|$ puede extenderse para ser continua en $x = 1$ y $x = -1$? Justifique sus respuestas. (Grafique la función; la encontrará muy interesante).

30. Explique por qué la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene extensión continua en $x = 0$.

T En los ejercicios 31 a 34, grafique la función para ver si parece que tenga una extensión continua en el punto a dado. Si es así, utilice las funciones Trace y Zoom para determinar un buen candidato para el valor en a de la función extendida. Si la función parece que no tiene extensión continua, ¿puede tener una extensión continua por la derecha o una por la izquierda? Si es así, ¿cuál cree que debe ser el valor de la función extendida?

31. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - \sqrt[4]{x}}, \quad a = 1$

32. $g(\theta) = \dfrac{5\cos\theta}{4\theta - 2\pi}, \quad a = \pi/2$

33. $h(t) = (1 + |t|)^{1/t}, \quad a = 0$

34. $k(x) = \dfrac{x}{1 - 2^{|x|}}, \quad a = 0$

Raíces

T **35.** Sea $f(x) = x^3 - x - 1$.

a. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que f tiene un cero entre -1 y 2.

b. Resuelva gráficamente la ecuación $f(x) = 0$ con un error de magnitud a lo sumo de 10^{-8}.

c. Puede demostrarse que el valor exacto de la solución en el inciso (b) es

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{1/3}.$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que encontró en el inciso (b).

T **36.** Sea $f(\theta) = \theta^3 - 2\theta + 2$.

a. Utilice el teorema del valor intermedio para mostrar que f tiene un cero entre -2 y 0.

b. Resuelva gráficamente la ecuación $f(\theta) = 0$ con un error de magnitud a lo sumo de 10^{-4}.

c. Puede demostrarse que el valor exacto de la solución en el inciso (b) es

$$\left(\sqrt{\frac{19}{27}} - 1\right)^{1/3} - \left(\sqrt{\frac{19}{27}} + 1\right)^{1/3}.$$

Evalúe esta respuesta exacta y compárela con el valor que encontró en el inciso (b).

Límites en infinito

Determine los límites en los ejercicios 37 a 46.

37. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

38. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{5x^2 + 7}$

39. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3x^3}$

40. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 7x + 1}$

41. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 7x}{x + 1}$

42. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + x^3}{12x^3 + 128}$

43. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\lfloor x \rfloor}$ (Si tiene una graficadora, intente graficar la función para $-5 \le x \le 5$).

44. $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$ (Si tiene una graficadora, intente graficar $f(x) = x(\cos(1/x) - 1)$, cerca del origen para "ver" el límite en infinito).

45. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x + 2\sqrt{x}}{x + \operatorname{sen} x}$

46. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{2/3} + x^{-1}}{x^{2/3} + \cos^2 x}$

Asíntotas horizontales y verticales

47. Utilice límites para determinar las ecuaciones de todas las asíntotas verticales.

a. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 3}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

c. $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$

48. Utilice límites para determinar las ecuaciones de todas las asíntotas horizontales.

a. $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

b. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x + 4}}$

c. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$

d. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 9}{9x^2 + 1}}$

Capítulo 2 Ejercicios adicionales y avanzados

T **1. Asignación de un valor a 0^0** Las reglas de los exponentes nos dicen que $a^0 = 1$ si a es cualquier número diferente de cero. También nos dicen que $0^n = 0$ si n es cualquier número positivo.

Si tratamos de extender estas reglas para incluir el caso 0^0, obtendríamos resultados controversiales. La primera regla dice que $0^0 = 1$, mientras que la segunda indica que $0^0 = 0$.

Aquí no estamos tratando con preguntas de tipo verdadero o falso. Ninguna de las reglas se aplica, así que no hay contradicción. De hecho, podríamos definir 0^0 como cualquier valor que queramos, siempre y cuando logremos convencer a los demás de aceptarlo.

¿Qué valor le gustaría que tuviera 0^0? A continuación está un ejemplo que podría ayudarle a decidir. (Véase el ejercicio 2, donde se da otro ejemplo).

a. Calcule x^x para $x = 0.1, 0.01, 0.001$ y así sucesivamente hasta donde su calculadora se lo permita. Registre los valores que obtenga. ¿Qué patrón observa?

b. Grafique la función $y = x^x$ para $0 < x \le 1$. Aunque la función no está definida para $x \le 0$, la gráfica se aproximará al eje y por la derecha. ¿Hacia qué valor de y parece dirigirse? Haga un acercamiento para respaldar su idea.

T **2. Una razón por la que 0^0 podría ser algo distinto de 0 y de 1** Cuando el número x aumenta en valores positivos, ambos números $1/x$ y $1/(\ln x)$ se aproximan a cero. ¿Qué sucede con el número

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/(\ln x)}$$

cuando x aumenta? A continuación se presentan dos maneras de averiguarlo.

a. Evalúe f para $x = 10, 100, 1000$ y así sucesivamente hasta donde lo permita su calculadora. ¿Qué patrón observa?

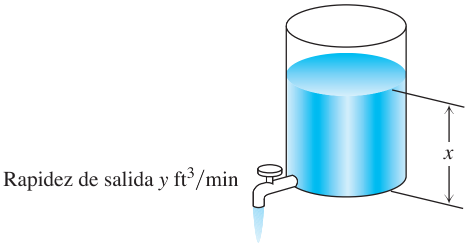
b. Grafique f en diversas ventanas de graficación, incluyendo ventanas que contengan al origen. ¿Qué observa? Trace los valores de y en la gráfica. ¿Qué encontró?

3. Contracción de Lorentz En la teoría de la relatividad, la longitud de un objeto, digamos un cohete, parece variar a los ojos de un observador dependiendo de la velocidad a la que viaja el objeto con respecto a ese observador. Si éste mide la longitud del cohete en reposo L_0, entonces a una velocidad v la longitud parecerá ser

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta ecuación es la fórmula de contracción de Lorentz. Aquí, c es la rapidez de la luz en el vacío, alrededor de $3 - 10^8$ m/seg. ¿Qué le sucede a L cuando v aumenta? Determine $\lim_{v\to c^-} L$. ¿Por qué es necesario el límite por la izquierda?

4. Control del flujo en un depósito que se vacía La ley de Torricelli establece que si usted vacía un depósito, como el que se ilustra en la figura, la tasa y a la que el agua sale es una constante multiplicada por la raíz cuadrada de la profundidad x del agua. La constante depende del tamaño y la forma de la válvula de salida.



Suponga que, para cierto depósito, $y = \sqrt{x}/2$, y usted trata de mantener una salida relativamente constante, para lo cual añade, de vez en cuando, agua al depósito mediante una manguera. ¿Qué profundidad debe tener el agua si quiere mantener una rapidez o tasa de salida de

a. $y_0 = 1$ ft^3/min, con una diferencia a lo sumo de 0.2 ft^3/min?

b. $y_0 = 1$ ft^3/min, con una diferencia a lo sumo de 0.1 ft^3/min?

5. Dilatación térmica en equipos de precisión Como seguramente sabe, los metales se dilatan con el calor y se contraen con el frío. Las dimensiones de una pieza de equipo de laboratorio en ocasiones son tan importantes que el taller donde se fabricó el equipo debe estar a la misma temperatura que la del laboratorio donde se utilice el equipo. Una barra común de aluminio, de 10 cm de ancho a 70°F, tendrá

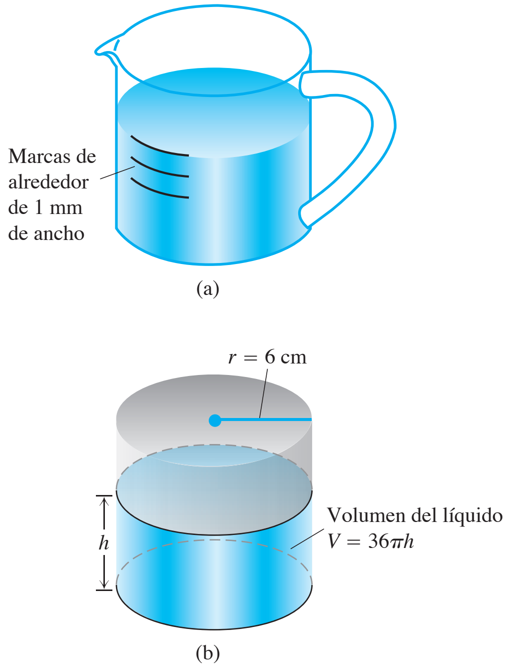
$$y = 10 + (t - 70) \times 10^{-4}$$

centímetros de ancho a una temperatura cercana t. Suponga que utiliza una barra como ésta en un detector de ondas de gravedad y su ancho debe estar, cuando mucho, a 0.0005 cm de los 10 cm ideales. ¿Qué tan cerca a $t_0 = 70$°F debe mantener la temperatura para asegurarse de no exceder esta tolerancia?

6. Marcas en una taza de medición El interior de una taza de medición de 1 litro por lo regular es un cilindro circular recto de radio de 6 cm (véase la figura). Por lo tanto, el volumen de agua que se pone en la taza es una función del nivel h al cual se llena la taza, donde la fórmula es

$$V = \pi 6^2 h = 36\pi h.$$

¿Con cuánta precisión debemos medir h para medir 1 litro de agua (1000 cm^3) con un error de no más del 1% (10 cm^3)?



Una taza de medición de 1 litro (a), modelada como un cilindro circular recto (b) de radio $r = 6$ cm.

Definición formal de límite

En los ejercicios 7 a 10 utilice la definición formal de límite para probar que la función es continua en x_0.

7. $f(x) = x^2 - 7, \quad x_0 = 1$

8. $g(x) = 1/(2x), \quad x_0 = 1/4$

9. $h(x) = \sqrt{2x - 3}, \quad x_0 = 2$

10. $F(x) = \sqrt{9 - x}, \quad x_0 = 5$

11. Unicidad de límites Demuestre que una función no puede tener dos límites diferentes en el mismo punto. Esto es, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

12. Pruebe la regla del límite del múltiplo constante:

$$\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x) \quad \text{para cualquier constante } k.$$

13. Límites laterales Si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B$, determine

a. $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$

b. $\lim_{x\to 0^-} f(x^3 - x)$

c. $\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$

d. $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

14. Límites y continuidad ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos? Si es verdadero, explique por qué; si es falso, dé un contraejemplo (esto es, un ejemplo que confirme la falsedad).

a. Si existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no existe el $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ no existe.

b. Si no existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y tampoco existe el $\lim_{x\to a} g(x)$ entonces $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$ no existe.

c. Si f es continua en x, entonces también lo es $|f|$.

d. Si $|f|$ es continua en a, entonces también lo es f.

En los ejercicios 15 y 16 utilice la definición formal de límite para probar que la función tiene una extensión continua para el valor dado de x.

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}, \quad x = -1$ **16.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 6}, \quad x = 3$

17. Una función continua sólo en un punto Sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

a. Demuestre que f es continua en $x = 0$.

b. Con base en el hecho de que todo intervalo abierto de números reales contiene tanto números racionales como irracionales, demuestre que f no es continua en cualquier valor de x distinto de cero.

18. Función regla de Dirichlet Si x es un número racional, entonces x puede escribirse de manera única como un cociente de enteros m/n, donde $n > 0$, y m y n no tienen factores comunes mayores a 1. (Decimos que tal fracción está en su *mínima expresión*. Por ejemplo, $6/4$ escrita en su mínima expresión es $3/2$). Sea $f(x)$ definida para toda x en el intervalo [0, 1] mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = m/n \text{ es número racional en su mínima expresión} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $f(0) = f(1) = 1$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$ y así sucesivamente.

a. Demuestre que f es discontinua en todo número racional en [0, 1].

b. Demuestre que f es continua en todo número irracional en [0, 1]. (*Sugerencia*: Si ϵ es un número positivo dado, demuestre que sólo existe un número finito de racionales r en [0, 1] tales que $f(r) - \epsilon$).

c. Elabore un bosquejo de la gráfica de f. ¿Por qué cree que a f se le denomina "función regla"?

19. Puntos antípodas ¿Hay alguna razón para creer que siempre existen un par de puntos antípodas (diametralmente opuestos) en el Ecuador de la Tierra, donde las temperaturas son iguales? Explique.

20. Si $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = 3$ y $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x)) = -1$, determine $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$.

21. Raíces de una ecuación cuadrática que es casi lineal La ecuación $ax^2 + 2x - 1 = 0$, donde a es una constante, tiene dos raíces si $a > -1$ y $a \neq 0$, una positiva y una negativa:

$$r_+(a) = \frac{-1 + \sqrt{1 + a}}{a}, \qquad r_-(a) = \frac{-1 - \sqrt{1 + a}}{a}.$$

a. ¿Qué pasa con $r_+(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Y cuando $a \to -1^+$?

b. ¿Qué pasa con $r_-(a)$ cuando $a \to 0$? ¿Y cuando $a \to -1^+$?

c. Justifique sus conclusiones graficando $r_+(a)$ y $r_-(a)$ como funciones de a. Describa lo que observe.

d. Para que tenga un mayor respaldo, grafique $ax^2 + 2x - 1$ simultáneamente para $a = 1, 0.5, 0.2, 0.1$ y 0.05.

22. Raíces de una ecuación Demuestre que la ecuación $x + 2\cos x = 0$ tiene al menos una solución.

23. Funciones acotadas Una función f, con valores reales, está **acotada por arriba** en un conjunto D si existe un número N tal que $f(x) \leq N$ para toda x en D. Cuando existe, a N le llamamos una **cota superior** para f en D y decimos que f está acotada por arriba por N. De manera análoga, decimos que f está **acotada por abajo** en D si existe un número M tal que $f(x) - M$ para toda x en D. Cuando existe, a M le llamamos una **cota inferior** para f en D y decimos que f está acotada por abajo por M. Decimos que f está **acotada** en D si está acotada tanto por arriba como por abajo.

a. Demuestre que f está acotada en D si y sólo si existe un número B tal que $|f(x)| \leq B$ para toda x en D.

b. Suponga que f está acotada por arriba por N. Demuestre que si $\lim_{x:\, x_0} f(x) = L$, entonces $L \leq N$.

c. Suponga que f está acotada por abajo por M. Demuestre que si $\lim_{x:\, x_0} f(x) = L$, entonces $L \geq M$.

24. Máx $\{a, b\}$ y mín $\{a, b\}$

a. Demuestre que la expresión

$$\text{máx}\,\{a, b\} = \frac{a + b}{2} + \frac{|a - b|}{2}$$

es igual a a, si $a - b$, y es igual a b si $b - a$. En otras palabras, máx$\{a, b\}$ da el mayor de los dos números a y b.

b. Encuentre una expresión similar para mín $\{a, b\}$, el menor de a y b.

Límites generalizados que incluyen a $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$

La fórmula $\lim_{\theta\to 0}(\text{sen}\,\theta)/\theta = 1$ puede generalizarse. Si $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $f(x)$ nunca es cero en un intervalo abierto que contenga al punto $x = c$, excepto posiblemente c, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{\text{sen}\, f(x)}{f(x)} = 1.$$

A continuación, se presentan varios ejemplos

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x^2}{x^2} = 1$

b. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x^2}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 1 \cdot 0 = 0$

c. $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}\,(x^2 - x - 2)}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{\text{sen}\,(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 2)} \cdot \lim_{x\to -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{x + 1} = 1 \cdot \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = -3$

d. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\left(1 - \sqrt{x}\right)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\left(1 - \sqrt{x}\right)}{1 - \sqrt{x}} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1} = 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)}{(x - 1)\left(1 + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{(x - 1)\left(1 + \sqrt{x}\right)} = -\frac{1}{2}$

Determine los límites en los ejercicios 25 a 30.

25. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(1 - \cos x)}{x}$ **26.** $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\sqrt{x}}$

27. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(\text{sen}\, x)}{x}$ **28.** $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^2 + x)}{x}$

29. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}\,(x^2 - 4)}{x - 2}$ **30.** $\displaystyle \lim_{x\to 9} \frac{\text{sen}\left(\sqrt{x} - 3\right)}{x - 9}$

Asíntotas oblicuas

En los ejercicios 31 a 34, determine todas las posibles asíntotas oblicuas.

31. $y = \dfrac{2x^{3/2} + 2x - 3}{\sqrt{x} + 1}$ **32.** $y = x + x\,\text{sen}\,(1/x)$

33. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **34.** $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

Capítulo 2 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Llévela al límite

Parte I
Parte II (Cero elevado a la cero: ¿Qué significa?)
Parte III (Límites laterales)
Visualice e interprete el concepto de límite por medio de exploraciones gráficas y numéricas.
Parte IV (¡Qué diferencia hace una potencia!)
Observe cuán sensibles pueden ser los límites con diversas potencias de x.

Ir al infinito

Parte I (Exploración del comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$)
Este módulo ofrece cuatro ejemplos para explorar el comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.
Parte II (Tasas de crecimiento)
Observe las gráficas que parecen ser continuas; sin embargo, la función no es continua. Se exploran varios temas de continuidad para obtener resultados que podrían sorprenderle.

3
Derivadas

INTRODUCCIÓN Al inicio del capítulo 2 analizamos cómo determinar la pendiente de una curva en un punto y cómo medir la tasa a la que cambia una función. Ahora que hemos estudiado los límites, es posible definir tales ideas de forma precisa y ver que ambas son interpretaciones de la derivada de una función en un punto. Luego ampliamos este concepto, de un solo punto, a la función derivada y desarrollamos reglas para determinar con facilidad esta función derivada, sin tener que calcular los límites de manera directa. Tales reglas se utilizan para determinar derivadas de la mayoría de las funciones comunes revisadas en el capítulo 1, así como diversas combinaciones de ellas. La derivada es uno de los principales elementos en cálculo; la usamos para resolver una amplia variedad de problemas que incluyen tangentes y tasas de cambio.

3.1 Tangentes y la derivada en un punto

En esta sección definimos la pendiente y la tangente a una curva en un punto, así como la derivada de una función en un punto. Posteriormente, interpretamos la derivada como la tasa instantánea de cambio de una función y aplicamos dicha interpretación al estudio de ciertos tipos de movimiento.

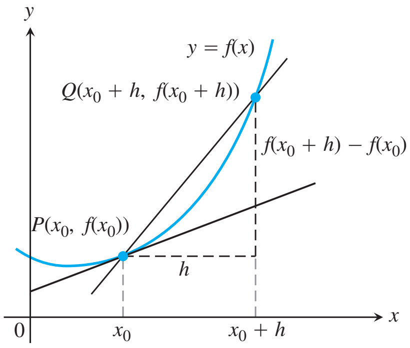


FIGURA 3.1 La pendiente de la recta tangente en P es $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Determinación de una tangente a la gráfica de una función

Para determinar una tangente a una curva arbitraria, $y = f(x)$, en un punto $P(x_0, f(x_0))$, utilizamos el procedimiento que se presentó en la sección 2.1. Calculamos la pendiente de la secante que pasa por P y un punto cercano $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Luego investigamos el límite de la pendiente cuando $h \to 0$ (figura 3.1). Si el límite existe, le llamamos la pendiente de la curva en P y definimos la tangente en P como la recta que pasa por P y que tiene tal pendiente.

DEFINICIONES La **pendiente de la curva** $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(siempre que el límite exista).}$$

La **recta tangente** (o simplemente la tangente) a la curva en P es la recta que pasa por P y tiene dicha pendiente.

En la sección 2.1, ejemplo 3, aplicamos estas definiciones para determinar la pendiente de la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ y la recta tangente a la parábola en P. Veamos otro ejemplo.

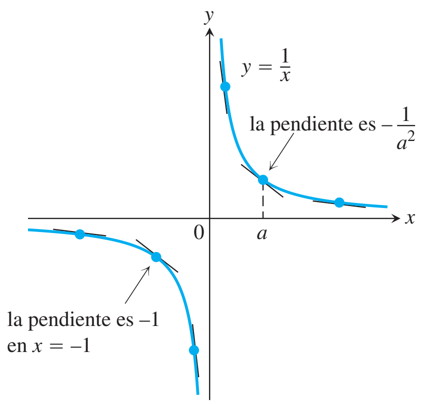


FIGURA 3.2 Las pendientes de las rectas tangentes, que son muy inclinadas cerca del origen, gradualmente se vuelven menos inclinadas conforme el punto de tangencia se aleja del origen (ejemplo 1).

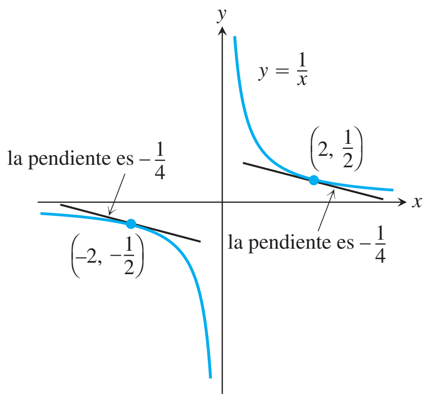


FIGURA 3.3 Las dos rectas tangentes a $y = 1/x$ tienen pendiente $-1/4$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 1

(a) Determine la pendiente de la curva $y = 1/x$ en cualquier punto $x = a \neq 0$. ¿Cuál es la pendiente en el punto $x = -1$?

(b) ¿En dónde la pendiente es igual a $-1/4$?

(c) ¿Qué pasa con la tangente a la curva en el punto $(a, 1/a)$ cuando a cambia?

Solución

(a) Aquí $f(x) = 1/x$. La pendiente en $(a, 1/a)$ es

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Observe cómo hemos mantenido la escritura de "$\lim_{h \to 0}$" antes de cada fracción hasta el paso donde pudimos evaluar el límite sustituyendo $h = 0$. El número a puede ser positivo o negativo, pero no 0. Cuando $a = -1$, la pendiente es $-1/(-1)^2 = -1$ (figura 3.2).

(b) La pendiente de $y = 1/x$ en el punto donde $x = a$ es $-1/a^2$. Será igual a $-1/4$, siempre que

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

Tal ecuación es equivalente a $a^2 = 4$, así que $a = 2$ o $a = -2$. La curva tiene pendiente $-1/4$ en los dos puntos $(2, 1/2)$ y $(-2, -1/2)$ (figura 3.3).

(c) La pendiente $-1/a^2$ siempre es negativa si $a \neq 0$. Cuando $a \to 0^+$, la pendiente tiende a $-\infty$ y la tangente se hace cada vez más inclinada (figura 3.2). Tal situación se presenta de nuevo cuando $a \to 0^-$. Cuando a se aleja del origen, en cualquier dirección, la pendiente tiende a 0 y la tangente tiende a volverse horizontal. ■

Tasas de cambio: derivada en un punto

La expresión

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

se denomina **cociente de diferencias de f en x_0 con incremento h**. Si el cociente de diferencias tiene un límite cuando h tiende a cero, a ese límite se le da un nombre y una notación especiales.

DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un punto x_0**, denotada por $f'(x_0)$, es

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Si interpretamos el cociente de diferencias como la pendiente de la recta secante, entonces la derivada es la pendiente de la curva, $y = f(x)$, en el punto $P(x_0, f(x_0))$. El ejercicio 31 indica que la derivada de la función lineal $f(x) = mx + b$ en cualquier punto x_0 es simplemente la pendiente de la recta, de manera que

$$f'(x_0) = m,$$

lo cual es congruente con nuestra definición de pendiente.

Si interpretamos el cociente de diferencias como una tasa promedio de cambio (sección 2.1), la derivada indica la tasa instantánea de cambio de la función con respecto a x en el punto $x = x_0$. Estudiaremos esta interpretación en la sección 3.4.

EJEMPLO 2 En los ejemplos 1 y 2 de la sección 2.1, estudiamos la velocidad de una piedra que cae libremente, a partir del reposo, cerca de la superficie de la Tierra. Sabemos que la piedra cayó $y = 16t^2$ ft durante los primeros t segundos, por lo que utilizamos una sucesión de tasas promedio en intervalos cada vez más pequeños para estimar la velocidad de la piedra en el instante $t = 1$. ¿Cuál fue la velocidad exacta de la piedra en ese instante?

Solución Sea $f(t) = 16t^2$. Determinamos que la velocidad promedio de la piedra durante el intervalo entre $t = 1$ y $t = 1 + h$ segundos, para $h > 0$, es

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{16(1+h)^2 - 16(1)^2}{h} = \frac{16(h^2 + 2h)}{h} = 16(h+2).$$

Entonces, la velocidad de la piedra en el instante $t = 1$ es

$$\lim_{h\to 0} 16(h+2) = 16(0+2) = 32 \text{ ft/seg}.$$

Fue correcta nuestra estimación original de 32 ft/seg en la sección 2.1. ■

Resumen

Hemos analizado las pendientes de curvas, rectas tangentes a curvas, la tasa de cambio de una función y la derivada de una función en un punto. Todas estas ideas se refieren al mismo límite.

Las siguientes son interpretaciones para el límite del cociente de diferencias,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

1. La pendiente de la gráfica de $y = f(x)$ en $x = x_0$.
2. La pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$.
3. La tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x en $x = x_0$.
4. La derivada $f'(x_0)$ en un punto.

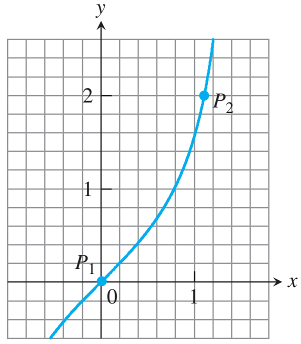
En las siguientes secciones dejamos que el punto x_0 varíe por todo el dominio de la función f.

Ejercicios 3.1

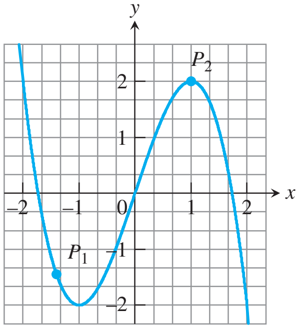
Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 1 a 4, utilice la cuadrícula y una regla para hacer una estimación de la pendiente de la curva (en unidades de y por unidad de x) en el punto P_1 y en el punto P_2.

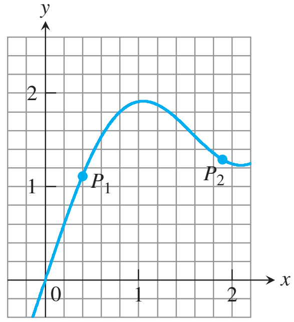
1.



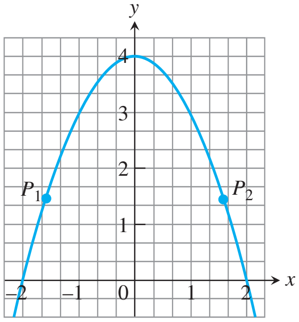
2.



3.



4.



En los ejercicios 5 a 10, determine una ecuación para la tangente a la curva en el punto dado. Luego elabore un bosquejo de la curva y la tangente.

5. $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

6. $y = (x - 1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

7. $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

8. $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

9. $y = x^3, \quad (-2, -8)$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad \left(-2, -\dfrac{1}{8}\right)$

En los ejercicios 11 a 18, determine la pendiente de la gráfica de la función en el punto dado. Luego determine también una ecuación para la recta tangente a la gráfica en ese punto.

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

12. $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

13. $g(x) = \dfrac{x}{x - 2}, \quad (3, 3)$

14. $g(x) = \dfrac{8}{x^2}, \quad (2, 2)$

15. $h(t) = t^3, \quad (2, 8)$

16. $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1, 4)$

17. $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$

18. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad (8, 3)$

En los ejercicios 19 a 22, determine la pendiente de la curva en el punto que se indica.

19. $y = 5x^2, \quad x = -1$

20. $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

21. $y = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x = 3$

22. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}, \quad x = 0$

Rectas tangentes con pendientes específicas

¿En qué puntos las gráficas de las funciones, en los ejercicios 23 y 24, tienen tangentes horizontales?

23. $f(x) = x^2 + 4x - 1$

24. $g(x) = x^3 - 3x$

25. Determine ecuaciones para todas las rectas que tienen pendiente -1 y que son tangentes a la curva $y = 1/(x - 1)$.

26. Determine una ecuación de la recta que tiene pendiente $1/4$ y que es tangente a la curva $y = \sqrt{x}$.

Tasas de cambio

27. Objeto que se deja caer desde una torre Un objeto se deja caer desde lo alto de una torre de 100 m de altura. Su altura por encima del nivel del suelo, al cabo de t segundos, es $100 - 4.9t^2$ m. ¿Cuál es su rapidez 2 segundos después de que se suelta?

28. Rapidez de un cohete La altura de un cohete luego de t segundos a partir del lanzamiento es de $3t^2$ ft. ¿Qué tan rápido asciende el cohete 10 segundos después del lanzamiento?

29. Cambio del área del círculo ¿Cuál es la tasa de cambio del área de un círculo ($A = \pi r^2$), con respecto al radio, cuando el radio es $r = 3$?

30. Cambio del volumen de una pelota ¿Cuál es la tasa de cambio del volumen de una pelota ($V = (4/3)\pi r^3$), con respecto al radio, cuando el radio es $r = 2$?

31. Demuestre que la recta $y = mx + b$ es su propia recta tangente en cualquier punto $(x_0, mx_0 + b)$.

32. Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = 4$.

Prueba para tangentes

33. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

34. ¿La gráfica de

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

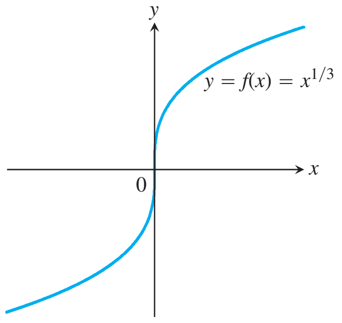
tiene una tangente en el origen? Justifique su respuesta.

Tangentes verticales

Decimos que una curva continua $y = f(x)$ tiene una **tangente vertical** en el punto donde $x = x_0$, si $\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))/h = \infty$ o $-\infty$. Por ejemplo, $y = x^{1/3}$ tiene una tangente vertical en $x = 0$ (véase la figura):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty.$$

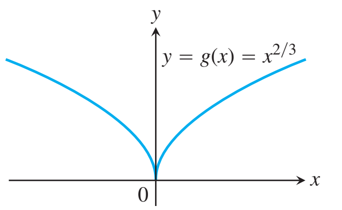


TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

Sin embargo, $y = x^{2/3}$ no tiene tangente vertical en $x = 0$ (véase la figura más adelante):

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{2/3} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

no existe, ya que el límite por la derecha es ∞, y por la izquierda es $-\infty$.



NO TIENE TANGENTE VERTICAL EN EL ORIGEN

35. ¿La gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el origen? Justifique su respuesta.

36. ¿La gráfica de

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

tiene una tangente vertical en el punto (0, 1)? Justifique su respuesta.

T Grafique las curvas en los ejercicios 37 a 46.

a. ¿En dónde parece que las gráficas tienen tangentes verticales?

b. Confirme sus hallazgos del inciso (a) con el cálculo de límites. Pero, antes de hacerlo, lea la introducción a los ejercicios 35 y 36.

37. $y = x^{2/5}$

38. $y = x^{4/5}$

39. $y = x^{1/5}$

40. $y = x^{3/5}$

41. $y = 4x^{2/5} - 2x$

42. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

43. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

44. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

45. $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

46. $y = \sqrt{|4 - x|}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos para las funciones en los ejercicios 47 a 50:

a. Trace $y = f(x)$ en el intervalo $(x_0 - 1/2) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

b. Si se mantiene x_0 fijo, el cociente de diferencia

$$q(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

en x_0 se vuelve una función del tamaño de paso h. Introduzca esta función en el área de trabajo de su SAC.

c. Determine el límite de q cuando $h - 0$.

d. Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q \cdot (x - x_0)$ para $h = 3$, 2 y 1. Grafíquelas junto con f y la recta tangente en el intervalo del inciso (a).

47. $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

48. $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

49. $f(x) = x + \text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi/2$

50. $f(x) = \cos x + 4\,\text{sen}\,(2x), \quad x_0 = \pi$.

3.2 La derivada como una función

ENSAYO HISTÓRICO

La derivada

En la sección anterior definimos la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ como el límite

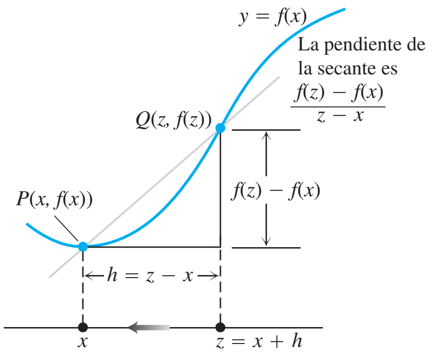
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ahora estudiaremos la derivada como una función deducida a partir de f; para ello, consideremos el límite en cada punto x en el dominio de f.

DEFINICIÓN La **derivada** de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

siempre que el límite exista.



La derivada de f en x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

FIGURA 3.4 Dos formas para el cociente de diferencias.

Utilizamos la notación $f(x)$ en la definición para enfatizar la variable independiente de x respecto a la cual se está definiendo la función derivada $f'(x)$. El dominio de f' es el conjunto de puntos en el dominio de f para los cuales existe el límite, lo que significa que el dominio puede ser el mismo o más pequeño que el dominio de f. Si f' existe en un x particular, decimos que f es **derivable (tiene derivada) en x**. Si f' existe en todo punto del dominio de f, decimos que f es **derivable**.

Si escribimos $z = x + h$, entonces $h = z - x$ y h tiende a 0 si y sólo si z tiende a x. Por lo tanto, una definición equivalente de la derivada es la siguiente (figura 3.4). Esta fórmula, en ocasiones, es más conveniente cuando se busca la derivada de una función.

Fórmula alternativa de la derivada

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Cálculo de derivadas a partir de la definición

El proceso de calcular una derivada se denomina **derivación**. Para resaltar la idea de que la derivación es una operación realizada sobre una función $y = f(x)$, utilizamos la notación

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

como otra forma de denotar la derivada $f'(x)$. El ejemplo 1 de la sección 3.1 ilustra el proceso de derivación para la función $y = 1/x$ cuando $x = a$. Para x, que representa cualquier punto en el dominio, obtenemos la fórmula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Derivada de la función recíproca

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

A continuación damos dos ejemplos más en los cuales permitimos que x sea cualquier punto del dominio de f.

EJEMPLO 1 Derive $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Solución Utilizamos la definición de derivada, la cual requiere calcular $f(x+h)$ y luego restar $f(x)$ para obtener el numerador en el cociente de diferencias. Tenemos

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{y} \quad f(x+h) = \frac{(x+h)}{(x+h)-1}, \text{ por lo que}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{Definición}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h}{x+h-1} - \dfrac{x}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{Simplifique,}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}. \qquad \text{Cancele } h \neq 0$$

■

EJEMPLO 2

(a) Determine la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ para $x > 0$.

(b) Determine la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

Solución

Derivada de la función raíz cuadrada

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

(a) Utilizamos la fórmula alternativa para calcular f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(b) La pendiente de la curva en $x = 4$ es

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

La tangente es la recta que pasa por el punto $(4, 2)$ con pendiente $1/4$ (figura 3.5):

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{1}{4}(x - 4) \\ y &= \frac{1}{4}x + 1. \end{aligned}$$

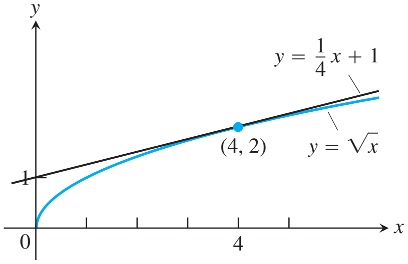


FIGURA 3.5 La curva $y = \sqrt{x}$ y su tangente en $(4, 2)$. La pendiente de la tangente se determina al evaluar la derivada en $x = 4$ (ejemplo 2).

Notaciones

Existen muchas formas para denotar a la derivada de una función $y = f(x)$, donde la variable independiente es x y la variable dependiente es y. Algunas de las notaciones alternativas comunes para la derivada son

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

Los símbolos d/dx y D indican la operación de derivación. Leemos dy/dx como "la derivada de y con respecto a x", y df/dx y $(d/dx)f(x)$ como "la derivada de f con respecto a x". Las notaciones "prima", y' y f' provienen de las notaciones que usaba Newton para las derivadas. Las notaciones d/dx son similares a las que utilizó Leibniz. El símbolo dy/dx no debe considerarse un cociente (hasta que presentemos la idea de "diferenciales" en la sección 3.9).

Para indicar el valor de una derivada en un número específico $x = a$, utilizamos la notación

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a} = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx}f(x)\bigg|_{x=a}.$$

En el ejemplo 2,

$$f'(4) = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Gráfica de la derivada

Con frecuencia podemos hacer una gráfica razonable de la derivada de $y = f(x)$ si estimamos las pendientes en la gráfica de f. Esto es, trazamos los puntos $(x, f'(x))$ en el plano xy y los unimos mediante una curva suave, que representa a $y = f'(x)$.

EJEMPLO 3 Grafique la derivada de la función $y = f(x)$ de la figura 3.6a.

Solución Hacemos un bosquejo de las tangentes a la gráfica de f en intervalos seguidos y utilizamos sus pendientes para estimar los valores de $f'(x)$ en estos puntos. Trazamos los pares correspondientes $(x, f'(x))$ y los unimos mediante una curva suave como se muestra en la figura 3.6b. ■

¿Qué podemos aprender de la gráfica de $y = f'(x)$? A primera vista vemos

1. dónde la tasa de cambio de f es positiva, negativa o cero;
2. el tamaño aproximado de la tasa de crecimiento en cualquier punto x y su tamaño en relación con el tamaño de $f(x)$;
3. dónde la tasa de cambio es creciente o decreciente.

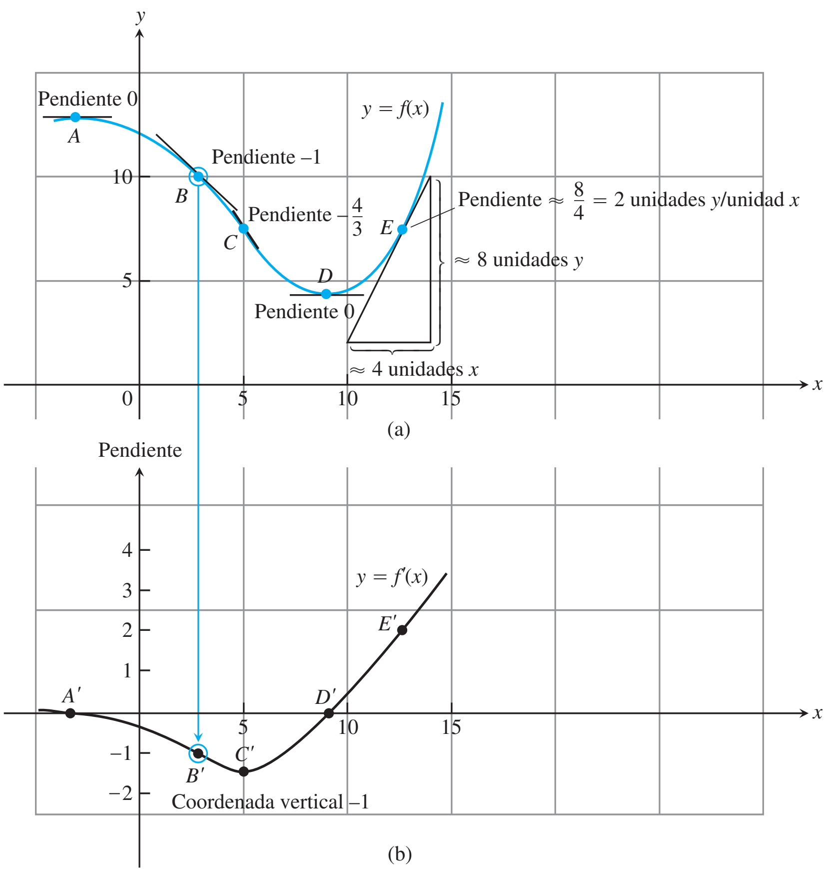


FIGURA 3.6 Hicimos la gráfica de $y = f'(x)$ en (b) trazando las pendientes de la gráfica de $y = f(x)$ en el inciso (a). La coordenada vertical de B' es la pendiente en B y así sucesivamente. En (b) vemos que la tasa de cambio de f es negativa para x entre A' y D'; la tasa de cambio es positiva para x a la derecha de D'.

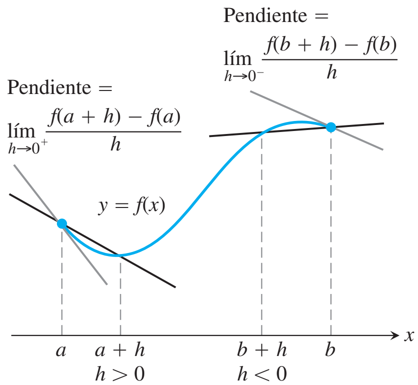


FIGURA 3.7 Las derivadas en los extremos son límites laterales.

Derivabilidad en un intervalo; derivadas laterales

Una función, $y = f(x)$, es **derivable en un intervalo abierto** (finito o infinito) si tiene derivada en cada punto del intervalo. Es **derivable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es derivable en el interior (a, b), y si los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \textbf{Derivada por la derecha en } \boldsymbol{a}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \qquad \textbf{Derivada por la izquierda en } \boldsymbol{b}$$

existen en los extremos (figura 3.7).

Las derivadas por la derecha y por la izquierda pueden definirse en cualquier punto del dominio de una función. A consecuencia del teorema 6, sección 2.4, una función tiene derivada en un punto si y sólo si ahí tiene derivadas por la izquierda y por la derecha, y tales derivadas laterales son iguales.

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $y = |x|$ es derivable en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, pero no tiene derivada en $x = 0$.

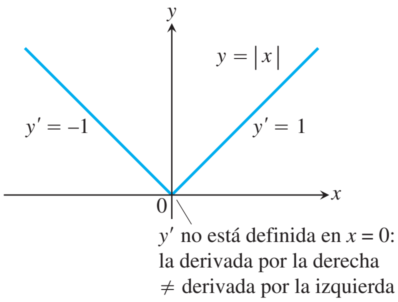


FIGURA 3.8 La función $y = |x|$ no es derivable en el origen, donde la gráfica tiene una "esquina" (ejemplo 4).

Solución Con base en la sección 3.1, la derivada de $y = mx + b$ es la pendiente m. Así, a la derecha del origen,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1. \qquad \frac{d}{dx}(mx + b) = m,\ |x| = x$$

A la izquierda del origen,

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1 \qquad |x| = -x$$

(figura 3.8). No hay derivada en el origen, ya que las derivadas laterales son diferentes ahí:

$$\begin{aligned}
\text{Derivada por la derecha de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} \qquad |h| = h \text{ cuando } h > 0 \\
&= \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \\
\text{Derivada por la izquierda de } |x| \text{ en cero} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} \qquad |h| = -h \text{ cuando } h < 0 \\
&= \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 En el ejemplo 2, encontramos que para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

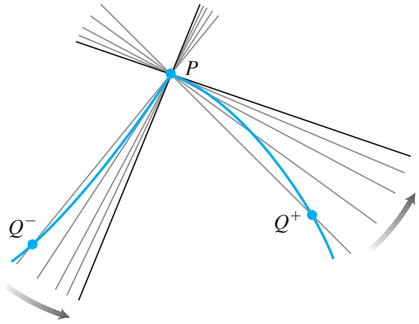
Aplicamos la definición para examinar si la derivada existe en $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0 + h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

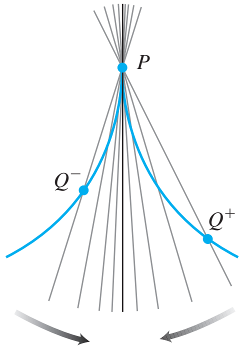
Como el límite (por la derecha) no es finito, no existe la derivada en $x = 0$. Ya que las pendientes de las rectas secantes que unen al origen con los puntos $(h, \sqrt{h})$ en la gráfica de $y = \sqrt{x}$ tienden a ∞, la gráfica tiene una tangente vertical en el origen. (Véase la figura 1.17 en la página 9). ■

¿Cuándo una función no tiene derivada en un punto?

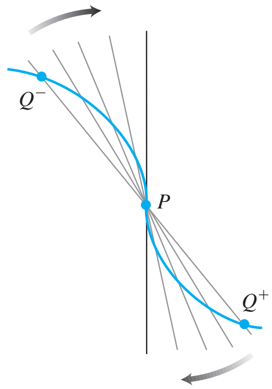
Una función tiene una derivada en un punto x_0 si las pendientes de las rectas secantes que pasan por $P(x_0, f(x_0))$ y un punto cercano Q en la gráfica tienden a un límite finito cuando Q se aproxima a P. La derivada no existe cuando las secantes no tienden a una posición límite, o bien, se vuelven verticales cuando Q se aproxima a P. Así, la derivabilidad es una condición de "suavidad" de la gráfica de f. Una función puede no tener derivada en un punto por muchas razones, incluyendo la existencia de puntos donde la gráfica tiene



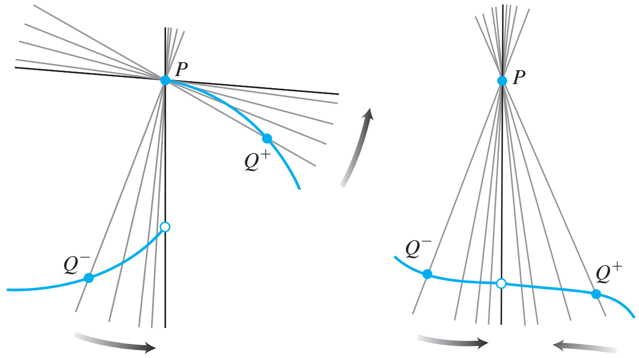
1. una *esquina*, donde las derivadas laterales son diferentes.



2. un *pico*, donde la pendiente de PQ tiende a ∞ por un lado y a $-\infty$ por el otro.



3. una *tangente vertical*, donde la pendiente de PQ tiende a ∞ por ambos lados o tiende a $-\infty$ por ambos lados (en este caso, $-\infty$).



4. una *discontinuidad* (aquí se muestran dos ejemplos).

Otro caso en el que la derivada puede no existir ocurre cuando la pendiente de la función oscila rápidamente cerca de P, como $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ cerca del origen, donde es discontinua (figura 2.31).

Las funciones derivables son continuas

Una función es continua en todo punto donde tiene derivada.

TEOREMA 1: Derivabilidad implica continuidad Si f tiene derivada en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

Prueba Dado que $f'(c)$ existe, debemos mostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, o de forma equivalente, que $\lim_{h\to 0} f(c + h) = f(c)$. Si $h \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h. \end{aligned}$$

Ahora tomamos el límite cuando $h \to 0$. Por el teorema 1 de la sección 2.2,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\ &= f(c) + 0 \\ &= f(c).\end{aligned}$$

■

Con argumentos análogos para límites laterales, demuestre que si f tiene una derivada lateral (por la derecha o la izquierda), en $x = c$, entonces f es continua por ese lado en $x = c$.

El teorema 1 indica que si una función tiene una discontinuidad en un punto (por ejemplo, una discontinuidad de salto), entonces no puede ser derivable ahí. La función mayor entero $y = \lfloor x \rfloor$ no es derivable en cada entero $x = n$ (ejemplo 4, sección 2.5).

¡Cuidado! El recíproco del teorema 1 es falso. Una función no necesita tener derivada en un punto para que sea continua, como vimos en el ejemplo 4.

Ejercicios 3.2

Determinación de funciones derivadas y valores de derivadas

Mediante la definición, calcule las derivadas de la funciones en los ejercicios 1 a 6. Luego determine los valores de las derivadas como se especifica.

1. $f(x) = 4 - x^2;\quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\quad F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t) = \dfrac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'\left(\sqrt{3}\right)$
4. $k(z) = \dfrac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'\left(\sqrt{2}\right)$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\quad p'(1), p'(3), p'(2/3)$
6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\quad r'(0), r'(1), r'(1/2)$

En los ejercicios 7 a 12, determine las derivadas que se indican.

7. $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = 2x^3$
8. $\dfrac{dr}{ds}$ si $r = s^3 - 2s^2 + 3$
9. $\dfrac{ds}{dt}$ si $s = \dfrac{t}{2t+1}$
10. $\dfrac{dv}{dt}$ si $v = t - \dfrac{1}{t}$
11. $\dfrac{dp}{dq}$ si $p = \dfrac{1}{\sqrt{q+1}}$
12. $\dfrac{dz}{dw}$ si $z = \dfrac{1}{\sqrt{3w-2}}$

Pendientes y rectas tangentes

En los ejercicios 13 a 16, derive las funciones y determine la pendiente de la recta tangente en el valor dado de la variable independiente.

13. $f(x) = x + \dfrac{9}{x},\quad x = -3$
14. $k(x) = \dfrac{1}{2+x},\quad x = 2$
15. $s = t^3 - t^2,\quad t = -1$
16. $y = \dfrac{x+3}{1-x},\quad x = -2$

En los ejercicios 17 a 18, derive las funciones. Luego determine una ecuación de la recta tangente en los puntos que se indican en la gráfica de la función.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}},\quad (x, y) = (6, 4)$
18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z},\quad (z, w) = (3, 2)$

En los ejercicios 19 a 22, determine los valores de las derivadas.

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ si $s = 1 - 3t^2$
20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ si $y = 1 - \dfrac{1}{x}$
21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ si $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$
22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ si $w = z + \sqrt{z}$

Uso de la fórmula alternativa para derivadas

Utilice la fórmula

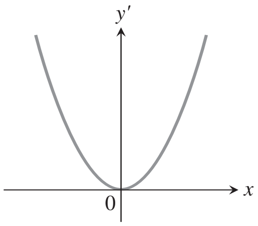
$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

para determinar la derivada de las funciones en los ejercicios 23 a 26.

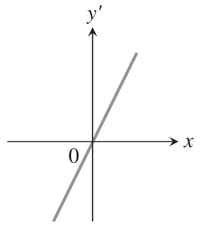
23. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
24. $f(x) = x^2 - 3x + 4$
25. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$
26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

Gráficas

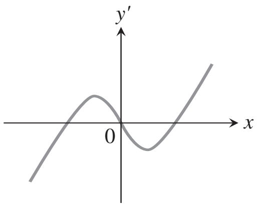
Relacione las funciones que se grafican en los ejercicios 27 a 30 con las derivadas graficadas en las figuras de la (a) a la (d).



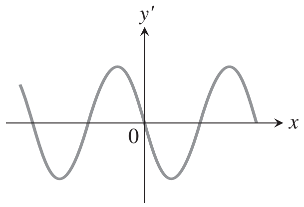
(a)



(b)

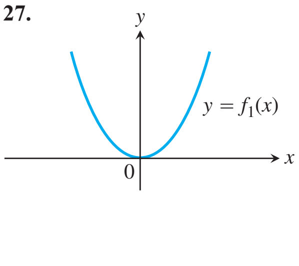


(c)

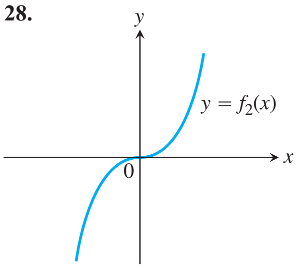


(d)

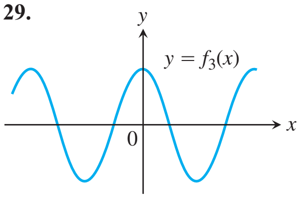
27.



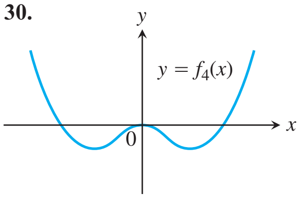
28.



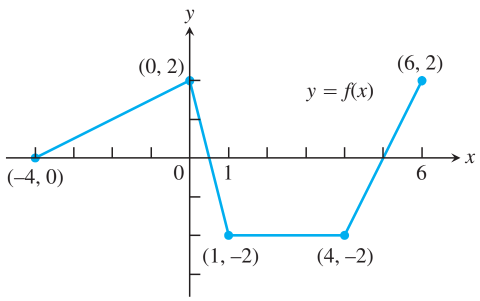
29.



30.



31. **a.** La gráfica en la siguiente figura está formada por segmentos de recta unidos. ¿En cuáles puntos del intervalo $[-4, 6]$ no está definida f'? Justifique su respuesta.



b. Grafique la derivada de f.
La gráfica debe mostrar una función escalonada.

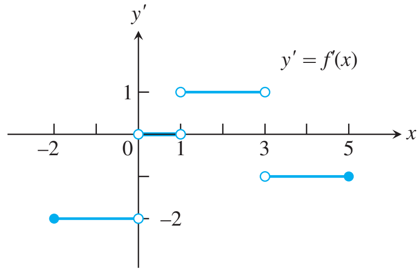
32. Recuperación de una función a partir de su derivada

a. Utilice la siguiente información para graficar la función f en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.

i) La gráfica de f se construye de segmentos continuos de recta unidos unos con otros.

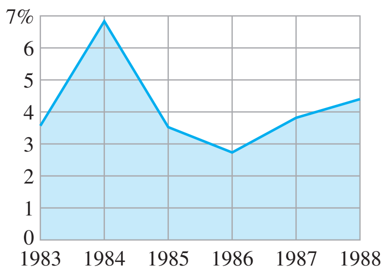
ii) La gráfica inicia en el punto $(-2, 3)$.

iii) La derivada de f es la función escalonada de la siguiente figura.



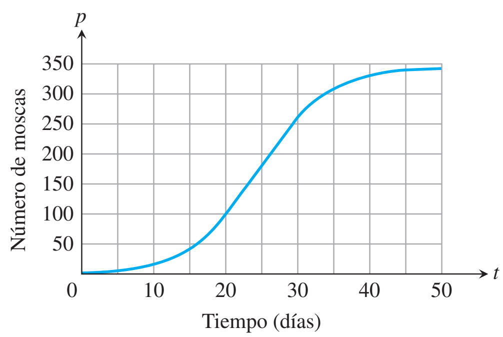
b. Repita el inciso (a), pero suponga que la gráfica inicia en $(-2, 0)$ y no en $(-2, 3)$.

33. Crecimiento de la economía La gráfica de la siguiente figura muestra el cambio porcentual anual promedio $y = f(t)$ en el producto nacional bruto (PNB) de Estados Unidos para los años 1983 a 1988. Grafique dy/dt (donde esté definida).



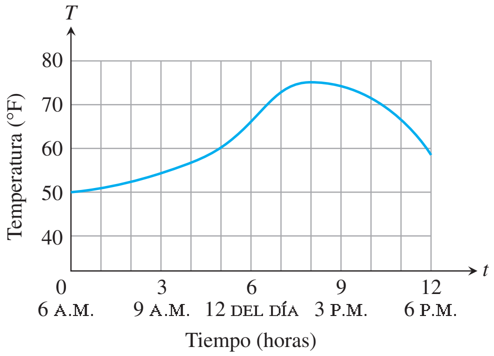
34. Moscas de la fruta (Continuación del ejemplo 4, sección 2.1) Las poblaciones que se reproducen en ambientes cerrados, primero crecen en forma lenta cuando hay relativamente pocos miembros, luego más rápido cuando el número de individuos que se reproducen aumenta y los recursos aún son abundantes, y después de manera lenta una vez que la población alcanza la capacidad límite del ambiente.

a. Utilice la técnica gráfica del ejemplo 3 para graficar la derivada de la población de la mosca de la fruta. La gráfica de la población se reproduce a continuación.



b. ¿Durante qué días la población parece que se incrementa de manera más rápida? ¿Cuándo de manera más lenta?

35. Temperatura La siguiente gráfica muestra la temperatura T en °F en Davis, California, el 18 de abril de 2008, entre las 6 A.M. y las 6 P.M.



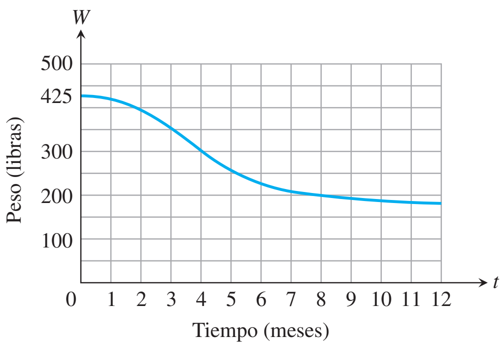
a. Estime la tasa de cambio de la temperatura a las

i) 7 A.M. **ii)** 9 A.M. **iii)** 2 P.M. **iv)** 4 P.M.

b. ¿A qué hora la temperatura se incrementa más rápido? ¿A qué hora decrece más rápido? ¿Cuál es la tasa para cada una de esas horas?

c. Utilice la técnica gráfica del ejemplo 3 para graficar la derivada de la temperatura T contra el tiempo t.

36. Pérdida de peso Jared Fogle, también conocido como “el hombre del emparedado Subway”, pesó 425 lb en 1997, antes de perder más de 240 lb en 12 meses (http://en.wikipedia.org/wiki/Jared_Fogle). En la siguiente figura se ilustra un posible diagrama de su drástica pérdida de peso.



a. Estime la tasa de pérdida de peso de Jared cuando

i) $t = 1$ **ii)** $t = 4$ **iii)** $t = 11$

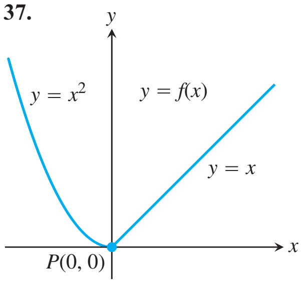
b. ¿Cuándo perdió peso Jared más rápidamente y cuál es esa tasa de pérdida de peso?

c. Utilice la técnica gráfica del ejemplo 3 para graficar la derivada del peso W.

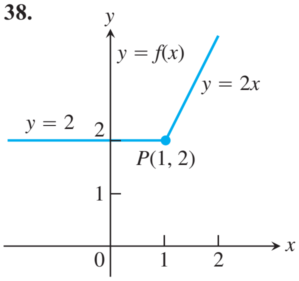
Derivadas laterales

Calcule las derivadas por la derecha y por la izquierda como límites para mostrar que las funciones en los ejercicios 37 a 40 no son derivables en el punto P.

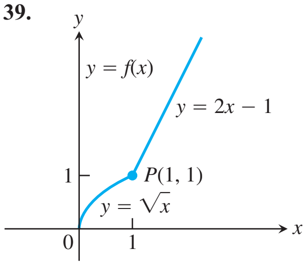
37.



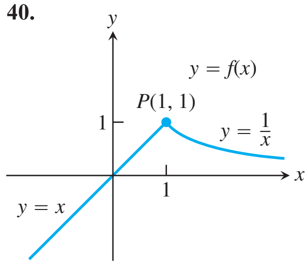
38.



39.



40.



En los ejercicios 41 y 42 determine si la función definida por partes es derivable en el origen.

41. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 7, & x < 0 \end{cases}$

42. $g(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & x \geq 0 \\ x^{1/3}, & x < 0 \end{cases}$

Derivabilidad y continuidad en un intervalo

Cada figura en los ejercicios 43 a 48 presenta la gráfica de una función en el intervalo cerrado D. ¿En qué puntos del dominio la función parece ser

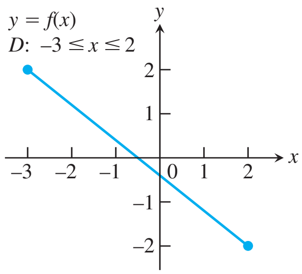
a. derivable?

b. continua, pero no derivable?

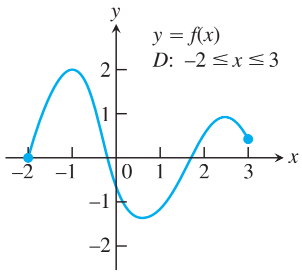
c. ni continua ni derivable?

Justifique sus respuestas.

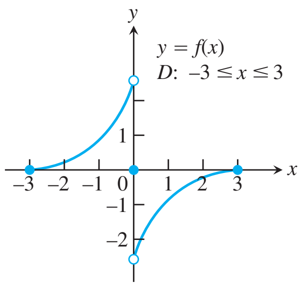
43.



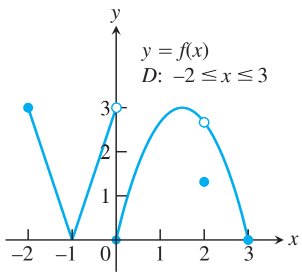
44.



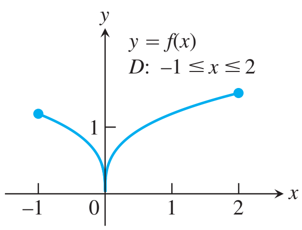
45.



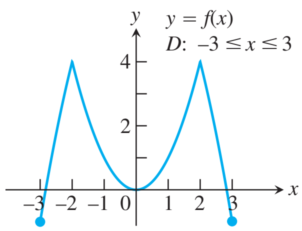
46.



47.



48.



Teoría y ejemplos

En los ejercicios 49 a 52,

a. Determine la derivada, $f'(x)$, de la función dada $y = f(x)$.

b. Grafique $y = f(x)$ y $y = f'(x)$, una al lado de la otra, usando un conjunto diferente de ejes y responda las siguientes preguntas.

c. ¿Para qué valores de x, si los hay, f' es positiva? ¿Es cero? ¿Es negativa?

d. ¿En qué intervalos de valores de x, si los hay, la función $y = f(x)$ es creciente cuando x aumenta? ¿Decrece cuando x aumenta? ¿Cómo se relaciona esto con lo que encontró en el inciso c)? (En la sección 4.3 trataremos esta relación).

49. $y = -x^2$ **50.** $y = -1/x$

51. $y = x^3/3$ **52.** $y = x^4/4$

53. Tangente a una parábola ¿La parábola $y = 2x^2 - 13x + 5$ tiene una tangente cuya pendiente es -1? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal tangente?

54. Tangente a $y = \sqrt{x}$ ¿Alguna tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ cruza el eje x en $x = -1$? Si es así, determine una ecuación para la recta y el punto de tangencia. Si no, ¿por qué no existe tal tangente?

55. Derivada de $-f$ Se sabe que una función $f(x)$ es derivable en $x = x_0$. ¿Qué le dice esto acerca de la derivabilidad de la función $-f$ en $x = x_0$? Justifique su respuesta.

56. Derivada de múltiplos Se sabe que una función $g(t)$ es derivable en $t = 7$. ¿Qué le dice esto acerca de la derivabilidad de la función $3g$ en $t = 7$? Justifique su respuesta.

57. Límite de un cociente Suponga que las funciones $g(t)$ y $h(t)$ están definidas para todos los valores de t y $g(0) = h(0) = 0$. ¿Puede existir $\lim_{t\to 0}(g(t))/(h(t))$? Si existe, ¿debe ser igual a cero? Justifique su respuesta.

58. a. Sea $f(x)$ una función que satisface $|f(x)| \le x^2$ para $-1 \le x \le 1$. Demuestre que f es derivable en $x = 0$ y determine $f'(0)$.

b. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es derivable en $x = 0$ y determine $f'(0)$.

T **59.** Grafique $y = 1/(2\sqrt{x})$ en una ventana que tenga $0 \le x \le 2$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.1$. Luego intente con $h = -1, -0.5, -0.1$. Explique lo que ocurre.

T **60.** Grafique $y = 3x^2$ en una ventana que tenga $-2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

para $h = 2, 1, 0.2$. Luego intente con $h = -2, -1, -0.2$. Explique lo que ocurre.

61. Derivada de $y = |x|$ Grafique la derivada de $f(x) = |x|$. Luego grafique $y = (|x| - 0)/(x - 0) = |x|/x$. ¿Qué concluye?

T **62. Función de Weierstrass continua, pero no derivable en punto alguno** La suma de los primeros ocho términos de la función de Weierstrass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n \cos(9^n \pi x)$ es

$$\begin{aligned} g(x) = {} & \cos(\pi x) + (2/3)^1 \cos(9\pi x) + (2/3)^2 \cos(9^2 \pi x) \\ & + (2/3)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + (2/3)^7 \cos(9^7 \pi x). \end{aligned}$$

Grafique esta suma. Haga varios acercamientos. ¿Qué tanto "brinca" la gráfica? Especifique un intervalo en la pantalla en la que la gráfica mostrada sea suave.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos para las funciones de los ejercicios 63 a 68.

a. Grafique $y = f(x)$ para ver el comportamiento global de la función.

b. Defina el cociente de diferencias q en un punto general x, con tamaño de paso general h.

c. Tome el límite cuando $h \to 0$. ¿Qué fórmula se obtiene?

d. Sustituya el valor $x = x_0$ y trace la función $y = f(x)$ junto con su recta tangente en ese punto.

e. Sustituya varios valores para x, tanto mayores como menores a x_0, en la fórmula obtenida en el inciso (c). ¿Los números concuerdan con su figura?

f. Grafique la fórmula obtenida en el inciso (c). ¿Qué significa el hecho de que sus valores sean negativos? ¿Qué significa el hecho de que sean cero? ¿Qué significa el hecho de que sean positivos? ¿Concuerda esto con su gráfica del inciso (a)? Justifique sus respuestas.

63. $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

64. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad x_0 = 1$

65. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 2$

66. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}, \quad x_0 = -1$

67. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad x_0 = \pi/2$

68. $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \pi/4$

3.3 Reglas de derivación

Esta sección presenta varias reglas que nos permiten derivar funciones constantes, funciones potencia, polinomios, funciones racionales y diversas combinaciones de éstas, de manera simple y directa, sin tener que tomar límites cada vez.

Potencias, múltiplos, sumas y diferencias

Una regla sencilla de derivación es que la derivada de toda función constante es cero.

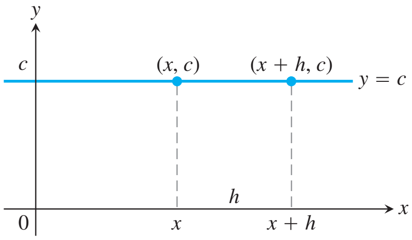


FIGURA 3.9 La regla $(d/dx)(c) = 0$ es otra forma de decir que los valores de funciones constantes nunca se modifican y que la pendiente de una recta horizontal es cero en todo punto.

Derivada de una función constante

Si f tiene el valor constante $f(x) = c$, entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Prueba Aplicamos la definición de la derivada de $f(x) = c$, la función cuyos valores de salida tienen el valor constante c (figura 3.9). En cada valor de x, encontramos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

De la sección 3.1, sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2}.$$

Con base en el ejemplo 2 de la última sección, también sabemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Estos dos ejemplos ilustran una regla general para derivar una potencia x^n. Primero demostraremos la regla cuando n es un entero positivo.

Regla de la potencia para enteros positivos:

Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Richard Courant (1888–1972)

Demostración de la regla para potencias enteras positivas La fórmula

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

puede verificarse si se hace la multiplicación del lado derecho. Luego, de acuerdo con la fórmula alternativa para la definición de la derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z\to x} \frac{z^n - x^n}{z - x} \\ &= \lim_{z\to x}(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \qquad n \text{ términos} \\ &= nx^{n-1}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

En realidad, la regla de la potencia es válida para todos los números reales n. Hemos visto ejemplos para potencias que son, en un caso, un entero negativo y, en otro, una fracción; pero n también podría ser un número irracional. Para aplicar la regla de la potencia, restamos 1 del exponente original n y multiplicamos el resultado por n. Aquí iniciamos la versión general de la regla, pero nos ocuparemos de su demostración en el capítulo 7.

Regla de la potencia (versión general)
Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},$$

para toda x donde las potencias x^n y x^{n-1} estén definidas.

EJEMPLO 1 Derive las siguientes potencias de x.

(a) x^3 **(b)** $x^{2/3}$ **(c)** $x^{\sqrt{2}}$ **(d)** $\frac{1}{x^4}$ **(e)** $x^{-4/3}$ **(f)** $\sqrt{x^{2+\pi}}$

Solución

(a) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$ **(b)** $\frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

(c) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ **(d)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-4}) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

(e) $\frac{d}{dx}(x^{-4/3}) = -\frac{4}{3}x^{-(4/3)-1} = -\frac{4}{3}x^{-7/3}$

(f) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{2+\pi}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1+(\pi/2)}\right) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x^{1+(\pi/2)-1} = \frac{1}{2}(2 + \pi)\sqrt{x^{\pi}}$ ■

La siguiente regla dice que cuando una función derivable se multiplica por una constante, su derivada se multiplica por la misma constante.

Regla de la derivada de un múltiplo constante
Si u es una función derivable de x, y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}.$$

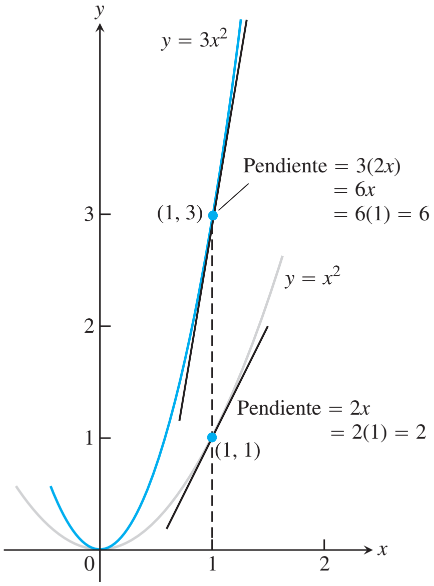


FIGURA 3.10 Las gráficas de $y = x^2$ y $y = 3x^2$. Si se triplica la coordenada y, se triplica la pendiente (ejemplo 2).

En particular, si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}.$$

Prueba

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} && \text{Definición de derivada con } f(x) = cu(x)\\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} && \text{Propiedad del límite del múltiplo constante}\\
&= c\frac{du}{dx} && u \text{ es derivable}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2

(a) La fórmula de la derivada

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$$

indica que si cambiamos el tamaño de la gráfica de $y = x^2$ mediante la multiplicación de cada coordenada y por 3, entonces multiplicamos la pendiente en cada punto por 3 (figura 3.10).

(b) Negativo de una función

La derivada del negativo de una función derivable u es el negativo de la derivada de la función. La regla del múltiplo constante con $c = -1$ da

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{d}{dx}(u) = -\frac{du}{dx}.$$ ■

Notación de funciones mediante u y v
Cuando necesitamos una fórmula de derivación, las funciones con las que trabajamos muy probablemente se denotarán con letras como f y g. No es adecuado utilizar estas mismas letras cuando se establecen las reglas generales de derivación, así que utilizamos letras como u y v, que muy probablemente no se habrán empleado.

La siguiente regla dice que la derivada de la suma de dos funciones derivables es la suma de sus derivadas.

Regla de la derivada de una suma

Si u y v son funciones derivables de x, entonces su suma $u + y$ es derivable en cada punto donde tanto u como v son derivables. En tales puntos,

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Por ejemplo, si $y = x^4 + 12x$, entonces y es la suma de $u(x) = x^4$ y $v(x) = 12x$. Así, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12.$$

Prueba Aplicamos la definición de la derivada a $f(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$ ■

Si se combina la regla de la suma con la regla del múltiplo constante, se obtiene la regla de la diferencia, la cual dice que la derivada de una diferencia de funciones derivables es la diferencia de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

La regla de la suma también se extiende a sumas finitas de más de dos funciones. Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ son derivables en x, entonces también lo es $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ y

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}.$$

Por ejemplo, para ver que la regla se cumple para las tres funciones, calculamos

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{d}{dx}((u_1 + u_2) + u_3) = \frac{d}{dx}(u_1 + u_2) + \frac{du_3}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx}.$$

En el apéndice 2 se presenta una demostración mediante inducción matemática para cualquier número finito de términos.

EJEMPLO 3 Determine la derivada del polinomio $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1) && \text{Reglas de la suma y de la diferencia.}\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0 = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$ ■

Podemos derivar cualquier polinomio, término a término, en la forma en que derivamos el polinomio del ejemplo 3. Todos los polinomios son derivables en todos los valores de x.

EJEMPLO 4 ¿La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene alguna tangente horizontal? Si es así, ¿en dónde?

Solución Las tangentes horizontales, si las hay, aparecen donde la pendiente dy/dx es cero. Tenemos

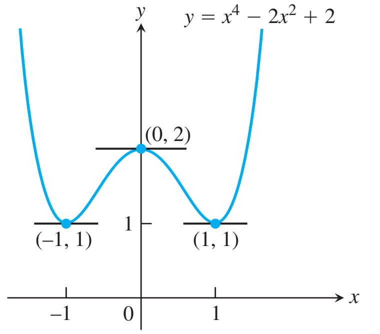


FIGURA 3.11 La curva en el ejemplo 4 y sus tangentes horizontales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x.$$

Ahora resolvemos la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = 0$ para x:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1. \end{aligned}$$

La curva $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tiene tangentes horizontales en $x = 0$, 1 y -1. Los puntos correspondientes en la curva son (0, 2), (1, 1) y $(-1, 1)$. Véase la figura 3.11. En el capítulo 4 veremos que determinar los valores de x, donde la derivada de una función es igual a cero, es un procedimiento útil e importante. ■

Productos y cocientes

Mientras que la derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas, la derivada del producto de dos funciones no es el producto de sus derivadas. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \qquad \text{mientras que} \qquad \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(x) = 1 \cdot 1 = 1.$$

La derivada de un producto de dos funciones es la suma de dos productos, como se explica a continuación.

Regla de la derivada de un producto

Si u y v son derivables en x, entonces también lo es su producto uv, y

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

La derivada del producto uv es u por la derivada de v más v por la derivada de u. En notación prima, $(uv)' = uv' + vu'$. En notación de funciones,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

EJEMPLO 5 Determine la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$.

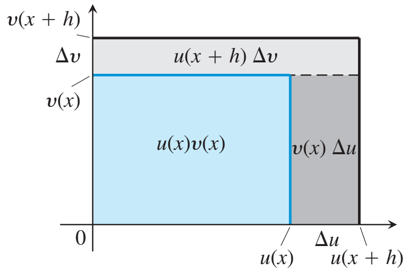
Solución

(a) De acuerdo con la regla del producto, con $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 3$, determinamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[(x^2 + 1)(x^3 + 3)\right] &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

Ilustración de la regla del producto

Suponga que $u(x)$ y $v(x)$ son positivas y aumentan cuando x aumenta, y $h > 0$.



Por lo tanto, el cambio en el producto uv es la diferencia de las áreas de los "cuadrados" mayor y menor; esta diferencia es la suma de los rectángulos sombreados en color gris claro: uno en la parte superior y otro en el lado derecho. Esto es,

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)\\ &= u(x+h)\Delta v + v(x)\Delta u.\end{aligned}$$

Al dividir entre h se obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x)\frac{\Delta u}{h}.$$

El límite cuando $h \to 0^+$ da la regla del producto.

(b) Este producto particular puede derivarse también (quizá mejor) si se multiplica la expresión original para y y se deriva el polinomio resultante:

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3\\ \frac{dy}{dx} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x.\end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro primer cálculo. ■

Demostración de la regla de la derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

Para cambiar esta fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de u y v, en el numerador restamos y sumamos $u(x+h)v(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.\end{aligned}$$

Cuando h se aproxima a cero, $u(x+h)$ tiende a $u(x)$, ya que u, al ser derivable en x, es continua en x. Las dos fracciones tienden a los valores de dv/dx en x y a du/dx en x. En resumen,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$ ■

La derivada del cociente de dos funciones se da mediante la regla del cociente.

Regla de la derivada de un cociente

Si u y v son derivables en x y si $v(x) \neq 0$, entonces el cociente u/v es derivable en x y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

En notación de funciones,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

EJEMPLO 6 Determine la derivada de $y = \dfrac{t^2-1}{t^3+1}$.

Solución Aplicamos la regla del cociente con $u = t^2 - 1$ y $v = t^3 + 1$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{(t^3+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}\\ &= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(t^3+1)^2}\\ &= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(t^3+1)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

■

Demostración de la regla de la derivada de un cociente

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

Para cambiar la última fracción en una equivalente que contenga los cocientes de diferencias para las derivadas de u y v, en el numerador restamos y sumamos $v(x)u(x)$. De esta forma, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v(x)\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}.$$

Si tomamos los límites en el numerador y en el denominador, obtendremos ahora la regla del cociente. ■

Al resolver un problema de derivación, la elección de cuáles reglas utilizar marcará una diferencia en la cantidad de trabajo que usted realice. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 7 En vez de utilizar la regla del cociente para determinar la derivada de

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4},$$

desarrolle el numerador y divida entre x^4:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}.$$

Luego utilice las reglas de la suma y de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}.$$ ■

Derivadas de segundo orden y de órdenes superiores

Si $y = f(x)$ es una función derivable, entonces su derivada $f'(x)$ también es una función. Si f' también es derivable, entonces podemos derivar a f' para obtener una nueva función de x denotada mediante f''. Así, $f'' = (f')'$. La función f'' se denomina **segunda derivada** de f, ya que es la derivada de la primera derivada. Se escribe de varias formas:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^{\,2} f(x).$$

El símbolo D^2 significa que la operación de derivar se realiza dos veces.

Si $y = x^6$, entonces $y' = 6x^5$ y tenemos

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4.$$

Así, $D^2(x^6) = 30x^4$.

Cómo leer los símbolos para las derivadas

y' "y prima"

y'' "y biprima o y doble prima"

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ "d cuadrada y dx cuadrada"

y''' "y triple prima"

$y^{(n)}$ "y súper n" o "enésima derivada de y"

$\dfrac{d^ny}{dx^n}$ "d a la n de y entre dx a la n"

D^n "D a la n" o "derivada de orden n"

Si y'' es derivable, su derivada, $y''' = dy''/dx = d^3y/dx^3$, es la **tercera derivada** de y con respecto a x. Los nombres continúan como usted imaginará, con

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

denotando la ***n*-ésima derivada** de y con respecto a x para cualquier entero positivo n.

Podemos interpretar la segunda derivada como la tasa de cambio de la pendiente de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en cada punto. En el siguiente capítulo verá que la segunda derivada revela si la gráfica se dobla hacia arriba o hacia abajo de la recta tangente conforme se aleja del punto de tangencia. En la siguiente sección interpretaremos tanto la segunda como la tercera derivadas en términos de movimiento a lo largo de una línea recta.

EJEMPLO 8 Las primeras cuatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$ son

Primera derivada: $y' = 3x^2 - 6x$

Segunda derivada: $y'' = 6x - 6$

Tercera derivada: $y''' = 6$

Cuarta derivada: $y^{(4)} = 0.$

La función tiene derivadas de todos los órdenes; la quinta derivada y las superiores son todas iguales a cero. ■

Ejercicios 3.3

Cálculo de derivadas

En los ejercicios 1 a 12 determine la primera y la segunda derivadas.

1. $y = -x^2 + 3$
2. $y = x^2 + x + 8$
3. $s = 5t^3 - 3t^5$
4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$
5. $y = \dfrac{4x^3}{3} - x$
6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$
7. $w = 3z^{-2} - \dfrac{1}{z}$
8. $s = -2t^{-1} + \dfrac{4}{t^2}$
9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$
11. $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$
12. $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

En los ejercicios 13 a 16 determine y' **(a)** aplicando la regla del producto y **(b)** multiplicando los factores para producir una suma de términos que resulte más fácil de derivar.

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
14. $y = (2x + 3)(5x^2 - 4x)$
15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$
16. $y = (1 + x^2)(x^{3/4} - x^{-3})$

Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 17 a 28.

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$
18. $z = \dfrac{4 - 3x}{3x^2 + x}$
19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0.5}$
20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$
21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$
23. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$
24. $u = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$
25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$
26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$
27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$
28. $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

Determine las derivadas de todos los órdenes de las funciones en los ejercicios 29 a 32.

29. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$
30. $y = \dfrac{x^5}{120}$
31. $y = (x - 1)(x^2 + 3x - 5)$
32. $y = (4x^3 + 3x)(2 - x)$

Determine la primera y la segunda derivadas de las funciones en los ejercicios 33 a 40.

33. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$
34. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$
35. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$
36. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$
37. $w = \left(\dfrac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$
38. $w = (z + 1)(z - 1)(z^2 + 1)$
39. $p = \left(\dfrac{q^2 + 3}{12q}\right)\left(\dfrac{q^4 - 1}{q^3}\right)$
40. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$
41. Suponga que u y v son funciones de x que son derivables en $x = 0$ y que

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2.$$

Determine los valores de las siguientes derivadas en $x = 0$

a. $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ **c.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **d.** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

42. Suponga que u y v son funciones derivables de x y que

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1.$$

Determine los valores de las derivadas siguientes en $x = 1$.

a. $\dfrac{d}{dx}(uv)$ **b.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ **c.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ **d.** $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

Pendientes y tangentes

43. a. Normal a una curva Determine una ecuación para la recta perpendicular a la tangente a la curva $y = x^3 - 4x + 1$ en el punto $(2, 1)$.

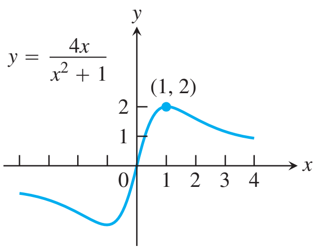
b. Pendiente mínima ¿Cuál es la menor pendiente en la curva? ¿En qué punto de la curva tiene dicha pendiente?

c. Tangentes con una pendiente específica Determine ecuaciones para las tangentes a la curva en los puntos donde la pendiente de la curva es 8.

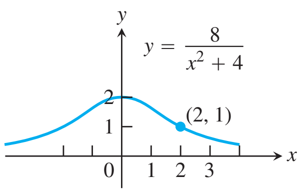
44. a. Tangentes horizontales Determine ecuaciones para las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x - 2$. También determine ecuaciones para las rectas que son perpendiculares a estas tangentes en los puntos de tangencia.

b. Pendiente mínima ¿Cuál es la menor pendiente en la curva? ¿En qué punto de la curva se tiene esta pendiente? Determine una ecuación para la recta que es perpendicular a la tangente de la curva en este punto.

45. Determine las tangentes a la curva llamada *serpentina de Newton* (que se grafica aquí) en el origen y en el punto $(1, 2)$.



46. Determine la tangente a la curva llamada *bruja de Agnesi* (graficada a continuación) en el punto $(2, 1)$.



47. Tangente cuadrática a la función identidad La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Determine a, b y c.

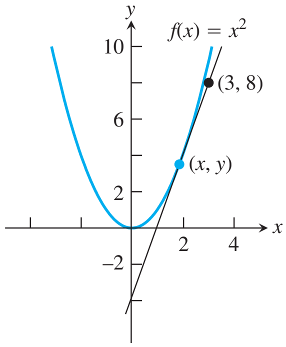
48. Cuadráticas que tienen una tangente común Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = cx - x^2$ tienen una recta tangente común en el punto $(1, 0)$. Determine a, b y c.

49. Determine todos los puntos (x, y) en la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 4x$ con rectas tangentes paralelas a la recta $y = 8x + 5$.

50. Determine todos los puntos (x, y) en la gráfica de $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ con rectas tangentes paralelas a la recta $8x - 2y = 1$.

51. Determine todos los puntos (x, y) en la gráfica de $y = x/(x - 2)$ con rectas tangentes perpendiculares a la recta $y = 2x + 3$.

52. Determine todos los puntos (x, y) en la gráfica de $f(x) = x^2$ con rectas tangentes que pasen por el punto $(3, 8)$.



53. a. Determine una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - x$ en el punto $(-1, 0)$.

T **b.** Grafique juntas la curva y la recta tangente. La tangente interseca a la curva en otro punto. Utilice las funciones Zoom y Trace para estimar las coordenadas del punto.

T **c.** Confirme las estimaciones de las coordenadas del segundo punto de intersección; para ello, resuelva de manera simultánea las ecuaciones de la curva y de la tangente. (Utilice la tecla Solver = Resolver).

54. a. Determine una ecuación para la recta que es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ en el origen.

T **b.** Grafique juntas la curva y la recta tangente. La tangente interseca a la curva en otro punto. Utilice las funciones Zoom y Trace para estimar las coordenadas del punto.

T **c.** Confirme las estimaciones de las coordenadas del segundo punto de intersección; para ello, resuelva de manera simultánea las ecuaciones de la curva y de la tangente. (Utilice la tecla Solver = Resolver).

Teoría y ejemplos

Para los ejercicios 55 y 56, evalúe cada límite convirtiendo primero cada uno a una derivada evaluada en un valor particular de x.

55. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$ **56.** $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^{2/9} - 1}{x + 1}$

57. Determine el valor de a que hace que la siguiente función sea derivable para todo valor de x.

$$g(x) = \begin{cases} ax, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

58. Determine los valores de a y b que hacen que la siguiente función sea derivable para todo valor de x.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > -1 \\ bx^2 - 3, & x \leq -1 \end{cases}$$

59. El polinomio general de grado n tiene la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$. Determine $P'(x)$.

60. La reacción del cuerpo a un medicamento La reacción del cuerpo a una dosis de medicamento, en ocasiones, puede representarse mediante una ecuación de la forma

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right),$$

donde C es una constante positiva y M es la cantidad de medicamento que absorbe la sangre. Si la reacción es un cambio en la presión sanguínea, R se mide en milímetros de mercurio. Si la reacción es un cambio en la temperatura, R se mide en grados, etcétera.

Determine dR/dM. Esta derivada, como una función de M, se denomina sensibilidad del cuerpo al medicamento. En la sección 4.5 veremos cómo determinar la cantidad de medicamento a la cual el cuerpo es más sensible.

61. Suponga que la función v, en la regla de la derivada de un producto, tiene un valor constante c. En este caso, ¿qué dice la regla del producto? ¿Qué dice de ello la regla de la derivada del múltiplo constante?

62. **Regla del recíproco**

a. La regla del recíproco indica que en cualquier punto donde la función $v(x)$ es derivable y diferente de cero,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Demuestre que la regla del recíproco es un caso especial de la regla de la derivada de un cociente.

b. Demuestre que juntas, la regla del recíproco y la regla del producto, implican la regla de la derivada de un cociente.

63. **Generalización de la regla del producto** La regla de la derivada de un producto da la fórmula

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

para la derivada del producto de dos funciones derivables de x.

a. ¿Cuál es la fórmula análoga para la derivada del producto uvw de *tres* funciones diferenciables de x?

b. ¿Cuál es la fórmula para la derivada del producto $u_1u_2u_3u_4$ de *cuatro* funciones diferenciables de x?

c. ¿Cuál es la fórmula para la derivada de un producto $u_1u_2u_3 \ldots u_n$ de un número finito n de funciones derivables de x?

64. **Regla de la potencia para enteros negativos** Utilice la regla de la derivada de un cociente para probar la regla de la potencia para enteros negativos, esto es,

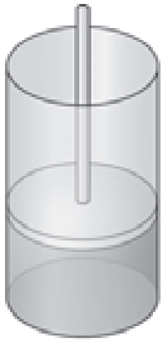
$$\frac{d}{dx}(x^{-m}) = -mx^{-m-1}$$

donde m es un entero positivo.

65. **Presión en un cilindro** Si en un cilindro se mantiene gas a una temperatura constante T, la presión P está relacionada con el volumen V mediante una fórmula de la forma

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

en la que a, b, n y R son constantes. Determine dP/dV. (Véase la siguiente figura).



66. **La mejor cantidad para hacer un pedido** Una fórmula para administración de un inventario dice que el costo promedio semanal de encargo, pago y manejo de la mercancía es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad que usted ordena o encarga cuando quedan pocos artículos (zapatos, escobas o cualquier otro producto), k es el costo que implica hacer el pedido (un costo invariable, sin importar con qué frecuencia haga los pedidos), c es el costo de un artículo (constante), m es el número de artículos vendidos cada semana (constante) y h es el costo semanal de manejo por artículo (una constante que toma en cuenta cuestiones como espacio, cargos de servicio, seguros y vigilancia). Determine dA/dq y d^2A/dq^2.

3.4 La derivada como una tasa de cambio

En la sección 2.1 presentamos las tasas de cambio promedio e instantánea. En esta sección estudiaremos más aplicaciones en las cuales las derivadas modelan las tasas a las cuales las situaciones cambian. Es natural pensar en una cantidad que cambia con respecto al tiempo, pero otras variables pueden tratarse de la misma manera. Por ejemplo, un economista necesitaría estudiar cómo el costo de producción del acero varía con el número de toneladas producidas, o un ingeniero necesita conocer cómo la electricidad producida por un generador varía con su temperatura.

Tasas de cambio instantáneas

Si interpretamos el cociente de diferencias $(f(x + h) - f(x))/h$ como la tasa promedio de cambio en f en el intervalo de x a $x + h$, podemos interpretar su límite cuando $h \to 0$ como la tasa a la cual cambia f en el punto x.

DEFINICIÓN La **tasa de cambio instantánea** de f con respecto a x en x_0 es la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Así, las tasas instantáneas son límites de tasas promedio.

El uso de la palabra *instantánea* es convencional, aunque x no represente tiempo. Sin embargo, con frecuencia se omite la palabra. Cuando decimos *tasa de cambio*, queremos indicar *tasa instantánea de cambio*.

EJEMPLO 1 El área A de un círculo está relacionada con su diámetro mediante la ecuación

$$A = \frac{\pi}{4} D^2.$$

¿Qué tan rápido cambia el área con respecto al diámetro cuando el diámetro es de 10 m?

Solución La tasa de cambio del área con respecto al diámetro es

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}.$$

Cuando $D = 10$ m, el área cambia con respecto al diámetro a una tasa de $(\pi/2)10 = 5\pi$ m^2/m ≈ 15.71 m^2/m. ■

Movimiento a lo largo de una recta: Desplazamiento, velocidad, rapidez, aceleración y sacudida

Suponga que un objeto se desplaza a lo largo de una recta coordenada (un eje s), por lo regular horizontal o vertical, de manera que conocemos su posición s en esa recta como una función del tiempo t:

$$s = f(t).$$

El **desplazamiento** del objeto durante el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ (figura 3.12) es

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

y la **velocidad promedio** del objeto durante el intervalo de tiempo es

$$v_{prom} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo de recorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

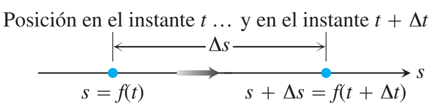


FIGURA 3.12 Las posiciones de un cuerpo que se desplaza a lo largo de la recta coordenada en el instante t y un poco después en el instante $t + \Delta t$. Aquí la recta coordenada es horizontal.

Para determinar la velocidad del cuerpo en el instante exacto t, tomamos el límite de la velocidad promedio durante el intervalo de t a $t + \Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Este límite es la derivada de f con respecto a t.

DEFINICIÓN La **velocidad (velocidad instantánea)** es la derivada de la posición con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el instante t es $s = f(t)$, entonces la velocidad del cuerpo en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Además de decir qué tan rápido se desplaza un objeto a lo largo de la recta horizontal en la figura 3.12, su velocidad indica la dirección del movimiento. Cuando el objeto se mueve hacia delante (s es creciente), la velocidad es positiva; cuando el objeto se mueve hacia atrás (s es decreciente), la velocidad es negativa. Si la recta de coordenadas es vertical, el objeto se mueve hacia arriba en el caso de velocidad positiva y hacia abajo en el caso de velocidad negativa (figura 3.13).

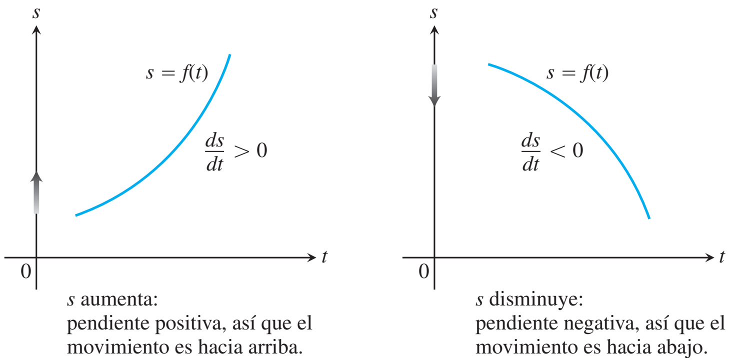


FIGURA 3.13 Para el desplazamiento $s = f(t)$ a lo largo de una línea recta (el eje vertical), $v = ds/dt$ es positiva cuando s aumenta, y negativa cuando s disminuye. Las curvas en naranja representan la posición a lo largo de la recta durante el tiempo; no describen la trayectoria del movimiento, el cual es a lo largo del eje s.

Si conducimos a la casa de un amigo y regresamos, digamos a 30 mph, el velocímetro indicará 30 durante todo el camino, no -30 en el trayecto de regreso, aunque nuestra distancia a casa disminuya. El velocímetro siempre indicará la *rapidez*, que es el valor absoluto de la velocidad. La rapidez mide la tasa de avance, sin importar la dirección.

DEFINICIÓN La **rapidez** es el valor absoluto de la velocidad,

$$\text{Rapidez} = |v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

EJEMPLO 2 La figura 3.14 presenta la gráfica de la velocidad $v = f'(t)$ de una partícula que se mueve a lo largo de una recta horizontal (en vez de mostrar una función de posición $s = f(t)$, tal como en la figura 3.13). En la gráfica de la función velocidad, no es la pendiente de la curva lo que nos indica si la partícula se mueve hacia delante o hacia atrás a lo largo de la recta (que no se muestra en la figura), sino el signo de la velocidad. Al observar la figura 3.14, nos damos cuenta de que la partícula se mueve hacia delante durante los primeros 3 segundos (cuando la velocidad es positiva), se mueve de regreso durante los siguientes dos segundos (la velocidad es negativa), se mantiene sin movimiento durante 1 segundo, y luego se mueve de nuevo hacia delante. La partícula acelera cuando su velocidad positiva aumenta durante el primer segundo, se mueve a una velocidad constante durante el siguiente segundo y luego se frena cuando la velocidad disminuye hacia cero durante el tercer segundo. Se detiene durante un instante en $t = 3$ segundos (cuando la velocidad es cero) y cambia de dirección cuando la velocidad empieza a ser negativa. Ahora la partícula se mueve hacia atrás y aumenta su rapidez hasta $t = 4$ segundos, cuando alcanza su mayor rapidez durante su movimiento de regreso. Al continuar su movimiento de regreso en el tiempo $t = 4$, la partícula otra vez inicia su frenado hasta que finalmente se detiene en $t = 5$ segundos (cuando la velocidad de nuevo es cero). La partícula ahora permanece sin movimiento durante un segundo completo y luego se mueve otra vez hacia adelante en $t = 6$ segundos, acelera durante el último segundo del movimiento hacia delante, como se indica en la gráfica de la velocidad. ■

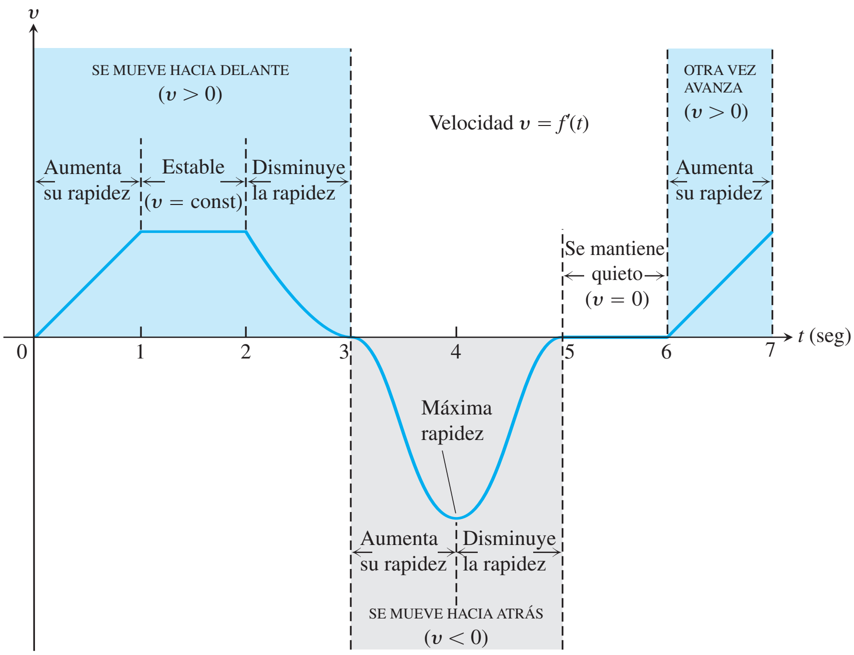


FIGURA 3.14 La gráfica de la velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta horizontal, analizada en el ejemplo 2.

Biografía histórica

Bernard Bolzano
(1781–1848)

La razón o tasa a la cual el cuerpo cambia su velocidad es la aceleración del cuerpo. Ésta mide qué tan rápido el cuerpo eleva o disminuye su velocidad.

Un cambio repentino en la aceleración se denomina sacudida. Cuando un paseo en automóvil o autobús tiene muchas sacudidas, no es que la aceleración sea necesariamente elevada, sino que los cambios en la aceleración son abruptos.

DEFINICIONES La **aceleración** es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si la posición de un cuerpo en el instante t es $s = f(t)$, entonces la aceleración del cuerpo en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

La **sacudida** es la derivada de la aceleración con respecto al tiempo:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Cerca de la superficie de la Tierra todos los cuerpos caen con la misma constante de aceleración. Los experimentos de Galileo en torno a la caída libre (véase la sección 2.1) conducen a la ecuación

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

donde s es la distancia que cae el objeto y g es la aceleración debida a la gravedad terrestre. Esta ecuación se cumple en el vacío, donde no existe la resistencia del aire, y modela bastante bien la caída de objetos densos y pesados, tales como piedras o herramientas de acero, durante los primeros segundos de su caída, antes de que los efectos de la resistencia del aire sean significativos.

El valor de g en la ecuación $s = (1/2)gt^2$ depende de las unidades utilizadas para medir t y s. Con t en segundos (la unidad usual), el valor de g determinado por la medida al nivel del mar es aproximadamente de 32 ft/seg^2 (pies por segundo al cuadrado), en medidas inglesas, y

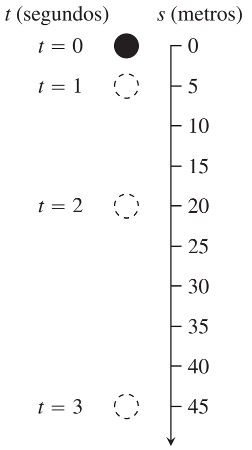


FIGURA 3.15 Una bola que cae a partir del reposo (ejemplo 3).

$g = 9.8$ m/seg^2 (metros por segundo al cuadrado) en unidades métricas. (Estas constantes gravitacionales dependen de la distancia al centro de masa de la Tierra; por ejemplo, son ligeramente menores en la cima del monte Everest).

La sacudida asociada con la aceleración constante debida a la gravedad ($g = 32$ ft/seg^2) es cero

$$j = \frac{d}{dt}(g) = 0.$$

Un objeto no experimenta sacudidas durante una caída libre.

EJEMPLO 3 La figura 3.15 muestra la caída libre de una bola pesada que se dejó caer desde el reposo en el instante $t = 0$ seg.

(a) ¿Cuántos metros caerá la bola durante los primeros 2 segundos?

(b) ¿Cuál es su velocidad, su rapidez y su aceleración cuando $t = 2$?

Solución

(a) La ecuación de caída libre, en el sistema métrico, es $s = 4.9t^2$. Durante los primeros 2 segundos, la bola cae

$$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6 \text{ m}.$$

(b) En cualquier instante t, la velocidad es la derivada de la posición:

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8t.$$

En $t = 2$, la velocidad es

$$v(2) = 19.6 \text{ m/seg}$$

en la dirección de descenso (s aumenta). La *rapidez* en $t = 2$ es

$$\text{rapidez} = |v(2)| = 19.6 \text{ m/seg}.$$

La *aceleración* en cualquier instante t es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9.8 \text{ m/seg}^2.$$

En $t = 2$, la aceleración es 9.8 m/seg^2. ■

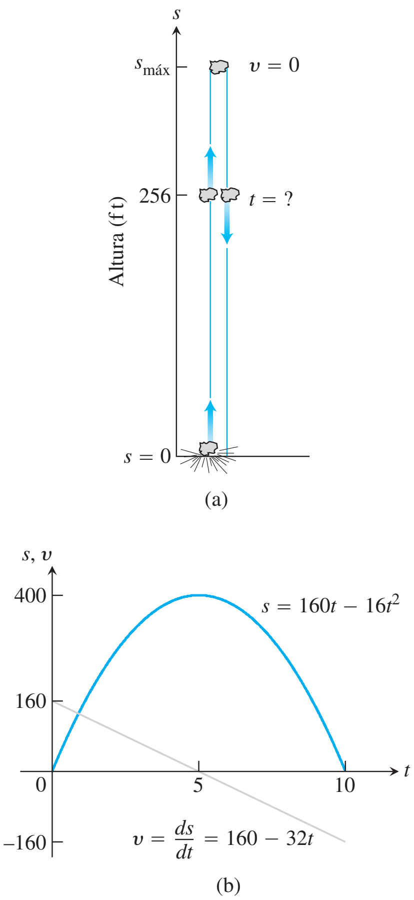


FIGURA 3.16 (a) La roca del ejemplo 4. (b) Las gráficas de s y v como funciones del tiempo; s es máximo cuando $v = ds/dt = 0$. La gráfica de s no es la trayectoria de la roca: es una gráfica de la altura contra el tiempo. La pendiente de la curva es la velocidad de la roca. En este caso se grafica como una línea recta.

EJEMPLO 4 Una explosión de dinamita lanza una roca directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 160 ft/segundo (alrededor de 109 mph) (figura 3.16a). Alcanza una altura de $s = 160t - 16t^2$ ft al cabo de t segundos.

(a) ¿Qué altura alcanza la roca?

(b) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la roca cuando la roca está 256 ft por arriba del nivel del suelo durante el ascenso? ¿Durante el descenso?

(c) ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier instante t durante su trayecto (después de la explosión)?

(d) ¿Cuándo choca la roca contra el suelo?

Solución

(a) En el sistema de coordenadas que hemos elegido, s mide la altura con respecto al suelo, así que la velocidad es positiva en el ascenso y negativa durante el descenso. El instante en el que la roca está en el punto más alto es aquél en el que la velocidad es cero. Para conocer la altura máxima, todo lo que necesitamos hacer es determinar cuándo $v = 0$ y evaluar s en ese instante.

En cualquier instante t durante el trayecto de la roca, su velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t \text{ ft/seg}.$$

La velocidad es cero cuando

$$160 - 32t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 5 \text{ seg}.$$

La altura de la roca en $t = 5$ seg es

$$s_{\text{máx}} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400 \text{ ft}.$$

Véase la figura 3.16b.

(b) Para determinar la velocidad de la roca a 256 ft, en el ascenso y luego en el descenso, primero determinamos los dos valores de t para los cuales:

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256.$$

Para resolver la ecuación, escribimos

$$\begin{aligned} 16t^2 - 160t + 256 &= 0 \\ 16(t^2 - 10t + 16) &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \\ t = 2 \text{ seg}, t &= 8 \text{ seg}. \end{aligned}$$

La roca está 256 ft por encima del suelo 2 segundos después de la explosión y nuevamente a los 8 segundos después de la explosión. Las velocidades de la roca en esos instantes son

$$\begin{aligned} v(2) &= 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96 \text{ ft/seg}. \\ v(8) &= 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96 \text{ ft/seg}. \end{aligned}$$

En ambos instantes, la velocidad de la roca es 96 ft/seg. Como $v(2) > 0$, la roca se desplaza hacia arriba (s aumenta) en $t = 2$ seg, se mueve hacia abajo (s disminuye) en $t = 8$, ya que $v(8) < 0$.

(c) En cualquier instante durante el trayecto que sigue a la explosión, la aceleración de la roca es constante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ ft/seg}^2.$$

La aceleración siempre es hacia abajo. Conforme la roca sube, se desacelera, y cuando cae, se acelera.

(d) La roca choca con el suelo en el tiempo positivo t, para el cual $s = 0$. La ecuación $160t - 16t^2 = 0$ se factoriza para obtener $16t(10 - t) = 0$, así que tiene soluciones $t = 0$ y $t = 10$. En $t = 0$, la explosión ocurrió y la roca sale lanzada hacia arriba. Regresa al suelo al cabo de 10 segundos. ■

Derivadas en economía

Los ingenieros utilizan los términos *velocidad* y *aceleración* para referirse a las derivadas de las funciones que describen el movimiento. También los economistas tienen un vocabulario especial para las tasas de cambio y las derivadas. Ellos las denominan *marginales*.

En una operación de fabricación, el *costo de producción* $c(x)$ es una función de x, el número de unidades producidas. El **costo marginal de producción** es la tasa de cambio del costo con respecto al nivel de producción, es decir, dc/dx.

Suponga que $c(x)$ representa los dólares necesarios para producir x toneladas de acero en una semana. Cuesta más producir $x + h$ toneladas por semana, y la diferencia de costos, dividida entre h, es el costo promedio de producir cada tonelada adicional:

$$\frac{c(x + h) - c(x)}{h} = \begin{array}{l}\text{costo promedio de cada una de las} \\ h \text{ toneladas adicionales de acero producidas}\end{array}$$

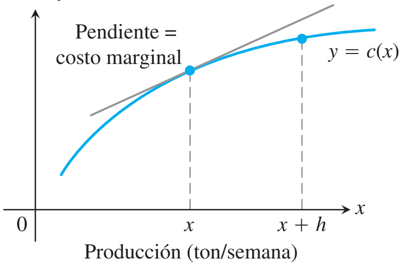


FIGURA 3.17 Producción semanal de acero: $c(x)$ es el costo de producir x toneladas por semana. El costo de producir h toneladas adicionales es $c(x + h) - c(x)$.

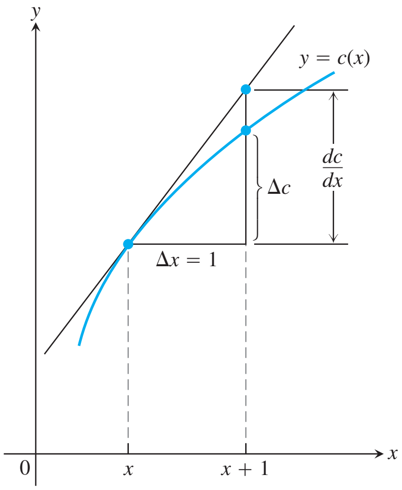


FIGURA 3.18 El costo marginal dc/dx es aproximadamente el costo extra Δc de producir $\Delta x = 1$ unidad adicional.

El límite de esta razón cuando $h \to 0$ es el *costo marginal* de producir más acero por semana cuando la producción semanal actual es de x toneladas (figura 3.17):

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{costo marginal de producción}.$$

En ocasiones el costo marginal de producción se define, de manera informal, como el costo extra de producir una unidad adicional:

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1},$$

que es aproximado por el valor de dc/dx en x. Esta aproximación es aceptable si la pendiente de la gráfica no cambia demasiado rápido cerca de x. Entonces el cociente de diferencias será cercano a su límite dc/dx, que es lo que sube en la recta tangente si $\Delta x = 1$ (figura 3.18). La aproximación funciona mejor para valores grandes de x.

Con frecuencia, los economistas representan la función de costo total mediante un polinomio cúbico

$$c(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

donde δ representa costos fijos tales como la renta, la calefacción, la capitalización del equipo y los costos de administración. Los otros términos representan *costos variables* tales como los costos de la materia prima, los impuestos y la mano de obra. Los costos fijos son independientes del número de unidades que se produzcan, mientras que los costos variables dependen de la cantidad producida. Por lo regular, un polinomio cúbico es adecuado para capturar el comportamiento del costo en un intervalo realista.

EJEMPLO 5 Suponga que cuesta

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

dólares producir x radiadores cuando se producen de 8 a 30 radiadores, y que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

da por resultado el ingreso, en dólares, de la venta de x radiadores. Suponga que usted tiene un taller que produce 10 radiadores diarios. Aproximadamente, ¿cuánto será el costo extra de producir un radiador más por día? ¿Cuál es el aumento estimado en los ingresos por la venta de 11 radiadores diarios?

Solución El costo de producir un radiador adicional por día, cuando se producen 10 radiadores es alrededor de $c'(10)$:

$$c'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

El costo adicional será de alrededor de \$195. El ingreso marginal es

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12.$$

La función de ingreso marginal estima el aumento en el ingreso que resultará de la venta de una unidad adicional. Si actualmente usted vende 10 radiadores diarios, puede esperar que su ingreso se incremente en aproximadamente

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = \$252$$

si aumenta las ventas a 11 radiadores por día. ■

EJEMPLO 6 Para comprender mejor el lenguaje de tasas marginales, considere la tasa marginal de impuestos. Si su tasa de impuestos marginal sobre la renta es del 28% y sus ingresos aumentan en \$1000, esperará pagar \$280 adicionales en impuestos. Esto no significa que paga el 28% de su ingreso total en impuestos. Sólo significa que en el nivel actual de ingresos I, la tasa de aumento de impuestos T con respecto al ingreso es $dT/dI = 0.28$. Usted pagará \$0.28 en impuestos por cada dólar adicional que gane. Por supuesto, si usted gana mucho más, puede caer en un nivel de impuestos más elevado y su tasa marginal aumentará. ■

Sensibilidad al cambio

Cuando un cambio pequeño en x produce un cambio grande en el valor de la función $f(x)$, decimos que la función es relativamente **sensible** a cambios en x. La derivada $f'(x)$ es una medida de esa sensibilidad.

EJEMPLO 7 Datos genéticos y sensibilidad al cambio

Al trabajar en su jardín con guisantes y otras plantas, el monje austriaco Gregor Johann Mendel (1822-1884) dio la primera explicación científica de la hibridación.

Sus cuidadosos registros mostraron que si p (un número entre 0 y 1) es la frecuencia del gen (dominante) de los guisantes con cáscara lisa, y $(1 - p)$ es la frecuencia del gen para cáscara rugosa en guisantes, entonces la proporción de guisantes de cáscara lisa en la siguiente generación será

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2.$$

La gráfica de y contra p, en la figura 3.19a, sugiere que el valor de y es más sensible a un cambio en p cuando p es pequeño que cuando p es grande. Este hecho se corrobora con la gráfica de la derivada en la figura 3.19b, que muestra que dy/dp es cercana a 2 cuando p es próxima a cero y cercana a 0 cuando p es próxima a 1.

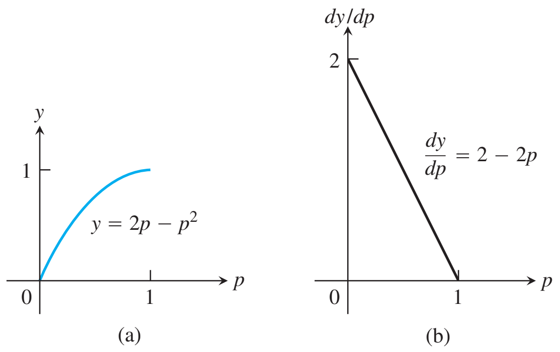


FIGURA 3.19 (a) La gráfica de $y = 2p - p^2$ describe la proporción de guisantes de cáscara suave en la siguiente generación. (b) La gráfica de dy/dp (ejemplo 7).

La implicación para genética es que la introducción de unos cuántos genes de cáscara lisa, en una población donde la frecuencia de guisantes con cáscara rugosa es grande, tendrá un efecto más drástico en las generaciones posteriores que un aumento similar cuando la población tiene una proporción grande de guisantes de cáscara lisa. ■

Ejercicios 3.4

Movimiento a lo largo de una recta coordenada

Los ejercicios 1 a 6 dan las posiciones $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada; x está en metros y t en segundos.

a. Determine el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio para el intervalo indicado.
b. Determine la rapidez y aceleración del cuerpo en los extremos del intervalo.
c. ¿Cuándo, si es que sucede, el cuerpo cambia de dirección durante el intervalo?

1. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 2$

2. $s = 6t - t^2, \quad 0 \le t \le 6$

3. $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$

4. $s = (t^4/4) - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 3$

5. $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

6. $s = \dfrac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

7. Movimiento de una partícula En el instante t, la posición de un cuerpo que se mueve en el eje s es $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ m.
a. Determine la aceleración del cuerpo en cada instante en que la velocidad es cero.
b. Determine la rapidez del cuerpo en cada instante en que la aceleración es cero.
c. Determine la distancia total recorrida por el cuerpo de $t = 0$ a $t = 2$.

8. Movimiento de una partícula En el instante $t \ge 0$, la velocidad de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje horizontal x es $v = t^2 - 4t + 3$.
a. Determine la aceleración del cuerpo en cada instante en que la velocidad es cero.
b. ¿Cuándo se desplaza el cuerpo hacia delante? ¿Cuándo se desplaza hacia atrás?
c. ¿Cuándo aumenta la velocidad del cuerpo? ¿Cuándo disminuye?

Aplicaciones de caída libre

9. Caída libre en Marte y en Júpiter Las ecuaciones para caída libre en las superficies de Marte y de Júpiter (s en metros, t en segundos) son $s = 1.86t^2$ para Marte y $s = 11.44t^2$ en Júpiter. Si en cada planeta se deja caer una roca desde el reposo, ¿cuánto tardará en alcanzar una velocidad de 27.8 m/s (alrededor de 100 km/h)?

10. Movimiento de un proyectil en la Luna Se lanza una roca verticalmente hacia arriba, desde la superficie lunar, a una velocidad de 24 m/seg (aproximadamente 86 km/h); la roca alcanza una altura de $s = 24t - 0.8t^2$ m en t segundos.
a. Determine la velocidad y la aceleración de la roca en el instante t. (En este caso, la aceleración es la aceleración debida a la gravedad lunar).
b. ¿Cuánto tarda la roca en llegar a su punto más alto?
c. ¿Qué altura alcanza la roca?
d. ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar la mitad de su altura máxima?
e. ¿Cuánto tiempo permanece la roca en el aire?

11. Determinación de g en un pequeño planeta sin aire Supongamos que exploradores en un pequeño planeta sin aire usaron una pistola de resorte para lanzar una bola verticalmente hacia arriba, desde la superficie, y con una velocidad de lanzamiento de 15 m/seg. Puesto que la aceleración debida a la gravedad en la superficie del planeta fue de g_s m/seg^2, los exploradores esperaban que la bola alcanzará una altura de $s = 15t - (1/2)g_s t^2$ m al cabo de t segundos. La bola alcanzó su altura máxima 20 segundos después de ser lanzada. ¿Cuál es el valor de g_s?

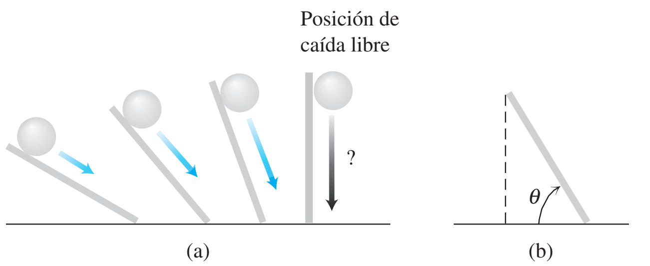
12. Bala rápida Una bala calibre 45 disparada directamente hacia arriba, desde la superficie de la Luna, alcanzará una altura de $s = 832t - 2.6t^2$ ft después de t segundos. En la Tierra, en ausencia de aire, su altura sería de $s = 832t - 16t^2$ ft después de t segundos. En cada caso, ¿cuánto tiempo estará en el aire la bala?

13. Caída libre desde la torre de Pisa Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañón desde la torre de Pisa, a 179 ft del nivel del suelo, la altura de la bala al cabo de t segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.
a. ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo t?
b. ¿Cuánto habría tardado la bala en golpear el suelo?
c. ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?

14. Fórmula de caída libre de Galileo Galileo desarrolló una fórmula para la velocidad de un cuerpo durante la caída libre al hacer rodar hacia abajo, desde el reposo, bolas sobre tablones inclinados. Cada vez inclinaba más los tablones y buscaba una fórmula límite que predijera el comportamiento de la bola cuando el tablón estuviera vertical y la bola cayera libremente; véase el inciso (a) de la siguiente figura. Encontró que, para cualquier ángulo dado del tablón, la velocidad de la bola t segundos en movimiento era un múltiplo constante de t. Esto es, la velocidad estaba dada por una fórmula del tipo $v = kt$. El valor de la constante k dependía de la inclinación del tablón.

En notación moderna —inciso (b) de la figura— con la distancia en metros y el tiempo en segundos, lo que Galileo determinó mediante experimentación fue que para cualquier ángulo dado θ la velocidad de la bola a t segundos de inicio del movimiento era

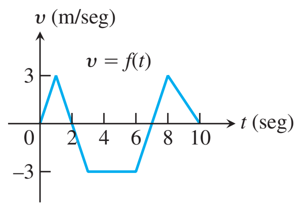
$$v = 9.8(\text{sen}\,\theta)t \text{ m/seg}.$$



a. ¿Cuál es la ecuación para la velocidad de la bola en caída libre?
b. Con base en su trabajo del inciso (a), ¿cuál es la aceleración constante que experimenta un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra?

Interpretación del movimiento a partir de gráficas

15. La siguiente figura muestra la velocidad $v = ds/dt = f(t)$(m/seg) de un cuerpo que se mueve a lo largo de una recta coordenada.

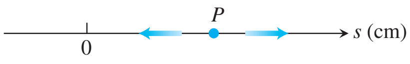


a. ¿Cuándo retrocede el objeto?
b. ¿Cuándo aproximadamente se mueve el objeto con rapidez constante?

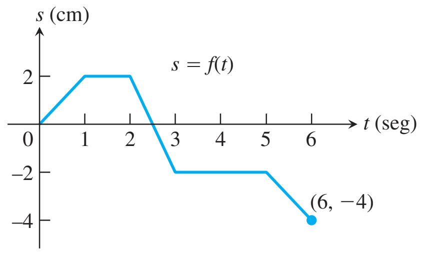
c. Grafique la rapidez del objeto para $0 \leq t \leq 10$.

d. Grafique la aceleración donde esté definida.

16. Una partícula P se mueve en la recta numérica que se ilustra en el inciso (a) de la siguiente figura. El inciso (b) ilustra la posición de P como una función del tiempo t.



(a)



(b)

a. ¿Cuándo se mueve P hacia la izquierda? ¿Cuándo hacia la derecha? ¿Cuándo está inmóvil?

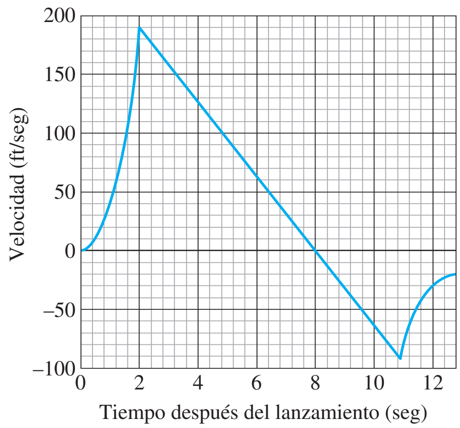
b. Grafique la velocidad y la rapidez de la partícula (donde estàn definidas).

17. Lanzamiento de un cohete Cuando se lanza el modelo de un cohete, el combustible se quema durante unos segundos, con lo que el cohete acelera hacia arriba. Cuando se consume el combustible, el cohete sigue subiendo durante algún tiempo y luego empieza a bajar. En ese momento, una pequeña carga explosiva abre un paracaídas que frena la caída del cohete para evitar que éste se destruya al aterrizar.

La siguiente figura muestra la información de la velocidad del vuelo del cohete. Utilice la información para responder lo siguiente.

a. Cuando el motor se detuvo, ¿qué tan rápido ascendía el cohete?

b. ¿Durante cuántos segundos se quemó el combustible?



c. ¿Cuándo alcanzó el cohete el punto más alto? En ese momento, ¿cuál era su velocidad?

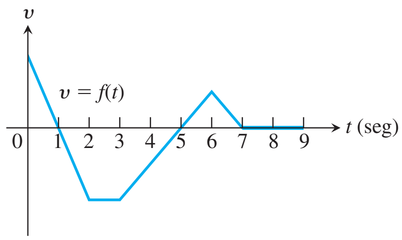
d. ¿Cuándo se abrió el paracaídas? En ese momento, ¿qué tan rápido descendía el cohete?

e. ¿Cuánto tiempo descendió el cohete antes de que el paracaídas se abriera?

f. ¿Cuándo fue mayor la aceleración del cohete?

g. ¿Cuándo fue constante la aceleración del cohete? En ese momento, ¿cuál fue su valor (al entero más cercano)?

18. La siguiente figura representa la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se mueve en una recta horizontal coordenada.



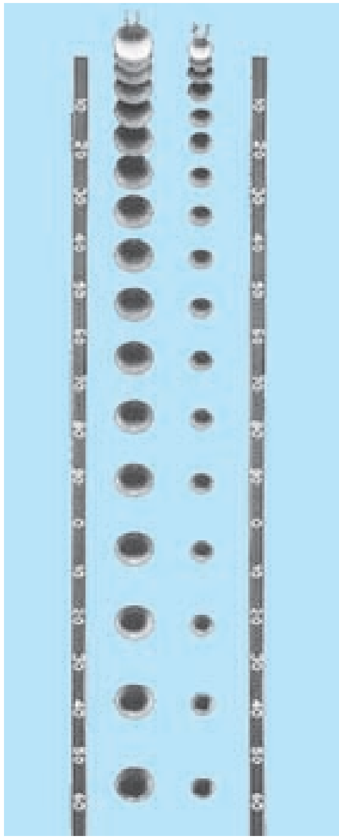
a. ¿Cuándo se mueve la partícula hacia delante? ¿Cuándo hacia atrás? ¿Cuándo aumenta su rapidez? ¿Cuándo se detiene?

b. ¿Cuándo es positiva la aceleración de la partícula? ¿Cuándo es negativa? ¿Cuándo es cero?

c. ¿Cuándo alcanza la partícula su máxima rapidez?

d. ¿Cuándo permanece inmóvil la partícula durante más de un instante?

19. Dos bolas que caen La siguiente figura de una fotografía con múltiples tomas muestra dos bolas que caen desde el reposo. Las reglas verticales están marcadas en centímetros. Con base en la ecuación $s = 490t^2$ (la ecuación de caída libre para s en centímetros y t en segundos), responda las siguientes preguntas.



a. ¿Cuánto tardan las bolas en caer los primeros 160 cm? En ese periodo, ¿cuál es su velocidad promedio?

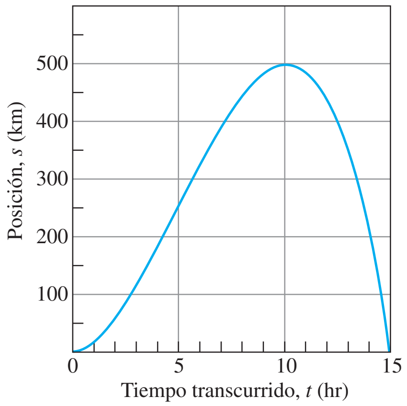
b. ¿Qué tan rápido caían las bolas cuando llegaron a la marca de 160 cm? En ese momento, ¿cuál era su aceleración?

c. Aproximadamente, ¿qué tan rápido se disparaba el flash (en flashes por segundo)?

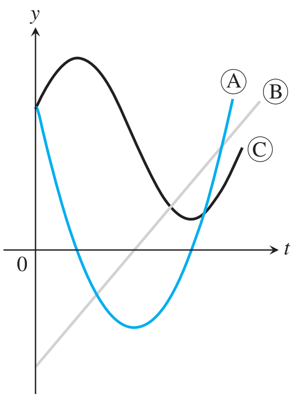
20. Un viaje en camión La siguiente gráfica indica la posición s de un camión que viaja por una carretera. El camión inicia en $t = 0$ y regresa 15 h después en $t = 15$.

a. Utilice la técnica descrita en la sección 3.2, ejemplo 3, para graficar la velocidad del camión $v = ds/dt$ para $0 \leq t \leq 15$. Luego repita el proceso, con la curva de la velocidad, para graficar la aceleración del camión dv/dt.

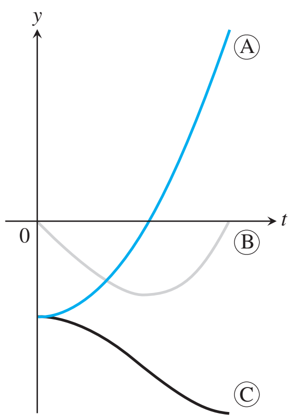
b. Suponga que $s = 15t^2 - t^3$. Grafique ds/dt y ds^2/dt^2 y compare sus gráficas con las del inciso (a).



21. Las siguientes gráficas muestran la posición s, la velocidad $v = ds/dt$ y la aceleración $a = d^2s/dt^2$ como funciones del tiempo t de un cuerpo que se desplaza en una recta coordenada. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.



22. Las siguientes gráficas muestran la posición s, la velocidad $v = ds/dt$ y la aceleración $a = d^2s/dt^2$ como funciones del tiempo t de un cuerpo que se desplaza en una recta coordenada. ¿Cuál gráfica es cuál? Justifique sus respuestas.



Economía

23. Costo marginal Suponga que el costo, en dólares, de producir x lavadoras es $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$.

a. Determine el costo promedio por lavadora en la producción de las primeras 100 lavadoras.

b. Determine el costo marginal cuando se producen 100 lavadoras.

c. Demuestre que el costo marginal cuando se producen 100 lavadoras es aproximadamente el costo de producir una lavadora más después de producir las 100 primeras; hágalo calculando el último costo en forma directa.

24. Ingreso marginal Suponga que el ingreso por la venta de lavadoras es

$$r(x) = 20{,}000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

dólares.

a. Determine el ingreso marginal cuando se producen 100 lavadoras.

b. Utilice la función $r'(x)$ para estimar el incremento en los ingresos que se obtendrían por el incremento de la producción de 100 a 101 lavadoras a la semana.

c. Determine el límite de $r'(x)$ cuando $x \to \infty$. ¿Cómo interpreta este número?

Aplicaciones adicionales

25. Población de bacterias Cuando un bactericida se agregó a un cultivo de nutrientes en el que las bacterias crecían, la población de bacterias continuó su crecimiento por un tiempo, pero luego dejó de crecer y empezó a disminuir. El tamaño de la población en el tiempo t (horas) fue $b = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Determine las tasas de crecimiento en

a. $t = 0$ horas.

b. $t = 5$ horas.

c. $t = 10$ horas.

26. Drenado de un depósito El número de galones de agua en un depósito t minutos después de que éste empezó a drenar es $Q(t) = 200(30 - t)^2$. ¿Qué tan rápido sale el agua al final de 10 minutos? ¿Cuál es la tasa promedio a la que el agua sale durante los primeros 10 minutos?

T **27. Drenado de un depósito** Toma 12 horas drenar un depósito de almacenamiento si se abre la válvula ubicada en la parte inferior. La profundidad y de fluido en el depósito t horas después de que se abrió la válvula está dada mediante la fórmula

$$y = 6\left(1 - \frac{t}{12}\right)^2 \text{ m}.$$

a. Determine la tasa dy/dt (m/h) a la que drena el depósito en el instante t.

b. ¿Cuándo el nivel del fluido en el depósito desciende más rápido? ¿Cuándo desciende más lentamente? En esos instantes, ¿cuáles son los valores de dy/dt?

c. Grafique juntas y y dy/dt, luego analice el comportamiento de y en relación con los signos y valores de dy/dt.

28. Inflado de un globo El volumen, $V = (4/3)\pi r^3$, de un globo esférico cambia con el radio.

a. ¿A qué tasa (ft^3/ft) cambia el volumen con respecto al radio cuando $r = 2$ ft?

b. ¿Aproximadamente en cuánto aumenta el volumen cuando el radio cambia de 2 a 2.2 ft?

29. Despegue de un avión Suponga que la distancia que recorre un avión a lo largo de la pista antes de despegar está dada por $D = (10/9)t^2$, donde D se mide en metros desde el punto de partida y t se mide en segundos a partir del momento que se liberan los frenos. El avión empezará a volar cuando su rapidez alcance 200 km/h. ¿Cuánto tardará en emprender el vuelo y qué distancia habrá recorrido en ese tiempo?

30. Brotes de lava volcánica Aunque en noviembre de 1959 la erupción del volcán Kilauea Iki en Hawai inició con una línea de brotes a lo largo de la pared del cráter, posteriormente la actividad se concentró en un solo conducto en el piso del cráter; en un momento dado lanzó lava a 1,900 ft de altura (un récord para el archipiélago). ¿Cuál fue la velocidad de salida de la lava en ft por segundo? ¿En millas por hora? (*Sugerencia:* Si v_0 es la velocidad de salida de una partícula de lava, su altura t segundos después será $s = v_0 t - 16t^2$ ft. Comience por determinar el tiempo en el que $ds/dt = 0$. No tome en cuenta la resistencia del aire).

Análisis de movimiento mediante gráficas

T Los ejercicios 31 a 34 dan la función de posición como una función del tiempo t, $s = f(t)$, de un objeto que se mueve a lo largo del eje x. Grafique f junto con la función velocidad $v(t) = ds/dt = f'(t)$ y la función aceleración $a(t) = d^2s/dt^2 = f''(t)$. Comente sobre el comportamiento del objeto en relación con los signos y valores de v y a. En sus comentarios incluya temas como los siguientes:

a. ¿Cuándo está en reposo el objeto?

b. ¿Cuándo se mueve hacia la izquierda (hacia abajo) o hacia la derecha (hacia arriba)?

c. ¿Cuándo cambia de dirección?

d. ¿Cuándo se incrementa la rapidez y cuándo disminuye ésta?

e. ¿Cuándo es más rápido el movimiento? ¿Cuándo es más lento?

f. ¿Cuándo está el objeto más lejos del origen?

31. $s = 200t - 16t^2$, $0 \le t \le 12.5$ (un objeto pesado lanzado directamente hacia arriba desde la superficie de la Tierra a una velocidad de 200 ft/seg).

32. $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

33. $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

34. $s = 4 - 7t + 6t^2 - t^3, \quad 0 \le t \le 4$

3.5 Derivadas de funciones trigonométricas

Muchos fenómenos de la naturaleza son más o menos periódicos (campos electromagnéticos, ritmo cardiaco, mareas, clima). Las derivadas de senos y cosenos desempeñan un papel importante en la descripción de cambios periódicos. Esta sección explica cómo derivar las seis funciones trigonométricas básicas.

Derivada de la función seno

Para calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, para x medida en radianes, combinamos los límites del ejemplo 5a y el teorema 7 de la sección 2.4 con la identidad de la suma de ángulos para la función seno:

$$\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h.$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$ Definición de derivada

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\operatorname{sen} x \cdot \frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{\text{límite } 0} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\text{límite } 1} = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$ Ejemplo 5a y teorema 7, sección 2.4

La derivada de la función seno es la función coseno:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$$

EJEMPLO 1 Determinemos las derivadas de diferencias, productos y cocientes que incluyen a la función seno.

(a) $y = x^2 - \operatorname{sen} x$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \qquad \text{Regla de la diferencia}$$
$$= 2x - \cos x.$$

(b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + 2x \operatorname{sen} x \qquad \text{Regla del producto}$$
$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x.$$

(c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot 1}{x^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$
$$= \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}.$$

Derivada de la función coseno

Con la ayuda de la fórmula de la suma de ángulos para la función coseno,

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h,$$

podemos calcular el límite del cociente de diferencias:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} \qquad \text{Definición de derivada}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h) - \cos x}{h} \qquad \text{Identidad del coseno de la suma de ángulos}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$
$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 \qquad \text{Ejemplo 5a y teorema 7, sección 2.4}$$
$$= -\operatorname{sen} x.$$

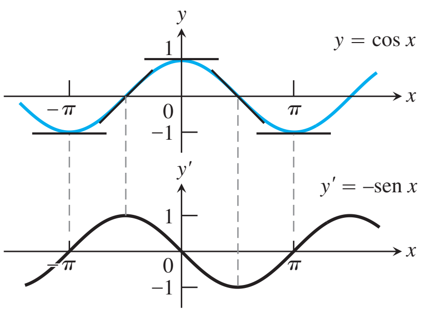


FIGURA 3.20 La curva $y' = -\operatorname{sen} x$ como la gráfica de las pendientes de las tangentes a la curva $y = \cos x$.

La derivada de la función coseno es el negativo de la función seno:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

La figura 3.20 ilustra una forma de visualizar este resultado de la misma manera que hicimos para la graficación de derivadas en la sección 3.2, figura 3.6.

EJEMPLO 2 Determinemos las derivadas de la función coseno en combinación con otras funciones.

(a) $y = 5x + \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \qquad \text{Regla de la suma}$$

$$= 5 - \operatorname{sen} x.$$

(b) $y = \operatorname{sen} x \cos x$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \qquad \text{Regla del producto}$$

$$= \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) + \cos x(\cos x)$$

$$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

(c) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}.$$

Movimiento armónico simple

El movimiento de un objeto o peso que oscila libremente hacia arriba y hacia abajo sin resistencia en el extremo de un resorte es un ejemplo de *movimiento armónico simple*. El movimiento es periódico y se repite indefinidamente, así que lo representamos mediante funciones trigonométricas. El siguiente ejemplo describe un caso en el que no existen fuerzas que se opongan, tales como fricción o flotación que detengan el movimiento.

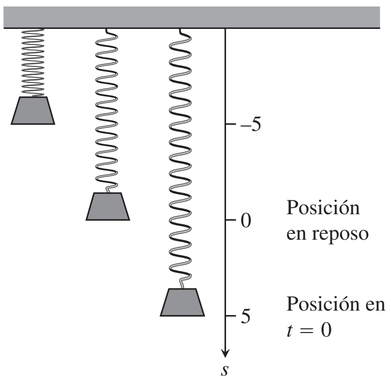


FIGURA 3.21 Un peso colgado de un resorte vertical, que luego se desplaza, oscila hacia arriba y hacia abajo de la posición en reposo (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Un peso sujeto a un resorte (figura 3.21) se estira hacia abajo cinco unidades a partir de su posición de reposo y se libera en el instante $t = 0$ para que oscile hacia arriba y hacia abajo. Su posición en cualquier instante t es

$$s = 5 \cos t.$$

¿Cuál es su velocidad y su aceleración en el instante t?

Solución Tenemos

Posición: $s = 5 \cos t$

Velocidad: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(5 \cos t) = -5 \operatorname{sen} t$

Aceleración: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5 \operatorname{sen} t) = -5 \cos t.$

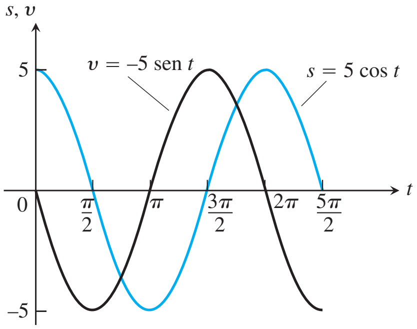


FIGURA 3.22 Las gráficas de la posición y la velocidad del peso del ejemplo 3.

Observe todo lo que podemos aprender de estas ecuaciones:

1. Conforme avanza el tiempo, el peso se mueve hacia abajo y hacia arriba entre $s = -5$ y $s = 5$ en el eje s. La amplitud del movimiento es 5. El periodo del movimiento es 2π, que es el periodo de la función coseno.
2. La velocidad $v = -5$ sen t alcanza su mayor magnitud, 5, cuando cos $t = 0$, como lo muestran las gráficas de la figura 3.22. De ahí que la rapidez del cuerpo, $|v| = 5|\text{sen } t|$, sea mayor cuando cos $t = 0$; esto es, cuando $s = 0$ (la posición de reposo). La rapidez del cuerpo es cero cuando sen $t = 0$. Esto ocurre cuando $s = 5$ cos $t = \pm 5$ en los extremos del intervalo de movimiento.
3. El valor de la aceleración siempre es exactamente el opuesto del valor de su posición. Cuando el cuerpo está arriba de la posición de reposo, la gravedad tira de él hacia abajo; cuando el cuerpo está debajo del punto de reposo, el resorte tira de él de regreso hacia arriba.
4. La aceleración, $a = -5$ cos t, es cero sólo en la posición de reposo, donde cos $t = 0$ y la fuerza debida a la gravedad y la fuerza del resorte se compensan mutuamente. Cuando el cuerpo está en otra posición, las dos fuerzas son diferentes y la aceleración no es cero. La magnitud de la aceleración es máxima en los puntos más alejados de la posición de reposo, donde cos $t = \pm 1$. ■

EJEMPLO 4 La sacudida del movimiento armónico simple del ejemplo 3 es

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 \cos t) = 5 \text{ sen } t.$$

Tiene su mayor magnitud cuando sen $t = \pm 1$, no en los extremos del desplazamiento, sino en la posición de reposo, donde la aceleración cambia de dirección y de signo. ■

Derivadas de las otras funciones trigonométricas básicas

Puesto que sen x y cos x son funciones derivables de x, las funciones relacionadas

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{y} \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

son derivables en todo valor de x en que estén definidas. Sus derivadas, calculadas mediante la regla del cociente, se dan en las siguientes fórmulas. Observe los signos negativos en las fórmulas para las cofunciones.

Las derivadas de las otras funciones trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Para mostrar un cálculo común, determinamos la derivada de la función tangente. Las otras derivadas se dejan para el ejercicio 60.

EJEMPLO 5 Determine $d(\tan x)/dx$.

Solución Utilizamos la regla de la derivada de un cociente para calcular la derivada:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{Regla del cociente}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

■

EJEMPLO 6 Determine y'', si $y = \sec x$.

Solución Para encontrar la segunda derivada se debe obtener una combinación de derivadas trigonométricas.

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x \qquad \text{Regla de la derivada de la función secante.}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) \qquad \text{Regla de la derivada de un producto.}$$

$$= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \qquad \text{Reglas de las derivadas.}$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

■

La derivabilidad de las funciones trigonométricas en todos sus dominios ofrece otra prueba de su continuidad en cada punto de sus dominios (teorema 1, sección 3.2). Así, mediante sustitución directa, podemos calcular límites de combinaciones algebraicas de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 7 Utilizamos sustitución directa para calcular los límites siempre que no haya una división entre cero, que algebraicamente no está definida.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + \sec x}}{\cos(\pi - \tan x)} = \frac{\sqrt{2 + \sec 0}}{\cos(\pi - \tan 0)} = \frac{\sqrt{2 + 1}}{\cos(\pi - 0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

■

Ejercicios 3.5

Derivadas

En los ejercicios 1 a 18, determine dy/dx.

1. $y = -10x + 3\cos x$

2. $y = \dfrac{3}{x} + 5\operatorname{sen} x$

3. $y = x^2 \cos x$

4. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

5. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

6. $y = x^2 \cot x - \dfrac{1}{x^2}$

7. $f(x) = \operatorname{sen} x \tan x$

8. $g(x) = \csc x \cot x$

9. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

10. $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)\sec x$

11. $y = \dfrac{\cot x}{1 + \cot x}$ **12.** $y = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{4}{\cos x} + \dfrac{1}{\tan x}$ **14.** $y = \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{x}{\cos x}$

15. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

16. $y = x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2 \cos x$

17. $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x \cos x$ **18.** $g(x) = (2 - x) \tan^2 x$

En los ejercicios 19 a 22, determine ds/dt.

19. $s = \tan t - t$ **20.** $s = t^2 - \sec t + 1$

21. $s = \dfrac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$ **22.** $s = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$

En los ejercicios 23 a 26, determine $dr/d\theta$.

23. $r = 4 - \theta^2 \operatorname{sen} \theta$ **24.** $r = \theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$

25. $r = \sec \theta \csc \theta$ **26.** $r = (1 + \sec \theta) \operatorname{sen} \theta$

En los ejercicios 27 a 32, determine dp/dq.

27. $p = 5 + \dfrac{1}{\cot q}$ **28.** $p = (1 + \csc q) \cos q$

29. $p = \dfrac{\operatorname{sen} q + \cos q}{\cos q}$ **30.** $p = \dfrac{\tan q}{1 + \tan q}$

31. $p = \dfrac{q \operatorname{sen} q}{q^2 - 1}$ **32.** $p = \dfrac{3q + \tan q}{q \sec q}$

33. Determine y'' si

a. $y = \csc x$. **b.** $y = \sec x$.

34. Determine $y^{(4)} = d^{(4)}y/dx^4$ si

a. $y = -2 \operatorname{sen} x$. **b.** $y = 9 \cos x$.

Rectas tangentes

En los ejercicios 35 a 38, grafique las curvas en los intervalos dados, junto con sus tangentes en los valores de x que se indican. Rotule cada curva y su tangente con su ecuación.

35. $y = \operatorname{sen} x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi, 0, 3\pi/2$

36. $y = \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3, 0, \pi/3$

37. $y = \sec x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
$x = -\pi/3, \pi/4$

38. $y = 1 + \cos x, \quad -3\pi/2 \le x \le 2\pi$
$x = -\pi/3, 3\pi/2$

T En los ejercicios 39 a 42, ¿las gráficas de las funciones tienen alguna tangente horizontal en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué? Visualice sus hallazgos mediante la graficación de las funciones con una calculadora graficadora.

39. $y = x + \operatorname{sen} x$

40. $y = 2x + \operatorname{sen} x$

41. $y = x - \cot x$

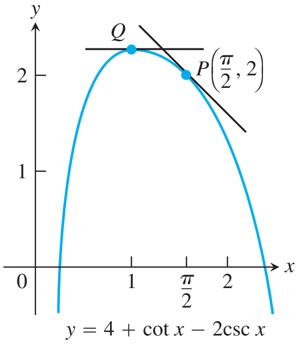
42. $y = x + 2 \cos x$

43. Determine todos los puntos en la curva de $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la recta tangente sea paralela a la recta $y = 2x$. Elabore un bosquejo de la curva y de la tangente(s) juntas; rotule cada una con su ecuación.

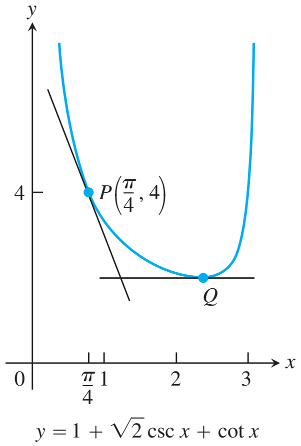
44. Determine todos los puntos en la curva de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$, donde la recta tangente sea paralela a la recta $y = -x$. Elabore un bosquejo de la curva y de la tangente(s) juntas; rotule cada una con su ecuación.

En los ejercicios 45 y 46, determine una ecuación para **(a)** la tangente a la curva en P y **(b)** la tangente horizontal a la curva en Q.

45.



46.



Límites trigonométricos

Determine los límites en los ejercicios 47 a 54.

47. $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right)$

48. $\lim\limits_{x \to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

49. $\lim\limits_{\theta \to \pi/6} \dfrac{\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}}{\theta - \frac{\pi}{6}}$ **50.** $\lim\limits_{\theta \to \pi/4} \dfrac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

51. $\lim\limits_{x \to 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\dfrac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right]$

52. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x}\right)$

53. $\lim\limits_{t \to 0} \tan\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$ **54.** $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\left(\dfrac{\pi \theta}{\operatorname{sen} \theta}\right)$

Teoría y ejemplos

Las ecuaciones en los ejercicios 55 y 56 dan la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se mueve en una recta coordenada (s en metros, t en segundos). Determine la velocidad, la rapidez, la aceleración y la sacudida del cuerpo en el instante $t = \pi/4$ seg.

55. $s = 2 - 2 \operatorname{sen} t$ **56.** $s = \operatorname{sen} t + \cos t$

57. ¿Existe un valor de c que haga que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? Justifique su respuesta.

58. ¿Existe un valor de b que haga que

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \ge 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? ¿Que sea derivable en $x = 0$? Justifique sus respuestas.

59. Determine $d^{999}(\cos x)/dx^{999}$.

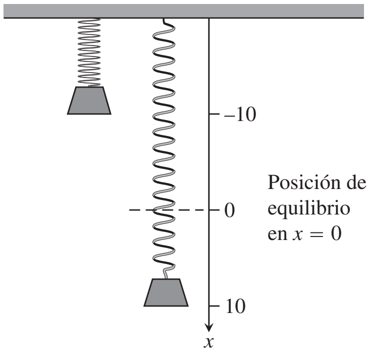
60. Deduzca la fórmula para la derivada con respecto a x de

a. $\sec x$. **b.** $\csc x$. **c.** $\cot x$.

61. Un objeto está sujeto a un resorte y alcanza su posición de equilibrio ($x = 0$). Entonces, se pone en movimiento que da por resultado un desplazamiento de

$$x = 10 \cos t,$$

donde x se mide en centímetros y t se mide en segundos. Véase la siguiente figura.



a. Determine el desplazamiento del objeto cuando $t = 0$, $t = \pi/3$ y $t = 3\pi/4$.

b. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 0$, $t = \pi/3$ y $t = 3\pi/4$.

62. Suponga que la posición de una partícula, en el eje x, está dada por

$$x = 3 \cos t + 4 \operatorname{sen} t,$$

donde x se mide en ft y t se mide en segundos.

a. Determine la posición de la partícula cuando $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$.

b. Determine la velocidad de la partícula cuando $t = 0$, $t = \pi/2$ y $t = \pi$.

T **63.** Grafique $y = \cos x$ para $-\pi \le x \le 2\pi$. En la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.3$ y 0.1. Luego, en una nueva pantalla, hágalo con $h = -1, -0.5$ y -0.3. ¿Qué sucede cuando $h \to 0^+$? ¿Qué sucede cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

T **64.** Grafique $y = -\operatorname{sen} x$ para $-\pi \le x \le 2\pi$. En la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

para $h = 1, 0.5, 0.3$ y 0.1. Luego, en una nueva pantalla, hágalo con $h = -1, -0.5$ y -0.3. ¿Qué sucede cuando $h \to 0^+$? ¿Qué sucede cuando $h \to 0^-$? ¿Qué fenómeno se ilustra aquí?

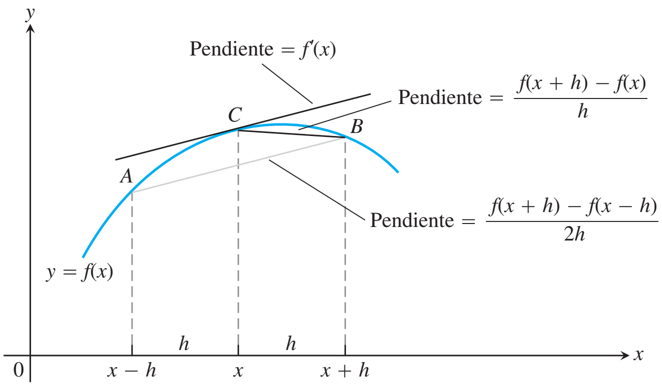
T **65. Cocientes de diferencias centradas** El *cociente de diferencias centradas*

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

se utiliza para aproximar $f'(x)$ en cálculos numéricos, ya que (1) su límite cuando $h \to 0$ es igual a $f'(x)$, cuando $f'(x)$ existe, y (2) por lo común brinda una mejor aproximación de $f'(x)$ para un valor dado de h que el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Observe la siguiente figura.



a. Para ver qué tan rápido el cociente de diferencias para $f(x) = \operatorname{sen} x$ converge a $f'(x) = \cos x$, grafique $y = \cos x$ junto con

$$y = \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, para $h = 1, 0.5$ y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 63 para los mismos valores de h.

b. Para ver qué tan rápido el cociente de diferencias para $f(x) = \cos x$ converge a $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, grafique $y = -\operatorname{sen} x$, junto con

$$y = \frac{\cos(x + h) - \cos(x - h)}{2h}$$

en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$, para $h = 1, 0.5$ y 0.3. Compare los resultados con los que obtuvo en el ejercicio 64 para los mismos valores de h.

66. Una advertencia acerca de los cocientes en diferencias centradas (*Continuación del ejercicio 65*). El cociente

$$\frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

puede tener un límite cuando $h \to 0$, aunque f no tenga derivada en x. Como ejemplo, tome $f(x) = |x|$ y calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0 - h|}{2h}.$$

Como verá, el límite existe aunque $f(x) = |x|$ no tenga derivada en $x = 0$. *Moraleja:* Antes de utilizar un cociente de diferencias centradas, asegúrese de que la derivada exista.

T **67. Pendientes en la gráfica de la función tangente** Grafique juntas $y = \tan x$ y su derivada en $(-\pi/2, \pi/2)$. ¿La gráfica de la función tangente parece tener una pendiente mínima? ¿Una pendiente máxima? ¿En algún punto la pendiente es negativa? Justifique sus respuestas.

T **68. Pendientes en la gráfica de la función cotangente** Grafique juntas $y = \cot x$ y su derivada para $0 < x < \pi$. ¿La gráfica de la función cotangente parece tener una pendiente mínima? ¿Una pendiente máxima? ¿En algún punto la pendiente es negativa? Justifique sus respuestas.

T **69. Exploración de (sen kx)/x** Grafique juntas $y = (\text{sen } x)/x$, $y = (\text{sen } 2x)/x$ y $y = (\text{sen } 4x)/x$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$. ¿En dónde aparentemente la gráfica cruza al eje y? ¿En realidad las gráficas intersecan al eje x? ¿Qué esperaría que sucediera con las gráficas de $(\text{sen } 5x)/x$ y $y = (\text{sen}(-3x))/x$ cuando $x \to 0$? ¿Por qué? ¿Qué pasaría con la gráfica de $y = (\text{sen } kx)/x$ para otros valores de k? Justifique sus respuestas.

T **70. Radianes en comparación con grados: derivadas en modo grados** ¿Qué sucede con las derivadas de sen x y cos x si c se mide en grados y no en radianes? Para averiguarlo, realice los siguientes pasos.

a. Con su calculadora graficadora o computadora en modo grados grafique

$$f(h) = \frac{\text{sen } h}{h}$$

y estime $\lim_{h\to 0} f(h)$. Compare su estimación con $\pi/180$. ¿Existe alguna razón para creer que el límite debería ser $\pi/180$?

b. Con su calculadora graficadora en modo grados, estime

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}.$$

c. Ahora regrese a la deducción, en el texto, de la fórmula para la derivada de sen x y realice los pasos de la deducción usando el modo grados en los límites. ¿Qué fórmula obtiene para la derivada?

d. Deduzca la derivada de cos x usando el modo grados en los límites. ¿Qué fórmula obtiene para la derivada?

e. Las desventajas de las fórmulas en modo grados se hacen evidentes a medida que se toman derivadas de orden más alto. Inténtelo. ¿Cuáles son las derivadas de segundo y tercer órdenes de sen x y cos x?

3.6 La regla de la cadena

¿Cómo podemos derivar $F(x) = \text{sen}(x^2 - 4)$? Esta función es la composición $f \circ g$ de dos funciones, $y = f(u) = \text{sen } u$ y $u = g(x) = x^2 - 4$, las cuales sabemos cómo derivar. La respuesta, dada por la *regla de la cadena*, dice que la derivada es el producto de las derivadas de f y g. En esta sección desarrollamos la regla.

Derivada de una función compuesta

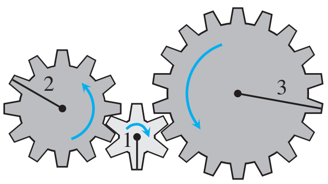
La función $y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}(3x)$ es la composición de las funciones $y = \frac{1}{2}u$ y $u = 3x$. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}, \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 3.$$

Como $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3$, en este caso, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Si consideramos a la derivada como una tasa de cambio, nuestra intuición nos permite ver que esta relación es razonable. Si $y = f(u)$ cambia la mitad de rápido que u, y $u = g(x)$ cambia tres veces más rápido que x, entonces esperaríamos que y cambiara $3/2$ veces más rápido que x. Este efecto es muy parecido al de un engranaje múltiple (figura 3.23). Veamos otro ejemplo.



C: y vueltas B: u vueltas A: x vueltas

FIGURA 3.23 Cuando el engrane A da x vueltas, el engrane B da u vueltas y el engrane C da y vueltas. Al comparar las circunferencias o contar los dientes, vemos que $y = u/2$ (C da media vuelta por cada vuelta de B) y $u = 3x$ (B da tres vueltas por cada vuelta de A), así que $y = 3x/2$. Por lo tanto, $dy/dx = 3/2 = (1/2)(3) = (dy/du)(du/dx)$.

EJEMPLO 1 La función

$$y = (3x^2 + 1)^2$$

es la composición de $y = f(u) = u^2$ y $u = g(x) = 3x^2 + 1$. Al calcular las derivadas, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} &= 2u\cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1)\cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

Al calcular la derivada a partir de la fórmula desarrollada $(3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + 6x^2 + 1$ se obtiene el mismo resultado:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x.\end{aligned}$$

La derivada de la función compuesta $f(g(x))$ en x es la derivada de f en $g(x)$ por la derivada de g en x. Esto se conoce como la regla de la cadena (figura 3.24).

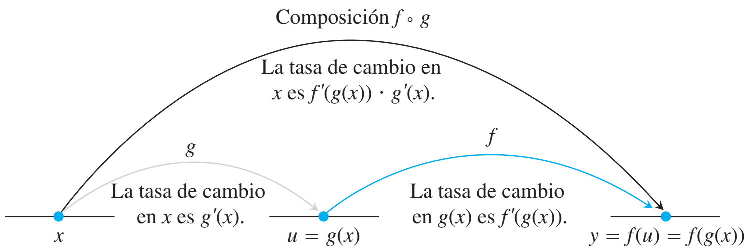


FIGURA 3.24 Multiplicación de tasas de cambio: La derivada de $f \circ g$ en x es la derivada de f en $g(x)$ por la derivada de g en x.

TEOREMA 2: Regla de la cadena Si $f(u)$ es derivable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

En notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

donde dy/du se evalúa en $u = g(x)$.

"Demostración" intuitiva de la regla de la cadena:

Sea Δu el cambio en u cuando x cambia en Δx, de manera que

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Entonces el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Si $\Delta u \neq 0$, podemos escribir la fracción $\Delta y/\Delta x$ como el producto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{1}$$

y tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(Observe que } \Delta u \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0 \text{, ya que } g \text{ es continua).} \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

El problema con este argumento es que podría ocurrir que $\Delta u = 0$ aunque $\Delta x \neq 0$, de manera que la cancelación de Δu en la ecuación (1) podría no ser válida. Una demostración requiere de un enfoque diferente para evitar esta falla; haremos tal demostración en la sección 3.9. ■

EJEMPLO 2 Un objeto se mueve a lo largo del eje x de forma que su posición en cualquier momento $t \geq 0$ está dada por $x(t) = \cos(t^2 + 1)$. Determine la velocidad del objeto como una función de t.

Solución Sabemos que la velocidad es dx/dt. En este caso, x es una función compuesta, $x = \cos(u)$ y $u = t^2 + 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{du} &= -\operatorname{sen}(u) \qquad x = \cos(u) \\
\frac{du}{dt} &= 2t. \qquad u = t^2 + 1
\end{aligned}$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\
&= -\operatorname{sen}(u) \cdot 2t \qquad \frac{dx}{du} \text{ evaluada en } u \\
&= -\operatorname{sen}(t^2 + 1) \cdot 2t \\
&= -2t \operatorname{sen}(t^2 + 1).
\end{aligned}$$

■

Regla "de afuera hacia dentro"

Una dificultad con la notación de Leibniz es que no establece específicamente dónde se evalúan las derivadas en la regla de la cadena. Así que algunas veces resulta útil considerar la regla de la cadena mediante la notación funcional. Si $y = f(g(x))$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

En palabras, hay que derivar la función de "afuera" (externa), f, y evaluarla en la función de "adentro" (interna) que queda sola, $g(x)$; después, se multiplica por la derivada de la "función de adentro" (interna).

EJEMPLO 3 Derive con respecto a x la función $\operatorname{sen}(x^2 + x)$.

Solución Aplicamos directamente la regla de la cadena y encontramos

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{interna}} = \cos \underbrace{(x^2 + x)}_{\text{la interna que queda sola}} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{\text{derivada de la interna}}.$$

■

Uso repetido de la regla de la cadena

En ocasiones, para determinar una derivada, tenemos que utilizar la regla de la cadena dos o más veces.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Johann Bernoulli (1667–1748)

EJEMPLO 4 Determine la derivada de $g(t) = \tan(5 - \operatorname{sen} 2t)$.

Solución Observe que la tangente es una función de $5 - \operatorname{sen} 2t$, mientras que el seno es una función de $2t$, que a la vez es una función de t. Por lo tanto, con base en la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \operatorname{sen} 2t)) && \text{Derivada de } \tan u \text{ con } u = 5 - \operatorname{sen} 2t \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \operatorname{sen} 2t) && \text{Derivada de } 5 - \operatorname{sen} u \text{ con } u = 2t \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)\right) \\
&= \sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \operatorname{sen} 2t).
\end{aligned}$$

■

La regla de la cadena con potencias de una función

Si f es una función derivable de u, y u es una función derivable de x, entonces sustituir $y = f(u)$ en la fórmula de la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

lleva a la fórmula

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u)\frac{du}{dx}.$$

Si n es cualquier número real y f es una función potencia, $f(u) = u^n$, la regla de la potencia establece que $f'(u) = nu^{n-1}$. Si u es una función derivable de x, entonces utilizamos la regla de la cadena para extenderla a la **regla de la cadena para potencias**:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \qquad \frac{d}{du}(u^n) = nu^{n-1}$$

EJEMPLO 5 La regla de la cadena para potencias simplifica el cálculo de derivadas de una potencia de una expresión.

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4) && \text{Regla de la cadena para potencias con } u = 5x^3 - x^4,\ n = 7. \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^3) \\
&= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) &= \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1} \\
&= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2) && \text{Regla de la cadena para potencias con } u = 3x - 2,\ n = -1. \\
&= -1(3x - 2)^{-2}(3) \\
&= -\frac{3}{(3x - 2)^2}
\end{aligned}$$

En el inciso (b), también podíamos haber determinado la derivada mediante la regla de la derivada de un cociente.

(c)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^5 x) &= 5\operatorname{sen}^4 x \cdot \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x && \text{Regla de la cadena para potencias con } u = \operatorname{sen} x,\ n = 5, \text{ ya que } \operatorname{sen}^n x \text{ significa } (\operatorname{sen} x)^n,\ n \neq -1. \\
&= 5\operatorname{sen}^4 x \cos x
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 En la sección 3.2 vimos que la función valor absoluto, $y = |x|$, no es derivable en $x = 0$. Sin embargo, la función sí es derivable en todos los demás números reales, como lo demostraremos a continuación. Ya que $|x| = \sqrt{x^2}$, podemos deducir la siguiente fórmula:

Derivada de la función valor absoluto

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(|x|) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) && \text{Regla de la cadena para potencias con } u = x^2,\ n = 1/2,\ x \neq 0 \\
&= \frac{1}{2|x|} \cdot 2x && \sqrt{x^2} = |x| \\
&= \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Demuestre que la pendiente de toda recta tangente a la curva $y = 1/(1 - 2x)^3$ es positiva.

Solución Determinamos la derivada

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(1 - 2x)^{-3} \\
&= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}(1 - 2x) && \text{Regla de la cadena para potencias con } u = (1 - 2x),\ n = -3 \\
&= -3(1 - 2x)^{-4} \cdot (-2) \\
&= \frac{6}{(1 - 2x)^4}
\end{aligned}$$

En cualquier punto (x, y) de la curva, $x \neq 1/2$, así que la pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(1 - 2x)^4},$$

que es el cociente de dos números positivos.

EJEMPLO 8 Las fórmulas para las derivadas de las funciones sen x y cos x se obtuvieron bajo el supuesto de que x se mide en radianes, no en grados. La regla de la cadena nos ofrece una nueva interpretación de la diferencia entre las dos unidades. Puesto que $180° = \pi$ radianes, $x° = \pi x/180$ radianes, donde $x°$ es la medida del ángulo en grados.

Con base en la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x°) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°).$$

Observe la figura 3.25. De forma análoga, la derivada de $\cos(x°)$ es $-(\pi/180)\operatorname{sen}(x°)$.

El factor $\pi/180$ vuelve a aparecer cada vez que se repite la derivación. Aquí vemos la ventaja de utilizar la medida en radianes al efectuar los cálculos.

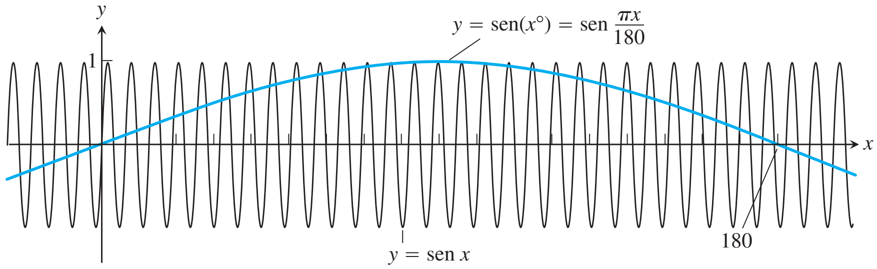


FIGURA 3.25 $\operatorname{Sen}(x°)$ oscila sólo $\pi/180$ veces tanto como oscila sen x. Su pendiente máxima es $\pi/180$ en $x = 0$ (ejemplo 8).

Ejercicios 3.6

Cálculo de derivadas

En los ejercicios 1 a 8, dadas $y = f(u)$ y $u = g(x)$, determine $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$.

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$
3. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = 3x + 1$
4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$
5. $y = \cos u, \quad u = \operatorname{sen} x$
6. $y = \operatorname{sen} u, \quad u = x - \cos x$
7. $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$
8. $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

En los ejercicios 9 a 18, escriba la función en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Luego determine dy/dx como una función de x.

9. $y = (2x + 1)^5$
10. $y = (4 - 3x)^9$
11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$
13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
14. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$
15. $y = \sec(\tan x)$
16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
17. $y = \operatorname{sen}^3 x$
18. $y = 5\cos^{-4} x$

Determine las derivadas de las funciones de los ejercicios 19 a 40.

19. $p = \sqrt{3 - t}$
20. $q = \sqrt[3]{2r - r^2}$
21. $s = \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$
22. $s = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$
23. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$
24. $r = 6(\sec\theta - \tan\theta)^{3/2}$
25. $y = x^2 \operatorname{sen}^4 x + x\cos^{-2} x$
26. $y = \frac{1}{x}\operatorname{sen}^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$
27. $y = \frac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
28. $y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$
29. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$
30. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$
31. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$
32. $k(x) = x^2 \sec\left(\frac{1}{x}\right)$
33. $f(x) = \sqrt{7 + x\sec x}$
34. $g(x) = \frac{\tan 3x}{(x + 7)^4}$
35. $f(\theta) = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}\right)^2$
36. $g(t) = \left(\frac{1 + \operatorname{sen} 3t}{3 - 2t}\right)^{-1}$
37. $r = \operatorname{sen}(\theta^2)\cos(2\theta)$
38. $r = \sec\sqrt{\theta}\tan\left(\frac{1}{\theta}\right)$
39. $q = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$
40. $q = \cot\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$

En los ejercicios 41 a 58, determine dy/dt.

41. $y = \operatorname{sen}^2(\pi t - 2)$
42. $y = \sec^2 \pi t$
43. $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
44. $y = (1 + \cot(t/2))^{-2}$
45. $y = (t\tan t)^{10}$
46. $y = (t^{-3/4}\operatorname{sen} t)^{4/3}$
47. $y = \left(\frac{t^2}{t^3 - 4t}\right)^3$
48. $y = \left(\frac{3t - 4}{5t + 2}\right)^{-5}$
49. $y = \operatorname{sen}(\cos(2t - 5))$
50. $y = \cos\left(5\operatorname{sen}\left(\frac{t}{3}\right)\right)$
51. $y = \left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^3$
52. $y = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2(7t)\right)^3$
53. $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$
54. $y = 4\operatorname{sen}\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$
55. $y = \tan^2(\operatorname{sen}^3 t)$
56. $y = \cos^4(\sec^2 3t)$
57. $y = 3t(2t^2 - 5)^4$
58. $y = \sqrt{3t + \sqrt{2 + \sqrt{1 - t}}}$

Segundas derivadas

En los ejercicios 59 a 64, determine y''.

59. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$
60. $y = \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-1}$
61. $y = \frac{1}{9}\cot(3x - 1)$
62. $y = 9\tan\left(\frac{x}{3}\right)$
63. $y = x(2x + 1)^4$
64. $y = x^2(x^3 - 1)^5$

Determinación de los valores de las derivadas

En los ejercicios 65 a 70, determine el valor de $(f \circ g)'$ en el valor dado de x.

65. $f(u) = u^5 + 1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$
66. $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x = -1$
67. $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$
68. $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = 1/4$
69. $f(u) = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$
70. $f(u) = \left(\frac{u - 1}{u + 1}\right)^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$
71. Suponga que $f'(3) = -1$, $g'(2) = 5$, $g(2) = 3$ y $y = f(g(x))$. ¿Cuál es el valor de y' en $x = 2$?
72. Si $r = \operatorname{sen}(f(t))$, $f(0) = \pi/3$ y $f'(0) = 4$, entonces, ¿cuál es el valor de dr/dt en $t = 0$?
73. Suponga que las funciones f y g, así como sus derivadas con respecto a x, tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	−3
3	3	−4	2π	5

Determine las derivadas con respecto a x de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a. $2f(x), \quad x = 2$

b. $f(x) + g(x), \quad x = 3$

c. $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$

d. $f(x)/g(x), \quad x = 2$

e. $f(g(x)), \quad x = 2$

f. $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

g. $1/g^2(x), \quad x = 3$

h. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

74. Suponga que las funciones f y g, así como sus derivadas con respecto a x, tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

Determine las derivadas con respecto a x de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a. $5f(x) - g(x), \quad x = 1$

b. $f(x)g^3(x), \quad x = 0$

c. $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}, \quad x = 1$

d. $f(g(x)), \quad x = 0$

e. $g(f(x)), \quad x = 0$

f. $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

g. $f(x + g(x)), \quad x = 0$

75. Determine ds/dt cuando $\theta = 3\pi/2$, si $s = \cos\theta$ y $d\theta/dt = 5$.

76. Determine dy/dt cuando $x = 1$, si $y = x^2 + 7x - 5$ y $dx/dt = 1/3$.

Teoría y ejemplos

¿Qué sucede si puede escribir una función como una composición de diferentes funciones? ¿Obtendrá la misma derivada en cada caso? La regla de la cadena indica que así debe ser. Intente con las funciones de los ejercicios 77 y 78.

77. Determine dy/dx si $y = x$, usando la regla de la cadena con y como una composición de

a. $y = (u/5) + 7 \quad$ y $\quad u = 5x - 35$

b. $y = 1 + (1/u) \quad$ y $\quad u = 1/(x - 1)$.

78. Determine dy/dx si $y = x^{3/2}$, usando la regla de la cadena con y como una composición de

a. $y = u^3 \quad$ y $\quad u = \sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{u} \quad$ y $\quad u = x^3$.

79. Determine la tangente a $y = ((x - 1)/(x + 1))^2$ en $x = 0$.

80. Determine la tangente a $y = \sqrt{x^2 - x + 7}$ en $x = 2$.

81. a. Determine la tangente a la curva $y = 2\tan(\pi x/4)$ en $x = 1$.

b. Pendientes en la curva tangente ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener la pendiente a la curva en el intervalo $-2 < x < 2$? Justifique su respuesta.

82. Pendientes en la curva senoidal

a. Determine ecuaciones para las tangentes a las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = -\operatorname{sen}(x/2)$ en el origen. ¿Hay algo especial en lo que estén relacionadas las tangentes? Justifique su respuesta.

b. ¿Qué puede decirse acerca de las tangentes a las curvas $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$ en el origen? (m es una constante distinta de cero). Justifique su respuesta.

c. Para una m dada, ¿cuál es el máximo valor que pueden tener las pendientes a la curva $y = \operatorname{sen} mx$ y $y = -\operatorname{sen}(x/m)$? Justifique su respuesta.

d. La función $y = \operatorname{sen} x$ completa un periodo en el intervalo $[0, 2\pi]$, la función $y = \operatorname{sen} 2x$ completa dos periodos, la función $y = \operatorname{sen}(x/2)$ completa medio periodo y así sucesivamente. ¿Existe alguna relación entre el número de periodos que completa $y = \operatorname{sen} mx$ en $[0, 2\pi]$ y la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} mx$ en el origen? Justifique su respuesta.

83. Funcionamiento demasiado rápido de maquinaria Suponga que un pistón describe un movimiento recto hacia arriba y hacia abajo, y que su posición en el instante t segundos es

$$s = A\cos(2\pi bt),$$

con A y b positivos. El valor de A es la amplitud del movimiento y b es la frecuencia (número de veces que el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo cada segundo). ¿Qué efecto tiene la duplicación de la frecuencia en la velocidad, la aceleración y la sacudida del pistón? (Una vez que lo determine, sabrá por qué algunas máquinas se descomponen cuando las hacen funcionar demasiado rápido).

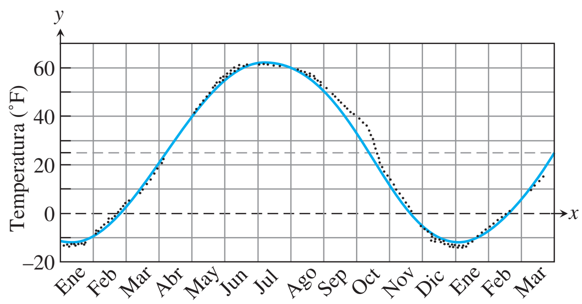
84. Temperatura en Fairbanks, Alaska La gráfica en la siguiente figura muestra la temperatura promedio, en grados Fahrenheit, en Fairbanks, Alaska, durante un año típico de 365 días. La ecuación que aproxima la temperatura en el día x es

$$y = 37\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

y se grafica en la siguiente figura.

a. ¿En qué día la temperatura aumenta más rápidamente?

b. ¿Aproximadamente, cuántos grados por día aumenta la temperatura cuando ésta se incrementa más rápido?



85. Movimiento de una partícula La posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es $s = \sqrt{1 + 4t}$, con s en metros y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 6$ seg.

86. Aceleración constante Suponga que la velocidad de un cuerpo que cae es $v = k\sqrt{s}$ m/seg (k constante) en el instante en que el cuerpo ha caído s metros, contados desde su punto de inicio. Demuestre que la aceleración del cuerpo es constante.

87. Caída de un meteorito La velocidad de un meteorito pesado que entra a la atmósfera terrestre es inversamente proporcional a $\sqrt{s}$ cuando se encuentra a s km del centro de la Tierra. Demuestre que la aceleración del meteorito es inversamente proporcional a s^2.

88. Aceleración de una partícula Una partícula se desplaza a lo largo del eje x con una velocidad de $dx/dt = f(x)$. Demuestre que la aceleración de la partícula es $f(x)f'(x)$.

89. Temperatura y periodo de un péndulo Para oscilaciones de amplitud pequeña (balanceos cortos), podemos modelar sin problemas la relación entre el periodo, T, y la longitud, L, de un péndulo simple mediante la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

donde g es la constante de aceleración debida a la gravedad en el lugar en que se encuentre el péndulo. Si medimos g en centímetros por segundo al cuadrado, entonces medimos L en centímetros y T en segundos. Si el péndulo es de metal, su longitud variará con la temperatura, la cual aumenta o disminuye a una razón que es casi proporcional a L. En símbolos, con u como la temperatura y k como la constante de proporcionalidad,

$$\frac{dL}{du} = kL.$$

Suponiendo este caso, demuestre que la tasa a la que cambia el periodo con respecto a la temperatura es $kT/2$.

90. Regla de la cadena Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces las dos composiciones

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$$

son diferenciables en $x = 0$, aunque g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena? Explique.

T **91. La derivada de sen $2x$** Grafique la función $y = 2 \cos 2x$ para $-2 \le x \le 3.5$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\text{sen } 2(x + h) - \text{sen } 2x}{h}$$

para $h = 1.0$, 0.5 y 0.2. Experimente con otros valores de h e incluya valores negativos. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique dicho comportamiento.

T **92. La derivada de $\cos(x^2)$** Grafique $y = -2x \text{ sen}(x^2)$ para $-2 \le x \le 3$. Luego, en la misma pantalla, grafique

$$y = \frac{\cos((x + h)^2) - \cos(x^2)}{h}$$

para $h = 1$, 0.7, y 0.3. Experimente con otros valores de h. ¿Qué pasa cuando $h \to 0$? Explique dicho comportamiento.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Polinomios trigonométricos

93. Como muestra la siguiente figura, el "polinomio" trigonométrico

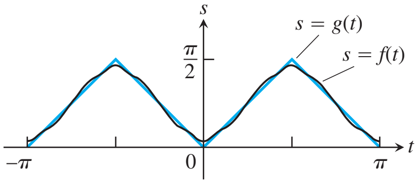
$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662 \cos 2t - 0.07074 \cos 6t - 0.02546 \cos 10t - 0.01299 \cos 14t$$

ofrece una buena aproximación a la función dientes de sierra $s = g(t)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿Qué tan bien aproxima la derivada de f a la derivada de g en los puntos donde dg/dt está definida? Para responder, siga los siguientes pasos.

a. Grafique dg/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Determine df/dt.

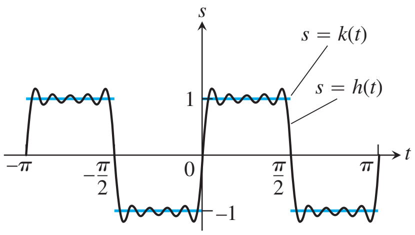
c. Grafique df/dt. Aparentemente, ¿en dónde es mejor la aproximación de dg/dt mediante df/dt? ¿En dónde parece ser menos buena? Las aproximaciones mediante funciones trigonométricas son importantes en la teoría de oscilaciones y en la teoría del calor, pero no debemos esperar demasiado de ellas, como veremos en el siguiente ejercicio.



94. (*Continuación del ejercicio 93*) En el ejercicio 93, el polinomio trigonométrico $f(t)$, que aproximó una función dientes de sierra $g(t)$ en $[-\pi, \pi]$, tenía una derivada que aproximó la derivada de la función dientes de sierra. Sin embargo, es posible que un polinomio trigonométrico aproxime razonablemente una función sin que su derivada aproxime bien la derivada de la función. Como ejemplo, el "polinomio"

$$s = h(t) = 1.2732 \text{ sen } 2t + 0.4244 \text{ sen } 6t + 0.25465 \text{ sen } 10t + 0.18189 \text{ sen } 14t + 0.14147 \text{ sen } 18t$$

que se grafica en la siguiente figura, aproxima la función escalonada $s = k(t)$, también mostrada ahí. No obstante, la derivada de h no se parece a la derivada de k.



a. Grafique dk/dt (donde esté definida) en $[-\pi, \pi]$.

b. Determine dh/dt.

c. Grafique dh/dt para qué tan inadecuadamente se ajusta la gráfica a la gráfica de dk/dt. Comente sus observaciones.

3.7 Derivación implícita

La mayoría de las funciones que hemos tratado hasta ahora se han descrito mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$, la cual expresa de manera explícita a y en términos de la variable x. Hemos aprendido reglas para derivar funciones definidas de esta manera. Otra situación ocurre cuando encontramos ecuaciones como

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \qquad y^2 - x = 0, \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

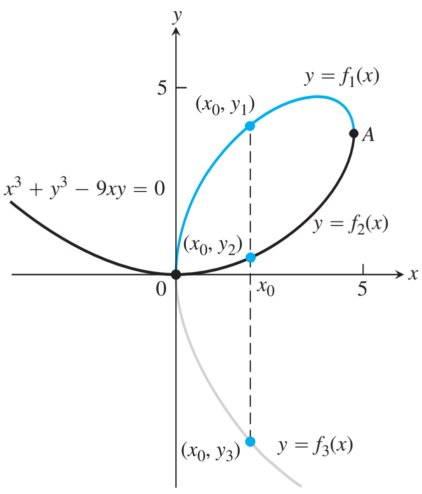


FIGURA 3.26 La curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ no es la gráfica de ninguna función de x. Sin embargo, la curva puede dividirse en arcos separados que *son* las gráficas de funciones de x. Esta curva en particular, llamada *folio* (hoja), se remonta a Descartes en 1638.

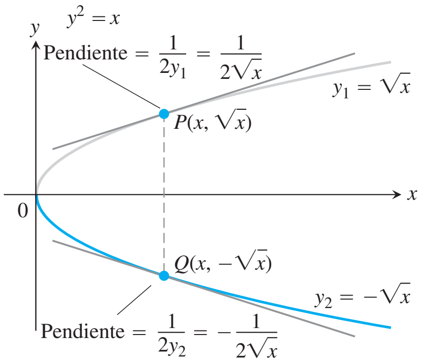


FIGURA 3.27 La ecuación $y^2 - x = 0$ o $y^2 = x$, como se escribe por lo común, define dos funciones derivables de x en el intervalo $x > 0$. El ejemplo 1 muestra cómo determinar las derivadas de dichas funciones sin despejar *a* y en la ecuación $y^2 = x$.

(Véase las figuras 3.26, 3.27 y 3.28). Estas ecuaciones definen una relación *implícita* entre las variables x y y. En algunos casos podemos despejar y en esas ecuaciones para obtener una función explícita (o quizá varias funciones) de x. Cuando no es posible enunciar una ecuación $F(x, y) = 0$ en la forma $y = f(x)$, para derivarla de la manera usual, se puede determinar dy/dx mediante *derivación implícita*. Esta sección describe la técnica.

Funciones definidas implícitamente

Iniciamos con ejemplos que incluyan ecuaciones conocidas en las que podemos despejar y como una función de x y así calcular dy/dx de la manera usual. Luego derivamos implícitamente las ecuaciones y encontramos la derivada para comparar los dos métodos. Después de los ejemplos, resumimos los pasos incluidos en el nuevo método. En los ejemplos y en los ejercicios siempre se supone que la ecuación dada determina *a* y implícitamente como una función diferenciable de x, así que dy/dx existe.

EJEMPLO 1 Determine dy/dx, si $y^2 = x$.

Solución La ecuación $y^2 = x$ define a dos funciones derivables de x, que es posible determinar, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$ (figura 3.27). Sabemos cómo calcular la derivada de cada una de estas funciones para $x > 0$:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pero suponga que sólo sabemos que la ecuación $y^2 = x$ define *a* y como una o más funciones derivables de x para $x > 0$, sin conocer exactamente dichas funciones. Aun así, ¿es posible determinar dy/dx?

La respuesta es sí. Para determinar dy/dx basta con derivar ambos lados de la ecuación $y^2 = x$ con respecto a x, tratando a $y = f(x)$ como una función derivable de x:

$$y^2 = x$$
$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

La regla de la cadena da $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x) = 2y\frac{dy}{dx}$.

Esta fórmula da las derivadas calculadas para ambas soluciones explícitas, $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = -\sqrt{x}$.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

■

EJEMPLO 2 Determine la pendiente de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, -4)$.

Solución La circunferencia no es la gráfica de una sola función de x. Más bien, es la combinación de dos gráficas de funciones derivables, $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ (figura 3.28). El punto $(3, -4)$ está en la gráfica de y_2, por lo que podemos determinar la pendiente mediante el cálculo de la derivada de manera directa si usamos la regla de la cadena para potencias:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4}.$$

$\frac{d}{dx} - (25 - x^2)^{1/2} = -\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

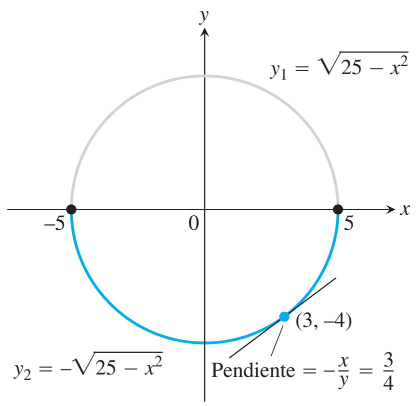


FIGURA 3.28 La circunferencia combina las gráficas de dos funciones. La gráfica de y^2 es la semicircunferencia inferior que pasa por $(3, -4)$.

Podemos resolver este problema con mayor sencillez mediante la derivación, con respecto a x, de la ecuación implícita dada de la circunferencia:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

La pendiente en $(3, -4)$ es $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$

Observe que, a diferencia de la fórmula de la pendiente con dy^2/dx, la cual sólo es para puntos debajo del eje x, la fórmula $dy/dx = -x/y$ se aplica a todos los puntos donde la circunferencia tenga pendiente. También observe que la derivada incluye a *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Para calcular las derivadas de funciones definidas implícitamente, procedemos como en los ejemplos 1 y 2. Tratamos a y como una función derivable de x y aplicamos las reglas usuales para derivar ambos lados de la ecuación definida.

Derivación implícita

1. Derivar, con respecto a x, ambos lados de la ecuación tratando a y como una función derivable de x.
2. Agrupar los términos con dy/dx en un lado de la ecuación y despejar dy/dx.

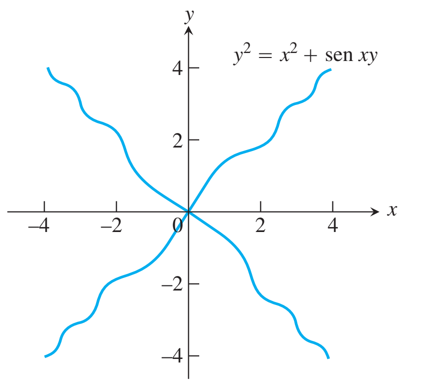


FIGURA 3.29 La gráfica de $y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$ del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determine dy/dx si $y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$ (figura 3.29).

Solución Derivamos implícitamente la ecuación.

$$y^2 = x^2 + \operatorname{sen} xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} xy\right) \qquad \text{Derivar ambos lados con respecto a } x\ldots$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy) \qquad \ldots\text{tratando a } y \text{ como una función de } x \text{ y usando la regla de la cadena.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{Tratar a } xy \text{ como un producto.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos xy)\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + (\cos xy)y \qquad \text{Agrupar los términos con } dy/dx.$$

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy} \qquad \text{Despejar } dy/dx.$$

Observe que la fórmula para dy/dx se aplica dondequiera que la curva definida implícitamente tenga pendiente. De nuevo, observe que la derivada incluye a *ambas* variables, x y y, no sólo a la variable independiente x. ■

Derivadas de orden superior

También se puede utilizar la derivación implícita para determinar derivadas de orden superior.

EJEMPLO 4 Determine d^2y/dx^2 si $2x^3 - 3y^2 = 8$.

Solución Para empezar, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x para encontrar $y' = dy/dx$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) &= \frac{d}{dx}(8) \\ 6x^2 - 6yy' &= 0 && \text{Tratar a } y \text{ como una función de } x. \\ y' &= \frac{x^2}{y}, \quad \text{cuando } y \neq 0 && \text{Despejar } y'. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la regla del cociente para determinar y''.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\cdot y'$$

Por último, sustituimos $y' = x^2/y$, para expresar a y'' en términos de x y de y.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}, \qquad \text{cuando } y \neq 0$$

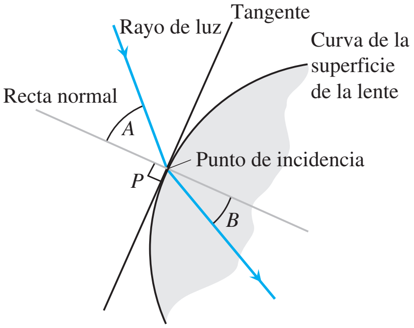


FIGURA 3.30 El perfil de una lente muestra la refracción (desviación) de un rayo de luz que pasa a través de la superficie de la lente.

Lentes, tangentes y rectas normales

En la ley que describe cómo cambia la dirección de la luz cuando penetra en una lente, los ángulos importantes son los ángulos que forma la luz con la recta perpendicular a la superficie de la lente en el punto de incidencia (ángulos A y B en la figura 3.30). Esta línea se denomina *normal* a la superficie en el punto de incidencia. En una vista de perfil de una lente, como la de la figura 3.30, la **normal** es la recta perpendicular a la tangente de la curva del perfil en el punto de incidencia.

EJEMPLO 5 Demuestre que el punto (2, 4) está en la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. Luego determine la tangente y la normal a la curva allí (figura 3.31).

Solución El punto (2, 4) está en la curva, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación dada para la curva $2^3 + 4^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0$.

Para determinar la pendiente de la curva en (2, 4), primero utilizamos la derivación implícita para determinar la fórmula para dy/dx:

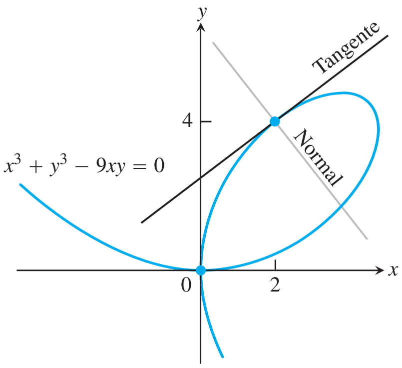


FIGURA 3.31 El ejemplo 5 muestra cómo determinar las ecuaciones para la tangente y la normal del folio (hoja) de Descartes en (2, 4).

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 9xy &= 0 \\ \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) &= \frac{d}{dx}(0) \\ 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) &= 0 && \text{Derivar ambos lados con respecto a } x. \\ (3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y &= 0 && \text{Tratar a } xy \text{ como un producto y a } y \text{ como una función de } x. \\ 3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} &= 9y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}. && \text{Despejar } dy/dx. \end{aligned}$$

Ahora evaluamos la derivada en $(x, y) = (2, 4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - 2^2}{4^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La tangente en (2, 4) es la recta que pasa por (2, 4) con pendiente $4/5$:

$$y = 4 + \frac{4}{5}(x - 2)$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

La normal a la curva en (2, 4) es la recta perpendicular a la recta tangente allí, es decir, la recta que pasa por (2, 4) con pendiente $-5/4$:

$$y = 4 - \frac{5}{4}(x - 2)$$
$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}.$$

■

La fórmula cuadrática nos permite despejar a y en términos de x, en una ecuación de segundo grado como $y^2 - 2xy + 3x^2 = 0$. Existe una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, la cual es como la fórmula cuadrática, pero mucho más complicada. Si esta fórmula se utilizara para despejar a y en términos de x en la ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ del ejemplo 5, entonces las tres funciones determinadas por la ecuación serían

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}$$

y

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{4} - 27x^3}}\right)\right].$$

Utilizar derivación implícita en el ejemplo 5 fue mucho más sencillo que calcular dy/dx directamente de cualquiera de las fórmulas anteriores. La determinación de las pendientes en curvas definidas mediante ecuaciones de grado superior por lo común requiere derivación implícita.

Ejercicios 3.7

Derivación implícita

Utilice derivación implícita para determinar dy/dx en los ejercicios 1 a 14.

1. $x^2y + xy^2 = 6$

2. $x^3 + y^3 = 18xy$

3. $2xy + y^2 = x + y$

4. $x^3 - xy + y^3 = 1$

5. $x^2(x - y)^2 = x^2 - y^2$

6. $(3xy + 7)^2 = 6y$

7. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

8. $x^3 = \dfrac{2x - y}{x + 3y}$

9. $x = \tan y$

10. $xy = \cot(xy)$

11. $x + \tan(xy) = 0$

12. $x^4 + \operatorname{sen} y = x^3y^2$

13. $y \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$

14. $x \cos(2x + 3y) = y \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 15 a 18, determine $dr/d\theta$.

15. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

16. $r - 2\sqrt{\theta} = \dfrac{3}{2}\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\theta^{3/4}$

17. $\operatorname{sen}(r\theta) = \dfrac{1}{2}$

18. $\cos r + \cot\theta = r\theta$

Segundas derivadas

En los ejercicios 19 a 26, utilice derivación implícita para determinar dy/dx y luego d^2y/dx^2.

19. $x^2 + y^2 = 1$

20. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

21. $y^2 = x^2 + 2x$

22. $y^2 - 2x = 1 - 2y$

23. $2\sqrt{y} = x - y$

24. $xy + y^2 = 1$

25. Si $x^3 + y^3 = 16$, determine el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(2, 2)$.

26. Si $xy + y^2 = 1$, determine el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, -1)$.

En los ejercicios 27 y 28, determine la pendiente de la curva en los puntos dados.

27. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en $(-2, 1)$ y en $(-2, -1)$.

28. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ en $(1, 0)$ y en $(1, -1)$.

Pendientes, tangentes y normales

En los ejercicios 29 a 38, verifique que el punto dado esté en la curva y determine las rectas que son **(a)** tangente y **(b)** normal a la curva en el punto dado.

29. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

30. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

31. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

32. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

33. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

34. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad \left(\sqrt{3}, 2\right)$

35. $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

36. $x \operatorname{sen} 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

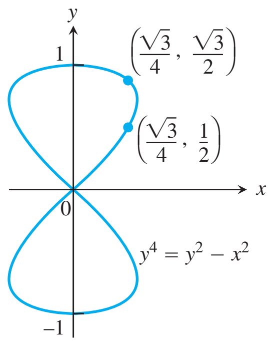
37. $y = 2 \operatorname{sen}(\pi x - y), \quad (1, 0)$

38. $x^2 \cos^2 y - \operatorname{sen} y = 0, \quad (0, \pi)$

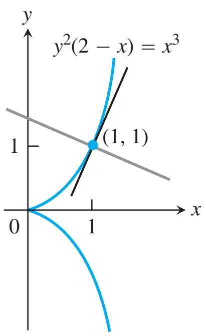
39. Tangentes paralelas Determine los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza al eje x y demuestre que las tangentes a la curva en estos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común a tales tangentes?

40. Normales paralelas a una recta Determine las normales a la curva $xy + 2x - y = 0$, que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

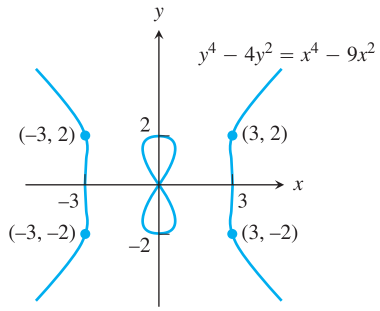
41. La curva ocho Determine las pendientes de la curva $y^4 = y^2 - x^2$ en los dos puntos que se muestran a continuación.



42. La cisoide de Diocles (que data del 200 a. de C.) Determine ecuaciones para la tangente y la normal a la cisoide de Diocles $y^2(2 - x) = x^3$ en $(1, 1)$.



43. La curva del diablo (Gabriel Cramer, 1750) Determine las pendientes de la curva del diablo $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ en los cuatro puntos que se indican.



44. El folio de Descartes (Véase la figura 3.26).

a. Determine la pendiente del folio de Descartes $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ en los puntos $(4, 2)$ y $(2, 4)$.

b. ¿En qué otro punto, distinto del origen, el folio tiene una tangente horizontal?

c. Determine las coordenadas del punto A en la figura 3.26, donde el folio tiene una tangente vertical.

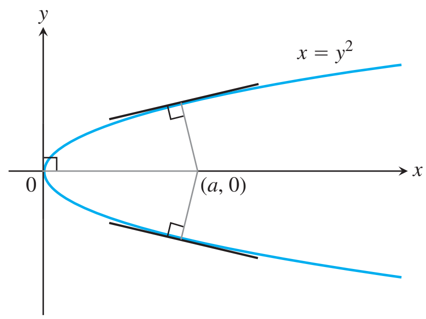
Teoría y ejemplos

45. Intersecciones de la normal La recta que es normal a la curva $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ en $(1, 1)$, ¿en qué otro punto interseca a la curva?

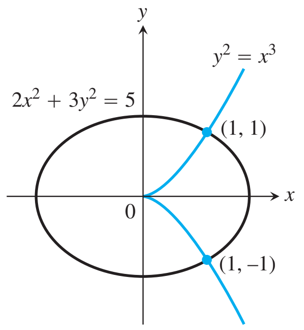
46. Regla de la potencia para exponentes racionales Sean p y q enteros con $q > 0$. Si $y = x^{p/q}$, obtenga la derivada de la ecuación equivalente $y^q = x^p$ implícitamente y demuestre que para $y \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}.$$

47. Normales a una parábola Demuestre que si es posible dibujar tres normales desde el punto $(a, 0)$ a la parábola $x = y^2$, la cual se representa en el siguiente diagrama, entonces a debe ser mayor que $1/2$. Una de las normales es el eje x. ¿Para qué valor de a las otras dos normales son perpendiculares?



48. ¿Existe algo especial con respecto a las tangentes a las curvas $y^2 = x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 5$ en los puntos $(1, \pm 1)$? Justifique su respuesta.

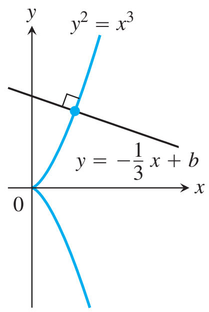


49. Verifique que los pares de las siguientes curvas se cortan ortogonalmente.

a. $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 = 3y^2$

b. $x = 1 - y^2, \quad x = \frac{1}{3}y^2$

50. La gráfica de $y^2 = x^3$ se denomina **parábola semicúbica** y se muestra en la siguiente figura. Determine la constante b de forma que la recta $y = -\frac{1}{3}x + b$ corte ortogonalmente a esta gráfica.



T En los ejercicios 51 y 52, determine dy/dx (considerando a y como una función diferenciable de x) y dx/dy (considerando a x como una función diferenciable de y). ¿Cómo parecen estar relacionadas dy/dx y dx/dy? Explique geométricamente la relación en términos de las gráficas.

51. $xy^3 + x^2y = 6$ **52.** $x^3 + y^2 = \operatorname{sen}^2 y$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 53 a 60, utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos.

a. Trace la ecuación con el graficador de relaciones implícitas de un SAC. Verifique que el punto P satisface la ecuación.

b. Mediante derivación implícita, determine una fórmula para la derivada dy/dx y evalúela en el punto dado P.

c. Utilice la pendiente que encontró en el inciso (b) para determinar una ecuación para la recta tangente a la curva en P. Luego trace juntas la curva implícita y la recta tangente en una sola gráfica.

53. $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad P(2, 1)$

54. $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad P(1, 1)$

55. $y^2 + y = \dfrac{2 + x}{1 - x}, \quad P(0, 1)$

56. $y^3 + \cos xy = x^2, \quad P(1, 0)$

57. $x + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right) = 2, \quad P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

58. $xy^3 + \tan(x + y) = 1, \quad P\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

59. $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad P(1, 1)$

60. $x\sqrt{1 + 2y} + y = x^2, \quad P(1, 0)$

3.8 Tasas relacionadas

En esta sección analizaremos problemas que se refieren a la tasa a la que cambia alguna variable cuando se conoce la tasa (o razón) a la que cambia otra variable (o quizás otras) relacionada(s). El problema de determinar una tasa de cambio a partir de otras tasas de cambio relacionadas se denomina *problema de tasas relacionadas*.

Ecuaciones de tasas relacionadas

Suponga que bombeamos aire a un globo esférico. Tanto el volumen como el radio aumentan al pasar el tiempo. Si V es el volumen y r es el radio del globo en un instante determinado, entonces

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Mediante la regla de la cadena, derivamos ambos lados con respecto a t para determinar una ecuación que relacione las tasas de cambio de V y r.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

De esta forma, si conocemos el radio r del globo y la tasa de cambio dV/dt a la que aumenta el volumen en un instante dado, entonces podemos despejar dr/dt en la ecuación para determinar qué tan rápido aumenta el radio en ese instante. Observe que es más sencillo medir directamente la tasa de cambio del volumen (la razón a la que el aire se bombea en el globo) que medir el aumento del radio. La ecuación de las tasas relacionadas nos permite calcular dr/dt a partir de dV/dt.

Con mucha frecuencia la clave para relacionar las variables en problemas de tasas relacionadas es elaborar un dibujo que muestre las relaciones entre ellas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

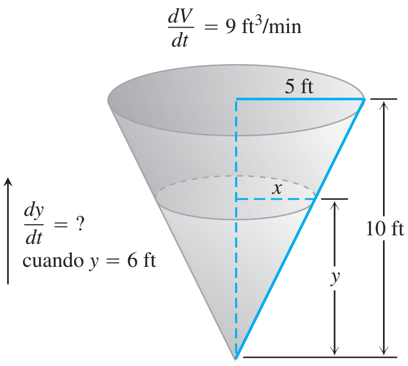


FIGURA 3.32 La geometría del depósito cónico y la tasa a la cual el agua llena el depósito determinan la rapidez con la que se eleva el nivel del agua (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Se vierte agua en un depósito de forma cónica a razón de 9 ft^3/min. El depósito tiene su vértice en la parte inferior, una altura de 10 ft, y el radio de la base mide 5 ft. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua cuando el agua tiene una profundidad de 6 ft?

Solución La figura 3.22 muestra un depósito cónico parcialmente lleno. Las variables en el problema son

V = volumen (ft^3) de agua en el depósito en el instante t (min)

x = radio (ft) de la superficie de agua en el instante t

y = profundidad (ft) de agua en el depósito en el instante t.

Suponemos que V, x y y son funciones derivables de t. Las constantes son las dimensiones del depósito. Nos piden determinar dy/dt cuando

$$y = 6 \text{ ft} \qquad \text{y} \qquad \frac{dV}{dt} = 9 \text{ ft}^3/\text{min}.$$

El agua forma un cono con volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Esta ecuación incluye a x, así como a V y a y. Puesto que no se da información acerca de x y dx/dt en el instante en cuestión, necesitamos eliminar x. Los triángulos semejantes en la figura 3.32 nos sugieren una manera de expresar a x en términos de y.

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{y}{2}.$$

Por lo tanto, encontramos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

para obtener la derivada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{dy}{dt}.$$

Por último, utilizamos $y = 6$ y $dV/dt = 9$ y despejamos dy/dt.

$$9 = \frac{\pi}{4}(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

En el instante en cuestión, el nivel del agua se eleva aproximadamente 0.32 ft/min. ■

Estrategia para problemas de tasas relacionadas

1. *Elabore un dibujo y dé nombre a las variables y las constantes.* Utilice t para el tiempo. Suponga que todas las variables son funciones derivables de t.
2. *Escriba la información numérica* (en términos de los símbolos que haya elegido).
3. *Escriba lo que se pide determinar* (por lo regular, una tasa de cambio expresada como una derivada).
4. *Escriba una ecuación que relacione a las variables.* Puede combinar dos o más ecuaciones para obtener una sola que relacione la variable, cuya tasa de cambio necesita conocer, con las variables cuyas tasas de cambio conoce.
5. *Derive con respecto a t.* Luego exprese la tasa de cambio que necesita en términos de las tasas de cambio y las variables cuyos valores conoce.
6. *Evalúe.* Utilice los valores conocidos para determinar la tasa de cambio desconocida.

EJEMPLO 2 Un globo de aire caliente se eleva verticalmente desde el nivel de un campo y es rastreado por un observador, que se encuentra a 500 ft del punto de lanzamiento. En el momento en que el ángulo de elevación del observador es $\pi/4$, el ángulo aumenta a razón de 0.14 rad/min. ¿Qué tan rápido se eleva el globo en ese instante?

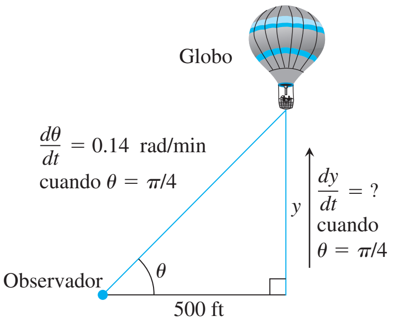


FIGURA 3.33 La tasa de cambio de la altura del globo está relacionada con la tasa de cambio del ángulo que el observador forma con el suelo (ejemplo 2).

Solución Respondemos la pregunta es seis pasos.

1. *Elabore un dibujo y nombre las variables y las constantes* (figura 3.33). Las variables en el dibujo son

   $\theta =$ el ángulo, en radianes, que forma la vista del observador con el suelo.

   $y =$ la altura del globo en ft.

Representamos con t al tiempo, en minutos, y suponemos que θ y y son funciones derivables de t.

La única constante en el dibujo es la distancia del observador al punto de lanzamiento (500 ft). No necesitamos ponerle un símbolo especial.

2. *Escriba la información numérica.*

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14 \text{ rad/min} \qquad \text{cuando} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

3. *Escriba lo que se pide determinar.* Necesitamos dy/dt cuando $\theta = \pi/4$.
4. *Escriba una ecuación que relacione a las variables y y θ.*

$$\frac{y}{500} = \tan\theta \qquad \text{o} \qquad y = 500 \tan\theta$$

5. *Derive con respecto a t usando la regla de la cadena.* El resultado nos dice cómo está relacionada dy/dt (que necesitamos) con du/dt (que conocemos).

$$\frac{dy}{dt} = 500\,(\sec^2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

6. *Evalúe con $\theta = \pi/4$ y $d\theta/dt = 0.14$ para determinar dy/dt.*

$$\frac{dy}{dt} = 500\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14) = 140 \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

En el instante en cuestión, el globo se eleva a una tasa de 140 ft/min. ■

EJEMPLO 3 Un policía en su auto patrulla se aproxima desde el norte a una intersección en ángulo recto, persiguiendo a un automóvil que va a exceso de velocidad, el cual ha dado vuelta en la esquina y ahora se dirige hacia el este. Cuando la patrulla está a 0.6 mi al norte de la intersección y el automóvil está a 0.8 mi al este, el policía, con su radar, determina que la distancia entre él y el automóvil aumenta a razón de 20 mph. Si la patrulla se desplaza a 60 mph en el instante de la medición, ¿cuál es la rapidez del automóvil?

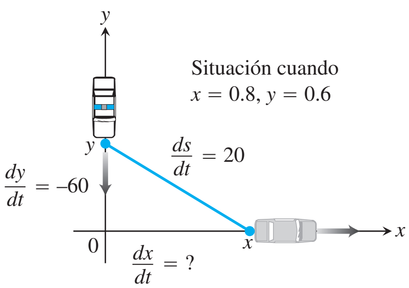


FIGURA 3.34 La rapidez del automóvil está relacionada con la rapidez de la patrulla y la tasa de cambio de la distancia entre ellos (ejemplo 3).

Solución Dibujamos el automóvil y la patrulla en el plano coordenado, usando la parte positiva del eje x para representar el tramo de la carretera que va hacia el este, y la parte positiva del eje y para representar el tramo que va hacia el sur (figura 3.34). Denotamos el tiempo por t y definimos

x = posición del automóvil en el instante t

y = posición de la patrulla en el instante t

s = distancia entre el automóvil y la patrulla en el instante t.

Suponemos que x, y y s son funciones derivables de t.

Necesitamos determinar dx/dt cuando

$$x = 0.8 \text{ mi}, \qquad y = 0.6 \text{ mi}, \qquad \frac{dy}{dt} = -60 \text{ mph}, \qquad \frac{ds}{dt} = 20 \text{ mph}.$$

Observe que dy/dt es negativa, ya que y disminuye.

Derivamos la ecuación de distancia

$$s^2 = x^2 + y^2$$

(también podríamos haber utilizado $s = \sqrt{x^2 + y^2}$), y obtenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Por último, utilizamos $x = 0.8$, $y = 0.6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$ y despejamos dx/dt.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20\sqrt{(0.8)^2 + (0.6)^2} + (0.6)(60)}{0.8} = 70$$

En el momento en cuestión, la rapidez del automóvil es de 70 mph. ■

EJEMPLO 4 Una partícula, P, se desplaza a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de una circunferencia con radio de 10 ft y con centro en el origen. La posición inicial de la partícula es (0, 10) en el eje y y su destino final es el punto (10, 0) en el eje x. Una vez que la partícula está en movimiento, la recta tangente en P interseca al eje x en el punto Q (el cual se mueve al pasar el tiempo). Si la partícula tarda 30 segundos en ir de su posición inicial a la final, ¿qué tan rápido se mueve el punto Q en el eje x cuando está a 20 ft del centro de la circunferencia?

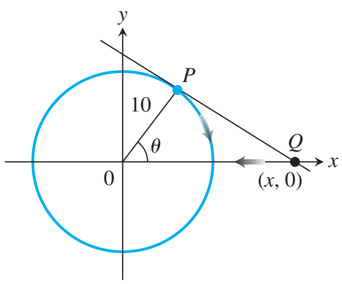


FIGURA 3.35 La partícula P se desplaza en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia (ejemplo 4).

Solución Dibujamos la situación en el plano coordenado con la circunferencia centrada en el origen (figura 3.35). Representamos con t al tiempo y denotamos con θ al ángulo que se forma entre el eje x y el radio que une al origen con P. Como la partícula se mueve desde la posición inicial a la final en 30 segundos, viaja a lo largo del círculo a una tasa constante de $\pi/2$ radianes en 1/2 minuto, es decir, π rad/min. En otras palabras, $d\theta/dt = -\pi$, con t medido en minutos. El signo negativo aparece porque θ disminuye al pasar el tiempo.

Si denotamos con $x(t)$ a la distancia del punto Q al origen, en el instante t, necesitamos determinar dx/dt cuando

$$x = 20 \text{ ft} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\pi \text{ rad/min}.$$

Para relacionar las variables x y θ, con base en la figura 3.35, vemos que $x \cos\theta = 10$, o $x = 10 \sec\theta$. Al derivar esta última ecuación, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 10 \sec\theta \tan\theta \frac{d\theta}{dt} = -10\pi \sec\theta \tan\theta.$$

Observe que dx/dt es negativa, ya que x disminuye (Q se mueve hacia el origen).

Cuando $x = 20$, $\cos\theta = 1/2$ y $\sec\theta = 2$. Además, $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{3}$. Se sigue que

$$\frac{dx}{dt} = (-10\pi)(2)\left(\sqrt{3}\right) = -20\sqrt{3}\pi.$$

En el momento en cuestión, el punto Q se mueve hacia el origen con una rapidez de $20\sqrt{3}\pi \approx 108.8$ ft/min. ■

EJEMPLO 5 Un avión vuela a una altitud constante de 12,000 ft sobre el nivel del mar, conforme se aproxima a una isla del Pacífico. La aeronave pasa directamente por la línea de visión de una estación de radar, ubicada en la isla; el radar indica que el ángulo inicial entre el nivel del mar y su línea de visión al avión es de 30°. ¿Con qué rapidez (en millas por hora) se aproxima el avión a la isla cuando es detectado por el radar, si éste gira hacia arriba (en contra de las manecillas del reloj) a razón de 2/3 grado/segundo, con la finalidad de mantener el avión dentro de su línea de visión?

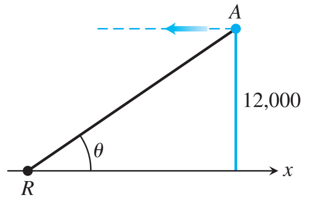


FIGURA 3.36 Avión A, a una altura constante, que viaja hacia la estación del radar R (ejemplo 5).

Solución El avión, A, y la estación del radar, R, se dibujan en el plano coordenado, considerando el eje positivo x como la distancia horizontal al nivel del mar de R a A, y la parte positiva del eje y como la altitud vertical desde el nivel del mar. Representamos con t al tiempo y observamos que $y = 12{,}000$ es una constante. La situación general y el ángulo de la línea de visión, θ, se ilustran en la figura 3.36. Necesitamos determinar dx/dt cuando $\theta = \pi/6$ rad y $d\theta/dt = 2/3$ grados/seg.

Con base en la figura 3.36, vemos que

$$\frac{12{,}000}{x} = \tan\theta \quad \text{o} \quad x = 12{,}000 \cot\theta.$$

Si se utilizan millas en vez de ft en nuestras unidades de distancia, la última ecuación se traduce en

$$x = \frac{12{,}000}{5280} \cot\theta.$$

La derivación con respecto a t produce

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1200}{528} \csc^2\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $\theta = \pi/6$, $\operatorname{sen}^2\theta = 1/4$, así que $\csc^2\theta = 4$. Al convertir $d\theta/dt = 2/3$ grados/seg a radianes por hora, encontramos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \text{ rad/hr.} \qquad 1 \text{ hr} = 3600 \text{ seg, } 1 \text{ grado} = \pi/180 \text{ rad}$$

De esta forma, la sustitución en la ecuación para dx/dt da

$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{1200}{528}\right)(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)(3600) \approx -380.$$

Aparece el signo negativo, ya que la distancia x disminuye, por lo que la aeronave se aproximaba a la isla con una rapidez de unos 380 mi/hr cuando fue detectada por primera vez por el radar. ■

EJEMPLO 6 La figura 3.37a muestra una cuerda que pasa por una polea en P y que tiene sujeto un peso W en un extremo. El otro extremo está sujeto 5 ft por arriba del suelo en la mano de un trabajador, M. Suponga que la polea está a 25 ft por arriba del suelo, la cuerda mide 45 ft

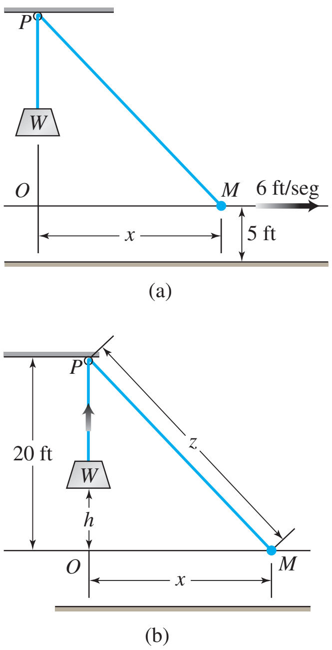


FIGURA 3.37 Un trabajador en M camina hacia la derecha tirando del peso W hacia arriba conforme la cuerda se mueve y pasa por la polea P (ejemplo 6).

de largo y el trabajador camina rápidamente, por lo que se aleja de la recta vertical PW a razón de 6 ft/seg. ¿Qué tan rápido se eleva el peso, cuando la mano del trabajador está a 21 ft de PW?

Solución En cualquier instante t, sea OM la línea horizontal de longitud x ft, que va del punto O, directamente debajo de la polea, a la mano del trabajador M (figura 3.37). Sea h la altura, con respecto a O, del peso W, y denotemos como z la longitud del trozo de cuerda que va de la polea P a la mano del trabajador. Necesitamos conocer dh/dt cuando $x = 21$, puesto que $dx/dt = 6$. Observe que la altura de P por arriba de O es de 20 ft, ya que O está 5 ft por encima del suelo. Supongamos que el ángulo en O es recto.

En cualquier instante t se presentan las siguientes relaciones (figura 3.37b):

$$20 - h + z = 45 \qquad \text{La longitud total de la cuerda es 45 de ft.}$$
$$20^2 + x^2 = z^2 \qquad \text{El ángulo en } O \text{ es recto.}$$

Si despejamos z en la primera ecuación, se tiene $z = 25 + h$, lo que sustituimos en la segunda ecuación para obtener

$$20^2 + x^2 = (25 + h)^2. \tag{1}$$

Al diferenciar ambos lados con respecto a t se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(25 + h)\frac{dh}{dt},$$

y al despejar dh/dt en esta última ecuación encontramos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{x}{25 + h}\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Como conocemos dx/dt, sólo falta determinar $25 + h$ en el instante cuando $x = 21$. De acuerdo con la ecuación (1),

$$20^2 + 21^2 = (25 + h)^2$$

así que

$$(25 + h)^2 = 841, \quad \text{o bien,} \quad 25 + h = 29.$$

Ahora, la ecuación (2) da

$$\frac{dh}{dt} = \frac{21}{29}\cdot 6 = \frac{126}{29} \approx 4.3 \text{ ft/seg}$$

como la tasa a la que se eleva el peso cuando $x = 21$ ft. ■

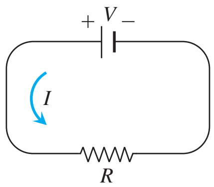
Ejercicios 3.8

1. **Área** Suponga que el radio r y el área $A = \pi r^2$ de un círculo son funciones derivables de t. Escriba una ecuación que relacione dA/dt con dr/dt.
2. **Área de la superficie** Suponga que el radio, r, y el área de la superficie $S = 4\pi r^2$ de una esfera son funciones derivables de t. Escriba una ecuación que relacione dS/dt con dr/dt.
3. Suponga que $y = 5x$ y $dx/dt = 2$. Determine dy/dt.
4. Suponga que $2x + 3y = 12$ y que $dy/dt = -2$. Determine dx/dt.
5. Si $y = x^2$ y $dx/dt = 3$, ¿cuál es el valor de dy/dt cuando $x = -1$?
6. Si $x = y^3 - y$ y $dy/dt = 5$, ¿cuál es el valor de dx/dt cuando $y = 2$?
7. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dx/dt = -2$, ¿cuál es el valor de dy/dt cuando $x = 3$ y $y = -4$?
8. Si $x^2y^3 = 4/27$ y $dy/dt = 1/2$, ¿cuál es el valor de dx/dt cuando $x = 2$?
9. Si $L = \sqrt{x^2 + y^2}$, $dx/dt = -1$, y $dy/dt = 3$, determine dL/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.
10. Si $r + s^2 + v^3 = 12$, $dr/dt = 4$ y $ds/dt = -3$, determine dv/dt cuando $r = 3$ y $s = 1$.
11. Si la longitud original de 24 m del lado x de un cubo disminuye a razón de 5 m/min, cuando $x = 3$ m, ¿a qué razón cambia
    a. el área de la superficie del cubo?
    b. el volumen?
12. La superficie del área de un cubo aumenta a razón de 72 in^2/seg. ¿A qué tasa cambia el volumen del cubo cuando la longitud del lado es $x = 3$ in?

13. **Volumen** El radio r y la altura h de un cilindro circular recto están relacionados con el volumen V del cilindro mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.
    a. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dh/dt si r es constante?
    b. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt si h es constante?
    c. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt y dh/dt si ni r y ni h son constantes?

14. **Volumen** El radio r y la altura h de un cono circular recto están relacionados con el volumen V del cono mediante la ecuación $V = (1/3)\pi r^2 h$.
    a. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dh/dt si r es constante?
    b. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt si h es constante?
    c. ¿Cómo está relacionada dV/dt con dr/dt y dh/dt si ni r ni h son constantes?

15. **Cambio del voltaje** El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico, como el que se ilustra aquí, están relacionados mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V aumenta a razón de 1 volt/seg, mientras que I disminuye a razón de 1/3 de amp/seg. Con t se denota el tiempo en segundos.



    a. ¿Cuál es el valor de dV/dt?
    b. ¿Cuál es el valor de dI/dt?
    c. ¿Qué ecuación relaciona a dR/dt con dV/dt y dI/dt?
    d. Determine la razón a la que cambia R cuando $V = 12$ volts e $I = 2$ amp. ¿R aumenta o disminuye?

16. **Potencial eléctrico** El potencial eléctrico P (en watts) de un circuito eléctrico está relacionado con la resistencia del circuito R (en ohms) y la corriente I (en amperes) mediante la ecuación $P = RI^2$.
    a. ¿Cómo están relacionadas dP/dt, dR/dt y dI/dt si P, R e I no son constantes?
    b. ¿Cómo está relacionada dR/dt con dI/dt si P es constante?

17. **Distancia** Sean x y y funciones derivables de t, y sea $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(0, y)$ en el plano xy.
    a. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dx/dt si y es constante?
    b. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dx/dt y dy/dt si ni x ni y son constantes?
    c. ¿Cómo está relacionada dx/dt con dy/dt si s es constante?

18. **Diagonales** Si x, y y z son las longitudes de los lados de una caja rectangular, la longitud común de las diagonales de la caja es $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
    a. Suponiendo que x, y y z son funciones derivables de t, ¿cómo está relacionada ds/dt con dx/dt, dy/dt y dz/dt?
    b. ¿Cómo está relacionada ds/dt con dy/dt y dz/dt si x es constante?
    c. ¿Cómo están relacionadas dx/dt, dy/dt y dz/dt si s es constante?

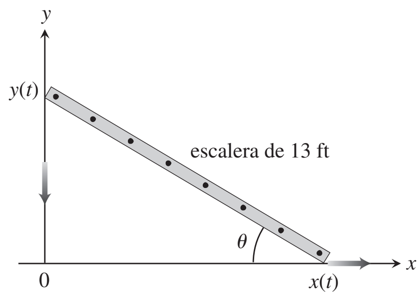
19. **Área** El área A de un triángulo con lados de longitudes a y b, que forman un ángulo de medida θ, es
$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta.$$
    a. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$ si a y b son constantes?
    b. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$ y da/dt si sólo b es constante?
    c. ¿Cómo está relacionada dA/dt con $d\theta/dt$, da/dt y db/dt si ni a ni b ni θ son constantes?

20. **Calentamiento de un plato** Cuando un plato circular de metal se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0.01 cm/min. ¿A qué razón aumenta el área del plato cuando el radio es de 50 cm?

21. **Cambio de dimensiones de un rectángulo** La longitud l de un rectángulo disminuye a razón de 2 cm/seg, mientras que el ancho w aumenta a razón de 2 cm/seg. Cuando l = 12 cm y $w = 5$ cm, determine las tasas de cambio de **(a)** el área, **(b)** el perímetro y **(c)** las longitudes de las diagonales del rectángulo. ¿Cuál de estas cantidades aumenta y cuál disminuye?

22. **Cambio de dimensiones en una caja rectangular** Suponga que las longitudes de los lados x, y y z de una caja rectangular cerrada cambian a las siguientes tasas:
$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/sec}, \quad \frac{dy}{dt} = -2 \text{ m/sec}, \quad \frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}.$$
Determine las tasas a las que cambia **(a)** el volumen, **(b)** el área de la superficie y **(c)** la longitud de la diagonal, $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el instante en que $x = 4$, $y = 3$ y $z = 2$.

23. **Una escalera que resbala** Una escalera de 13 ft está recargada sobre el muro exterior de una casa cuando su base empieza a deslizarse y alejarse (véase la figura). En el instante en el que la base está a 12 ft de la casa, la base se mueve a una tasa de 5 ft/seg.
    a. ¿Qué tan rápido la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo?
    b. En ese instante, ¿con qué tasa cambia el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo?
    c. En ese instante, ¿a qué tasa cambia el ángulo θ entre la escalera y el suelo?



24. **Tráfico aéreo comercial** Dos aviones comerciales vuelan a una altura de 40,000 ft a lo largo de recorridos en línea recta que se intersecan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección con una rapidez de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué tasa cambia la distancia entre ellos cuando A está a 5 millas náuticas del punto de intersección y B a 12 millas náuticas del punto de intersección?

25. **Vuelo de una cometa** Una niña vuela una cometa a una altura de 300 ft, y el viento aleja horizontalmente a la cometa a una tasa de 25 ft/seg. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda cuando la cometa está a 500 ft de ella?

26. **Perforación de un cilindro** Los mecánicos de la Automotriz Lincoln vuelven a perforar un cilindro de 6 in de profundidad para colocar un nuevo pistón. La máquina que utilizan aumenta el radio del cilindro una milésima de pulgada cada 3 minutos. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen del cilindro cuando la perforación (el diámetro) es de 3.800 in?

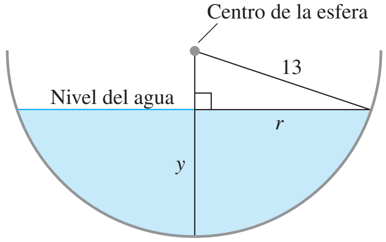
27. Crecimiento de una pila de arena Desde una banda transportadora cae arena a la parte superior de una pila cónica a una tasa de 10 m^3/min. La altura de la pila siempre es tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian **(a)** la altura y **(b)** el radio cuando la pila tiene una altura de 4 m? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

28. Drenado de un depósito cónico Desde un depósito cónico de concreto (con el vértice hacia abajo), con altura de 6 m y cuyo radio de la base mide 45 m, fluye agua a razón de 50 m^3/min.

a. ¿Con qué rapidez (en centímetros por minuto) disminuye el nivel del agua cuando la profundidad es de 5 m?

b. En ese momento, ¿qué tan rápido cambia el radio de la superficie del agua? Dé su respuesta en centímetros por minuto.

29. Drenado de un depósito semiesférico De un depósito, en forma de tazón semiesférico de 13 m de radio, sale agua a razón de 6 m^3/min; en la figura se le observa de perfil. Responda las siguientes preguntas, considerando que el volumen de agua en un tazón semiesférico de radio R es $V = (\pi/3)y^2(3R - y)$ cuando el agua tiene una profundidad de y metros.



a. ¿A qué tasa cambia el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 8 m?

b. ¿Cuál es el radio r de la superficie del agua cuando la profundidad del agua es de y m?

c. ¿A qué tasa cambia el radio r cuando el agua tiene una profundidad de 8 m?

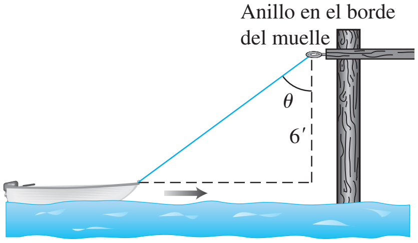
30. Crecimiento de una gota de lluvia Suponga que una gota de lluvia es una esfera perfecta y que, durante la condensación, la gota recolecta humedad a una tasa proporcional al área de su superficie. Demuestre que en tales circunstancias el radio de la gota aumenta a una tasa constante.

31. Radio de un globo que se infla Un globo esférico se infla con helio a razón de 100π ft^3/min. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo en el instante en el que el radio es de 5 ft? ¿Con qué rapidez aumenta el área de la superficie?

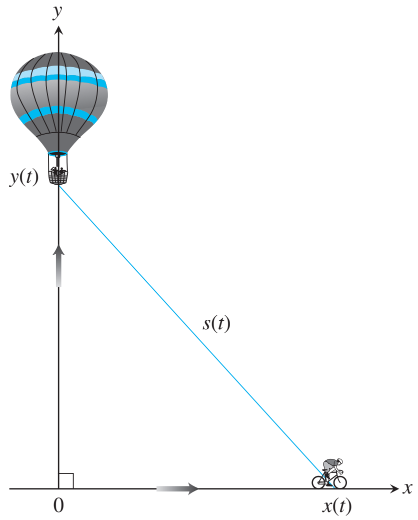
32. Un bote que es arrastrado Un bote se arrastra hacia un muelle mediante una cuerda que está atada a la proa del bote y a un aro en el muelle a 6 ft arriba de la proa. Se tira de la cuerda a razón de 2 ft/seg.

a. ¿Qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando la longitud de la cuerda es de 10 ft?

b. ¿A qué velocidad cambia el ángulo θ en ese instante? (Véase la figura).



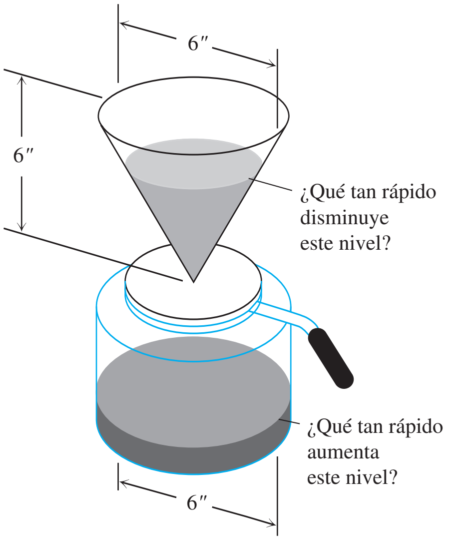
33. Un globo y una bicicleta Un globo se eleva verticalmente desde una superficie plana a una tasa de 1 ft/seg. Justo cuando el globo está a 65 ft sobre el nivel del suelo, una bicicleta que se desplaza a una velocidad constante de 17 ft/seg pasa debajo de él. ¿Qué tan rápido cambia la distancia, $s(t)$, entre la bicicleta y el globo 3 segundos después?



34. Preparación de café De un filtro cónico sale café y cae en una cafetera cilíndrica a razón de 10 ft^3/min.

a. ¿Qué tan rápido sube el nivel en la cafetera cuando el café en el cono tiene una profundidad de 5 in?

b. En ese momento, ¿qué tan rápido disminuye el nivel en el cono?



35. Potencia cardiaca A finales de la década de 1860, Adolf Fick, un profesor de fisiología en la Facultad de Medicina en Würzberg, Alemania, desarrolló uno de los métodos que utilizamos en la actualidad para medir cuánta sangre bombea el corazón humano en un minuto. Probablemente, su potencia cardiaca cuando lea esta oración sea de alrededor de 7 L/min. En reposo es aproximadamente un poco menos de 6 L/min. Si fuera un corredor de maratón, su potencia cardiaca podría ser tan alta como 30 L/min.

Su potencia cardiaca puede calcularse mediante la fórmula

$$y = \frac{Q}{D},$$

donde Q es el número de milímetros de CO_2 que exhala en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (ml/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 en la sangre que regresa de los pulmones. Con $Q = 233$ ml/min y $D = 97 - 56 = 41$ ml/L,

$$y = \frac{233 \text{ ml/min}}{41 \text{ ml/L}} \approx 5.68 \text{ L/min},$$

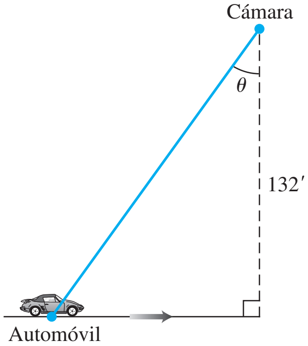
muy cercano a los 6 L/min que la mayoría de la gente tiene en estado basal (es decir, en reposo). (Datos del doctor J. Kenneth Herd, del Quillan College of Medicine, East Tennessee State University).

Suponga que cuando $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que D disminuye a razón de 2 unidades por minuto, mientras que Q permanece sin cambio. ¿Qué sucede con la potencia cardiaca?

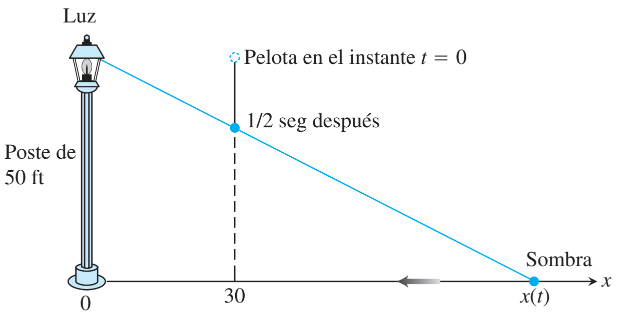
36. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se desplaza a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de tal manera que su coordenada x (medida en metros) aumenta a una razón constante de 10 m/seg. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la línea que une a la partícula con el origen cuando $x = 3$ m?

37. Movimiento en el plano Las coordenadas de una partícula en un plano métrico xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = -1$ m/seg y $dy/dt = -5$ m/seg. ¿Qué tan rápido cambia la distancia al origen de la partícula cuando pasa por el punto (5, 12)?

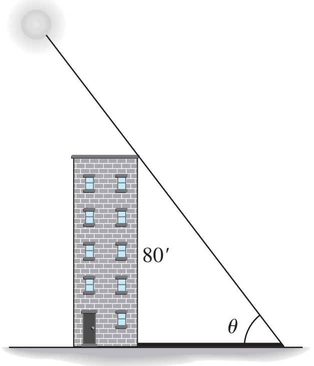
38. Grabación en video de un automóvil en movimiento Usted hace una videograbación de una carrera de automóviles desde una tribuna ubicada a 132 ft de la pista; sigue un automóvil que se desplaza a 180 millas/h (264 ft/seg), como se ilustra en la figura. ¿Qué tan rápido cambiará el ángulo θ de su cámara cuando el automóvil esté justo enfrente de usted? ¿Qué tan rápido cambiará medio segundo después?



39. Movimiento de sombra Una luz brilla desde el extremo superior de un poste de 50 ft de altura. Se lanza una pelota a la misma altura desde un punto ubicado a 30 ft de distancia de la luz. (Véase la figura). ¿Qué tan rápido se mueve la sombra de la pelota a lo largo del suelo 1/2 segundo después? (Suponga que la pelota cae una distancia $s = 16t^2$ ft en t segundos).



40. Sombra de un edificio En la mañana de un día en el que el sol pasa directamente encima de un edificio que mide 80 ft de altura, la sombra proyectada es de 60 ft de largo al nivel del suelo. En ese momento el ángulo θ que el sol forma con el suelo aumenta a una razón de 0.27°/min. ¿A qué tasa decrece la sombra? (Recuerde usar radianes. Exprese su respuesta en pulgadas por minuto; redondee a la décima más cercana).



41. Una capa de hielo que se derrite Una bola esférica de acero, con un diámetro de 8 pulgadas, se cubre con una capa de hielo de espesor uniforme. Si el hielo se derrite a una tasa de 10 in^3/min, ¿qué tan rápido disminuye el grosor de la capa de hielo cuando tiene 2 in de espesor? ¿Qué tan rápido decrece el área superficial exterior del hielo?

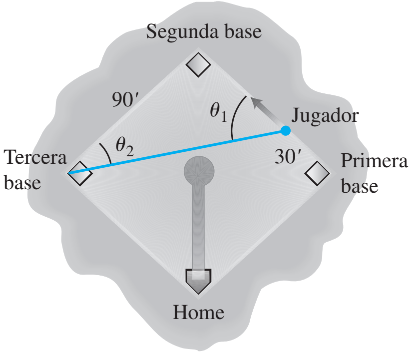
42. Patrulla de caminos Un avión de la policía vuela a 3 millas de altura, con una velocidad constante de 120 mi/hora, por encima de un camino recto. El piloto ve un automóvil que se acerca y, utilizando un radar, determina que en el instante en que la distancia entre el automóvil y el avión, en la línea visual de éste, es de 5 millas, esta distancia disminuye a razón de 160 mi/hora. Encuentre la velocidad a la que se desplaza el automóvil por la carretera.

43. Jugadores de béisbol Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 ft de lado. Un jugador corre de la primera a la segunda base con una rapidez de 16 ft/seg.

a. ¿A qué tasa cambia la distancia entre el jugador y la tercera base cuando aquél se encuentra a 30 ft de la primera base?

b. En ese momento, ¿a qué tasa cambian los ángulos θ_1 y θ_2 (véase la figura)?

c. El jugador se desliza en la segunda base con una rapidez de 15 ft/seg. ¿A qué tasa cambian los ángulos θ_1 y θ_2 cuando el jugador toca la base?



44. Barcos Dos barcos navegan alejándose en línea recta desde un punto O a lo largo de rutas que forman un ángulo de 120°. El barco A se desplaza a 14 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas). El barco B se desplaza a 21 nudos. ¿Con qué rapidez se alejan los buques cuando $OA = 5$ y $OB = 3$ millas náuticas?

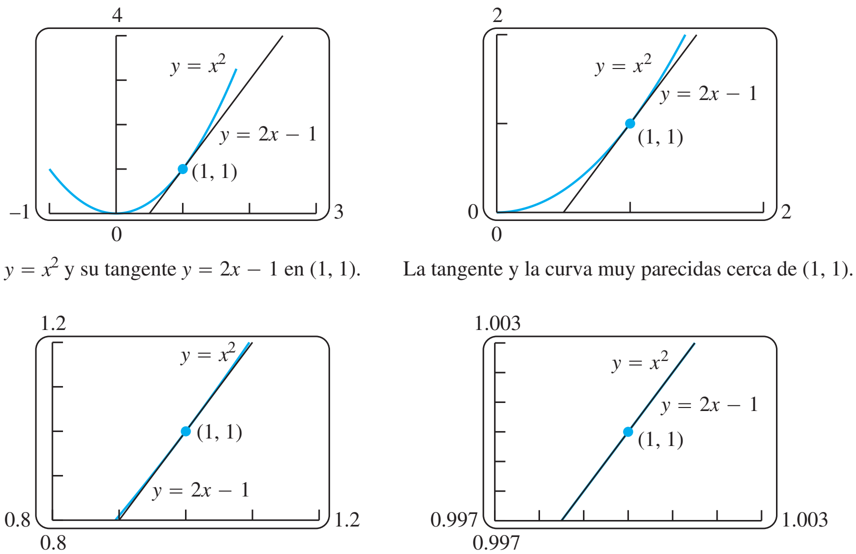
3.9 Linealización y diferenciales

En ocasiones es posible aproximar funciones complicadas con otras más sencillas, las cuales ofrecen la precisión que necesitamos para aplicaciones específicas, a la vez que son más fáciles de utilizar. Las funciones de aproximación analizadas en esta sección se denominan *linealizaciones* y tienen como base las rectas tangentes. En el capítulo 10 se estudian otras funciones de aproximación, como los polinomios.

Introducimos nuevas variables, dx y dy, llamadas *diferenciales*, y las definimos de una manera que hace la notación de Leibniz para la derivada dx/dy una razón verdadera. Utilizamos dy para estimar el error al medir, lo cual después ofrece una demostración precisa para la regla de la cadena (sección 3.6).

Linealización

Como se observa en la figura 3.38, la tangente a la curva $y = x^2$ está muy próxima a ella cerca del punto de tangencia. Durante un pequeño intervalo, los valores de y a lo largo de la recta tangente dan buenas aproximaciones a los valores de y de la curva. Este fenómeno se observa mediante un acercamiento a las dos gráficas en el punto de tangencia o al ver las tablas de valores para la diferencia entre $f(x)$ y su recta tangente cerca de la abscisa x del punto de tangencia. El fenómeno es cierto, no sólo para parábolas; localmente, toda curva derivable se comporta como su recta tangente.



$y = x^2$ y su tangente $y = 2x - 1$ en (1, 1).

La tangente y la curva muy parecidas cerca de (1, 1).

La tangente y la curva mucho más parecidas en todo el intervalo de x que se muestra.

La tangente y la curva aún más parecidas. En la pantalla de la computadora no puede distinguirse la tangente de la curva en este intervalo de x.

FIGURA 3.38 Cuanto mayor sea la ampliación de la gráfica de la función cerca de un punto donde la función es derivable, la gráfica se volverá más plana y se parecerá más a su tangente.

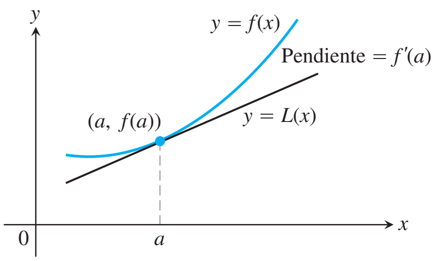


FIGURA 3.39 La tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = a$ es la recta $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

En general, la tangente a $y = f(x)$ en el punto $x = a$, donde f es derivable (figura 3.39), pasa por el punto $(a, f(a))$, por lo que la ecuación punto pendiente de ésta es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Así, esta recta tangente es la gráfica de la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mientras esta recta permanezca cercana a la gráfica de f, $L(x)$ brinda una buena aproximación a $f(x)$.

DEFINICIONES Si f es derivable en $x = a$, entonces la función de aproximación

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es una **linealización** de f en a. La aproximación

$$f(x) \approx L(x)$$

de f mediante L es la **aproximación lineal estándar** de f en a. El punto $x = a$ es el **centro** de la aproximación.

EJEMPLO 1 Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$ (figura 3.40).

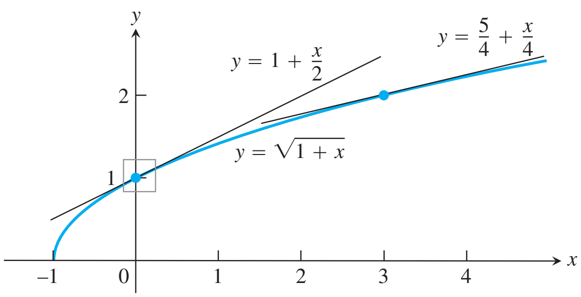


FIGURA 3.40 La gráfica de $y = \sqrt{1 + x}$ y su linealización en $x = 0$ y $x = 3$. La figura 3.41 muestra una vista ampliada de la ventana pequeña alrededor del 1 en el eje y.

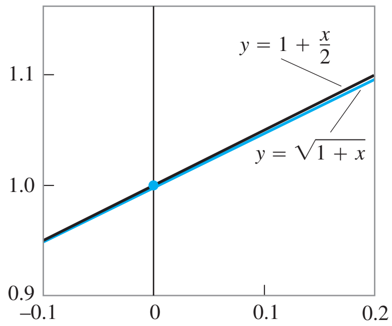


FIGURA 3.41 Vista ampliada de la ventana de la figura 3.40.

Solución Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2},$$

tenemos $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1/2$, lo que da la linealización

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Observe la figura 3.41. ■

La siguiente tabla muestra qué tan precisa es la aproximación $\sqrt{1 + x} \approx 1 + (x/2)$ del ejemplo 1 para algunos valores de x cercanos a 0. Conforme nos alejamos del cero, perdemos precisión. Por ejemplo, para $x = 2$, la linealización da 2 como la aproximación para $\sqrt{3}$, que no tiene siquiera precisión de un decimal.

Aproximación	Valor verdadero	$\lvert$Valor verdadero − aproximación$\rvert$
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

No se deje engañar por los cálculos anteriores pensando que cualquier cosa que hagamos con una linealización estaría mejor hecha con una calculadora. En la práctica, nunca utilizaríamos una linealización para determinar una raíz cuadrada particular. La utilidad de la linealización es su capacidad para reemplazar una fórmula complicada por una más sencilla en todo un intervalo de valores. Si tenemos que trabajar con $\sqrt{1+x}$ para x cercana a 0 y estamos en condiciones de tener una pequeña tolerancia de error, entonces podemos trabajar con $1 + (x/2)$. Por supuesto, necesitamos conocer qué tanto error hay. Posteriormente, en el capítulo 10, examinaremos la estimación del error.

Por lo regular, una aproximación lineal pierde precisión conforme se aleja de su centro. Como sugiere la figura 3.40, la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ probablemente será muy burda para ser útil, cerca de $x = 3$. Ahí necesitamos la linealización en $x = 3$.

EJEMPLO 2 Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 3$.

Solución Evaluamos la ecuación que define a $L(x)$ en $a = 3$. Con

$$f(3) = 2, \qquad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}\bigg|_{x=3} = \frac{1}{4},$$

tenemos

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

En $x = 3.2$, la linealización del ejemplo 2 da

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050,$$

la cual difiere del valor verdadero, $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ en menos de un milésimo. La linealización del ejemplo 1 da

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6,$$

un resultado que está alejado en más del 25 por ciento.

EJEMPLO 3 Determine la linealización de $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/2$ (figura 3.42).

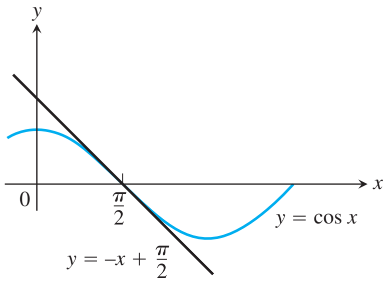


FIGURA 3.42 La gráfica de $f(x) = \cos x$ y su linealización en $x = \pi/2$. Cerca de $x = \pi/2$, $\cos x \approx -x + (\pi/2)$ (ejemplo 3).

Solución Como $f(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f'(\pi/2) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1$, tenemos que la linealización en $a = \pi/2$ será

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= 0 + (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Una aproximación lineal importante para raíces y potencias es

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad (x \text{ cerca de 0, y } k \text{ cualquier número}),$$

(ejercicio 13). Esta aproximación, adecuada para valores de x suficientemente cercanos a cero, tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando x es pequeña

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad k = 1/2$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x \qquad k = -1;\ \text{sustituya } x \text{ por } -x.$$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 \qquad k = 1/3;\ \text{reemplace } x \text{ por } 5x^4.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad k = -1/2;\ \text{reemplace } x \text{ por } -x^2.$$

Diferenciales

En ocasiones utilizamos la notación de Leibniz dy/dx para representar la derivada de y con respecto a x. Al contrario de lo que parece, no es una razón. Ahora introducimos dos nuevas variables, dx y dy, con la propiedad de que cuando su razón existe, ésta es igual a la derivada.

DEFINICIÓN Sea $y = f(x)$ una función derivable. La **diferencial *dx*** es una variable independiente. La **diferencial *dy*** es

$$dy = f'(x)\,dx.$$

A diferencia de la variable independiente dx, la variable dy siempre es una variable dependiente. Depende tanto de x como de dx. Si dx tiene un valor específico dado y x es un número particular en el dominio de la función f, entonces estos valores determinan el valor numérico de dy.

EJEMPLO 4

(a) Determine dy si $y = x^5 + 37x$.

(b) Determine el valor de dy cuando $x = 1$ y $dx = 0.2$.

Solución

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$

(b) Al sustituir $x = 1$ y $dx = 0.2$, en la expresión para dy, tenemos

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$

El significado geométrico de las diferenciales se ilustra en la figura 3.43. Sea $x = a$ y definamos $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en $y = f(x)$ es

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

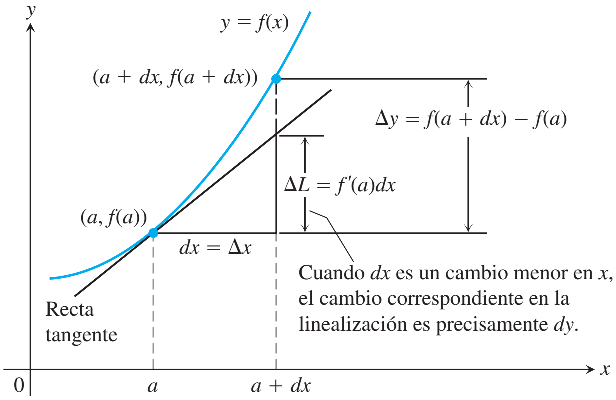


FIGURA 3.43 Geométricamente, la diferencial dy es el cambio ΔL en la linealización de f cuando $x = a$ cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

El cambio correspondiente en la recta tangente L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(a + dx) - L(a)\\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)[(a + dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}\\ &= f'(a)\,dx.\end{aligned}$$

Esto es, el cambio en la linealización de f es precisamente el valor de la diferencial dy cuando $x = a$ y $dx = \Delta x$. Por lo tanto, dy representa la magnitud que se eleva o baja la recta tangente cuando x cambia en una cantidad $dx = \Delta x$.

Si $dx \neq 0$, entonces el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx es igual a la derivada $f'(x)$, ya que

$$dy \div dx = \frac{f'(x)\,dx}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Algunas veces escribimos

$$df = f'(x)\,dx$$

en vez de $dy = f'(x)dx$, y llamamos a df la **diferencial de f**. Por ejemplo, si $f(x) = 3x^2 - 6$, entonces

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x\,dx.$$

Toda fórmula de derivación como

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{d(\operatorname{sen} u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

tiene una forma diferencial correspondiente como

$$d(u + v) = du + dv \qquad \text{o} \qquad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du,$$

EJEMPLO 5 Podemos utilizar la regla de la cadena y otras fórmulas de derivación para determinar diferenciales de funciones

(a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$ ■

Estimación con diferenciales

Suponga que conocemos el valor de una función derivable $f(x)$ en un punto a y necesitamos estimar cuánto cambiará este valor si nos movemos al punto cercano $a + dx$. Si $dx = \Delta x$ es pequeña, entonces, con base en la figura 3.43, vemos que Δy es aproximadamente igual a la diferencial dy, Como

$$f(a + dx) = f(a) + \Delta y, \qquad \Delta x = dx$$

la aproximación diferencial da

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

cuando $dx = \Delta x$. Así, la aproximación $\Delta y \approx dy$ puede usarse para estimar $f(a + dx)$ cuando $f(a)$ se conozca y dx sea pequeña.

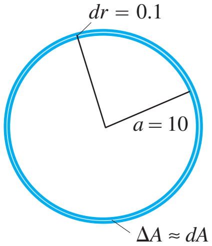


FIGURA 3.44 Cuando dr es pequeño comparado con a, la diferencial dA da la estimación $A(a + dr) = \pi a^2 + dA$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 El radio r de un círculo aumenta de $a = 10$ m a 10.1 m (figura 3.44). Utilice dA para estimar el incremento en el área A del círculo. Estime el área del círculo agrandado y compare su estimación con el área verdadera mediante el cálculo directo.

Solución Puesto que $A = \pi r^2$, el aumento estimado es

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

Así, como $A(r + \Delta r) \approx A(r) + dA$, tenemos

$$\begin{aligned} A(10 + 0.1) &\approx A(10) + 2\pi \\ &= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi. \end{aligned}$$

El área de un círculo de radio 10.1 m es aproximadamente 102π m^2.

El área real es

$$\begin{aligned} A(10.1) &= \pi(10.1)^2 \\ &= 102.01\pi \text{ m}^2. \end{aligned}$$

El error en nuestra estimación es 0.01π m^2, que es la diferencia $\Delta A - dA$. ■

Error en la aproximación diferencial

Sea $f(x)$ derivable en $x = a$ y suponga que $dx = \Delta x$ es un incremento de x. Tenemos dos formas de describir el cambio en f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$:

El cambio real: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

La estimación diferencial: $df = f'(a)\Delta x.$

¿Qué tan bien aproxima df a Δf?

Medimos el error de la aproximación al restar df de Δf:

$$\begin{aligned} \text{Error de aproximación} &= \Delta f - df \\ &= \Delta f - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{A esta parte llamamos } \epsilon} \cdot \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente de diferencias

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima a $f'(a)$ (recuerde la definición de $f'(a)$), así que la cantidad entre paréntesis se vuelve un número muy pequeño (por lo cual lo hemos denominado ϵ). De hecho, $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Cuando Δx es pequeño, el error de aproximación $\epsilon\,\Delta x$ es aún más pequeño.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{cambio}\\ \text{real}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{cambio}\\ \text{estimado}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{error}}$$

Aunque no conocemos el tamaño exacto del error, es el producto de dos cantidades pequeñas, $\epsilon \cdot \Delta x$, las cuales tienden ambas a cero cuando $\Delta x \to 0$. Para muchas funciones comunes, siempre que Δx sea pequeña, el error es aún más pequeño.

Cambio en $y = f(x)$ cerca de $x = a$

Si $y = f(x)$ es derivable en $x = a$, y x cambia de a a $a + \Delta x$, el cambio Δy en f está dado por

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \tag{1}$$

en la que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En el ejemplo 6 encontramos que

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{error}})\ \mathrm{m}^2$$

así que el error de aproximación es $\Delta A - dA = \epsilon\Delta r = 0.01\pi$ y $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m.

Demostración de la regla de la cadena

La ecuación (1) nos permite demostrar correctamente la regla de la cadena. Nuestro objetivo es demostrar que si $f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces la composición $y = f(g(x))$ es una función derivable de x. Como una función es derivable si y sólo si tiene derivada en cada punto de su dominio, debemos mostrar que siempre que g sea derivable en x_0 y f sea derivable en $g(x_0)$, entonces la composición es derivable en x_0 y la derivada de la composición satisface la ecuación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Sea Δx un incremento de x y sean Δu y Δy los incrementos correspondientes en u y en y. Al aplicar la ecuación (1), tenemos

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera similar,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u,$$

donde $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. También observe que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Al combinar la ecuación para Δu y Δy, se obtiene

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x,$$

así que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1.$$

Como ϵ_2 y ϵ_2 tienden a cero cuando Δx tiende a cero, tres de los cuatro términos de la derecha se anulan en el límite, lo que deja

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Sensibilidad al cambio

La ecuación $df = f'(x)dx$ indica qué tan sensible es la salida de f a un cambio en la entrada de valores diferentes de x. Cuanto mayor sea el valor de f' en x, mayor será el efecto de un cambio dado dx. Conforme nos movemos de a a un punto cercano $a + dx$ es posible describir el cambio en f de tres maneras:

	Real	**Estimado**
Cambio absoluto	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Cambio relativo	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Cambio porcentual	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

EJEMPLO 7 Suponga que necesita calcular la profundidad de un pozo a partir de la ecuación $s = 16t^2$ midiendo el tiempo que tarda en caer una roca al agua. ¿Qué tan sensibles serán sus cálculos a un error de 0.1 seg en la medición del tiempo?

Solución La magnitud de ds en la ecuación

$$ds = 32t\,dt$$

depende de qué tan grande sea t. Si $t = 2$ seg, el cambio provocado por $dt = 0.1$ es de alrededor de

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft}.$$

Tres segundos después en $t = 5$ seg, el cambio causado por el mismo dt es

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft}.$$

Para un tamaño fijo de error en la medición del tiempo, el error al utilizar ds para estimar la profundidad es mayor cuando el tiempo que tarda la roca en golpear el agua es mayor. ■

EJEMPLO 8 A finales de la década de 1830, el fisiólogo francés Jean Poiseuille descubrió la fórmula que actualmente utilizamos para predecir cuánto es capaz de disminuir el radio de una arteria parcialmente obstruida el volumen del flujo normal. Su fórmula,

$$V = kr^4,$$

dice que el volumen V de un fluido que pasa a través de un tubo delgado por unidad de tiempo a una presión fija es una constante multiplicada por la cuarta potencia del radio del tubo r. ¿Cómo afecta a V una reducción del 10% en r? (Véase la figura 3.45).

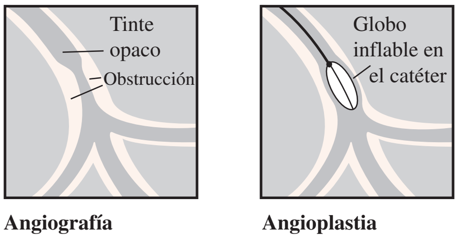


FIGURA 3.45 Para desbloquear una arteria obstruida, se inyecta un tinte opaco en ella para hacer visible el interior bajo los rayos X. Luego se infla un catéter con punta de globo dentro de la arteria para ensancharla en el sitio donde se localiza la obstrucción.

Solución Las diferenciales de r y V están relacionadas mediante la ecuación

$$dV = \frac{dV}{dr}\,dr = 4kr^3\,dr.$$

El cambio relativo en V es

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\,\frac{dr}{r}.$$

El cambio relativo en V es 4 veces el cambio relativo en r, así que una disminución del 10% en r dará por resultado una disminución del 40% en el flujo. ■

EJEMPLO 9 La segunda ley de Newton,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\,\frac{dv}{dt} = ma,$$

se basa en la hipótesis de que la masa es constante, pero sabemos que esto no es estrictamente cierto, ya que la masa de un cuerpo aumenta con la velocidad. En la fórmula corregida de Einstein, la masa tiene el valor

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde "la masa en reposo" m_0 representa la masa de un cuerpo que no se mueve, y c es la velocidad de la luz, que es de alrededor de 300,000 km/seg. Utilice la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2)$$

para estimar el aumento Δm de la masa que resulta al agregar la velocidad v.

Solución Cuando v es muy pequeña comparada con c, v^2/c^2 es cercana a cero, por lo que es seguro usar la aproximación

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{Ecuación (2) con } x = \frac{v}{c}$$

para obtener

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

o bien,

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \qquad (3)$$

La ecuación (3) expresa el aumento de la masa que resulta de agregar la velocidad v. ■

Conversión de masa a energía

La ecuación (3), deducida en el ejemplo 9, tiene una interpretación importante. En la física newtoniana, $(1/2)m_0v^2$ es la energía cinética (EC) del cuerpo, pero si rescribimos la ecuación (3) en la forma

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2,$$

veremos que

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{EC}),$$

o bien,

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{EC}).$$

Así que el cambio en la energía cinética Δ(EC) al ir de la velocidad 0 a la velocidad v es aproximadamente igual a $(\Delta m)c^2$, el cambio en la masa multiplicado por el cuadrado de la velocidad de la luz. Utilizando $c \approx 3 \times 10^8$ m/seg, vemos que un pequeño cambio en la masa puede generar un gran cambio en la energía.

Ejercicios 3.9

Determinación de linealizaciones

En los ejercicios 1 a 5, determine la linealización $L(x)$ de $f(x)$ en $x = a$.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad a = -4$
3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = -8$
5. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi$
6. **Aproximación lineal común en $x = 0$** Determine las linealizaciones de las siguientes funciones en $x = 0$.
   (a) sen x **(b)** cos x **(c)** tan x

Linealización para aproximaciones

En los ejercicios 7 a 12, determine una linealización en un entero cercano a x_0, elegido de manera adecuada, en la que la función dada y sus derivadas sean fáciles de evaluar.

7. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$
8. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.9$
9. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$
10. $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$
11. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad x_0 = 1.3$
13. Demuestre que la linealización de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.
14. Utilice la aproximación lineal $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para determinar una aproximación para la función $f(x)$ en valores de x cercanos a cero.
   a. $f(x) = (1 - x)^6$ **b.** $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}$ **d.** $f(x) = \sqrt{2 + x^2}$
   e. $f(x) = (4 + 3x)^{1/3}$ **f.** $f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{1}{2 + x}\right)^2}$
15. **Más rápido que una calculadora** Utilice la aproximación $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ para estimar lo siguiente.
   a. $(1.0002)^{50}$ **b.** $\sqrt[3]{1.009}$
16. Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{x + 1} + \operatorname{sen} x$ en $x = 0$. ¿Cómo están relacionadas las linealizaciones individuales de $\sqrt{x + 1}$ y sen x en $x = 0$?

Derivadas en forma diferencial

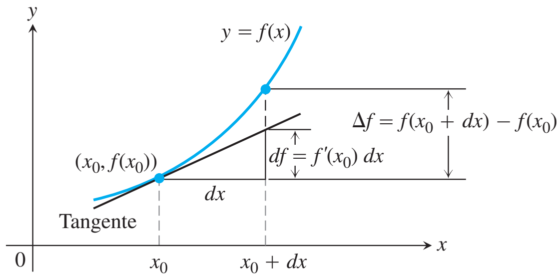
En los ejercicios 17 a 28, determine dy.

17. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$
18. $y = x\sqrt{1 - x^2}$
19. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$
20. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$
21. $2y^{3/2} + xy - x = 0$
22. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$
23. $y = \operatorname{sen}(5\sqrt{x})$
24. $y = \cos(x^2)$
25. $y = 4\tan(x^3/3)$
26. $y = \sec(x^2 - 1)$
27. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$
28. $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Error de aproximación

En los ejercicios 29 a 34, cada función $f(x)$ cambia de valor cuando x pasa de x_0 a $x_0 + dx$. Determine

a. el cambio $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$;
b. el valor de la estimación $df = f'(x_0)dx$, y
c. el error de aproximación $|\Delta f - df|$.



29. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
30. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0.1$
31. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
32. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$
33. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.5, \quad dx = 0.1$
34. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0.1$

Estimación de cambios mediante diferenciales

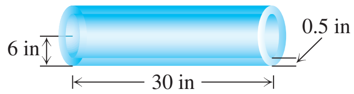
En los ejercicios 35 a 40, escriba una fórmula diferencial que estime el cambio dado en el volumen o el área de la superficie.

35. El cambio en el volumen $V = (4/3)\pi r^3$ de una esfera cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$.
36. El cambio en el volumen $V = x^3$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.
37. El cambio en el área de la superficie $S = 6x^2$ de un cubo cuando las longitudes de los lados pasan de x_0 a $x_0 + dx$.
38. El cambio en el área de la superficie lateral $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ de un cono circular recto cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no se modifica.
39. El cambio en el volumen $V = \pi r^2 h$ de un cilindro circular recto cuando el radio pasa de r_0 a $r_0 + dr$ y la altura no se modifica.
40. El cambio en el área de la superficie lateral $S = 2\pi rh$ de un cilindro circular recto cuando la altura cambia de h_0 a $h_0 + dh$ y el radio no se modifica.

Aplicaciones

41. El radio de un círculo aumenta de 2.00 a 2.02 m.
   a. Estime el cambio en el área resultante.
   b. Exprese la estimación como un porcentaje del área del círculo original.
42. El diámetro de un árbol era de 10 in. Durante el año siguiente, la circunferencia aumentó 2 in. ¿Alrededor de cuánto se incrementó el diámetro del árbol? Aproximadamente, ¿cuánto creció el área de la sección transversal?

43. Estimación de volumen Estime el volumen del material en un cascarón cilíndrico con longitud de 30 in, radio de 6 in y grosor de 0.5 in.



44. Estimación de la altura de un edificio Un agrimensor se encuentra de pie a 30 ft de la base de un edificio, mide el ángulo de elevación a la parte superior del edificio y éste es de 75°. ¿Con qué precisión se debe medir el ángulo para que el porcentaje de error en la estimación de la altura del edificio sea menor del 4%?

45. Tolerancia El radio r de un círculo se mide con un error del 2% cuando mucho. ¿Cuál es el máximo error porcentual correspondiente en el cálculo de

a. la circunferencia?

b. el área del círculo?

46. Tolerancia El lado x de un cubo se mide con un error del 0.5 cuando mucho. ¿Cuál es el máximo error porcentual correspondiente en el cálculo de

a. el área de la superficie del cubo?

b. el volumen del cubo?

47. Tolerancia La altura y el radio de un cilindro circular recto son iguales, así que el volumen del cilindro es $V = \pi h^3$. El volumen se calculará con un error no mayor al 1% del valor real. Determine de forma aproximada el mayor error que puede tolerarse en la medida de h, expresado como un porcentaje de h.

48. Tolerancia

a. ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro interior de un depósito cilíndrico de almacenamiento, cuya altura es de 10 m, para calcular el volumen del depósito con un error menor al 1% de su valor real?

b. ¿Con qué precisión debe medirse el diámetro exterior del depósito para calcular la cantidad de pintura que se necesitará para pintar la parte lateral del depósito con un error menor al 5% de la cantidad real?

49. El diámetro de una esfera se mide como 100 ± 1 cm y el volumen se calcula con base en tal medida. Estime el error porcentual en el cálculo del volumen.

50. Estime el error porcentual permitido al medir el diámetro D de una esfera si el volumen debe calcularse correctamente con una diferencia no mayor del 3 por ciento.

51. Efecto de maniobras de vuelo en el corazón La cantidad de trabajo que realiza la cavidad de bombeo principal del corazón, el ventrículo izquierdo, está dada por la ecuación

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g},$$

donde W es el trabajo por unidad de tiempo, P es la presión arterial promedio, V es el volumen de la sangre bombeada durante una unidad de tiempo, δ ("delta") es la densidad de la sangre, v es la velocidad promedio de la sangre que sale, y g es la aceleración debida a la gravedad.

Cuando P, V, δ y v permanecen constantes, W se convierte en una función de g, por lo que la ecuación toma la forma simplificada

$$W = a + \frac{b}{g} \quad (a, b \text{ constantes}).$$

Como miembro del equipo médico de la NASA, usted necesita conocer qué tan sensible es W a cambios aparentes en g causados por maniobras de vuelo, y esto depende del valor inicial de g. Como parte de sus investigaciones, decide comparar el efecto sobre W de un cambio dg en la Luna, donde $g = 5.2$ ft/seg^2, con el efecto del mismo cambio dg que se tendría en la Tierra, donde $g = 32$ ft/seg^2. Utilice la ecuación simplificada anterior para determinar la razón de dW_{Luna} a dW_{Tierra}.

52. Medición de la aceleración debida a la gravedad Cuando la longitud L del péndulo de un reloj se mantiene constante, controlando su temperatura, el periodo del péndulo T depende de la aceleración debida a la gravedad g. Por lo tanto, el periodo variará ligeramente cuando el reloj se mueva de un lugar a otro de la superficie de la Tierra, dependiendo del cambio de g. Si se hace un seguimiento de ΔT, estimamos la variación en g a partir de la ecuación $T = 2\pi(L/g)1/2$ que relaciona T, g y L.

a. Manteniendo a L constante y a g como la variable independiente, calcule dT y utilícela para responder los incisos (b) y (c).

b. Si g aumenta, ¿T aumentará o disminuirá? ¿El péndulo de un reloj irá más rápido o más lento? Explique.

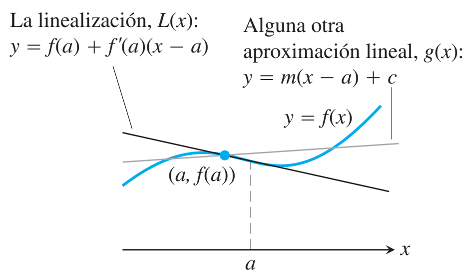
c. Un reloj con péndulo de 100 cm se mueve de una localidad donde $g = 980$ cm/seg^2 a una nueva localidad. Esto aumenta el periodo en $dT = 0.001$ seg. Determine dg y estime el valor de g en la nueva localidad.

53. La linealización es la mejor aproximación lineal Suponga que $y = f(x)$ es diferenciable en $x = a$ y que $g(x) = m(x - a) + c$ es una función lineal en la que m y c son constantes. Si el error $E(x) = f(x) - g(x)$ fuera suficientemente pequeño cerca de $x = a$, podríamos pensar en utilizar a g como una aproximación lineal de f en vez de la linealización $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Demuestre que si imponemos a g las condiciones

1. $E(a) = 0$ — El error de aproximación es cero en $x = a$.

2. $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{x - a} = 0$ — El error es despreciable cuando se compara con $x - a$

entonces $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Así, la linealización $L(x)$ da la única aproximación lineal cuyo error es cero en $x = a$ y al mismo tiempo es despreciable en comparación con $x - a$.



54. Aproximaciones cuadráticas

a. Sea $Q(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$ una aproximación cuadrática para $f(x)$ en $x = a$ con las propiedades:

i) $Q(a) = f(a)$

ii) $Q'(a) = f'(a)$

iii) $Q''(a) = f''(a)$.

Determine los coeficientes b_0, b_1 y b_2.

b. Determine la aproximación cuadrática para $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$.

T **c.** Grafique $f(x) = 1/(1 - x)$ y su aproximación cuadrática en $x = 0$. Luego haga un acercamiento a las dos gráficas en el punto $(0, 1)$. Comente sus observaciones.

T **d.** Determine la aproximación cuadrática para $g(x) = 1/x$ en $x = 1$. Grafique g y su aproximación cuadrática juntas. Comente sus observaciones.

T **e.** Determine la aproximación cuadrática para $h(x) = \sqrt{1 + x}$ en $x = 0$. Grafique juntas h y su aproximación cuadrática. Comente sus observaciones.

f. ¿Cuáles son las linealizaciones de f, g y h en los puntos respectivos de los incisos (b), (d) y (e)?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 55 a 58, utilice un SAC para estimar la magnitud del error al utilizar la linealización, en vez de la función, en el intervalo especificado I. Siga los siguientes pasos:

a. Trace la función f en el intervalo I.

b. Determine la linealización L de la función en el punto a.

c. Trace juntas f y L.

d. Grafique el error absoluto $|f(x) - L(x)|$ en el intervalo I y determine su valor máximo.

e. Con base en su gráfica del inciso (d), estime una $\delta > 0$ tan grande como pueda que satisfaga

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L(x)| < \epsilon$$

para $\epsilon = 0.5, 0.1$ y 0.01. Luego verifique de manera gráfica para ver si su estimación de δ es válida.

55. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

56. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad \left[-\dfrac{3}{4}, 1\right], \quad a = \dfrac{1}{2}$

57. $f(x) = x^{2/3}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

58. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{sen} x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

Capítulo 3 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es la derivada de una función? ¿Cómo está relacionado su dominio con el dominio de f? Dé ejemplos.
2. ¿Qué papel desempeña la derivada en la definición de pendientes, tangentes y tasas de cambio?
3. En ocasiones, ¿cómo puede graficar la derivada de una función cuando todo lo que tiene es una tabla de los valores de la función?
4. ¿Qué significa que una función sea derivable en un intervalo abierto? ¿Y en un intervalo cerrado?
5. ¿Cómo están relacionadas las derivadas y las derivadas laterales?
6. Describa geométricamente cuándo una función no tiene derivada en un punto.
7. ¿Cómo está relacionada la diferenciabilidad de una función en un punto con su continuidad ahí si es que es continua?
8. ¿Qué reglas conoce para calcular derivadas? Dé algunos ejemplos.
9. Explique cómo las tres fórmulas

   a. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

   b. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

   c. $\dfrac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \dfrac{du_1}{dx} + \dfrac{du_2}{dx} + \cdots + \dfrac{du_n}{dx}$

   nos permiten diferenciar cualquier polinomio.
10. Además de las tres fórmulas listadas en el punto anterior, ¿qué fórmula necesita para derivar funciones racionales?
11. ¿Qué es la segunda derivada? ¿Qué es la tercera derivada? ¿Cuántas derivadas sabe que tienen las funciones? Dé algunos ejemplos.
12. ¿Cuál es la relación entre la tasa promedio de cambio y la tasa instantánea de cambio de una función? Dé un ejemplo.
13. ¿Cómo surgen las derivadas en el estudio del movimiento? ¿Qué puede aprender acerca del movimiento de un cuerpo a lo largo de una línea si examina les derivadas de la función de posición del cuerpo? Dé ejemplos.
14. ¿Cómo surgen las derivadas en economía?
15. Dé ejemplos de otras aplicaciones de las derivadas.
16. ¿Qué tienen que ver los límites $\lim_{h\to 0}((\operatorname{sen} h)/h)$ y $\lim_{h\to 0}((\cos h - 1)/h)$ con las derivadas de las funciones seno y coseno? ¿Cuáles son las derivadas de dichas funciones?
17. Una vez que usted conoce las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, ¿cómo puede encontrar las derivadas de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$? ¿Cuáles son las derivadas de tales funciones?
18. ¿En qué puntos son continuas cada una de estas funciones trigonométricas? ¿Cómo lo sabe?
19. ¿Cuál es la regla para calcular la derivada de una composición de dos funciones diferenciables? ¿Cómo se evalúa tal derivada? Dé ejemplos.
20. Si u es una función diferenciable de x, ¿cómo puede determinar $(d/dx)(u^n)$ si n es un entero? ¿Cómo lo haría si n es un número real? Dé ejemplos.
21. ¿Qué es la derivación implícita? ¿Cuándo la necesita? Dé ejemplos.
22. ¿Cómo surgen los problemas de tasas relacionadas? Dé ejemplos.
23. Proponga una estrategia para resolver problemas de tasas relacionadas. Ilustre con un ejemplo.
24. ¿Cuál es la linealización $L(x)$ de una función $f(x)$ en un punto $x = a$? ¿Qué se le pide a f en a para que la linealización exista? ¿Cómo se utilizan las linealizaciones? Dé ejemplos.
25. Si x se mueve de a a un valor cercano $a + dx$, ¿cómo estima el cambio correspondiente en el valor de una función diferenciable $f(x)$? ¿Cómo hace una estimación del cambio relativo? ¿Y una estimación del cambio porcentual? Dé un ejemplo.

Capítulo 3 Ejercicios de práctica

Derivadas de funciones

Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 1 a 40.

1. $y = x^5 - 0.125x^2 + 0.25x$
2. $y = 3 - 0.7x^3 + 0.3x^7$
3. $y = x^3 - 3(x^2 + \pi^2)$
4. $y = x^7 + \sqrt{7}x - \dfrac{1}{\pi + 1}$
5. $y = (x + 1)^2(x^2 + 2x)$
6. $y = (2x - 5)(4 - x)^{-1}$
7. $y = (\theta^2 + \sec\theta + 1)^3$
8. $y = \left(-1 - \dfrac{\csc\theta}{2} - \dfrac{\theta^2}{4}\right)^2$
9. $s = \dfrac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$
10. $s = \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$
11. $y = 2\tan^2 x - \sec^2 x$
12. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$
13. $s = \cos^4(1 - 2t)$
14. $s = \cot^3\left(\dfrac{2}{t}\right)$
15. $s = (\sec t + \tan t)^5$
16. $s = \csc^5(1 - t + 3t^2)$
17. $r = \sqrt{2\theta \operatorname{sen}\theta}$
18. $r = 2\theta\sqrt{\cos\theta}$
19. $r = \operatorname{sen}\sqrt{2\theta}$
20. $r = \operatorname{sen}\left(\theta + \sqrt{\theta + 1}\right)$
21. $y = \dfrac{1}{2}x^2 \csc\dfrac{2}{x}$
22. $y = 2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}$
23. $y = x^{-1/2}\sec(2x)^2$
24. $y = \sqrt{x}\csc(x + 1)^3$
25. $y = 5\cot x^2$
26. $y = x^2\cot 5x$
27. $y = x^2\operatorname{sen}^2(2x^2)$
28. $y = x^{-2}\operatorname{sen}^2(x^3)$
29. $s = \left(\dfrac{4t}{t + 1}\right)^{-2}$
30. $s = \dfrac{-1}{15(15t - 1)^3}$
31. $y = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}\right)^2$
32. $y = \left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}\right)^2$
33. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{x^2}}$
34. $y = 4x\sqrt{x + \sqrt{x}}$
35. $r = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right)^2$
36. $r = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right)^2$
37. $y = (2x + 1)\sqrt{2x + 1}$
38. $y = 20(3x - 4)^{1/4}(3x - 4)^{-1/5}$
39. $y = \dfrac{3}{(5x^2 + \operatorname{sen} 2x)^{3/2}}$
40. $y = (3 + \cos^3 3x)^{-1/3}$

Derivación implícita

En los ejercicios 41 a 48, determine dy/dx mediante derivación implícita.

41. $xy + 2x + 3y = 1$
42. $x^2 + xy + y^2 - 5x = 2$
43. $x^3 + 4xy - 3y^{4/3} = 2x$
44. $5x^{4/5} + 10y^{6/5} = 15$
45. $\sqrt{xy} = 1$
46. $x^2y^2 = 1$
47. $y^2 = \dfrac{x}{x + 1}$
48. $y^2 = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

En los ejercicios 49 y 50, determine dp/dq.

49. $p^3 + 4pq - 3q^2 = 2$
50. $q = (5p^2 + 2p)^{-3/2}$

En los ejercicios 51 y 52, determine dr/ds.

51. $r\cos 2s + \operatorname{sen}^2 s = \pi$
52. $2rs - r - s + s^2 = -3$

53. Determine d^2y/dx^2 mediante derivación implícita:
   a. $x^3 + y^3 = 1$
   b. $y^2 = 1 - \dfrac{2}{x}$
54. a. Mediante derivación implícita de $x^2 - y^2 = 1$, demuestre que $dy/dx = x/y$.
   b. Luego, demuestre que $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

Valores numéricos de derivadas

55. Suponga que las funciones $f(x)$, $g(x)$ y sus primeras derivadas tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	-3	$1/2$
1	3	5	$1/2$	-4

Determine las primeras derivadas de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a. $6f(x) - g(x)$, $x = 1$
b. $f(x)g^2(x)$, $x = 0$
c. $\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}$, $x = 1$
d. $f(g(x))$, $x = 0$
e. $g(f(x))$, $x = 0$
f. $(x + f(x))^{3/2}$, $x = 1$
g. $f(x + g(x))$, $x = 0$

56. Suponga que la función $f(x)$ y su primera derivada tienen los siguientes valores en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	9	-2
1	-3	$1/5$

Determine las primeras derivadas de las siguientes combinaciones en el valor dado de x.

a. $\sqrt{x}\,f(x)$, $x = 1$
b. $\sqrt{f(x)}$, $x = 0$
c. $f(\sqrt{x})$, $x = 1$
d. $f(1 - 5\tan x)$, $x = 0$
e. $\dfrac{f(x)}{2 + \cos x}$, $x = 0$
f. $10\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)f^2(x)$, $x = 1$

57. Determine el valor de dy/dt en $t = 0$ si $y = 3\operatorname{sen} 2x$ y $x = t^2 + \pi$.
58. Determine el valor de ds/du en $u = 2$ si $s = t^2 + 5t$ y $t = (u^2 + 2u)^{1/3}$.
59. Determine el valor de dw/ds en $s = 0$ si $w = \operatorname{sen}(-2)$ y $r = 8\operatorname{sen}(s + \pi/6)$.
60. Determine el valor de dr/dt en $t = 0$, si $r = (\theta^2 + 7)^{1/3}$ y $\theta^2 t + \theta = 1$.
61. Si $y^3 + y = 2\cos x$, determine el valor de d^2y/dx^2 en el punto $(0, 1)$.
62. Si $x^{1/3} + y^{1/3} = 4$, determine d^2y/dx^2 en el punto $(8, 8)$.

Aplicación de la definición de derivada

En los ejercicios 63 y 64, determine la derivada usando la definición.

63. $f(t) = \dfrac{1}{2t + 1}$
64. $g(x) = 2x^2 + 1$

65. **a.** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ -x^2, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b. ¿La función f es continua en $x = 0$?

c. ¿La función f es derivable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

66. **a.** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ \tan x, & 0 \le x \le \pi/4. \end{cases}$$

b. ¿La función f es continua en $x = 0$?

c. ¿La función f es derivable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

67. **a.** Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

b. ¿La función f es continua en $x = 1$?

c. ¿La función f es derivable en $x = 1$?

Justifique sus respuestas.

68. ¿Para qué valor o valores de la constante m, si existen, la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x, & x \le 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$$

a. es continua en $x = 0$?

b. es derivable en $x = 0$?

Justifique sus respuestas.

Pendientes, tangentes y normales

69. Tangentes con pendiente específica ¿Existen puntos en la curva $y = (x/2) + 1/(2x - 4)$ donde la pendiente sea $-3/2$? Si es así, encuéntrelos.

70. Tangentes con pendiente específica ¿Existen puntos en la curva $y = x - 1/(2x)$ donde la pendiente sea 3? Si es así, encuéntrelos.

71. Tangentes horizontales Determine los puntos en la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente sea paralela al eje x.

72. Intersecciones de tangentes con los ejes Determine las intersecciones con el eje x y con el eje y de la recta que es tangente a la curva $y = x^3$ en el punto $(-2, -8)$.

73. Tangentes perpendiculares o paralelas a rectas Determine los puntos en la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ donde la tangente es

a. perpendicular a la recta $y = 1 - (x/24)$.

b. paralela a la recta $y = -12x$.

74. Intersección de tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y = (\pi \operatorname{sen} x)/x$ en $x = \pi$ y en $x = -\pi$ se intersecan en ángulos rectos.

75. Normales paralelas a una recta Determine los puntos en la curva $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, donde la normal es paralela a la recta $y = -x/2$. Elabore un bosquejo de la curva y de las normales juntas, luego rotule cada una con su ecuación.

76. Rectas tangentes y rectas normales Determine ecuaciones para la tangente y la normal a la curva $y = 1 + \cos x$ en el punto $(\pi/2, 1)$. Elabore un bosquejo de la curva, la tangente y la normal juntas, luego rotule cada una con su ecuación.

77. Parábola tangente La parábola $y = x^2 + C$ es tangente a la recta $y = x$. Determine C.

78. Pendiente de una tangente Demuestre que la tangente a la curva $y = x^3$ en cualquier punto (a, a^3) corta nuevamente a la curva en un punto donde la pendiente es cuatro veces la pendiente en (a, a^3).

79. Curva tangente ¿Para qué valores de c la curva $y = c/(x + 1)$ es tangente a la recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(5, -2)$?

80. Normal a una circunferencia Demuestre que la recta normal en cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ pasa por el origen.

En los ejercicios 81 a 86, determine ecuaciones para las rectas tangentes y normales a la curva en el punto dado.

81. $x^2 + 2y^2 = 9, \quad (1, 2)$

82. $x^3 + y^2 = 2, \quad (1, 1)$

83. $xy + 2x - 5y = 2, \quad (3, 2)$

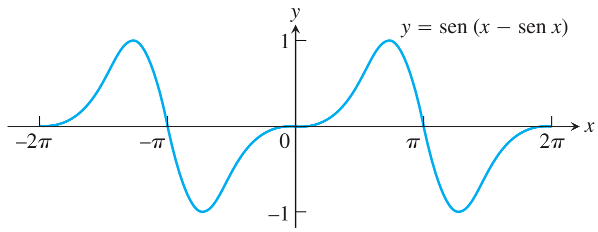
84. $(y - x)^2 = 2x + 4, \quad (6, 2)$

85. $x + \sqrt{xy} = 6, \quad (4, 1)$

86. $x^{3/2} + 2y^{3/2} = 17, \quad (1, 4)$

87. Determine la pendiente a la curva $x^3y^3 + y^2 = x + y$ en los puntos $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

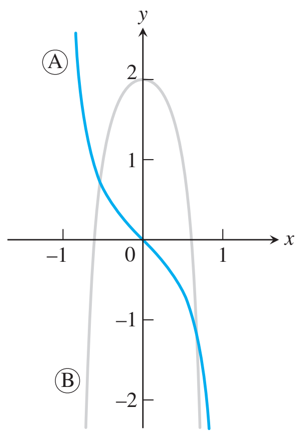
88. La gráfica que aparece a continuación sugiere que la curva $y = \operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)$ podría tener tangentes horizontales en el eje x. ¿Esto es cierto? Justifique su respuesta.



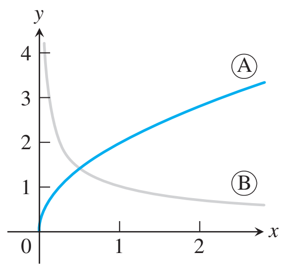
Análisis de gráficas

Cada una de las figuras en los ejercicios 89 y 90 incluye dos gráficas: la gráfica de una función $f(x)$, junto con la gráfica de su derivada $f'(x)$. ¿Cuál gráfica corresponde a cada una? ¿Cómo lo sabe?

89.



90.

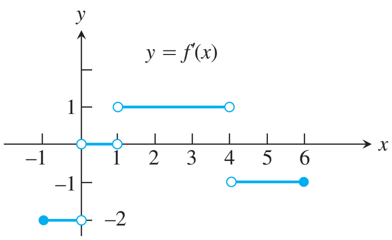


91. Utilice la siguiente información para graficar la función $y = f(x)$ para $-1 \leq x \leq 6$.

i) La gráfica de f está formada por segmentos de recta unidos por los extremos.

ii) La gráfica inicia en el punto $(-1, 2)$.

iii) La derivada de f, donde está definida, coincide con la función escalonada que se muestra a continuación.



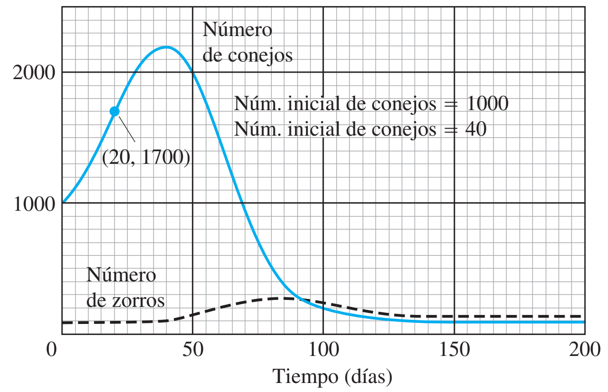
92. Repita el ejercicio 91, pero ahora suponga que la gráfica inicia en $(-1, 0)$ y no en $(-1, 2)$.

Los ejercicios 93 y 94 se refieren a las gráficas que aparecen a continuación. Las gráficas del inciso (a) representna los números de conejos y zorros en una pequeña población del Ártico, los cuales se grafican como funciones del tiempo para 200 días. En un principio, el número de conejos aumenta conforme éstos se reproducen. Pero los zorros se alimentan de conejos, de manera que cuando el número de zorros aumenta, la población de conejos se estabiliza y luego declina. El inciso (b) presenta la gráfica de la derivada de la población de conejos, obtenida mediante la graficación de pendientes.

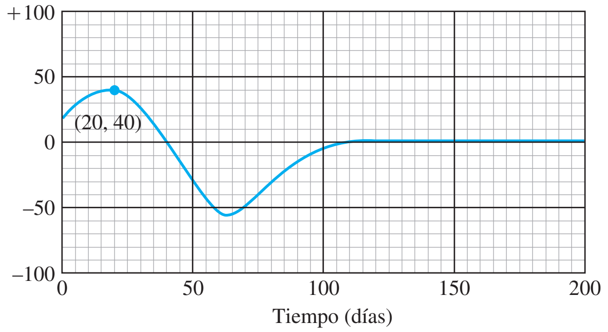
93. a. ¿Cuál es el valor de la derivada de la población de conejos cuando el número de éstos es máximo? ¿Y cuando se registra el mínimo número de conejos?

b. ¿Cuál es el tamaño de la población de conejos cuando su derivada es la mayor posible? ¿Y cuando es la menor posible (negativa)?

94. ¿En qué unidades deben medirse las pendientes de las curva de población de conejos y de zorros?



(a)



Derivada de la población de conejos

(b)

Límites trigonométricos

Determine los límites en los ejercicios 95 a 102.

95. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x^2 - x}$

96. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - \tan 7x}{2x}$

97. $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} r}{\tan 2r}$

98. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} \theta)}{\theta}$

99. $\lim\limits_{\theta \to (\pi/2)^-} \dfrac{4\tan^2\theta + \tan\theta + 1}{\tan^2\theta + 5}$

100. $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{1 - 2\cot^2\theta}{5\cot^2\theta - 7\cot\theta - 8}$

101. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2 - 2\cos x}$

102. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$

Muestre cómo extender las funciones en los ejercicios 103 y 104 para que sean continuas en el origen.

103. $g(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\tan x}$

104. $f(x) = \dfrac{\tan(\tan x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$

Tasas de cambio relacionadas

105. Cilindro circular recto El área total de la superficie S de un cilindro circular recto está relacionada con el radio de la base r y la altura h mediante la ecuación $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

a. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

c. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt y dh/dt si ni r ni h son constantes?

d. ¿Cómo se relaciona dr/dt con dh/dt si S es constante?

106. Cono circular recto El área lateral de la superficie S de un cono circular recto está relacionada con el radio de la base r y la altura h mediante la ecuación $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$.

a. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt si h es constante?

b. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dh/dt si r es constante?

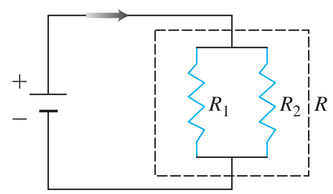
c. ¿Cómo se relaciona dS/dt con dr/dt y dh/dt si ni r ni h son constantes?

107. Cambio del área de un círculo El radio de un círculo cambia a una tasa de $-2/\pi$ m/seg. ¿A qué tasa cambia el área del círculo cuando $r = 10$ m?

108. Cambio en las aristas de un cubo El volumen de un cubo aumenta a razón de 1,200 cm^3/min en el instante en que sus aristas tienen una longitud de 20 cm. ¿A qué tasa cambian las longitudes de las aristas en ese instante?

109. Resistores conectados en paralelo Si dos resistores de R_1 y R_2 ohms están conectados en paralelo en un circuito eléctrico para formar una resistencia de R ohms, el valor de R se puede encontrar a partir de la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



Si R_1 decrece a una tasa de 1 ohm/seg, y R_2 aumenta a una tasa de 0.5 ohm/seg, ¿a qué tasa cambia R cuando $R_1 = 75$ ohms y $R_2 = 50$ ohms?

110. Impedancia en un circuito en serie La impedancia Z (ohms) en un circuito en serie está relacionada con la resistencia R (ohms) y la reactancia x (ohms) mediante la ecuación $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Si R aumenta a una razón de 3 ohms/seg y x disminuye a una razón de 2 ohms/seg, ¿a qué tasa cambia Z cuando $R = 10$ ohms y $x = 20$ ohms?

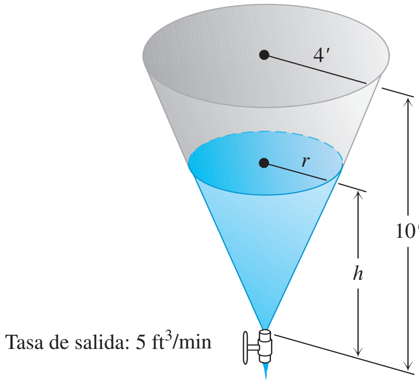
111. Velocidad de una partícula en movimiento Las coordenadas de una partícula que se desplaza en el plano xy son funciones diferenciables del tiempo t con $dx/dt = 10$ m/seg y $dy/dt = 5$ m/seg. ¿Qué tan rápido se aleja la partícula del origen cuando pasa por el punto $(3, -4)$?

112. Movimiento de una partícula Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = x^{3/2}$ en el primer cuadrante, de tal manera que su distancia al origen aumenta a razón de 11 unidades por segundo. Encuentre dx/dt cuando $x = 3$.

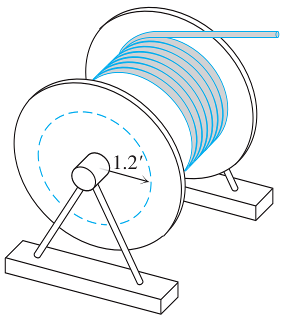
113. Drenado de un depósito El agua fluye del depósito cónico que se ilustra en la siguiente figura a razón de 5 ft^3/min.

a. ¿Cuál es la relación entre las variables h y r en la figura?

b. ¿Qué tan rápido baja el nivel del agua cuando $h = 6$ ft?



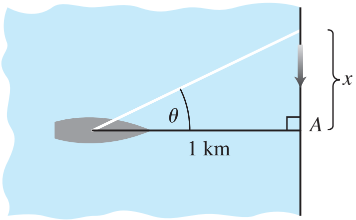
114. Carrete giratorio Al tirar de un cable de televisión enrollado en un carrete grande para atarlo al poste telefónico a lo largo de una calle, el carrete se desenrolla en capas de radio constante (véase la figura). Si el camión que tira del cable se mueve con una rapidez constante de 6 ft/seg (un poco más de 4 mph), utilice la ecuación $s = r\theta$ para determinar qué tan rápido da vueltas el carrete (en radianes por segundo) cuando se desenrolla la capa de radio de 1.2 ft.



115. Movimiento de un faro La figura representa un bote a 1 km de la costa, la cual se ilumina desde el bote con un faro de búsqueda. La luz da vuelta a una tasa constante de $d\theta/dt = -0.6$ rad/seg.

a. ¿Qué tan rápido se mueve la luz a lo largo de la costa cuando alcanza el punto A?

b. ¿Cuántas revoluciones por minuto son 0.6 rad/seg?



116. Puntos que se mueven sobre los ejes coordenados Los puntos A y B se mueven a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, de manera que la distancia r (en metros) a lo largo de la perpendicular desde el origen a la recta AB permanece constante. ¿Qué tan rápido cambia OA? Cuando $OB = 2r$ y B se mueve hacia O a una razón de $0.3r$ m/seg, ¿qué tan rápido cambia OA? ¿Estará aumentando o disminuyendo?

Linealización

117. Determine la linealización de

a. $\tan x$ en $x = -\pi/4$ **b.** $\sec x$ en $x = -\pi/4$.

Grafique las curvas junto con su linealización.

118. Podemos obtener una aproximación lineal útil de la función $f(x) = 1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$ mediante la combinación de las aproximaciones

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x \quad \text{y} \quad \tan x \approx x$$

para obtener

$$\frac{1}{1 + \tan x} \approx 1 - x.$$

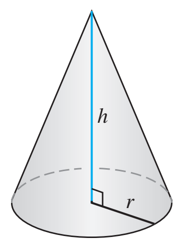
Demuestre que este resultado es la aproximación lineal estándar de $1/(1 + \tan x)$ en $x = 0$.

119. Determine la linealización de $f(x) = \sqrt{1 + x} + \operatorname{sen} x - 0.5$ en $x = 0$.

120. Determine la linealización de $f(x) = 2/(1 - x) + \sqrt{1 + x} - 3.1$ en $x = 0$.

Estimación de cambio mediante diferenciales

121. Área de la superficie de un cono Escriba una fórmula que permita estimar el cambio que ocurre en el área de la superficie lateral de un cono circular recto cuando la altura pasa de h_0 a $h_0 + dh$ y el radio no se modifica.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

(Área de la superficie lateral)

122. Control del error

a. ¿Qué tan precisa debe ser la medida del lado de un cubo para estar razonablemente seguros de que el cálculo del área de la superficie del cubo tenga un error no mayor del 2%?

b. Suponga que el lado se mide con la precisión requerida en el inciso (a). ¿Con cuánta precisión puede calcularse el volumen del cubo con base en la medida del lado? Para descubrirlo, estime el error porcentual en el cálculo del volumen que podría resultar al utilizar la medida del lado.

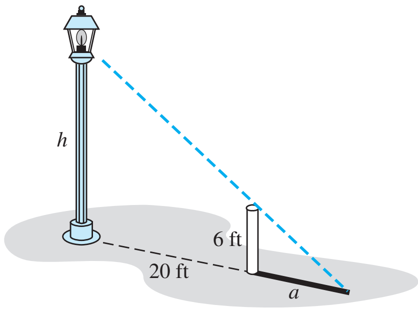
123. Error acumulado Cuando se midió la circunferencia del ecuador de una esfera, se obtuvieron 10 cm con un posible error de 0.4 cm. Luego, esta medida se utiliza para calcular el radio. Después, el radio se usa para calcular el área de la superficie y el volumen de la esfera. Estime los errores porcentuales en los valores calculados de

a. el radio.

b. el área de la superficie.

c. el volumen.

124. Determinación de una altura Para determinar la altura de un farol (véase la figura), usted fija un poste de 6 ft a 20 ft del poste del farol y mide la longitud a de su sombra; encuentra que tal longitud es de 15 ft, más o menos una pulgada. Calcule la altura del farol usando el valor $a = 15$ ft y estime el posible error en el resultado.



Capítulo 3 Ejercicios adicionales y avanzados

1. Una ecuación como $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ se denomina identidad, ya que se cumple para todos los valores de θ. Una ecuación como $\operatorname{sen} \theta = 0.5$ no es una identidad, pues sólo se satisface para ciertos valores de θ, no para todos. Si usted deriva con respecto a θ ambos lados de una identidad trigonométrica en θ, la nueva ecuación resultante también será una identidad.

Obtenga las derivadas respectivas para mostrar que las ecuaciones resultantes se cumplen para todo θ:

a. $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

b. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

2. Si la identidad $\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$ se deriva con respecto a x, ¿la ecuación resultante también es una identidad? ¿Este principio se aplica a la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$? Explique.

3. a. Determine valores para las constantes a, b y c que hagan que

$$f(x) = \cos x \text{ y } g(x) = a + bx + cx^2$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0) \quad \text{y} \quad f''(0) = g''(0).$$

b. Determine valores para b y c que hagan que

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + a) \quad \text{y} \quad g(x) = b \operatorname{sen} x + c \cos x$$

satisfagan las condiciones

$$f(0) = g(0) \quad \text{y} \quad f'(0) = g'(0)$$

c. Para los valores determinados de a, b y c, ¿qué sucede para la tercera y cuarta derivadas de f y g en cada uno de incisos (a) y (b)?

4. Soluciones a ecuaciones diferenciales

a. Demuestre que $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ y $y = a \cos x + b \operatorname{sen} x$ (con a y b constantes) satisfacen la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

b. ¿Cómo modificaría las funciones en el inciso (a) para que satisfagan la ecuación

$$y'' + 4y = 0?$$

Generalice el resultado.

5. Un círculo osculador Encuentre los valores de h, k y a que hacen que el círculo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ sea tangente a la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto $(1, 2)$; y que también hagan que las segundas derivadas d^2y/dx^2 tengan el mismo valor en ambas curvas en ese punto. Círculos como éste, que son tangentes a una curva y tienen la misma segunda derivada que la curva en el punto de tangencia, se llaman *círculos osculadores* (del latín *osculari*, que significa "besar"). Nos referiremos a ellos nuevamente en el capítulo 13.

6. Ingreso marginal Un autobús tiene capacidad para 60 personas. El número x de personas por viaje que acostumbra transportar el autobús está relacionado con el pasaje (p dólares), de acuerdo con la ley $p = [3 - (x/40)]^2$. Escriba una expresión para el ingreso total $r(x)$ por viaje que recibe la empresa de autobuses. ¿Qué número de personas por viaje hará que el ingreso marginal dr/dx sea igual a cero? ¿Cuál es el precio del pasaje correspondiente? (Este precio es el que maximiza el ingreso, de manera que quizá la empresa de autobuses deba revisar su política de precios).

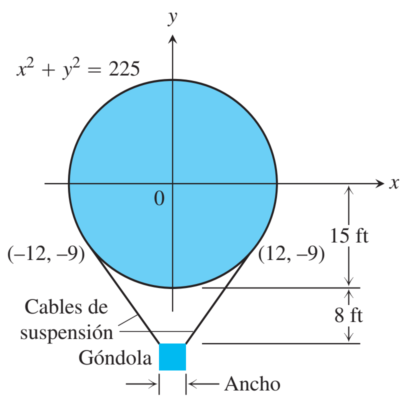
7. Producción industrial

a. Los economistas suelen usar la expresión "tasa de crecimiento" en términos relativos y no en términos absolutos. Por ejemplo, sea $u = f(t)$ el número de personas en la fuerza laboral en el tiempo t en una industria determinada. (Tratamos esta función como si fuera diferenciable, a pesar de que es una función escalonada con valores enteros).

Sea $v = g(t)$ el promedio de producción por persona en la fuerza de trabajo en el instante t. Entonces, la producción total es $y = uv$. Si la fuerza laboral crece a razón del 4% por año ($du/dt = 0.04u$) y la producción por trabajador aumenta a razón del 5% por año ($dv/dt = 0.05v$), determine la tasa de crecimiento de la producción total y.

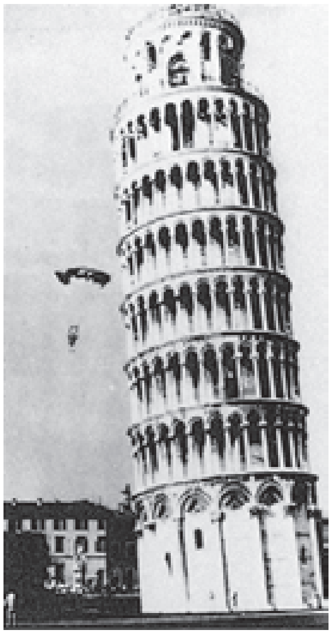
b. Suponga que la fuerza laboral en el inciso a) decrece a razón del 2% anual, mientras que la producción por persona aumenta a razón del 3% anual. ¿La producción total aumenta o disminuye, y a qué razón?

8. Diseño de una góndola El diseñador de un globo esférico de aire caliente que mide 30 ft de diámetro quiere colgar la góndola (canastilla) a 8 ft debajo de la parte inferior del globo utilizando cables tangentes a la superficie del globo, como se ilustra en la figura. Se representan dos cables que van de las aristas superiores de la góndola a sus puntos de tangencia, (12, −9) y (12, −9). ¿Qué ancho debe tener la góndola?



NO ESTÁ A ESCALA

9. Pisa en paracaídas La fotografía muestra el salto con paracaídas que Mike McCarthy realizó desde la parte superior de la Torre de Pisa el 5 de agosto de 1988. Elabore un dibujo para mostrar la forma de la gráfica de su rapidez durante el salto.



El londinense Mike McCarthy saltó desde la Torre de Pisa y después abrió su paracaídas. McCarthy calificó el salto, realizado desde una altura de 179 ft, como el récord mundial de salto en paracaídas más bajo. (*Fuente: Boston Globe*, 6 de agosto de 1988).

10. Movimientos de una partícula La posición en el tiempo $t \geq 0$ de una partícula que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es

$$s = 10 \cos(t + \pi/4).$$

a. ¿Cuál es la posición inicial de la partícula ($t = 0$)?

b. ¿Cuáles son los puntos más lejanos a la izquierda y a la derecha del origen que alcanza la partícula?

c. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula en los puntos del inciso (b).

d. ¿Cuándo alcanza la partícula el origen por primera vez? En ese momento, ¿cuáles son su velocidad, su rapidez y su aceleración?

11. Disparo de un clip En la Tierra, usted fácilmente puede disparar un clip 64 ft hacia arriba con una liga. El clip, t segundos después del disparo, está a $s = 64t - 16t^2$ ft arriba de su mano.

a. ¿Cuánto tiempo tarda el clip en alcanzar su máxima altura? ¿Con qué velocidad deja la mano que lo lanza?

b. En la Luna, la misma aceleración mandaría el clip a una altura de $s = 64t - 2.6t^2$ ft en t segundos. ¿Más o menos cuánto tiempo tarda el clip en alcanzar su altura máxima y qué tan alto llegaría?

12. Velocidades de dos partículas En el tiempo t segundos, las posiciones de dos partículas en una recta coordenada son $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ metros y $s^2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$ metros. ¿Cuándo tienen las dos partículas la misma velocidad?

13. Velocidad de una partícula Una partícula de masa constante m se desplaza a lo largo del eje x. Su velocidad v y su posición x satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0{}^2) = \frac{1}{2} k(x_0{}^2 - x^2),$$

donde k, v_0 y x_0 son constantes. Demuestre que siempre que $v \neq 0$,

$$m \frac{dv}{dt} = -kx.$$

14. Velocidad promedio e instantánea

a. Demuestre que si la posición x de un punto en movimiento está dada por función cuadrática de t, $x = At^2 + Bt + C$, entonces la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo.

b. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado que obtuvo en el inciso (a)?

15. Determine todos los valores de las constantes m y b para los que la función

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & x < \pi \\ mx + b, & x \geq \pi \end{cases}$$

es

a. continua en $x = \pi$.

b. derivable en $x = \pi$.

16. ¿La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada en $x = 0$? Explique.

17. **a.** ¿Para qué valores de a y b

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

será diferenciable para todos los valores de x?

b. Analice la geometría de la gráfica resultante de f.

18. **a.** ¿Para qué valores de a y b

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$$

será derivable para todos los valores de x?

b. Analice la geometría de la gráfica resultante de g.

19. **Funciones diferenciables impares** ¿Existe algo especial acerca de la derivada con respecto a x de una función derivable impar? Justifique su respuesta.

20. **Funciones diferenciables pares** ¿Existe algo especial acerca de la derivada con respecto a x de una función derivable par? Justifique su respuesta.

21. Suponga que las funciones f y g se definen en todo un intervalo abierto que contiene al punto x_0, que f es derivable en x_0, que $f(x_0) = 0$, y que g es continua en x_0. Demuestre que el producto fg es derivable en x_0. Por ejemplo, este proceso muestra que aunque $|x|$ no es derivable en $x = 0$, el producto $x|x|$ sí es derivable en $x = 0$.

22. (*Continuación del ejercicio 21*) Utilice el resultado del ejercicio 21 para demostrar que las siguientes funciones son derivables en $x = 0$.

a. $|x| \operatorname{sen} x$ **b.** $x^{2/3} \operatorname{sen} x$ **c.** $\sqrt[3]{x}(1 - \cos x)$

d. $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

23. ¿La derivada de

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$? ¿La derivada de $k(x) = xh(x)$ lo es? Justifique sus respuestas.

24. Suponga que una función f satisface las siguientes condiciones para todos los valores reales de x y y.

i) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

ii) $f(x) = 1 + xg(x)$, donde $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Demuestre que la derivada $f'(x)$ existe en todo valor de x y que $f'(x) = f(x)$.

25. **La regla generalizada del producto** Utilice inducción matemática para probar que si $y = u_1 u_2 \ldots u_n$ es un producto de un número finito de funciones derivables, entonces y es derivable en su dominio común y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \cdots u_n + u_1 \frac{du_2}{dx} \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{n-1} \frac{du_n}{dx}.$$

26. **Regla de Leibniz para derivadas de orden superior de un producto** La regla de Leibniz para derivadas de orden superior de un producto de funciones derivables establece que

a. $\dfrac{d^2(uv)}{dx^2} = \dfrac{d^2u}{dx^2} v + 2 \dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx} + u \dfrac{d^2v}{dx^2}$.

b. $\dfrac{d^3(uv)}{dx^3} = \dfrac{d^3u}{dx^3} v + 3 \dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx} + 3 \dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2} + u \dfrac{d^3v}{dx^3}$.

c. $\dfrac{d^n(uv)}{dx^n} = \dfrac{d^nu}{dx^n} v + n \dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\dfrac{dv}{dx} + \cdots$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} \frac{d^kv}{dx^k}$$

$$+ \cdots + u \frac{d^nv}{dx^n}.$$

Las ecuaciones en los incisos (a) y (b) son casos especiales de la ecuación en el inciso (c). Deduzca la ecuación del inciso (c) mediante inducción matemática; para ello, utilice

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}.$$

27. **El periodo de un reloj de péndulo** El periodo T de un reloj de péndulo (el tiempo para dar una oscilación completa) se determina mediante la fórmula $T^2 = 4\pi^2 L/g$, donde T se mide en segundos, $g = 32.2 \text{ ft/seg}^2$, y L (la longitud del péndulo) se mide en ft. Determine de forma aproximada,

a. la longitud del péndulo del reloj cuyo periodo es $T = 1$ seg.

b. el cambio dT en T si el péndulo del inciso (a) se alarga 0.01 ft.

c. el tiempo que el reloj se adelanta o retrasa en un día como resultado del cambio del periodo por la cantidad dT encontrada en el inciso (b).

28. **Cubo de hielo que se derrite** Suponga que un cubo de hielo mantiene su forma cúbica cuando se derrite. Denominamos s a la longitud de su lado, de manera que su volumen es $V = s^3$ y el área de su superficie es $6s^2$. Suponga que V y s son funciones derivables del tiempo t. También suponga que el volumen del cubo disminuye a una tasa proporcional al área de su superficie. (Esta última suposición parece bastante razonable cuando pensamos que el hielo se derrite en la superficie: al cambiar la cantidad de superficie se modifica la cantidad de hielo expuesto para derretirse). En términos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = -k(6s^2), \qquad k > 0.$$

El signo menos significa que el volumen disminuye. Suponemos que el factor de proporcionalidad k es constante. (Probablemente dependa de cuestiones tales como la humedad relativa del aire y la incidencia o ausencia de luz solar, por citar unas cuantas). Suponga que hay un conjunto particular de condiciones por las que el cubo pierde $1/4$ de su volumen durante la primera hora y que el volumen es V_0 cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará en derretirse el cubo de hielo?

Capítulo 3 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos de Mathematica/Maple:

Convergencia de pendientes de secantes a la función derivada

Visualizará la recta secante entre puntos consecutivos en una curva y lo que sucede cuando la distancia entre ellos se hace pequeña. La función, los puntos de muestra y las rectas secantes se grafican en una sola gráfica, mientras que una segunda gráfica compara las pendientes de las rectas secantes con la función derivada.

Derivadas, pendientes, rectas tangentes y animación

Partes I-III. Visualizará la derivada en un punto, la linealización de una función y la derivada de una función. Aprenderá cómo trazar la función y las tangentes seleccionadas en la misma gráfica.

Parte IV (Trazo de muchas tangentes)

Parte V (Animación). Las partes IV y V del módulo pueden utilizarse para realizar animación con rectas tangentes que se mueven a lo largo de la gráfica de una función.

Convergencia de las pendientes de las secantes a la función derivada

Visualizará las derivadas laterales, por la derecha y por la izquierda.

Movimiento a lo largo de una línea recta: Posición − Velocidad − Aceleración

Observe espectaculares imágenes animadas de las relaciones entre las funciones de posición, velocidad y aceleración. Las figuras en el texto se pueden animar.

4

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

INTRODUCCIÓN En este capítulo utilizamos las derivadas para determinar valores extremos de funciones, para determinar y analizar las formas de las gráficas, y para determinar numéricamente dónde una función es igual a cero. También presentamos la idea de recuperar una función a partir de su derivada. La clave para muchas de esas aplicaciones es el teorema del valor medio, que prepara el terreno para el cálculo integral en el capítulo 5.

4.1 Valores extremos de funciones

Esta sección muestra cómo localizar e identificar valores extremos (máximo o mínimo) de una función con base en su derivada. Una vez que logremos hacer esto, resolveremos una variedad de problemas en los que determinaremos la mejor forma de hacer algo en una situación dada (véase la sección 4.5). La determinación de valores máximo y mínimo es una de las aplicaciones más importantes de la derivada.

DEFINICIONES Sea f una función con dominio D. Entonces f tiene un valor **máximo absoluto** sobre D en un punto c, si

$$f(x) \leq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D$$

y un valor **mínimo absoluto** sobre D en c, si

$$f(x) \geq f(c) \qquad \text{para toda } x \text{ en } D.$$

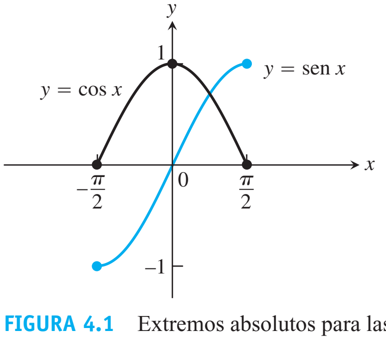


FIGURA 4.1 Extremos absolutos para las funciones seno y coseno en $[-\pi/2, \pi/2]$. Estos valores pueden depender del dominio de una función.

Los valores máximo y mínimo se denominan **valores extremos** de la función f. Los máximos y mínimos absolutos también se denominan máximos y mínimos absolutos (o **globales**).

Por ejemplo, en el intervalo cerrado $[-\pi/2, \pi/2]$, la función $f(x) = \cos x$ toma un valor máximo absoluto de 1 (una vez) y un valor mínimo absoluto de 0 (dos veces). En el mismo intervalo, la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ toma un valor máximo de 1 y un valor mínimo de -1 (figura 4.1).

Las funciones con la misma regla o fórmula de definición pueden tener diferentes extremos (valores máximo o mínimo) dependiendo del dominio. Veremos esto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Los extremos absolutos de las siguientes funciones en sus dominios se observan en la figura 4.2. Observe que una función podría no tener máximo o mínimo si el dominio es no acotado o no contiene a los puntos extremos del intervalo.

Regla de la función	Dominio D	Extremos absolutos en D
(a) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	No hay máximo absoluto. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(b) $y = x^2$	$[0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. Mínimo absoluto de 0 en $x = 0$.
(c) $y = x^2$	$(0, 2]$	Máximo absoluto de 4 en $x = 2$. No hay mínimo absoluto.
(d) $y = x^2$	$(0, 2)$	No hay extremos absolutos.

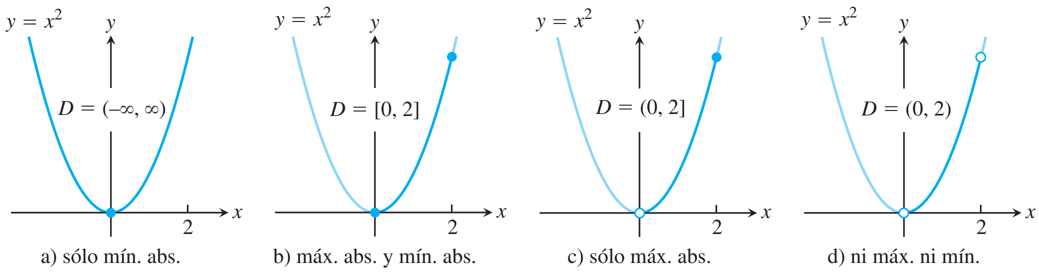


FIGURA 4.2 Gráficas del ejemplo 1.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Daniel Bernoulli
(1700–1789)

Algunas de las funciones en el ejemplo 1 no tuvieron valores máximos o mínimos. El siguiente teorema afirma que una función que es *continua* en todo punto de un intervalo *cerrado* $[a, b]$ tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo. Cuando graficamos una función, buscamos estos valores extremos.

TEOREMA 1: Teorema de los valores extremos Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un valor máximo absoluto M como un valor mínimo absoluto m en $[a, b]$. Esto es, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ y $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier otro x en $[a, b]$.

La demostración del teorema de los valores extremos requiere de un conocimiento detallado del sistema de los números reales (véase el apéndice 6), por lo que no la veremos aquí. La figura 4.3 ilustra posibles ubicaciones para los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Como observamos para la función $y = \cos x$, es posible que un mínimo absoluto (o máximo absoluto) pueda ocurrir en dos o más puntos diferentes del intervalo.

Los requerimientos del teorema 1 de que el intervalo sea cerrado y finito, así como de que la función sea continua, son los ingredientes clave. Sin ellos, la conclusión del teorema no

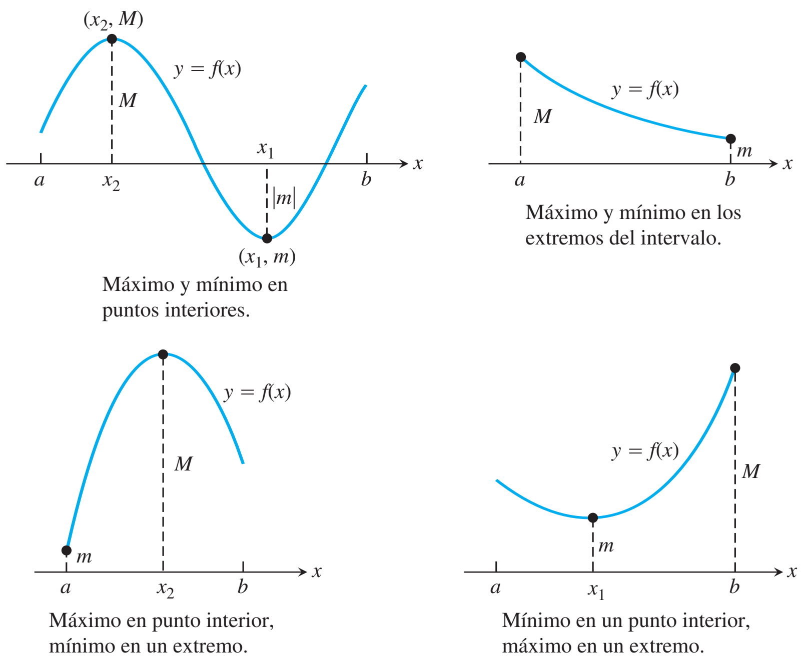


FIGURA 4.3 Algunas posibilidades para el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

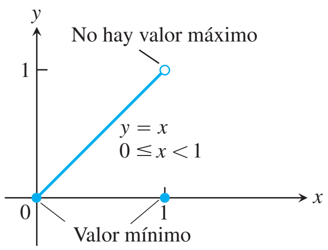


FIGURA 4.4 Incluso un solo punto de discontinuidad puede evitar que una función tenga valor máximo o mínimo en un intervalo cerrado. La función

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todo punto de $[0, 1]$, excepto en $x = 1$; sin embargo, la gráfica en $[0, 1]$ no tiene punto máximo.

necesariamente se cumple. El ejemplo 1 muestra que un valor extremo absoluto podría no existir si el intervalo no es cerrado, o bien, no es finito. La figura 4.4 indica que no es posible omitir el requisito de continuidad.

Valores extremos locales (relativos)

La figura 4.5 muestra una gráfica con cinco puntos, donde la función tiene valores extremos en su dominio $[a, b]$. El mínimo absoluto ocurre en a aunque en e el valor de la función es menor que cualquier otro punto *cercano*. La curva crece del lado izquierdo de c y decrece del lado derecho de c, por lo que $f(c)$ es un máximo local. La función alcanza su máximo absoluto en d. Ahora definiremos lo que significa un extremo local.

DEFINICIONES Una función tiene un valor **máximo local** en un punto c en su dominio D si $f(x) \leq f(c)$ para toda $x \in D$ que está dentro de algún intervalo abierto que contenga a c.

Una función tiene un valor **mínimo local** en un punto c en su dominio D si $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in D$ que está dentro de algún intervalo abierto que contenga a c.

Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un máximo local en el punto extremo $x = a$, si $f(x) \leq f(a)$ para toda x en algún intervalo semiabierto $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Asimismo, tiene un máximo local en un punto interior $x = c$, si $f(x) \leq f(c)$ para toda x en algún intervalo abierto $(c - \delta, c + \delta)$, $\delta > 0$; además, tiene un máximo local en el punto extremo $x = b$ si $f(x) \leq f(b)$ para toda x en algún intervalo semiabierto $(b - \delta, b]$, $\delta > 0$. Las desigualdades se invierten para valores mínimos locales. En la figura 4.5 la función tiene máximos locales en c y d, así como mínimos locales en a, e y b. Los extremos locales también se conocen como **extremos relativos**. Algunas funciones pueden tener un número infinito de extremos locales, incluso en un intervalo finito. Un ejemplo es la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ en el intervalo $(0, 1]$. (Esta función se grafica en la figura 2.40).

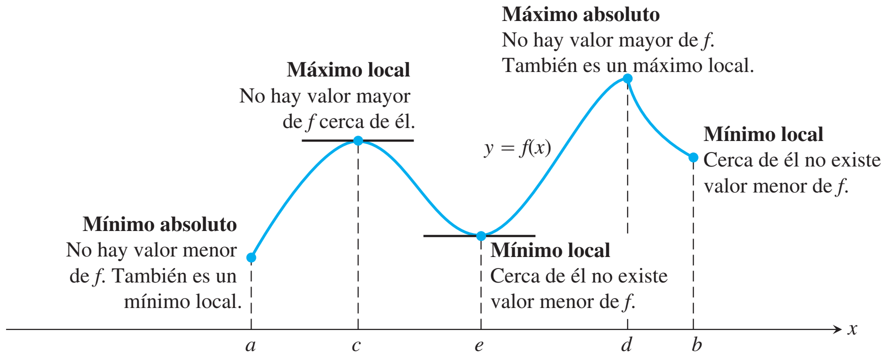


FIGURA 4.5 Cómo identificar tipos de máximos y mínimos para una función con dominio $a \leq x \leq b$.

Un máximo absoluto también es un máximo local. Al ser el mayor valor global, también es el mayor valor en sus inmediaciones. Por ello, *una lista de todos los máximos locales de manera automática incluirá al máximo absoluto, si es que existe.* De forma análoga, *una lista de todos los mínimos locales incluirá al mínimo absoluto, si es que existe.*

Determinación de extremos

El siguiente teorema explica por qué por lo regular sólo necesitamos investigar unos cuantos valores para determinar los extremos de una función.

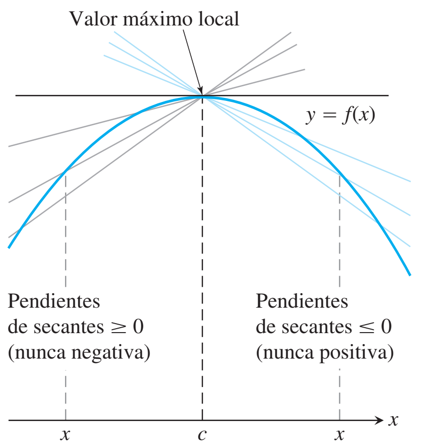


FIGURA 4.6 Una curva con un valor máximo local. La pendiente en c, simultáneamente el límite de números no positivos y de números no negativos, es cero.

TEOREMA 2: Teorema de la primera derivada para valores extremos locales Si f tiene un valor máximo local o un mínimo local en un punto interior c de su dominio, y si f' está definida en c, entonces

$$f'(c) = 0.$$

Prueba Para probar que $f'(c)$ es cero en un extremo local, primero demostramos que $f'(c)$ no puede ser positiva y luego que $f'(c)$ no puede ser negativa. El único número que no es positivo ni negativo es cero, así que $f'(c)$ debe ser cero.

Para comenzar, suponga que f tiene un valor máximo local en $x = c$ (figura 4.6), por lo que $f(x) - f(c) \leq 0$ para todos los valores de x suficientemente cercanos a c. Como c es un punto interior del dominio de f, $f'(c)$ está definida por el límite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Esto significa que los límites laterales existen en $x = c$ y son iguales a $f'(c)$. Cuando examinamos estos límites por separado, encontramos que

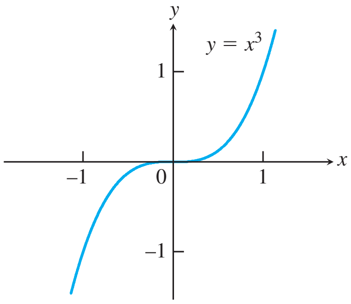
$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \qquad \text{Puesto que } (x - c) > 0 \text{ y } f(x) \leq f(c) \tag{1}$$

De forma análoga,

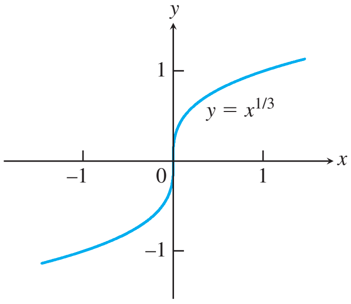
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \qquad \text{Puesto que } (x - c) < 0 \text{ y } f(x) \leq f(c) \tag{2}$$

Juntas, las ecuaciones (1) y (2) implican que $f'(c) = 0$.

Esto prueba el teorema para valores máximos locales. Para demostrar el teorema para valores mínimos locales, basta con utilizar $f(x) \geq f(c)$, lo cual invierte las desigualdades de las ecuaciones (1) y (2). ■



(a)



(b)

FIGURA 4.7 Puntos críticos sin valores extremos. (a) $y' = 3x^2$ es 0 en $x = 0$, pero $y = x^3$ no tiene extremos allí. (b) $y' = (1/3)x^{-2/3}$ no está definida en $x = 0$, pero $y = x^{1/3}$ no tiene extremos allí.

El teorema 2 establece que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por ello, los únicos lugares donde la función f posiblemente tiene un valor extremo (local o global) son

1. puntos interiores donde $f' = 0$,
2. puntos interiores donde f' no está definida,
3. los puntos extremos del dominio de f.

La siguiente definición nos ayuda a resumir.

DEFINICIÓN Un punto interior del dominio de una función f donde f' es cero o no está definida es un **punto crítico** de f.

Así, los únicos puntos del dominio donde la función puede tener valores extremos son los puntos críticos y los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, tenga cuidado de no malinterpretar lo que se dice aquí. Una función puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener un valor extremo local ahí. Por ejemplo, las dos funciones $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$ tienen puntos críticos en el origen y ahí tienen un valor de cero, pero cada función es positiva a la derecha del origen y negativa a la izquierda. En consecuencia, ninguna de las funciones tiene un valor extremo local en el origen. En vez de ello, cada función tiene un *punto de inflexión* ahí (véase la figura 4.7). Definimos y analizamos los puntos de inflexión en la sección 4.4.

La mayoría de los problemas referentes a valores extremos piden determinar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y finito. El teorema 1 nos asegura que tales valores existen; el teorema 2 nos indica que éstos se presentan sólo en puntos críticos o en los extremos del intervalo. Con frecuencia, es posible listar tales puntos y calcular los valores correspondientes de la función para determinar cuáles son los valores máximo y mínimo, y localizar dónde están. Por supuesto, hemos visto que si el intervalo no es cerrado o no es finito (tal como $a < x < b$, o bien, $a < x < \infty$), los extremos absolutos no necesariamente existen. Si existe un valor máximo o mínimo absoluto, debe presentarse en un punto crítico o en un extremo del lado derecho o izquierdo del intervalo.

Cómo determinar los extremos absolutos de una función continua *f* en un intervalo cerrado finito

1. Evalúe f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo.
2. Tome el mayor y el menor de tales valores.

EJEMPLO 2 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es derivable en todo su dominio, así que el único punto crítico es donde $f'(x) = 2x = 0$, es decir, $x = 0$. Necesitamos verificar los valores de la función en $x = 0$ y en los puntos extremos del intervalo $x = -2$ y $x = 1$:

Valor en el punto crítico:	$f(0) = 0$
Valores en los extremos del intervalo:	$f(-2) = 4$
	$f(1) = 1$

La función tiene un valor máximo absoluto de 4 en $x = -2$ y un valor mínimo absoluto de 0 en $x = 0$. ■

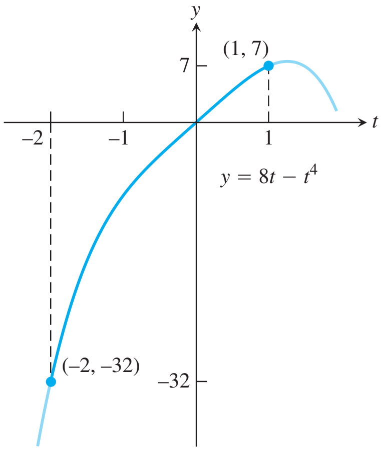


FIGURA 4.8 Los valores extremos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $g(t) = 8t - t^4$ en $[-2, 1]$.

Solución La función es derivable en todo su dominio, por lo que los únicos puntos críticos se presentan donde $g'(t) = 0$. Al resolver esta ecuación, se obtiene

$$8 - 4t^3 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \sqrt[3]{2} > 1,$$

un punto fuera del dominio dado. Por lo tanto, los extremos absolutos de la función se presentan en los puntos extremos, $g(-2) = -32$ (mínimo absoluto) y $g(1) = 7$ (máximo absoluto). Véase la figura 4.8. ■

EJEMPLO 4 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Solución Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos, luego tomamos el mayor y el menor de los valores resultantes.

La primera derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

no tiene ceros, pero no está definida en el punto interior $x = 0$. Los valores de f en este punto crítico y en los extremos del intervalo son

Valor en el punto crítico: $f(0) = 0$

Valores en los puntos extremos: $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

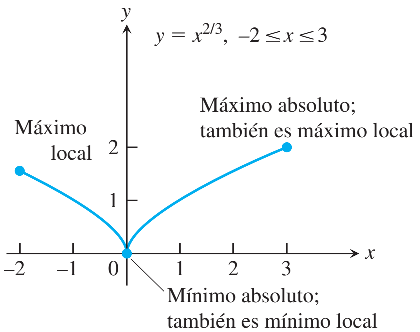


FIGURA 4.9 Los valores extremos de $f(x) = x^{2/3}$ en $[-2, 3]$ aparecen en $x = 0$ y $x = 3$ (ejemplo 4).

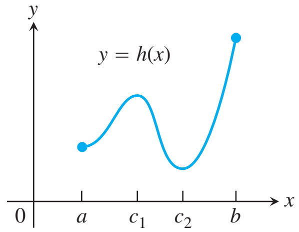
Con base en esta lista, observamos que el valor máximo absoluto de la función es $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$, y se presenta en el extremo derecho $x = 3$. El valor mínimo absoluto es 0 y se presenta en el punto interior $x = 0$ donde la gráfica tiene un "pico" (figura 4.9). ■

Ejercicios 4.1

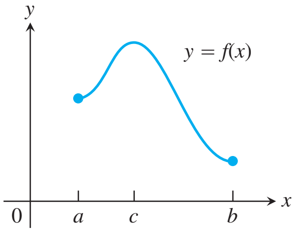
Determinación de extremos con base en las gráficas

En los ejercicios 1 a 6 y con base en la gráfica, determine si la función tiene valores extremos absolutos en $[a, b]$. Luego explique por qué su respuesta es congruente con el teorema 1.

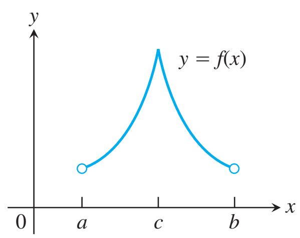
1.



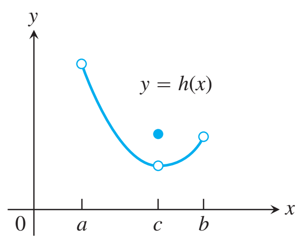
2.



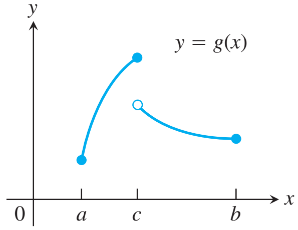
3.



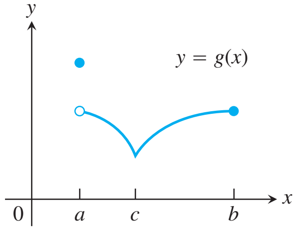
4.



5.

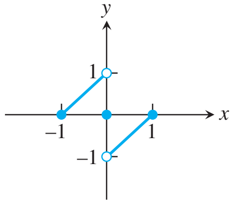


6.

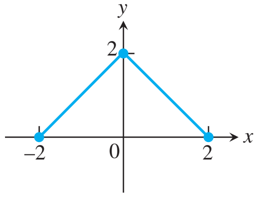


En los ejercicios 7 a 10, determine los valores extremos absolutos y en dónde se presentan.

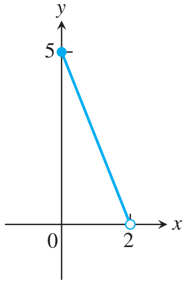
7.



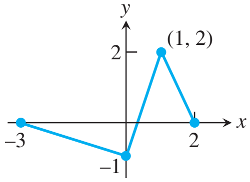
8.



9.



10.



En los ejercicios 11 a 14, relacione cada tabla con una gráfica.

11.

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

12.

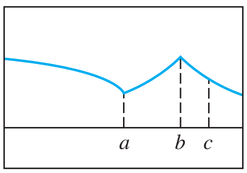
x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

13.

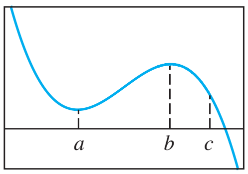
x	$f'(x)$
a	no existe
b	0
c	-2

14.

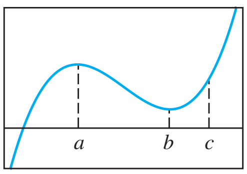
x	$f'(x)$
a	no existe
b	no existe
c	-1.7



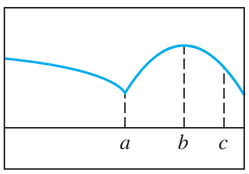
(a)



(b)



(c)



(d)

En los ejercicios 15 a 20, grafique cada función y determine si la función tiene valores extremos absolutos en su dominio. Explique por qué su respuesta es congruente con el teorema 1.

15. $f(x) = |x|, \quad -1 < x < 2$

16. $y = \dfrac{6}{x^2 + 2}, \quad -1 < x < 1$

17. $g(x) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

18. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -1 \le x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

19. $y = 3 \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 2\pi$

20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Extremos absolutos en intervalos cerrados finitos

En los ejercicios 21 a 36, determine los valores máximo y mínimo absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego grafique la función. Identifique los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos e incluya sus coordenadas.

21. $f(x) = \dfrac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$

22. $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

23. $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$

24. $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

25. $F(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

26. $F(x) = -\dfrac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

27. $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

28. $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

29. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

30. $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

31. $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{5\pi}{6}$

32. $f(\theta) = \tan \theta, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

33. $g(x) = \csc x, \quad \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$

34. $g(x) = \sec x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$

35. $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

36. $f(t) = |t - 5|, \quad 4 \le t \le 7$

En los ejercicios 37 a 40, determine los valores máximo y mínimo absolutos y diga dónde se alcanzan.

37. $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

38. $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

39. $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

40. $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

Determinación de puntos críticos

En los ejercicios 41 a 48, determine todos los puntos críticos para cada función.

41. $y = x^2 - 6x + 7$

42. $f(x) = 6x^2 - x^3$

43. $f(x) = x(4 - x)^3$

44. $g(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2$

45. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

47. $y = x^2 - 32\sqrt{x}$

48. $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$

Determinación de valores extremos

En los ejercicios 49 a 58, determine los valores extremos (absolutos y locales) de la función, luego indique dónde se alcanzan.

49. $y = 2x^2 - 8x + 9$

50. $y = x^3 - 2x + 4$

51. $y = x^3 + x^2 - 8x + 5$

52. $y = x^3(x - 5)^2$

53. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

54. $y = x - 4\sqrt{x}$

55. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$

56. $y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$

57. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

58. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$

Extremos locales y puntos críticos

En los ejercicios 59 a 66, determine los puntos críticos, los extremos del dominio y los valores extremos (absolutos y locales) para cada función.

59. $y = x^{2/3}(x + 2)$

60. $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

61. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

62. $y = x^2\sqrt{3 - x}$

63. $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

64. $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

65. $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

66. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{15}{4}, & x \le 1 \\ x^3 - 6x^2 + 8x, & x > 1 \end{cases}$

En los ejercicios 67 y 68, justifique sus respuestas.

67. Sea $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

a. ¿Existe $f'(2)$?

b. Demuestre que el único valor extremo local de f se alcanza en $x = 2$.

c. ¿El resultado del inciso (b) contradice el teorema de los valores extremos?

d. Repita los incisos (a) y (b) para $f(x) = (x - a)^{2/3}$, pero remplace 2 por $x = a$.

68. Sea $f(x) = |x^3 - 9x|$.

a. ¿Existe $f'(0)$?
b. ¿Existe $f'(3)$?
c. ¿Existe $f'(-3)$?
d. Determine todos los valores extremos de f.

Teoría y ejemplos

69. Un mínimo sin derivada La función $f(x) = |x|$ tiene un valor mínimo absoluto en $x = 0$, aunque f no es derivable en $x = 0$. ¿Es esto congruente con el teorema 2? Justifique su respuesta.

70. Funciones pares Si una función par $f(x)$ tiene un valor máximo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de f en $x = -c$? Justifique su respuesta.

71. Funciones impares Si una función impar $g(x)$ tiene un valor mínimo local en $x = c$, ¿se puede decir algo acerca del valor de g en $x = -c$? Justifique su respuesta.

72. Sabemos cómo encontrar los valores extremos de una función continua $f(x)$ investigando sus valores en los puntos críticos y en los extremos del intervalo. Pero, ¿qué ocurre si no hay puntos críticos o extremos? ¿Qué sucede entonces? ¿Existen realmente tales funciones? Justifique sus respuestas

73. La función

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \qquad 0 < x < 5,$$

modela el volumen de una caja.

a. Determine los valores extremos de V.
b. Interprete los valores determinados en el inciso (a) en términos del volumen de la caja.

74. Funciones cúbicas Considere la función cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

a. Demuestre que f puede tener 0, 1 y 2 puntos críticos. Dé ejemplos y gráficas que respalden su argumento.
b. ¿Cuántos valores extremos locales puede tener f?

75. Altura máxima de un cuerpo que se desplaza verticalmente La altura de un cuerpo que se desplaza verticalmente está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0, \qquad g > 0,$$

con s en metros y t en segundos. Determine la altura máxima del cuerpo.

76. Pico de la corriente alterna Suponga que en cualquier tiempo t (en segundos) la corriente i (en amperes) en un circuito de corriente alterna es $i = 2 \cos t + 2 \operatorname{sen} t$. ¿Cuál es la corriente pico (mayor magnitud) para tal circuito?

T Grafique las funciones en los ejercicios 77 a 80. Luego determine los valores extremos de la función en el intervalo e indique dónde se alcanzan.

77. $f(x) = |x - 2| + |x + 3|, \quad -5 \le x \le 5$

78. $g(x) = |x - 1| - |x - 5|, \quad -2 \le x \le 7$

79. $h(x) = |x + 2| - |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

80. $k(x) = |x + 1| + |x - 3|, \quad -\infty < x < \infty$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 81 a 86, utilizará un SAC para ayudar a determinar los extremos absolutos de la función indicada en el intervalo cerrado especificado. Siga los pasos siguientes.

a. Trace la función en el intervalo para ver su comportamiento general ahí.
b. Determine los puntos interiores donde $f' = 0$. (En algunos ejercicios tal vez tenga que utilizar la función para resolver numéricamente una ecuación con la finalidad de aproximar una solución). Es posible graficar también a f'.
c. Determine los puntos interiores donde no existe f'.
d. Evalúe la función en todos los puntos que encontró en los incisos (b) y (c), así como en los extremos del intervalo.
e. Determine los valores extremos absolutos de la función en el intervalo e identifique dónde se alcanzan.

81. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2, \quad [-20/25, 64/25]$

82. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-3/4, 3]$

83. $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

84. $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, 10/3]$

85. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

86. $f(x) = x^{3/4} - \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 El teorema del valor medio

Sabemos que las funciones constantes tienen derivadas iguales a cero, pero, ¿podría existir una función más complicada cuya derivada siempre sea cero? Si dos funciones tienen derivadas idénticas en un intervalo, ¿cómo están relacionadas esas funciones? En este capítulo responderemos éstas y otras preguntas aplicando el teorema del valor medio. Primero se expone un caso especial, conocido como teorema de Rolle, que se utiliza para demostrar el teorema del valor medio.

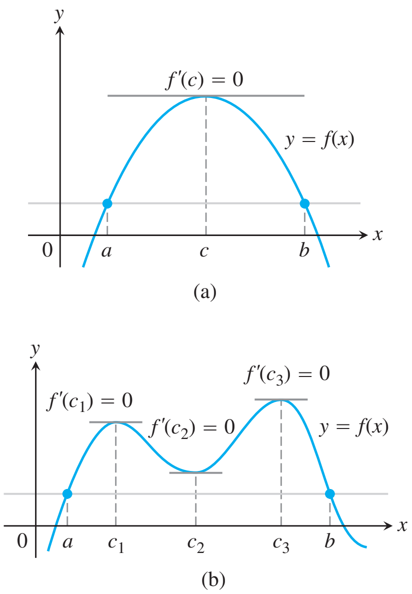


FIGURA 4.10 El teorema de Rolle dice que una curva derivable tiene al menos una tangente horizontal entre cualesquiera dos puntos por los que la curva cruza una recta horizontal. Puede tener sólo una (a) o más de una (b).

Teorema de Rolle

Como lo sugiere su gráfica, si una función derivable cruza una recta horizontal en dos puntos diferentes, existe al menos un punto entre ellos donde la tangente a la gráfica es horizontal y la derivada es cero (figura 4.10). Ahora establecemos y demostramos dicho resultado.

> **TEOREMA 3: Teorema de Rolle** Suponga que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en todo punto de su interior (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a, b) en el que $f'(c) = 0$.

Prueba Al ser continua de acuerdo con el teorema 1, f toma los valores máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$. Éstos sólo se pueden alcanzar

1. en puntos interiores donde f' es cero,
2. en puntos interiores donde f' no existe,
3. en los puntos extremos del dominio de la función, en este caso a y b.

Por hipótesis, f tiene una derivada en todo punto interior. Lo anterior elimina la posibilidad (2), dejándonos con los puntos interiores donde $f' = 0$ y con los dos puntos extremos del intervalo, a y b.

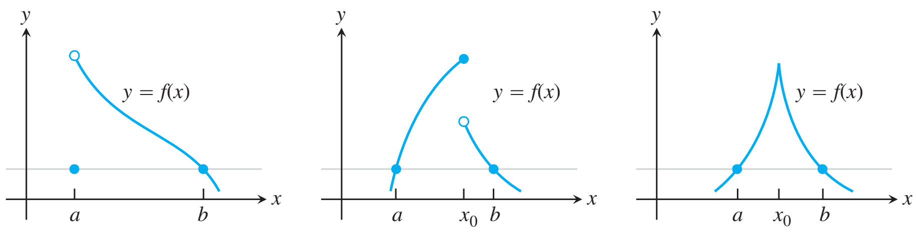
Si el máximo o el mínimo se alcanzan en un punto c entre a y b, entonces por el teorema 2 de la sección 4.1, $f'(c) = 0$ y así determinamos un punto para el teorema de Rolle.

Si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los extremos, entonces, ya que $f(a) = f(b)$, debe ser el caso de que f sea una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y el punto c pueden ser cualquiera en el interior (a, b). ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Michel Rolle
(1652–1719)

Las hipótesis del teorema 3 son esenciales. Si no se cumplen en algún punto, la gráfica podría no tener una tangente horizontal (figura 4.11).



(a) Discontinuidad en un extremo del intervalo $[a, b]$
(b) Discontinuidad en un punto interior de $[a, b]$
(c) Continua en $[a, b]$, pero no diferenciable en un punto

FIGURA 4.11 Si no se satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle, podría no haber una tangente horizontal.

El teorema de Rolle podría combinarse con el teorema del valor intermedio para mostrar cuándo existe una única solución real de una ecuación $f(x) = 0$, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

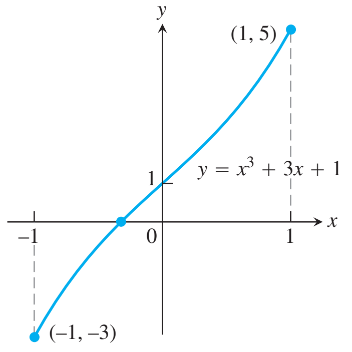


FIGURA 4.12 El único cero (número real) del polinomio $y = x^3 + 3x + 1$ es el que se muestra aquí, donde la curva cruza al eje x entre -1 y 0 (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Demuestre que la ecuación

$$x^3 + 3x + 1 = 0$$

tiene exactamente una solución real.

Solución Definimos la función continua

$$f(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Como $f(-1) = -3$ y $f(0) = 1$, el teorema del valor intermedio nos indica que la gráfica de f cruza al eje x en algún punto en el intervalo abierto $(-1, 0)$. (Véase la figura 4.12). La derivada

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

nunca es cero (ya que siempre es positiva). Ahora, si hubiera siquiera dos puntos $x = a$ y $x = b$ donde $f(x)$ fuera cero, el teorema de Rolle nos garantizaría la existencia de un punto $x = c$ entre ellos donde f' sería cero. Por lo tanto, f no tiene más que un cero. ■

El uso principal que haremos del teorema de Rolle es para demostrar el teorema del valor medio.

Teorema del valor medio

El teorema del valor medio, que estableció por primera vez Joseph-Louis Lagrange, es una versión general del teorema de Rolle (figura 4.13). El teorema del valor medio garantiza que existe un punto donde la recta tangente es paralela a la cuerda AB.

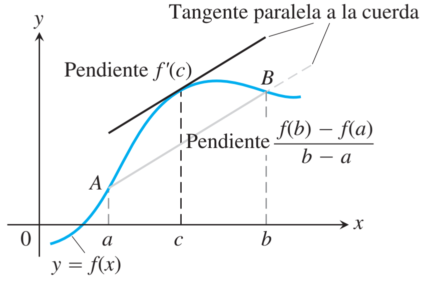


FIGURA 4.13 Geométricamente, el teorema del valor medio dice que en algún punto entre a y b la curva tiene al menos una tangente paralela a la cuerda AB.

TEOREMA 4: Teorema del valor medio Suponga que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el interior del intervalo (a, b). Entonces existe al menos un punto c en (a, b) en el que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

Prueba Dibujamos la gráfica de f y trazamos una recta que pase por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. (Véase la figura 4.14). La recta es la gráfica de la función

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{2}$$

(ecuación punto pendiente). La diferencia vertical entre las gráficas de f y g en x es

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \end{aligned} \tag{3}$$

La figura 4.15 muestra juntas las gráficas de f, g y h.

La función h satisface las hipótesis del teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), ya que tanto f como g lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$, ya que las gráficas de f y g pasan por A y B. Por lo tanto, $h'(c) = 0$ en algún punto $c \in (a, b)$. Éste es el punto que necesitamos para la ecuación (1).

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Joseph-Louis Lagrange
(1736–1813)

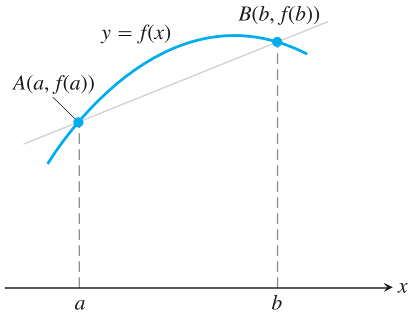


FIGURA 4.14 La gráfica de f y la cuerda AB en el intervalo $[a, b]$.

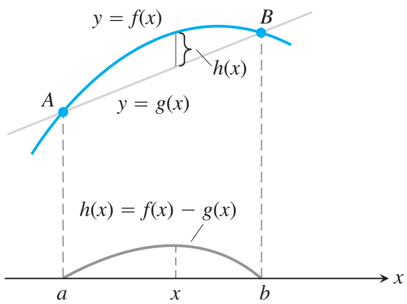


FIGURA 4.15 La cuerda AB es la gráfica de la función $g(x)$. La función $h(x) = f(x) - g(x)$ proporciona la distancia vertical entre las gráficas de f y g en x.

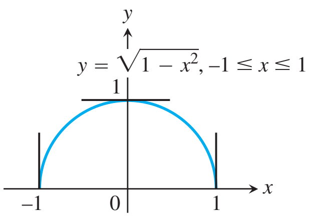


FIGURA 4.16 La función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ satisface las hipótesis (y la conclusión) del teorema del valor medio en $[-1, 1]$, aunque f no sea derivable en -1 y 1.

Para verificar la ecuación (1), derivamos ambos lados de la ecuación (3) con respecto a x y luego establecemos $x = c$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{Derivada de la ecuación (3)...}$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{... con } x = c$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad h'(c) = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \text{Reacomodando}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Las hipótesis del teorema del valor medio no piden que f sea derivable en a o en b. Basta con la continuidad en a y b (figura 4.16).

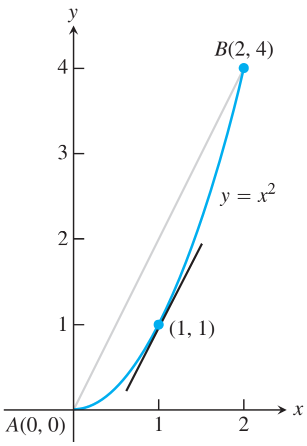


FIGURA 4.17 Como encontramos en el ejemplo 2, $c = 1$ es donde la tangente resulta paralela a la cuerda.

EJEMPLO 2 La función $f(x) = x^2$ (figura 4.17) es continua para $0 \leq x \leq 2$, y es derivable para $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, el teorema del valor medio afirma que en algún punto c en el intervalo, la derivada $f'(x) = 2x$ debe tener el valor $(4 - 0)/(2 - 0) = 2$. En este caso, es posible identificar a c si resolvemos la ecuación $2c = 2$ para obtener $c = 1$. Sin embargo, no siempre es sencillo determinar c algebraicamente, aunque sepamos que existe. ■

Una interpretación física

Podemos considerar al número $(f(b) - f(a))/(b - a)$ como el cambio promedio en f en $[a, b]$, y a $f'(c)$ como un cambio instantáneo. Luego, el teorema del valor medio indica que en algún punto interior el cambio instantáneo debe ser igual al cambio promedio de todo el intervalo.

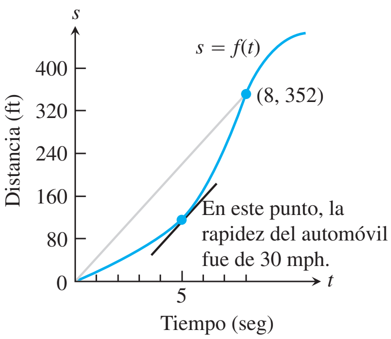


FIGURA 4.18 Distancia contra el tiempo transcurrido para el automóvil del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Si un automóvil acelera desde cero y tarda 8 segundos en avanzar 352 ft, su velocidad promedio para el intervalo de 8 segundos es $352/8 = 44$ ft/seg. El teorema del valor medio afirma que en algún punto durante la aceleración el velocímetro debe indicar exactamente 30 mph (44 ft/seg) (figura 4.18). ■

Consecuencias matemáticas

Al inicio de la sección preguntamos qué clase de función tiene una derivada cero en todo un intervalo. El primer corolario del teorema del valor medio da la respuesta de que sólo las funciones constantes tienen derivadas igual a cero.

COROLARIO 1 Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = C$ para toda $x \in (a, b)$, donde C es una constante.

Prueba Queremos demostrar que f tiene un valor constante en el intervalo (a, b). Para ello, demostramos que si x_1 y x_2 son cualesquiera dos puntos en (a, b) con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Ahora f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$: es derivable en todo punto de $[x_1, x_2]$; por lo tanto, también es continua en todo punto. En consecuencia,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

en algún punto c entre x_1 y x_2. Como $f' = 0$ en todo el intervalo (a, b), esta ecuación implica sucesivamente que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0, \qquad f(x_2) - f(x_1) = 0, \qquad \text{y} \qquad f(x_1) = f(x_2). \qquad \blacksquare$$

Al inicio de esta sección, también preguntamos acerca de la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas en todo un intervalo. El siguiente corolario nos dice que sus valores en el intervalo tienen una diferencia constante.

COROLARIO 2 Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces existe una constante C tal que $f(x) = g(x) + C$ para toda $x \in (a, b)$. Esto es $f - g$ es una función constante en (a, b).

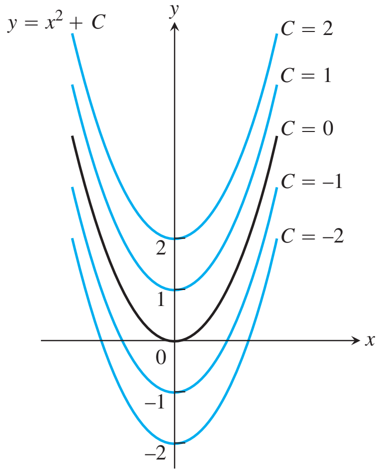


FIGURA 4.19 Desde un punto de vista geométrico, el corolario 2 del teorema del valor medio dice que las gráficas de funciones con la misma derivada en el intervalo sólo pueden diferir por un desplazamiento vertical. Las gráficas de las funciones con derivada $2x$ son las parábolas $y = x^2 + C$, las cuales se muestran aquí para algunos valores de C.

Prueba En cada punto $x \in (a, b)$ la derivada de la función diferencia $h = f - g$ es

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Así, por el corolario 1, $h(x) = C$ en (a, b). Esto es, $f(x) - g(x) = C$ en (a, b), así que $f(x) = g(x) + C$. $\blacksquare$

Los corolarios 1 y 2 también son ciertos si el intervalo abierto (a, b) no es finito. Esto es, siguen siendo ciertos si el intervalo es (a, ∞), $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.

El corolario 2 desempeñará un papel importante cuando analicemos las antiderivadas en la sección 4.7. Por ejemplo, nos indica que como la derivada de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$ es $2x$, cualquiera otra función con derivada $2x$ en $(-\infty, \infty)$ debe tener la fórmula $x^2 + C$ para algún valor de C (figura 4.19).

EJEMPLO 4 Determine la función $f(x)$ cuya derivada sea sen x y cuya gráfica pase por el punto $(0, 2)$.

Solución Como la derivada de $g(x) = -\cos x$ es $g'(x) = \text{sen } x$, vemos que f y g tienen la misma derivada. Entonces, el corolario 2 indica que $f(x) = -\cos x + C$, para alguna constante C. Como la gráfica de f pasa por el punto (0, 2), el valor de C se determina a partir de la condición de que $f(0) = 2$:

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2, \qquad \text{así que} \qquad C = 3.$$

La función $f(x) = -\cos x + 3$. ■

Determinación de la velocidad y de la posición a partir de la aceleración

Es posible utilizar el corolario 2 para determinar las funciones velocidad y posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta vertical. Suponga que un objeto o un cuerpo caen libremente a partir del reposo con una aceleración de 9.8 m/seg^2. Consideremos, además, que la posición del cuerpo se mide positivamente hacia abajo desde la posición de reposo (de manera que el eje coordenado vertical apunta *hacia abajo*, en la dirección del movimiento, con la posición de reposo en 0).

Sabemos que la velocidad $\upsilon(t)$ es alguna función cuya derivada es 9.8. También, que la derivada de $g(t) = 9.8t$ es 9.8. Por el corolario 2,

$$\upsilon(t) = 9.8t + C$$

para alguna constante C. Como el cuerpo cae a partir del reposo, $\upsilon(0) = 0$. Por lo tanto,

$$9.8(0) + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función velocidad debe ser $\upsilon(t) = 9.8t$. ¿Qué puede decirse acerca de la función posición $s(t)$?

Sabemos que $s(t)$ es alguna función cuya derivada es $9.8t$. También, que la derivada de $f(t) = 4.9t^2$ es $9.8t$. Con base en el corolario 2,

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

para alguna constante C. Como $s(0) = 0$,

$$4.9(0)^2 + C = 0, \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

La función de posición es $s(t) = 4.9t^2$ hasta que el cuerpo golpea el suelo.

La capacidad para determinar funciones a partir de sus tasas de cambio es una herramienta muy poderosa del cálculo. Como veremos, ésta es fundamental en el desarrollo matemático del capítulo 5.

Ejercicios 4.2

Verificación del teorema del valor medio

Determine el valor o valores de c que satisfacen la ecuación

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

en la conclusión del teorema del valor medio para las funciones y los intervalos en los ejercicios 1 a 6.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

2. $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$

4. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

5. $f(x) = x^3 - x^2, \quad [-1, 2]$

6. $g(x) = \begin{cases} x^3, & -2 \le x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$

En los ejercicios 7 a 12, ¿cuáles de las funciones satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado y cuáles no? Justifique sus respuestas.

7. $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

8. $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

9. $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$

10. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & -2 \le x \le -1 \\ 2x^2 - 3x - 3, & -1 < x \le 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & 0 \le x \le 2 \\ 6x - x^2 - 7, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

13. La función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

es cero en $x = 0$ y $x = 1$, así como derivable en el intervalo $(0, 1)$, pero su derivada ahí nunca es cero. ¿Cómo es esto posible? ¿Acaso el teorema de Rolle no dice que la derivada tiene que ser cero en algún punto en $(0, 1)$? Justifique su respuesta.

14. ¿Para qué valores de a, m y b la función

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$?

Raíces (ceros)

15. a. Grafique los ceros de cada polinomio en una línea, junto con los ceros de su primera derivada.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1)(x - 2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x - 9)(x - 24)$

b. Utilice el teorema de Rolle para probar que entre cada dos ceros de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ existe un cero de

$$nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

16. Suponga que f'' es continua en $[a, b]$ y que f tiene tres ceros en el intervalo. Demuestre que f'' tiene al menos un cero en (a, b). Generalice dicho resultado.

17. Demuestre que si $f'' > 0$ en todo un intervalo $[a, b]$, entonces f' tiene al menos un cero en $[a, b]$. ¿Qué sucede si ahora $f'' < 0$ en todo $[a, b]$?

18. Demuestre que un polinomio cúbico puede tener a lo sumo tres ceros reales.

Demuestre que las funciones en los ejercicios 19 a 26 tienen exactamente un cero en el intervalo dado.

19. $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

20. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

21. $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1 + t} - 4, \quad (0, \infty)$

22. $g(t) = \dfrac{1}{1 - t} + \sqrt{1 + t} - 3.1, \quad (-1, 1)$

23. $r(\theta) = \theta + \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

24. $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

25. $r(\theta) = \sec\theta - \dfrac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \pi/2)$

26. $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \pi/2)$

Determinación de funciones a partir de sus derivadas

27. Suponga que $f(-1) = 3$ y que $f'(x) = 0$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 3$ para toda x? Justifique su respuesta.

28. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 2x + 5$ para toda x? Justifique su respuesta.

29. Suponga que $f'(x) = 2x$ para toda x. Determine $f(2)$ si

a. $f(0) = 0$ **b.** $f(1) = 0$ **c.** $f(-2) = 3$.

30. ¿Qué puede decir acerca de las funciones cuya derivada sea constante? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 31 a 36, determine todas las funciones posibles con la derivada indicada.

31. a. $y' = x$ **b.** $y' = x^2$ **c.** $y' = x^3$

32. a. $y' = 2x$ **b.** $y' = 2x - 1$ **c.** $y' = 3x^2 + 2x - 1$

33. a. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $y' = 5 + \dfrac{1}{x^2}$

34. a. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **b.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **c.** $y' = 4x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

35. a. $y' = \operatorname{sen} 2t$ **b.** $y' = \cos\dfrac{t}{2}$ **c.** $y' = \operatorname{sen} 2t + \cos\dfrac{t}{2}$

36. a. $y' = \sec^2\theta$ **b.** $y' = \sqrt{\theta}$ **c.** $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

En los ejercicios 37 a 40, determine la función con la derivada indicada y cuya gráfica pase por el punto P.

37. $f'(x) = 2x - 1, \quad P(0, 0)$

38. $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x, \quad P(-1, 1)$

39. $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$

40. $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad P(0, 0)$

Determinación de la posición a partir de la velocidad y la aceleración

Los ejercicios 41 a 44 indican la velocidad $v = ds/dt$ y la posición inicial de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una línea coordenada. Determine la posición del cuerpo en el instante t.

41. $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

42. $v = 32t - 2, \quad s(0.5) = 4$

43. $v = \operatorname{sen}\pi t, \quad s(0) = 0$

44. $v = \dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

Los ejercicios 45 a 48 indican la aceleración $a = d^2s/dt^2$, la velocidad y la posición iniciales de un cuerpo que se desplaza en una línea coordenada. Determine la posición del cuerpo en el instante t.

45. $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

46. $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

47. $a = -4\operatorname{sen} 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

48. $a = \dfrac{9}{\pi^2}\cos\dfrac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

Aplicaciones

49. Cambio de temperatura Un termómetro de mercurio tardó 14 segundos en subir de -19 °C a 100 °C cuando se sacó de un congelador y se colocó en agua hirviendo. Demuestre que en algún momento el mercurio sube a una tasa de 8.5 °C/seg.

50. Un camionero recibió una multa en la caseta de cobro de una carretera, según la cual en 2 horas había recorrido 159 millas en la autopista con un límite de velocidad de 65 mph. El camionero fue multado por exceso de velocidad. ¿Por qué?

51. Los relatos clásicos nos dicen que un trirreme con 170 remos (barco de guerra de la antigua Grecia o la antigua Roma) una vez cubrió 184 millas náuticas en 24 horas. Explique por qué en algún momento de esta hazaña la rapidez del trirreme excedió los 7.5 nudos (millas náuticas por hora).

52. Un maratonista corrió en 2.2 horas la maratón de la ciudad de Nueva York, cuya ruta mide 26.2 millas. Demuestre que el maratonista corrió exactamente a 11 mph por lo menos dos veces durante el recorrido, suponiendo que las velocidades inicial y final fueron cero.

53. Pruebe que en algún instante durante un viaje de 2 horas en automóvil la lectura del velocímetro será igual a la rapidez promedio del viaje.

54. Caída libre en la Luna La aceleración de la gravedad en la Luna es de 1.6 m/seg^2. Si se lanza una roca al interior de una grieta, ¿qué tan rápido cae justo antes de golpear el fondo 30 segundos después?

Teoría y ejemplos

55. La media geométrica de *a* y *b* La *media geométrica* de dos números positivos a y b es el número $\sqrt{ab}$. Demuestre que el valor c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = 1/x$ en un intervalo de números positivos $[a, b]$ es $c = \sqrt{ab}$.

56. La media aritmética de *a* y *b* La *media aritmética* de dos números a y b es el número $(a + b)/2$. Pruebe que el valor de c en la conclusión del teorema del valor medio para $f(x) = x^2$ en cualquier intervalo $[a, b]$ es $c = (a + b)/2$.

T **57.** Grafique la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2) - \operatorname{sen}^2(x + 1).$$

¿Qué hace la gráfica? ¿Por qué se comporta así la función? Justifique sus respuestas.

58. El teorema de Rolle

a. Construya una función polinomial $f(x)$ que tenga ceros en $x = -2, -1, 0, 1$ y 2.

b. Trace en el mismo sistema de coordenadas f y su derivada f'. ¿En qué se relaciona lo que ve con el teorema de Rolle?

c. ¿$g(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada g' ilustran el mismo fenómeno que f y f'?

59. Solución única Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). También suponga que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y que $f' \neq 0$ entre a y b. Demuestre que $f(x) = 0$ exactamente una vez entre a y b.

60. Tangente paralelas Suponga que f y g son derivables en $[a, b]$ y que $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$. Demuestre que existe por lo menos un punto entre a y b donde las tangentes a las gráficas de f y g son paralelas o son la misma recta. Ilustre con un bosquejo.

61. Suponga que $f'(x) \leq 1$ para $1 \leq x \leq 4$. Demuestre que $f(4) - f(1) \leq 3$.

62. Suponga que $0 < f'(x) < 1/2$ para todos los valores de x. Demuestre que $f(-1) < f(1) < 2 + f(-1)$.

63. Demuestre que $|\cos x - 1| \leq |x|$ para todo valor de x. (*Sugerencia:* Considere $f(t) = \cos t$ en $[0, x]$).

64. Demuestre que para cualesquiera números a y b, se cumple la desigualdad del seno, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$.

65. Si las gráficas de dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ empiezan en el mismo punto del plano y las funciones tienen la misma tasa de cambio en todo punto, ¿las gráficas tienen que ser idénticas? Justifique su respuesta.

66. Si $|f(w) - f(x)| \leq |w - x|$ para todos los valores de w y de x, y si f es una función derivable, demuestre que $-1 \leq f'(x) \leq 1$ para todos los valores de x.

67. Suponga que f es derivable en $a \leq x \leq b$ y que $f(b) < f(a)$. Demuestre que f' es negativa en algún punto entre a y b.

68. Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$. ¿Qué condiciones debe imponer a f para garantizar que

$$\text{mín } f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{máx } f',$$

donde mín f' y máx f' se refieren a los valores mínimo y máximo de f' en $[a, b]$? Justifique sus respuestas.

T **69.** Utilice las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 1$.

T **70.** Utilice las desigualdades del ejercicio 68 para estimar $f(0.1)$ si $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ para $0 \leq x \leq 0.1$ y $f(0) = 2$.

71. Sea f diferenciable en todo valor de x y suponga que $f(1) = 1$, que $f' < 0$ en $(-\infty, 1)$ y que $f' > 0$ en $(1, \infty)$.

a. Demuestre que $f(x) - 1$ para toda x.

b. ¿Debe cumplirse que $f'(1) = 0$? Explique.

72. Sea $f(x) = px^2 + qx + r$ una función cuadrática definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Demuestre que existe exactamente un punto c en (a, b) en el cual f satisface la conclusión del teorema del valor medio.

4.3 Funciones monótonas y el criterio de la primera derivada

Para graficar una función derivable es útil conocer en dónde es creciente (asciende de izquierda a derecha) y en dónde decrece (desciende de izquierda a derecha) en un intervalo. Esta sección ofrece un criterio (o una prueba) para determinar en dónde crece la función y en dónde decrece. También mostramos cómo verificar que los puntos críticos de una función resultan ser valores extremos locales.

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Como otro corolario del teorema del valor medio, mostramos que las funciones con derivada positiva son crecientes y las funciones con derivada negativa son funciones decrecientes. Se dice que una función que es creciente o decreciente en un intervalo es **monótona** en el intervalo.

COROLARIO 3 Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Prueba Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. El teorema del valor medio aplicado a f en $[x_1, x_2]$ dice que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

para alguna c entre x_1 y x_2. El signo del lado derecho de esta ecuación es del mismo signo de $f'(c)$, ya que $x_2 - x_1$ es positiva. Por lo tanto, $f(x_2) > f(x_1)$, si f' es positiva en (a, b) y $f(x_2) < f(x_1)$ si f' es negativa en (a, b). ■

El corolario 3 es válido para intervalos tanto infinitos como finitos. Para determinar los intervalos donde una función f es creciente o es decreciente, primero determinamos todos los puntos críticos de f. Si $a < b$ son dos puntos críticos para f, y si la derivada f' es continua pero nunca es cero en el intervalo (a, b), entonces por el teorema del valor medio aplicado a f', la derivada debe ser positiva en todo (a, b), o bien, siempre negativa. Una forma en la que es posible determinar el signo de f' en (a, b) es simplemente evaluando la derivada en un solo punto c en (a, b). Si $f'(c) > 0$, entonces $f'(x) > 0$ para toda x en (a, b), así que, por el corolario 3, f es creciente en $[a, b]$; si $f'(c) < 0$, entonces f es decreciente en $[a, b]$. El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar tal procedimiento.

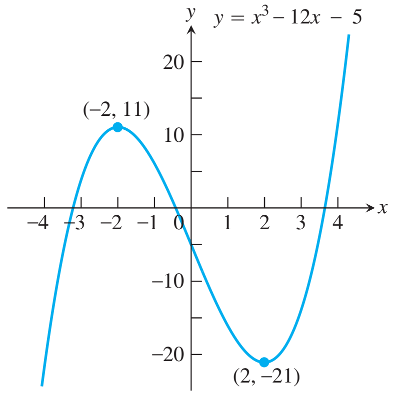


FIGURA 4.20 La función $f(x) = x^3 - 12x - 5$ es monótona en tres intervalos separados (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Determine los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identifique los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

Solución La función f es continua y derivable. La primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x + 2)(x - 2)$$

es cero en $x = -2$ y $x = 2$. Estos puntos críticos subdividen el dominio de f para crear los intervalos abiertos ajenos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$ en los que f' es positiva o negativa. Determinamos el signo de f' al evaluar f' en un punto conveniente en cada subintervalo. Entonces, si aplicamos el corolario 3, el comportamiento de f está determinado en cada subintervalo. Los resultados se resumen en la siguiente tabla y la gráfica de f está dada en la figura 4.20.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluada	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	Creciente	decreciente	creciente

■

En la tabla resumen del ejemplo 1 utilizamos desigualdades del tipo "estrictamente" menor a, para especificar los intervalos. El corolario 3 indica que también podríamos utilizar desigualdades del tipo $\leq$. Esto es, la función f del ejemplo es creciente en $-\infty < x \leq 2$, decreciente en $-2 \leq x \leq 2$ y creciente en $2 \leq x < \infty$. No decimos nada acerca de si una función es creciente o decreciente en un solo punto.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Edmund Halley
(1656–1742)

Criterio de la primera derivada para extremos locales

En la figura 4.21, en los puntos donde f tiene un valor mínimo, $f' < 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. (Si el punto es un extremo del intervalo, sólo hay un lado que considerar). Así, la función es decreciente a la izquierda del valor mínimo y es creciente a su derecha. De forma análoga, en los puntos donde f tiene un valor máximo, $f' > 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' < 0$ inmediatamente a la derecha. Así, la función es creciente a la izquierda del valor máximo y decreciente a su derecha. En resumen, en un punto extremo local, el signo de f' cambia.

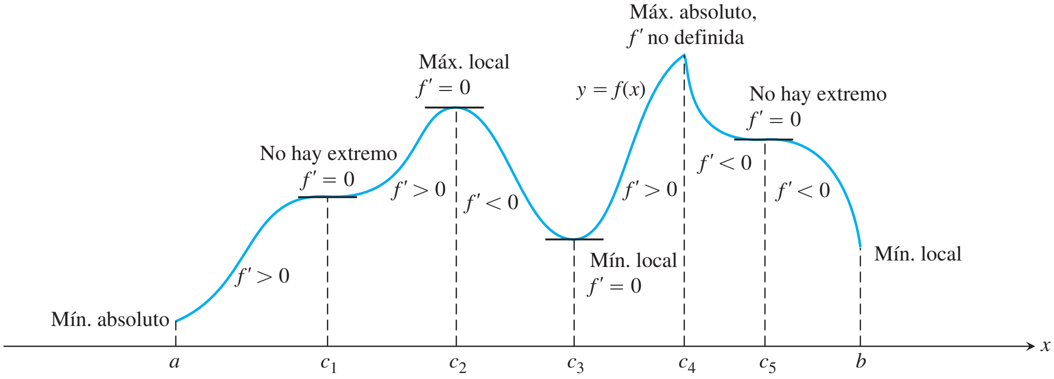


FIGURA 4.21 Los puntos críticos de una función se encuentran donde es creciente y donde es decreciente. La primera derivada cambia de signo en un punto crítico donde existe un extremo local.

Tales observaciones conducen a un criterio para la presencia y naturaleza de los valores extremos locales de funciones derivables.

Criterio de la primera derivada para extremos locales

Suponga que c es un punto crítico de una función continua f, y que f es derivable en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en c mismo. Al moverse de izquierda a derecha en este intervalo,

1. si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c;
2. si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c;
3. si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva en ambos lados de c o es negativa en ambos lados de c), entonces f no tiene un extremo local en c.

El criterio para extremos locales en los extremos del intervalo es similar, pero sólo hay que considerar un lado.

Prueba del criterio de la primera derivada Parte (1). Como el signo de f' cambia de negativo a positivo en c, existen números a y b tales que $a < c < b$, $f' < 0$ en (a, c) y $f' > 0$ en (c, b). Si $x \in (a, c)$, entonces $f(c) < f(x)$, ya que $f' < 0$ implica que f es decreciente en $[a, c]$. Si $x \in (c, b)$, entonces $f(c) < f(x)$, ya que $f' > 0$ implica que f es creciente en $[c, b]$. Por lo tanto, $f(x) \geq f(c)$ para toda $x \in (a, b)$. Por definición, f tiene un mínimo local en c.

Las partes (2) y (3) se demuestran de forma análoga. ■

EJEMPLO 2 Determine los puntos críticos de

$$f(x) = x^{1/3}(x - 4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}.$$

Identifique los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente. Determine los valores extremos locales y absolutos de la función.

Solución La función f es continua en toda x, ya que es el producto de dos funciones continuas, $x^{1/3}$ y $(x - 4)$. La primera derivada

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3} - 4x^{1/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$
$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}\left(x - 1\right) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}}$$

es cero en $x = 1$ y está indefinida en $x = 0$. El dominio no tiene extremos, así que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos lugares donde f podría tener un valor extremo.

Los puntos críticos dividen al eje x en intervalos en los que f' es positiva o negativa. El patrón de signos de f' revela el comportamiento de f entre y en los puntos críticos, como se resume en la siguiente tabla.

Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente	decreciente	creciente

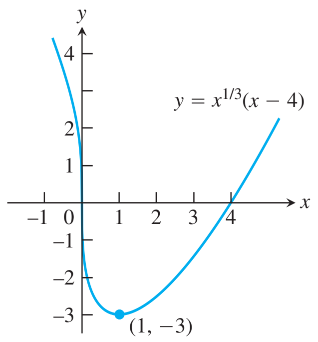


FIGURA 4.22 La función $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$ decrece cuando $x < 1$ y crece cuando $x > 1$ (ejemplo 2).

El corolario 3 del teorema del valor medio nos dice que f decrece en $(-\infty, 0]$, decrece en $[0, 1]$ y crece en $[1, \infty)$. El criterio de la primera derivada para extremos locales nos dice que f no tiene un valor extremo en $x = 0$ (f' no cambia de signo) y que f tiene un mínimo local en $x = 1$ (f' cambia de negativa a positiva).

El valor del mínimo local es $f(1) = 1^{1/3}(1 - 4) = -3$. Éste también es un mínimo absoluto, ya que f es decreciente en $(-\infty, 1]$ y creciente en $[1, \infty)$. La figura 4.22 muestra este valor en relación con la gráfica de la función.

Observe que $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, por lo que la gráfica de f tiene una tangente vertical en el origen. ■

Ejercicios 4.3

Análisis de funciones a partir de su derivada

Responda las siguientes preguntas acerca de las funciones cuyas derivadas se dan en los ejercicios 1 a 14.

a. ¿Cuáles son los puntos críticos de f?

b. ¿En qué intervalos f es creciente? ¿En cuáles es decreciente?

c. ¿En qué puntos, si los hay, f toma valores máximo local y mínimo local?

1. $f'(x) = x(x - 1)$ **2.** $f'(x) = (x - 1)(x + 2)$

3. $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ **4.** $f'(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2$

5. $f'(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

6. $f'(x) = (x - 7)(x + 1)(x + 5)$

7. $f'(x) = \dfrac{x^2(x - 1)}{x + 2}, \quad x \neq -2$

8. $f'(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 4)}{(x + 1)(x - 3)}, \quad x \neq -1, 3$

9. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}, \quad x \neq 0$ **10.** $f'(x) = 3 - \dfrac{6}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0$

11. $f'(x) = x^{-1/3}(x + 2)$ **12.** $f'(x) = x^{-1/2}(x - 3)$

13. $f'(x) = (\operatorname{sen} x - 1)(2\cos x + 1), 0 \leq x \leq 2\pi$

14. $f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x), 0 \leq x \leq 2\pi$

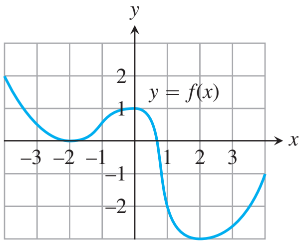
Identificación de extremos

En los ejercicios 15 a 40:

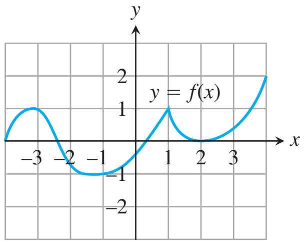
a. Determine los intervalos abiertos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

b. Identifique los valores extremos locales y absolutos de la función, si los hay; además, indique en dónde se alcanzan.

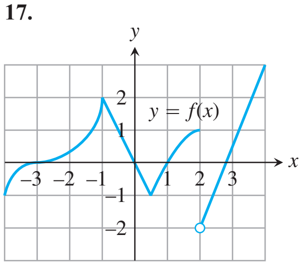
15.



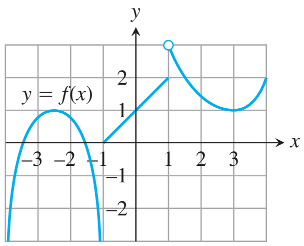
16.



17.



18.



19. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

20. $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

21. $h(x) = -x^3 + 2x^2$

22. $h(x) = 2x^3 - 18x$

23. $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

24. $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

25. $f(r) = 3r^3 + 16r$

26. $h(r) = (r + 7)^3$

27. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

28. $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

29. $H(t) = \dfrac{3}{2}t^4 - t^6$

30. $K(t) = 15t^3 - t^5$

31. $f(x) = x - 6\sqrt{x - 1}$

32. $g(x) = 4\sqrt{x} - x^2 + 3$

33. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

34. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad x \neq 2$

36. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$

37. $f(x) = x^{1/3}(x + 8)$

38. $g(x) = x^{2/3}(x + 5)$

39. $h(x) = x^{1/3}(x^2 - 4)$

40. $k(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$

En los ejercicios 41 a 52:

a. Identifique los valores extremos locales de la función en el dominio indicado e indique dónde se alcanzan.

b. ¿Cuáles de estos valores extremos, si los hay, son absolutos?

T **c.** Apoye sus resultados con una calculadora graficadora o una computadora.

41. $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

42. $f(x) = (x + 1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

43. $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

44. $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

45. $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

46. $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

47. $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

48. $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

49. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5$

50. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}, \quad 3 \leq x < \infty$

51. $g(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 1}, \quad 0 \leq x < 1$

52. $g(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}, \quad -2 < x \leq 1$

En los ejercicios 53 a 60:

a. Determine los extremos locales de cada función en el intervalo indicado y diga dónde se alcanzan.

T **b.** Grafique juntas la función y su derivada. Comente sobre el comportamiento de f en relación con los signos y valores de f'.

53. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

54. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

55. $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

56. $f(x) = -2x + \tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

57. $f(x) = \dfrac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

58. $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

59. $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$

60. $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Teoría y ejemplos

Demuestre que las funciones en los ejercicios 61 y 62 cuentan con valores extremos locales en los valores dados de θ y diga qué clase de extremos locales tiene la función.

61. $h(\theta) = 3\cos\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$

62. $h(\theta) = 5\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad$ en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

63. Elabore la gráfica de una función derivable $y = f(x)$ que pase por el punto $(1, 1)$ con $f'(1) = 0$ y

a. $f'(x) > 0$ para $x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $x > 1$;

b. $f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$;

c. $f'(x) > 0$ para $x \neq 1$;

d. $f'(x) < 0$ para $x \neq 1$.

64. Grafique una función derivable $y = f(x)$ que tenga

a. un mínimo local en $(1, 1)$ y un máximo local en $(3, 3)$;

b. un máximo local en $(1, 1)$ y un mínimo local en $(3, 3)$;

c. máximos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$;

d. mínimos locales en $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

65. Grafique una función continua $y = g(x)$ tal que

a. $g(2) = 2$, $0 < g' < 1$ para $x < 2$, $g'(x) \to 1^-$ cuando $x \to 2^-$, $-1 < g' < 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to -1^+$ cuando $x \to 2^+$;

b. $g(2) = 2$, $g' < 0$ para $x < 2$, $g'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$, $g' > 0$ para $x > 2$, y $g'(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$.

66. Grafique una función continua $y = h(x)$ tal que

a. $h(0) = 0$, $-2 \leq h(x) \leq 2$ toda x, $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^-$, y $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$;

b. $h(0) = 0$, $-2 \leq h(x) \leq 0$ toda x, $h'(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^-$, y $h'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

67. Analice el comportamiento de los valores extremos de la función $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$. ¿Cuántos puntos críticos tiene esta función? ¿En el eje x dónde quedan éstos ubicados? ¿La función f tiene un mínimo absoluto? ¿Tiene un máximo absoluto? (Véase el ejercicio 49 de la sección 2.3).

68. Determine los intervalos en los que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es creciente y en dónde es decreciente. Describa el razonamiento que respalda su respuesta.

69. Determine los valores de las constantes a y b para que $f(x) = ax^2 + bx$ tenga un máximo absoluto en el punto $(1, 2)$.

70. Determine los valores de las constantes a, b, c y d, de manera que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo local en el punto $(0, 0)$ y un mínimo local en el punto $(1, -1)$.

4.4 Concavidad y trazado de curvas

Hemos visto cómo la primera derivada nos indica dónde es creciente la función, dónde es decreciente y si un máximo local o un mínimo local se alcanzan en un punto crítico. En esta sección veremos que la segunda derivada nos brinda información acerca de cómo la gráfica de una función diferenciable abre hacia arriba o hacia abajo. Con tal información acerca de la primera y la segunda derivadas, junto con el conocimiento previo del comportamiento asintótico y la simetría que obtuvimos en las secciones 2.6 y 1.1, ahora podemos dibujar una gráfica precisa de una función. Con la finalidad de organizar todas estas ideas en un proceso coherente, damos un método para el trazado de gráficas y mostramos las características relevantes de las funciones. La identificación y el conocimiento de la ubicación de estas características es de suma importancia en matemáticas y sus aplicaciones a la ciencia y la ingeniería, en especial en el análisis y la interpretación gráfica de datos.

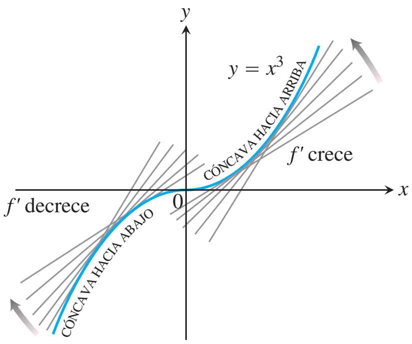


FIGURA 4.23 La gráfica de $f(x) = x^3$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ (ejemplo 1a).

Concavidad

Como se observa en la figura 4.23, la curva $y = x^3$ sube conforme x crece, pero las partes definidas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ abren de forma diferente. Conforme nos aproximamos al origen por el lado izquierdo a lo largo de la curva, la curva abre hacia la derecha y queda por debajo de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes disminuyen en el intervalo $(-\infty, 0)$. Conforme nos alejamos del origen hacia la derecha a lo largo de la curva, la curva abre hacia la izquierda y queda por arriba de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes aumentan en el intervalo $(0, \infty)$. Este comportamiento define la *concavidad* de la curva.

DEFINICIÓN La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ es

(a) **cóncava hacia arriba** en un intervalo abierto I si f' es creciente en I;

(b) **cóncava hacia abajo (convexa)** en un intervalo abierto I si f' es decreciente en I.

Si $y = f(x)$ tiene segunda derivada, podemos aplicar el corolario 3 del teorema del valor medio a la función primera derivada. Concluimos que f' crece si $f'' > 0$ en I y decrece si $f'' < 0$.

Criterio de la segunda derivada para concavidad

Sea $y = f(x)$ dos veces derivable en el intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.
2. Si $f'' < 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia abajo.

Si $y = f(x)$ es dos veces derivable, utilizaremos indistintamente las notaciones f'' y y'' cuando denotemos la segunda derivada.

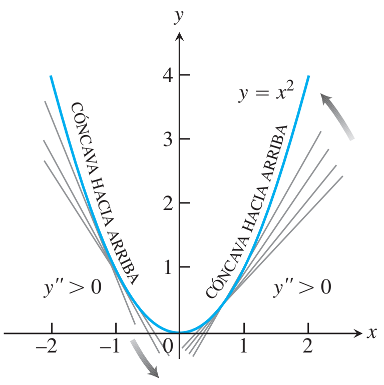


FIGURA 4.24 La gráfica de $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba en todo el intervalo (ejemplo 1b).

EJEMPLO 1

(a) La curva $y = x^3$ (figura 4.23) es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$, donde $y'' = 6x < 0$ y es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ donde $y'' = 6x > 0$.

(b) La curva $y = x^2$ (figura 4.24) es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$, ya que su segunda derivada $y'' = 2$ siempre es positiva. ■

EJEMPLO 2 Determine la concavidad de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ en $[0, 2\pi]$.

Solución La primera derivada de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ es $y' = \cos x$ y la segunda derivada es $y'' = -\operatorname{sen} x$. La gráfica de $y = 3 + \operatorname{sen} x$ es cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$, donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es negativa. Es cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi)$, donde $y'' = -\operatorname{sen} x$ es positiva (figura 4.25). ■

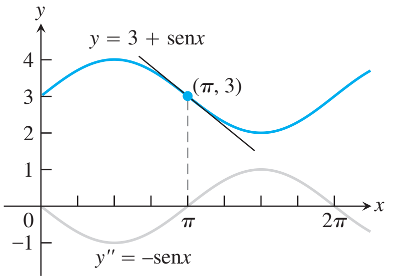


FIGURA 4.25 Uso del signo de y'' para determinar la concavidad de y (ejemplo 2).

Puntos de inflexión

La curva $y = 3 + \operatorname{sen} x$ del ejemplo 2 cambia de concavidad en el punto $(\pi, 3)$. Puesto que la primera derivada $y' = \cos x$ existe para toda x, vemos que la curva tiene una recta tangente de pendiente -1 en el punto $(\pi, 3)$. Este punto se denomina *punto de inflexión* de la curva. En la figura 4.25 observe que la gráfica cruza a su tangente en este punto y que la segunda derivada $y'' = -\operatorname{sen} x$ tiene valor cero cuando $x = \pi$. En general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Un punto donde la gráfica de una función tiene una recta tangente y la concavidad cambia es un **punto de inflexión**.

Observamos que la segunda derivada de $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ es igual a cero en el punto de inflexión $(\pi, 3)$. Por lo general, si la segunda derivada existe en un punto de inflexión $(c, f(c))$, entonces $f''(c) = 0$. Ésta es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio, siempre que f'' sea continua en un intervalo que contenga a $x = c$, puesto que la segunda derivada cambia de signo al moverse a lo largo de ese intervalo. Incluso si se quita la hipótesis de continuidad, sigue siendo cierto que $f''(c) = 0$, siempre que exista la segunda derivada (aunque se requiere un argumento más avanzado en el caso de discontinuidad). Ya que una recta tangente debe existir en el punto de inflexión, entonces la primera derivada $f'(c)$ existe (es finita), o bien, hay una recta vertical en el punto. En una recta vertical no existen ni la primera ni la segunda derivadas. En resumen, concluimos el siguiente resultado.

En un punto de inflexión $(c, f(c))$, no existe $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$.

El siguiente ejemplo ilustra una función que tiene un punto de inflexión donde la primera derivada existe, pero la segunda derivada no.

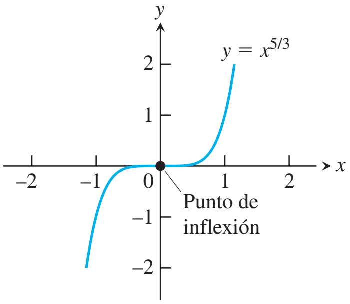


FIGURA 4.26 La gráfica de $f(x) = x^{5/3}$ tiene una tangente horizontal en el origen, donde cambia la concavidad, aunque f'' no existe en $x = 0$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 La gráfica de $f(x) = x^{5/3}$ tiene una tangente horizontal en el origen, ya que $f'(x) = (5/3)x^{2/3} = 0$, cuando $x = 0$. Sin embargo, la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) = \frac{10}{9}x^{-1/3}$$

no existe en $x = 0$. No obstante, $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $f''(x) > 0$ para $x > 0$, así que la segunda derivada cambia de signo en $x = 0$ y hay un punto de inflexión en el origen. La gráfica se presenta en la figura 4.26. ■

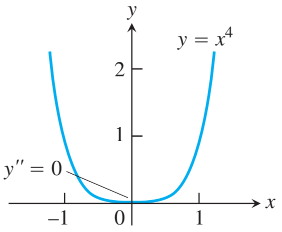


FIGURA 4.27 La gráfica de $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en el origen, aunque ahí $y'' = 0$ (ejemplo 4).

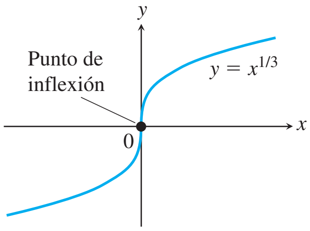


FIGURA 4.28 Un punto de inflexión donde y' y y'' no existen (ejemplo 5).

A continuación se expone un ejemplo para ilustrar que un punto de inflexión no necesariamente se alcanza, aunque exista la derivada y $f'' = 0$.

EJEMPLO 4 La curva $y = x^4$ no tiene un punto de inflexión en $x = 0$ (figura 4.27). Aunque la segunda derivada $y'' = 12x^2$ sea cero allí, ésta no cambia de signo. ■

Como una última ilustración, mostramos la situación en la que un punto de inflexión se alcanza en una tangente vertical a la curva donde no existen ni la primera ni la segunda derivadas.

EJEMPLO 5 La gráfica de $y = x^{1/3}$ tiene un punto de inflexión en el origen, ya que la segunda derivada es positiva para $x < 0$ y negativa para $x > 0$:

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{1/3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

Sin embargo, en $x = 0$ no existen $y' = x^{-2/3}/3$ ni y'', y hay una tangente vertical ahí. Véase la figura 4.28. ■

Para estudiar como una función del tiempo el movimiento de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta, con frecuencia estamos interesados en conocer cuándo la aceleración del objeto, dada por la segunda derivada, es positiva o cuándo es negativa. Los puntos de inflexión en la gráfica de la función de posición del objeto indican dónde cambia el signo de la aceleración.

EJEMPLO 6 Una partícula se desplaza a lo largo de una recta coordenada horizontal (positiva hacia la derecha) con función de posición

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5, \qquad t \geq 0.$$

Determine la velocidad y la aceleración, y describa el movimiento de la partícula.

Solución La velocidad es

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22 = 2(t - 1)(3t - 11),$$

en tanto que la aceleración es

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7).$$

Cuando la función $s(t)$ es creciente, la partícula se desplaza hacia la derecha; cuando $s(t)$ es decreciente, la partícula se mueve hacia la izquierda.

Observe que la primera derivada ($v = s'$) es cero en los puntos críticos $t = 1$ y $t = 11/3$.

Intervalo	$0 < t < 1$	$1 < t < 11/3$	$11/3 < t$
Signo de $v = s'$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de s	creciente	decreciente	creciente
Movimiento de la partícula	derecha	izquierda	derecha

La partícula se desplaza hacia la derecha en los intervalos de tiempo $[0, 1)$ y $(11/3, \infty)$ y hacia la izquierda en $(1, 11/3)$. Momentáneamente está detenida (en reposo) en $t = 1$ y $t = 11/3$.

La aceleración $a(t) = s''(t) = 4(3t - 7)$ es cero cuando $t = 7/3$.

Intervalo	$0 < t < 7/3$	$7/3 < t$
Signo de $a = s''$	$-$	$+$
Gráfica de s	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

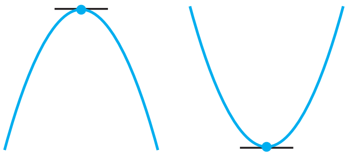
La partícula inicia moviéndose hacia la derecha mientras reduce su velocidad, luego regresa y comienza a desplazarse hacia la izquierda en $t = 1$ bajo la influencia de la aceleración hacia la izquierda durante el intervalo de tiempo $[0, 7/3)$. Luego, la aceleración cambia de dirección en $t = 7/3$, pero la partícula continúa moviéndose hacia la izquierda, mientras frena bajo la aceleración hacia la derecha. En $t = 11/3$, la partícula vuelve a cambiar de dirección: ahora se desplaza hacia la derecha en la misma dirección que la aceleración. ■

Criterio de la segunda derivada para extremos locales

En vez de buscar los cambios de signo de f' en los puntos críticos, algunas veces podemos utilizar el siguiente criterio para determinar la presencia y naturaleza de extremos locales.

TEOREMA 5: Criterio de la segunda derivada para extremos locales Suponga que f'' es continua en un intervalo que contenga a $x = c$.

1. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.
2. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
3. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, entonces la prueba no es concluyente. La función f puede tener un máximo local, un mínimo local o ninguno de éstos.



$f' = 0, f'' < 0$ $\Rightarrow$ máx. local $f' = 0, f'' > 0$ $\Rightarrow$ mín. local

Prueba Parte (1). Si $f''(c) < 0$, entonces $f''(x) < 0$ en algún intervalo abierto I que contiene al punto c, ya que f'' es continua. Por lo tanto, f' es decreciente en I. Como $f'(c) = 0$, el signo de f' cambia de positivo a negativo en c, así que, por el criterio de la primera derivada, f tiene un máximo local en c.

La demostración de la parte (2) es similar.

Para la parte (3), considere tres funciones: $y = x^4$, $y = -x^4$ y $y = x^3$. Para cada función, la primera y la segunda derivadas son cero en $x = 0$. Sin embargo, la función $y = x^4$ tiene un mínimo local allí, $y = -x^4$ tiene un máximo local, y $y = x^3$ es creciente en cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 0$ (por lo que ahí no tiene máximo ni mínimo). Por lo tanto, la prueba no es concluyente. ■

Este criterio requiere que conozcamos f'' *sólo en* c y no en un intervalo alrededor de c. Lo anterior hace que sea un criterio sencillo de aplicar. Ésa es la buena noticia. La mala es que el criterio no es concluyente si $f'' = 0$ o si f'' no existe en $x = c$. Cuando esto suceda, utilice el criterio de la primera derivada para valores extremos locales.

Juntas, f' y f'', nos indican la forma de la gráfica de una función, esto es, dónde se localizan los puntos críticos y lo que sucede en un punto crítico, dónde es creciente la función, dónde es decreciente y cómo abre la curva de acuerdo con su concavidad. Utilizamos esta información para hacer el esquema de la gráfica de una función que tiene estas características importantes.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$

aplicando los siguientes pasos.

(a) Identifique dónde se alcanzan los extremos de f.

(b) Determine los intervalos en los que f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.

(c) Determine dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

(d) Elabore un bosquejo general de la forma de la gráfica de f.

(e) Ubique algunos puntos específicos, tales como los puntos máximos y mínimos locales, así como los puntos de inflexión y las intercepciones con los ejes. Luego grafique la curva.

Solución La función f es continua, ya que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ existe. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de f' también es $(-\infty, \infty)$. Así, los puntos críticos de f se alcanzan sólo en los ceros de f'. Como

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

la primera derivada es cero en $x = 0$ y en $x = 3$. Utilizamos estos puntos críticos para definir intervalos donde f es creciente o decreciente.

Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	decreciente	decreciente	creciente

(a) Por medio del criterio de la primera derivada para extremos locales y la tabla anterior, vemos que no hay extremo en $x = 0$ y hay un mínimo local en $x = 3$.

(b) Con base en la tabla anterior, vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $[0, 3]$, y es creciente en $[3, \infty)$.

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$ es cero en $x = 0$ y en $x = 2$. Utilizamos los puntos para definir intervalos donde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

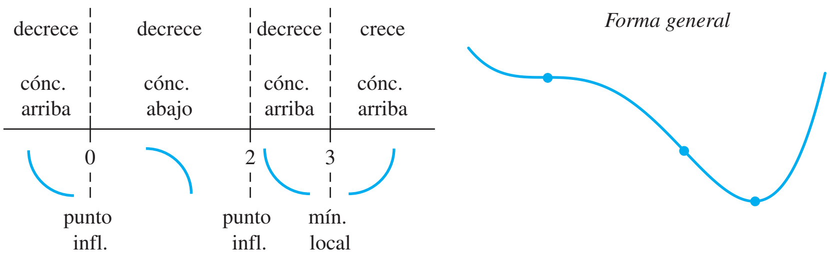
Intervalo	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Signo de f''	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Vemos que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

(d) Al resumir la información de las dos tablas anteriores, obtenemos lo siguiente.

$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
decreciente cónc. hacia arriba	decreciente cónc. hacia abajo	decreciente cónc. hacia arriba	creciente cónc. hacia arriba

La forma general de la curva se representa en la siguiente figura.



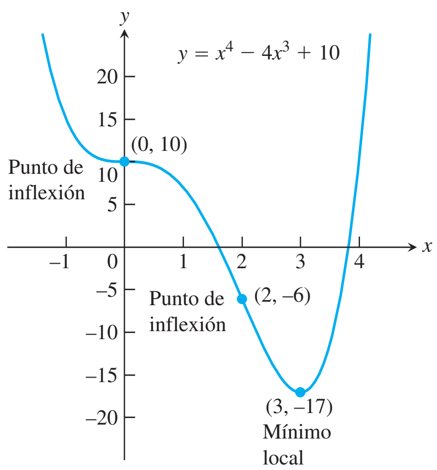


FIGURA 4.29 La gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ (ejemplo 7).

(e) Trace las intersecciones con los ejes (si es posible) y los puntos donde y' y y'' son cero. Indique los valores extremos locales y los puntos de inflexión. Utilice la forma general como guía para elaborar el bosquejo de la curva. (Si es necesario, trace más puntos.) En la figura 4.29 se presenta la gráfica de f. ■

Los pasos en el ejemplo 7 describen un procedimiento para la graficación de las características clave de una función.

Procedimiento para graficar $y = f(x)$

1. Identifique el dominio de f y las simetrías que pueda tener la curva.
2. Determine las derivadas y' y y''.
3. Determine los puntos críticos de f, si los hay, e identifique el comportamiento de la función en cada uno de ellos.
4. Determine dónde es creciente la función y dónde es decreciente.
5. Determine los puntos de inflexión, si hay alguno, y la concavidad de la curva.
6. Identifique las asíntotas que pueda tener (véase la sección 2.6).
7. Trace los puntos clave, tales como intersecciones con los ejes y los puntos encontrados en los pasos 3 a 5, luego elabore un bosquejo de la curva junto con las asíntotas que tenga.

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$.

Solución

1. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y no tiene simetrías con respecto a los ejes ni con el origen (sección 1.1).
2. *Determine f' y f''.*

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$$

Interseca al eje x en $x = -1$, interseca al eje y ($y = 1$) en $x = 0$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 2(x+1) - (x+1)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Puntos críticos: $x = -1, x = 1$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot 2(-2x) - 2(1-x^2)[2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Luego de unas operaciones algebraicas

3. *Comportamiento en los puntos críticos*. Los puntos críticos sólo se presentan en $x = \pm 1$, donde $f'(x) = 0$ (paso 2), ya que f' existe en todo el dominio de f. En $x = -1$, $f''(-1) = 1 > 0$, lo que, por el criterio de la segunda derivada, da un mínimo relativo. En $x = 1$, $f''(1) = -1 < 0$, que por el criterio de la segunda derivada, da un máximo relativo.
4. *Creciente y decreciente*. Vemos que en el intervalo $(-\infty, -1)$ la derivada $f'(x) < 0$, y la curva es decreciente. En el intervalo $(-1, 1)$, $f'(x) > 0$ y la curva es creciente; es decreciente en $(1, \infty)$, donde otra vez $f'(x) < 0$.

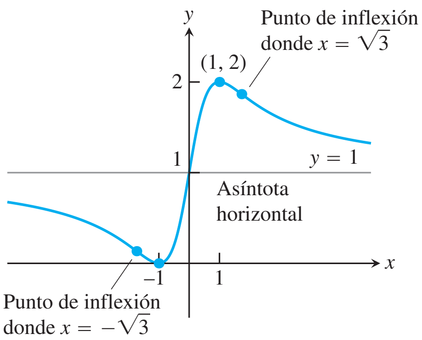


FIGURA 4.30 La gráfica de $y = \dfrac{(x+1)^2}{1+x^2}$ (ejemplo 8).

5. *Puntos de inflexión*. Observe que el denominador de la segunda derivada (paso 2) siempre es positivo. La segunda derivada f'' es cero cuando $x = -\sqrt{3}, 0$, y $\sqrt{3}$. La segunda derivada cambia de signo en cada uno de estos puntos: negativa en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, positiva en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, negativa en $\left(0, \sqrt{3}\right)$, y positiva de nuevo en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$. Así, cada uno de esos puntos es un punto de inflexión. La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(0, \sqrt{3}\right)$, y, nuevamente, cóncava hacia arriba en $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

6. *Asíntotas*. Al desarrollar el numerador de $f(x)$ y luego dividir el numerador y el denominador entre x^2 se obtiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} && \text{Desarrollando el numerador} \\
&= \frac{1+(2/x)+(1/x^2)}{(1/x^2)+1}. && \text{Dividiendo entre } x^2
\end{aligned}
$$

Vemos que $f(x) \to 1^+$ cuando $x \to \infty$ y que $f(x) \to 1^-$ cuando $x \to -\infty$. Así, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Como f disminuye en $(-\infty, -1)$ y luego aumenta en $(-1, 1)$, sabemos que $f(-1) = 0$ es un mínimo local. Aunque f decrece en $(1, \infty)$, nunca cruza la asíntota horizontal $y = 1$ en este intervalo (se aproxima a la asíntota por arriba). Así que la gráfica nunca es negativa y $f(-1) = 0$ también es un mínimo absoluto. Asimismo, $f(1) = 2$ es un máximo absoluto, ya que la gráfica nunca cruza a la asíntota $y = 1$ en el intervalo $(-\infty, -1)$, aproximándose a ella por abajo. Por lo tanto, no hay asíntotas verticales (el rango de f es $0 \le y \le 2$).

7. La gráfica de f aparece en la figura 4.30. Observe cómo la gráfica es cóncava hacia abajo cuando se aproxima a la asíntota horizontal $y = 1$ conforme $x \to -\infty$, y cóncava hacia arriba al aproximarse a $y = 1$ cuando $x \to \infty$. ■

EJEMPLO 9 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$.

Solución

1. El dominio de f comprende todos los números reales distintos de cero. No existen intersecciones con los ejes, ya que ni x ni $f(x)$ pueden ser cero. Como $f(-x) = -f(x)$, notamos que f es una función impar, por lo que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen.

2. Calculamos las derivadas de la función, pero primero la rescribimos para simplificar los cálculos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} && \text{Función simplificada para la derivación.} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} && \text{Combinar fracciones para resolver con facilidad } f'(x) = 0. \\
f''(x) &= \frac{4}{x^3} && \text{Existe en todo el dominio de } f.
\end{aligned}
$$

3. Los puntos críticos se presentan en $x = \pm 2$, donde $f'(x) = 0$. Como $f''(-2) < 0$ y $f''(2) > 0$, por el criterio de la segunda derivada, vemos que en $x = -2$ se alcanza un máximo relativo con $f(-2) = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$ con $f(2) = 2$.

4. En el intervalo $(-\infty, -2)$ la derivada f' es positiva, ya que $x^2 - 4 > 0$, por lo que la gráfica es creciente; en el intervalo $(-2, 0)$, la derivada es negativa y la gráfica es decreciente. De forma similar, la gráfica es decreciente en el intervalo $(0, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.
5. No hay puntos de inflexión, ya que $f''(x) < 0$ siempre que $x < 0$, $f''(x) > 0$ siempre que $x > 0$, y f'' siempre existe y nunca es cero en el dominio de f. La gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$.
6. Con base en la fórmula rescrita para $f(x)$, vemos que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) = -\infty,$$

por lo que el eje y es una asíntota vertical. También, cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, la gráfica de $f(x)$ tiende a la recta $y = x/2$. Así que $y = x/2$ es una asíntota oblicua.
7. La gráfica de f se trazó en la figura 4.31. ■

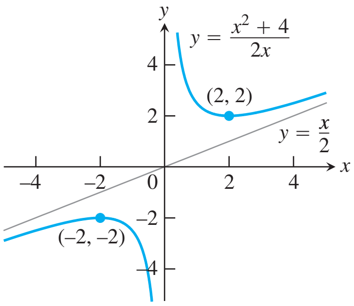
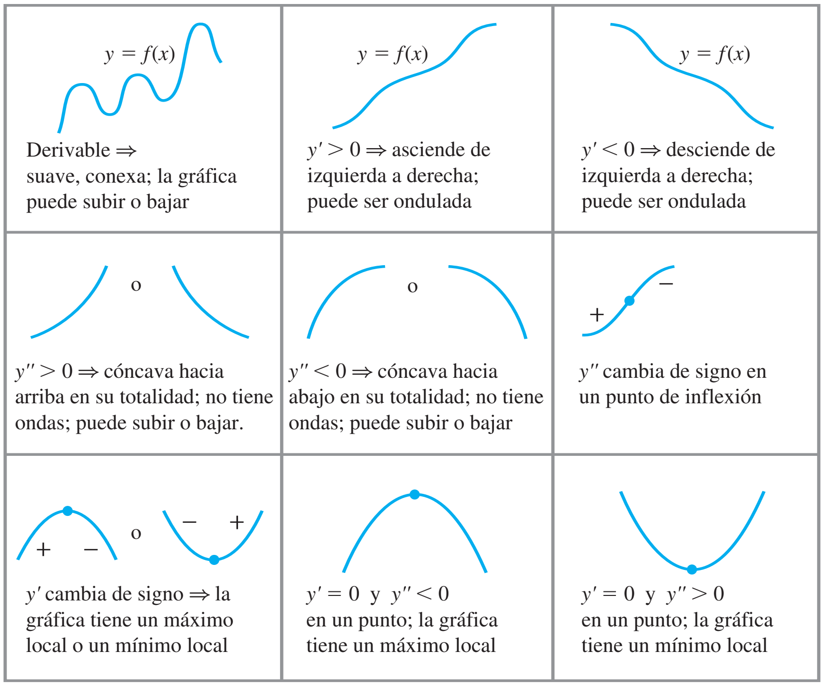


FIGURA 4.31 La gráfica de $y = \dfrac{x^2+4}{2x}$ (ejemplo 9).

Comportamiento gráfico de las funciones a partir de sus derivadas

Como vimos en los ejemplos 7 a 9, podemos aprender mucho acerca de una función dos veces diferenciable si examinamos su primera derivada. Podemos determinar dónde asciende la gráfica de la función y dónde están ubicados los extremos locales. Al derivar y' sabemos cómo sube o baja la función cuando pasa por los intervalos de crecimiento y decrecimiento. También podemos determinar la forma de la gráfica de la función. La información que no se puede obtener a partir de la derivada es la referente a cómo colocar la gráfica en el plano xy. Pero, como descubrimos en la sección 4.2, la única información adicional que necesitamos para ubicar la gráfica es el valor de f en un punto. La información acerca de las asíntotas se determina mediante límites (sección 2.6). La siguiente figura resume cómo la primera y la segunda derivadas afectan la forma de una gráfica.

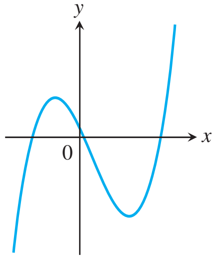


Ejercicios 4.4

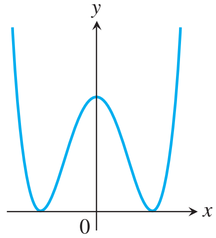
Análisis de funciones a partir de sus gráficas

Identifique los puntos de inflexión así como los máximos y los mínimos locales de las funciones graficadas en los ejercicios 1 a 8. Identifique los intervalos en los que las funciones son cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo.

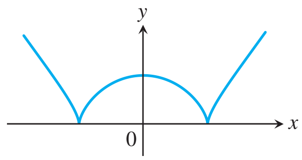
1. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$



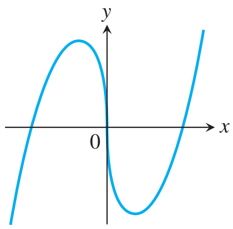
2. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$



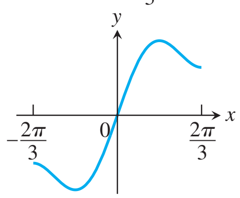
3. $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$



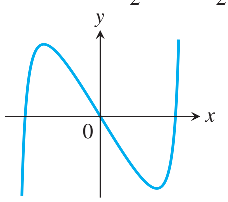
4. $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$



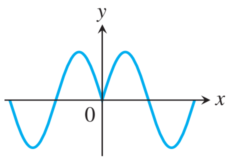
5. $y = x + \operatorname{sen} 2x, -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$



6. $y = \tan x - 4x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

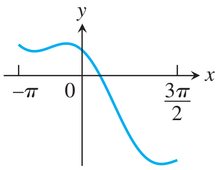


7. $y = \operatorname{sen}|x|, -2\pi \le x \le 2\pi$



NO ESTÁ A ESCALA

8. $y = 2\cos x - \sqrt{2}\,x, -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Graficación de ecuaciones

De acuerdo con los pasos del procedimiento de graficación de la página 208, grafique las ecuaciones en los ejercicios 9 a 48. Incluya las coordenadas de todos los puntos extremos y los puntos de inflexión.

9. $y = x^2 - 4x + 3$

10. $y = 6 - 2x - x^2$

11. $y = x^3 - 3x + 3$

12. $y = x(6 - 2x)^2$

13. $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

14. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

15. $y = (x - 2)^3 + 1$

16. $y = 1 - (x + 1)^3$

17. $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

18. $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

19. $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

20. $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

21. $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

22. $y = x\left(\frac{x}{2} - 5\right)^4$

23. $y = x + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

24. $y = x - \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

25. $y = \sqrt{3}x - 2\cos x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

26. $y = \frac{4}{3}x - \tan x, \quad \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

27. $y = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

28. $y = \cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

29. $y = x^{1/5}$

30. $y = x^{2/5}$

31. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

32. $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2x + 1}$

33. $y = 2x - 3x^{2/3}$

34. $y = 5x^{2/5} - 2x$

35. $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right)$

36. $y = x^{2/3}(x - 5)$

37. $y = x\sqrt{8 - x^2}$

38. $y = (2 - x^2)^{3/2}$

39. $y = \sqrt{16 - x^2}$

40. $y = x^2 + \frac{2}{x}$

41. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

42. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

43. $y = \frac{8x}{x^2 + 4}$

44. $y = \frac{5}{x^4 + 5}$

45. $y = |x^2 - 1|$

46. $y = |x^2 - 2x|$

47. $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \ge 0 \end{cases}$

48. $y = \sqrt{|x - 4|}$

Bosquejo de la forma general si conocemos y'

En cada uno de los ejercicios 49 a 70 se indica la primera derivada de una función continua $y = f(x)$. Determine y'' y luego, de acuerdo con los pasos 2 a 4 del procedimiento de graficación de la página 208, elabore un bosquejo de la forma general de la gráfica de f.

49. $y' = 2 + x - x^2$

50. $y' = x^2 - x - 6$

51. $y' = x(x - 3)^2$

52. $y' = x^2(2 - x)$

53. $y' = x(x^2 - 12)$

54. $y' = (x - 1)^2(2x + 3)$

55. $y' = (8x - 5x^2)(4 - x)^2$

56. $y' = (x^2 - 2x)(x - 5)^2$

57. $y' = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

58. $y' = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

59. $y' = \cot\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

60. $y' = \csc^2\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$

61. $y' = \tan^2\theta - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

62. $y' = 1 - \cot^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi$

63. $y' = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

64. $y' = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

65. $y' = (x + 1)^{-2/3}$

66. $y' = (x - 2)^{-1/3}$

67. $y' = x^{-2/3}(x - 1)$

68. $y' = x^{-4/5}(x + 1)$

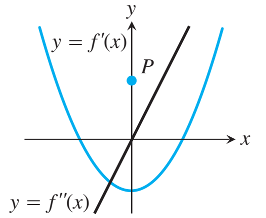
69. $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

70. $y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

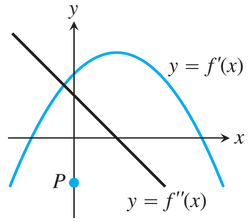
Graficación de y a partir de las gráficas de y' y y''

Cada uno de los ejercicios 71 a 74 muestran las gráficas de la primera y segunda derivadas de una función $y = f(x)$. Copie el dibujo y agréguele la gráfica aproximada de f, ya que la gráfica pasa por el punto P.

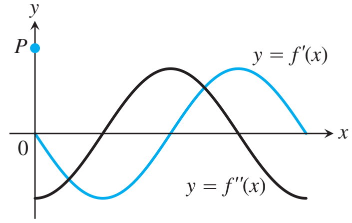
71.



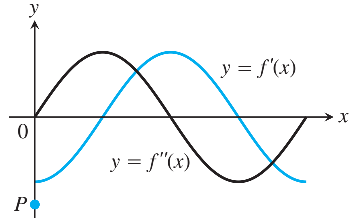
72.



73.



74.



Graficación de funciones racionales

Grafique las funciones racionales en los ejercicios 75 a 92.

75. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

76. $y = \dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 5x - 14}$

77. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

78. $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

79. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

80. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

81. $y = -\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

82. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$

83. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

84. $y = -\dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

85. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

86. $y = -\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

87. $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$

88. $y = \dfrac{x^3 + x - 2}{x - x^2}$

89. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

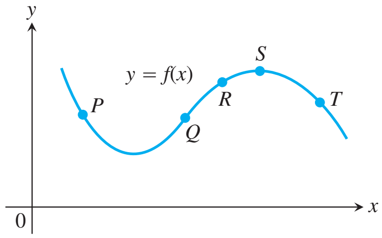
90. $y = \dfrac{x - 1}{x^2(x - 2)}$

91. $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ (bruja de Agnesi)

92. $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ (serpentina de Newton)

Teoría y ejemplos

93. La siguiente figura muestra una parte de la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$. En cada uno de los cinco puntos indicados, clasifique y' y y'' como positiva, negativa o cero.



94. Trace una curva suave conexa $y = f(x)$ con

$f(-2) = 8,$ $\qquad f'(2) = f'(-2) = 0,$

$f(0) = 4,$ $\qquad f'(x) < 0$ para $|x| < 2,$

$f(2) = 0,$ $\qquad f''(x) < 0$ para $x < 0,$

$f'(x) > 0$ para $|x| > 2,$ $\qquad f''(x) > 0$ para $x > 0.$

95. Grafique una función dos veces derivable $y = f(x)$ con las siguientes propiedades. Cuando sea posible, señale las coordenadas.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0, \quad y'' > 0$
2	1	$y' = 0, \quad y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0, \quad y'' > 0$
4	4	$y' > 0, \quad y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0, \quad y'' < 0$
6	7	$y' = 0, \quad y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0, \quad y'' < 0$

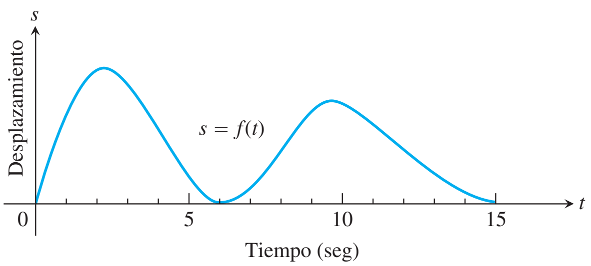
96. Grafique una función dos veces derivable $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(-2, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 2)$, cuyas dos primeras derivadas tienen estos patrones de signos

y': + $\;-2\;$ − $\;0\;$ + $\;2\;$ −

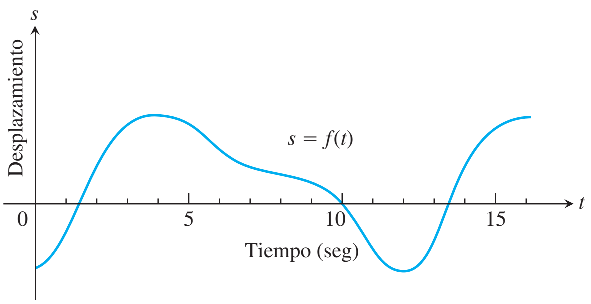
y'': − $\;-1\;$ + $\;1\;$ −

Movimiento a lo largo de una recta Las gráficas de los ejercicios 97 y 98 indican la posición $s = f(t)$ de un cuerpo que se desplaza hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una recta coordenada. **(a)** ¿En qué momento el cuerpo se aleja del origen? ¿En qué momento se aproxima al origen? **(b)** ¿Aproximadamente en qué momento la velocidad es igual a cero? **(c)** ¿Aproximadamente en qué momento la aceleración es igual a cero? **(d)** ¿En qué momento la aceleración es positiva? ¿Y negativa?

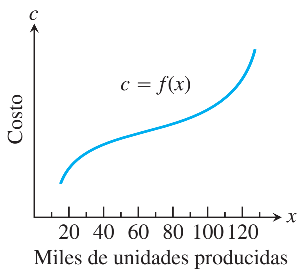
97.



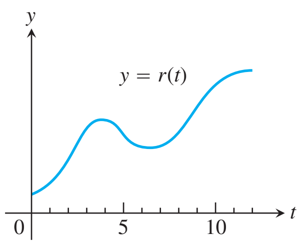
98.



99. Costo marginal La siguiente gráfica muestra el costo hipotético $c = f(x)$ en el que se incurre al fabricar x artículos. ¿Aproximadamente en qué nivel de producción el costo marginal cambia de decreciente a creciente?



100. La siguiente gráfica muestra el ingreso mensual de la Corporación Widget durante los últimos 12 años. ¿Aproximadamente en qué intervalos de tiempo aumentó el ingreso marginal? ¿En qué intervalos disminuyó?



101. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2).$$

¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión? (*Sugerencia:* Dibuje un patrón de signos para y').

102. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4).$$

¿En qué puntos, si los hay, la gráfica de f tiene un mínimo local, un máximo local o un punto de inflexión?

103. Para $x > 0$, dibuje una curva $y = f(x)$ que tenga $f(1) = 0$ y $f'(x) = 1/x$. ¿Puede decirse algo acerca de la concavidad de tal curva? Justifique su respuesta.

104. ¿Puede decirse algo acerca de la gráfica de una función $y = f(x)$ que tiene segunda derivada continua que nunca es cero? Justifique su respuesta.

105. Si b, c y d son constantes, ¿para qué valor de b la curva $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ tendrá un punto de inflexión en $x = 1$? Justifique su respuesta.

106. Parábolas

a. Encuentre las coordenadas del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

b. ¿En qué punto la parábola es cóncava hacia arriba? ¿En cuál es cóncava hacia abajo? Justifique sus respuestas.

107. Curvas cuadráticas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva cuadrática $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$? Justifique su respuesta.

108. Curvas cúbicas ¿Qué puede decir acerca de los puntos de inflexión de la curva cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$? Justifique su respuesta.

109. Suponga que la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y'' = (x + 1)(x - 2).$$

¿Para qué valores de x de la gráfica de f tiene un punto de inflexión?

110. Suponga que la segunda derivada de la función $y = f(x)$ es

$$y'' = x^2(x - 2)^3(x + 3).$$

¿Para qué valores de x la gráfica de f tiene un punto de inflexión?

111. Determine los valores de las constantes a, b y c, de forma que la gráfica de $y = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga un máximo local en $x = 3$, mínimo local en $x = -1$ y punto de inflexión en $(1, 11)$.

112. Determine los valores de las constantes a, b y c, de forma que la gráfica de $y = (x^2 + a)/(bx + c)$ tenga un mínimo local en $x = 3$ y un máximo local en $(-1, -2)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 113 a 116, encuentre los puntos de inflexión (si los hay) en la gráfica de la función y las coordenadas de los puntos en la gráfica donde la función tiene un valor máximo o mínimo local. Después, grafique la función en una región suficientemente grande para mostrar en forma simultánea todos estos puntos. Agregue a su figura las gráficas de las funciones de la primera y segunda derivadas. ¿Cómo se relacionan los puntos en los que estas gráficas cortan el eje x con la gráfica de la función? ¿De qué otra manera se relacionan las gráficas de las derivadas con la gráfica de la función?

113. $y = x^5 - 5x^4 - 240$

114. $y = x^3 - 12x^2$

115. $y = \dfrac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

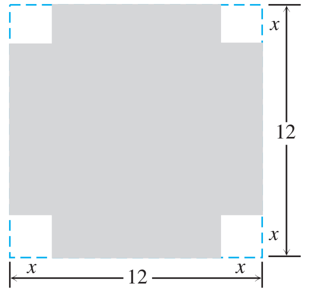
116. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

117. Grafique juntas $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ y sus dos primeras derivadas. Comente sobre el comportamiento de f en relación con los signos y los valores de f' y f''.

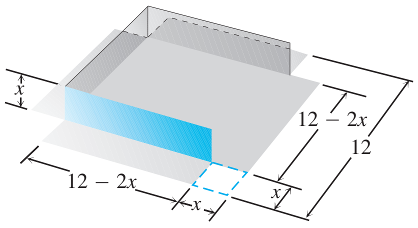
118. Grafique juntas $f(x) = x \cos x$ y su segunda derivada para $0 \leq x \leq 2\pi$. Comente sobre el comportamiento de f en relación con los signos y los valores de f''.

4.5 Optimización aplicada

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo que tenga *área máxima*? ¿Cuáles son las dimensiones para la lata cilíndrica *más barata* de un volumen dado? ¿Cuántos artículos deben fabricarse para que la producción sea lo *más rentable* posible? Cada una de estas preguntas busca el valor óptimo de una función dada. En esta sección utilizaremos las derivadas para resolver diversos problemas de negocios, matemáticas, física y economía.



(a)



(b)

FIGURA 4.32 Una caja sin tapa fabricada al cortar las esquinas de una hoja cuadrada de lámina. ¿Cuál es el tamaño de las esquinas que maximizan el volumen de la caja (ejemplo 1)?

Resolución de problemas aplicados a la optimización

1. *Lea el problema*. Lea el problema hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la cantidad desconocida que debe optimizarse?
2. *Elabore un dibujo*. Anote el nombre de cada parte que pueda ser importante para el problema.
3. *Introduzca variables*. Elabore una lista de las relaciones en el dibujo y en el problema como una ecuación o una expresión algebraicas; luego, identifique la variable desconocida.
4. *Escriba una ecuación para la cantidad desconocida*. Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto tal vez requiera mucha manipulación algebraica.
5. *Pruebe los puntos críticos y los extremos del intervalo en el dominio de la incógnita*. Utilice lo que conoce acerca de la forma de la gráfica de la función. Con base en la primera y la segunda derivadas identifique y clasifique los puntos críticos de la función.

EJEMPLO 1 Se construirá una caja sin tapa cortando pequeños cuadrados iguales de las esquinas de una lámina de hojalata de 12 por 12 in y doblando hacia arriba los lados. ¿Qué tan grandes deben ser los cuadrados que se van a cortar para hacer que la caja tenga la máxima capacidad posible?

Solución Iniciamos con un dibujo (figura 4.32). En la figura, los cuadrados de las esquinas son de x pulgadas por lado. El volumen de la caja es una función de esta variable:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3. \qquad V = hlw$$

Como los lados de la lámina sólo son de 12 in de longitud, $x \le 6$, y el dominio de V es el intervalo $0 \le x \le 6$.

Una gráfica de V (figura 4.33) sugiere un valor mínimo de 0 en $x = 0$ y $x = 6$, así como un máximo cerca de $x = 2$. Para obtener más información, examinemos la primera derivada de V con respecto a x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2 - x)(6 - x).$$

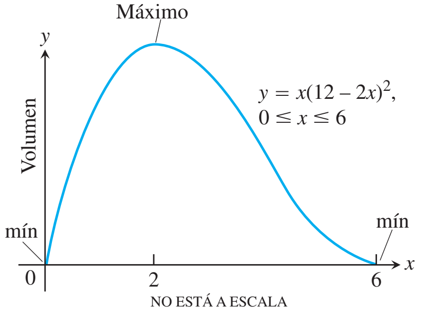


FIGURA 4.33 El volumen de la caja en la figura 4.32 graficada como una función de x.

De los dos ceros, $x = 2$ y $x = 6$, sólo $x = 2$ está en el interior del dominio de la función y es el único punto crítico de la lista. Los valores de V en este único punto crítico y en los dos extremos del intervalo son

Valor en el punto crítico: $V(2) = 128$

Valores en los extremos: $V(0) = 0, \qquad V(6) = 0.$

El volumen máximo es de 128 in^3. Los cuadrados que se corten deben ser de 2 in por lado. ■

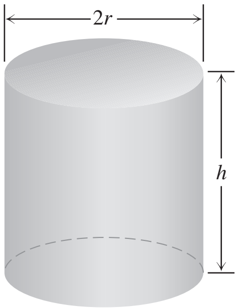


FIGURA 4.34 Esta lata de un litro utiliza la menor cantidad de material cuando $h = 2r$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Se le ha pedido diseñar una lata con capacidad de un litro que tenga la forma de un cilindro circular recto (figura 4.34). ¿Qué dimensiones harán que se utilice la menor cantidad de material?

Solución *Volumen de la lata:* Si r y h se miden en centímetros, entonces el volumen de la lata en centímetros cúbicos es

$$\pi r^2 h = 1000 \qquad \text{1 litro} = 1000 \text{ cm}^3$$

Área de la superficie de la lata: $A = \underbrace{2\pi r^2}_{\substack{\text{extremos}\\ \text{circulares}}} + \underbrace{2\pi r h}_{\substack{\text{pared del}\\ \text{cilindro}}}$

¿Cómo podemos interpretar la frase "menor cantidad de material"? Como una primera aproximación, es posible ignorar el grosor del material y el desperdicio en la fabricación. Después nos preguntamos acerca de las dimensiones r y h que hacen que el área de la superficie total sea tan pequeña como sea posible y que se satisfaga la restricción $\pi r^2 h = 1000$.

Para expresar el área de la superficie como una función de una variable, despejamos una de las variables en $\pi r^2 h = 1000$ y sustituimos esa expresión en la fórmula para el área de la superficie. Es más sencillo despejar h:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es determinar un valor de $r > 0$ que minimice el valor de A. La figura 4.35 sugiere que tal valor existe.

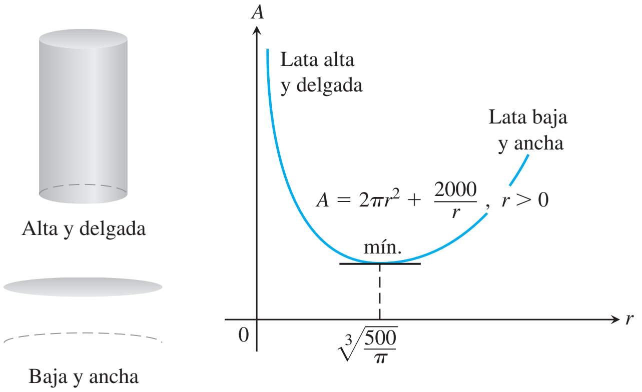


FIGURA 4.35 La gráfica de $A = 2\pi r^2 + 2000/r$ es cóncava hacia arriba.

En la gráfica, observe que para r pequeña (un recipiente alto y delgado) el término $2000/r$ domina (véase la sección 2.6) y A es grande. Para r grande (un recipiente bajo y ancho), el término $2\pi r^2$ domina y A de nuevo es grande.

Como A es diferenciable para $r > 0$, un intervalo que no tiene extremos sólo puede contar con un valor mínimo donde la primera derivada sea cero.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \\ 0 &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{Tomar } dA/dr = 0 \\ 4\pi r^3 &= 2000 && \text{Multiplicar por } r^2. \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.42 && \text{Resolver para } r. \end{aligned}$$

¿Qué sucede en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$?

La segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

es positiva en todo el dominio de A. Por lo tanto, la gráfica es cóncava hacia arriba en todo este dominio y el valor de A en $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es un mínimo absoluto.

El valor correspondiente de h (después de un poco de álgebra) es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

La lata de un litro que utiliza la menor cantidad de material tiene altura igual a dos veces el radio, en este caso $r \approx 5.42$ cm y $h \approx 10.84$ cm. ■

Ejemplos de matemáticas y física

EJEMPLO 3 Un rectángulo se inscribe en una semicircunferencia de radio 2. ¿Cuál es la mayor área que puede tener el rectángulo y cuáles son sus dimensiones?

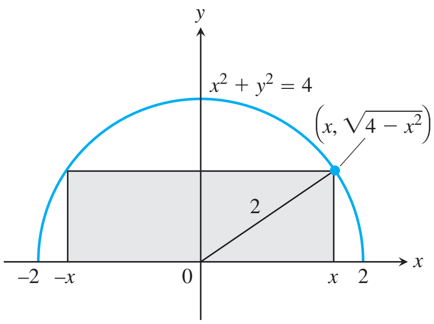


FIGURA 4.36 El rectángulo inscrito en el semicírculo del ejemplo 3.

Solución Sean $(x, \sqrt{4 - x^2})$ las coordenadas de la esquina del rectángulo que se obtiene colocando el círculo y el rectángulo en el plano coordenado (figura 4.36). De esta forma, el largo, la altura y el área del rectángulo pueden expresarse en términos de la posición x de la esquina inferior derecha:

$$\text{Largo: } 2x, \qquad \text{Altura: } \sqrt{4 - x^2}, \qquad \text{Área: } 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Observe que los valores de x se localizan en el intervalo $0 \leq x \leq 2$, donde se encuentra la esquina seleccionada del rectángulo.

Nuestro objetivo es determinar el valor máximo absoluto de la función

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

en el dominio [0, 2].

La derivada

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

no está definida cuando $x = 2$ y es igual a cero cuando

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} &= 0 \\ -2x^2 + 2(4 - x^2) &= 0 \\ 8 - 4x^2 &= 0 \\ x^2 = 2 \text{ o } x &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De los dos ceros, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, sólo $x = \sqrt{2}$ está en el interior del dominio de A y conforma la lista de puntos críticos. Los valores de A en los extremos y en este único punto crítico son

$$\text{Valor en el punto crítico: } A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$$

$$\text{Valores en los extremos: } \quad A(0) = 0, \quad A(2) = 0.$$

El área presenta un valor máximo de 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ unidades de alto y $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de largo. ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Willebrord Snell van Royen (1580–1626)

EJEMPLO 4 La rapidez de la luz depende del medio en el que viaje; por lo general, es más lenta en un medio más denso.

El **principio de Fermat en óptica** establece que la luz viaja de un punto a otro a lo largo de la trayectoria para la que el tiempo de recorrido es mínimo. Describa la trayectoria que sigue un rayo de luz al ir del punto A, en un medio donde la velocidad de la luz es c_1, a un punto B en un segundo medio donde su velocidad es c^2.

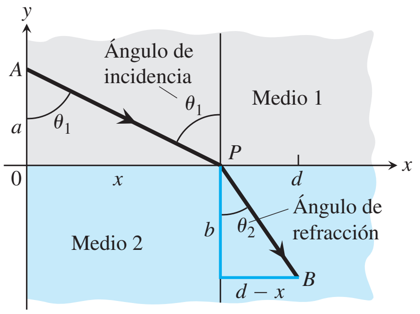


FIGURA 4.37 Un rayo de luz refractado (desviado de su trayectoria) cuando pasa de un medio a otro medio más denso (ejemplo 4).

Solución Como la luz viaja de A a B siguiendo la ruta más rápida, buscamos una trayectoria que minimice el tiempo de recorrido. Suponemos que A y B están en el plano xy y que la línea que separa los dos medios es el eje x (figura 4.37).

En un medio uniforme, donde la rapidez de la luz es constante, "tiempo más corto" significa "trayectoria más corta" y, por lo tanto, el rayo de luz seguirá una línea recta. Así, la trayectoria de A a B consistirá en un segmento de recta de A a un punto frontera P, seguido de otro segmento de recta de P a B. La distancia recorrida es igual a la velocidad por el tiempo, así que

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}.$$

En la figura 4.37, el tiempo necesario para que la luz viaje de A a P es

$$t_1 = \frac{AP}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1}.$$

De P a B, el tiempo es

$$t_2 = \frac{PB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}.$$

El tiempo de A a B es la suma de éstos:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}.$$

Esta ecuación expresa t como una función derivable de x cuyo dominio es $[0, d]$. Necesitamos encontrar el valor mínimo absoluto de t en este intervalo cerrado. Encontramos la derivada

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

y observamos que es continua. En términos de los ángulos θ_1 y θ_2 en la figura 4.37,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} - \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

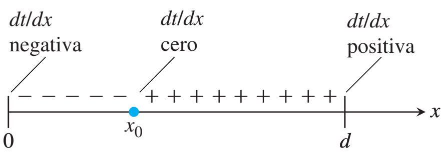


FIGURA 4.38 El patrón de signos de dt/dx del ejemplo 4.

La función t tiene una derivada negativa en $x = 0$ y una derivada positiva en $x = d$. Como dt/dx es continua en todo el intervalo $[0, d]$, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.5), existe un punto $x_0 \in [0, d]$ donde $dt/dx = 0$ (figura 4.38).

Sólo hay uno de tales puntos, ya que dt/dx es una función creciente de x (ejercicio 62). Así, en este único punto tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{c_2}.$$

Esta ecuación es la **ley de Snell** o la **ley de la refracción**, que es un principio importante en la teoría de la óptica y describe la trayectoria que sigue un rayo de luz. ■

Ejemplos de economía

Suponga que

$$\begin{aligned} r(x) &= \text{ingreso por la venta de } x \text{ artículos} \\ c(x) &= \text{costo de producir } x \text{ artículos} \\ p(x) &= r(x) - c(x) = \text{utilidad por producir y vender } x \text{ artículos} \end{aligned}$$

Aunque por lo regular en muchas aplicaciones x es un entero, podemos aprender acerca del comportamiento de dichas funciones si las definimos para todos los números reales distintos de cero y suponemos que son funciones derivables. Los economistas utilizan los términos **ingreso marginal**, **costo marginal** y **utilidad marginal** para nombrar a las derivadas $r'(x)$, $c'(x)$ y $p'(x)$ de las funciones de ingreso, costo y utilidad. Consideraremos la relación de la utilidad p con estas derivadas.

Si $r(x)$ y $c(x)$ son derivables para x en algún intervalo de posibilidades de producción, y si ahí $p(x) = r(x) - c(x)$ tiene un valor máximo, éste se alcanza en un punto crítico de $p(x)$ o en un extremo del intervalo. Si se alcanza en un punto crítico, entonces $p'(x) = r'(x) - c'(x) = 0$ y vemos que $r'(x) = c'(x)$. En términos de economía, esta última ecuación significa que

> En un nivel de producción que da la utilidad máxima, el ingreso marginal es igual al costo marginal (figura 4.39).

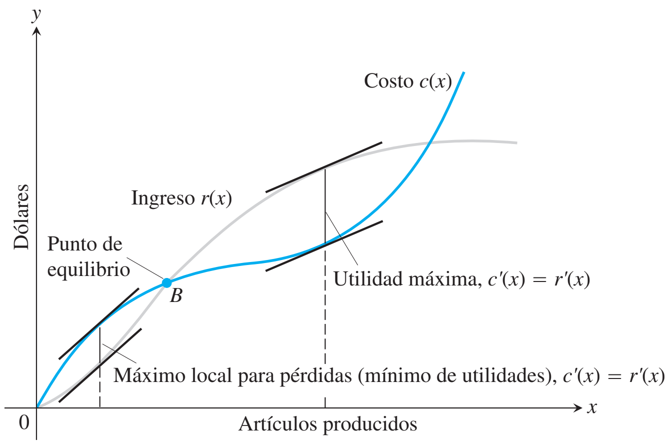


FIGURA 4.39 La gráfica de una función típica de costo inicia cóncava hacia abajo y posteriormente cambia a cóncava hacia arriba. Cruza a la curva de ingresos en el punto de equilibrio B. A la izquierda de B, la compañía opera con pérdidas. A la derecha, la compañía opera con ganancias, la ganancia máxima se registra donde $c'(x) = r'(x)$. Más a la derecha, el costo excede al ingreso (quizás a consecuencia de una combinación del aumento de la mano de obra y de la materia prima y la saturación del mercado) y, nuevamente, los niveles de producción dejan de ser rentables.

EJEMPLO 5 Suponga que $r(x) = 9x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, donde x representa millones de reproductores de MP3 fabricados. ¿Existe un nivel de producción que maximice la utilidad? Si es así, ¿cuál es ese nivel?

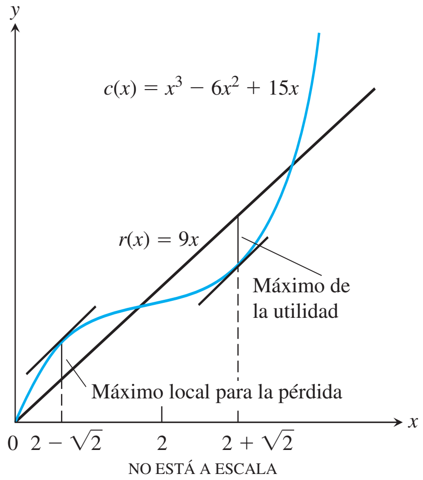


FIGURA 4.40 Curvas de costo y de ingreso para el ejemplo 5.

Solución Observe que $r'(x) = 9$ y $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \qquad \text{Se establece que } c'(x) = r'(x).$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586 \qquad \text{y}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$$

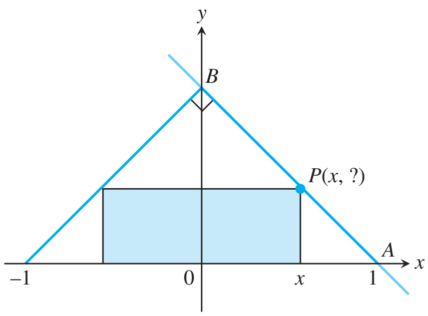
Los posibles niveles de producción para la utilidad máxima son $x \approx 0.586$ millones de reproductores de MP3 o $x \approx 3.414$ millones. La segunda derivada de $p(x) = r(x) - c(x)$ es $p''(x) = -c''(x)$, ya que $r''(x)$ siempre es cero. Así, $p''(x) = 6(2 - x)$, que es negativa en $x = 2 + \sqrt{2}$ y positiva en $x = 2 - \sqrt{2}$. Por el criterio de la segunda derivada, una utilidad máxima se alcanza alrededor de $x = 3.414$ (donde el ingreso excede a los costos) y una pérdida máxima se registra alrededor de $x = 0.586$. Las gráficas de $r(x)$ y $c(x)$ se presentan en la figura 4.40 ■

Ejercicios 4.5

Aplicaciones matemáticas

Siempre que quiera maximizar o minimizar una función de una sola variable, le sugerimos dibujar la gráfica sobre el dominio que sea adecuado para el problema a resolver. La gráfica le dará valiosa información antes de hacer los cálculos y le ofrecerá una herramienta visual para comprender su respuesta

1. **Minimización de un perímetro** ¿Cuál es el menor perímetro posible para un rectángulo cuya área es de 16 in^2 y cuáles son sus dimensiones?
2. Demuestre que entre todos los rectángulos con perímetro de 8 m, el de mayor área es un cuadrado.
3. La figura ilustra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 2 unidades de largo.
   a. Exprese la coordenada y de P en términos de x. (*Sugerencia:* Escriba una ecuación para la recta AB).
   b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.
   c. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?



4. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?
5. Usted quiere hacer una caja rectangular abierta con una pieza de cartón de 8 por 15 in, cortando en las esquinas cuadrados congruentes y doblando hacia arriba los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja que puede hacer de esta manera con el mayor volumen, y cuál es ese volumen?
6. Usted planea cerrar la esquina del primer cuadrante con un segmento de recta de 20 unidades de longitud que va de $(a, 0)$ a $(0, b)$. Demuestre que el área del triángulo encerrado por el segmento es máxima cuando $a = b$.
7. **La mejor cerca** Una parcela rectangular en una granja estará limitada en uno de sus lados por un río, y por los otros tres lados por una cerca electrificada con un solo alambre. Si se cuenta con 800 m de alambre, ¿cuál es la mayor área que puede ocupar la parcela y cuáles son sus dimensiones?
8. **La cerca más corta** Un sembradío rectangular de plantas de guisantes mide 216 m^2; se quiere encerrar con una cerca y dividirlo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requieren la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requerirá?
9. **Diseño de un tanque** La empresa donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de 500 ft^3. El tanque se fabricará soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.

a. ¿Qué dimensiones le indicará al taller?

b. Describa brevemente cómo tomó en cuenta el peso en su cálculo.

10. Recolección de agua de lluvia Se desea construir un depósito rectangular de 1125 ft^3 abierto por arriba con base cuadrada de x ft de lado y y ft de profundidad; su parte superior quedará al nivel del suelo para recolectar el agua de lluvia. El costo asociado con el depósito implica no sólo el material que se usará para construirlo, sino también el costo de excavación, que es proporcional al producto xy.

a. Si el costo total es

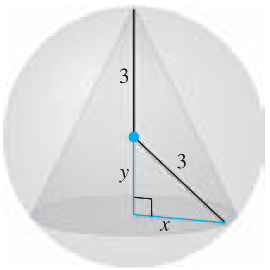
$$c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy,$$

¿qué valores de x y y lo minimizarán?

b. Dé un escenario posible para la función de costo del inciso (a).

11. Diseño de un cartel Se diseña un cartel rectangular cuya área de impresión es de 50 in^2, con márgenes superior e inferior de 4 in, y márgenes laterales de 2 in cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel que se usará?

12. Determine el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio 3.



13. Dos lados de un triángulo tienen longitudes a y b, y el ángulo entre ellos es θ. ¿Qué valor de θ maximizará el área del triángulo? (*Sugerencia:* Considere que $A = (1/2)ab \operatorname{sen} \theta$).

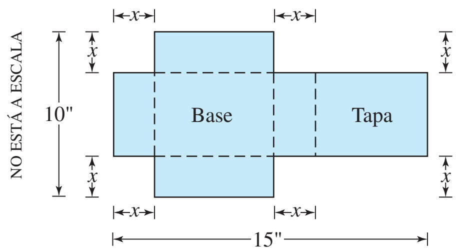
14. Diseño de una lata ¿Cuáles son las dimensiones de una lata abierta cilíndrica circular recta que puede contener un volumen de 1000 cm^3? Compare el resultado con el del ejemplo 2.

15. Diseño de una lata Usted diseña una lata cilíndrica circular recta de 1000 cm^3, en cuya fabricación se debe tomar en cuenta el desperdicio. No hay desperdicio al cortar el aluminio del lado, pero las tapas superior e inferior de radio r serán cortadas a partir de cuadrados que miden $2r$ unidades de lado. La cantidad total de aluminio usado para la lata se determina mediante

$$A = 8r^2 + 2\pi rh$$

y no mediante la fórmula $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ del ejemplo 2. En ese ejemplo, la razón de h a r para la lata más económica era de 2 a 1. ¿Cual es la razón ahora?

T **16. Diseño de una caja con tapa** Una pieza de cartón mide 10 por 15 in. Como se ilustra en la figura, se han quitado dos cuadrados en las esquinas del lado que mide 10 in. Además, se han eliminado dos rectángulos de las otras dos esquinas, de manera que las cejas puedan doblarse para formar una caja rectangular con tapa.



a. Escriba una fórmula para el volumen, $V(x)$, de la caja.

b. Encuentre el dominio de V para la situación del problema y grafique V en su dominio.

c. Use un método gráfico para determinar el volumen máximo y el valor de x que lo da.

d. Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso (c).

T **17. Diseño de una maleta** Se dobla en dos una hoja de cartón de 24 por 36 in para formar un rectángulo de 24 por 18 in, como se muestra en la figura. Después, de las esquinas del rectángulo doblado, se cortan cuatro cuadrados congruentes de longitud x por lado. Se desdobla la hoja y las seis cejas se doblan hacia arriba para formar una caja con caras laterales y una tapa.

a. Escriba una fórmula para el volumen $V(x)$ de la caja.

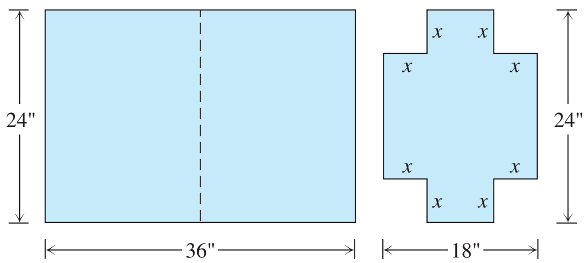
b. Encuentre el dominio de V para la situación del problema y grafique V en su dominio.

c. Use un método gráfico para determinar el volumen máximo y el valor de x que lo da.

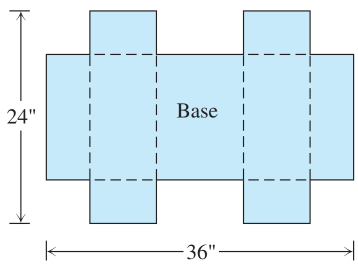
d. Confirme analíticamente el resultado que obtuvo en el inciso (c).

e. Encuentre el valor de x que da un volumen de 1120 in^3.

f. Escriba un párrafo describiendo los temas que surgieron en el inciso (b).



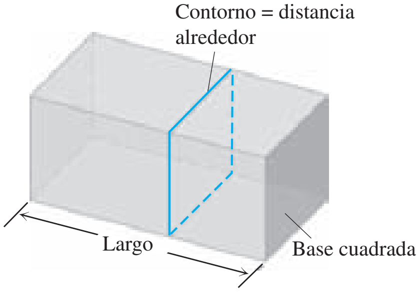
Luego la hoja se desdobla.



18. Se inscribirá un rectángulo bajo el arco de la curva $y = 4 \cos(0.5x)$ de $x = -\pi$ a $x = \pi$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área mayor y cuál es esa área?

19. Determine las dimensiones de un cilindro circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio de 10 cm. ¿Cuál es el volumen máximo?

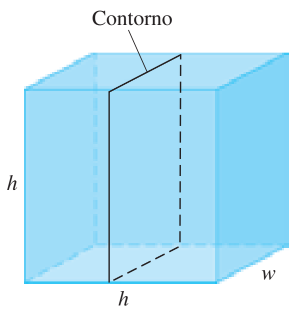
20. **a.** El Servicio Postal de Estados Unidos aceptará una caja para envío nacional si la suma de su longitud y su contorno (es decir, la distancia alrededor) no excede las 108 in. ¿Qué dimensiones tendrá una caja con base cuadrada y el mayor volumen posible?



T **b.** Grafique el volumen de una caja de 108 in (longitud más contorno igual a 108 in) como una función de la longitud y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

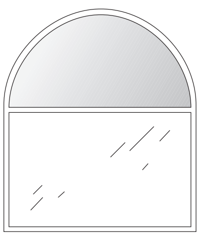
21. (*Continuación del ejercicio 20.*)

a. Suponga que en vez de tener una caja con base cuadrada, tiene una caja de caras cuadradas, de manera que sus dimensiones son h por h por w y el contorno es $2h + 2w$. En ese caso, ¿qué dimensiones de la caja darán el mayor volumen?



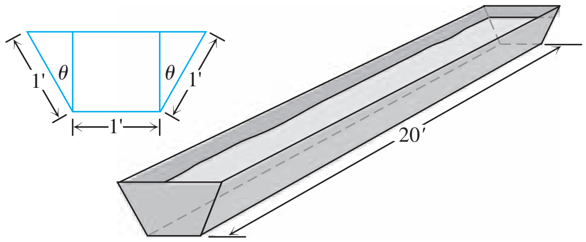
T **b.** Grafique el volumen como una función de h y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

22. Una ventana tiene forma de rectángulo y está coronada con un semicírculo. El rectángulo es de vidrio claro, mientras que el semicírculo es de vidrio de color y transmite sólo la mitad de luz por unidad de área en comparación con el vidrio claro. El perímetro total es fijo. Encuentre las proporciones de la ventana que admitan la mayor cantidad de luz. Desprecie el espesor del marco.



23. Se quiere construir un silo (sin incluir la base) en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo y el costo de construcción tiene que mantenerse al mínimo. Ignore el espesor del silo y los desperdicios en la construcción.

24. El abrevadero de la figura se debe construir con las dimensiones que se indican. Sólo se puede variar el ángulo θ. ¿Qué valor de θ maximizará el volumen del abrevadero?

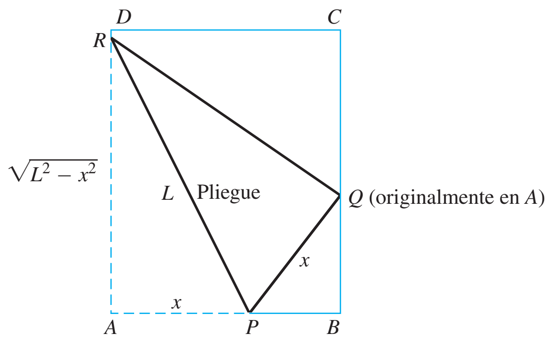


25. **Doblado de papel** Se coloca una hoja de papel de 8.5 por 11 in sobre una superficie plana. Una de las esquinas se coloca sobre el lado opuesto más largo, como se ilustra en la figura, y se mantiene ahí conforme se aplana el papel suavemente. El problema es hacer la longitud del pliegue tan pequeña como sea posible. Llamamos L a la longitud. Inténtelo con papel.

a. Demuestre que $L^2 = 2x^3/(2x - 8.5)$.

b. ¿Qué valor de x maximiza L^2?

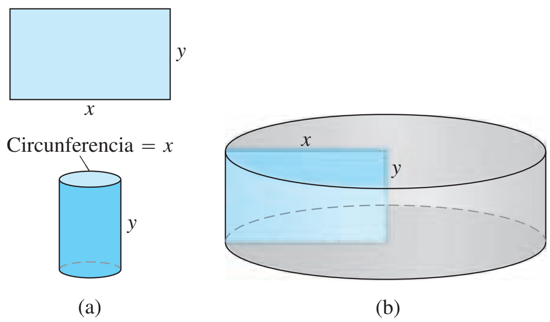
c. ¿Cuál es el valor mínimo de L?



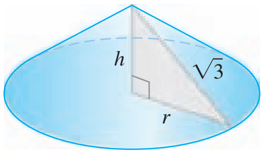
26. **Construcción de cilindros** Compare las respuestas de los siguientes dos problemas de construcción.

a. Una hoja rectangular de perímetro de 36 cm y dimensiones x por y cm se enrolla a manera de cilindro, como se ilustra en el inciso (a) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?

b. La misma hoja se hace girar alrededor de uno de los lados de longitud y para generar el cilindro que se ilustra en el inciso (b) de la figura. ¿Qué valores de x y y dan el mayor volumen?



27. Construcción de conos Un triángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{3}$ m de largo se hace girar alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Determine el radio, la altura y el volumen del cono de mayor volumen que se pueda hacer de esta manera.



28. Determine el punto en la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ que está más cerca del origen.

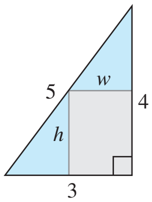
29. Determine un número positivo para el que la suma de éste y su recíproco sea la menor (mínima) posible.

30. Determine un número positivo para el que la suma de su recíproco y cuatro veces su cuadrado sea la menor posible.

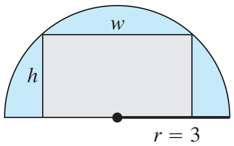
31. Un alambre de b m de largo se corta en dos partes. Una pieza se dobla para formar un triángulo equilátero y la otra se dobla para formar un círculo. Si la suma de las áreas encerradas por cada parte es mínima, ¿cuáles son las dimensiones de cada parte?

32. Responda el ejercicio 31 si una de las piezas que se forman ahora es un cuadrado y la otra es un círculo.

33. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que pueda inscribirse en el triángulo rectángulo que se representa en la siguiente figura.



34. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 3. (Véase la figura adyacente).



35. ¿Qué valores de a hacen que $f(x) = x^2 + (a/x)$ tenga

a. un mínimo local en $x = 2$?

b. un punto de inflexión en $x = 1$?

36. ¿Qué valores de a y b hacen que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga

a. un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 3$?

b. un mínimo local en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 1$?

Aplicaciones en física

37. Movimiento vertical La altura con respecto al suelo de un objeto que se desplaza verticalmente está dada por

$$s = -16t^2 + 96t + 112,$$

con s en ft y t en segundos. Determine

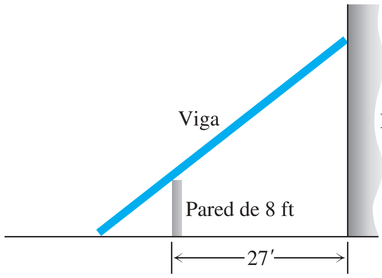
a. la velocidad del objeto cuando $t = 0$

b. su altura máxima y cuándo la alcanza.

c. su velocidad cuando $s = 0$.

38. La ruta más rápida Jane está en una lancha a 2 millas de la costa y quiere llegar a un pueblo costero que está a 6 millas en línea recta desde el punto de la orilla que es más cercano a la lancha. Ella puede remar a 2 mph y caminar a 5 mph. ¿Dónde debe dejar la lancha para llegar al pueblo en el tiempo mínimo?

39. La viga más corta La pared de 8 ft que se ilustra aquí está a 27 ft del edificio. Determine la viga recta de longitud más corta que alcance el lado del edificio desde el suelo que está al otro lado de la pared.



40. Movimiento sobre una recta Las posiciones de dos partículas en el eje s son $s_1 = \text{sen}\, t$ y $s_2 = \text{sen}(t + \pi/3)$, con s_1 y s_2 en metros y t en segundos.

a. ¿En qué momento(s) del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ las dos partículas se encuentran en el mismo lugar?

b. ¿Cuál es la máxima distancia a la que están separadas las partículas?

c. ¿Cuándo cambia más rápidamente la distancia entre las partículas en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$?

41. La intensidad de iluminación en cualquier punto desde una fuente luminosa es proporcional al cuadrado del recíproco de la distancia entre el punto y la fuente de luz. Dos lámparas, una con ocho veces la intensidad de la otra, están separadas 6 m. ¿A qué distancia de la fuente más luminosa la iluminación total es mínima?

42. Movimiento de un proyectil El *alcance* R de un proyectil disparado desde el origen en un terreno horizontal es la distancia desde el origen hasta el punto del impacto. Si el proyectil se dispara con una velocidad inicial v_0 a un ángulo de α con la horizontal, entonces, en el capítulo 13, determinamos que

$$R = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}\, 2\alpha,$$

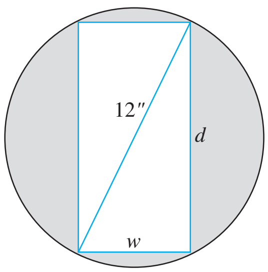
donde g es la aceleración hacia abajo debida a la gravedad. Determine el ángulo α para el que el alcance R es el mayor posible.

T **43. Resistencia de una viga** La resistencia S de una viga de madera rectangular es proporcional a su ancho por el cuadrado de su espesor. (Véase la figura).

a. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 in de diámetro.

b. Grafique S como una función del ancho w de la viga, suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare su respuesta con la del inciso (a).

c. En la misma pantalla, grafique S como función del espesor d de la viga; tome nuevamente $k = 1$. Compare lo que ve en ambas gráficas con la respuesta que obtuvo en el inciso (a). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.



T **44. Rigidez de una viga** La rigidez S de una viga rectangular es proporcional a su ancho por el cubo de su espesor.

a. Determine las dimensiones de la viga más rígida que se puede cortar de un tronco cilíndrico de 12 in de diámetro.

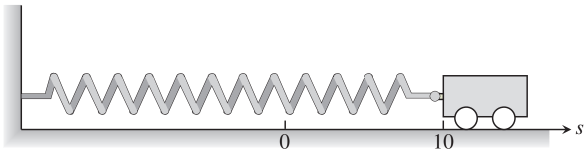
b. Grafique S como una función del ancho w de la viga, pero suponga que la constante de proporcionalidad es $k = 1$. Compare el resultado con la respuesta que obtuvo en el inciso (a).

c. En la misma pantalla, grafique S como función del espesor d de la viga, pero tome nuevamente $k = 1$. Compare lo que ve en ambas gráficas con la respuesta que obtuvo en el inciso (a). ¿Qué efecto tendría cambiar k por algún otro valor? Inténtelo.

45. Carrito sin fricción Un carrito sin fricción está sujeto a la pared por un resorte, se tira de él 10 cm a partir de su posición de reposo y se le suelta en el tiempo $t = 0$ para que ruede hacia delante y hacia atrás durante 4 segundos. Su posición en el tiempo está dada por $s = 10 \cos \pi t$.

a. ¿Cuál es la rapidez máxima del carrito? ¿Cuándo alcanza el carrito esa rapidez? ¿Dónde está en ese momento? ¿Cuál es la magnitud de la aceleración en ese momento?

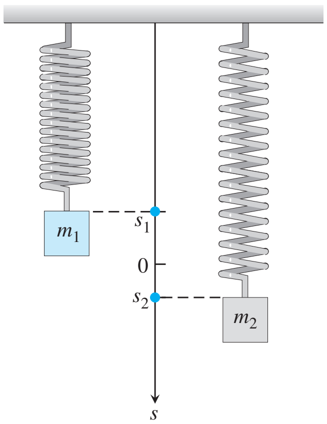
b. ¿Dónde está el carrito cuando la magnitud de la aceleración es máxima? ¿Cuál es la rapidez del carrito en ese momento?



46. Dos masas cuelgan, cada una, de un resorte y están ubicadas una junto a la otra; sus posiciones están dadas por $s_1 = 2 \text{ sen } t$ y $s_2 = \text{sen } 2t$, respectivamente.

a. ¿En qué instantes, en el intervalo $0 < t$, las masas están una frente a la otra? (*Sugerencia:* Considere que $\text{sen } 2t = 2 \text{ sen } t \cos t$).

b. ¿En qué momento del intervalo $0 \le t \le 2\pi$ se da la máxima distancia vertical entre las masas? ¿Cuál es esa distancia? (*Sugerencia:* Considere que $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$.)



47. Distancia entre dos barcos Al mediodía, el barco A se encuentra 12 millas náuticas al norte del barco B. El barco A navega hacia el sur a 12 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica es igual a 2000 yardas) y continúa haciéndolo todo el día. El barco B navega hacia el este a 8 nudos y continúa haciéndolo todo el día.

a. Empiece a contar el tiempo $t = 0$ al mediodía y exprese la distancia s entre los barcos como una función de t.

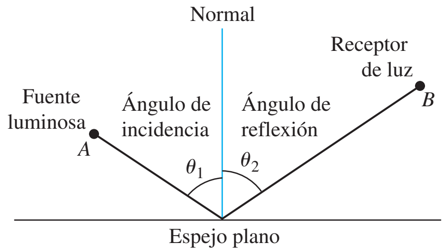
b. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre barcos al mediodía? ¿Qué tan rápido lo hace una hora después?

c. Ese día, la visibilidad era de 5 millas náuticas. ¿Los tripulantes de los barcos pudieron verse alguna vez?

T **d.** Grafique juntas s y ds/dt como funciones de t para $-1 \le t \le 3$, usando diferentes colores, si es posible. Compare las gráficas y lo que ve con las respuestas que obtuvo en los incisos (b) y (c).

e. Aparentemente, la gráfica de ds/dt podría tener una asíntota horizontal en el primer cuadrante. Lo anterior sugiere que ds/dt se aproxima a un valor límite cuando $t \to \infty$. ¿Cuál es ese valor? ¿Cuál es su relación con la rapidez individual de cada barco?

48. El principio de Fermat en óptica La luz de una fuente A es reflejada por un espejo plano a un punto de recepción B, como se ilustra en la figura siguiente. Muestre que para que la luz obedezca el principio de Fermat, el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión, ambos medidos desde la recta normal hacia la superficie reflectante. (Es posible obtener este resultado sin ayuda del cálculo. Hay un argumento puramente geométrico que tal vez usted prefiera).



49. Peste del estaño Cuando el estaño metálico se mantiene por debajo de 13.2 °C, se vuelve quebradizo y se desmorona en un polvo gris. Tarde o temprano, los objetos de estaño se deshacen espontáneamente en este polvo gris si se mantienen en climas fríos durante años. Los europeos, al ver desmoronarse las flautas de estaño de los órganos de sus iglesias, llamaban a este fenómeno la peste del estaño, porque parecía contagiosa y de hecho lo era, ya que este polvo gris es un catalizador para su propia formación.

Un *catalizador* para una reacción química es una sustancia que controla la rapidez de reacción sin experimentar un cambio permanente en sí misma. Una *reacción autocatalítica* es aquella cuyo producto es un catalizador para su propia formación. Tal reacción procede despacio al principio si la cantidad de catalizador presente es pequeña y despacio de nuevo al final, cuando la mayoría de la sustancia original se ha utilizado. Pero, entre ambas fases, cuando tanto la sustancia como su producto catalizador son abundantes, la reacción procede a un ritmo más rápido.

En algunos casos, es razonable aceptar que la velocidad $v = dx/dt$ de reacción es proporcional tanto a la cantidad de sustancia original presente como a la cantidad del producto. Esto es, v se puede considerar como una función sólo de x, y

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2,$$

donde

$x =$ la cantidad del producto

$a =$ la cantidad inicial de la sustancia

$k =$ una constante positiva

¿Para qué valores de x la velocidad alcanza su valor máximo? ¿Cuál es el valor máximo de v?

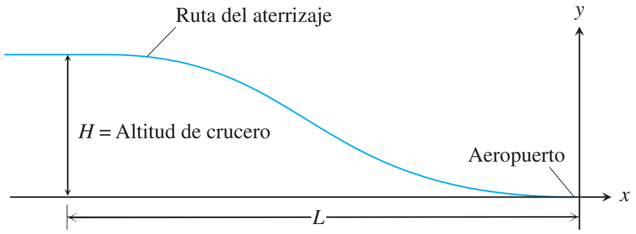
50. Trayectoria de aterrizaje de un avión Un avión vuela a una altitud H cuando empieza a descender hacia una pista de aterrizaje que está horizontal en el suelo a una distancia L del avión, como se ilustra en la figura. Suponga que la trayectoria de aterrizaje del avión es la gráfica de una función polinomial cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $y(-L) = H$ y $y(0) = 0$.

a. ¿Qué es dy/dx en $x = 0$?

b. ¿Qué es dy/dx en $x = -L$?

c. Use los valores de dy/dx en $x = 0$ y $x = -L$ junto con $y(0) = 0$ y $y(-L) = H$ para probar que

$$y(x) = H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$



Negocios y economía

51. Fabricar y distribuir mochilas cuesta c dólares por unidad. Si cada mochila se vende en x dólares, el número vendido está dado por

$$n = \frac{a}{x - c} + b(100 - x),$$

donde a y b son constantes positivas. ¿Que precio de venta dará la máxima utilidad?

52. Usted está a cargo de un servicio de recorridos turísticos que ofrece las siguientes tarifas:

$200 por persona, si van 50 personas al recorrido (el número mínimo para contratar sus servicios).

Por cada persona adicional, hasta un máximo de 80 personas en total, la tarifa por persona se reduce $2.

El costo del recorrido es de $6000 (un costo fijo) más $32 por persona. ¿Cuántas personas deben contratar el servicio para maximizar la utilidad de la empresa?

53. Fórmula Wilson para determinar el tamaño del lote Una de las fórmulas para el manejo de inventarios dice que el costo promedio semanal de solicitar, pagar y manejar mercancía es

$$A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2},$$

donde q es la cantidad que se ordena cuando el inventario (de zapatos, radios, escobas u otro artículo) se está agotando, k es el costo de hacer un pedido (constante, no importa con cuánta frecuencia se solicite), c es el costo de un artículo (una constante), m es el número de productos vendidos cada semana (una constante) y h es el costo de manejo semanal por artículo (una constante que toma en cuenta factores como espacio, equipo, seguros y condiciones de seguridad).

a. Usted trabaja como gerente de inventario en una tienda, así que debe encontrar la cantidad que minimice $A(q)$. ¿Cuál es? (La fórmula que determine en su respuesta se llama *fórmula Wilson para el tamaño del lote*).

b. Los costos de envío algunas veces dependen del tamaño del pedido. Cuando esto es así, resulta más realista remplazar k por $k + bq$, la suma de k y un múltiplo constante de q. ¿Cuál es ahora la cantidad que más conviene ordenar desde el punto de vista económico?

54. Nivel de producción Demuestre que el nivel de producción (si hay alguno) en el que el costo promedio es mínimo es un nivel donde el costo promedio es igual al costo marginal.

55. Demuestre que si $r(x) = 6x$ y $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ son sus funciones de ingreso y costo; lo óptimo es alcanzar un punto de equilibrio (es decir, lograr que el ingreso sea igual al costo).

56. Nivel de producción Suponga que $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20{,}000x$ es el costo de fabricar x artículos. Determine el nivel de producción que minimizará el costo promedio de fabricar x artículos.

57. Usted va a construir una caja rectangular abierta con base cuadrada y un volumen de 48 ft^3. Si el material para la base cuesta $\$6/\text{ft}^2$ y el material para los lados cuesta $\$4/\text{ft}^2$, ¿cuáles son las dimensiones que darán por resultado la caja más barata? ¿Cuál es el costo mínimo?

58. La cadena Mega Motel tiene 800 habitaciones y está a toda su capacidad cuando el costo por habitación es de $50 por noche. Por cada aumento de $10 por habitación, se demandan 40 habitaciones menos cada noche. ¿Cuál es el precio por habitación que maximizará el ingreso por noche?

Biología

59. Sensibilidad a medicamentos (*Continuación del ejercicio 60 de la sección 3.3*). Encuentre la cantidad de medicamento para la que el cuerpo es más sensible; para ello, determine el valor M que maximiza la derivada dR/dM, donde

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

y C es una constante.

60. Cómo tosemos

a. Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida. Esto plantea las preguntas de cuánto debe contraerse la tráquea para maximizar la velocidad y si realmente se contrae tanto cuando tosemos.

De acuerdo con hipótesis razonables acerca de la elasticidad de la pared de la tráquea y respecto de cómo se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio del flujo v puede modelarse mediante la ecuación

$$v = c(r_0 - r)r^2 \text{ cm/sec}, \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0,$$

donde r_0 es el radio de la tráquea en reposo, en centímetros, y c es una constante positiva cuyo valor depende en parte de la longitud de la tráquea.

Demuestre que v tiene su valor máximo cuando $r = (2/3)r_0$; esto es, cuando la tráquea se contrae alrededor del 33 por ciento. El hecho notable es que las radiografías confirman que la tráquea se contrae alrededor de esa cantidad cuando el individuo tose.

T **b.** Tome r_0 como 0.5 y c como 1, y grafique v en el intervalo $0 \le r \le 0.5$. Compare sus resultados con el hecho de que esta v alcanza un valor máximo cuando $r = (2/3)r_0$.

Teoría y ejemplos

61. Una desigualdad para enteros positivos Pruebe que si a, b, c y d son enteros positivos, entonces

$$\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)}{abcd} \ge 16.$$

62. La derivada dt/dx del ejemplo 4

a. Demuestre que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

es una función creciente de x.

b. Pruebe que

$$g(x) = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

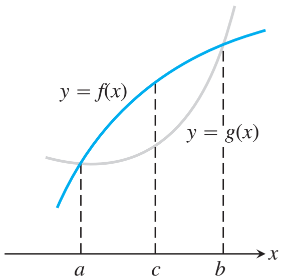
es una función decreciente de x.

c. Demuestre que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

es una función creciente de x.

63. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables cuyas gráficas aparecen aquí. El punto c es el punto donde la distancia vertical entre las curvas es mayor. ¿Hay algo especial en las tangentes a las dos curvas en c? Justifique su respuesta.



64. Le han pedido determinar si la función $f(x) = 3 + 4 \cos x + \cos 2x$ es negativa en algún punto.

a. Explique por qué es suficiente considerar valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b. ¿Es f negativa en algún punto? Explique.

65. a. La función $y = \cot x - \sqrt{2} \csc x$ tiene un valor máximo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi$. Encuéntrelo.

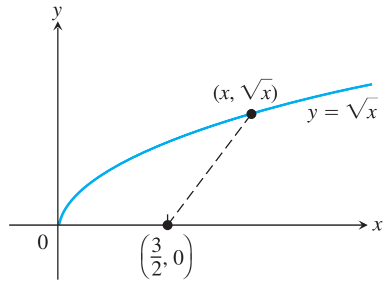
T **b.** Grafique la función y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

66. a. La función $y = \tan x + 3 \cot x$ tiene un valor mínimo absoluto en el intervalo $0 < x < \pi/2$. Encuéntrelo.

T **b.** Grafique la función y compare lo que ve con la respuesta que dio en el inciso (a).

67. a. ¿Qué tan cerca está la curva $y = \sqrt{x}$ del punto $(3/2, 0)$? (*Sugerencia:* Si minimiza el *cuadrado* de la distancia, puede evitar las raíces cuadradas).

T **b.** Grafique juntas la función distancia $D(x)$ y $y = \sqrt{x}$ luego ajuste sus resultados con la respuesta que obtuvo en el inciso (a).



68. a. ¿Qué tan cerca está la semicircunferencia $y = \sqrt{16 - x^2}$ del punto $\left(1, \sqrt{3}\right)$?

T **b.** Grafique juntas la función distancia $y = \sqrt{16 - x^2}$ luego ajuste sus resultados con la respuesta que obtuvo en el inciso (a).

4.6 Método de Newton

En esta sección estudiamos un método numérico, denominado *método de Newton* o *método de Newton-Raphson*, el cual es una técnica para aproximar la solución de una ecuación $f(x) = 0$. En esencia, utiliza rectas tangentes en vez de la gráfica de $y = f(x)$ cerca de los puntos donde f es cero. (Un valor de x donde f es cero es una *raíz* de la función f y una *solución* de la ecuación $f(x) = 0$).

Procedimiento para el método de Newton

El objetivo del método de Newton para la estimación de una solución de la ecuación $f(x) = 0$ es producir una sucesión de aproximaciones que tiendan a la solución. Seleccionamos el primer número x_0 de la sucesión. Luego, en circunstancias favorables, el método hará el resto al ir paso a paso hacia un punto donde la gráfica de f cruza al eje x (figura 4.41). En cada paso, el método aproxima un cero de f con un cero de una de sus linealizaciones. A continuación veremos cómo funciona.

La estimación inicial x_0 puede determinarse mediante graficación o con una simple conjetura. Entonces, el método utiliza la tangente a la curva $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ para aproximar la curva, denotando por x_1 al punto donde la tangente corta al eje x (figura 4.41). Por lo regular,

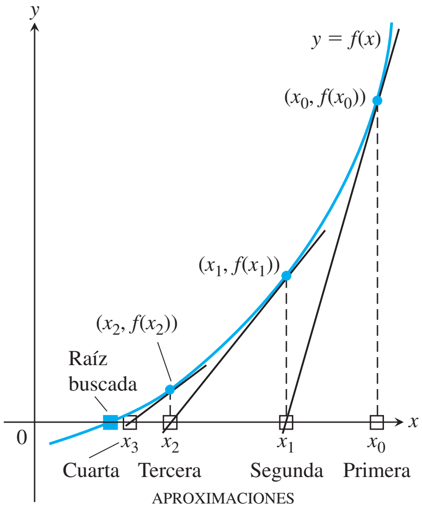


FIGURA 4.41 El método de Newton comienza con una aproximación inicial x_0 y (en circunstancias favorables) en cada paso mejora la aproximación.

el punto x_1 es una mejor aproximación a la solución que x_0. El punto x_2, donde la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$ cruza al eje x, es la siguiente aproximación en la sucesión. Continuamos así, usando cada aproximación para generar la siguiente, hasta que estemos suficientemente cerca de la raíz para detenernos.

Es posible deducir una fórmula para generar las sucesivas aproximaciones de la siguiente manera. Dada la aproximación x_n, la ecuación punto pendiente para la tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ es

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Podemos determinar dónde cruza el eje x si hacemos $y = 0$ (véase la figura 4.42):

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Si } f'(x_n) \neq 0.$$

Este valor de x es la siguiente aproximación x_{n+1}. A continuación hacemos un resumen del método de Newton.

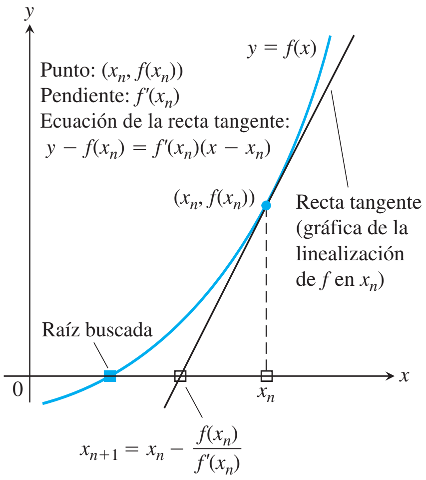


FIGURA 4.42 La geometría de los pasos consecutivos del método de Newton. A partir de x_n subimos a la curva y seguimos la recta tangente hacia abajo para determinar x_{n+1}.

Método de Newton

1. Conjeture una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Una gráfica de $y = f(x)$ será de utilidad.
2. Utilice la primera aproximación para obtener una segunda, con ésta obtenga una tercera, y así sucesivamente, mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{si } f'(x_n) \neq 0. \tag{1}$$

Aplicación del método de Newton

Por lo general, las aplicaciones del método de Newton implican muchos cálculos numéricos, lo que las hace muy adecuadas para computadoras o calculadoras. No obstante, los cálculos, aun cuando se hagan manualmente (lo cual podría ser muy tedioso), constituyen una muy buena forma de determinar soluciones de ecuaciones.

En nuestro primer ejemplo determinamos aproximaciones decimales a $\sqrt{2}$ estimando la raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

EJEMPLO 1 Determine la raíz positiva de la ecuación

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Solución Con $f(x) = x^2 - 2$ y $f'(x) = 2x$, la ecuación (1) se transforma en

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

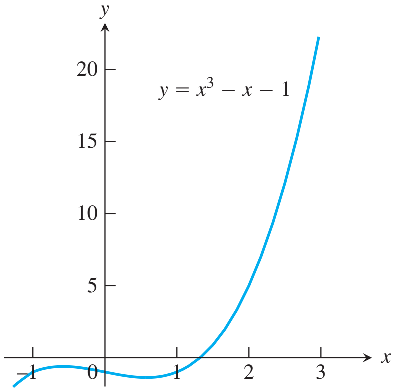


FIGURA 4.43 La gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ cruza una vez al eje x; ésta es la raíz que queremos encontrar (ejemplo 2).

La ecuación

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

nos permite ir de una aproximación a la siguiente con unos cuantos tecleos. Con el valor inicial $x_0 = 1$, obtenemos los resultados de la primera columna de la tabla que aparece a continuación. (Con cinco cifras decimales, $\sqrt{2} = 1.41421$.)

	Error	**Número de dígitos correctos**
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

■

El método de Newton es el método utilizado por la mayoría de las calculadoras para calcular raíces, ya que converge muy rápido (veremos más acerca de esto posteriormente). Si la aritmética en la tabla del ejemplo 1 hubiera llevado 13 cifras decimales en vez de 5, entonces con un paso más hubiéramos obtenido $\sqrt{2}$ con más de 10 cifras decimales correctas.

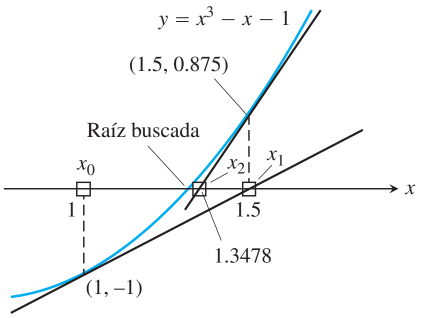


FIGURA 4.44 Los primeros tres valores de x en la tabla 4.1 (con cuatro decimales).

EJEMPLO 2 Determine la coordenada x del punto donde la curva $y = x^3 - x$ cruza a la recta horizontal $y = 1$.

Solución La curva cruza a la recta cuando $x^3 - x = 1$ o $x^3 - x - 1 = 0$. ¿Cuándo es $f(x) = x^3 - x - 1$ igual a cero? Como $f(1) = -1$ y $f(2) = 5$, sabemos, por el teorema del valor intermedio, que existe una raíz en el intervalo $(1, 2)$ (figura 4.43).

Aplicamos el método de Newton a f con el valor inicial $x_0 = 1$. Los resultados se presentan en la tabla 4.1 y la figura 4.44.

En $n = 5$, llegamos al resultado $x_6 = x_5 = 1.3247\ 17957$. Cuando $x_{n+1} = x_n$, la ecuación (1) indica que $f(x_n) = 0$. Hemos encontrado una solución de $f(x) = 0$ con nueve decimales. ■

TABLA 4.1 El resultado de la aplicación del método de Newton a $f(x) = x^3 - x - 1$ con $x_0 = 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.3478 26087
2	1.3478 26087	0.1006 82173	4.4499 05482	1.3252 00399
3	1.3252 00399	0.0020 58362	4.2684 68292	1.3247 18174
4	1.3247 18174	0.0000 00924	4.2646 34722	1.3247 17957
5	1.3247 17957	-1.8672E-13	4.2646 32999	1.3247 17957

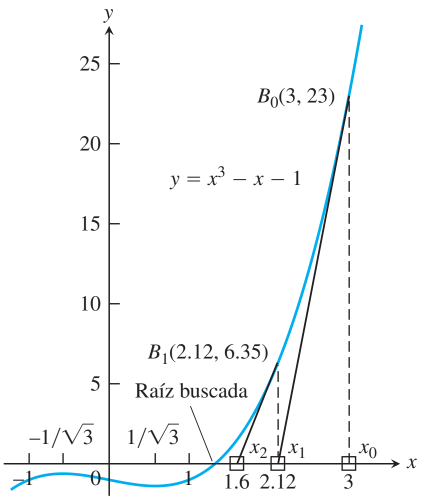


FIGURA 4.45 Cualquier valor inicial x_0 a la derecha de $x = 1/\sqrt{3}$ llevará a la raíz.

En la figura 4.45 indicamos que el proceso en el ejemplo 2 podría haber iniciado en el punto $B_0(3, 23)$ en la curva, con $x_0 = 3$. El punto B_0 está muy lejos del eje x, pero la tangente en B_0 cruza al eje x alrededor de $(2.12, 0)$, así que x_1 sigue siendo mejor que x_0. Si, como antes, utilizamos la ecuación (1) de manera repetida con $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, obtendremos la solución con nueve decimales, $x^7 = x^6 = 1.3247\ 17957$ en siete pasos.

Convergencia de las aproximaciones

En el capítulo 10 definiremos de manera precisa la idea de *convergencia* para las aproximaciones x_n en el método de Newton. De manera intuitiva, queremos decir que cuando el número n de aproximaciones aumenta, el valor x_n se hace arbitrariamente cercano a la raíz deseada r. [Esta noción es similar a la idea del límite de una función $g(t)$ cuando t tiende a infinito, como se definió en la sección 2.6].

En la práctica, el método de Newton por lo regular ofrece convergencia con una rapidez impresionante, pero ésta no se garantiza. Una forma de probar la convergencia es iniciar con la gráfica de la función para estimar un adecuado valor inicial para x_0. Se puede probar qué tan cerca se está de un cero de la función evaluando $|f(x_n)|$, y verificar que las aproximaciones convergen al evaluar $|x_n - x_{n+1}|$.

El método de Newton no siempre converge. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r - x}, & x < r \\ \sqrt{x - r}, & x \geq r, \end{cases}$$

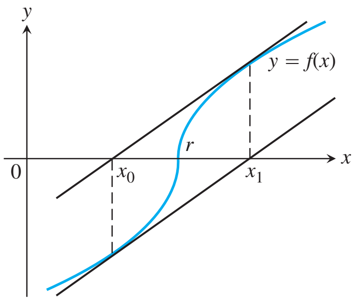


FIGURA 4.46 El método de Newton no converge. Usted pasa de x_0 a x_1 y regresa a x_0; nunca estará más cerca de r.

la gráfica fuera como la de la figura 4.46. Si iniciamos con $x_0 = r - h$, obtendremos $x_1 = r + h$, y las aproximaciones sucesivas van y regresan entre estos dos valores. Sin importar la cantidad de iteraciones, nunca estaremos más cerca de la raíz que lo que estuvimos con nuestra primera suposición.

Si el método de Newton converge, lo hace a una raíz. Sin embargo, sea cuidadoso. Existen situaciones en las que el método parece que converge, pero no hay una raíz allí. Por fortuna, tales situaciones son poco frecuentes.

Cuando el método de Newton converge a una raíz, podría no ser la raíz que se tenía en mente. La figura 4.47 muestra dos maneras en que esto puede suceder.

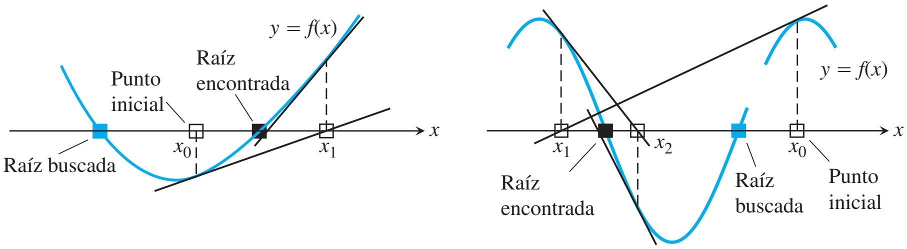


FIGURA 4.47 Si inicia demasiado lejos, el método de Newton tal vez no se aproxime a la raíz que usted quiere.

Ejercicios 4.6

Determinación de raíces

1. Utilice el método de Newton para estimar las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$. Empiece con $x_0 = -1$ para la solución de la izquierda y con $x_0 = 1$ para la solución de la derecha. Después, en cada caso, encuentre x_2.
2. Use el método de Newton para estimar la solución real de $x^3 + 3x + 1 = 0$. Empiece con $x_0 = 0$ y después encuentre x_2.
3. Emplee el método de Newton para estimar los dos ceros de la función $f(x) = x^4 + x - 3$. Empiece con $x_0 = -1$ para el cero (raíz) de la izquierda y con $x_0 = 1$ para el cero de la derecha. Después, encuentre en cada caso x_2.
4. Use el método de Newton para estimar los dos ceros de la función $f(x) = 2x - x^2 + 1$. Empiece con $x_0 = 0$ para el cero de la izquierda y con $x_0 = 2$ para el cero de la derecha. Después, encuentre en cada caso x_2.
5. Use el método de Newton para encontrar la raíz cuarta positiva de 2 resolviendo la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Inicie con $x_0 = 1$ y encuentre x_2.
6. Use el método de Newton para encontrar la raíz cuarta negativa de 2; para ello, resuelva la ecuación $x^4 - 2 = 0$. Empiece con $x_0 = -1$ y encuentre x_2.
7. **Conjetura de una raíz** Imagine que su primera suposición es afortunada, en el sentido de que x_0 es una raíz $f(x) = 0$. Suponiendo que $f'(x)$ está definida y no es cero, ¿qué pasa con x_1 y las aproximaciones subsiguientes?
8. **Estimación de pi** Se quiere estimar $\pi/2$ con cinco cifras decimales usando el método de Newton para resolver la ecuación $\cos x = 0$. ¿Importa con qué valor se empiece? Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

9. **Oscilación** Demuestre que si $h > 0$, la aplicación del método de Newton a

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

lleva a $x_1 = -h$ si $x_0 = h$ y $x_1 = h$ si $x_0 = -h$. Dibuje una figura para mostrar qué pasa.

10. Aproximaciones que van de mal en peor Aplique el método de Newton a $f(x) = x^{1/3}$ con $x_0 = 1$ y calcule x_1, x_2, x_3 y x_4. Determine una fórmula para $|x_n|$. ¿Qué ocurre con $|x_n|$ cuando $n \to -\infty$? Dibuje una figura que muestre qué ocurre.

11. Explique por qué los siguientes cuatro enunciados solicitan la misma información:

i) Determine las raíces de $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

ii) Encuentre las coordenadas x de las intersecciones de la curva $y = x^3$ con la recta $y = 3x + 1$.

iii) Determine las coordenadas x de los puntos donde la curva $y = x^3 - 3x$ cruza la recta horizontal $y = 1$.

iv) Encuentre los valores de x donde la derivada de $g(x) = (1/4)x^4 - (3/2)x^2 - x + 5$ es igual a cero.

12. Localización de un planeta Para calcular las coordenadas que ocupa un planeta en el espacio, tenemos que resolver ecuaciones como $x = 1 + 0.5 \operatorname{sen} x$. Graficar la función $f(x) = x - 1 - 0.5 \operatorname{sen} x$ sugiere que la función tiene una raíz cerca de $x = 1.5$. Use una iteración del método de Newton para mejorar dicha estimación. Esto es, empiece con $x_0 = 1.5$ y encuentre x_1. (Con cinco decimales, el valor de la raíz es 1.49870). Recuerde utilizar radianes.

13. Intersección de curvas La curva $y = \tan x$ interseca la recta $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Utilice el método de Newton para encontrar dónde se encuentra esa intersección.

14. Soluciones reales de una ecuación de cuarto grado Use el método de Newton para encontrar las dos soluciones reales de la ecuación $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

15. a. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen} 3x = 0.99 - x^2$?

b. Utilice el método de Newton para encontrarlas.

16. Curvas que se intersecan

a. ¿Alguna vez $\cos 3x$ es igual a x? Justifique su respuesta.

b. Use el método de Newton para determinar en dónde.

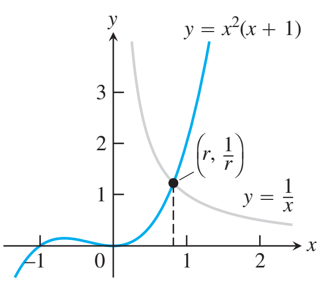
17. Encuentre los cuatro ceros reales de la función $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

18. Estimación de pi Estime π con tantos decimales como pueda desplegar su calculadora; use el método de Newton para resolver la ecuación $\tan x = 0$ con $x_0 = 3$.

19. Intersección de curvas ¿En qué valor o valores de x $\cos x = 2x$?

20. Intersección de curvas ¿En qué valores de x $\cos x = -x$?

21. Las gráficas de $y = x^2(x + 1)$ y $y = 1/x$ $(x > 0)$ se intersecan en un punto $x = r$. Utilice el método de Newton para estimar el valor de r con cuatro cifras decimales.

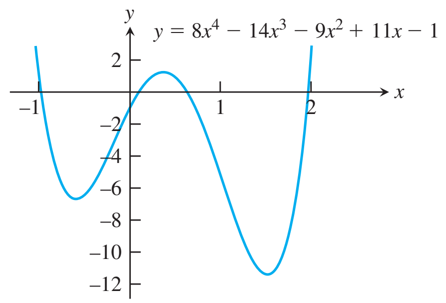


22. Las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = 3 - x^2$ se intersecan en un punto $x = r$. Utilice el método de Newton para aproximar el valor de r con cuatro cifras decimales.

23. Utilice el teorema del valor intermedio de la sección 2.5 para probar que $f(x) = x^3 + 2x - 4$ tiene una raíz entre $x = 1$ y $x = 2$. Después encuentre la raíz con cinco cifras decimales.

24. Factorización de una ecuación de cuarto grado Encuentre los valores aproximados de r_1 a r_4 en la factorización

$$8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$



25. Convergencia a distintos ceros Utilice el método de Newton para encontrar los ceros de $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ con los valores iniciales dados.

a. $x_0 = -2$ y $x_0 = -0.8$, que pertenece a $\left(-\infty, -\sqrt{2}/2\right)$

b. $x_0 = -0.5$ y $x_0 = 0.25$, que pertenece a $\left(-\sqrt{21}/7, \sqrt{21}/7\right)$

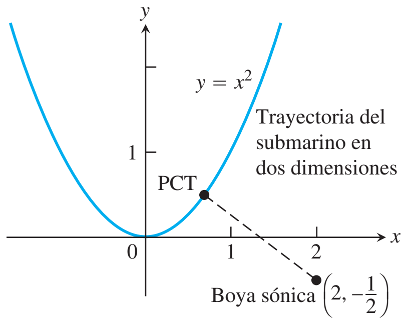
c. $x_0 = 0.8$ y $x_0 = 2$, que pertenece a $\left(\sqrt{2}/2, \infty\right)$

d. $x_0 = -\sqrt{21}/7$ y $x_0 = \sqrt{21}/7$

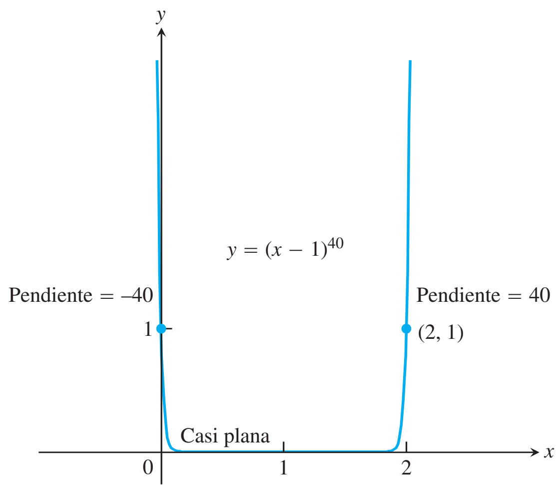
26. El problema de la boya de sonar Cuando se necesita localizar un submarino, con frecuencia es necesario encontrar el punto más cercano de la trayectoria (PCT) del submarino a una boya de sonar (un detector de sonido) en el agua. Suponga que el submarino viaja por la trayectoria de la parábola $y = x^2$ y que la boya está localizada en el punto $(2, -1/2)$.

a. Demuestre que el valor de x que minimiza la distancia entre el submarino y la boya es una solución de la ecuación $x = 1/(x^2 + 1)$.

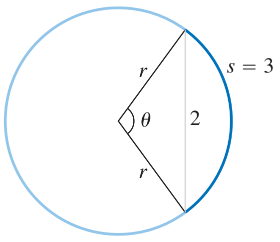
b. Resuelva la ecuación $x = 1/(x^2 + 1)$ con el método de Newton.



27. Curvas casi planas en la raíz Algunas curvas son tan planas que, en la práctica, el método de Newton se detiene demasiado lejos de la raíz para dar una estimación útil. Intente usar el método de Newton en $f(x) = (x - 1)^{40}$ con el valor inicial $x_0 = 2$ para ver qué tanto se acerca su calculadora a la raíz $x = 1$. Véase la figura a continuación.



28. La siguiente figura muestra un círculo de radio r con una cuerda de longitud 2 y un arco s de longitud 3. Utilice el método de Newton para determinar r y θ (en radianes) con cuatro cifras decimales. Suponga que $0 < \theta < \pi$.



4.7 Antiderivadas

Hemos estudiado cómo determinar la derivada de una función. Sin embargo, muchos problemas requieren que recuperemos una función a partir del conocimiento de su derivada (es decir, del conocimiento de su tasa de cambio). Por ejemplo, suponga que conocemos la función velocidad de un objeto que cae desde una altura inicial y que necesitamos conocer su altura en cualquier instante. Con mayor generalidad, queremos conocer una función F a partir de su derivada f. Si tal función F existe, se denomina una *antiderivada* de f. En el siguiente capítulo veremos que las antiderivadas son el enlace que relaciona los dos elementos principales del cálculo: las derivadas y las integrales definidas.

Determinación de antiderivadas

DEFINICIÓN Una función F es una **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

El proceso de recuperar una función $F(x)$ a partir de su derivada $f'(x)$ se denomina *antiderivación*. Utilizamos letras mayúsculas, como F, para representar una antiderivada de una función f; G representa la antiderivada de g y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 Determine una antiderivada para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 2x$ **(b)** $g(x) = \cos x$ **(c)** $h(x) = 2x + \cos x$

Solución Aquí necesitamos pensar al revés: ¿Qué función que conozcamos tiene una derivada igual a la función dada?

(a) $F(x) = x^2$ **(b)** $G(x) = \operatorname{sen} x$ **(c)** $H(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$

Cada respuesta puede verificarse mediante derivación. La derivada de $F(x) = x^2$ es $2x$. La derivada de $G(x) = \operatorname{sen} x$ es $\cos x$, y la derivada de $H(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$ es $2x + \cos x$. ■

La función $F(x) = x^2$ no es la única función cuya derivada es $2x$. La función $x^2 + 1$ tiene la misma derivada, al igual que $x^2 + C$ para cualquier constante C. ¿Existen otras?

El corolario 2 del teorema del valor medio, que aparece en la sección 4.2, da la respuesta: cualesquiera dos antiderivadas de una función difieren en una constante. Así que las funciones $x^2 + C$, donde C es una **constante arbitraria**, constituyen *todas* las antiderivadas de $f(x) = 2x$. Con mayor generalidad, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 6 Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Por lo tanto, la antiderivada más general de f en I es una *familia* de funciones $F(x) + CV$, cuyas gráficas son traslaciones verticales una de la otra. Es posible seleccionar una antiderivada particular de esta familia si se asigna un valor específico a C. A continuación se presenta un ejemplo que muestra cómo hacer tal asignación.

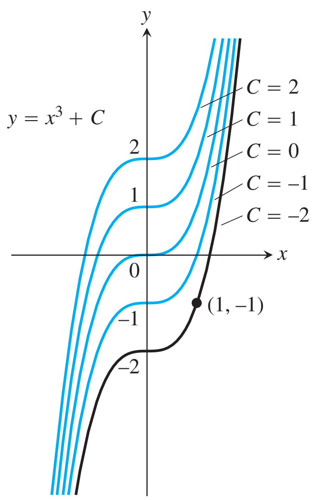


FIGURA 4.48 Las curvas $y = x^3 + C$ cubren el plano de coordenadas sin traslaparse. En el ejemplo 2 identificamos la curva $y = x^3 - 2$ como aquella que pasó por el punto dado $(1, -1)$.

EJEMPLO 2 Determine una antiderivada de $f(x) = 3x^2$ que satisfaga $F(1) = -1$.

Solución Como la derivada de x^3 es $3x^2$, la antiderivada general

$$F(x) = x^3 + C$$

proporciona todas las antiderivadas de $f(x)$. La condición $F(1) = -1$ determina un valor específico para C. Sustituir $x = 1$, en $F(x) = x^3 + C$, da

$$F(1) = (1)^3 + C = 1 + C.$$

Puesto que $F(1) = -1$, al resolver $1 + C = -1$ obtendremos $C = -2$. Por consiguiente,

$$F(x) = x^3 - 2$$

es la antiderivada que satisface $F(1) = -1$. Observe que dicha asignación para C selecciona la curva particular de la familia de curvas $y = x^3 + C$ que pasa por el punto $(1, -1)$ en el plano (figura 4.48). ■

Si trabajamos hacia atrás con base en las reglas de derivación, podemos deducir fórmulas y reglas para antiderivadas. En cada caso existe una constante arbitraria C en la expresión general que representa a todas las antiderivadas de una función dada. La tabla 4.2 da fórmulas de antiderivadas para diversas funciones importantes.

Las reglas de la tabla 4.2 se verifican con facilidad mediante derivación de la fórmula de la antiderivada general para obtener la función de su lado izquierdo. Por ejemplo, la derivada de $(\tan kx)/k + C$ es $\sec^2 kx$, para cualesquiera valores de las constantes C o $k \neq 0$, y ésta establece la fórmula 4 para la antiderivada más general de $\sec^2 kx$.

EJEMPLO 3 Determine la antiderivada general de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^5$ **(b)** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **(c)** $h(x) = \operatorname{sen} 2x$ **(d)** $i(x) = \cos \dfrac{x}{2}$

TABLA 4.2 Fórmulas para antiderivadas, k es una constante distinta de cero

	Función	Antiderivada general		Función	Antiderivada general
1.	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$	**5.**	$\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + C$
2.	$\operatorname{sen} kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + C$	**6.**	$\sec kx \tan kx$	$\frac{1}{k}\sec kx + C$
3.	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\operatorname{sen} kx + C$	**7.**	$\csc kx \cot kx$	$-\frac{1}{k}\csc kx + C$
4.	$\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + C$			

Solución En cada caso, podemos utilizar una de las fórmulas listadas en la tabla 4.2.

(a) $F(x) = \dfrac{x^6}{6} + C$ Fórmula 1 con $n = 5$

(b) $g(x) = x^{-1/2}$, así que

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$ Fórmula 1 con $n = -1/2$

(c) $H(x) = \dfrac{-\cos 2x}{2} + C$ Fórmula 2 con $k = 2$

(d) $I(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x/2)}{1/2} + C = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + C$ Fórmula 3 con $k = 1/2$ ■

Otras reglas de derivadas también pueden llevar a reglas correspondientes de antiderivadas. Es posible sumar y restar antiderivadas, así como multiplicarlas por constantes.

TABLA 4.3 Reglas de linealidad para antiderivadas

		Función	Antiderivada general
1.	*Regla del múltiplo constante*:	$kf(x)$	$kF(x) + C$, k una constante
2.	*Regla del negativo*:	$-f(x)$	$-F(x) + C$
3.	*Regla de la suma o diferencia*:	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Las fórmulas de la tabla 4.3 se demuestran fácilmente mediante la derivación de las antiderivadas y verificando que el resultado coincida con la función original. La fórmula 2 es el caso especial $k = -1$ de la fórmula 1.

EJEMPLO 4 Determine la antiderivada general de

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} 2x.$$

Solución Tenemos que $f(x) = 3g(x) + h(x)$ para las funciones g y h en el ejemplo 3. Como $G(x) = 2\sqrt{x}$ es una antiderivada de $g(x)$ en el ejemplo 3b, de la regla del múltiplo constante para antiderivadas se sigue que $3G(x) = 3 \cdot 2\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$ es una antiderivada de $3g(x) = 3/\sqrt{x}$. Asimismo, a partir del ejemplo 3c, sabemos que $H(x) = (-1/2) \cos 2x$ es una antiderivada de $h(x) = \operatorname{sen} 2x$. De esta forma, con base en la regla de la suma para antiderivadas, obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + C \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + C \end{aligned}$$

es la fórmula para la antiderivada general de $f(x)$, donde C es una constante arbitraria. ■

Problemas de valor inicial y ecuaciones diferenciales

Las antiderivadas desempeñan varios papeles importantes en matemáticas y sus aplicaciones. Los métodos y las técnicas para determinarlas son una parte importante del cálculo, por lo que retomaremos su estudio en el capítulo 8. La determinación de una antiderivada para una función $f(x)$ es el mismo problema que encontrar una función $y(x)$ que satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Ésta se denomina **ecuación diferencial**, ya que es una ecuación que implica una función desconocida y que se está derivando. Para resolverla, necesitamos una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación. Tal función se encuentra al tomar la antiderivada de $f(x)$. Establecemos la constante arbitraria que surge en el proceso de antiderivación al especificar una condición inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Esta condición significa que la función $y(x)$ tiene el valor y_0 cuando $x = x_0$. La combinación de una ecuación diferencial y una condición inicial se denomina **problema de valor inicial**. Tales problemas desempeñan papeles importantes en todas las ramas de la ciencia.

La antiderivada más general $F(x) + C$ (como $x^3 + C$ en el ejemplo 2) de la función $f(x)$ da la **solución general** $y = F(x) + C$ de la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$. La solución general da *todas* las soluciones de la ecuación (existe una infinidad de ellas, una para cada valor de C). **Resolvemos** la ecuación diferencial al determinar su solución general. Luego resolvemos el problema con valor inicial si determinamos la **solución particular** que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. En el ejemplo 2, la función $y = x^3 - 2$ es la solución particular de la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2$ que satisface la condición inicial $y(1) = -1$.

Antiderivadas y movimiento

Hemos visto que la derivada de la función de posición de un objeto da su velocidad, y que la derivada de su función velocidad da su aceleración. Si conocemos la aceleración de un objeto, entonces, al determinar una antiderivada podemos recuperar la velocidad, y de una antiderivada de la velocidad es posible recuperar su función de posición. Utilizamos este procedimiento como una aplicación del corolario 2 en la sección 4.2. Ahora que tenemos una terminología y un marco teórico en términos de antiderivadas, volveremos a analizar el problema desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 5 Un globo de aire caliente que asciende a una velocidad de 12 ft/seg está a una altura de 80 ft por encima del suelo cuando se suelta un paquete. ¿Cuánto tarda el paquete en llegar al suelo?

Solución Denotemos con $v(t)$ la velocidad del paquete en el instante t y con $s(t)$ su altura con respecto al suelo. La aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie terrestre es de 32 ft/seg^2. Suponiendo que no hay otras fuerzas que actúen sobre el paquete que se soltó, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = -32.$$

Negativo, porque la gravedad actúa en la dirección que disminuye s.

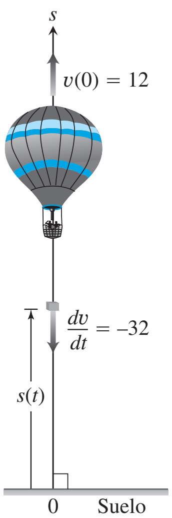


FIGURA 4.49 Un paquete soltado desde un globo caliente que se eleva (ejemplo 5).

Lo anterior conduce al siguiente problema de valor inicial (figura 4.49):

$$\textit{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dv}{dt} = -32$$
$$\textit{Condición inicial:} \quad v(0) = 12 \qquad \text{El globo inicialmente en ascenso}$$

Éste es nuestro modelo matemático para el movimiento del paquete. Resolvemos el problema de valor inicial para obtener la velocidad del paquete.

1. *Resuelva la ecuación diferencial*: La fórmula general para una antiderivada de -32 es

$$v = -32t + C.$$

Al encontrar la solución general de la ecuación diferencial, utilizamos la condición inicial para determinar la solución particular que resuelve nuestro problema.

2. *Evalúe C*:

$$12 = -32(0) + C \qquad \text{Condición inicial } v(0) = 12$$
$$C = 12.$$

La solución del problema con valor inicial es

$$v = -32t + 12.$$

Como la velocidad es la derivada de la altura, y la altura del paquete es 80 ft en el instante $t = 0$ cuando se suelta, ahora tenemos un segundo problema con valor inicial.

$$\textit{Ecuación diferencial:} \quad \frac{ds}{dt} = -32t + 12 \qquad \text{Establecemos } v = ds/dt \text{ en la ecuación anterior}$$
$$\textit{Condición inicial:} \quad s(0) = 80$$

Resolvemos este problema con valor inicial para determinar la altura como una función de t.

1. *Resuelva la ecuación diferencial*: Al determinar la antiderivada general de $-32t + 12$, se obtiene

$$s = -16t^2 + 12t + C.$$

2. *Evalúe C*:

$$80 = -16(0)^2 + 12(0) + C \qquad \text{Condición inicial } s(0) = 80$$
$$C = 80.$$

La altura del paquete con respecto al suelo en el instante t es

$$s = -16t^2 + 12t + 80.$$

Utilice la solución: Para determinar cuánto tarda el paquete en llegar al suelo, igualamos s a cero y despejamos t:

$$-16t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$-4t^2 + 3t + 20 = 0$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{329}}{-8} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$
$$t \approx -1.89, \qquad t \approx 2.64.$$

El paquete golpea el suelo alrededor de 2.64 segundos después de que se suelta desde el globo. (La raíz negativa no tiene significado físico). ■

Integrales indefinidas

Un símbolo especial se utiliza para denotar la colección de todas las antiderivadas de una función f.

DEFINICIÓN La colección de todas las antiderivadas de f se denomina la **integral indefinida** de f con respecto a x, la cual se denota mediante

$$\int f(x)\,dx.$$

El símbolo $\int$ es un **signo de integral**. La función f es el **integrando** de la integral, y x es la **variable de integración**.

En la notación que acabamos de definir, después del signo de integral, la función integrando siempre va seguida por una diferencial para indicar la variable de integración. En el capítulo 5 tendremos más que decir acerca de por qué esto es importante. Si usamos esta notación, restableceremos las soluciones del ejemplo 1, como sigue:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \operatorname{sen} x + C.$$

Esta notación se relaciona con la aplicación principal de antiderivadas, la cual se analizará en el capítulo 5. Las antiderivadas desempeñan un papel importante en el cálculo de límites de ciertas sumas infinitas, una regla inesperada y extraordinariamente útil que se describe en un resultado central del capítulo 5, denominada teorema fundamental del cálculo.

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx.$$

Solución Si no reconocemos la antiderivada en seguida, es posible generarla término a término con las reglas de la suma, de la diferencia y del múltiplo constante:

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{antiderivada}} + \underbrace{C}_{\text{constante arbitraria}}.$$

Si no reconocemos la antiderivada en seguida, es posible generarla término a término con las reglas de la suma, de la diferencia y del múltiplo constante:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx \\
&= \int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 5\int 1\,dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 5(x + C_3) \\
&= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 - 2C_2 + 5x + 5C_3.
\end{aligned}$$

Esta fórmula es más complicada de lo que debería. Si combinamos C_1, $-2C_2$ y $5C_3$ en una sola constante arbitraria $C = C_1 - 2C_2 + 5C_3$, la fórmula se simplifica a

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

y todavía da *todas* las posibles antiderivadas. Por esta razón, recomendamos que vaya directamente a la forma final, aunque elija integrar término a término. Escriba

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,dx &= \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx\\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.\end{aligned}$$

Determine la antiderivada más sencilla que pueda para cada parte y sume al final la constante arbitraria de integración.

Ejercicios 4.7

Determinación de antiderivadas

En los ejercicios 1 a 16, determine una antiderivada para cada función. Realice todo cuanto pueda mentalmente. Verifique sus respuestas mediante diferenciación.

1. **a.** $2x$ **b.** x^2 **c.** $x^2 - 2x + 1$
2. **a.** $6x$ **b.** x^7 **c.** $x^7 - 6x + 8$
3. **a.** $-3x^{-4}$ **b.** x^{-4} **c.** $x^{-4} + 2x + 3$
4. **a.** $2x^{-3}$ **b.** $\dfrac{x^{-3}}{2} + x^2$ **c.** $-x^{-3} + x - 1$
5. **a.** $\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $\dfrac{5}{x^2}$ **c.** $2 - \dfrac{5}{x^2}$
6. **a.** $-\dfrac{2}{x^3}$ **b.** $\dfrac{1}{2x^3}$ **c.** $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$
7. **a.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ **b.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **c.** $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
8. **a.** $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ **b.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ **c.** $\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
9. **a.** $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ **b.** $\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$ **c.** $-\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$
10. **a.** $\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ **b.** $-\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$ **c.** $-\dfrac{3}{2}x^{-5/2}$
11. **a.** $-\pi \operatorname{sen} \pi x$ **b.** $3 \operatorname{sen} x$ **c.** $\operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 3x$
12. **a.** $\pi \cos \pi x$ **b.** $\dfrac{\pi}{2} \cos \dfrac{\pi x}{2}$ **c.** $\cos \dfrac{\pi x}{2} + \pi \cos x$
13. **a.** $\sec^2 x$ **b.** $\dfrac{2}{3}\sec^2 \dfrac{x}{3}$ **c.** $-\sec^2 \dfrac{3x}{2}$
14. **a.** $\csc^2 x$ **b.** $-\dfrac{3}{2}\csc^2 \dfrac{3x}{2}$ **c.** $1 - 8\csc^2 2x$
15. **a.** $\csc x \cot x$ **b.** $-\csc 5x \cot 5x$ **c.** $-\pi \csc \dfrac{\pi x}{2} \cot \dfrac{\pi x}{2}$
16. **a.** $\sec x \tan x$ **b.** $4 \sec 3x \tan 3x$ **c.** $\sec \dfrac{\pi x}{2} \tan \dfrac{\pi x}{2}$

Determinación de integrales indefinidas

En los ejercicios 17 a 54, determine la antiderivada más general o la integral indefinida. Compruebe sus respuestas mediante diferenciación.

17. $\displaystyle\int (x + 1)\,dx$
18. $\displaystyle\int (5 - 6x)\,dx$
19. $\displaystyle\int \left(3t^2 + \frac{t}{2}\right) dt$
20. $\displaystyle\int \left(\frac{t^2}{2} + 4t^3\right) dt$
21. $\displaystyle\int (2x^3 - 5x + 7)\,dx$
22. $\displaystyle\int (1 - x^2 - 3x^5)\,dx$
23. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$
24. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x\right) dx$
25. $\displaystyle\int x^{-1/3}\,dx$
26. $\displaystyle\int x^{-5/4}\,dx$
27. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$
28. $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$
29. $\displaystyle\int \left(8y - \frac{2}{y^{1/4}}\right) dy$
30. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}}\right) dy$
31. $\displaystyle\int 2x(1 - x^{-3})\,dx$
32. $\displaystyle\int x^{-3}(x + 1)\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\,dt$
34. $\displaystyle\int \frac{4 + \sqrt{t}}{t^3}\,dt$
35. $\displaystyle\int (-2 \cos t)\,dt$
36. $\displaystyle\int (-5 \operatorname{sen} t)\,dt$
37. $\displaystyle\int 7 \operatorname{sen} \frac{\theta}{3}\,d\theta$
38. $\displaystyle\int 3 \cos 5\theta\,d\theta$
39. $\displaystyle\int (-3 \csc^2 x)\,dx$
40. $\displaystyle\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) dx$
41. $\displaystyle\int \frac{\csc \theta \cot \theta}{2}\,d\theta$
42. $\displaystyle\int \frac{2}{5} \sec \theta \tan \theta\,d\theta$

43. $\int (4\sec x \tan x - 2\sec^2 x)\, dx$

44. $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\, dx$

45. $\int (\operatorname{sen} 2x - \csc^2 x)\, dx$

46. $\int (2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 3x)\, dx$

47. $\int \frac{1 + \cos 4t}{2}\, dt$

48. $\int \frac{1 - \cos 6t}{2}\, dt$

49. $\int (1 + \tan^2 \theta)\, d\theta$

50. $\int (2 + \tan^2 \theta)\, d\theta$

(*Sugerencia:* $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$)

51. $\int \cot^2 x\, dx$

52. $\int (1 - \cot^2 x)\, dx$

(*Sugerencia:* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$)

53. $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\, d\theta$

54. $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

Verificación de fórmulas de antiderivadas

Mediante derivación, verifique las fórmulas de los ejercicios 55 a 60.

55. $\int (7x-2)^3\, dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

56. $\int (3x+5)^{-2}\, dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

57. $\int \sec^2(5x-1)\, dx = \frac{1}{5}\tan(5x-1) + C$

58. $\int \csc^2\left(\frac{x-1}{3}\right) dx = -3\cot\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

59. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = -\frac{1}{x+1} + C$

60. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \frac{x}{x+1} + C$

61. Indique si cada fórmula es correcta o incorrecta y dé una breve justificación para cada respuesta.

a. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} x + C$

b. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + C$

c. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

62. Indique si cada fórmula es correcta o incorrecta y dé una breve justificación para cada respuesta.

a. $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$

b. $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta + C$

c. $\int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta + C$

63. Indique si cada fórmula es correcta o incorrecta y dé una breve justificación para cada respuesta.

a. $\int (2x+1)^2\, dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$

b. $\int 3(2x+1)^2\, dx = (2x+1)^3 + C$

c. $\int 6(2x+1)^2\, dx = (2x+1)^3 + C$

64. Indique si cada fórmula es correcta o incorrecta y dé una breve justificación para cada respuesta.

a. $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \sqrt{x^2 + x + C}$

b. $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \sqrt{x^2 + x} + C$

c. $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + C$

65. ¿Correcto o incorrecto? Explique brevemente la razón.

$$\int \frac{-15(x+3)^2}{(x-2)^4}\, dx = \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^3 + C$$

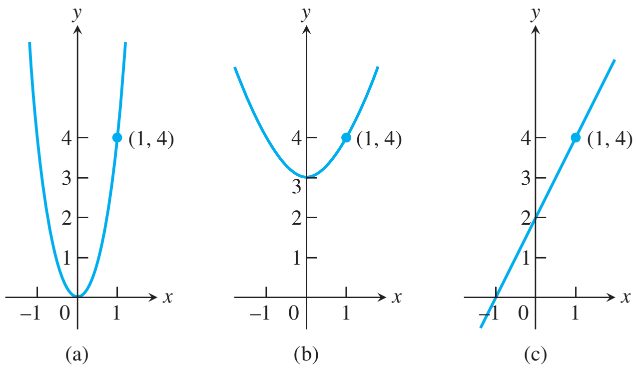
66. ¿Correcto o incorrecto? Explique brevemente la razón.

$$\int \frac{x\cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\, dx = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} + C$$

Problemas de valor inicial

67. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema de valor inicial

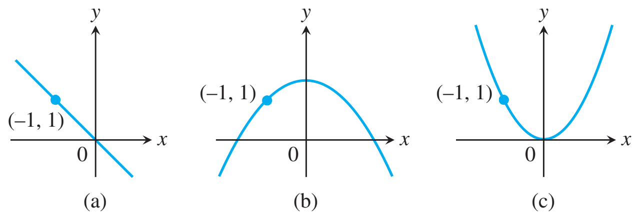
$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad y = 4 \text{ cuando } x = 1\,?$$



Justifique su respuesta.

68. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad y = 1 \text{ cuando } x = -1\,?$$



Justifique su respuesta.

Resuelva los problemas de valor inicial en los ejercicios 69 a 88.

69. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

70. $\dfrac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

71. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x, \quad x > 0; \quad y(2) = 1$

72. $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

73. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

74. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

75. $\dfrac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

76. $\dfrac{ds}{dt} = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(\pi) = 1$

77. $\dfrac{dr}{d\theta} = -\pi \operatorname{sen} \pi\theta, \quad r(0) = 0$

78. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

79. $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

80. $\dfrac{dv}{dt} = 8t + \csc^2 t, \quad v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -7$

81. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x; \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = 1$

82. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

83. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}; \quad \left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1, \quad r(1) = 1$

84. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{3t}{8}; \quad \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3, \quad s(4) = 4$

85. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad y''(0) = -8, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 5$

86. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = 0; \quad \theta''(0) = -2, \quad \theta'(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \theta(0) = \sqrt{2}$

87. $y^{(4)} = -\operatorname{sen} t + \cos t;$
$y'''(0) = 7, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 0$

88. $y^{(4)} = -\cos x + 8 \operatorname{sen} 2x;$
$y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = 1, \quad y(0) = 3$

89. Determine la curva $y = f(x)$ en el plano xy que pasa por el punto $(9, 4)$, cuya pendiente en cada punto es $3\sqrt{x}$.

90. Unicidad de soluciones Si dos funciones derivables $y = F(x)$ y $y = G(x)$ resuelven el problema de valor inicial

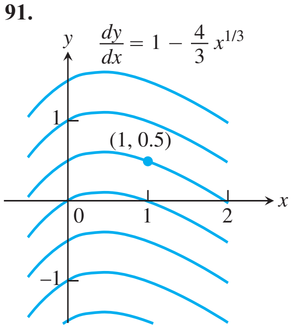
$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

en un intervalo I, ¿se debe cumplir que $F(x) = G(x)$ para toda x en I? Justifique su respuesta.

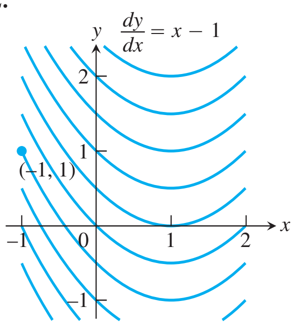
Curvas solución (integrales)

Los ejercicios 91 a 94 muestran curvas solución de ecuaciones diferenciales. En cada ejercicio determine una ecuación para la curva que pasa por el punto marcado.

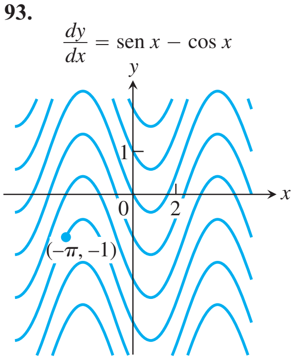
91.



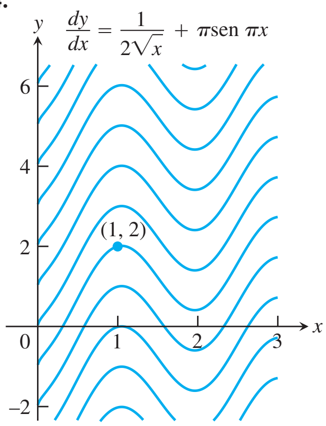
92.



93.



94.



Aplicaciones

95. Determinación del desplazamiento a partir de una antiderivada de la velocidad

a. Suponga que la velocidad de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje s es

$$\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3.$$

i) Determine el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = 5$ cuando $t = 0$.

ii) Determine el desplazamiento del cuerpo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = -2$ cuando $t = 0$.

iii) Ahora determine el desplazamiento del cuerpo de $t = 1$ a $t = 3$, dado que $s = s_0$ cuando $t = 0$.

b. Suponga que la posición s del cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada es una función derivable del tiempo t. ¿Es cierto que una vez que se conoce una antiderivada de la función velocidad ds/dt es posible encontrar el desplazamiento del cuerpo de $t = a$ a $t = b$, aun si no se conoce la posición exacta del cuerpo en ninguno de esos tiempos? Justifique su respuesta.

96. Despegue desde la Tierra Un cohete despega desde la superficie terrestre con una aceleración constante de 20 m/seg^2. ¿Qué tan rápido irá el cohete 1 minuto después?

97. Frenado oportuno de un automóvil Usted conduce su automóvil a 60 mph (88 ft/seg) constantes por una carretera, cuando ve un accidente más adelante y frena de golpe. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener su automóvil en 242 ft? Para averiguarlo, siga los siguientes pasos.

1. Resuelva el problema de valor inicial

$$\textit{Ecuación diferencial}: \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -k \qquad (k \text{ constante})$$

$$\textit{Condiciones iniciales}: \quad \frac{ds}{dt} = 88 \text{ y } s = 0 \text{ cuando } t = 0.$$

La medición del tiempo y de la distancia es a partir de que se aplicaron los frenos.

2. Encuentre los valores de t que hacen $ds/dt = 0$. (La respuesta incluirá a k).
3. Encuentre el valor de k que hace $s = 242$ para el valor de t que encontró en el paso 2.

98. Frenado de una motocicleta El programa “Motociclista seguro” del estado de Illinois exige a los motociclistas que sean capaces de frenar de 30 mph (44 ft/seg) a 0 en 45 ft. ¿Qué desaceleración constante se requiere para lograrlo?

99. Desplazamiento a lo largo de una recta coordenada Una partícula se desplaza sobre una recta coordenada con aceleración $a = d^2s/dt^2 = 15\sqrt{t} - \left(3/\sqrt{t}\right)$, sujeta a las condiciones $ds/dt = 4$ y $s = 0$ cuando $t = 1$. Determine

a. la velocidad $v = ds/dt$ en términos de t.

b. la posición s en términos de t.

T **100. El martillo y la pluma** Cuando el astronauta del *Apolo 15* David Scott dejó caer un martillo y una pluma en la Luna para demostrar que en el vacío todos los cuerpos caen con la misma aceleración (constante), lo hizo desde una altura aproximada de 4 ft con respecto al nivel del suelo. La grabación del hecho que se exhibió por televisión muestra que el martillo y la pluma caen más despacio que en la Tierra, donde tales objetos tardarían sólo medio segundo en caer los 4 ft en el vacío. ¿Cuánto tiempo tardaron en caer el martillo y la pluma la distancia de 4 ft en la Luna? Para averiguarlo, resuelva el siguiente problema de valor inicial para s como una función de t. Después encuentre el valor de t que hace a s igual a 0.

$$\textit{Ecuación diferencial}: \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -5.2 \text{ ft/seg}^2$$

$$\textit{Condiciones iniciales}: \quad \frac{ds}{dt} = 0 \text{ y } s = 4 \text{ cuando } t = 0$$

101. Movimiento con aceleración constante La ecuación estándar para la posición s de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada con aceleración constante a es

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0, \tag{1}$$

donde v_0 y s_0 son la velocidad y la posición del cuerpo en el tiempo $t = 0$. Deduzca esta ecuación; para ello, resuelva el problema de valor inicial.

$$\textit{Ecuación diferencial}: \quad \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

$$\textit{Condiciones iniciales}: \quad \frac{ds}{dt} = v_0 \text{ y } s = s_0 \text{ cuando } t = 0.$$

102. Caída libre cerca de la superficie de un planeta En el caso de una caída libre cerca de la superficie de un planeta, donde la aceleración debida a la gravedad tiene una magnitud constante de g unidades de longitud/seg^2, la ecuación (1) del ejercicio 101 toma la forma

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0, \tag{2}$$

donde s es la altura del cuerpo por encima de la superficie. La ecuación tiene un signo menos porque la aceleración actúa hacia abajo, en la dirección en que s disminuye. La velocidad v_0 es positiva si el objeto se eleva en el tiempo $t = 0$, y negativa si el objeto cae.

En vez de usar el resultado del ejercicio 101, puede obtener la ecuación (2) directamente si resuelve un problema de valor inicial apropiado. ¿Cuál sería ese problema? Resuélvalo para asegurarse de que todo es correcto y explique los pasos que realiza para encontrar la solución.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Utilice un SAC para resolver los problemas iniciales en los ejercicios 103 a 106. Grafique las curvas de la solución.

103. $y' = \cos^2 x + \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 1$

104. $y' = \dfrac{1}{x} + x, \quad y(1) = -1$

105. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad y(0) = 2$

106. $y'' = \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$

Capítulo 4 Preguntas de repaso

1. ¿Qué se puede decir acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado?
2. ¿Qué significa que una función tenga un valor extremo local en su dominio? ¿Qué quiere decir que tenga un valor extremo absoluto? ¿Cómo se relacionan los valores extremos locales y absolutos, si es que existe tal relación? Dé ejemplos.
3. ¿Cómo se encuentran los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado? Dé ejemplos.
4. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema de Rolle? ¿Todas las hipótesis son realmente necesarias? Explique.
5. ¿Cuáles son las hipótesis y las conclusiones del teorema del valor medio? ¿Qué interpretaciones físicas puede tener dicho teorema?
6. Formule los tres corolarios del teorema del valor medio.
7. En ocasiones, ¿cómo es posible identificar una función $f(x)$ si se conoce f' y el valor de f en un punto $x = x_0$? Dé ejemplos.
8. ¿Cuál es el criterio (prueba) de la primera derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.
9. ¿Cómo se puede examinar una función dos veces derivable para determinar el punto donde su gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Dé ejemplos.
10. ¿Qué es un punto de inflexión? Dé un ejemplo. ¿Qué significado físico pueden tener los puntos de inflexión?
11. ¿Cuál es el criterio (prueba) de la segunda derivada para valores extremos locales? Dé ejemplos de su aplicación.

12. ¿Qué nos dice la derivada de una función acerca de la forma de su gráfica?
13. Elabore una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función polinomial. Ilustre con un ejemplo.
14. En una gráfica, ¿qué es una cúspide o esquina? Dé ejemplos.
15. Elabore una lista de los pasos que deben seguirse para graficar una función racional. Ilustre con un ejemplo.
16. Describa una estrategia general para resolver problemas de máximos y mínimos. Dé ejemplos.
17. Describa el método de Newton para resolver ecuaciones. Dé un ejemplo. ¿Cuál es la teoría que respalda el método? ¿En qué debe tenerse cuidado al usar este método?
18. ¿Una función puede tener más de una antiderivada? De ser así, ¿cómo se relacionan las antiderivadas? Explique.
19. ¿Qué es una integral indefinida? ¿Cómo se puede evaluar? ¿Qué fórmulas generales conoce para encontrar las integrales indefinidas?
20. Algunas veces, ¿cómo puede resolverse una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x)$?
21. ¿Qué es un problema de valor inicial? ¿Cómo se resuelve? Dé un ejemplo.
22. Si conoce la aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta coordenada como una función del tiempo, ¿qué más se necesita saber para determinar la función de posición del cuerpo? Dé un ejemplo.

Capítulo 4 Ejercicios de práctica

Valores extremos

1. ¿$f(x) = x^3 + 2x + \tan x$ tiene algún valor máximo o mínimo local? Justifique su respuesta.
2. ¿$g(x) = \csc x + 2 \cot x$ tiene algún valor máximo local? Justifique su respuesta.
3. ¿$f(x) = (7 + x)(11 - 3x)^{1/3}$ tiene algún valor mínimo absoluto? ¿Tiene un máximo absoluto? De ser así, encuéntrelos o explique por qué no existen. Elabore una lista de todos los puntos críticos de f.
4. Encuentre los valores de a y b que hacen que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 - 1}$$

tenga un valor extremo local de 1 en $x = 3$. ¿El valor extremo es un máximo local o un mínimo local? Justifique su respuesta.

5. La función mayor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$, definida para todo valor de x, alcanza un valor máximo local de 0 en cada punto de $[0, 1)$. ¿Alguno de estos valores máximos locales puede ser también valor mínimo local de f? Justifique su respuesta.
6. **a.** Dé un ejemplo de una función derivable f cuya primera derivada sea cero en algún punto c, a pesar de que f no tenga ni máximo ni mínimo local en c.

   b. ¿Por qué esto es congruente con el teorema 2 de la sección 4.1? Justifique su respuesta.
7. La función $y = 1/x$ no alcanza un máximo ni mínimo en el intervalo $0 < x < 1$, a pesar de que la función es continua en ese intervalo. ¿Contradice esto el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?
8. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $y = |x|$ en el intervalo $-1 \le x < 1$? Observe que el intervalo no es cerrado. ¿Contradice esto el teorema del valor extremo para funciones continuas? ¿Por qué?

T 9. Una gráfica lo suficientemente grande para mostrar el comportamiento global de una función podría no revelar características locales importantes. La gráfica de $f(x) = (x^8/8) - (x^6/2) - x^5 + 5x^3$ es un ejemplo de tal situación.

   a. Grafique f en el intervalo $-2.5 \le x \le 2.5$. ¿Dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

   b. Ahora factorice $f'(x)$ y demuestre que f tiene un máximo local en $x = \sqrt[3]{5} \approx 1.70998$ y mínimos locales en $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73205$.

   c. Haga un acercamiento a la gráfica para encontrar una ventana que muestre la presencia de valores extremos en $x = \sqrt[3]{5}$ y $x = \sqrt{3}$.

   Aquí, la moraleja es que, sin cálculo, la existencia de dos de los tres valores extremos podría haber pasado inadvertida. En cualquier gráfica normal de la función, los valores estarán suficientemente juntos para caer en las dimensiones de un solo pixel de la pantalla.

   (*Fuente: Uses of Technology in the Mathematics Curriculum*, y Jerry Johnson, Oklahoma State University, publicado en 1990 bajo el auspicio de National Science Foundation Grant USE-8950044).

T 10. (*Continuación del ejercicio 9.*)

   a. Grafique $f(x) = (x^8/8) - (2/5)x^5 - 5x - (5/x^2) + 11$ en el intervalo $-2 \le x \le 2$. ¿Dónde parece que la gráfica tiene valores extremos locales o puntos de inflexión?

   b. Pruebe que f tiene un valor máximo local en $x = \sqrt[7]{5} \approx 1.2585$ y un valor mínimo local en $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.2599$.

   c. Haga un acercamiento en la gráfica para encontrar una ventana que muestre la presencia de valores extremos en $x = \sqrt[7]{5}$ y $x = \sqrt[3]{2}$.

Teorema del valor medio

11. **a.** Demuestre que $g(t) = \operatorname{sen}^2 t - 3t$ decrece en todo intervalo de su dominio.

    b. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\operatorname{sen}^2 t - 3t = 5$? Justifique su respuesta.
12. **a.** Pruebe que $y = \tan \theta$ aumenta en todo intervalo de su dominio.

    b. Si la conclusión a que llegó en el inciso (a) realmente es correcta, ¿cómo explica el hecho de que $\tan \pi = 0$ es menor que $\tan(\pi/4)) = 1$?
13. **a.** Demuestre que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ tiene exactamente una solución en $[0, 1]$.

    T **b.** Encuentre la solución con tantos lugares decimales como sea posible.
14. **a.** Demuestre que $f(x) = x/(x + 1)$ se incrementa en todo el intervalo de su dominio.

    b. Pruebe que $f(x) = x^3 + 2x$ no tiene valores máximo ni mínimo locales.

15. Agua en un depósito Como resultado de una lluvia intensa, el volumen de agua de un depósito aumentó 1400 acres-ft en 24 horas. Pruebe que en algún instante durante ese periodo el volumen del depósito aumentaba a una razón mayor de 225,000 galones/min. (Un acre-ft equivale a 43,560 ft^3, el volumen que cubriría 1 acre con profundidad de 1 ft. Un ft^3 es igual a 7.48 galones).

16. La fórmula $F(x) = 3x + C$ da una función distinta para cada valor de C. Sin embargo, todas estas funciones tienen la misma derivada respecto de x; a saber, $F'(x) = 3$. ¿Éstas son las únicas funciones diferenciables cuya derivada es 3? ¿Podría haber otras? Justifique sus respuestas.

17. Pruebe que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

a pesar de que

$$\frac{x}{x+1} \neq -\frac{1}{x+1}.$$

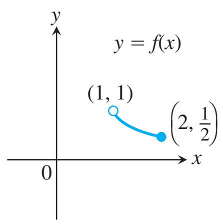
¿Contradice esto el corolario 2 del teorema del valor medio? Justifique su respuesta.

18. Calcule las primeras derivadas de $f(x) = x^2/(x^2+1)$ y $g(x) = -1/(x^2+1)$. ¿Qué puede concluir acerca de las gráficas de estas funciones?

Análisis de gráficas

En los ejercicios 19 y 20, utilice la gráfica para responder las preguntas.

19. Identifique cualesquiera valores extremos globales de f y los valores de x donde se alcanzan.

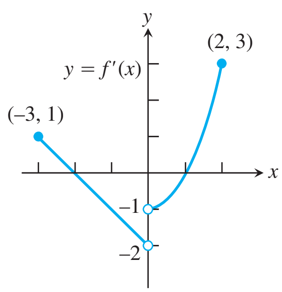


20. Estime los intervalos en los que la función $y = f(x)$ es

a. creciente.

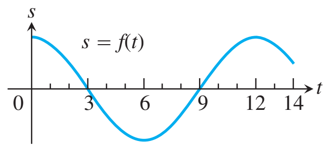
b. decreciente.

c. Utilice la gráfica dada de f' para indicar dónde se alcanzan los valores extremos locales de la función e indique si cada extremo es un máximo o un mínimo relativo.

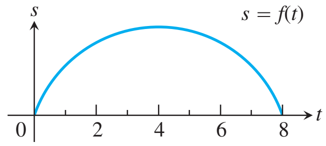


Cada una de las gráficas de los ejercicios 21 y 22 es la gráfica de la función posición $s = f(t)$ de un cuerpo en movimiento sobre una recta coordenada (t representa el tiempo). Aproximadamente en qué momentos, si los hay, **(a)** ¿la velocidad del cuerpo es igual a cero? **(b)** ¿la aceleración del cuerpo es igual a cero? ¿Durante qué intervalos el cuerpo se desplaza **(c)** hacia delante? **(d)** ¿hacia atrás?

21.



22.



Gráficas y graficación

Grafique las curvas en los ejercicios 23 a 32.

23. $y = x^2 - (x^3/6)$

24. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

25. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

26. $y = (1/8)(x^3 + 3x^2 - 9x - 27)$

27. $y = x^3(8 - x)$

28. $y = x^2(2x^2 - 9)$

29. $y = x - 3x^{2/3}$

30. $y = x^{1/3}(x - 4)$

31. $y = x\sqrt{3 - x}$

32. $y = x\sqrt{4 - x^2}$

Los ejercicios 33 a 38 dan, cada uno, la primera derivada de una función $y = f(x)$. **(a)** ¿En qué puntos, si los hay, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión? **(b)** Elabore un bosquejo de la forma general de la gráfica.

33. $y' = 16 - x^2$

34. $y' = x^2 - x - 6$

35. $y' = 6x(x + 1)(x - 2)$

36. $y' = x^2(6 - 4x)$

37. $y' = x^4 - 2x^2$

38. $y' = 4x^2 - x^4$

En los ejercicios 39 a 42 grafique cada función. Luego utilice la primera derivada de la función para explicar lo que observa.

39. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{1/3}$

40. $y = x^{2/3} + (x - 1)^{2/3}$

41. $y = x^{1/3} + (x - 1)^{1/3}$

42. $y = x^{2/3} - (x - 1)^{1/3}$

Elabore un bosquejo de las gráficas de las funciones racionales de los ejercicios 43 a 50.

43. $y = \dfrac{x+1}{x-3}$

44. $y = \dfrac{2x}{x+5}$

45. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

46. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x}$

47. $y = \dfrac{x^3+2}{2x}$

48. $y = \dfrac{x^4-1}{x^2}$

49. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

50. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

Optimización

51. La suma de dos números no negativos es 36. Encuentre los números si

a. la diferencia de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

b. la suma de sus raíces cuadradas debe ser lo más grande posible.

52. La suma de dos números no negativos es 20. Encuentre los números

a. si el producto de uno de ellos multiplicado por la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

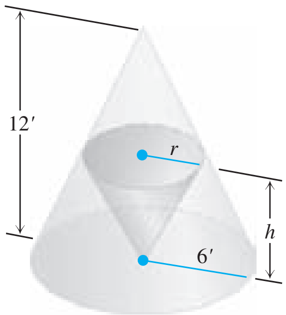
b. si la suma de uno de ellos más la raíz cuadrada del otro debe ser lo más grande posible.

53. Un triángulo isósceles tiene su vértice en el origen y su base paralela al eje x con los vértices por arriba del eje en la curva $y = 27 - x^2$. Encuentre el área máxima que puede tener el triángulo.

54. Un cliente le pide que diseñe un recipiente rectangular abierto de acero. Éste debe tener base cuadrada y un volumen de 32 ft^3; además, debe construirse con una placa de un cuarto de pulgada y no tiene que pesar más de lo necesario. ¿Qué dimensiones recomienda?

55. Determine la altura y el radio del cilindro circular recto más grande que se pueda colocar dentro de una esfera de radio $\sqrt{3}$.

56. La siguiente figura muestra dos conos circulares rectos, uno boca abajo dentro del otro. Las dos bases son paralelas y el vértice del cono menor está en el centro de la base del cono mayor. ¿Qué valores de r y h darán al cono menor el mayor volumen posible?



57. Fabricación de neumáticos Su compañía puede fabricar x cientos de neumáticos de calidad A y y cientos de neumáticos de calidad B al día, donde $0 \le x \le 4$ y

$$y = \frac{40 - 10x}{5 - x}.$$

Su utilidad por la venta de los neumáticos de calidad A es dos veces la que obtiene por la venta de neumáticos de calidad B. ¿Cuáles son las cantidades de cada uno que maximizan la ganancia?

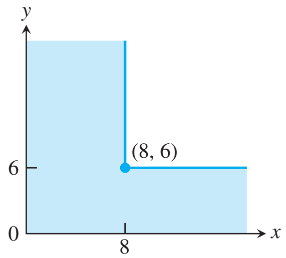
58. Movimiento de una partícula Las posiciones de dos partículas en el eje s son $s_1 = \cos t$ y $s_2 = \cos(t + \pi/4)$.

a. ¿Cuál es la mayor distancia que puede haber entre las partículas?

b. ¿Cuándo chocan las dos partículas?

T **59. Caja abierta** Una caja abierta rectangular se construye con una pieza de cartón de 10 por 16 in, cortando cuadrados con la misma longitud de lado de las esquinas y doblando los lados laterales hacia arriba. Encuentre analíticamente las dimensiones de la caja del mayor volumen y el volumen máximo. Justifique sus respuestas gráficamente.

60. El problema de la escalera ¿Cuál es la longitud (en ft) aproximada de la escalera más larga que se puede transportar horizontalmente alrededor de la esquina del corredor que se ilustra aquí? Redondee su respuesta hacia abajo al ft más cercano.



Método de Newton

61. Sea $f(x) = 3x - x^3$. Demuestre que la ecuación $f(x) = -4$ tiene una solución en el intervalo $[2, 3]$ y utilice el método de Newton para encontrarla.

62. Sea $f(x) = x^4 - x^3$. Pruebe que la ecuación $f(x) = 75$ tiene una solución en el intervalo $[3, 4]$ y use el método de Newton para encontrarla.

Determinación de integrales indefinidas

En los ejercicios 63 a 78, encuentre las integrales indefinidas (las antiderivadas más generales).

63. $\int (x^3 + 5x - 7)\, dx$

64. $\int \left(8t^3 - \frac{t^2}{2} + t\right) dt$

65. $\int \left(3\sqrt{t} + \frac{4}{t^2}\right) dt$

66. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{3}{t^4}\right) dt$

67. $\int \frac{dr}{(r + 5)^2}$

68. $\int \frac{6\, dr}{\left(r - \sqrt{2}\right)^3}$

69. $\int 3\theta\sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$

70. $\int \frac{\theta}{\sqrt{7 + \theta^2}}\, d\theta$

71. $\int x^3(1 + x^4)^{-1/4}\, dx$

72. $\int (2 - x)^{3/5}\, dx$

73. $\int \sec^2 \frac{s}{10}\, ds$

74. $\int \csc^2 \pi s\, ds$

75. $\int \csc \sqrt{2}\theta \cot \sqrt{2}\theta\, d\theta$

76. $\int \sec \frac{\theta}{3} \tan \frac{\theta}{3}\, d\theta$

77. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{4}\, dx$ $\left(\textit{Sugerencia:}\ \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)$

78. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 79 a 82 resuelva los problemas con valor inicial.

79. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad y(1) = -1$

80. $\frac{dy}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

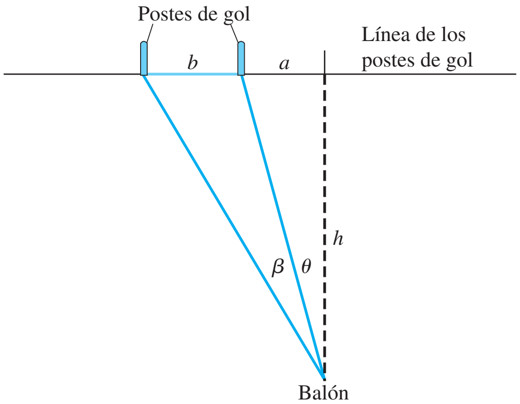
81. $\frac{d^2r}{dt^2} = 15\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}}; \quad r'(1) = 8, \quad r(1) = 0$

82. $\frac{d^3r}{dt^3} = -\cos t; \quad r''(0) = r'(0) = 0, \quad r(0) = -1$

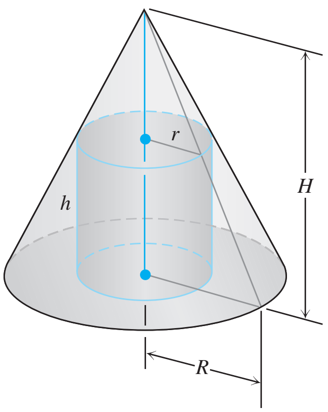
Capítulo 4 Ejercicios adicionales y avanzados

1. ¿Qué puede decir acerca de una función cuyos valores máximo y mínimo en un intervalo son iguales? Justifique su respuesta.
2. ¿Es cierto que una función discontinua no puede tener tanto un valor máximo absoluto como mínimo absoluto en un intervalo cerrado? Justifique su respuesta.
3. ¿Es posible concluir algo acerca de los valores extremos de una función continua en un intervalo abierto? ¿En un intervalo semiabierto? Justifique su respuesta.
4. **Extremos locales** Use el patrón de signos de la derivada
$$\frac{df}{dx} = 6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$$
para identificar los puntos donde f tiene valores máximos y mínimos locales.
5. **Extremos locales**
   a. Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es
   $$y' = 6(x+1)(x-2)^2.$$
   ¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?
   b. Suponga que la primera derivada de $y = f(x)$ es
   $$y' = 6x(x+1)(x-2).$$
   ¿En qué puntos, si hay alguno, la gráfica de f tiene un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión?
6. Si $f'(x) \le 2$ para toda x, ¿cuánto es lo más que pueden aumentar los valores de f en $[0, 6]$? Justifique su respuesta.
7. **Acotamiento de una función** Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que c es un punto interior del intervalo. Demuestre que si $f'(x) \le 0$ en $[a, c)$ y $f'(x) \le 0$ en $(c, b]$, entonces $f(x)$ nunca es menor que $f(c)$ en $[a, b]$.
8. **Una desigualdad**
   a. Demuestre que $-1/2 \le x/(1+x^2) \le 1/2$ para todo valor de x.
   b. Suponga que f es una función cuya derivada es $f'(x) = x/(1+x^2)$. Use el resultado del inciso (a) para probar que
   $$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b-a|$$
   para cualesquiera a y b.
9. La derivada de $f(x) = x^2$ es cero en $x = 0$, pero f no es una función constante. ¿Contradice esto el corolario del teorema del valor medio que dice que las funciones con derivada cero son constantes? Justifique su respuesta.
10. **Puntos extremos y de inflexión** Sea $h = fg$ el producto de dos funciones derivables de x.
    a. Si f y g son positivas, con máximos locales en $x = a$, y si f' y g' cambian de signo en a, ¿h tiene un máximo local en a?
    b. Si las gráficas de f y g tienen puntos de inflexión en $x = a$, ¿la gráfica de h tiene un punto de inflexión en a?
    Si cualquiera de sus respuestas es afirmativa, demuéstrelo. Si la respuesta es negativa, dé un contraejemplo.
11. **Determinación de una función** Utilice la siguiente información para encontrar los valores de a, b y c en la fórmula $f(x) = (x+a)/(bx^2+cx+2)$.
    i) Los valores de a, b y c son 0 o 1.
    ii) La gráfica de f pasa por el punto $(-1, 0)$
    iii) La recta $y = 1$ es una asíntota de la gráfica de f.
12. **Tangente horizontal** ¿Para qué valor o valores de la constante k la curva $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ tiene exactamente una tangente horizontal?
13. **El mayor triángulo inscrito** Los puntos A y B están en los extremos de un diámetro de un círculo unitario y el punto C se ubica en la circunferencia. ¿Es cierto que el área del triángulo ABC es la mayor posible cuando el triángulo es isósceles? ¿Cómo lo sabe?
14. **Demostración del criterio (prueba) de la segunda derivada** El criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos locales (sección 4.4) afirma:
    a. f tiene un valor máximo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$,
    b. f tiene un valor mínimo local en $x = c$ si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$.
    Para probar el enunciado (a), deje que $\epsilon = (1/2)|f''(c)|$. Después, use el hecho de que
    $$f''(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}$$
    para concluir que para algún $\delta > 0$,
    $$0 < |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(c+h)}{h} < f''(c) + \epsilon < 0.$$
    Por lo tanto, $f'(c+h)$ es positiva para $-\delta < h < 0$ y negativa para $0 < h < \delta$. Pruebe el enunciado (b) de manera similar.
15. **Agujero en un tanque de agua** Se quiere taladrar un agujero en la pared lateral del tanque que se ilustra aquí a una altura que haga que el flujo de agua que salga toque el suelo lo más lejos posible del tanque. Si se taladra el agujero cerca de la parte superior, donde la presión es baja, el agua saldrá en forma lenta, pero estará un tiempo relativamente largo en el aire. Si se taladra el agujero cerca de la base, el agua saldrá con mayor velocidad, pero tendrá poco tiempo para caer. ¿Cuál es el mejor lugar, si lo hay, para hacer el agujero? (*Sugerencia:* Indague cuánto tiempo tardará una partícula de agua que sale en caer de la altura y hasta el suelo).

16. Gol de campo Un jugador de fútbol americano quiere patear un gol de campo con el balón colocado en la línea punteada de la derecha. Suponga que los postes del marco de anotación distan b ft entre sí y la línea punteada está a distancia $a > 0$ ft del poste derecho del marco. (Véase la figura). Encuentre la distancia h desde la línea de los postes de anotación que le dará al pateador el mayor ángulo β de tiro. Suponga que el campo de fútbol es plano.



17. Un problema de máximos y mínimos con una respuesta variable Algunas veces la solución de un problema de máximos y mínimos depende de las proporciones de la figura implicada. Por ejemplo, suponga que un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono circular recto de radio R y altura H, como se ilustra aquí. Encuentre el valor de r (en términos de R y H) que maximice el área superficial total del cilindro (aquí se incluyen las tapas superior e inferior). Como verá, la solución depende de si $H \leq 2R$ o $H > 2R$.



18. Minimización de un parámetro Encuentre el valor mínimo de la constante positiva m que hará que $mx - 1 + (1/x)$ sea mayor que o igual a cero para todo valor positivo de x.

19. Suponga que a una compañía le cuesta $y = a + bx$ dólares producir x unidades por semana. Esta compañía puede vender x unidades por semana a un precio de $P = c - ex$ dólares por unidad. Suponga que a, b, c y e representan constantes positivas. **(a)** ¿Qué nivel de producción maximiza la utilidad? **(b)** ¿Cuál es el precio correspondiente? **(c)** ¿Cuál es la utilidad semanal con este nivel de producción? **(d)** ¿A qué precio debe venderse cada artículo para maximizar las ganancias si el gobierno impone un gravamen de t dólares por artículo vendido? Comente la diferencia entre este precio y el precio antes del impuesto.

20. Estimación de recíprocos sin división Es posible estimar el valor del recíproco de un número a sin dividir entre a si se aplica el método de Newton a la función $f(x) = (1/x) - a$. Por ejemplo, si $a = 3$, la función implicada es $f(x) = (1/x) - 3$.

a. Grafique $y = (1/x) - 3$. ¿Dónde cruza la gráfica el eje x?

b. Demuestre que, en este caso, la fórmula de recursión es

$$x_{n+1} = x_n(2 - 3x_n),$$

de manera que no hay necesidad de dividir.

21. Para encontrar $x = \sqrt[q]{a}$, aplicamos el método de Newton a $f(x) = x^q - a$. Aquí suponemos que a es un número real positivo y q es un entero positivo. Demuestre que x_1 es un "promedio ponderado" de x_0 y a/x_0^{q-1}, determine los coeficientes m_0, m_1 tales que

$$x_1 = m_0 x_0 + m_1\left(\frac{a}{x_0^{q-1}}\right), \qquad \begin{matrix} m_0 > 0, m_1 > 0, \\ m_0 + m_1 = 1. \end{matrix}$$

¿Qué conclusión obtendría si x_0 y a/x_0^{q-1} fueran iguales? En este caso, ¿cuál sería el valor de x_1?

22. La familia de rectas $y = ax + b$ (a, b, constantes arbitrarias) puede caracterizarse por la relación $y'' = 0$. Encuentre una relación similar que satisfaga la familia de todas las circunferencias,

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2,$$

donde h y r son constantes arbitrarias. (*Sugerencia:* Elimine h y r del conjunto de tres ecuaciones, incluidas la que se da y las dos que se obtuvieron por derivación sucesiva).

23. Suponga que los frenos de un automóvil producen una desaceleración constante de k ft/seg^2. **(a)** Determine qué valor de k llevará a un automóvil que viaja a 60 millas/hora (88 ft/segundo) a detenerse en una distancia de 100 ft desde el punto donde se pisan los frenos. **(b)** Con el mismo valor de k, ¿qué tan lejos llegará un automóvil que viaja a 30 millas/hora antes de detenerse totalmente?

24. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuamente derivables que satisfacen las relaciones $f'(x) = g(x)$ y $f''(x) = -f(x)$. Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Si $h(0) = 5$, encuentre $h(10)$.

25. ¿Puede haber una curva que satisfaga las siguientes condiciones? d^2y/dx^2 es igual a 0 en todas partes y, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $dy/dx = 1$? Justifique su respuesta.

26. Encuentre la ecuación de una curva en el plano xy que pase por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x siempre es $3x^2 + 2$.

27. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x. Su aceleración es $a = -t^2$. En $t = 0$, la partícula está en el origen. En el curso de su movimiento, alcanza el punto $x = b$, donde $b > 0$, pero ningún punto después de b. Determine su velocidad en $t = 0$.

28. Una partícula se desplaza con aceleración $a = \sqrt{t} - \left(1/\sqrt{t}\right)$. Suponiendo que la velocidad es $v = 4/3$ y que la posición es $s = -4/15$ cuando $t = 0$, determine

a. la velocidad v en términos de t.

b. la posición s en términos de t.

29. Suponga que $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ con $a > 0$. Considerando el mínimo, demuestre que $f(x) \leq 0$ para todo real x, si y sólo si $b^2 - ac \leq 0$.

30. Desigualdad de Schwarz

a. En el ejercicio 29, deje que

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2,$$

y deduzca la desigualdad de Schwarz

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

b. Demuestre que se cumple la igualdad en la desigualdad de Schwarz sólo si existe un número real x que hace que a_ix sea igual $a - b_i$ para cada valor de i desde 1 hasta n.

Capítulo 4 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos de Mathematica/Maple:

Desplazamiento a lo largo de una línea recta: Posición → Velocidad → Aceleración

Observará la forma de una gráfica a través de espectaculares visualizaciones de las relaciones de la derivada entre la posición, la velocidad y la aceleración. Las figuras en el texto pueden animarse.

Método de Newton: Estimación de π ¿con cuántos lugares decimales?

Trace una función, observe una raíz, elija un punto cercano a la raíz y utilice el procedimiento de iteración de Newton para aproximar la raíz con la precisión deseada. Se aproximan los números π, e y $\sqrt{2}$.

5

INTEGRACIÓN

INTRODUCCIÓN Un gran logro de la geometría clásica fue la obtención de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de triángulos, esferas y conos. En este capítulo desarrollamos un método para calcular las áreas y los volúmenes de formas muy generales. Tal método, denominado *integración*, es una herramienta para calcular mucho más que áreas y volúmenes. La *integral* es de importancia fundamental en estadística, ciencias e ingeniería. La utilizamos para calcular cantidades que van desde probabilidades y promedios hasta el consumo de energía y las fuerzas ejercidas contra los muros de una presa. Estudiaremos una diversidad de aplicaciones en el siguiente capítulo; por ahora nos centraremos en el concepto de la integral y su uso en el cálculo de áreas de varias regiones con frontera curva.

5.1 Área y su estimación mediante sumas finitas

La *integral definida* es la herramienta clave en cálculo para definir y calcular importantes cantidades en matemáticas y ciencias, tales como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias curvas, probabilidades y pesos de diversos objetos, por sólo mencionar algunas. La idea detrás de la integral es que es posible calcular dichas cantidades si las dividimos en pequeñas partes y sumamos las contribuciones de cada una. Luego consideramos lo que sucede cuando una cantidad cada vez mayor de piezas, cada vez más y más pequeñas se incluyen en el proceso de la suma. Finalmente, si el número de términos que contribuyen a la suma tiende a infinito y tomamos el límite de estas sumas de la manera que describimos en la sección 5.3, el resultado es una integral definida. En la sección 5.4 probamos que las integrales se relacionan con las antiderivadas; ésta es una de las relaciones más importantes en cálculo.

La base para la formulación de las integrales definidas es la construcción de sumas finitas adecuadas. Aunque necesitamos definir de manera precisa lo que entendemos por área de una región general en el plano, o el valor promedio de una función en un intervalo cerrado, lo hacemos teniendo ideas intuitivas de lo que significan esas nociones. Así, en esta sección iniciamos nuestro estudio de la integración mediante la *aproximación* por medio de sumas finitas a esas cantidades. También veremos lo que sucede cuando consideramos cada vez más términos en el proceso de suma. En las siguientes secciones examinamos el límite de dichas sumas cuando el número de términos tiende a infinito, lo cual lleva entonces a las definiciones precisas de las cantidades que aproximaremos aquí.

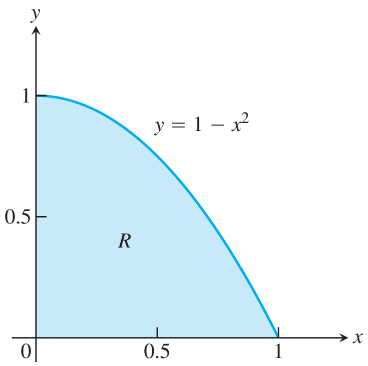


FIGURA 5.1 El área de la región no puede encontrarse mediante una fórmula sencilla.

Área

Suponga que necesitamos determinar el área de la región sombreada R que está arriba del eje x, debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$, y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ (figura 5.1). Por desgracia, no existe una fórmula geométrica simple para el cálculo de áreas de formas generales que tengan fronteras curvas, como las de la región R. Entonces, ¿cómo se podrá determinar el área de R?

Aunque aún no tenemos un método para determinar el área exacta de R, es posible aproximarla de una manera sencilla. La figura 5.2a muestra dos rectángulos que, juntos, contienen a la región R. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/2$; por otra parte, tienen alturas (si observamos de izquierda a derecha) de 1 y $3/4$. La altura de cada rectángulo es el valor

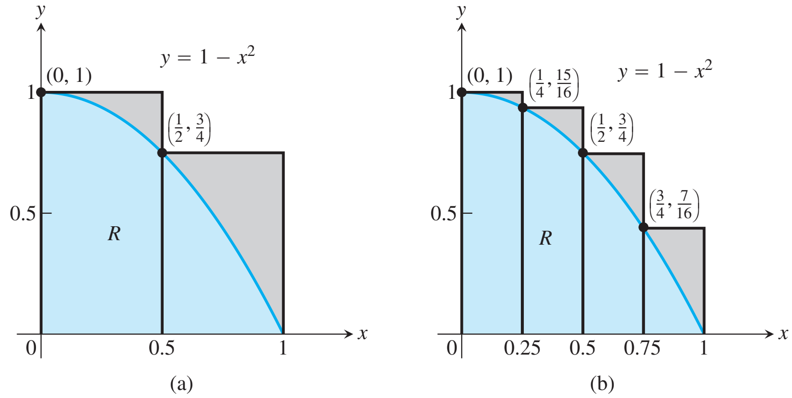


FIGURA 5.2 (a) Obtenemos una estimación en exceso del área de R mediante dos rectángulos que contienen a R. (b) Cuatro rectángulos dan una mejor estimación por exceso. Ambas estimaciones sobrepasan el valor verdadero para el área por la cantidad sombreada en el área superior.

máximo de la función f, obtenido al evaluar f en el extremo izquierdo del subintervalo de [0, 1] que forma la base del rectángulo. El área total de los dos rectángulos aproxima el área de la región R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

Esta estimación es mayor que el área exacta de A, ya que los dos rectángulos contienen a R. Decimos que 0.875 es una **suma superior**, ya que se obtiene tomando la altura de cada rectángulo como el valor máximo (mayor) de $f(x)$ para un punto x en el intervalo que forma la base del rectángulo. En la figura 5.2b mejoramos nuestra estimación usando cuatro rectángulos más delgados, cada uno de ancho $1/4$, los cuales, juntos, contienen a la región R. Los cuatro rectángulos dan la aproximación

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.78125,$$

que aún es mayor que A, puesto que los cuatro rectángulos contienen a R.

Ahora suponga que, para estimar el área R, utilizamos cuatro rectángulos contenidos *dentro* de la región, como en la figura 5.3a. Como antes, cada rectángulo tiene ancho de $1/4$, pero

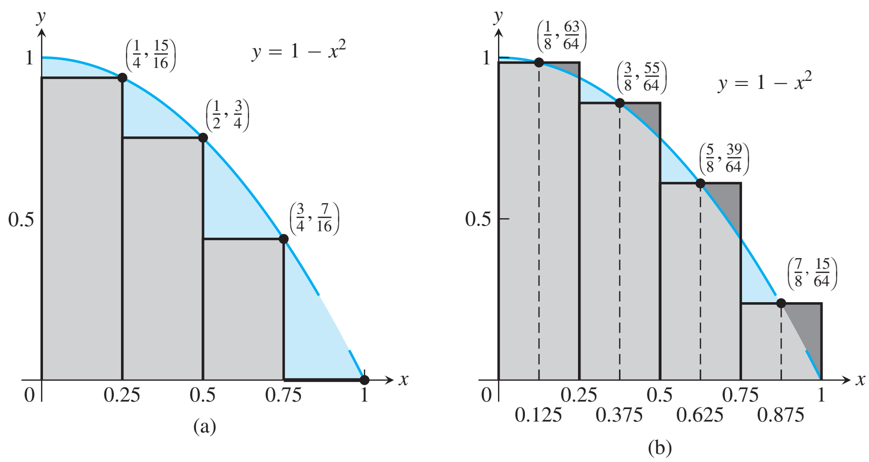
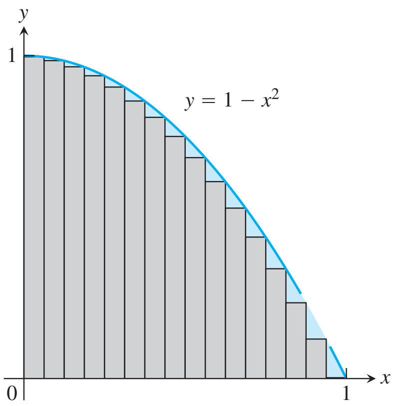
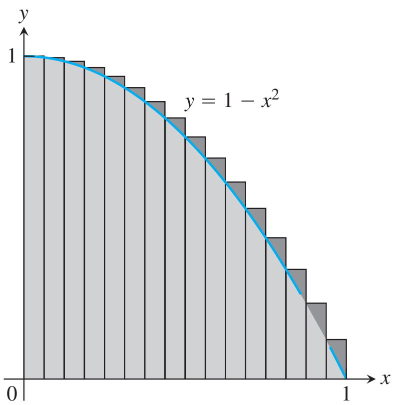


FIGURA 5.3 (a) Los rectángulos contenidos en R dan una estimación para el área que subestima el valor verdadero en la cantidad sombreada en la parte superior. (b) La regla del punto medio utiliza rectángulos cuya altura es el valor de $y = f(x)$ en los puntos medios de sus bases. La estimación parece ser más cercana al valor verdadero del área, ya que las áreas sombreadas que rebasan la curva y que sobreestiman al área se equilibran aproximadamente con las áreas sombreadas que quedan por debajo de la curva y que subestiman al área.



(a)



(b)

FIGURA 5.4 (a) Una suma inferior que emplea 16 rectángulos de igual ancho, $\Delta x = 1/16$. (b) Una suma superior que utiliza 16 rectángulos.

los rectángulos son más pequeños y están completamente por debajo de la gráfica de f. La función $f(x) = 1 - x^2$ es decreciente en [0, 1], así que la altura para cada uno de estos rectángulos está dada por el valor de f en el extremo derecho del subintervalo que forma la base. El cuarto rectángulo tiene altura cero y, por lo tanto, no contribuye al área. Al sumar dichos rectángulos con altura igual al valor mínimo de $f(x)$, para un punto x en cada subintervalo que forma la base, obtenemos una **suma inferior** que aproxima el área,

$$A \approx \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.53125.$$

Tal estimación es menor que el área A, ya que todos los rectángulos se ubican dentro de la región R. El valor verdadero de A es un valor entre las dos sumas, inferior y superior:

$$0.53125 < A < 0.78125.$$

Al considerar ambas aproximaciones, no sólo obtenemos estimaciones para el área, sino también una cota para el tamaño del posible error en dichas estimaciones, pues el valor verdadero del área se ubica entre ellas. Aquí el error no puede ser mayor a la diferencia $0.78125 - 0.53125 = 0.25$.

Es posible obtener otra estimación más mediante rectángulos cuyas alturas sean los valores de f en los puntos medios de sus bases (figura 5.3b). Este método de estimación se denomina **regla del punto medio** para aproximación del área. La regla del punto medio brinda una estimación que está entre la suma inferior y la suma superior, pero no es claro si sobreestima o subestima el área verdadera. Con cuatro rectángulos de ancho $1/4$, como antes, la regla del punto medio estima el área de R como

$$A \approx \frac{63}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{55}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{39}{64}\cdot\frac{1}{4} + \frac{15}{64}\cdot\frac{1}{4} = \frac{172}{64}\cdot\frac{1}{4} = 0.671875.$$

En cada una de nuestras sumas calculadas, el intervalo $[a, b]$ sobre la que está definida la función f, se subdividió en n subintervalos de igual ancho (también denominada longitud) $\Delta x = (b - a)/n$, mientras f se evaluó en un punto en cada subintervalo: c_1 en el primer subintervalo, c_2 en el segundo subintervalo y así sucesivamente. Entonces, todas las sumas finitas toman la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

Si tomamos cada vez más y más rectángulos, siendo cada uno más angosto que los anteriores, parece que estas sumas finitas dan cada vez mejores aproximaciones al área verdadera de la región R.

La figura 5.4a muestra una aproximación con suma inferior para el área de R al usar 16 rectángulos de igual ancho. La suma de sus áreas es 0.634765625, que parece estar más cercana al área verdadera, pero sigue siendo menor que ésta, puesto que los rectángulos están dentro de R.

La figura 5.4b muestra una aproximación con suma superior mediante 16 rectángulos de igual ancho. La suma de sus áreas es 0.697265625, que es un poco mayor que el área verdadera, ya que los rectángulos unidos contienen a R. La regla del punto medio para 16 rectángulos da una aproximación al área total de 0.6669921875, pero no es claro de inmediato si esta estimación es mayor o menor que el área verdadera.

EJEMPLO 1 La tabla 5.1 muestra los valores de aproximaciones por sumas superiores e inferiores para el área de R si se usan hasta 1000 rectángulos. En la sección 5.2 veremos cómo obtener un valor exacto de las áreas de regiones tales como la R tomando un límite cuando el ancho de la base de cada rectángulo tiende a cero y el número de rectángulos tiende a infinito. Con las técnicas desarrolladas ahí, seremos capaces de mostrar que el área de R es exactamente $2/3$. ■

Distancia recorrida

Suponga que conocemos la función de velocidad $v(t)$ de un automóvil que se desplaza por una carretera sin cambiar de dirección, y que queremos conocer cuánto ha recorrido entre los instantes $t = a$ y $t = b$. Si ya conocemos la antiderivada $F(t)$ de $v(t)$, determinamos la función de posición del automóvil $s(t)$ si establecemos que $s(t) = F(t) + C$. Entonces, es posible determi-

TABLA 5.1 Aproximaciones finitas para el área de R

Número de subintervalos	Suma inferior	Regla del punto medio	Suma superior
2	.375	.6875	.875
4	.53125	.671875	.78125
16	.634765625	.6669921875	.697265625
50	.6566	.6667	.6766
100	.66165	.666675	.67165
1000	.6661665	.66666675	.6671665

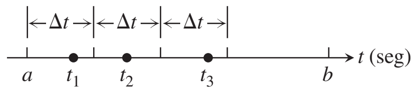
nar la distancia si calculamos el cambio de la posición, $s(b) - s(a) = F(b) - F(a)$. Si la función de velocidad se conoce sólo por las lecturas en diversos instantes de un velocímetro en el automóvil, no tenemos fórmula a partir de la cual obtener una función antiderivada para la velocidad. Entonces, ¿qué hacemos en esta situación?

Cuando no conocemos una antiderivada para la función velocidad $v(t)$, podemos aplicar el mismo principio de aproximar la distancia recorrida con sumas finitas de una manera análoga a nuestras estimaciones para el área analizadas previamente. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en pequeños intervalos de tiempo, en cada uno de los cuales la velocidad se considera constante. Entonces, aproximamos la distancia recorrida en cada subintervalo con la fórmula usual de distancia

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

y sumamos los resultados a lo largo de $[a, b]$.

Suponga que el intervalo subdividido se ve como



con todos los subintervalos de igual longitud Δt. Seleccione un número t_1 en el primer subintervalo. Si Δt es tan pequeño que la velocidad apenas cambia en un intervalo de corta duración Δt, entonces la distancia recorrida en el primer intervalo es alrededor de $v(t_1)\,\Delta t$. Si t_2 es un número en el segundo intervalo, la distancia recorrida en el segundo intervalo es alrededor de $v(t_2)\,\Delta t$. La suma de las distancias recorridas a lo largo de todos los intervalos es

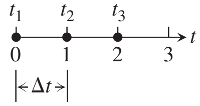
$$D \approx v(t_1)\,\Delta t + v(t_2)\,\Delta t + \cdots + v(t_n)\,\Delta t,$$

donde n es el número total de intervalos.

EJEMPLO 2 La función velocidad de un proyectil disparado directamente hacia arriba es $f(t) = 160 - 9.8t$ m/seg. Utilice la técnica de la suma que se acaba de describir para estimar cuánto se eleva el proyectil durante los primeros 3 segundos. ¿Qué tan cercanas son las sumas al valor exacto de 435.9 m?

Solución Exploramos los resultados para diferentes números de intervalos y diferentes elecciones de puntos de evaluación. Observe que $f(t)$ es decreciente, así que la selección de los extremos izquierdos da una aproximación con una suma superior; la selección de extremos derechos produce una estimación con una suma inferior.

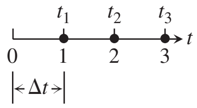
(a) *Tres subintervalos de longitud* 1*, con f evaluada en los extremos izquierdos, dan una suma superior:*



Con f evaluada en $t = 0$, 1 y 2, tenemos

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &= 450.6. \end{aligned}$$

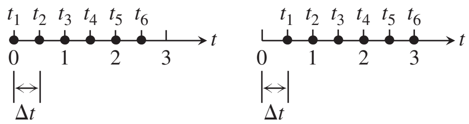
(b) *Tres subintervalos de longitud* 1*, con f evaluada en los extremos derechos, dan una suma inferior:*



Con f evaluada en $t = 1$, 2 y 3, tenemos

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + f(t_3)\,\Delta t \\ &= [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &= 421.2. \end{aligned}$$

(c) *Con seis subintervalos de longitud 1/2, obtenemos*



Si se usan los extremos izquierdos se obtiene una suma superior y una estimación: $D \approx 443.25$; y si se usan extremos derechos se obtiene una suma inferior: $D \approx 428.55$. Las estimaciones con seis intervalos están un poco más cercanas que las estimaciones con tres intervalos. Los resultados mejoran cuando los subintervalos se hacen más cortos.

Como observamos en la tabla 5.2, las sumas superiores con extremos izquierdos se aproximan al valor verdadero 435.9 por arriba, mientras que las sumas inferiores con extremos derechos se aproximan a éste por abajo. El valor verdadero está entre las sumas superior e inferior. La magnitud del error en las entradas más cercanas es de 0.23, que es un porcentaje pequeño del valor verdadero.

$$\begin{aligned} \text{Magnitud del error} &= |\text{valor verdadero} - \text{valor calculado}| \\ &= |435.9 - 435.67| = 0.23. \end{aligned}$$

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{0.23}{435.9} \approx 0.05\%.$$

Con base en las últimas entradas de la tabla, sería razonable concluir que el proyectil se elevó alrededor de 436 m durante sus primeros 3 segundos de vuelo. ■

TABLA 5.2 Estimaciones de la distancia recorrida

Número de subintervalos	Longitud de cada subintervalo	Suma superior	Suma inferior
3	1	450.6	421.2
6	1/2	443.25	428.55
12	1/4	439.58	432.23
24	1/8	437.74	434.06
48	1/16	436.82	434.98
96	1/32	436.36	435.44
192	1/64	436.13	435.67

Desplazamiento en comparación con la distancia recorrida

Si un objeto con función de posición $s(t)$ se desplaza a lo largo de una línea coordenada sin cambiar de dirección, es posible calcular la distancia total que recorre desde $t = a$ hasta $t = b$ si se suma la distancia recorrida en pequeños intervalos, como en el ejemplo 2. Si el objeto invierte la dirección en uno o más instantes durante el viaje, entonces necesitamos utilizar la rapidez del objeto $|v(t)|$, que es el valor absoluto de su función velocidad, $v(t)$, para determinar la distancia total recorrida. Al utilizar la velocidad, como en el ejemplo 2, obtenemos una estimación del **desplazamiento** del objeto, $s(b) - s(a)$, la diferencia entre sus posiciones inicial y final.

Para ver por qué utilizar la función velocidad en el proceso de sumar brinda una estimación para el desplazamiento, dividimos el intervalo de tiempo $[a, b]$ en subintervalos iguales y suficientemente pequeños Δt, de manera que la velocidad del objeto no se modifique mucho del tiempo t_{k-1} a t_k. Entonces $v(t_k)$ da una buena aproximación de la velocidad en todo el intervalo. De acuerdo con esto, el cambio en la coordenada de la posición del objeto durante el intervalo de tiempo es alrededor de

$$v(t_k)\,\Delta t.$$

El cambio es positivo si $v(t_k)$ es positiva y negativo si $v(t_k)$ es negativa.

En cualquier caso, la distancia recorrida por el objeto durante el subintervalo es aproximadamente de

$$|v(t_k)|\,\Delta t.$$

La **distancia total recorrida** es aproximadamente la suma

$$|v(t_1)|\,\Delta t + |v(t_2)|\,\Delta t + \cdots + |v(t_n)|\,\Delta t.$$

En la sección 5.4 retomaremos tales ideas.

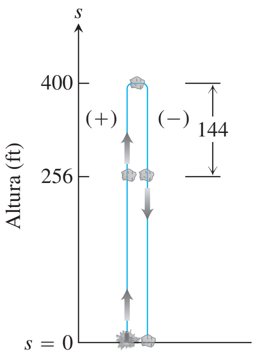


FIGURA 5.5 La roca del ejemplo 3. La altura de 256 ft se alcanza en $t = 2$ y en $t = 8$ seg. La roca cae 144 ft desde su altura máxima cuando $t = 8$.

EJEMPLO 3 En el ejemplo 4 de la sección 3.4 analizamos el movimiento de una roca que es lanzada directamente hacia arriba por una explosión de dinamita. En ese ejemplo encontramos que la velocidad de la roca en cualquier instante durante su movimiento era $v(t) = 160 - 32t$ ft/seg. La roca estaba 256 ft por encima del suelo 2 segundos después de la explosión, y continuó subiendo hasta alcanzar una altura máxima de 400 ft a los 5 segundos después de la explosión; luego cayó hasta llegar a la altura de 256 ft en $t = 8$ segundos después de la explosión. (Véase la figura 5.5).

Si seguimos un procedimiento como el que se presentó en el ejemplo 2 y utilizamos la función velocidad $v(t)$ en el proceso de suma respecto al intervalo de tiempo [0, 8], obtendremos una aproximación a 256 ft, la *altura* de la roca por encima del suelo en $t = 8$. El movimiento positivo hacia arriba (que da un cambio positivo en la distancia de 144 ft, desde la altura de 256 ft hasta la altura máxima) se cancela por el movimiento negativo hacia abajo (dando un cambio negativo de 144 ft de la altura máxima hasta 256 ft otra vez), así que el desplazamiento o la altura por encima del suelo se estiman con la función velocidad.

Por otro lado, si en el proceso de suma se utiliza el valor absoluto $|v(t)|$, obtendremos una estimación para la *distancia total* que la roca ha recorrido: la altura máxima alcanzada de 400 ft más la distancia adicional de 144 ft que cae de regreso desde ese máximo cuando de nuevo alcanza la altura de 256 ft en $t = 8$ seg. Esto es, al usar el valor absoluto de la función velocidad en el proceso de suma respecto al intervalo de tiempo [0, 8] obtenemos una estimación de 544 ft, la distancia total hacia arriba y hacia abajo que la roca recorre en 8 segundos. No hay cancelación de cambios de distancia debido al cambio de signo en la función velocidad, así que estimamos la distancia recorrida en vez del desplazamiento cuando utilizamos el valor absoluto de la función velocidad (esto es, la rapidez de la roca).

Como ilustración de nuestro estudio, subdividiremos el intervalo [0, 8] en 16 subintervalos de longitud $\Delta t = 1/2$ y tomaremos el extremo derecho de cada subintervalo en nuestros cálculos. La tabla 5.3 muestra los valores de la función velocidad en estos extremos.

TABLA 5.3 Función velocidad

t	$v(t)$	t	$v(t)$
0	160	4.5	16
0.5	144	5.0	0
1.0	128	5.5	−16
1.5	112	6.0	−32
2.0	96	6.5	−48
2.5	80	7.0	−64
3.0	64	7.5	−80
3.5	48	8.0	−96
4.0	32		

Al usar $v(t)$ en el proceso de suma, estimamos el desplazamiento en $t = 8$:

$$(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16$$
$$+ 0 - 16 - 32 - 48 - 64 - 80 - 96) \cdot \frac{1}{2} = 192$$

$$\text{Magnitud del error} = 256 - 192 = 64$$

Al utilizar $|v(t)|$ en este proceso de suma, estimamos la distancia total recorrida durante el intervalo [0, 8]:

$$\begin{aligned}&(144 + 128 + 112 + 96 + 80 + 64 + 48 + 32 + 16\\&\quad + 0 + 16 + 32 + 48 + 64 + 80 + 96) \cdot \frac{1}{2} = 528\\&\text{Magnitud del error} = 544 - 528 = 16\end{aligned}$$

Si en nuestros cálculos tomamos cada vez más subintervalos de [0, 8], las estimaciones a 256 ft y 544 ft mejoran; se aproximan a sus valores verdaderos. ■

Valor promedio de una función continua no negativa

El valor promedio de una colección de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtiene al sumarlos y dividirlos entre n. Pero, ¿qué es el promedio de una función continua f en un intervalo $[a, b]$? Tal función puede tomar una cantidad infinita de valores. Por ejemplo, la temperatura en cierta localidad de una ciudad es una función continua que sube y baja cada día. ¿Qué quiere decir que la temperatura promedio en la ciudad durante un día es de 73 grados Fahrenheit?

Cuando una función es constante, esta pregunta es fácil de responder. Una función con valor constante c en un intervalo $[a, b]$ tiene valor promedio c. Cuando c es positiva, su gráfica sobre $[a, b]$ da un rectángulo de altura c. Entonces, el valor promedio de la función puede interpretarse geométricamente como el área de este rectángulo dividida entre su ancho $b - a$ (figura 5.6a).

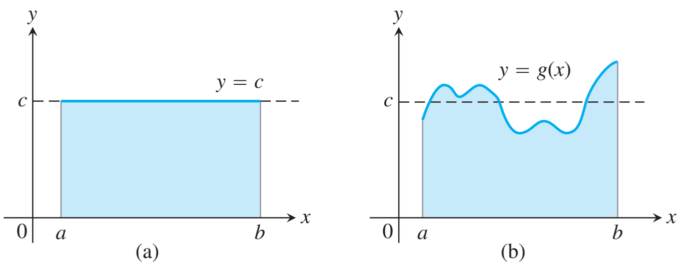


FIGURA 5.6 (a) El valor promedio de $f(x) = c$ en $[a, b]$ es el área del rectángulo dividida entre $b - a$. (b) El valor promedio de $g(x)$ en $[a, b]$ es el área debajo de su gráfica dividida entre $b - a$.

¿Qué pasa si queremos determinar el valor promedio de una función no constante, tal como la función g en la figura 5.6b? Es posible considerar dicha gráfica como si fuera una fotografía instantánea de la altura del agua que sube y baja en un tanque con paredes $x = a$ y $x = b$. Cuando el agua se mueve, su altura en cada punto cambia, pero su altura promedio permanece igual. Para obtener la altura promedio del agua dejamos que se "calme" hasta que se nivele y su altura sea constante. La altura resultante c es igual al área bajo la gráfica de g dividida entre $b - a$. Lo anterior nos lleva a *definir* el valor promedio de una función no negativa en un intervalo $[a, b]$ como el área debajo de su gráfica dividida entre $b - a$. Para que tal definición sea válida, necesitamos comprender con precisión a qué nos referimos por el área bajo una gráfica. Nos ocuparemos de ello en la sección 5.3; por ahora, veamos un ejemplo.

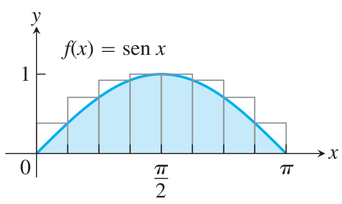


FIGURA 5.7 Aproximación del área bajo $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre 0 y π para calcular el valor promedio de sen x en $[0, \pi]$ mediante ocho rectángulos (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Estime el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución Al observar la gráfica de sen x entre 0 y π en la figura 5.7, veremos que su altura promedio está entre 0 y 1. Para determinar el promedio necesitamos calcular el área A bajo la gráfica y luego dividir esta área entre la longitud del intervalo, $\pi - 0 = \pi$.

No tenemos una forma sencilla de determinar el área, así que la aproximamos con sumas finitas. Para obtener una aproximación por suma superior sumamos las áreas de ocho rectángulos del mismo ancho, $\pi/8$, que juntos contienen a la región debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y arriba del eje x en $[0, \pi]$. Seleccionamos las alturas de los rectángulos como el mayor valor de sen x en cada subintervalo. En un subintervalo particular, el mayor valor se alcanza en el extremo izquierdo, en el extremo derecho o en algún punto entre ellos. Evaluamos sen x en este punto para obtener la altura del rectángulo para una suma superior. Luego, la suma de las áreas de los rectángulos aproxima al área total (figura 5.7):

$$A \approx \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\right)\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$\approx (.38 + .71 + .92 + 1 + 1 + .92 + .71 + .38)\cdot\frac{\pi}{8} = (6.02)\cdot\frac{\pi}{8} \approx 2.365.$$

Para estimar el valor promedio de sen x dividimos el área estimada entre π y obtenemos la aproximación $2.365/\pi \approx 0.753$.

Como utilizamos una suma superior para aproximar el área, dicha estimación es mayor que el valor promedio real de sen x en $[0, \pi]$. Si empleamos cada vez más rectángulos, con cada uno más angosto, estaremos cada vez más cerca del valor promedio real. Por medio de las técnicas analizadas en la sección 5.3 mostraremos que el valor promedio real es $2/\pi \approx 0.64$.

Como antes, podríamos haber utilizado rectángulos que están debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y calcular una aproximación del área por suma inferior o por la regla del punto medio. En la sección 5.3 veremos que, en cada caso, las aproximaciones son más cercanas al área verdadera si todos los rectángulos son suficientemente angostos. ■

Resumen

El área debajo de la gráfica de una función positiva, la distancia recorrida por un objeto en movimiento que no cambia de dirección, y el valor promedio de una función no negativa a lo largo de un intervalo pueden aproximarse mediante sumas finitas. Primero subdividimos el intervalo en subintervalos. Luego multiplicamos el ancho de cada subintervalo por el valor de f en algún punto dentro del subintervalo y sumamos todos los productos. Si el intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos de anchos iguales $\Delta x = (b - a)/n$ y si $f(c_k)$ es el valor de f en el punto elegido c_k en el k-ésimo subintervalo, el proceso da una suma finita de la forma

$$f(c_1)\,\Delta x + f(c_2)\,\Delta x + f(c_3)\,\Delta x + \cdots + f(c_n)\,\Delta x.$$

La elección de c_k podría maximizar o minimizar el valor de f en el k-ésimo subintervalo, o dar algún valor intermedio. El valor verdadero estará entre las aproximaciones dadas por las sumas superiores y las sumas inferiores. Las aproximaciones por sumas finitas que hemos visto mejoran cuando tomamos más subintervalos cada vez más angostos.

Ejercicios 5.1

Área

En los ejercicios 1 a 4, utilice aproximaciones finitas para estimar el área debajo de la gráfica de la función; para ello, emplee

a. una suma inferior con dos rectángulos del mismo ancho.

b. una suma inferior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

c. una suma superior con dos rectángulos del mismo ancho.

d. una suma superior con cuatro rectángulos del mismo ancho.

1. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

2. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

4. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Utilice rectángulos cuyas alturas estén dadas por el valor de la función en el punto medio de la base del rectángulo (la regla del punto medio); además, estime el área debajo de las gráficas de las siguientes funciones, usando primero dos y luego cuatro rectángulos.

5. $f(x) = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

6. $f(x) = x^3$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

7. $f(x) = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

8. $f(x) = 4 - x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Distancia

9. Distancia recorrida La siguiente tabla indica la velocidad de la máquina de una locomotora que se desplaza a lo largo de una vía durante 10 segundos. Estime la distancia recorrida por la locomotora usando 10 subintervalos de longitud 1 con

a. los valores de los extremos izquierdos.

b. los valores de los extremos derechos.

Tiempo (seg)	Velocidad (in/seg)	Tiempo (seg)	Velocidad (in/seg)
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

10. Distancia recorrida a contracorriente Usted está sentado a la orilla de un río viendo una botella que flota y se mueve contracorriente debido a la marea. Registra la velocidad de la corriente cada 5 minutos durante una hora, con los resultados que se muestran en la siguiente tabla. Aproximadamente ¿cuánto se movió río arriba la botella durante esa hora? Encuentre una estimación usando 12 subintervalos de longitud 5 con

a. los valores de los puntos extremos izquierdos.

b. los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (min)	Velocidad (in/seg)	Tiempo (min)	Velocidad (in/seg)
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

11. Longitud de un camino Usted y un acompañante están a punto de viajar por un camino de terracería lleno de curvas a bordo de un automóvil cuyo velocímetro funciona, pero cuyo odómetro (contador de millas) no sirve. Para determinar la longitud del tramo que van a recorrer, usted registra la velocidad del automóvil a intervalos de 10 segundos, con los resultados que se muestran en la siguiente tabla. Estime la longitud del camino usando

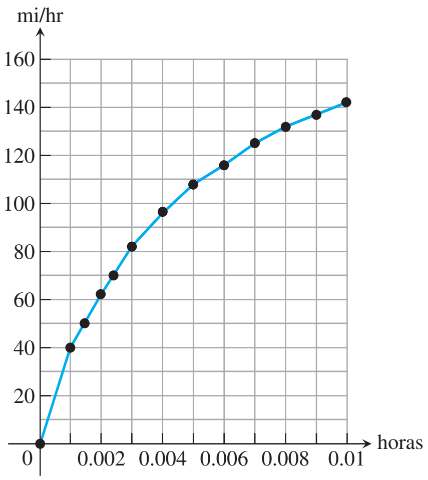
a. los valores de los puntos extremos izquierdos.

b. los valores de los puntos extremos derechos.

Tiempo (seg)	Velocidad (convertida a ft/seg) (30 mi/h = 44 ft/seg)	Tiempo (seg)	Velocidad (convertida a ft/seg) (30 mi/h = 44 ft/seg)
0	0	70	15
10	44	80	22
20	15	90	35
30	35	100	44
40	30	110	30
50	44	120	35
60	35		

12. Distancia a partir de los datos de velocidad La siguiente tabla proporciona los datos de la velocidad de un excelente automóvil deportivo que acelera de 0 a 142 millas/hora en 36 segundos (10 milésimas de una hora).

Tiempo (h)	Velocidad (mi/h)	Tiempo (h)	Velocidad (mi/h)
0.0	0	0.006	116
0.001	40	0.007	125
0.002	62	0.008	132
0.003	82	0.009	137
0.004	96	0.010	142
0.005	108		



a. Use un rectángulo para estimar hasta dónde llegó el automóvil durante los 36 segundos que le tomó alcanzar las 142 millas/hora.

b. ¿Aproximadamente cuántos segundos tardó el automóvil en alcanzar el punto medio del recorrido? ¿Qué tan rápido iba el automóvil en ese momento?

13. Caída libre con resistencia al aire Se deja caer un objeto desde un helicóptero. El objeto cae cada vez más rápido, pero su aceleración (tasa de cambio de la velocidad) decrece con el tiempo debido a la resistencia del aire. La aceleración se mide en ft/seg^2 y se registra cada segundo después de soltar el objeto durante 5 segundos, como se muestra a continuación.

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

a. Encuentre una estimación superior para la rapidez cuando $t = 5$.

b. Encuentre una estimación inferior para la rapidez cuando $t = 5$.

c. Encuentre una estimación superior para la distancia recorrida cuando $t = 3$.

14. Distancia recorrida por un proyectil Un proyectil es lanzado hacia arriba desde el nivel del mar con una velocidad inicial de 400 ft/seg.

a. Si suponemos que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el objeto, dé una estimación superior para su velocidad después de haber transcurrido 5 seg. Utilice $g = 32$ ft/seg^2 para la aceleración debida a la gravedad.

b. Encuentre una estimación inferior para la altura que se alcanza después de 5 seg.

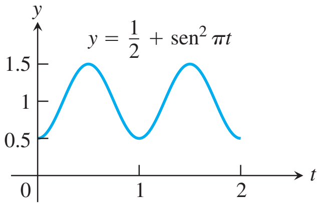
Valor promedio de una función

En los ejercicios 15 a 18, use una suma finita para estimar el valor promedio de f en el intervalo dado; divida el intervalo en cuatro subintervalos de la misma longitud y evalúe f en los puntos medios de los subintervalos.

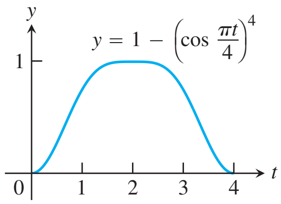
15. $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$

16. $f(x) = 1/x$ en $[1, 9]$

17. $f(t) = (1/2) + \text{sen}^2 \pi t$ en $[0, 2]$



18. $f(t) = 1 - \left(\cos \frac{\pi t}{4}\right)^4$ en $[0, 4]$



Ejemplos de estimaciones

19. Contaminación del agua Un tanque dañado derrama petróleo en el mar. El daño del tanque empeora, como evidencia el aumento del derrame cada hora, lo cual se registra en la siguiente tabla.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4
Derrame (gal/h)	50	70	97	136	190

Tiempo (h)	5	6	7	8
Derrame (gal/h)	265	369	516	720

a. Dé una estimación superior e inferior de la cantidad total de petróleo que se ha derramado después de 5 horas.

b. Repita el inciso a) para estimar la cantidad de petróleo que se ha derramado después de 8 horas.

c. El tanque continúa derramando 720 galones/hora después de las primeras 8 horas. Si el tanque contenía originalmente 25,000 galones de petróleo, ¿aproximadamente cuántas horas más pasarán, en el peor de los casos, antes de que se vierta todo el petróleo? ¿Cuántas horas más transcurrirán en el mejor de los casos?

20. Contaminación del aire Una planta de energía genera electricidad quemando petróleo. Los contaminantes producidos como resultado del proceso de combustión se eliminan mediante filtros en las chimeneas. Al paso del tiempo, los filtros dejan de ser eficaces y deben remplazarse cuando la cantidad de contaminación liberada excede los estándares gubernamentales. Las mediciones se toman al final de cada mes para determinar la tasa a la que los contaminantes se emiten a la atmósfera; a continuación se presentan los registros.

Mes	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Tasa de contaminación emitida (toneladas/día)	0.20	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Tasa de contaminación emitida (toneladas/día)	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

a. Suponiendo meses de 30 días y que los nuevos filtros sólo permiten emitir 0.05 ton/día, dé una estimación superior del total de toneladas de contaminantes emitidos al final de junio. ¿Cuál es una estimación inferior?

b. En el mejor de los casos, ¿aproximadamente cuándo un total de 125 toneladas de contaminantes se habrán emitido a la atmósfera?

21. Inscriba un polígono regular de n lados en un círculo de radio 1 y calcule el área del polígono para los siguientes valores de n:

a. 4 (cuadrado) **b.** 8 (octágono) **c.** 16

d. Compare las áreas en los incisos a), b) y c) con el área del círculo.

22. (*Continuación del ejercicio 21*).

a. Inscriba un polígono regular de n lados en un círculo de radio 1 y calcule el área de uno de los n triángulos congruentes que se forman al trazar los radios a los vértices del polígono.

b. Calcule el límite del área de los polígonos inscritos cuando $n \to \infty$.

c. Repita los cálculos en los incisos (a) y (b) para un círculo de radio r.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 23 a 26, utilice un SAC para realizar los siguientes pasos.

a. Grafique las funciones en el intervalo dado.

b. Subdivida el intervalo en $n = 100$, 200 y 1000 subintervalos de la misma longitud; luego, evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

c. Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso (b).

d. Despeje x en la ecuación $f(x) =$ (valor promedio), utilizando el valor promedio calculado en el inciso c) para la partición con $n = 1000$.

23. $f(x) = \text{sen}\, x$ en $[0, \pi]$

24. $f(x) = \text{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

25. $f(x) = x\, \text{sen}\, \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

26. $f(x) = x\, \text{sen}^2 \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.2 Notación sigma y límites de sumas finitas

En la estimación mediante sumas finitas de la sección 5.1 encontramos sumas con muchos términos (por ejemplo, hasta 1000 en la tabla 5.1). En esta sección presentamos una notación más conveniente para sumas con un gran número de términos. Después de describir la notación y establecer algunas de sus propiedades, veremos lo que sucede a una aproximación mediante sumas finitas cuando el número de términos tiende a infinito.

Sumas finitas y notación sigma

La **notación sigma** nos permite escribir una suma con muchos términos en la forma compacta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n .$$

La letra griega Σ (sigma mayúscula, que corresponde a nuestra letra S) significa "suma". El **índice de la suma** k nos dice en dónde inicia la suma (el número debajo del símbolo Σ) y en dónde termina (el número arriba de Σ). Puede utilizarse cualquier letra para denotar al índice, pero es costumbre usar las letras i, j y k.

El índice k termina en $k = n$.

El símbolo de la suma (letra griega sigma)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_k es una fórmula para el k-ésimo término.

El índice k inicia en $k = 1$.

Por lo tanto, podemos escribir

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2,$$

y

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) = \sum_{i=1}^{100} f(i).$$

El límite inferior de la suma no tiene que ser 1; puede ser cualquier entero.

EJEMPLO 1

Una suma en notación sigma	La suma en forma extendida, un término para cada valor de k	El valor de la suma
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1 + 2 - 3 = -2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\sum_{k=4}^{5} \frac{k^2}{k-1}$	$\frac{4^2}{4-1} + \frac{5^2}{5-1}$	$\frac{16}{3} + \frac{25}{4} = \frac{139}{12}$

EJEMPLO 2 Exprese la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ en notación sigma.

Solución La fórmula que genera los términos cambia con el límite inferior de la suma, pero los términos generados permanecen iguales. Con frecuencia es más sencillo iniciar con $k = 0$ o $k = 1$, pero podemos iniciar con cualquier entero.

Iniciando con $k = 0$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$$

Iniciando con $k = 1$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k - 1)$$

Iniciando con $k = 2$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{6}(2k - 3)$$

Iniciando con $k = -3$: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=-3}^{1}(2k + 7)$$

Cuando tenemos una suma, tal como

$$\sum_{k=1}^{3}(k + k^2)$$

es posible reacomodar sus términos,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k + k^2) &= (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2)\\ &= (1 + 2 + 3) + (1^2 + 2^2 + 3^2) && \text{Reagrupar términos.}\\ &= \sum_{k=1}^{3} k + \sum_{k=1}^{3} k^2.\end{aligned}$$

Lo anterior ilustra una regla general para sumas finitas:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Cuatro de esas reglas se dan a continuación. Una prueba de que éstas son válidas puede obtenerse mediante inducción matemática (véase el apéndice 2).

Reglas algebraicas para sumas finitas

1. *Regla de la suma:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. *Regla de la diferencia:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. *Regla del múltiplo constante:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (c cualquier número)

4. *Regla del valor constante:* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$ (*c es cualquier valor constante*)

EJEMPLO 3 Demostramos el uso de las reglas algebraicas.

(a) $$\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$$ Regla de la diferencia y regla del múltiplo constante

(b) $$\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k = -1\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k$$ Regla del múltiplo constante

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}(k+4) = \sum_{k=1}^{3}k + \sum_{k=1}^{3}4$ Regla de la suma

$= (1+2+3)+(3\cdot 4)$ Regla del valor constante

$= 6+12 = 18$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$ Regla del valor constante ($1/n$ es constante) ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Con el paso del tiempo se han descubierto diversas fórmulas para los valores de sumas finitas. Las más famosas de éstas son la suma de los primeros n enteros (se dice que Gauss la descubrió cuando tenía 8 años) y las fórmulas para las sumas de los cuadrados y de los cubos de los primeros n enteros positivos.

EJEMPLO 4 Demuestre que la suma de los primeros n enteros positivos es

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución La fórmula nos indica que la suma de los primeros 4 enteros es

$$\frac{(4)(5)}{2} = 10.$$

Una suma verifica tal predicción:

$$1+2+3+4 = 10.$$

Para demostrar la fórmula en general, escribimos dos veces los términos de la suma, una vez hacia delante y una hacia atrás.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \end{array}$$

Si sumamos los dos términos en la primera columna obtendremos $1+n = n+1$. De forma análoga, si sumamos los dos términos en la segunda columna obtendremos $2+(n-1) = n+1$. Los dos términos en cualquier columna suman $n+1$. Cuando sumamos todas las n columnas obtenemos n términos, cada uno igual a $n+1$, para un total de $n(n+1)$. Ya que ésta es dos veces la cantidad deseada, la suma de los primeros n enteros es $(n)(n+1)/2$.

Las fórmulas para las sumas de los cuadrados y de los cubos de los primeros n enteros se demuestran utilizando inducción matemática (véase el apéndice 2). Las enunciamos aquí.

Los primeros n cuadrados: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Los primeros n cubos: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Límites de sumas finitas

Las aproximaciones mediante sumas finitas, analizadas en la sección 5.1, se hacen más precisas cuanto mayor sea el número de términos y conforme los anchos (longitudes) de los subintervalos se hagan más angostos. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular un valor límite cuando los anchos de los subintervalos tienden a cero y su número crece a infinito.

EJEMPLO 5 Determine el valor límite de las aproximaciones por sumas inferiores para el área de la región f bajo la gráfica de $y = 1 - x^2$ y por arriba del intervalo [0, 1] en el eje x usando rectángulos con el mismo ancho, cuyo ancho tiende a cero; el número de rectángulos tiende a infinito. (Véase la figura 5.4a).

Solución Calculamos una aproximación por suma inferior mediante n rectángulos del mismo ancho $\Delta x = (1 - 0)/n$, y luego vemos lo que sucede cuando $n \to \infty$. Iniciamos subdividiendo $[0, 1]$ en n subintervalos del mismo ancho

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

Cada subintervalo tiene ancho $1/n$. La función $1 - x^2$ es decreciente en $[0, 1]$ y su menor valor en un subintervalo se alcanza en el extremo derecho del subintervalo. Así que una suma inferior se construye con rectángulos cuya altura sobre el subintervalo $[(k-1)/n, k/n]$ es $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$, lo que da la suma

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \left[f\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \left[f\left(\frac{n}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right).$$

Escribimos esto en notación sigma y simplificamos.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Regla de la diferencia} \\
&= n \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Reglas del valor constante y del múltiplo constante} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Suma de los primeros } n \text{ cuadrados} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}. && \text{Numerador desarrollado.}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión para la suma inferior que se cumple para cualquier n. Si tomamos el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, veremos que las sumas inferiores convergen cuando el número de subintervalos aumenta y los anchos de los subintervalos tienden a cero:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Las aproximaciones mediante sumas inferiores convergen hacia $2/3$. Cualquier aproximación mediante suma finita $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(1/n)$ también converge hacia el mismo valor $2/3$. Esto es porque es posible mostrar que cualquier aproximación por suma finita está atrapada entre las aproximaciones mediante suma inferior y suma superior. Lo anterior nos lleva a *definir* el área de la región R como este valor límite. En la sección 5.3 estudiaremos los límites de tales aproximaciones finitas en un contexto general. ■

Sumas de Riemann

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

La teoría de límites de aproximaciones finitas fue formalizada por el matemático alemán Bernhard Riemann. Ahora presentamos la noción de *suma de Riemann*, que es la base de la teoría de la integral definida que estudiaremos en la siguiente sección.

Iniciamos con una función arbitraria acotada f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Al igual que la función mostrada en la figura 5.8, f puede tener valores negativos y positivos. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos no necesariamente del mismo ancho (o longitud) y formamos las sumas en la misma forma que lo hicimos para las aproximaciones finitas de la sección 5.1. Para hacerlo, seleccionamos $n - 1$ puntos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$ entre a y b, que satisfacen

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

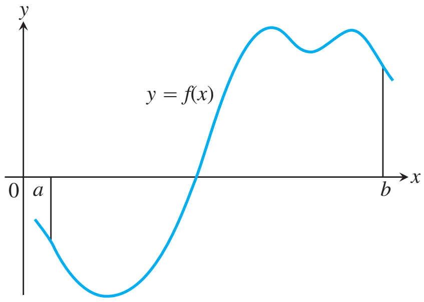


FIGURA 5.8 Una típica función continua $y = f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Para hacer consistente la notación, denotamos a a mediante x_0 y a b mediante x_n, por lo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

El conjunto

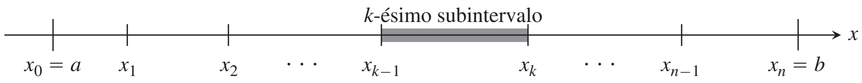
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

se denomina **partición** de $[a, b]$.

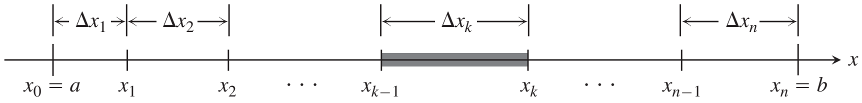
La partición P divide $[a, b]$ en n subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

El primero de estos subintervalos es $[x_0, x_1]$, el segundo es $[x_1, x_2]$ y el ***k*-ésimo subintervalo de** P es $[x_{k-1}, x_k]$, para k un entero entre 1 y n.



El ancho del primer subintervalo $[x_0, x_1]$ se denota mediante Δx_1, el ancho del segundo $[x_1, x_2]$ se denota Δx_2 y el ancho del k-ésimo subintervalo es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si todos los subintervalos n tienen el mismo ancho, entonces la anchura común Δx es igual a $(b - a)/n$.



En cada subintervalo seleccionamos algún punto. El punto elegido en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se denomina c_k. Luego, en cada subintervalo levantamos un rectángulo vertical que vaya desde el eje x hasta tocar la curva en $(c_k, f(c_k))$. Estos rectángulos pueden estar por arriba o por abajo del eje x, lo cual depende de si $f(c_k)$ es positiva o negativa, o en el eje x si $f(c_k) = 0$ (figura 5.9).

En cada subintervalo formamos el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Este producto es positivo, negativo o cero, lo que depende del signo de $f(c_k)$. Cuando $f(c_k) > 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es el área de un rectángulo con altura $f(c_k)$ y ancho Δx_k. Cuando $f(c_k) < 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es un número negativo, el negativo del área de un rectángulo de ancho Δx_k que va desde el eje x hasta el número negativo $f(c_k)$.

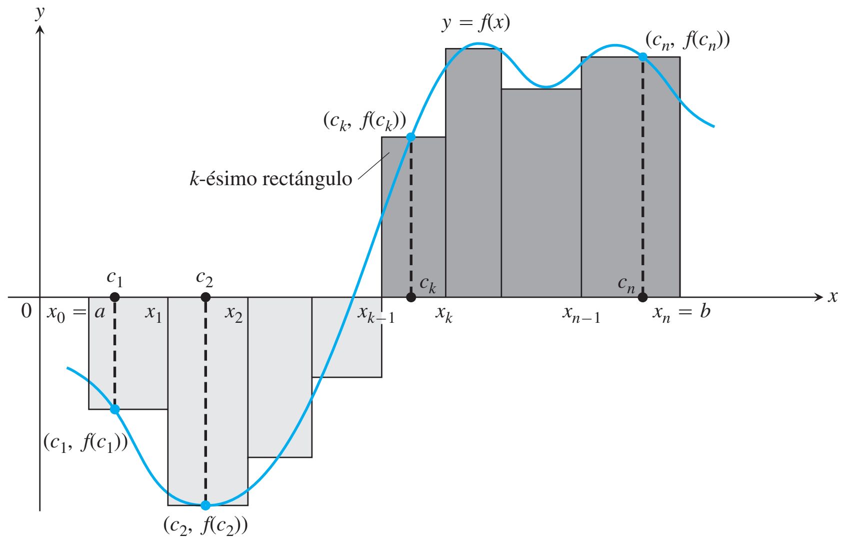


FIGURA 5.9 Los rectángulos aproximan la región entre la gráfica de la función $y = f(x)$ y el eje x. La figura 5.8 se amplió para resaltar la partición de $[a, b]$ y la selección de puntos que producen los rectángulos.

Por último, sumamos todos estos productos para obtener

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k\,.$$

La suma S_P se denomina **suma de Riemann para f en el intervalo $[a, b]$**. Existe un número infinito de estas sumas, lo que depende de la partición P que elijamos y la elección de puntos c_k en los intervalos. Por ejemplo, podríamos elegir n subintervalos con el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$ para dividir $[a, b]$ y luego elegimos el punto c_k como el extremo derecho de cada subintervalo cuando formamos la suma de Riemann (como lo hicimos en el ejemplo 5). Dicha elección nos lleva a la fórmula para la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Se obtienen fórmulas similares si seleccionamos c_k como el extremo izquierdo, o el punto medio, de cada subintervalo.

En los casos en los que todos los subintervalos tengan el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$, podemos hacerlos más angostos simplemente aumentando su número n. Cuando una partición tiene subintervalos de anchos distintos, es posible asegurar que éstos sean más angostos si se controla la anchura del subintervalo más ancho (más largo). Definimos la **norma** de una partición P, denotada por $\|P\|$, como la mayor longitud de todos los anchos de los subintervalos. Si $\|P\|$ es un número pequeño, entonces la anchura de todos los subintervalos en la partición P es pequeña. Examinemos un ejemplo con dichas ideas.

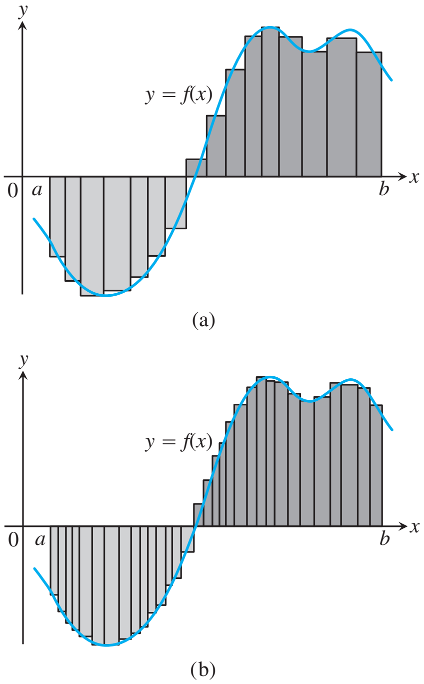
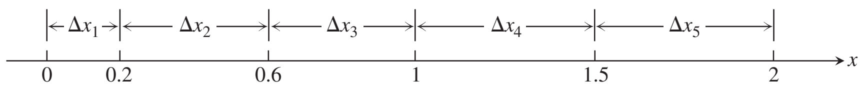


FIGURA 5.10 La curva de la figura 5.9 con rectángulo de particiones más finas de $[a, b]$. Particiones más finas dan lugar a colecciones de rectángulos con bases más angostas que aproximan con mayor precisión la región entre la gráfica de f y el eje x.

EJEMPLO 6 El conjunto $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ es una partición de $[0, 2]$. Existen cinco subintervalos de P: $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.6]$, $[0.6, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$:



Las longitudes de los subintervalos son $\Delta x_1 = 0.2$, $\Delta x_2 = 0.4$, $\Delta x_3 = 0.4$, $\Delta x_4 = 0.5$ y $\Delta x_5 = 0.5$. La longitud del subintervalo más largo es 0.5, así que la norma de la partición es $\|P\| = 0.5$. En este ejemplo, hay dos subintervalos con la misma longitud. ■

Cualquier suma de Riemann asociada con una partición de un intervalo cerrado $[a, b]$ define rectángulos que aproximan la región entre la gráfica de una función continua f y el eje x. Las particiones con norma que tienden a cero dan lugar a colecciones de rectángulos que aproximan dicha región con mayor precisión cada vez, como se sugiere en la figura 5.10. En la siguiente sección veremos si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces no importa cómo elijamos la partición P y los puntos c_k en sus subintervalos para construir una suma de Riemann, ya que hay un único valor límite al que se aproxima cuando el ancho de los subintervalos, controlados por la norma de la partición, tiende a cero.

Ejercicios 5.2

Notación sigma

Escriba las sumas en los ejercicios 1 a 6 sin la notación sigma. Luego evalúelas.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \operatorname{sen} k\pi$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

7. ¿Cuál de las siguientes expresa $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ en notación sigma?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

8. ¿Cuál de las siguientes expresa $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ en notación sigma?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} 2^{k}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1} 2^{k+2}$

9. ¿Qué fórmula no es equivalente a las otras dos?

a. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

10. ¿Qué fórmula no es equivalente a las otras dos?

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k-1)^2$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=-1}^{3}(k+1)^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1}k^2$

Exprese las sumas en los ejercicios 11 a 16 en notación sigma. La forma de su respuesta dependerá de la elección que haga del límite inferior de la suma.

11. $1+2+3+4+5+6$

12. $1+4+9+16$

13. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

14. $2+4+6+8+10$

15. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

16. $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

Valores de sumas finitas

17. Suponga que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$. Determine los valores de

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3a_k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{6}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$ **e.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_k-2a_k)$

18. Suponga que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$. Determine los valores de

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}8a_k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}250b_k$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+1)$ **d.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(b_k-1)$

Evalúe las sumas en los ejercicios 19 a 32.

19. a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

20. a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}k^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}k^3$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(-2k)$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{\pi k}{15}$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(3-k^2)$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k^2-5)$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k(3k+5)$

26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}k(2k+1)$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3}{225}+\left(\sum_{k=1}^{5}k\right)^3$

28. $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{7}k\right)^2-\sum_{k=1}^{7}\frac{k^3}{4}$

29. a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}3$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{500}7$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=3}^{264}10$

30. a. $\displaystyle\sum_{k=9}^{36}k$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=3}^{17}k^2$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=18}^{71}k(k-1)$

31. a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$

32. a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}+2n\right)$ **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{n}$ **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$

Sumas de Riemann

En los ejercicios 33 a 36 grafique cada función $f(x)$ en el intervalo dado. Divida el intervalo en cuatro subintervalos del mismo ancho. Luego agregue a su gráfica los rectángulos asociados con la suma de Riemann $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\,\Delta x_k$, puesto que, en el k-ésimo subintervalo, c_k es el **(a)** extremo izquierdo, **(b)** el extremo derecho, **(c)** el punto medio. (Elabore un dibujo separado para cada conjunto de rectángulos).

33. $f(x)=x^2-1,\quad [0,2]$

34. $f(x)=-x^2,\quad [0,1]$

35. $f(x)=\operatorname{sen} x,\quad [-\pi,\pi]$

36. $f(x)=\operatorname{sen} x+1,\quad [-\pi,\pi]$

37. Determine la norma de la partición $P=\{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$.

38. Determine la norma de la partición $P=\{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$.

Límites de sumas de Riemann

Para las funciones en los ejercicios 39 a 46, encuentre una fórmula para la suma de Riemann obtenida al dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales y utilizando el extremo derecho para cada c_k. Luego tome el límite de las sumas cuando $n\to\infty$ para calcular el área bajo la curva en $[a, b]$.

39. $f(x)=1-x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

40. $f(x)=2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

41. $f(x)=x^2+1$ en el intervalo $[0, 3]$.

42. $f(x)=3x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

43. $f(x)=x+x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

44. $f(x)=3x+2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

45. $f(x)=2x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

46. $f(x)=x^2-x^3$ en el intervalo $[-1, 0]$.

5.3 La integral definida

En la sección 5.2 investigamos el límite de una suma finita para una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ mediante n subintervalos del mismo ancho (o longitud), $(b-a)/n$. En esta sección consideraremos el límite de sumas de Riemann más generales, cuando la norma de la partición de $[a, b]$ tiende a cero. Para sumas de Riemann generales, los subintervalos de la partición no necesariamente tienen el mismo ancho. El proceso del límite nos lleva a la *definición de la integral* definida de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Definición de la integral definida

La definición de integral definida tiene como base la idea de que para ciertas funciones, cuando la norma de las particiones de $[a, b]$ tiende a cero, los valores de las correspondientes sumas de Riemann tienden a un valor límite J. Lo que queremos decir con este límite es que una suma de Riemann estará cercana al número J siempre que la norma de su partición sea suficientemente pequeña (de forma que todos los subintervalos tengan ancho suficientemente pequeño). Introducimos el símbolo ϵ como un número positivo pequeño que especifica qué tan cercano a J debe estar la suma de Riemann, y el símbolo δ como un segundo número positivo pequeño que especifica qué tan pequeña debe ser la norma para que eso suceda. Ahora definimos este límite con precisión.

DEFINICIÓN Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Decimos que un número J es la **integral definida de f en $[a, b]$** y que J es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ si se satisface la siguiente condición:

Dado cualquier número $\epsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$, tal que para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y cualquier elección de c_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - J \right| < \epsilon .$$

La definición incluye un proceso de límite en el que la norma de la partición tiende a cero. En los casos donde todos los subintervalos tienen el mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n$, es posible formar cada suma de Riemann como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right), \qquad \Delta x_k = \Delta x = (b-a)/n \text{ para toda } k$$

donde c_k se elige en el subintervalo Δx_k. Si existe el límite de estas sumas de Riemann cuando $n \to \infty$ y es igual a J, entonces J es la integral definida de f en $[a, b]$, así que

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x. \qquad \Delta x = (b-a)/n$$

Leibniz introdujo una notación para la integral definida que evidencia su construcción como el límite de sumas de Riemann. Él imaginó a las sumas finitas, $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ que se convertían en una suma infinita de valores de la función $f(x)$ multiplicada por anchos "infinitesimales" dx de los subintervalos. El símbolo de la suma $\sum$ se remplaza en el límite por el símbolo de la integral $\int$, cuyo origen es la letra "S". Los valores de la función $f(c_k)$ se remplazan por una selección continua de valores de la función $f(x)$. Los anchos de los subintervalos Δx_k se convierten en la diferencial dx. Es como si sumáramos todos los productos de la forma $f(x) \cdot dx$ cuando x va de a a b. Aunque la notación captura el proceso de construcción de una integral, es la definición de Riemann la que da un significado preciso de la integral definida.

El símbolo para el número J en la definición de integral definida es

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

que se lee "la integral de a a b de f de x de x" o "la integral de a a b de f de x con respecto a x". Las partes componentes en el símbolo de la integral también tienen nombres:

Límite superior de integración

La función es el integrando.

Signo de la integral

x es la variable de integración.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Integral de } f \text{ de } a \text{ a } b}$$

Límite inferior de integración

Cuando usted encuentra el valor de la integral, ha evaluado la integral.

Cuando la condición en la definición se satisface, decimos que las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ **convergen** a la integral definida $J = \int_a^b f(x)\,dx$ y que f es **integrable** en $[a, b]$.

Tenemos muchas opciones para una partición P con norma que tienda a cero y muchas elecciones de los puntos c_k para cada partición. La integral definida existe cuando siempre obtenemos el mismo límite J, sin importar cuáles elecciones se hagan. Cuando el límite existe, lo escribimos como la integral definida

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Cuando cada partición tiene n subintervalos iguales, cada uno de ancho $\Delta x = (b - a)/n$, también escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x = J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite de cualquier suma de Riemann siempre se toma cuando la norma de la partición tiende a cero y el número de subintervalos tiende a infinito.

El valor de la integral definida de una función en cualquier intervalo particular depende de la función, no de la letra que elijamos para representar a la variable independiente. Si decidimos utilizar t o u en vez de x, simplemente escribimos la integral como

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(u)\,du \qquad \text{en vez de} \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

No importa cómo escribamos la integral, es el mismo número que se definió como un límite de sumas de Riemann. Ya que no importa la letra que utilicemos, a la variable de integración se le llama **variable muda**.

Funciones integrables y funciones no integrables

No toda función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable allí, incluso si la función está acotada. Esto es, las sumas de Riemann para algunas funciones pueden no converger hacia el mismo valor límite, o incluso no converger hacia valor alguno. Un desarrollo completo de exactamente cuáles funciones definidas en $[a, b]$ son integrables requiere de análisis matemático avanzado, pero por fortuna la mayoría de las funciones que aparecen comúnmente en las aplicaciones son integrables. En particular, toda función *continua* en $[a, b]$ es integrable en ese intervalo y también es integrable toda función que tenga no más que un número finito de discontinuidades de salto en $[a, b]$. (Estas últimas se denominan *funciones continuas por partes* y se definen en los ejercicios adicionales 11 a 18 al final de este capítulo). El siguiente teorema, que se demuestra en cursos más avanzados, establece dichos resultados.

TEOREMA 1: Integrabilidad de funciones continuas Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$ o si f tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto allí, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y f es integrable en $[a, b]$.

La idea detrás del teorema 1 para funciones continuas se expone en los ejercicios 86 y 87. Brevemente, cuando f es continua, es posible elegir cada c_k de manera que $f(c_k)$ dé el valor máximo de f en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, lo que da como resultado una suma superior. Asimismo, podemos elegir c_k para que dé el valor mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$ para obtener una suma inferior. Es posible demostrar que las sumas superior e inferior convergen hacia el mismo valor límite cuando la norma de la partición P tiende a cero. Además, cada suma de Riemann está atrapada entre los valores de las sumas superior e inferior, así que toda suma de Riemann también converge hacia el mismo límite. Por lo tanto, el número J en la definición de la integral definida existe y la función continua f es integrable en $[a, b]$.

Para que una función no sea integrable, necesita ser suficientemente discontinua para que la región entre su gráfica y el eje x no pueda aproximarse bien por rectángulos cada vez más delgados. El siguiente ejemplo muestra una función que no es integrable en un intervalo cerrado.

EJEMPLO 1 La función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no tiene integral de Riemann en [0, 1]. La razón de esto es el hecho de que entre cualesquiera dos números existen tanto un número racional como un número irracional. Así, la función salta hacia arriba y hacia abajo demasiadas veces en [0, 1] para permitir que la región debajo de su gráfica y arriba del eje x se pueda aproximar mediante rectángulos, sin importar qué tan delgados sean. De hecho, mostramos que las aproximaciones por sumas superiores y las aproximaciones por sumas inferiores convergen hacia valores límite diferentes.

Si seleccionamos una partición P de [0, 1] y elegimos c_k como un punto que da el valor máximo para f en $[x_{k-1}, x_k]$, entonces la suma de Riemann correspondiente es

$$U = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (1)\,\Delta x_k = 1,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene un número racional en donde $f(c_k) = 1$. Observe que las longitudes de los intervalos en la partición suman 1, $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$. Así que cada suma de Riemann es igual a 1 y un límite de las sumas de Riemann al usar estas elecciones es igual a 1.

Por otra parte, si elegimos c_k como el punto que da el valor mínimo para f en $[x_{k-1}, x_k]$, entonces la suma de Riemann es

$$L = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (0)\,\Delta x_k = 0,$$

ya que cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ contiene un número irracional c_k, donde $f(c_k) = 0$. El límite de las sumas de Riemann, al usar estas elecciones, es igual a cero. Puesto que el límite depende de las elecciones de los c_k, la función f no es integrable. ■

El teorema 1 no indica cómo *calcular* las integrales definidas. Un método de cálculo se desarrollará en la sección 5.4 mediante una conexión con el proceso de obtener antiderivadas.

Propiedades de las integrales definidas

Al definir $\int_a^b f(x)\,dx$ como un límite de sumas $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$, nos movemos de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. ¿Qué sucede si nos movemos de derecha a izquierda, iniciando con $x_0 = b$ y terminando con $x_n = a$? Cada Δx_k en la suma de Riemann cambiaría de signo, con $x_k - x_{k-1}$ ahora negativo en vez de positivo. Con la misma elección de los c_k en cada subintervalo, el signo de cualquier suma de Riemann se modificaría, así como el signo del límite, la integral $\int_b^a f(x)\,dx$. Como no habíamos dado previamente un significado a la integración hacia atrás, esto nos lleva a definir

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Aunque sólo hemos definido la integral en $[a, b]$ cuando $a < b$, es conveniente tener una definición para la integral en $[a, b]$ cuando $a = b$, para la integral en un intervalo de ancho cero. Como $a = b$ implica $\Delta x = 0$, siempre que $f(a)$ exista, definimos

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

El teorema 2 establece propiedades básicas de las integrales, dadas como reglas que éstas satisfacen, incluyendo las dos últimas. Tales reglas se vuelven muy útiles en el proceso de calcular integrales. Nos referiremos a ellas en forma repetida para simplificar nuestros cálculos.

Las reglas 2 a la 7 tienen interpretaciones geométricas, las cuales se muestran en la figura 5.11. Las gráficas en dichas figuras son funciones positivas, pero las reglas se aplican a funciones integrables generales.

TEOREMA 2 Cuando f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$, la integral definida satisface las reglas de la tabla 5.4.

TABLA 5.4 Reglas que satisfacen las integrales definidas

1. *Orden de integración:* $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — Una definición

2. *Intervalo con ancho cero:* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — Una definición cuando $f(a)$ existe.

3. *Múltiplo constante:* $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — k cualquier constante.

4. *Suma y diferencia:* $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. *Aditividad:* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

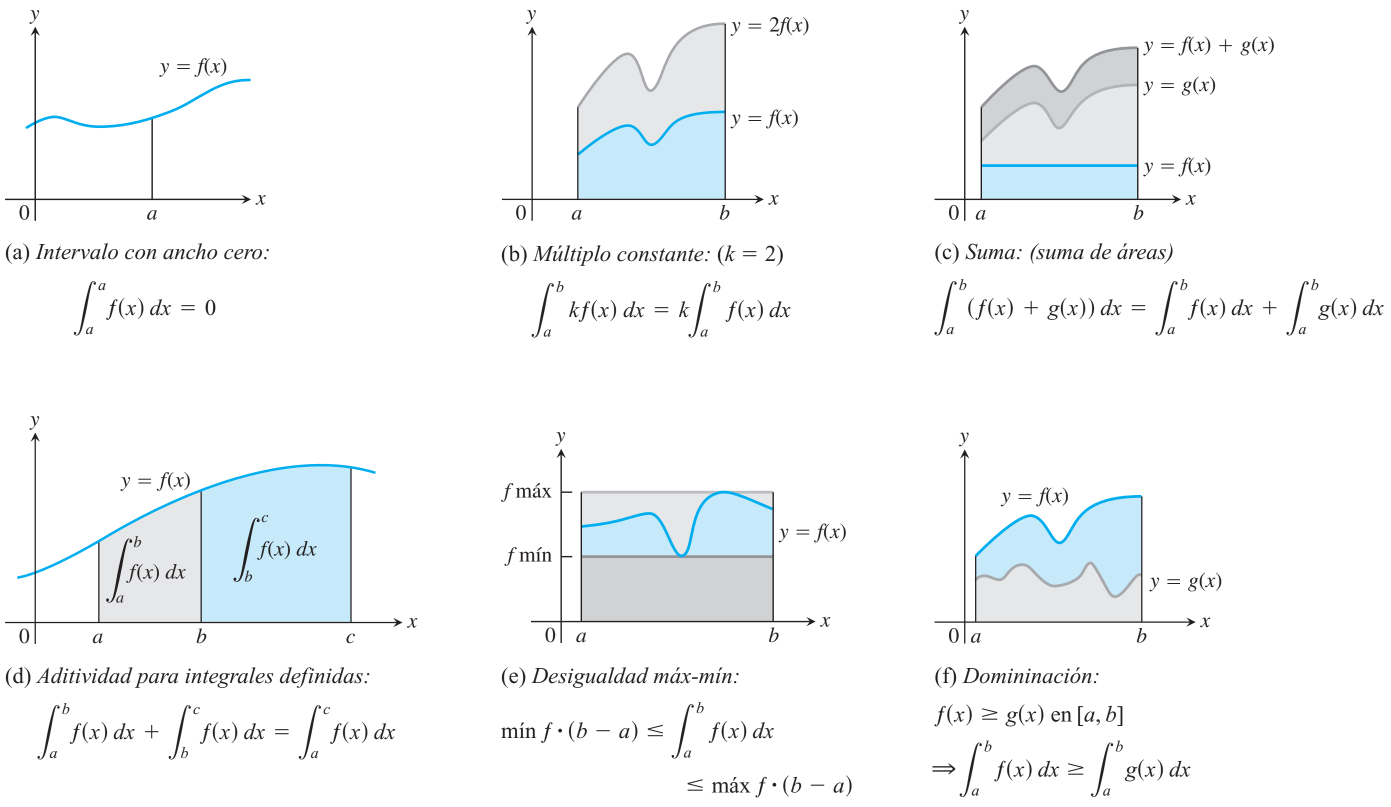
6. *Desigualdad máx-mín:* Si f tiene un valor máximo, máx f, y un valor mínimo, mín f, en $[a, b]$, entonces

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

7. *Dominación:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \ge 0 \text{ en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \qquad \text{(Caso especial)}$$



(a) *Intervalo con ancho cero:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(b) *Múltiplo constante:* ($k = 2$)

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) *Suma: (suma de áreas)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(d) *Aditividad para integrales definidas:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(e) *Desigualdad máx-mín:*

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a)$$

(f) *Domininación:*

$f(x) \ge g(x)$ en $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURA 5.11 Interpretaciones geométricas de las reglas 2 a 7 de la tabla 5.4.

Mientras que las reglas 1 y 2 son definiciones, las reglas 3 a 7 de la tabla 5.4 deben demostrarse. La siguiente es una prueba de la regla 6. Pueden darse pruebas similares para verificar las otras propiedades de la tabla 5.4.

Prueba de la regla 6 La regla 6 indica que la integral de f en $[a, b]$ nunca es menor que el valor mínimo de f por la longitud del intervalo y nunca es mayor que el valor máximo de f por la longitud del intervalo. La razón es que para cada partición de $[a, b]$ y para cada elección de los puntos c_k,

$$\begin{aligned}
\text{mín } f \cdot (b-a) &= \text{mín } f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a \\
&= \sum_{k=1}^{n} \text{mín } f \cdot \Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k && \text{mín } f \leq f(c_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \text{máx } f \cdot \Delta x_k && f(c_k) \leq \text{ máx } f \\
&= \text{máx } f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&= \text{máx } f \cdot (b-a).
\end{aligned}$$

En resumen, todas las sumas de Riemann para f en $[a, b]$ satisfacen la desigualdad

$$\text{mín } f \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \leq \text{ máx } f \cdot (b-a).$$

De aquí que su límite, la integral, también. ■

EJEMPLO 2 Para ilustrar algunas de las reglas, suponemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\, dx = -2, \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} h(x)\, dx = 7.$$

Entonces,

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)\, dx = -\int_{1}^{4} f(x)\, dx = -(-2) = 2$ Regla 1

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\, dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\, dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\, dx$ Reglas 3 y 4

$$= 2(5) + 3(7) = 31$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx = 5 + (-2) = 3$ Regla 5 ■

EJEMPLO 3 Demuestre que el valor de $\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx$ es menor o igual que $\sqrt{2}$.

Solución La desigualdad máx-mín para integrales definidas (regla 6) dice que mín $f \cdot (b-a)$ es una *cota inferior* para el valor de $\int_a^b f(x)\, dx$ y que máx $f \cdot (b-a)$ es una *cota superior*. El valor máximo de $\sqrt{1 + \cos x}$ en $[0, 1]$ es $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, por lo que

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \cos x}\, dx \leq \sqrt{2} \cdot (1 - 0) = \sqrt{2}.$$ ■

Área debajo de la gráfica de una función no negativa

Ahora regresamos al problema que inició este capítulo: definir lo que queremos decir con el *área* de una región que tiene fronteras curvas. En la sección 5.1 aproximamos el área debajo de la gráfica de una función continua no negativa mediante varios tipos de sumas finitas de áreas de rectángulos que enmarcan la región —sumas superiores, sumas inferiores y sumas usando los puntos medios de cada subintervalo—, todas ellas casos de sumas de Riemann construidas de formas especiales. El teorema 1 garantiza que todas estas sumas de Riemann convergen a una sola integral definida cuando la norma de las particiones tiende a cero y el número de subintervalos tiende a infinito. Como consecuencia, ahora podemos *definir* el área debajo de la gráfica de una función integrable no negativa como el valor de esa integral definida.

DEFINICIÓN Si $y = f(x)$ es no negativa e integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **área debajo de la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$** es la integral de f de a a b,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es la primera vez que tenemos una definición rigurosa para el área de una región cuya frontera es la gráfica de cualquier función continua. Ahora aplicamos esto a un ejemplo sencillo, el área debajo de una línea recta; es posible verificar que nuestra definición coincide con nuestra noción previa de área.

EJEMPLO 4 Calcule $\int_0^b x\,dx$ y determine el área A debajo de $y = x$ en el intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

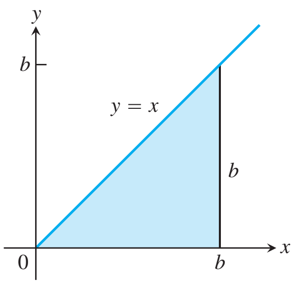


FIGURA 5.12 La región en el ejemplo 4 es un triángulo.

Solución La región de interés es un triángulo (figura 5.12). Calculamos el área de dos maneras.

(a) Para calcular la integral definida como el límite de sumas de Riemann, calculamos $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$ para particiones cuyas normas tiendan a cero. El teorema 1 nos indica que no importa cómo seleccionemos las particiones o los puntos c_k mientras las normas tiendan a cero. Todas las elecciones dan exactamente el mismo límite. Así que consideramos la partición P que subdivide el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = (b - a)/n = b/n$ y elegimos c_k como el extremo derecho de cada subintervalo. La partición es

$$P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \ldots, \frac{nb}{n}\right\} \text{ y } c_k = \frac{kb}{n}. \text{ Por lo que}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} && f(c_k) = c_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k && \text{Regla del múltiplo constante} \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} && \text{Suma de los primeros } n \text{ enteros} \\
&= \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

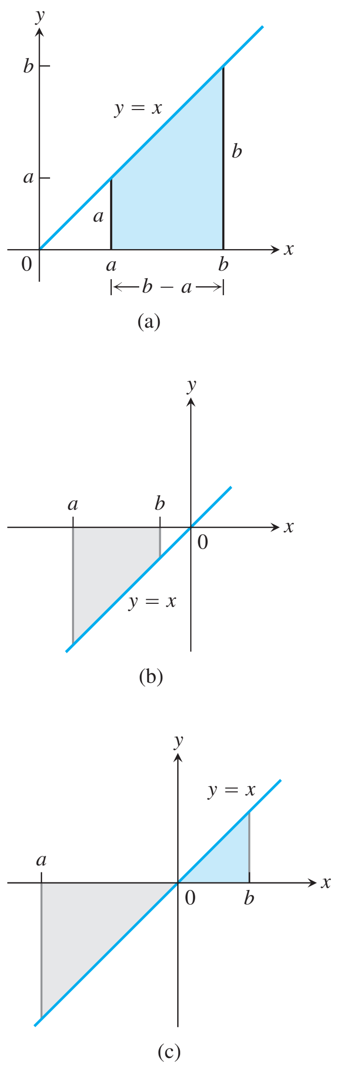


FIGURA 5.13 (a) El área de esta región trapezoidal es $A = (b^2 - a^2)/2$.
(b) La integral definida en la ecuación (1) proporciona el negativo del área de esta región trapezoidal. c) La integral definida en la ecuación (1) da el área de la región triangular en naranja, sumada al negativo del área de la región triangular en gris claro.

Cuando $n \to \infty$ y $\|P\| \to 0$, esta última expresión de la derecha tiene como límite $b^2/2$. Por lo tanto,

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}.$$

(b) Ya que el área es igual a la integral definida para una función no negativa, rápidamente obtendremos la integral definida utilizando la fórmula para el área de un triángulo que tiene base de longitud b y altura $y = b$. El área es $A = (1/2)\,b \cdot b = b^2/2$. De nuevo, concluimos que $\int_0^b x\,dx = b^2/2$. ■

El ejemplo 4 puede generalizarse para integrar $f(x) = x$ en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$, $0 < a < b$.

$$\begin{aligned} \int_a^b x\,dx &= \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Regla 5} \\ &= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx && \text{Regla 1} \\ &= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. && \text{Ejemplo 4} \end{aligned}$$

En conclusión, tenemos la siguiente regla para integrar $f(x) = x$:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b \qquad (1)$$

Estos cálculos dan el área de un trapecio (figura 5.13a). La ecuación (1) sigue siendo válida cuando a y b son negativos. Cuando $a < b < 0$, el valor de la integral definida $(b^2 - a^2)/2$ es un número negativo, el negativo del área de un trapecio que cae hasta la recta $y = x$ debajo del eje x (figura 5.13b). Cuando $a < 0$ y $b > 0$, la ecuación (1) sigue siendo válida y la integral definida proporciona la diferencia entre dos áreas, el área debajo de la gráfica y por arriba de $[0, b]$ menos el área debajo de $[a, 0]$ y arriba de la gráfica (figura 5.13c).

Los siguientes resultados también pueden establecerse utilizando un cálculo con suma de Riemann similar al del ejemplo 4 (ejercicios 63 y 65).

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a), \qquad c \text{ cualquier constante} \qquad (2)$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b \qquad (3)$$

Revisión del valor promedio de una función constante

En la sección 5.1, de manera informal, introdujimos el valor promedio de una función continua no negativa f en un intervalo $[a, b]$, lo que nos lleva a definir este promedio como el área debajo de la gráfica de $y = f(x)$ dividida entre $b - a$. En notación de integrales escribimos ésta como

$$\text{Promedio} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es posible utilizar dicha fórmula para dar una definición precisa del valor promedio de cualquier función continua (o integrable) si es positiva, negativa o ambas.

De forma alternativa, podemos utilizar el siguiente razonamiento. Iniciamos con la idea de la aritmética de que el promedio de n números es su suma dividida entre n. Es posible que una función continua f en $[a, b]$ tenga un número infinito de valores, pero podemos tomar una muestra de ellos de manera ordenada. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos del mismo ancho

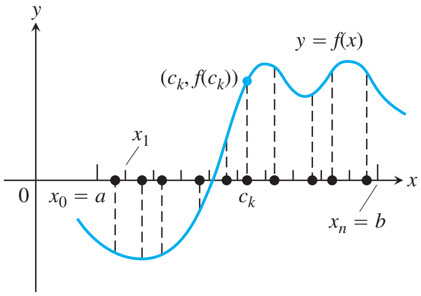


FIGURA 5.14 Una muestra de valores de una función en un intervalo $[a, b]$.

$\Delta x = (b - a)/n$ y evaluamos f en un punto c_k en cada uno de ellos (figura 5.14). El promedio de los n valores de la muestra es

$$\begin{aligned}\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\\ &= \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n}\text{, así que } \frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}\\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x && \text{Regla del múltiplo constante}\end{aligned}$$

El promedio se obtiene dividiendo una suma de Riemann para f en $[a, b]$ entre $(b - a)$. Cuando aumentamos el tamaño de la muestra y hacemos que la norma de la partición tienda a cero, el promedio tiende a $(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$. Ambos enfoques nos conducen a la siguiente definición.

DEFINICIÓN Si f es integrable en $[a, b]$, entonces su **valor promedio en $[a, b]$**, también llamado **media**, es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

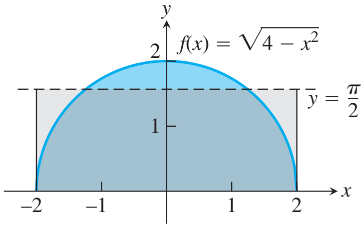


FIGURA 5.15 El valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$ es $\pi/2$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Determine el valor promedio de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$.

Solución Reconocemos a $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ como una función cuya gráfica es la semicircunferencia de radio 2 con centro en el origen (figura 5.15).

El área entre la semicircunferencia y el eje x de -2 a 2 puede calcularse usando la fórmula de geometría

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot \pi(2)^2 = 2\pi.$$

Puesto que f es no negativa, el área también es el valor de la integral de f de -2 a 2,

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = 2\pi.$$

Por lo tanto, el valor promedio de f es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

El teorema 3 de la siguiente sección afirma que el área de la semicircunferencia superior en $[-2, 2]$ es la misma que el área del rectángulo cuya altura es el valor promedio de f en $[-2, 2]$ (figura 5.15). ■

Ejercicios 5.3

Interpretación de límites como integrales

Exprese los límites en los ejercicios 1 a 8 como integrales definidas.

1. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 2]$
2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} 2c_k^3\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-1, 0]$
3. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k)\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[-7, 5]$
4. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{c_k}\right)\Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 4]$
5. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - c_k}\,\Delta x_k$, donde P es una partición de $[2, 3]$

6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2}\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, 1]$

7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k)\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[-\pi/4, 0]$

8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan c_k)\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/4]$

Uso de las reglas para integrales definidas

9. Suponga que f y g son integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

Utilice las reglas de la tabla 5.4 para determinar

a. $\int_2^2 g(x)\,dx$ b. $\int_5^1 g(x)\,dx$

c. $\int_1^2 3f(x)\,dx$ d. $\int_2^5 f(x)\,dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ f. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

10. Suponga que f y h son integrables y que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1, \quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5, \quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4.$$

Utilice las reglas de la tabla 5.4 para determinar

a. $\int_1^9 -2f(x)\,dx$ b. $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx$

c. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx$ d. $\int_9^1 f(x)\,dx$

e. $\int_1^7 f(x)\,dx$ f. $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,dx$

11. Suponga que $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$. Determine

a. $\int_1^2 f(u)\,du$ b. $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

c. $\int_2^1 f(t)\,dt$ d. $\int_1^2 [-f(x)]\,dx$

12. Suponga que $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$. Determine

a. $\int_0^{-3} g(t)\,dt$ b. $\int_{-3}^0 g(u)\,du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx$ d. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr$

13. Suponga que f es integrable y que $\int_0^3 f(z)\,dz = 3$ y $\int_0^4 f(z)\,dz = 7$. Determine

a. $\int_3^4 f(z)\,dz$ b. $\int_4^3 f(t)\,dt$

14. Suponga que h es integrable y que $\int_{-1}^1 h(r)\,dr = 0$ y $\int_{-1}^3 h(r)\,dr = 6$. Determine

a. $\int_1^3 h(r)\,dr$ b. $-\int_3^1 h(u)\,du$

Uso de áreas conocidas para determinar integrales

En los ejercicios 15 a 22, grafique los integrandos y utilice las áreas para evaluar las integrales.

15. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ 16. $\int_{1/2}^{3/2} (-2x + 4)\,dx$

17. $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$ 18. $\int_{-4}^0 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

19. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$ 20. $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx$

21. $\int_{-1}^1 (2 - |x|)\,dx$ 22. $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

Utilice las áreas para evaluar las integrales en los ejercicios 23 a 28.

23. $\int_0^b \frac{x}{2}\,dx, \quad b > 0$ 24. $\int_0^b 4x\,dx, \quad b > 0$

25. $\int_a^b 2s\,ds, \quad 0 < a < b$ 26. $\int_a^b 3t\,dt, \quad 0 < a < b$

27. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en **a.** $[-2, 2]$, **b.** $[0, 2]$

28. $f(x) = 3x + \sqrt{1 - x^2}$ en **a.** $[-1, 0]$, **b.** $[-1, 1]$

Evaluación de integrales definidas

Utilice los resultados de las ecuaciones (1) y (3) para evaluar las integrales en los ejercicios 29 a 40.

29. $\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx$ 30. $\int_{0.5}^{2.5} x\,dx$ 31. $\int_\pi^{2\pi} \theta\,d\theta$

32. $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,dr$ 33. $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,dx$ 34. $\int_0^{0.3} s^2\,ds$

35. $\int_0^{1/2} t^2\,dt$ 36. $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,d\theta$ 37. $\int_a^{2a} x\,dx$

38. $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,dx$ 39. $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,dx$ 40. $\int_0^{3b} x^2\,dx$

Utilice las reglas de la tabla 5.4 y las ecuaciones (1) a (3) para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 50.

41. $\int_3^1 7\,dx$ 42. $\int_0^2 5x\,dx$

43. $\int_0^2 (2t - 3)\,dt$ 44. $\int_0^{\sqrt{2}} \left(t - \sqrt{2}\right) dt$

45. $\int_2^1 \left(1 + \frac{z}{2}\right) dz$ 46. $\int_3^0 (2z - 3)\,dz$

47. $\int_1^2 3u^2\,du$ 48. $\int_{1/2}^1 24u^2\,du$

49. $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,dx$ 50. $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,dx$

Determinación del área mediante integrales definidas

En los ejercicios 51 a 54, utilice una integral definida para determinar el área de la región entre la curva dada y el eje x en el intervalo $[0, b]$.

51. $y = 3x^2$ 52. $y = \pi x^2$

53. $y = 2x$ 54. $y = \frac{x}{2} + 1$

Determinación del valor promedio

En los ejercicios 55 a 62, grafique la función y determine su valor promedio en el intervalo dado.

55. $f(x) = x^2 - 1$ en $\left[0, \sqrt{3}\right]$

56. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ en $[0, 3]$

57. $f(x) = -3x^2 - 1$ en $[0, 1]$

58. $f(x) = 3x^2 - 3$ en $[0, 1]$

59. $f(t) = (t - 1)^2$ en $[0, 3]$

60. $f(t) = t^2 - t$ en $[-2, 1]$

61. $g(x) = |x| - 1$ en **a.** $[-1, 1]$, **b.** $[1, 3]$, y **c.** $[-1, 3]$

62. $h(x) = -|x|$ en **a.** $[-1, 0]$, **b.** $[0, 1]$, y **c.** $[-1, 1]$

Integrales definidas como límites

Utilice el método del ejemplo 4a para evaluar las integrales definidas en los ejercicios 63 a 70.

63. $\displaystyle\int_a^b c\,dx$

64. $\displaystyle\int_0^2 (2x + 1)\,dx$

65. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx, \quad a < b$

66. $\displaystyle\int_{-1}^0 (x - x^2)\,dx$

67. $\displaystyle\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

68. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,dx$

69. $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx, \quad a < b$

70. $\displaystyle\int_0^1 (3x - x^3)\,dx$

Teoría y ejemplos

71. ¿Qué valores de a y b maximizan el valor de

$$\int_a^b (x - x^2)\,dx?$$

(*Sugerencia:* Pregúntese dónde es positivo el integrando).

72. ¿Qué valores de a y b minimizan el valor de

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\,dx?$$

73. Utilice la desigualdad máx-mín para determinar cotas superior e inferior para el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

74. (*Continuación del ejercicio 73*). Utilice la desigualdad máx-mín para determinar cotas superior e inferior para

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^2}\,dx \quad \text{y} \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

Súmelas para llegar a una mejor estimación de

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx.$$

75. Demuestre que no es posible que el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ sea 2.

76. Demuestre que el valor de $\int_0^1 \sqrt{x + 8}\,dx$ está entre $2\sqrt{2} \approx 2.8$ y 3.

77. Integrales de funciones no negativas Utilice la desigualdad máx-mín para mostrar que si f es integrable, entonces

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

78. Integrales de funciones no positivas Demuestre que si f es integrable, entonces

$$f(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq 0.$$

79. Utilice la desigualdad $\operatorname{sen} x \leq x$, que se cumple para $x \geq 0$, para determinar una cota superior para el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$.

80. La desigualdad $\sec x \geq 1 + (x^2/2)$ se cumple en $(-\pi/2, \pi/2)$. Utilícela para determinar una cota inferior para el valor de $\int_0^1 \sec x\,dx$.

81. Si prom(f) en realidad es un valor típico de la función integrable $f(x)$ en $[a, b]$, entonces la función constante prom(f) debe tener la misma integral en $[a, b]$ que f. ¿Es así? Esto es, ¿se cumple que

$$\int_a^b \operatorname{prom}(f)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx?$$

Justifique su respuesta.

82. Sería bueno que los valores promedio de funciones integrables obedecieran las siguientes reglas en un intervalo $[a, b]$.

a. $\operatorname{prom}(f + g) = \operatorname{prom}(f) + \operatorname{prom}(g)$

b. $\operatorname{prom}(kf) = k \operatorname{prom}(f)$ (cualquier número k)

c. $\operatorname{prom}(f) \leq \operatorname{prom}(g)$ si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$.

¿Se cumplen estas reglas? Justifique sus respuestas.

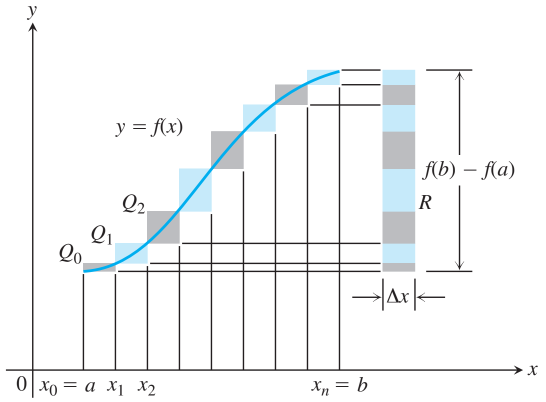
83. Sumas superiores e inferiores para funciones crecientes

a. Suponga que la gráfica de una función continua $f(x)$ sube constantemente cuando x se desplaza de izquierda a derecha a lo largo de un intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Si tenemos como referencia la siguiente figura, demuestre que la diferencia entre las sumas superior e inferior para f en esta partición puede representarse gráficamente como el área de un rectángulo R, cuyas dimensiones son $[f(b) - f(a)]$ por Δx. (*Sugerencia:* Considere que la diferencia $U - L$ es la suma de las áreas de los rectángulos cuyas diagonales $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_{n-1}Q_n$ están a lo largo de la curva. No hay traslape cuando estos rectángulos se desplazan horizontalmente para formar R).

b. Suponga que en vez de que sean iguales, las longitudes Δx_k de los subintervalos en la partición de $[a, b]$ son de tamaño diferente. Demuestre que

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\,\Delta x_{\text{máx}}, \text{ donde}$$

$\Delta x_{\text{máx}}$ es la norma de P, de aquí que $\lim_{\|P\| \to 0}(U - L) = 0$.



84. Sumas superiores e inferiores de funciones decrecientes (*Continuación del ejercicio 83*).

a. Dibuje una figura como la del ejercicio 83 para una función continua $f(x)$ cuyos valores disminuyan constantemente, cuando x se desplaza de izquierda a derecha a lo largo del intervalo $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ en subintervalos de igual longitud. Determine una expresión para $U - L$, que es análoga a la que encontró para $U - L$ en el ejercicio 83a.

b. Suponga que en vez de ser iguales, las longitudes Δx_k de los subintervalos de P varían de tamaño. Demuestre que se sigue cumpliendo la desigualdad

$$U - L \leq |f(b) - f(a)|\,\Delta x_{\text{máx}}$$

del ejercicio 83b, de aquí que $\lim_{\|P\|\to 0}(U - L) = 0$.

85. Utilice la fórmula

$$\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} 2h + \operatorname{sen} 3h + \cdots + \operatorname{sen} mh = \frac{\cos(h/2) - \cos((m + (1/2))h)}{2\operatorname{sen}(h/2)}$$

para determinar en dos pasos el área debajo de la curva $y = \operatorname{sen} x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$:

a. Divida el intervalo $[0, \pi/2]$ en n subintervalos de la misma longitud y calcule la suma superior correspondiente; luego,

b. Determine el límite de U cuando $n \to \infty$ y $\Delta x = (b - a)/n \to 0$.

86. Suponga que f es continua y no negativa en $[a, b]$, como en la siguiente figura. Insertando los puntos

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

como se muestra, divida $[a, b]$ en n subintervalos de longitudes $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$, que no necesariamente son iguales.

a. Si $m_k = \text{mín}\{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{-ésimo subintervalo}\}$, explique la relación entre la **suma inferior**

$$L = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + \cdots + m_n\,\Delta x_n$$

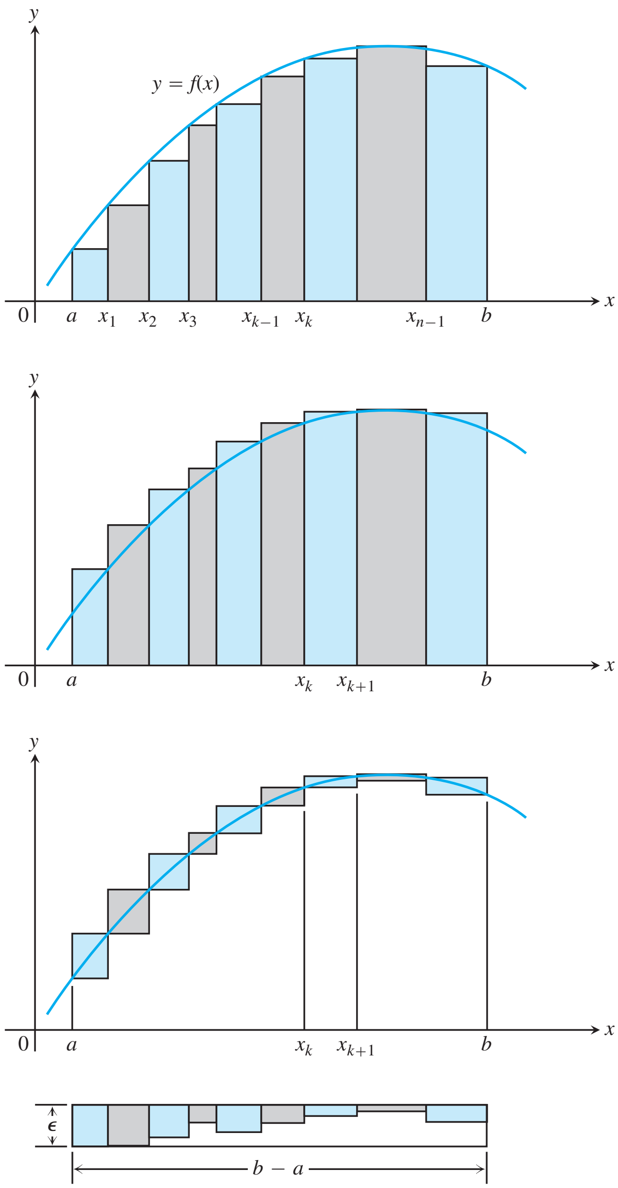
y las regiones sombreadas en la primera parte de la figura.

b. Si $M_k = \text{máx}\{f(x) \text{ para } x \text{ en el } k\text{-ésimo subintervalo}\}$, explique la relación entre la **suma superior**

$$U = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + \cdots + M_n\,\Delta x_n$$

y las regiones sombreadas en la segunda parte de la figura.

c. Explique la relación entre $U - L$ y las regiones sombreadas a lo largo de la curva en la tercera parte de la figura.



87. Decimos que f es **uniformemente continua** en $[a, b]$ si dada cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que si x_1, x_2 están en $[a, b]$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Puede demostrarse que una función continua en $[a, b]$ es uniformemente continua. Utilice esto y la figura del ejercicio 86 para mostrar que si f es continua y se da $\epsilon > 0$, es posible hacer $U - L \leq \epsilon \cdot (b - a)$ haciendo el mayor de los Δx_k suficientemente pequeño.

88. Si usted promedia 30 mi/h en un viaje de 150 millas y luego regresa las mismas 150 millas a una tasa de 50 mi/h, ¿cuál es su rapidez promedio para el viaje completo? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Si su SAC puede dibujar rectángulos asociados con sumas de Riemann, utilícelo para trazar los rectángulos asociados con las sumas de Riemann que convergen a las integrales en los ejercicios 89 a 94. En cada caso, utilice $n = 4$, 10, 20 y 50 subintervalos de la misma longitud.

89. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\,dx = \frac{1}{2}$

90. $\int_0^1 (x^2 + 1)\, dx = \frac{4}{3}$

91. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0$

92. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, dx = 1$

93. $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$

94. $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ (El valor de la integral es alrededor de 0.693)

En los ejercicios 95 a 98, utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos:

a. Grafique las funciones en el intervalo dado.

b. Divida el intervalo en $n = 100$, 200 y 1000 subintervalos de la misma longitud, luego evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

c. Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso (b).

d. Despeje x de la ecuación $f(x) =$ (valor promedio); para ello, use el valor promedio calculado en el inciso c) para la partición de $n = 1000$ subintervalos.

95. $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

96. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$

97. $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

98. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

5.4 El teorema fundamental del cálculo

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Sir Isaac Newton
(1642–1727)

En esta sección presentamos el teorema fundamental del cálculo, que es el teorema central del cálculo integral. El teorema relaciona la integración y la diferenciación, y nos permite calcular integrales mediante una antiderivada de la función integrando en vez de tener que tomar límites de sumas de Riemann, como lo hicimos en la sección 5.3. Leibniz y Newton aprovecharon dicha relación e iniciaron los desarrollos matemáticos que avivaron la revolución científica durante los siguientes 200 años.

En el desarrollo de nuestro análisis presentamos una versión integral del teorema del valor medio, que es otro teorema importante del cálculo integral y se utiliza para demostrar el teorema fundamental.

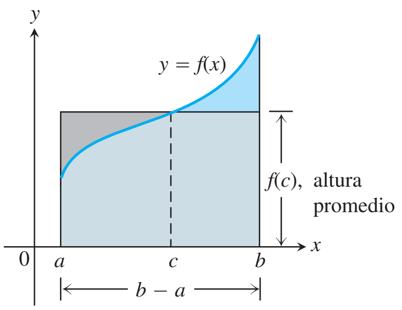


FIGURA 5.16 El valor de $f(c)$ en el teorema del valor medio es, en cierto sentido, la altura promedio (o *media*) de f en $[a, b]$. Cuando $f \geq 0$, el área del rectángulo es el área bajo la gráfica de f de a a b,

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teorema del valor medio para integrales definidas

En la sección anterior definimos el valor promedio de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ como la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ dividida entre la longitud o ancho $b - a$ del intervalo. El teorema del valor medio para integrales definidas afirma que este valor promedio siempre se alcanza en al menos un punto por la función f en el intervalo.

La gráfica en la figura 5.16 muestra una función continua *positiva* $y = f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Geométricamente, el teorema del valor medio indica que existe un número c en $[a, b]$, tal que el rectángulo con altura igual al valor promedio $f(c)$ de la función y base con ancho $b - a$ tiene exactamente la misma área que la región debajo de la gráfica de a a b.

TEOREMA 3: El teorema del valor medio para integrales definidas
Si f es continua en $[a, b]$, entonces en algún punto c en $[a, b]$,

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Prueba Si dividimos ambos lados de la desigualdad máx-mín (tabla 5.4, regla 6) entre $(b - a)$, obtendremos

$$\text{mín}\, f \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \text{máx}\, f.$$

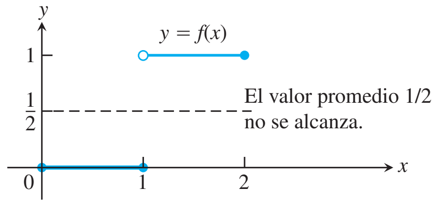


FIGURA 5.17 Una función discontinua no necesariamente alcanza su valor promedio.

Como f es continua, el teorema del valor intermedio para funciones continuas (sección 2.5) afirma que f debe tomar todo valor entre mín f y máx f. Por lo tanto, tiene que alcanzar el valor $(1/(b - a))\int_a^b f(x)\,dx$ en algún punto c en $[a, b]$. ■

Aquí la continuidad de f es importante. Es posible que una función discontinua nunca sea igual a su valor promedio (figura 5.17).

EJEMPLO 1 Demuestre que si f es continua en $[a, b]$, $a \neq b$, y si

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

entonces $f(x) = 0$ al menos una vez en $[a, b]$.

Solución El valor promedio de f en $[a, b]$ es

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b - a}\cdot 0 = 0.$$

Por el teorema del valor medio, f toma este valor en algún punto $c \in [a, b]$. ■

Teorema fundamental, parte 1

Si $f(t)$ es una función integrable en un intervalo finito I, entonces la integral desde cualquier número fijo $a \in I$ a otro número $x \in I$ define una nueva función f cuyo valor en x es

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1}$$

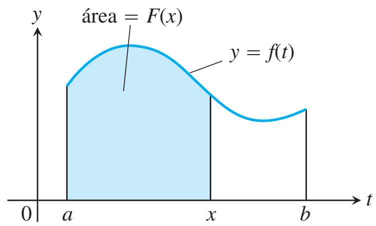


FIGURA 5.18 La función $F(x)$ definida mediante la ecuación (1) proporciona el área bajo la curva de la gráfica de f de a a x, cuando f es no negativa y $x > a$.

Por ejemplo, si f es no negativa y x está a la derecha de a, entonces $F(x)$ es el área debajo de la gráfica de a a x (figura 5.18). La variable x es el límite superior de integración de una integral, pero f es como cualquiera otra función con valores reales de una variable real. Para cada valor de la entrada x existe una salida numérica bien definida, en este caso la integral definida de f desde a hasta x.

La ecuación (1) ofrece una forma de definir nuevas funciones (como veremos en la sección 7.2), pero su importancia ahora es la conexión que hace entre integrales y derivadas. Si f es cualquier función continua, entonces el teorema fundamental asegura que f es una función diferenciable de x cuya derivada es la misma f. En cada valor de x, afirma que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Para comprender un poco mejor por qué se cumple este resultado, examinemos la geometría que lo sustenta.

Si $f \geq 0$ en $[a, b]$, entonces el cálculo de $F'(x)$ a partir de la definición de la derivada significa tomar el límite conforme $h \to 0$ del cociente de diferencias

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h}.$$

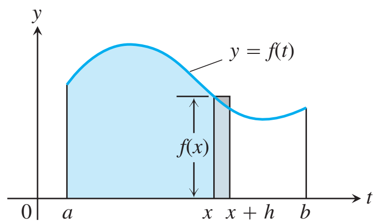


FIGURA 5.19 En la ecuación (1), $F(x)$ es el área a la izquierda de x. Además, $F(x + h)$ es el área a la izquierda de $x + h$. Entonces, el cociente de diferencias $[F(x + h) - F(x)]/h$ es aproximadamente igual a $f(x)$, la altura del rectángulo que se muestra aquí.

Para $h > 0$, el numerador se obtiene mediante la diferencia de dos áreas, así que es el área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$ (figura 5.19). Si h es pequeña, esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h que se observa en la figura 5.19. Esto es,

$$F(x + h) - F(x) \approx hf(x).$$

Si dividimos ambos lados de esta aproximación entre h y dejamos que $h \to 0$, es razonable esperar que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Este resultado es cierto incluso si la función f no es positiva, y constituye la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 4: Teorema fundamental del cálculo, parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Antes de demostrar el teorema 4, analicemos varios ejemplos para comprender mejor lo que dice. En cada ejemplo, observe que la variable independiente aparece en un límite de integración, posiblemente en una fórmula.

EJEMPLO 2 Utilice el teorema fundamental para determinar dy/dx si

(a) $y = \int_a^x (t^3 + 1)\,dt$ **(b)** $y = \int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt$ **(c)** $y = \int_1^{x^2} \cos t\,dt$

Solución Calculamos las derivadas con respecto a la variable independiente x.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x (t^3 + 1)\,dt = x^3 + 1$ Ec. (2) con $f(t) = t^3 + 1$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t \operatorname{sen} t\,dt = \frac{d}{dx}\left(-\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt\right)$ Tabla 5.4, regla 1.

$$= -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t \operatorname{sen} t\,dt$$

$= -3x \operatorname{sen} x$ Ec. (2) con $f(t) = 3t \operatorname{sen} t$

(c) El límite superior de integración no es x, sino x^2. Esto hace que y sea una composición de las dos funciones,

$$y = \int_1^u \cos t\,dt \qquad \text{y} \qquad u = x^2.$$

Por lo tanto, debemos aplicar la regla de la cadena cuando se determine dy/dx.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\
&= \left(\frac{d}{du}\int_1^u \cos t\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}\\
&= \cos u \cdot \frac{du}{dx}\\
&= \cos(x^2)\cdot 2x\\
&= 2x\cos x^2
\end{aligned}$$

Demostración del teorema 4 Probamos el teorema fundamental, parte 1, al aplicar la definición de la derivada directamente a la función $F(x)$, cuando x y $x + h$ están en (a, b). Esto significa escribir el cociente de diferencias

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \tag{3}$$

y demostrar que su límite $h \to 0$ es el número $f(x)$ para cada x en (a, b). Así,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \qquad \text{Tabla 5.4, regla 5.} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio para integrales definidas, el valor antes de tomar el límite en la última expresión es uno de los valores que toma f en el intervalo entre x y $x + h$. Esto es, para algún número c en este intervalo,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c). \tag{4}$$

Cuando $h \to 0$, $x + h$ tiende a x, forzando a c a aproximarse también a x (ya que c está atrapada entre x y $x + h$). Como f es continua en x, $f(c)$ tiende a $f(x)$:

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x). \tag{5}$$

En conclusión, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt \\ &= \lim_{h \to 0} f(c) \qquad \text{Ec. (4)} \\ &= f(x). \qquad \text{Ec. (5)} \end{aligned}$$

Si $x = a$ o b, entonces el límite de la ecuación (3) se interpreta como un límite lateral con $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$, respectivamente. Entonces el teorema 1 de la sección 3.2 demuestra que f es continua para todo punto en $[a, b]$. Esto concluye la prueba. ■

Teorema fundamental, parte 2 (teorema de la evaluación)

Ahora llegamos a la segunda parte del teorema fundamental del cálculo. Esta parte describe cómo evaluar integrales definidas sin tener que calcular límites de sumas de Riemann. En vez de ello, encontramos y evaluamos una antiderivada en los límites de integración superior e inferior.

TEOREMA 4 (Continuación): Teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua en todo punto en $[a, b]$ y f es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Prueba La parte 1 del teorema fundamental nos dice que existe una antiderivada de f; a saber,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Así, si f es *cualquier* antiderivada de f, entonces $F(x) = G(x) + C$ para alguna constante C para $a < x < b$ (por el corolario 2 del teorema del valor medio para derivadas, sección 4.2). Puesto que F y G son continuas en $[a, b]$, vemos que $F(x) = G(x) + C$ también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$, al tomar límites laterales (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$).

Al evaluar $F(b) - F(a)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(t)\, dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\, dt. \end{aligned}$$ ■

El teorema de la evaluación es importante, ya que indica que para calcular la integral definida de f en un intervalo $[a, b]$, sólo necesitamos dos cosas:

1. Determinar una antiderivada F de f, y
2. Calcular el número $F(b) - F(a)$, que es igual a $\int_a^b f(x)\, dx$.

Este proceso es mucho más sencillo que utilizar el cálculo de una suma de Riemann. La fuerza del teorema reside en que la integral definida, que se define por medio de un proceso complicado que implica a todos los valores de la función f en $[a, b]$, puede determinarse mediante los valores de *cualquier* antiderivada f en sólo los dos extremos a y b. La notación usual para la diferencia $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big]_a^b \qquad \text{o} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

dependiendo de que F tenga uno o más términos.

EJEMPLO 3 Calculamos varias integrales definidas usando el teorema de evaluación, en vez de tomar límites de sumas de Riemann.

(a) $$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos x\, dx &= \operatorname{sen} x\Big]_0^\pi \\ &= \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$ $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$

(b) $$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^0 \sec x \tan x\, dx &= \sec x\Big]_{-\pi/4}^0 \\ &= \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$ $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

(c) $$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx &= \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right] \\ &= [8 + 1] - [5] = 4. \end{aligned}$$ $\frac{d}{dx}\left(x^{3/2} + \frac{4}{x}\right) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{4}{x^2}$ ■

El ejercicio 66 ofrece otra demostración del teorema de la evaluación, pues reúne las ideas de sumas de Riemann, el teorema del valor medio y la definición de la integral definida.

La integral de una tasa de cambio

Es posible interpretar la parte 2 del teorema fundamental de otra manera. Si f es cualquier antiderivada de f, entonces $F' = f$. La ecuación en el teorema puede rescribirse como

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Ahora $F'(x)$ representa la tasa de cambio de la función $F(x)$ con respecto a x, de manera que la integral de F' es simplemente el *cambio neto* en F cuando x cambia de a a b. Formalmente, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 5: Teorema del cambio efectivo El cambio efectivo de una función $F(x)$ a lo largo de un intervalo $a \leq x \leq b$ es la integral de su tasa de cambio:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\, dx. \tag{6}$$

EJEMPLO 4 A continuación hay varias interpretaciones del teorema del cambio efectivo.

(a) Si $c(x)$ es el costo de producir x unidades de cierto bien, entonces $c'(x)$ es el costo marginal (sección 3.4). Con base en el teorema 5,

$$\int_{x_1}^{x_2} c'(x)\, dx = c(x_2) - c(x_1),$$

que es el costo de aumentar la producción de x_1 unidades a x_2 unidades.

(b) Si un objeto con función de posición $s(t)$ se desplaza a lo largo de una línea coordenada, su velocidad es $v(t) = s'(t)$. El teorema 5 dice que

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1),$$

de manera que la integral de la velocidad es el **desplazamiento** a lo largo del intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$. Por otra parte, la integral de la rapidez $|v(t)|$ es la **distancia total recorrida** en todo el intervalo de tiempo. Esto es congruente con nuestro estudio de la sección 5.1. ■

Si reacomodamos la ecuación (6) como

$$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\, dx,$$

vemos que el teorema del cambio efectivo también establece que el valor final de una función $F(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es igual al valor inicial $F(a)$ más su cambio efectivo en todo el intervalo. Por lo que si $v(t)$ representa la función velocidad de un objeto que se desplaza en una línea coordenada, esto significa que la posición final del objeto $s(t_2)$ en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es su posición inicial $s(t_1)$ más el cambio efectivo de la posición a lo largo de la línea (véase el ejemplo 4b).

EJEMPLO 5 Nuevamente considere nuestro análisis de la roca lanzada hacia arriba desde el suelo por una explosión de dinamita (ejemplo 3, sección 5.1). La velocidad de la roca en cualquier instante t durante su movimiento fue dada como $v(t) = 160 - 32t$ ft/seg.

(a) Determine el desplazamiento de la roca durante el periodo $0 \leq t \leq 8$.

(b) Determine la distancia total recorrida durante este periodo.

Solución

(a) De acuerdo con el ejemplo 4b, el desplazamiento es la integral

$$\int_0^8 v(t)\, dt = \int_0^8 (160 - 32t)\, dt = \Big[160t - 16t^2\Big]_0^8$$
$$= (160)(8) - (16)(64) = 256.$$

Esto significa que la altura de la roca es de 256 ft sobre el nivel del suelo 8 segundos después de la explosión, lo cual coincide con nuestra conclusión en el ejemplo 3, sección 5.1.

(b) Como observamos en la tabla 5.3, la función de velocidad $v(t)$ es positiva en el intervalo de tiempo [0, 5] y negativa en el intervalo [5, 8]. Por lo tanto, por el ejemplo 4b, la distancia total recorrida es la integral

$$\begin{aligned}\int_0^8 |v(t)|\,dt &= \int_0^5 |v(t)|\,dt + \int_5^8 |v(t)|\,dt \\ &= \int_0^5 (160 - 32t)\,dt - \int_5^8 (160 - 32t)\,dt \\ &= \Big[160t - 16t^2\Big]_0^5 - \Big[160t - 16t^2\Big]_5^8 \\ &= [(160)(5) - (16)(25)] - [(160)(8) - (16)(64) - ((160)(5) - (16)(25))] \\ &= 400 - (-144) = 544.\end{aligned}$$

De nuevo, este cálculo coincide con nuestra conclusión en el ejemplo 3, sección 5.1. Esto es, la distancia total de 544 ft recorridos por la roca durante el periodo $0 \le t \le 8$ es (i) la altura máxima de 400 ft alcanzada en el intervalo de tiempo [0, 5] más (ii) la distancia adicional de 144 ft que la roca recorre al caer durante el intervalo de tiempo [5, 8]. ■

Relación entre integración y derivación

Las conclusiones del teorema fundamental nos indican varias cosas. La ecuación (2) puede rescribirse como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

la cual dice que si usted primero integra la función f y luego deriva lo obtenido, llegará nuevamente a la función f. Asimismo, al remplazar b por x y x por t en la ecuación (6) se obtiene

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

por lo que si primero deriva la función F y luego integra el resultado, obtendrá otra vez la función F (ajustada por una constante de integración). En cierto sentido, los procesos de integración y derivación son "inversos" uno del otro. El teorema fundamental también indica que toda función continua f tiene una antiderivada F, y muestra la importancia de determinar antiderivadas para evaluar con facilidad integrales definidas. Además, dice que para cualquier función continua f, la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$ tiene una solución, a saber, cualquiera de las funciones $y = F(x) + C$.

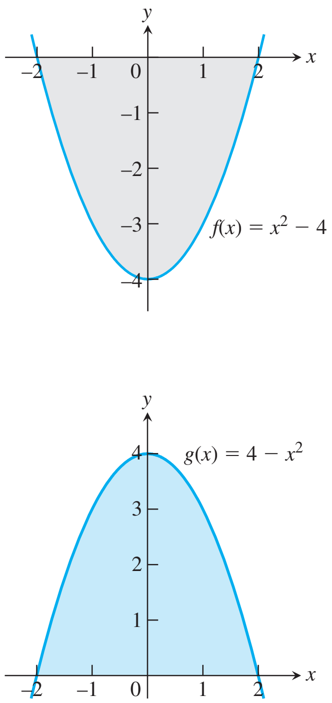


FIGURA 5.20 Estas gráficas encierran la misma cantidad de área con el eje x, pero las integrales definidas de las dos funciones en $[-2, 2]$ difieren en el signo (ejemplo 6).

Área total

La suma de Riemann contiene términos tales como $f(c_k)\Delta x_k$ que dan el área de un rectángulo cuando $f(c_k)$ es positiva. Cuando $f(c_k)$ es negativa, entonces el producto $f(c_k)\Delta x_k$ es el negativo del área del rectángulo. Cuando sumamos tales términos para una función negativa obtenemos el negativo del área entre la curva y el eje x. Entonces, si tomamos el valor absoluto, obtendremos el área positiva correcta.

EJEMPLO 6 La figura 5.20 muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ y su imagen de espejo $g(x) = 4 - x^2$ reflejada con respecto al eje x. Para cada función, calcule

(a) la integral definida en el intervalo $[-2, 2]$, y

(b) el área entre la gráfica y el eje x en $[-2, 2]$.

Solución

(a) $$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3},$$

y

$$\int_{-2}^{2} g(x)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}.$$

(b) En ambos casos, el área entre la curva y el eje x en $[-2, 2]$ es de $32/3$ unidades. Aunque la integral definida de $f(x)$ es negativa, el área sigue siendo positiva. ■

Para calcular el área de la región acotada por la gráfica de una función $y = f(x)$ y el eje x, cuando la función toma tanto valores positivos como valores negativos, debemos dividir el intervalo $[a, b]$ en los subintervalos donde la función no cambie de signo. De otra forma, sería posible obtener cancelaciones entre las áreas con signo positivo y signo negativo, lo que llevaría a un resultado incorrecto. El área total correcta se obtiene al sumar el valor absoluto de la integral definida en cada intervalo donde $f(x)$ no cambia de signo. El término "área" representará dicha *área total*.

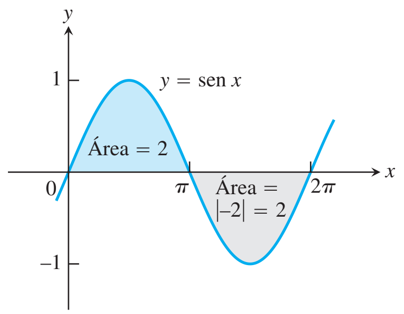


FIGURA 5.21 El área total entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x para $0 \leq x \leq 2\pi$ es la suma de los valores absolutos de las dos integrales (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 La figura 5.21 presenta la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = 2\pi$. Calcule

(a) la integral definida de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$,

(b) el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$.

Solución La integral definida para $f(x) = \operatorname{sen} x$ está dada por

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\bigg]_{0}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos 0] = -[1 - 1] = 0.$$

La integral definitiva es cero, ya que las partes de la gráfica por arriba y por abajo del eje x hacen que las contribuciones se cancelen.

El área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[0, 2\pi]$ se calcula al dividir el dominio de sen x en dos partes; el intervalo $[0, \pi]$ en el que es no negativa y el intervalo $[\pi, 2\pi]$, en el que es no positiva.

$$\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\bigg]_{0}^{\pi} = -[\cos \pi - \cos 0] = -[-1 - 1] = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\bigg]_{\pi}^{2\pi} = -[\cos 2\pi - \cos \pi] = -[1 - (-1)] = -2$$

La segunda integral da un valor negativo. El área entre la gráfica y el eje x se obtiene sumando los valores absolutos

$$\text{Área} = |2| + |-2| = 4.$$ ■

Resumen:

Para determinar el área entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$:

1. Subdivida $[a, b]$ con los ceros de f.
2. Integre f sobre cada subintervalo.
3. Sume los valores absolutos de las integrales.

EJEMPLO 8 Determine el área de la región entre el eje x y la gráfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $-1 \leq x \leq 2$.

Solución Primero determine los ceros de f. Como

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2),$$

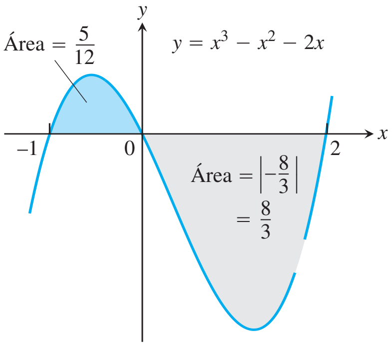


FIGURA 5.22 La región entre la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y el eje x (ejemplo 8).

los ceros (raíces) son $x = 0, -1$ y 2 (figura 5.22). Los ceros subdividen a $[-1, 2]$ en dos subintervalos: $[-1, 0]$, en el que $f - 0$, y $[0, 2]$, en el que $f \leq 0$. Integramos f en cada subintervalo y sumamos los valores absolutos de las integrales calculadas.

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

El área total encerrada se obtiene al sumar los valores absolutos de las integrales calculadas.

$$\text{Área total encerrada} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$ ■

Ejercicios 5.4

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 1 a 28.

1. $\int_{-2}^{0}(2x + 5)\,dx$
2. $\int_{-3}^{4}\left(5 - \frac{x}{2}\right)dx$
3. $\int_{0}^{2}x(x - 3)\,dx$
4. $\int_{-1}^{1}(x^2 - 2x + 3)\,dx$
5. $\int_{0}^{4}\left(3x - \frac{x^3}{4}\right)dx$
6. $\int_{-2}^{2}(x^3 - 2x + 3)\,dx$
7. $\int_{0}^{1}\left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx$
8. $\int_{1}^{32}x^{-6/5}\,dx$
9. $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x\,dx$
10. $\int_{0}^{\pi}(1 + \cos x)\,dx$
11. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc\theta\cot\theta\,d\theta$
12. $\int_{0}^{\pi/3}4\sec u\tan u\,du$
13. $\int_{\pi/2}^{0}\frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$
14. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt$
15. $\int_{0}^{\pi/4}\tan^2 x\,dx$
16. $\int_{0}^{\pi/6}(\sec x + \tan x)^2\,dx$
17. $\int_{0}^{\pi/8}\operatorname{sen} 2x\,dx$
18. $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4}\left(4\sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}\right)dt$
19. $\int_{1}^{-1}(r + 1)^2\,dr$
20. $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(t + 1)(t^2 + 4)\,dt$
21. $\int_{\sqrt{2}}^{1}\left(\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}\right)du$
22. $\int_{-3}^{-1}\frac{y^5 - 2y}{y^3}\,dy$
23. $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{s^2 + \sqrt{s}}{s^2}\,ds$
24. $\int_{1}^{8}\frac{(x^{1/3} + 1)(2 - x^{2/3})}{x^{1/3}}\,dx$
25. $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x}\,dx$
26. $\int_{0}^{\pi/3}(\cos x + \sec x)^2\,dx$
27. $\int_{-4}^{4}|x|\,dx$
28. $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|)\,dx$

Derivadas de integrales

Determine las derivadas en los ejercicios 29 a 32

a. evaluando la integral y derivando el resultado.

b. derivando directamente la integral.

29. $\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt$
30. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{\operatorname{sen} x}3t^2\,dt$
31. $\frac{d}{dt}\int_{0}^{t^4}\sqrt{u}\,du$
32. $\frac{d}{d\theta}\int_{0}^{\tan\theta}\sec^2 y\,dy$

En los ejercicios 33 a 40, determine dy/dx.

33. $y = \int_{0}^{x}\sqrt{1 + t^2}\,dt$
34. $y = \int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$
35. $y = \int_{\sqrt{x}}^{0}\operatorname{sen}(t^2)\,dt$
36. $y = x\int_{2}^{x^2}\operatorname{sen}(t^3)\,dt$
37. $y = \int_{-1}^{x}\frac{t^2}{t^2 + 4}\,dt - \int_{3}^{x}\frac{t^2}{t^2 + 4}\,dt$
38. $y = \left(\int_{0}^{x}(t^3 + 1)^{10}\,dt\right)^3$
39. $y = \int_{0}^{\operatorname{sen} x}\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$
40. $y = \int_{\tan x}^{0}\frac{dt}{1 + t^2}$

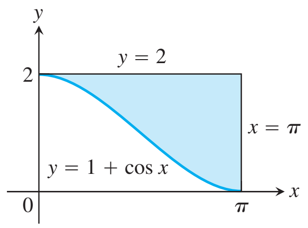
Área

En los ejercicios 41 a 44, determine el área total entre la función y el eje x.

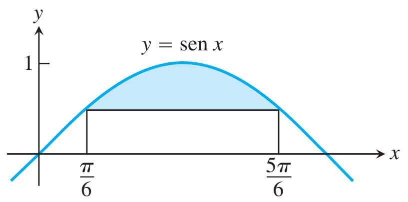
41. $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \leq x \leq 2$
42. $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \leq x \leq 2$
43. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$
44. $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \leq x \leq 8$

En los ejercicios 45 a 48, determine las áreas de las regiones sombreadas.

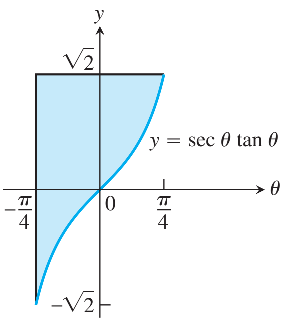
45.



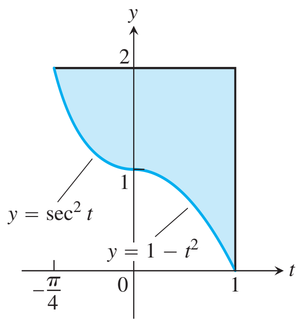
46.



47.



48.



Problemas con valor inicial

Cada una de las siguientes funciones resuelve uno de los problemas con valor inicial de los ejercicios 49 a 52. ¿Cuál función resuelve qué problema? Justifique sus respuestas brevemente.

a. $y = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt - 3$ **b.** $y = \displaystyle\int_0^x \sec t\,dt + 4$

c. $y = \displaystyle\int_{-1}^x \sec t\,dt + 4$ **d.** $y = \displaystyle\int_\pi^x \frac{1}{t}\,dt - 3$

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$ **50.** $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

51. $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$ **52.** $y' = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

Exprese las soluciones a los problemas con valores iniciales en los ejercicios 53 y 54 en términos de integrales.

53. $\dfrac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$

54. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

Teoría y ejemplos

55. Fórmula de Arquímedes para el área de arcos parabólicos Arquímedes (287-212 a. de C.), inventor, ingeniero militar, físico y el mejor matemático de los tiempos clásicos en el mundo occidental, descubrió que el área debajo de un arco parabólico es dos tercios de la base por la altura. Elabore un bosquejo del arco parabólico $y = h - (4h/b^2)x^2$, $-b/2 \le x \le b/2$, suponiendo que h y b son positivos. Luego utilice cálculo para encontrar el área de la región encerrada entre el arco y el eje x.

56. Demuestre que si h es una constante positiva, entonces el área entre el eje x y un arco de la curva $y = \operatorname{sen} kx$ es $2/k$.

57. Costo a partir del costo marginal El costo marginal de la impresión de un cartel, cuando se imprimen x carteles, es

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dólares. Determine $c(100) - c(1)$, el costo de impresión del cartel 2 al cartel 100.

58. Ingreso a partir del ingreso marginal Suponga que el ingreso marginal de una compañía por la fabricación y venta de batidoras es

$$\frac{dr}{dx} = 2 - 2/(x + 1)^2,$$

donde r se mide en miles de dólares y x en miles de unidades. ¿Cuánto dinero recibirá la compañía por una producción de $x = 3$ mil batidoras? Para determinarlo, integre el ingreso marginal desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

59. La temperatura T(°F) de una habitación a los t minutos está dada por

$$T = 85 - 3\sqrt{25 - t} \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 25.$$

a. Determine la temperatura de la habitación cuando $t = 0$, $t = 16$ y $t = 25$.

b. Determine la temperatura promedio de la habitación para $0 \le t \le 25$.

60. La altura H (ft) de una palmera, después que ha crecido durante t años, está dada por

$$H = \sqrt{t + 1} + 5t^{1/3} \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 8.$$

a. Determine la altura de la palmera cuando $t = 0$, $t = 4$ y $t = 8$.

b. Determine la altura promedio de la palmera para $0 \le t \le 8$.

61. Suponga que $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$. Determine $f(x)$.

62. Determine $f(4)$, si $\int_0^x f(t)\,dt = x \cos \pi x$.

63. Determine la linealización de

$$f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1 + t}\,dt$$

en $x = 1$.

64. Determine la linealización de

$$g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t - 1)\,dt$$

en $x = -1$.

65. Suponga que f tiene derivada positiva para todos los valores de x y que $f(1) = 0$. ¿Cuál de los siguientes enunciados debe ser cierto para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt?$$

Justifique sus respuestas.

a. g es una función derivable de x.

b. g es una función continua de x.

c. La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$.

d. g tiene un máximo local en $x = 1$.

e. g tiene un mínimo local en $x = 1$.

f. La gráfica de g tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

g. La gráfica de dg/dx cruza al eje x en $x = 1$.

66. Otra prueba del teorema de la evaluación

a. Sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ cualquier partición de $[a, b]$ y F cualquier antiderivada de f. Demuestre que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

b. Aplique el teorema del valor medio a cada término para demostrar que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ para alguna c_i en el intervalo (x_{i-1}, x_i). Luego demuestre que $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann para f en $[a, b]$.

c. Con base en el inciso (b) y la definición de la integral definida, demuestre que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 67 a 70, sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para la función f que se especifica y el intervalo $[a, b]$. Utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos y responda las preguntas que se plantean.

a. Grafique juntas las funciones f y F en $[a, b]$.

b. Resuelva la ecuación $F'(x) = 0$. ¿Qué puede afirmar acerca de las gráficas de f y F en los puntos en donde $F'(x) = 0$? ¿Su observación tiene como base la parte 1 del teorema fundamental junto con la información obtenida a partir de la primera derivada? Justifique su respuesta.

c. ¿En qué intervalos (aproximadamente) la función F es creciente y en cuáles es decreciente? ¿Qué puede afirmar acerca de f en esos intervalos?

d. Calcule la derivada f' y grafíquela junto con F. ¿Qué puede afirmar acerca de la gráfica de f en los puntos en donde $f'(x) = 0$? ¿Su observación se basa en la parte 1 del teorema fundamental? Justifique su respuesta.

67. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

68. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad \left[0, \frac{9}{2}\right]$

69. $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

70. $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

En los ejercicios 71 a 74, sea $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ para los valores dados de a, u y f. Utilice un SAC para desarrollar los siguientes pasos y responda las preguntas que se plantean.

a. Determine el dominio de F.

b. Calcule $F'(x)$ y determine sus ceros. ¿Para qué puntos en su dominio F es creciente? ¿Para cuáles es decreciente?

c. Calcule $F''(x)$ y determine sus ceros. Identifique los extremos locales y los puntos de inflexión de F.

d. Con base en la información de los incisos (a) a (c), elabore un bosquejo de la gráfica de $y = F(x)$ en su dominio. Luego grafique $F(x)$ en su SAC para respaldar su bosquejo.

71. $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

72. $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

73. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

74. $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

En los ejercicios 75 y 76, suponga que f es continua y $u(x)$ es dos veces diferenciable.

75. Calcule $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ y compruebe su respuesta con un SAC.

76. Calcule $\frac{d^2}{dx^2}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ y compruebe su respuesta con un SAC.

5.5 Integrales indefinidas y el método de sustitución

El teorema fundamental del cálculo dice que una integral definida de una función continua puede calcularse directamente siempre y cuando podamos determinar una antiderivada de la función. En la sección 4.7 definimos la **integral indefinida** de la función f con respecto a x como el conjunto de todas las antiderivadas de f, lo que denotamos mediante

$$\int f(x)\,dx.$$

Como cualesquiera dos antiderivadas de f difieren en una constante, la notación para la integral indefinida $\int$ significa que para cualquier antiderivada F de f,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde C es cualquier constante arbitraria.

La conexión entre antiderivadas y la integral definida establecida en el teorema fundamental explica ahora esta notación. Cuando determine la integral indefinida de una función f, recuerde incluir siempre una constante arbitraria C.

Debemos ser cuidadosos en distinguir entre integrales definidas e integrales indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*. Una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* más una constante arbitraria C.

Hasta ahora sólo hemos sido capaces de determinar antiderivadas de funciones que se reconocen claramente como derivadas. En esta sección empezaremos a desarrollar técnicas más generales para la determinación de antiderivadas.

Sustitución: Aplicación de la regla de la cadena hacia atrás

Si u es una función diferenciable de x y n es cualquier número diferente de -1, la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}.$$

Desde otro punto de vista, esta misma ecuación indica que $u^{n+1}/(n+1)$ es una de las antiderivadas de la función $u^n(du/dx)$. Por lo tanto,

$$\int u^n \frac{du}{dx}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1}$$

La integral en la ecuación (1) es igual a la integral más sencilla

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,$$

lo cual sugiere que es posible sustituir la expresión más sencilla du por $(du/dx)dx$ cuando se calcula la integral. Leibniz, uno de los fundadores del cálculo, pensaba que en realidad tal sustitución podría hacerse, lo que condujo al *método de sustitución* para cálcular de integrales. Al igual que con las diferenciales, cuando calculamos integrales tenemos

$$du = \frac{du}{dx}\,dx.$$

EJEMPLO 1 Determine la integral $\displaystyle\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx$.

Solución Establecemos $u = x^3 + x$. Entonces,

$$du = \frac{du}{dx}\,dx = (3x^2 + 1)\,dx,$$

así que mediante sustitución tenemos

$$\begin{aligned}
\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)\,dx &= \int u^5\,du && \text{Sea } u = x^3 + x,\ du = (3x^2 + 1)\,dx. \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{Integrar con respecto de } u. \\
&= \frac{(x^3 + x)^6}{6} + C && \text{Sustituir } u \text{ por } x^3 + x.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Determine $\displaystyle\int \sqrt{2x + 1}\,dx$.

Solución La integral no se ajusta a la fórmula

$$\int u^n\,du,$$

con $u = 2x + 1$ y $n = 1/2$, ya que

$$du = \frac{du}{dx}\,dx = 2\,dx$$

no es precisamente dx. El factor constante 2 no aparece en la integral. Sin embargo, podemos introducir este factor dentro del signo de la integral, si lo compensamos por un factor de $1/2$ fuera del signo de la integral. Así escribimos

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\sqrt{2x+1}}_{u}\cdot\underbrace{2\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \qquad \text{Sea } u = 2x+1,\ du = 2\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C \qquad \text{Integrar con respecto a } u.$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C \qquad \text{Sustituir } u \text{ por } 2x+1.$$

Las sustituciones en los ejemplos 1 y 2 son ejemplos de la siguiente regla general.

TEOREMA 6: Regla de sustitución Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo I, y f es continua en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Demostración Por la regla de la cadena, $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ siempre que F sea una antiderivada de f:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x). \qquad F' = f$$

Si hacemos la sustitución $u = g(x)$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))\,dx$$

$$= F(g(x)) + C \qquad \text{Teorema fundamental}$$

$$= F(u) + C \qquad u = g(x)$$

$$= \int F'(u)\,du \qquad \text{Teorema fundamental}$$

$$= \int f(u)\,du \qquad F' = f$$

La regla de sustitución ofrece el siguiente **método de sustitución** para evaluar la integral

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx,$$

cuando f y g' son funciones continuas:

1. Sustituya $u = g(x)$ y $du = (du/dx)dx = g'(x)$ para obtener la integral

$$\int f(u)\,du.$$

2. Integre con respecto a u.

3. Remplace u por $g(x)$ en el resultado.

EJEMPLO 3 Determine $\displaystyle\int \sec^2(5t+1)\cdot 5\,dt$.

Solución Sustituimos $u = 5t + 1$ y $du = 5\,dt$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \sec^2(5t+1)\cdot 5\,dt &= \int \sec^2 u\,du && \text{Sea } u = 5t+1,\ du = 5\,dt.\\
&= \tan u + C && \frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u\\
&= \tan(5t+1) + C && \text{Sustituir } 5t+1 \text{ por } u.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int \cos(7\theta+3)\,d\theta$.

Solución Sea $u = 7\theta + 3$, así que $du = 7d\theta$. El factor constante 7 no aparece en el término $d\theta$ en la integral. Podemos compensarlo si multiplicamos por y dividimos entre 7, usando el mismo procedimiento que en el ejemplo 2. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+3)\,d\theta &= \frac{1}{7}\int \cos(7\theta+3)\cdot 7\,d\theta && \text{Colocar el factor } 1/7 \text{ frente a la integral.}\\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,du && \text{Sea } u = 7\theta+3,\ d\theta = 7d\theta.\\
&= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta+3) + C && \text{Sustituir } u \text{ por } 7\theta+3.
\end{aligned}$$

Existe otro enfoque para este problema. Con $u = 7\theta + 3$ y $du = 7d\theta$ como antes, despejamos $d\theta$ para obtener $d\theta = (1/7)du$. Así, la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+3)\,d\theta &= \int \cos u\cdot\frac{1}{7}\,du && \text{Sea } u = 7\theta+3,\ du = 7d\theta \text{ y } d\theta = (1/7)du\\
&= \frac{1}{7}\operatorname{sen} u + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\theta+3) + C && \text{Sustituir } u \text{ por } 7\theta+3.
\end{aligned}$$

Se verifica esta solución mediante derivación y comprobando que obtenemos la función original $\cos(7\theta + 3)$. ■

EJEMPLO 5 En ocasiones observamos que una potencia de x aparece en el integrando y tiene exponente uno menor que la potencia de x que aparece en el argumento de la función que queremos integrar. Tal observación de inmediato sugiere que debemos intentar una sustitución para la potencia mayor de x. Esta situación ocurre en la siguiente integración.

$$\begin{aligned}
\int x^2\operatorname{sen}(x^3)\,dx &= \int \operatorname{sen}(x^3)\cdot x^2\,dx\\
&= \int \operatorname{sen} u\cdot\frac{1}{3}\,du && \text{Sea } u = x^3,\ du = 3x^2dx,\ (1/3)du = x^2\,dx.\\
&= \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du\\
&= \frac{1}{3}(-\cos u) + C && \text{Integrar.}\\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C && \text{Remplazar } u \text{ por } x^3.
\end{aligned}$$

■

Es posible que cuando tratamos una sustitución $u = g(x)$, aparezca un factor extra de x en el integrando. En ese caso, sería factible despejar x en términos de u en la ecuación $u = g(x)$. Entonces, al remplazar el factor extra de x con esa expresión evaluaremos la integral. A continuación se presenta un ejemplo de tal situación.

EJEMPLO 6 Evalúe $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$.

Solución La integración anterior en el ejemplo 2 sugiere la sustitución $u = 2x + 1$ con $du = 2\,dx$. Entonces,

$$\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du.$$

Sin embargo, en este caso, el integrando tiene un factor extra de x que multiplica al término $\sqrt{2x+1}$. Para ajustar esto, despejamos a x de la ecuación de sustitución $u = 2x + 1$, para obtener $x = (u-1)/2$; luego encontramos que

$$x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}(u-1)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du.$$

Ahora la integración se transforma en

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int (u-1)u^{1/2}\,du && \text{Sustituir.}\\
&= \frac{1}{4}\int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du && \text{Multiplicar términos.}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C && \text{Remplazar } u \text{ por } 2x+1. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

El éxito de la sustitución depende de encontrar una sustitución que cambie la integral que no podemos evaluar directamente en una que sí sea posible evaluar. Si la primera sustitución no funciona, intente simplificar más el integrando con sustituciones adicionales (véase los ejercicios 51 y 52).

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$.

Solución Podemos utilizar el método de sustitución de la integración como una herramienta exploratoria: sustituimos la parte más problemática del integrando y vemos qué sucede. Para dicha integral, sería posible intentar $u = z^2 + 1$ o incluso poner a prueba nuestra suerte y tomar u como la raíz cúbica completa. He aquí lo que sucede en cada caso.

Solución 1: Sustituya $u = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{du}{u^{1/3}} && \text{Sea } u = z^2+1,\ du = 2z\,dz.\\
&= \int u^{-1/3}\,du && \text{En la forma } \textstyle\int u^n\,du\\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{Integrar.}\\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C &&\\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Remplazar } u \text{ por } z^2+1.
\end{aligned}$$

Solución 2: Ahora, sustituya $u = \sqrt[3]{z^2 + 1}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,dz}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{3u^2\,du}{u} && \text{Sea } u = \sqrt[3]{z^2+1},\ u^3 = z^2 + 1,\ 3u^2\,du = 2z\,dz. \\
&= 3\int u\,du \\
&= 3 \cdot \frac{u^2}{2} + C && \text{Integrar.} \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{2/3} + C && \text{Remplazar } u \text{ por } (z^2+1)^{1/3}.
\end{aligned}$$

■

Integrales de $\operatorname{sen}^2 x$ y de $\cos^2 x$

Algunas veces podemos utilizar identidades trigonométricas para transformar integrales que no sabemos cómo evaluar en otras que podemos evaluar mediante la regla de sustitución.

EJEMPLO 8

(a)
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx && \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C
\end{aligned}$$

(b)
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

■

EJEMPLO 9 Podemos modelar el voltaje de la instalación eléctrica de una casa común con la función seno

$$V = V_{\text{máx}} \operatorname{sen} 120\pi t,$$

que expresa el voltaje V en volts como una función del tiempo t en segundos. La función efectúa 60 ciclos cada segundo (su frecuencia es de 60 hertz o 60 Hz). La constante positiva $V_{\text{máx}}$ es el voltaje pico o **voltaje máximo**.

El valor promedio de V en medio ciclo de 0 a $1/120$ segundo (figura 5.23) es

$$\begin{aligned}
V_{\text{prom}} &= \frac{1}{(1/120) - 0}\int_0^{1/120} V_{\text{máx}} \operatorname{sen} 120\pi t\,dt \\
&= 120 V_{\text{máx}}\left[-\frac{1}{120\pi}\cos 120\pi t\right]_0^{1/120} \\
&= \frac{V_{\text{máx}}}{\pi}[-\cos \pi + \cos 0] \\
&= \frac{2V_{\text{máx}}}{\pi}.
\end{aligned}$$

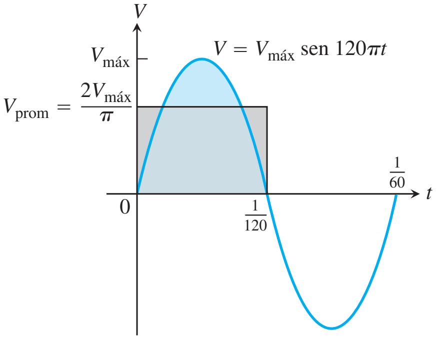


FIGURA 5.23 La gráfica del voltaje V en un ciclo completo. Su valor promedio en medio ciclo es $2V_{\text{máx}}/\pi$. Su valor promedio en un ciclo completo es cero (ejemplo 9).

El valor promedio del voltaje en un ciclo completo es cero, como observamos en la figura 5.23. (También véase el ejercicio 64). Si midiéramos el voltaje con un galvanómetro estándar, la lectura sería cero.

Para medir el voltaje eficazmente, utilizamos un instrumento que mide la raíz cuadrada del valor promedio del cuadrado del voltaje, a saber

$$V_{\text{rpc}} = \sqrt{(V^2)_{\text{prom}}}.$$

El subíndice “rpc” significa “raíz del promedio del cuadrado” (también se designa como “rms”, por las siglas de root mean square). Como el valor promedio de $V^2 = (V_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t$ en un ciclo es

$$(V^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} (V_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t\, dt = \frac{(V_{\text{máx}})^2}{2},$$

(ejercicio 64, inciso c), el voltaje rpc es

$$V_{\text{rpc}} = \sqrt{\frac{(V_{\text{máx}})^2}{2}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}.$$

Los valores dados para las instalaciones eléctricas caseras y los voltajes siempre son valores rpc. Así, “115 volts de corriente alterna (ac)” indican que el voltaje rpc es de 115. El pico del voltaje, obtenido de la última ecuación, es

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{2}\, V_{\text{rpc}} = \sqrt{2} \cdot 115 \approx 163 \text{ volts},$$

que es considerablemente mayor. ■

Ejercicios 5.5

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales indefinidas en los ejercicios 1 a 16; hágalo usando las sustituciones dadas para reducir las integrales a una forma estándar.

1. $\int 2(2x+4)^5\, dx, \quad u = 2x+4$

2. $\int 7\sqrt{7x-1}\, dx, \quad u = 7x-1$

3. $\int 2x(x^2+5)^{-4}\, dx, \quad u = x^2+5$

4. $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\, dx, \quad u = x^4+1$

5. $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\, dx, \quad u = 3x^2+4x$

6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad u = 1+\sqrt{x}$

7. $\int \operatorname{sen} 3x\, dx, \quad u = 3x$

8. $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\, dx, \quad u = 2x^2$

9. $\int \sec 2t \tan 2t\, dt, \quad u = 2t$

10. $\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt, \quad u = 1 - \cos\frac{t}{2}$

11. $\int \frac{9r^2\, dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1 - r^3$

12. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\, dy, \quad u = y^4+4y^2+1$

13. $\int \sqrt{x} \operatorname{sen}^2(x^{3/2}-1)\, dx, \quad u = x^{3/2}-1$

14. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$

15. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\, d\theta$

 a. Usando $u = \cot 2\theta$ **b.** Usando $u = \csc 2\theta$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

 a. Usando $u = 5x+8$ **b.** Usando $u = \sqrt{5x+8}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 17 a 50.

17. $\int \sqrt{3-2s}\, ds$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\, ds$

19. $\int \theta \sqrt[4]{1-\theta^2}\, d\theta$

20. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\, dy$

21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx$

22. $\int \cos(3z+4)\, dz$

23. $\int \sec^2(3x+2)\, dx$

24. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$

25. $\int \operatorname{sen}^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\, dx$

26. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx$

27. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

28. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$

29. $\int x^{1/2}\operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\, dx$

30. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right) dv$

31. $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\, dt$

32. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$

33. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right) dt$

34. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\, dt$

35. $\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$

36. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\operatorname{sen}^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$

37. $\int t^3(1+t^4)^3\, dt$

38. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, dx$

39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\, dx$

40. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\, dx$

41. $\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\, dx$

42. $\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\, dx$

43. $\int x(x-1)^{10}\,dx$

44. $\int x\sqrt{4-x}\,dx$

45. $\int (x+1)^2(1-x)^5\,dx$

46. $\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

49. $\int \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

50. $\int \frac{x}{(x-4)^3}\,dx$

Si no sabe qué sustitución hacer, trate de reducir la integral poco a poco; para ello, use una sustitución de prueba para simplificar un poco la integral y luego otra para simplificarla un poco más. Verá lo que queremos decir con esto si prueba la sucesión de sustituciones en los ejercicios 51 y 52.

51. $\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$

a. $u=\tan x$, seguida de $v=u^3$ y luego de $w=2+v$.

b. $u=\tan^3 x$, seguida de $v=2+u$.

c. $u=2+\tan^3 x$

52. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\,\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\,dx$

a. $u=x-1$, seguida de $v=\operatorname{sen} u$ y luego de $w=1+v^2$

b. $u=\operatorname{sen}(x-1)$, seguida de $v=1+u^2$

c. $u=1+\operatorname{sen}^2(x-1)$

Evalúe las integrales en los ejercicios 53 y 54.

53. $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

54. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 55 a 60, resuelva los problemas con valor inicial.

55. $\frac{ds}{dt}=12t(3t^2-1)^3,\quad s(1)=3$

56. $\frac{dy}{dx}=4x(x^2+8)^{-1/3},\quad y(0)=0$

57. $\frac{ds}{dt}=8\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right),\quad s(0)=8$

58. $\frac{dr}{d\theta}=3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),\quad r(0)=\frac{\pi}{8}$

59. $\frac{d^2s}{dt^2}=-4\operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right),\quad s'(0)=100,\quad s(0)=0$

60. $\frac{d^2y}{dx^2}=4\sec^2 2x\tan 2x,\quad y'(0)=4,\quad y(0)=-1$

Teoría y ejemplos

61. La velocidad de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante en una línea recta es $v=ds/dt=6\operatorname{sen}2t$ m/seg para toda t. Si $s=0$ cuando $t=0$, determine el valor de s cuando $t=\pi/2$ seg.

62. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante en una recta es $a=d^2s/dt^2=\pi^2\cos\pi t$ m/seg^2 para toda t. Si $s=0$ y $v=8$ m/seg cuando $t=0$, determine s cuando $t=1$ seg.

63. Parece que podemos integrar $2\operatorname{sen}x\cos x$ con respecto a x de tres maneras diferentes:

a. $$\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int 2u\,du \qquad u=\operatorname{sen}x$$
$$=u^2+C_1=\operatorname{sen}^2 x+C_1$$

b. $$\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int -2u\,du \qquad u=\cos x$$
$$=-u^2+C_2=-\cos^2 x+C_2$$

c. $$\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int \operatorname{sen}2x\,dx \qquad 2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$$
$$=-\frac{\cos 2x}{2}+C_3.$$

¿Pueden ser correctas las tres integraciones? Justifique su respuesta.

64. (*Continuación del ejemplo 9*).

a. Evaluando la integral en la expresión demuestre
$$\frac{1}{(1/60)-0}\int_0^{1/60} V_{\text{máx}}\operatorname{sen}120\,\pi t\,dt$$
que el valor promedio de $V=V_{\text{máx}}\operatorname{sen}120\,\pi t$ en un ciclo completo es cero.

b. El circuito que hace funcionar a las estufas eléctricas está clasificado en 240 volts rpc. ¿Cuál es el valor pico del voltaje permisible?

c. Demuestre que
$$\int_0^{1/60}(V_{\text{máx}})^2\operatorname{sen}^2 120\,\pi t\,dt=\frac{(V_{\text{máx}})^2}{120}.$$

5.6 Sustitución y área entre curvas

Existen dos métodos para evaluar por sustitución una integral definida. Un método es determinar una antiderivada mediante sustitución y luego evaluar la integral definida mediante la aplicación del teorema de evaluación. El otro método extiende el proceso de sustitución directamente a integrales *definidas* mediante el cambio de límites de integración. Aquí aplicamos la nueva fórmula al problema de calcular el área entre dos curvas.

La fórmula de sustitución

La siguiente fórmula muestra cómo se modifican los límites de integración cuando se cambia la variable de integración mediante sustitución.

TEOREMA 7: Sustitución en integrales definidas Si g' es continua en el intervalo $[a, b]$ y f es continua en el rango de $g(x) = u$, entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Prueba Suponga que F denota cualquier antiderivada de f. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx &= F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} && \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \\
&= F(g(b)) - F(g(a)) \\
&= F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du. && \text{Teorema fundamental, parte 2.}
\end{aligned}$$

■

Para usar la fórmula, haga la misma sustitución $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ que utilizaría para evaluar la integral indefinida correspondiente. Luego integre la integral transformada con respecto a u desde el valor $g(a)$ (el valor de u en $x = a$) hasta el valor $g(b)$ (el valor de u en $x = b$).

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$.

Solución Tenemos dos alternativas.

Método 1: Transforme la integral y evalúe la integral transformada con los límites transformados dados en el teorema 7.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx && \text{Sea } u = x^3 + 1,\ du = 3x^2dx. \\
& && \text{Cuando } x = -1,\ u\,(-1)^3 + 1 = 0. \\
& && \text{Cuando } x = 1,\ u = (1)^3 + 1 = 2. \\
&= \int_0^2 \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^2 && \text{Evalúe la nueva integral definida.} \\
&= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Método 2: Transforme la integral como una integral indefinida, integre, regrese a la variable x y utilice los límites originales para x.

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \int \sqrt{u}\, du && \text{Sea } u = x^3 + 1,\ du = 3x^2dx. \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2} + C && \text{Integre con respecto a } u. \\
&= \frac{2}{3}(x^3 + 1)^{3/2} + C && \text{Remplace } u \text{ por } x^3 + 1. \\
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx &= \frac{2}{3}(x^3 + 1)^{3/2}\Big]_{-1}^{1} && \text{Utilice la integral que acaba de encontrar con los límites de integración para } x. \\
&= \frac{2}{3}\left[((1)^3 + 1)^{3/2} - ((-1)^3 + 1)^{3/2}\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

■

¿Cuál método es mejor: evaluar la integral definida transformada con los límites transformados de acuerdo con el teorema 7, o bien, transformar la integral, integrar y transformar de regreso para utilizar los límites de integración originales? En el ejemplo 1 parece más sencillo el primer método, pero eso no siempre es cierto. Por lo general, es mejor conocer ambos métodos y utilizar aquel que parezca mejor en el momento.

EJEMPLO 2 Utilizamos el método de transformar los límites de integración.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta\, d\theta &= \int_1^0 u\cdot(-du) \\ &= -\int_1^0 u\, du \\ &= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 \\ &= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sea $u = \cot\theta$, $du = -\csc^2\theta\, d\theta$, $-du = \csc^2\theta\, d\theta$.
Cuando $\theta = \pi/4$, $u = \cot(\pi/4) = 1$.
Cuando $\theta = \pi/2$, $u = \cot(\pi/2) = 0$.

Integrales definidas de funciones simétricas

La fórmula de sustitución en el teorema 7 simplifica los cálculos de las integrales definidas de funciones pares y de funciones impares (sección 1.1) en un intervalo simétrico $[-a, a]$ (figura 5.24).

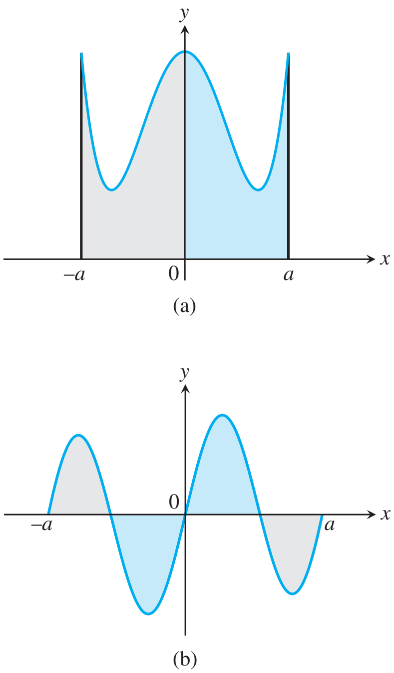


FIGURA 5.24 (a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$
(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

TEOREMA 8 Sea f continua en el intervalo simétrico $[-a, a]$.

(a) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demostración del inciso (a)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx && \text{Regla de la suma para integrales definidas.} \\ &= -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx && \text{Regla del orden de integración.} \\ &= -\int_0^a f(-u)(-du) + \int_0^a f(x)\,dx && \text{Sea } u=-x,\ du=-dx. \text{ Cuando } x=0,\ u=0. \text{ Cuando } x=-a,\ u=a. \\ &= \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx && f \text{ es par, por lo que } f(-u)=f(u). \\ &= 2\int_0^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

La demostración del inciso (b) es muy similar y se le pide en el ejercicio 86. ■

Las afirmaciones del teorema 8 siguen siendo válidas cuando f es una función integrable (en vez de que tenga la propiedad más fuerte de ser continua).

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx.$

Solución Como $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6$ satisface $f(-x) = f(x)$, es una función par en el intervalo simétrico $[-2, 2]$, por lo que

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx &= 2\int_{0}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)\,dx\\ &= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x\right]_0^2\\ &= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} + 12\right) = \frac{232}{15}.\end{aligned}$$

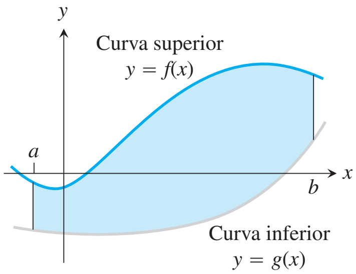


FIGURA 5.25 La región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Área entre curvas

Suponga que queremos determinar el área de la región que está acotada por arriba por la curva $y = f(x)$, por abajo por la curva $y = g(x)$, y por la izquierda y la derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$ (figura 5.25). Excepcionalmente, la región tendrá una forma cuya área pueda determinarse con argumentos geométricos, pero si f y g son funciones continuas arbitrarias, en general, tendremos que encontrar el área mediante una integral.

Para ver qué puede ser dicha integral, primero aproximamos la región con n rectángulos verticales, con base en la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ (figura 5.26). El área del k-ésimo rectángulo (figura 5.27) es

$$\Delta A_k = \text{altura} \times \text{ancho} = [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k.$$

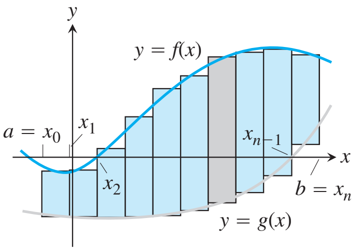


FIGURA 5.26 Aproximamos la región con rectángulos perpendiculares al eje x.

Luego aproximamos el área de la región sumando las áreas de los n rectángulos.

$$A \approx \sum_{k=1}^{n}\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k. \qquad \text{Suma de Riemann}$$

Cuando $\|P\| \to 0$, las sumas en la derecha tienden al límite $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ ya que f y g son continuas. Tomamos el área de la región como el valor de esta integral. Esto es,

$$A = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

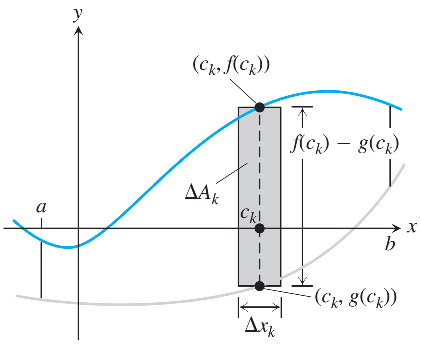


FIGURA 5.27 El área ΔA_k del k-ésimo rectángulo es el producto de su altura, $f(c_k) - g(c_k)$, por su ancho, Δx_k.

DEFINICIÓN Si f y g son continuas con $f(x) \geq g(x)$ en todo $[a, b]$, entonces el **área de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ de a a b** es la integral de $(f - g)$ de a a b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Cuando se aplica esta definición es útil graficar las curvas. La gráfica revela qué curva va por arriba, f, y qué curva va por abajo, g. También ayuda a determinar los límites de integración, en caso de que no estén dados. A veces es conveniente encontrar dónde se intersecan las curvas

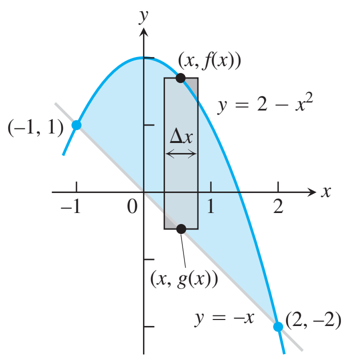


FIGURA 5.28 La región en el ejemplo 4 con un rectángulo típico de aproximación.

para determinar los límites de integración, lo cual implicará resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ para valores de x. Luego, usted podrá integrar la función $f - g$ para el área entre las intersecciones.

EJEMPLO 4 Determine el área de la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = -x$.

Solución Primero grafique las dos curvas (figura 5.28). Los límites de integración se determinan resolviendo de forma simultánea $y = 2 - x^2$ y $y = -x$ para x.

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= -x && \text{Igualar } f(x) \text{ y } g(x). \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Rescribir.} \\ (x+1)(x-2) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x = -1, \qquad x &= 2. && \text{Resolver.} \end{aligned}$$

La región va de $x = -1$ a $x = 2$. Los límites de integración son $a = -1$, $b = 2$.

El área entre las curvas es

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

■

Biografía histórica

Richard Dedekind
(1831–1916)

Si la fórmula para una curva frontera cambia en uno o más puntos, subdividimos la región en subregiones que corresponden a los cambios de la fórmula y aplicamos la fórmula para el área entre las curvas para cada subregión.

EJEMPLO 5 Determine el área de la región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por $y = \sqrt{x}$ y por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$.

Solución El dibujo (figura 5.29) muestra que la frontera superior de la región es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. La frontera inferior cambia de $g(x) = 0$ para $0 \le x \le 2$ a $g(x) = x - 2$ para $2 \le x \le 4$ (ambas fórmulas coinciden en $x = 2$). Subdividimos la región en $x = 2$ en las subregiones A y B mostradas en la figura 5.29.

Los límites de integración para la región A son $a = 0$ y $b = 2$. El límite izquierdo para la región B es $a = 2$. Para determinar el límite derecho, resolvemos simultáneamente las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x - 2$ para despejar x:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x - 2 && \text{Igualar } f(x) \text{ y } g(x). \\ x &= (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{Rescribir.} \\ (x-1)(x-4) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x = 1, \qquad x &= 4. && \text{Resolver.} \end{aligned}$$

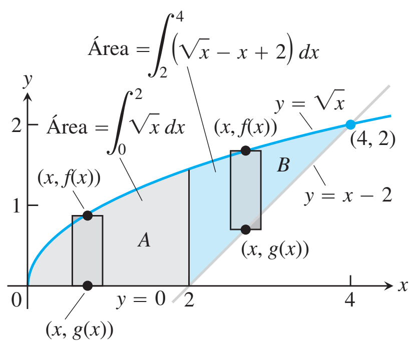


FIGURA 5.29 Cuando la fórmula para una curva frontera cambia, la integral del área se modifica para convertirse en la suma de integrales que coinciden; una integral para cada una de las regiones sombreadas, en este caso para el ejemplo 5.

Sólo el valor $x = 4$ satisface la ecuación $\sqrt{x} = x - 2$. El valor $x = 1$ es una raíz extraña introducida al elevar al cuadrado. El límite del lado derecho es $b = 4$.

$$\begin{aligned} &\text{para } 0 \le x \le 2: && f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x} \\ &\text{para } 2 \le x \le 4: && f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2 \end{aligned}$$

Sumamos las áreas de las subregiones A y B para determinar el área total:

$$\text{Área total} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{x}\,dx}_{\text{área de } A} + \underbrace{\int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,dx}_{\text{área de } B}$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

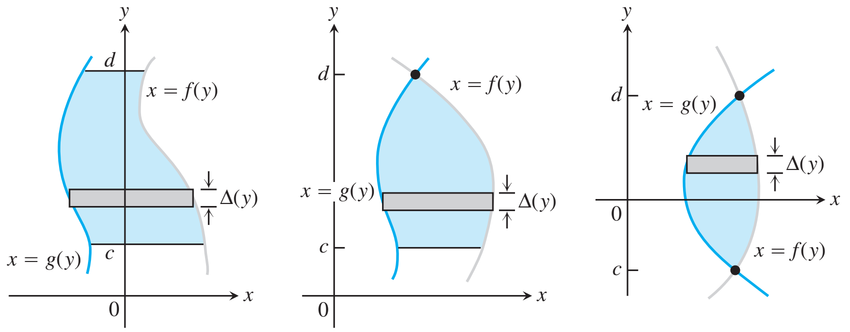
$$= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right)$$

$$= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}.$$

Integración con respecto a y

Si las curvas frontera de la región se describen mediante funciones de y, los rectángulos de aproximación son horizontales y no verticales, y la fórmula básica tiene a y en vez de x.

Para regiones como éstas:



utilice la fórmula

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$

En esta ecuación, f siempre denota a la curva del lado derecho y g la curva de la izquierda, por lo que $f(y) - g(y)$ es no negativa.

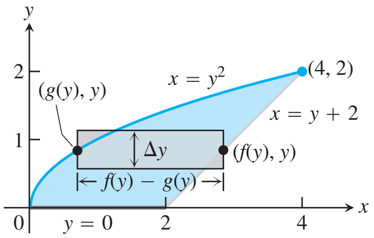


FIGURA 5.30 Si integramos con respecto a x, se requieren dos integraciones para determinar el área de esta región. En cambio, sólo se necesita una si integramos con respecto a y (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Determine el área de la región en el ejemplo 5 integrando con respecto a y.

Solución Primero bosquejamos la región y un rectángulo *horizontal* típico con base en una partición de un intervalo de valores de y (figura 5.30). La frontera de la derecha de la región es la recta $x = y + 2$, por lo que $f(y) = y + 2$. La frontera de la izquierda es la curva $x = y^2$, por lo que $g(y) = y^2$. El límite inferior de la integración es $y = 0$. Determinamos el límite superior resolviendo simultáneamente las ecuaciones $x = y + 2$ y $x = y^2$ para despejar y:

$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 && \text{Igualar } f(y) = y + 2 \text{ y } g(y) = y^2. \\ y^2 - y - 2 &= 0 && \text{Rescribir.} \\ (y + 1)(y - 2) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ y = -1, \quad y &= 2 && \text{Resolver.} \end{aligned}$$

El límite superior de integración es $b = 2$. (El valor $y = -1$ da un punto de intersección abajo del eje x.)

El área de la región es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2]\,dy$$
$$= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,dy$$
$$= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$
$$= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}.$$

Éste es el resultado del ejemplo 5, obtenido con menos trabajo. ■

Ejercicios 5.6

Evaluación de integrales definidas

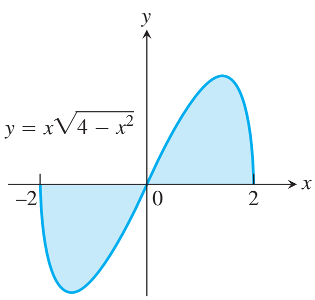
Utilice la fórmula de sustitución del teorema 7 para evaluar las integrales en los ejercicios 1 a 24.

1. a. $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ b. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$
2. a. $\displaystyle\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ b. $\displaystyle\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$
3. a. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$
4. a. $\displaystyle\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ b. $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$
5. a. $\displaystyle\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ b. $\displaystyle\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$
6. a. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ b. $\displaystyle\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$
7. a. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$
8. a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ b. $\displaystyle\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$
9. a. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$
11. a. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$ b. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$
12. a. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ b. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$
13. a. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$ b. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$
14. a. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^0 \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$
15. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$
16. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$
17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$
18. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$
19. $\displaystyle\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\operatorname{sen} t\,dt$
20. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1-\operatorname{sen} 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$
21. $\displaystyle\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$
22. $\displaystyle\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$
23. $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$
24. $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\operatorname{sen}^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

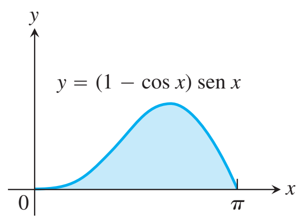
Área

En los ejercicios 25 a 40, determine las áreas totales de las regiones sombreadas.

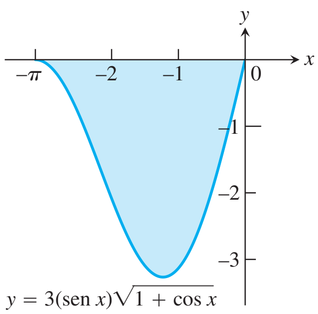
25.



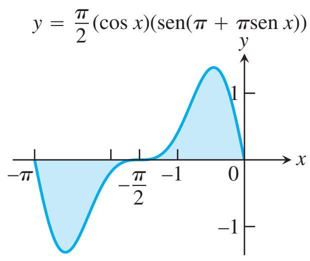
26.



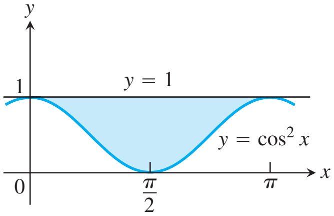
27.



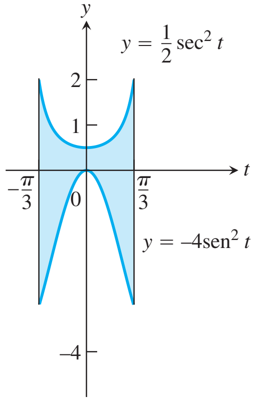
28.



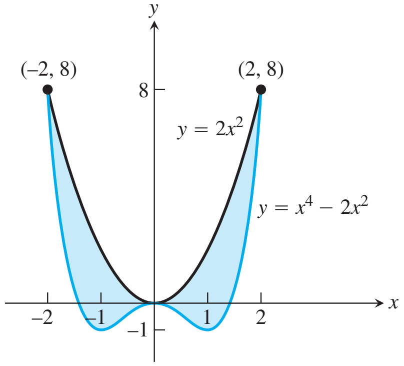
29.



30.

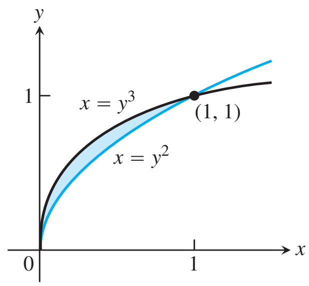


31.

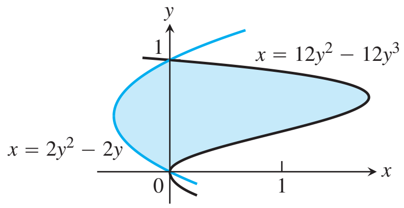


NO ESTÁ A ESCALA

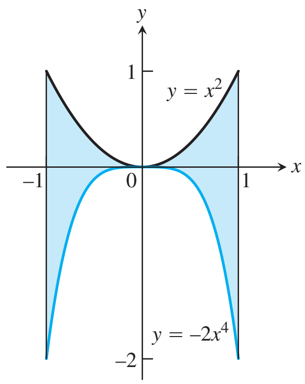
32.



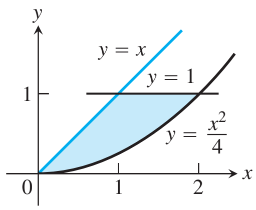
33.



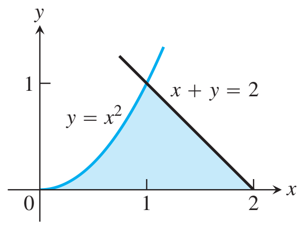
34.



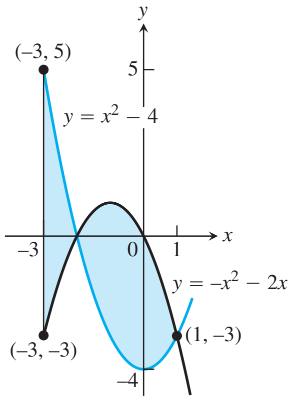
35.



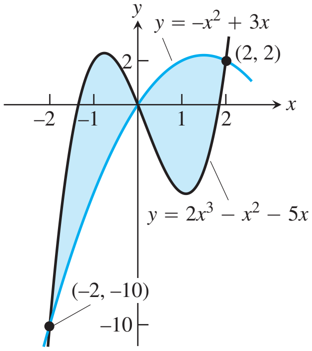
36.



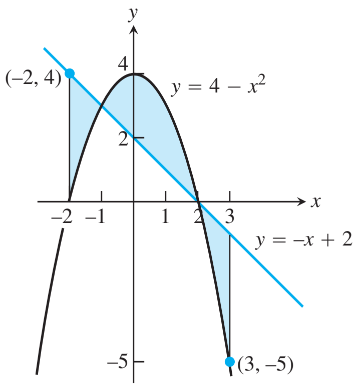
37.



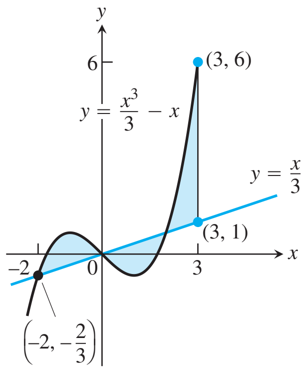
38.



39.



40.



En los ejercicios 41 a 50, determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas.

41. $y = x^2 - 2$ y $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ y $y = -3$

43. $y = x^4$ y $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ y $y = x$

45. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ y $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0,$ y $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$ (¿Cuántos puntos de intersección hay?)

50. $y = |x^2 - 4|$ y $y = (x^2/2) + 4$

Determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas en los ejercicios 51 a 58.

51. $x = 2y^2, x = 0$ y $y = 3$

52. $x = y^2$ y $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ y $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ y $x + 2y^2 = 3$

55. $x = y^2 - y$ y $x = 2y^2 - 2y - 6$

56. $x - y^{2/3} = 0$ y $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ y $x = y^2 - 1$ y $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ y $x = 2y$

En los ejercicios 59 a 62, determine las áreas de las regiones encerradas por las curvas.

59. $4x^2 + y = 4$ y $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ y $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ y $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$

62. $x + y^2 = 3$ y $4x + y^2 = 0$

En los ejercicios 63 a 70, determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas.

63. $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8 \cos x$ y $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$

66. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ y $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3 \operatorname{sen} y \leq \sqrt{\cos y}$ y $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ y $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. Determine el área de la región en forma de hélice encerrada por la curva $x - y^3 = 0$ y la recta $x - y = 0$.

72. Determine el área de la región en forma de hélice encerrada por la curva $x - y^{1/3} = 0$ y la recta $x - y^{1/5} = 0$.

73. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada por la recta $y = x$, la recta $x = 2$, la curva $y = 1/x^2$ y el eje x.

74. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante acotada por la izquierda por el eje y y a la derecha por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$.

75. La región acotada por abajo por la parábola $y = x^2$ y por arriba por la recta $y = 4$ se divide, mediante una recta horizontal $y = c$, en dos subsecciones de igual área.

a. Dibuje la región y una recta $y = c$ que la cruce y que parezca la correcta. En términos de c, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde la recta interseca a la parábola? Añádalos a su figura.

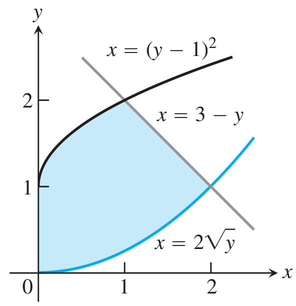
b. Determine c integrando con respecto a x. (Esto coloca a c en los límites de integración).

c. Determine c integrando con respecto a x. (Esto coloca a c también en el integrando).

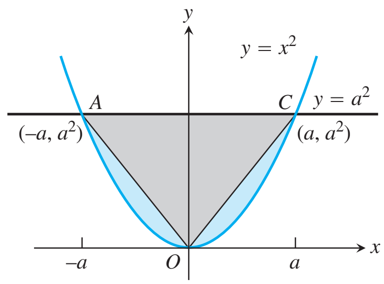
76. Determine el área de la región entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ mediante la integración con respecto a **(a)** x, **(b)** y.

77. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la recta $y = x/4$, arriba a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$ y arriba a la derecha por la curva $y = 2/\sqrt{x}$.

78. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y - 1)^2$ y arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.

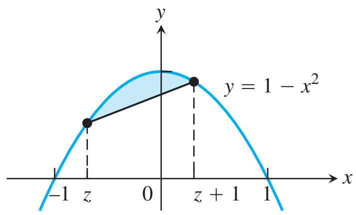


79. La siguiente figura muestra el triángulo AOC inscrito en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = a^2$. Determine el límite de la razón del área del triángulo al área de la región parabólica cuando a tiende a cero.



80. Suponga que el área de la región entre la gráfica de una función continua positiva f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$ es 4 unidades cuadradas. Determine el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

81. Demuestre que el área de la región sombreada es igual a $1/6$ para todos los valores de z.



82. Indique si lo siguiente es verdadero, sólo algunas veces verdadero o falso. El área de la región entre las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, así como las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, $(a < b)$ es

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

83. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Exprese

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx$$

en términos de F.

84. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx.$$

85. Suponga que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

Determine

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

si **(a)** f es impar, **(b)** f es par.

86. a. Demuestre que si f es impar en $[-a, a]$ entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

b. Pruebe el resultado del inciso (a) con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = \pi/2$.

87. Si f es una función continua, determine el valor de la integral

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x) + f(a-x)}$$

haciendo la sustitución $u = a - x$ y sumando la integral resultante a I.

88. Mediante una sustitución, demuestre que para todos los números positivos x y y,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt.$$

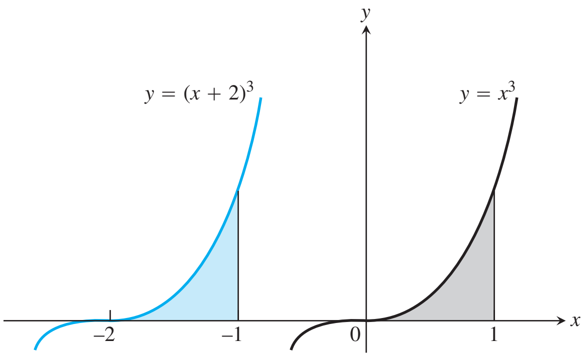
La propiedad de desplazamiento para integrales definidas Una propiedad básica de las integrales definidas es que son invariantes bajo traslación, como se expresa con la ecuación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx. \tag{1}$$

La ecuación se cumple siempre que f sea integrable y esté definida para los valores necesarios de x. Por ejemplo, en la siguiente figura muestre que

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

ya que las áreas de las regiones sombreadas son congruentes.



89. Utilice una sustitución para verificar la ecuación (1).

90. Para cada una de las siguientes funciones, grafique $f(x)$ en $[a, b]$ y $f(x+c)$ en $[a-c, b-c]$ para convencerse de que la ecuación (1) es razonable.

a. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$

b. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $b = \pi$, $c = \pi/2$

c. $f(x) = \sqrt{x-4}$, $a = 4$, $b = 8$, $c = 5$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 91 a 94 determinará el área entre las curvas en el plano en casos donde no es posible determinar sus puntos de intersección mediante cálculos algebraicos sencillos. Utilice una SAC para realizar los siguientes pasos:

a. Grafique juntas las curvas para ver cómo se ven y cuántos puntos de intersección tienen.

b. Utilice en su SAC la función para resolver numéricamente y determine todos los puntos de intersección.

c. Integre $|f(x) - g(x)|$ en pares de valores de intersección consecutivos.

d. Sume todas las integrales que determinó en el inciso (c).

91. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}$, $g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 10$, $g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x)$, $g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x$, $g(x) = x^3 - x$

Capítulo 5 Preguntas de repaso

1. En ocasiones, ¿cómo se pueden estimar cantidades como la distancia recorrida, el área y el valor promedio mediante sumas finitas? ¿Por qué necesitaría hacer esto?
2. ¿Qué es la notación sigma? ¿Qué ventajas ofrece? Dé ejemplos.
3. ¿Qué es una suma de Riemann? ¿Por qué necesitaría considerar tal suma?
4. ¿Qué es la norma de una partición de un intervalo cerrado?
5. ¿Qué es la integral definida de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$? ¿Cuándo podemos asegurar que existe?
6. ¿Cuál es la relación entre integrales definidas y el área? Describa otras interpretaciones de las integrales definidas.
7. ¿Cuál es el valor promedio de una función integrable en un intervalo cerrado? ¿La función debe tomar su valor promedio? Explique.
8. Describa las reglas para trabajar con integrales definidas (tabla 5.4). Dé ejemplos.
9. ¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo? ¿Por qué es tan importante? Ilustre cada parte del teorema con un ejemplo.
10. ¿Cuál es el teorema del cambio efectivo? ¿Qué dice acerca de la integral de la velocidad? ¿De la integral del costo marginal?

11. Analice cómo los procesos de integración y diferenciación pueden considerarse "inversos" entre sí.

12. ¿Cómo proporciona el teorema fundamental una solución al problema de valor inicial $dy/dx = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, cuando f es continua?

13. ¿Cómo se relaciona la integración por sustitución con la regla de la cadena?

14. ¿Cómo se pueden evaluar integrales indefinidas mediante sustitución? Dé ejemplos.

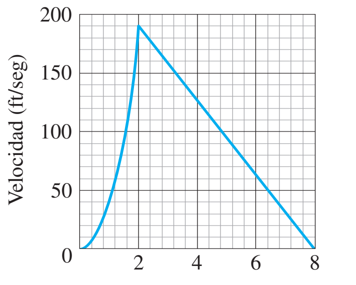
15. ¿Cómo funciona el método de sustitución para integrales definidas? Dé ejemplos.

16. ¿Cómo define y calcula el área de la región entre las gráficas de dos funciones continuas? Dé un ejemplo.

Capítulo 5 Ejercicios de práctica

Sumas finitas y estimaciones

1. La siguiente figura muestra la gráfica de la velocidad (ft/seg) de un cohete durante los primeros 8 segundos después del lanzamiento. El cohete acelera directamente hacia arriba durante los primeros 2 segundos y luego avanza hasta alcanzar su máxima altura en $t = 8$ seg.

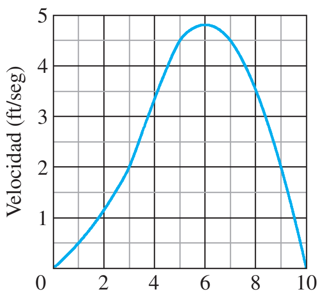


a. Suponiendo que el cohete fue lanzado desde el nivel del suelo, ¿aproximadamente qué altura alcanzó? (Éste es el cohete de la sección 3.3, ejercicio 17, pero no necesita resolver ese ejercicio para resolver el problema actual).

b. Dibuje una gráfica de la altura del cohete por encima del suelo como una función del tiempo para $0 \le t \le 8$.

2. a. La siguiente figura muestra la velocidad (m/seg) de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje s durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 10$ seg. ¿Aproximadamente cuánta distancia recorrió el objeto durante esos 10 segundos?

b. Dibuje una gráfica de s como una función de t para $0 \le t \le 10$; para ello, suponga que $s(0) = 0$.



3. Suponga que $\sum_{k=1}^{10} a_k = -2$ y $\sum_{k=1}^{10} b_k = 25$. Determine el valor de

a. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{4}$ b. $\sum_{k=1}^{10} (b_k - 3a_k)$

c. $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k - 1)$ d. $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{2} - b_k\right)$

4. Suponga que $\sum_{k=1}^{20} a_k = 0$ y $\sum_{k=1}^{20} b_k = 7$. Determine los valores de

a. $\sum_{k=1}^{20} 3a_k$ b. $\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k)$

c. $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2} - \frac{2b_k}{7}\right)$ d. $\sum_{k=1}^{20} (a_k - 2)$

Integrales definidas

En los ejercicios 5 a 8, exprese cada límite como una integral definida. Luego evalúe la integral para determinar el valor del límite. En cada caso, P es una partición del intervalo dado y los números c_k se eligen a partir de los subintervalos de P.

5. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (2c_k - 1)^{-1/2}\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 5]$

6. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k(c_k^2 - 1)^{1/3}\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[1, 3]$

7. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(\frac{c_k}{2}\right)\right) \Delta x_k$, donde P es una partición de $[-\pi, 0]$

8. $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{sen} c_k)(\cos c_k)\, \Delta x_k$, donde P es una partición de $[0, \pi/2]$

9. Si $\int_{-2}^{2} 3f(x)\,dx = 12$, $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 6$, y $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$, determine los valores de lo siguiente.

a. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ b. $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$

c. $\int_{5}^{-2} g(x)\,dx$ d. $\int_{-2}^{5} (-\pi g(x))\,dx$

e. $\int_{-2}^{5} \left(\frac{f(x) + g(x)}{5}\right) dx$

10. Si $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \pi$, $\int_{0}^{2} 7g(x)\,dx = 7$, y $\int_{0}^{1} g(x)\,dx = 2$, determine los valores de lo siguiente.

a. $\int_{0}^{2} g(x)\,dx$ b. $\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

c. $\int_{2}^{0} f(x)\,dx$ d. $\int_{0}^{2} \sqrt{2}\, f(x)\,dx$

e. $\int_{0}^{2} (g(x) - 3f(x))\,dx$

Área

En los ejercicios 11 a 14, encuentre el área total de la región entre la gráfica de f y el eje x.

11. $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad 0 \le x \le 3$

12. $f(x) = 1 - (x^2/4), \quad -2 \le x \le 3$

13. $f(x) = 5 - 5x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 8$

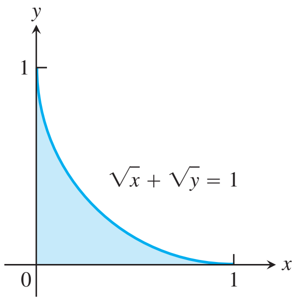
14. $f(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Determine las áreas de las regiones encerradas por las curvas y las rectas en los ejercicios 15 a 26.

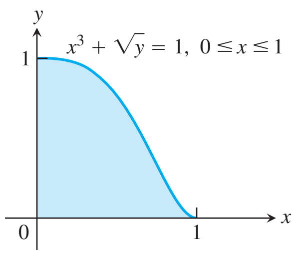
15. $y = x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

16. $y = x, \quad y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 2$

17. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$



18. $x^3 + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad$ para $\quad 0 \le x \le 1$



19. $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

20. $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

21. $y^2 = 4x, \quad y = 4x - 2$

22. $y^2 = 4x + 4, \quad y = 4x - 16$

23. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = x, \quad 0 \le x \le \pi/4$

24. $y = |\operatorname{sen} x|, \quad y = 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

25. $y = 2 \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi$

26. $y = 8 \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\pi/3 \le x \le \pi/3$

27. Determine el área de la región "triangular" acotada a la izquierda por $x + y = 2$, a la derecha por $y = x^2$ y arriba por $y = 2$.

28. Determine el área de la región "triangular" acotada a la izquierda por $y = \sqrt{x}$, a la derecha por $y = 6 - x$ y abajo por $y = 1$.

29. Determine los valores extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2$ y determine el área de la región encerrada por la gráfica de f y el eje x.

30. Determine el área de la región cortada en el primer cuadrante por la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$.

31. Determine el área de la región encerrada por la curva $x = y^{2/3}$, así como por las rectas $x = y$ y $y = -1$.

32. Determine el área total de la región entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ para $0 \le x \le 3\pi/2$.

Problemas de valor inicial

33. Demuestre que $y = x^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{1}{x^2}; \quad y'(1) = 3, \quad y(1) = 1.$$

34. Demuestre que $y = \int_0^x \left(1 + 2\sqrt{\sec t}\right) dt$ resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\sec x}\tan x; \quad y'(0) = 3, \quad y(0) = 0.$$

Exprese las soluciones de los problemas de valor inicial en los ejercicios 35 y 36 en términos de integrales.

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(5) = -3$

36. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2 - \operatorname{sen}^2 x}, \quad y(-1) = 2$

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 37 a 44.

37. $\displaystyle\int 2(\cos x)^{-1/2} \operatorname{sen} x\,dx$

38. $\displaystyle\int (\tan x)^{-3/2} \sec^2 x\,dx$

39. $\displaystyle\int (2\theta + 1 + 2\cos(2\theta + 1))\,d\theta$

40. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta - \pi}} + 2\sec^2(2\theta - \pi)\right) d\theta$

41. $\displaystyle\int \left(t - \frac{2}{t}\right)\left(t + \frac{2}{t}\right) dt$

42. $\displaystyle\int \frac{(t + 1)^2 - 1}{t^4}\,dt$

43. $\displaystyle\int \sqrt{t}\,\operatorname{sen}(2t^{3/2})\,dt$

44. $\displaystyle\int \sec\theta\tan\theta\sqrt{1 + \sec\theta}\,d\theta$

Evaluación de integrales definidas

Evalúe las integrales de los ejercicios 45 a 70.

45. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)\,ds$

47. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{v^2}\,dv$

48. $\displaystyle\int_1^{27} x^{-4/3}\,dx$

49. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}$

50. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(1 + \sqrt{u}\right)^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

51. $\displaystyle\int_0^1 \frac{36\,dx}{(2x + 1)^3}$

52. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt[3]{(7 - 5r)^2}}$

53. $\displaystyle\int_{1/8}^{1} x^{-1/3}(1 - x^{2/3})^{3/2}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^3(1 + 9x^4)^{-3/2}\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 5r\,dr$

56. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2\left(4t - \frac{\pi}{4}\right) dt$

57. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 x\,dx$

59. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2\frac{x}{6}\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan^2\frac{\theta}{3}\,d\theta$

61. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{0} \sec x\tan x\,dx$

62. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc z\cot z\,dz$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 5(\operatorname{sen} x)^{3/2} \cos x\, dx$

64. $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2x \operatorname{sen}(1 - x^2)\, dx$

65. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \operatorname{sen}^4 3x \cos 3x\, dx$

66. $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \cos^{-4}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

67. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{3 \operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 x}}\, dx$

68. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{(1 + 7 \tan x)^{2/3}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\tan \theta}{\sqrt{2 \sec \theta}}\, d\theta$

70. $\displaystyle\int_{\pi^2/36}^{\pi^2/4} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t} \operatorname{sen} \sqrt{t}}\, dt$

Valores promedio

71. Determine el valor promedio de $f(x) = mx + b$

a. en $[-1, 1]$

b. en $[-k, k]$

72. Determine el valor promedio de

a. $y = \sqrt{3x}$ en $[0, 3]$

b. $y = \sqrt{ax}$ en $[0, a]$

73. Sea f una función que es derivable en $[a, b]$. En el capítulo 2 definimos la tasa promedio de cambio de f en $[a, b]$ como

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la tasa instantánea de cambio de f en x como $f'(x)$. En este capítulo definimos el valor promedio de una función. Para que la nueva definición de promedio sea congruente con la anterior, debemos tener

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{valor promedio de } f' \text{ en } [a, b].$$

¿Es éste el caso? Justifique su respuesta.

74. ¿Es cierto que el valor promedio de una función integrable en un intervalo de longitud 2 es un medio de la integral de la función en el intervalo? Justifique su respuesta.

T **75.** Calcule el valor promedio de la función temperatura

$$f(x) = 37 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. Ésta es una manera de estimar la temperatura media anual del aire en Fairbanks, Alaska. El valor oficial del Servicio Meteorológico Nacional, un promedio numérico de la temperatura media diaria para el año, es de 25.7 °F, que es ligeramente mayor que el valor promedio de la función de aproximación $f(x)$.

T **76. Calor específico de un gas** El calor específico C_v es la cantidad de calor requerido para elevar 1 °C la temperatura de una masa dada de gas con volumen constante, medido en unidades de cal/grado-mol (calorías por grado molécula-gramo). El calor específico del oxígeno depende de su temperatura T y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Determine el valor promedio de C_v para $20° \leq T \leq 675$ °C y la temperatura en la que se alcanza.

Derivación de integrales

En los ejercicios 77 a 80, determine dy/dx.

77. $\displaystyle y = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

78. $\displaystyle y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^3 t}\, dt$

79. $\displaystyle y = \int_x^1 \frac{6}{3 + t^4}\, dt$

80. $\displaystyle y = \int_{\sec x}^{2} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$

Teoría y ejemplos

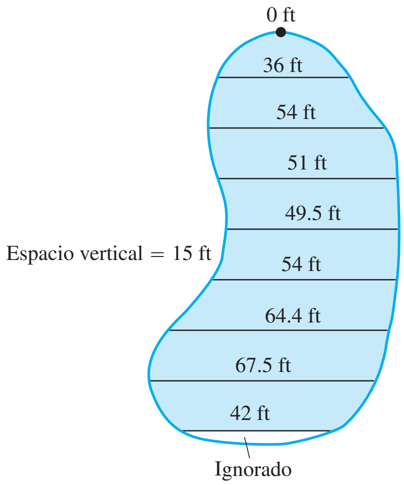
81. ¿Es cierto que toda función $y = f(x)$, que es derivable en $[a, b]$, es la derivada de alguna función en $[a, b]$? Justifique su respuesta.

82. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$. Exprese $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ en términos de F y justifique su respuesta.

83. Determine dy/dx, si $y = \int_x^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt$. Explique los pasos principales de sus cálculos.

84. Determine dy/dx, si $y = \int_{\cos x}^0 (1/(1 - t^2))\, dt$. Explique los pasos principales de sus cálculos.

85. Un terreno nuevo para estacionamiento Para satisfacer la demanda, la localidad donde usted vive ha asignado el área que se representa aquí para instalar un nuevo estacionamiento. Como ingeniero de la localidad, el ayuntamiento le pidió que averiguara si el estacionamiento se puede construir con \$10,000. El costo para limpiar el terreno es de \$0.10 el ft^2 y el pavimento cuesta \$2.00 por ft^2. ¿Es posible hacer el trabajo con \$10,000? Utilice una estimación con sumas inferiores para averiguarlo. (Las respuestas pueden variar ligeramente, lo cual depende de la estimación empleada).



86. Los paracaidistas A y B están a bordo de un helicóptero que vuela a 6400 ft. El paracaidista A salta y desciende durante 4 segundos antes de abrir su paracaídas. En ese momento el helicóptero sube a 7000 ft y se queda ahí. Cuarenta y cinco segundos después de que A abandonó la nave, B salta y desciende 13 segundos antes de abrir su paracaídas. Ambos paracaidistas descienden a 16 ft/seg con los paracaídas abiertos. Suponga que los paracaidistas caen libremente (sin resistencia efectiva del aire) antes de abrir sus paracaídas.

a. ¿A qué altura se abrió el paracaídas de A?

b. ¿A qué altura se abrió el paracaídas de B?

c. ¿Qué paracaidista aterriza primero?

Capítulo 5 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y ejemplos

1. **a.** Si $\int_0^1 7f(x)\,dx = 7$, entonces ¿es cierto que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$?

   b. Si $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ y $f(x) \geq 0$, entonces ¿es cierto que

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{4} = 2?$$

   Justifique sus respuestas.

2. Suponga que $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4$, $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 3$, $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = 2$.
   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones (si acaso alguna) es verdadera?

   a. $\int_5^2 f(x)\,dx = -3$ **b.** $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x)) = 9$

   c. $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 5$.

3. **Problema de valor inicial** Demuestre que

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\,\text{sen}\,a(x - t)\,dt$$

   resuelve el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x), \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ y } y = 0 \text{ cuando } x = 0.$$

   (*Sugerencia:* Considere $\text{sen}(ax - at) = \text{sen}\,ax\cos at - \cos ax\,\text{sen}\,at$).

4. **Proporcionalidad** Suponga que x y y están relacionadas mediante la ecuación

$$x = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}\,dt.$$

   Demuestre que d^2y/dx^2 es proporcional a y y determine la constante de proporcionalidad.

5. Determine $f(4)$ si

   a. $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos \pi x$ **b.** $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x\cos \pi x$.

6. Determine $f(\pi/2)$ a partir de la siguiente información.

   i) f es positiva y continua.

   ii) El área debajo de la curva $y = f(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$ es

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\,\text{sen}\,a + \frac{\pi}{2}\cos a.$$

7. El área de la región en el plano xy, acotada por el eje x, la curva $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ y las rectas $x = 1$ y $x = b$ es igual a $\sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}$ para toda $b > 1$. Encuentre $f(x)$.

8. Demuestre que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du = \int_0^x f(u)(x - u)\,du.$$

   (*Sugerencia:* Exprese la integral del lado derecho como la diferencia de dos integrales. Después, pruebe que ambos lados de la ecuación tienen la misma derivada con respecto a x).

9. **Determinación de una curva** Determine la ecuación para la curva en el plano xy que pasa por el punto $(1, -1)$ si su pendiente en x siempre es $3x^2 + 2$.

10. **Extracción de tierra** Usted utiliza una pala para sacar tierra de un agujero, con una velocidad inicial de 32 ft/seg. La tierra debe subir 17 ft por arriba del punto donde la lanza para poder liberar el borde del agujero. ¿Es suficiente la fuerza con la que la lanza para sacarla del agujero o debe lanzarla más fuerte?

Funciones continuas por partes

A pesar de que estamos interesados principalmente en funciones continuas, en la práctica muchas funciones son continuas por parte. Una función $f(x)$ es continua por partes en un intervalo cerrado I. Si f tiene sólo un número finito de discontinuidades en I, los límites

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

existen y son finitos en todo punto interior de I, y los límites laterales adecuados existen y son finitos en los extremos de I. Todas las funciones continuas por partes son integrables. Los puntos de discontinuidad subdividen a I en subintervalos abiertos y semiabiertos donde f es continua, y los anteriores criterios de límites garantizan que f tenga una extensión continua al cierre de cada subintervalo. Para integrar una función continua por partes, integramos las extensiones individuales y sumamos los resultados. La integral de

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -1, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(figura 5.31) en $[-1, 3]$ es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} (1 - x)\,dx + \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 (-1)\,dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[-x\right]_2^3 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - 1 = \frac{19}{6}.\end{aligned}$$

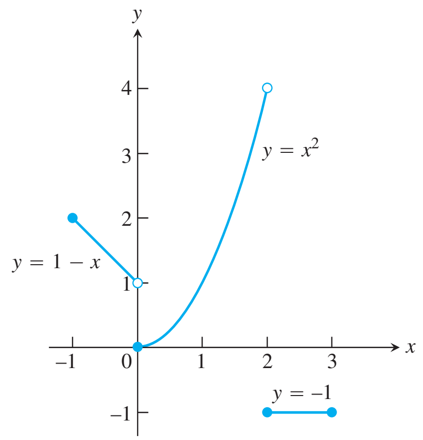


FIGURA 5.31 Funciones continuas por piezas como ésta se integran parte por parte.

El teorema fundamental del cálculo es válido para funciones continuas por partes, con la restricción de que se espera que $(d/dx)\int_a^x f(t)\,dt$ sea igual a $f(x)$ sólo en los valores de x donde f es continua. Hay una restricción similar en la regla de Leibniz (véase el ejercicio 27).

Grafique las funciones de los ejercicios 11 a 16 e intégrelas sobre sus dominios.

11. $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & -8 \le x < 0 \\ -4, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -4 \le x < 0 \\ x^2 - 4, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$

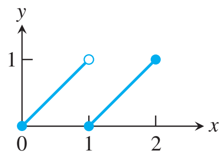
13. $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ \operatorname{sen} \pi t, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

14. $h(z) = \begin{cases} \sqrt{1 - z}, & 0 \le z < 1 \\ (7z - 6)^{-1/3}, & 1 \le z \le 2 \end{cases}$

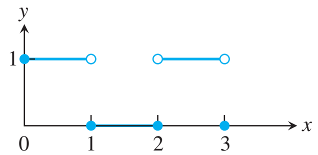
15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \le x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

16. $h(r) = \begin{cases} r, & -1 \le r < 0 \\ 1 - r^2, & 0 \le r < 1 \\ 1, & 1 \le r \le 2 \end{cases}$

17. Determine el valor promedio de la función graficada en la siguiente figura.



18. Determine el valor promedio de la función graficada en la siguiente figura.



Aproximación de sumas finitas con integrales

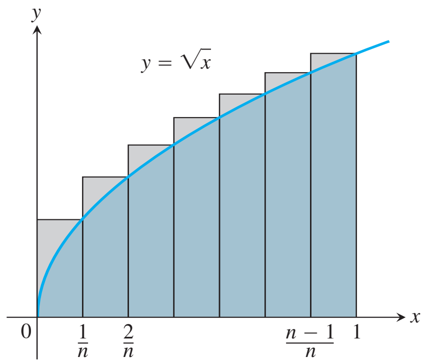
En muchas aplicaciones de cálculo se usan las integrales para aproximar sumas finitas (el procedimiento inverso del habitual, que consiste en usar sumas finitas para aproximar integrales).

Por ejemplo, suponga que se desea estimar la suma de las raíces cuadradas de los primeros n enteros positivos, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$. La integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

es el límite de las sumas superiores

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$
$$= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$



Por lo tanto, cuando n es grande, S_n será cercano a $2/3$ y tendremos

$$\text{Suma de las raíces} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = S_n \cdot n^{3/2} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

La siguiente tabla muestra qué tan buena puede ser la aproximación.

n	**Suma de las raíces**	$(2/3)n^{3/2}$	**Error relativo**
10	22.468	21.082	$1.386/22.468 \approx 6\%$
50	239.04	235.70	1.4%
100	671.46	666.67	0.7%
1000	21,097	21,082	0.07%

19. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$$

mostrando que el límite es

$$\int_0^1 x^5\,dx$$

y evaluando la integral.

20. Vea el ejercicio 19. Evalúe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3).$$

21. Sea $f(x)$ una función continua. Exprese

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

como una integral definida.

22. Utilice el resultado del ejercicio 21 para evaluar

a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(2 + 4 + 6 + \cdots + 2n),$

b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15}),$

c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right).$

¿Qué puede decir acerca de los siguientes límites?

d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

e. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{15}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$

23. **a.** Muestre que el área A_n de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r es

$$A_n = \frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

b. Determine el límite de A_n cuando $n \to \infty$. ¿Esta respuesta concuerda con lo que conoce del área de un círculo?

24. Sea

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$, demuestre que

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

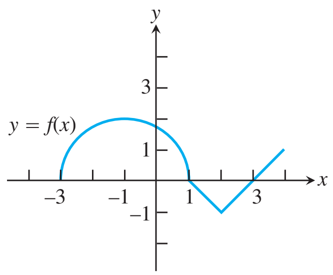
e interprete S_n como una suma de aproximación para la integral

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

(*Sugerencia:* Divida [0, 1] en n intervalos de igual longitud y escriba la suma de aproximación para los rectángulos inscritos)

Definición de funciones mediante el teorema fundamental

25. Una función definida por medio de una integral La gráfica de una función f consiste en una semicircunferencia y dos segmentos, como se muestra. Sea $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.



a. Determine $g(1)$.

b. Determine $g(3)$.

c. Determine $g(-1)$.

d. Encuentre todos los valores de x en el intervalo abierto $(-3, 4)$ en los que g tiene un máximo relativo.

e. Escriba una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = -1$.

f. Encuentre la coordenada x de cada punto de inflexión de la gráfica de g en el intervalo abierto $(-3, 4)$.

g. Determine el rango de g.

26. Una ecuación diferencial Muestre que $y = \operatorname{sen} x + \int_x^{\pi} \cos 2t\,dt + 1$ satisface las siguientes dos condiciones:

i) $y'' = -\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$

ii) $y = 1$ y $y' = -2$ cuando $x = \pi$.

Regla de Leibniz En las aplicaciones, algunas veces encontramos funciones como

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^2} (1 + t)\,dt \quad \text{y} \quad g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} t^2\,dt,$$

definidas por integrales que al mismo tiempo tienen una variable en los límites superiores de integración y una variable en los límites inferiores de integración. La primera integral puede evaluarse directamente, pero la segunda no. Sin embargo, obtendremos la derivada de cualquier integral usando la fórmula llamada **regla de Leibniz**.

Regla de Leibniz

Si f es continua en $[a, b]$ y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones diferenciables de x, cuyos valores están en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

La figura 5.32 da una interpretación geométrica de la regla de Leibniz. En ella se muestra una alfombra de ancho variable $f(t)$, que se enrolla a la izquierda al mismo tiempo que x se desenrolla a la derecha. (En esta interpretación, el tiempo es x, no t). En el instante x, el suelo está cubierto desde $u(x)$ hasta $v(x)$. La tasa du/dx a la que la alfombra se está enrollando no debe ser la misma que la tasa dv/dx en la que se está desenrollando. En cualquier tiempo dado x, el área cubierta por la alfombra es

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt.$$

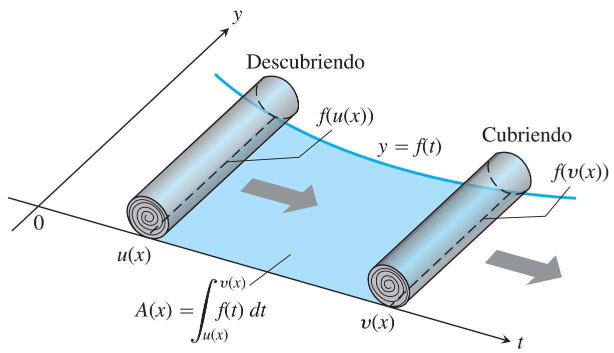


FIGURA 5.32 Enrollando y desenrollando una alfombra: una interpretación geométrica de la regla de Leibniz:

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

¿A qué tasa cambia el área cubierta? En el instante x, $A(x)$ aumenta por el ancho $f(v(x))$ de la alfombra desenrollada multiplicado por la tasa dv/dx a la que se desenrolla. Esto es, $A(x)$ crece a la tasa

$$f(v(x))\frac{dv}{dx}.$$

Al mismo tiempo, A decrece a la tasa

$$f(u(x))\frac{du}{dx},$$

el ancho del extremo que se está enrollando multiplicado por la tasa du/dx. La tasa de cambio efectiva en A es

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx},$$

que es precisamente la regla de Leibniz.

Para probar la regla, sea f una antiderivada de f en $[a, b]$ Entonces,

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Al derivar ambos lados de esta ecuación con respecto a x se obtiene la ecuación que buscamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt &= \frac{d}{dx}\Big[F(v(x)) - F(u(x))\Big] \\ &= F'(v(x))\frac{dv}{dx} - F'(u(x))\frac{du}{dx} && \text{Regla de la cadena} \\ &= f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

Utilice la regla de Leibniz para encontrar las derivadas de las funciones de los ejercicios 27 a 29.

27. $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t}\, dt$

28. $f(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1 - t^2}\, dt$

29. $g(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \operatorname{sen} t^2\, dt$

30. Utilice la regla de Leibniz para encontrar el valor de x que maximiza el valor de la integral

$$\int_{x}^{x+3} t(5 - t)\, dt.$$

Capítulo 5 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos de Mathematica/Maple:

Uso de sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas

En la parte I visualice y aproxime áreas y volúmenes.

Sumas de Riemann, integrales definidas y el teorema fundamental del cálculo

Las partes I, II y III desarrollan las sumas de Riemann y las integrales definidas. La parte IV continúa el desarrollo de la suma de Riemann y la integral definida mediante el teorema fundamental para resolver problemas ya analizados.

Recolectores de lluvia, elevadores y cohetes

La parte I ilustra, por medio de ejemplos tomados del capítulo, que el área debajo de una curva es igual que el área de un rectángulo adecuado. Calculará la cantidad de agua acumulada en recipientes de formas diferentes, cuando éstos se llenan y se vacían.

Desplazamiento a lo largo de una línea recta, parte II

Observará la forma de una gráfica a través de sorprendentes visualizaciones animadas, de las relaciones derivadas entre la posición, la velocidad y la aceleración. Las figuras en el texto pueden animarse mediante este software.

Deformación de vigas

Estudiará formas en las que se deforman las vigas, determinará sus desviaciones máximas, concavidad y puntos de inflexión, luego interpretará los resultados en términos de la compresión y tensión de la viga.

6

Aplicaciones de las integrales definidas

INTRODUCCIÓN En el capítulo 5 vimos que una función continua en un intervalo cerrado tiene una integral definida, que es el límite de cualquier suma de Riemann para esa función. Probamos que es posible evaluar integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo. También encontramos que el área bajo una curva y el área comprendida entre dos curvas podrían calcularse como integrales definidas.

En este capítulo ampliamos las aplicaciones de las integrales definidas para determinar volúmenes, longitudes de curvas planas y áreas de superficies de revolución. De igual manera, utilizamos las integrales para resolver problemas de física que implican el trabajo realizado por una fuerza, la fuerza de un fluido contra una pared plana y la ubicación del centro de masa de un objeto.

6.1 Cálculo de volúmenes por medio de secciones transversales

En esta sección definimos volúmenes de sólidos por medio de las áreas de sus secciones transversales. Una **sección transversal** de un sólido S es la región plana formada por la intersección de S con un plano (figura 6.1). Presentamos tres métodos para obtener las secciones transversales adecuadas para determinar el volumen de un sólido particular: el método de las rebanadas (o placas delgadas), el método de discos y el método de las arandelas.

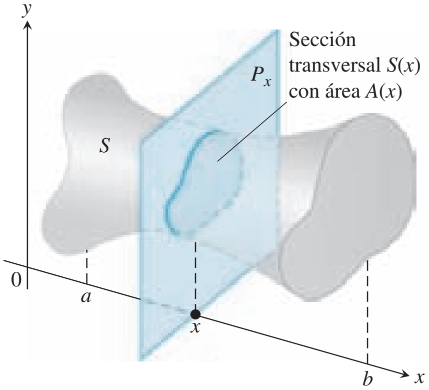


FIGURA 6.1 Una sección transversal $S(x)$ del sólido S, formado por la intersección de S con un plano P_x perpendicular al eje x, que pasa por el punto x en el intervalo $[a, b]$.

Suponga que queremos determinar el volumen de un sólido S como el de la figura 6.1. Iniciamos ampliando la definición de un cilindro de la geometría clásica a la de sólidos cilíndricos con base arbitraria (figura 6.2). Si el sólido cilíndrico tiene una base conocida A y altura h, entonces el volumen del sólido cilíndrico es

$$\text{Volumen} = \text{área} \times \text{altura} = A \cdot h.$$

Esta ecuación forma la base para definir los volúmenes de muchos sólidos que no son cilíndricos, como el de la figura 6.1. Si la sección transversal del sólido S en cada punto x del intervalo $[a, b]$ es una región $S(x)$ de área $A(x)$, y A es una función continua de x, definimos y calculamos el volumen del sólido S como la integral definida de $A(x)$. Ahora mostramos cómo se obtiene esta integral por medio del **método de las rebanadas**.

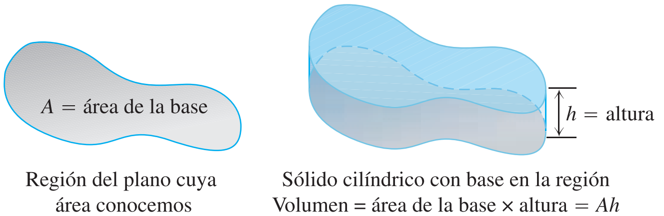


FIGURA 6.2 El volumen de un sólido cilíndrico siempre se define como el área de su base por su altura.

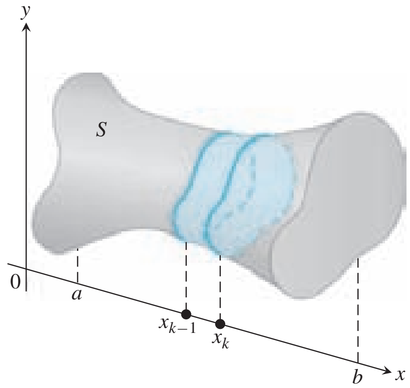


FIGURA 6.3 Una placa delgada representativa en el sólido.

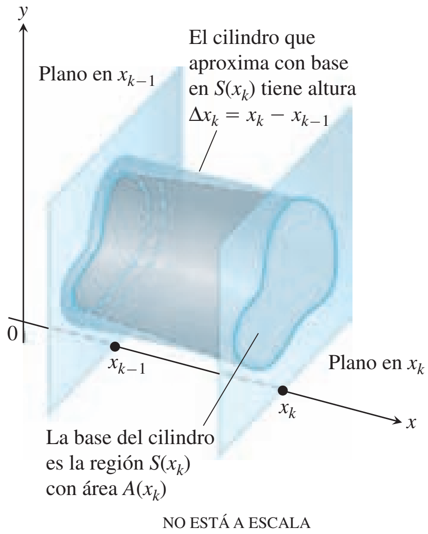


FIGURA 6.4 La placa sólida delgada en la figura 6.3 se aproxima mediante el sólido cilíndrico con base $S(x_k)$, que tiene área $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Rebanar mediante planos paralelos

Dividimos $[a, b]$ en subintervalos de ancho (longitud) Δx_k y rebanamos el sólido, como si fuera una hogaza de pan, por medio de planos perpendiculares al eje x en los puntos de partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Los planos P_{x_k}, perpendiculares al eje x en los puntos de partición, rebanan a S en "placas delgadas" (como delgadas rebanadas de una hogaza de pan). Una placa típica se muestra en la figura 6.3. Aproximamos el volumen de la placa entre el plano en x_{k-1} y el plano en x_k por medio de un sólido cilíndrico con área de base $A(x_k)$ y altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (figura 6.4). El volumen V_k de este sólido cilíndrico es $A(x_k) \cdot \Delta x_k$, que es aproximadamente el mismo volumen que el de la placa:

$$\text{Volumen de la } k\text{-ésima placa} \approx V_k = A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Por lo tanto, el volumen V de todo el sólido se aproxima por la suma de dichos volúmenes cilíndricos,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k.$$

Ésta es una suma de Riemann para la función $A(x)$ en $[a, b]$. Esperamos que las aproximaciones dadas por tales sumas mejoren conforme la norma de partición de $[a, b]$ tienda a cero. Tomando una partición de $[a, b]$ en n subintervalos con $\|P\| \to 0$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Así que definimos la integral definida límite de la suma de Riemann como el volumen del sólido S.

DEFINICIÓN El **volumen** de un sólido de área de sección transversal integrable conocida $A(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es la integral de A de a a b,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Dicha definición se aplica siempre que $A(x)$ sea integrable, pero en particular cuando es continua. Con la finalidad de aplicar la definición para el cálculo del volumen de un sólido, se deben realizar los siguientes pasos:

Cálculo del volumen de un sólido

1. *Bosqueje el sólido y una sección transversal representativa.*
2. *Determine una fórmula para* $A(x)$, el área de una sección transversal representativa.
3. *Determine los límites de integración.*
4. *Integre* $A(x)$ para determinar el volumen.

EJEMPLO 1 Una pirámide de 3 m de altura tiene una base cuadrada que mide 3 m por lado. La sección transversal de la pirámide perpendicular a una altura de x m del vértice es un cuadrado de x m por lado. Determine el volumen de la pirámide.

Solución

1. *Un bosquejo*. Dibujamos la pirámide con su altura a lo largo del eje x y su vértice en el origen; luego, incluimos una sección transversal típica (figura 6.5).

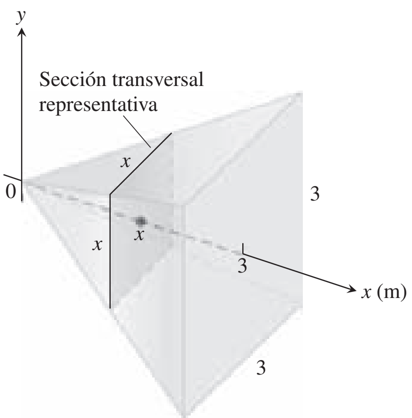


FIGURA 6.5 Las secciones transversales de la pirámide del ejemplo 1 son cuadradas.

2. *Una fórmula para* $A(x)$. La sección transversal en x es un cuadrado de x metros por lado, de manera que su área es

$$A(x) = x^2.$$

3. *Los límites de integración*. Los cuadrados se encuentran en los planos desde $x = 0$ a $x = 3$.
4. *Integrar para determinar el volumen.*

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_0^3 = 9 \text{ m}^3.$$

EJEMPLO 2 Una cuña curvada se corta a partir de un cilindro de radio 3 mediante dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El segundo plano cruza al primero y forma un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

Solución Dibujamos la cuña y bosquejamos una sección transversal representativa, perpendicular al eje x (figura 6.6). La base de la cuña en la figura es un semicírculo con $x \geq 0$, que se corta a partir del círculo $x^2 + y^2 = 9$ por medio del plano de 45°, cuando éste interseca al eje y. Para cualquier x en el intervalo $[0, 3]$, los valores de y en esta base semicircular varían desde $y = -\sqrt{9 - x^2}$ hasta $y = \sqrt{9 - x^2}$. Cuando rebanamos la cuña mediante un plano perpendicular al eje x, obtenemos una sección transversal en x que es un rectángulo de altura x cuyo ancho cruza la base semicircular. El área de esta sección transversal es

$$\begin{aligned} A(x) &= (\text{altura})(\text{ancho}) = (x)\left(2\sqrt{9 - x^2}\right) \\ &= 2x\sqrt{9 - x^2}. \end{aligned}$$

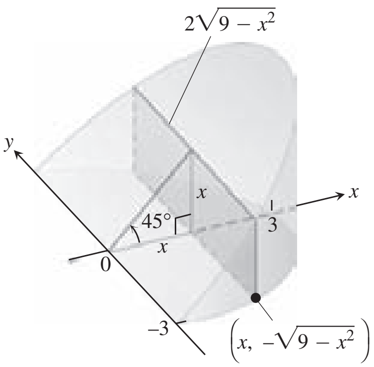


FIGURA 6.6 La cuña del ejemplo 2, rebanada en sentido perpendicular al eje x. Las secciones transversales son rectángulos.

Los rectángulos van desde $x = 0$ hasta $x = 3$, de forma que tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx \\ &= -\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2}\bigg]_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18. \end{aligned}$$

Sea $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, integrar y sustituir.

EJEMPLO 3 El principio de Cavalieri establece que sólidos con alturas iguales e idénticas áreas de sección transversal en cada altura tienen el mismo volumen (figura 6.7). Esto se sigue de manera inmediata a partir de la definición de volumen, ya que la función del área de la sección transversal $A(x)$ y el intervalo $[a, b]$ son los mismos para ambos sólidos.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Bonaventura Cavalieri
(1598–1647)

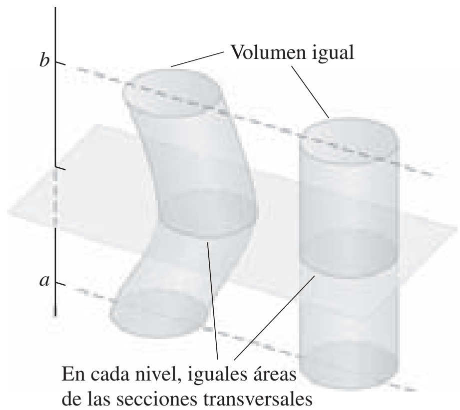


FIGURA 6.7 *Principio de Cavalieri:* Tales sólidos tienen el mismo volumen, el cual puede ilustrarse con un montón de monedas.

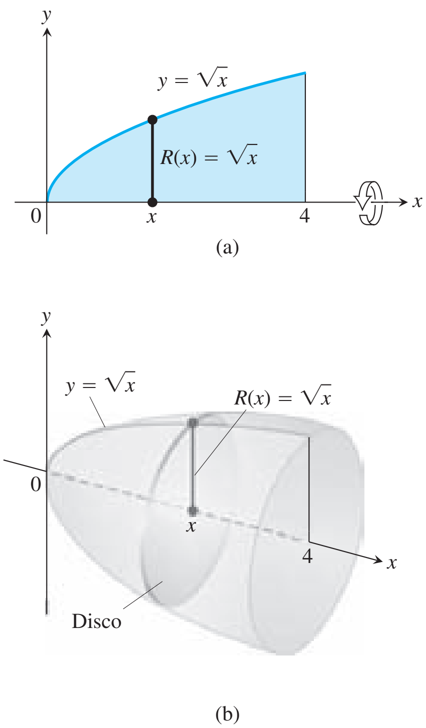


FIGURA 6.8 La región (a) y el sólido de revolución (b) en el ejemplo 4.

Sólidos de revolución: El método de los discos

El sólido generado al hacer girar una región plana alrededor de un eje se denomina **sólido de revolución**. Para determinar el volumen de un sólido como el que se muestra en la figura 6.8, sólo necesitamos observar que el área de la sección transversal $A(x)$ es el área de un disco de radio $R(x)$, la distancia de la frontera de la región plana al eje del revolución. Así, el área es

$$A(x) = \pi(\text{radio})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

Por lo que, en este caso, la definición de volumen da

Volumen por medio de discos al girar alrededor del eje x

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx.$$

Este método para el cálculo del volumen de un sólido de revolución se denomina **método de los discos**, ya que la sección transversal es un disco circular de radio $R(x)$.

EJEMPLO 4 La región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine su volumen.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio típico y el sólido generado (figura 6.8). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx \qquad \text{Radio } R(x) = \sqrt{x} \text{ para la rotación alrededor del eje } x. \\ &= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\,\frac{(4)^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 La circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2$$

se hace girar alrededor del eje x para generar una esfera. Determine su volumen.

Solución Imaginemos que cortamos la esfera en delgadas rebanadas por medio de planos perpendiculares al eje x (figura 6.9). El área de la sección transversal en un punto representativo x, entre $-a$ y a es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(a^2 - x^2). \qquad R(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ para la rotación alrededor del eje } x.$$

Por lo tanto, el volumen es

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$ ■

El eje de revolución en el siguiente ejemplo no es el eje x, pero la regla para el cálculo del volumen es la misma: integrar $\pi(\text{radio})^2$ entre límites adecuados.

EJEMPLO 6 Determine el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor de la recta $y = 1$ la región acotada por $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$.

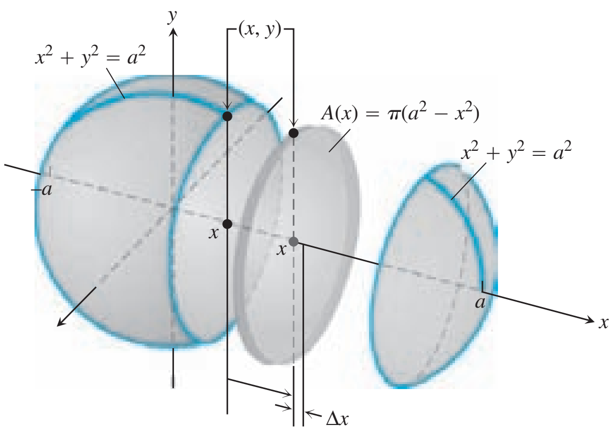


FIGURA 6.9 La esfera generada por la rotación de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ alrededor del eje x. El radio es $R(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (ejemplo 5).

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, el radio representativo y el sólido generado (figura 6.10). El volumen es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx \\
&= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx && \text{Radio } R(x) = \sqrt{x} - 1 \text{ para rotación alrededor de } y = 1. \\
&= \pi\int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx && \text{Desarrollar el integrando.} \\
&= \pi\left[\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}. && \text{Integrar.}
\end{aligned}
$$

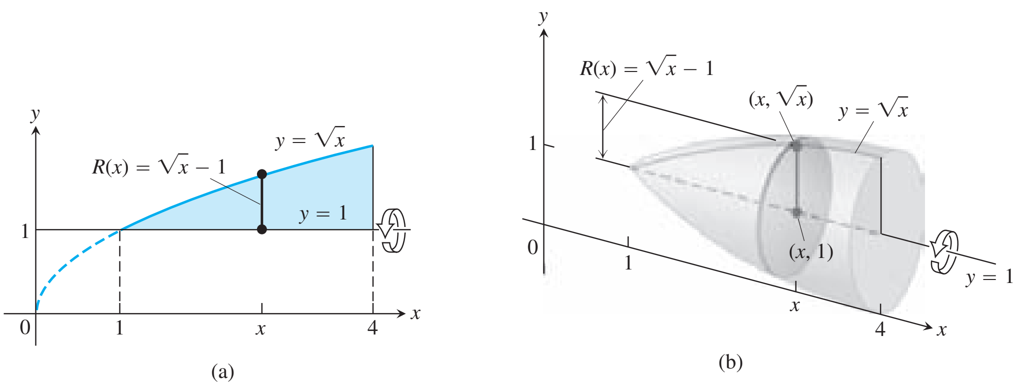


FIGURA 6.10 La región (a) y el sólido de revolución (b) del ejemplo 6. ■

Para determinar el volumen de un sólido generado al hacer girar una región entre el eje y y una curva $x = R(y)$, $c \le y \le d$, con respecto al eje y, utilizamos el mismo método, basta con remplazar x con y. En este caso, la sección transversal circular es

$$A(y) = \pi[\text{radio}]^2 = \pi[R(y)]^2,$$

y la definición de volumen da

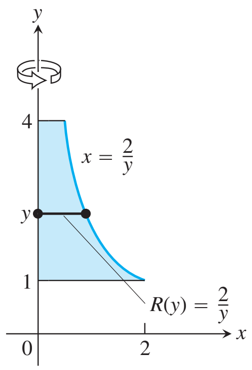
Volumen mediante discos por rotación alrededor del eje y

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2\,dy.$$

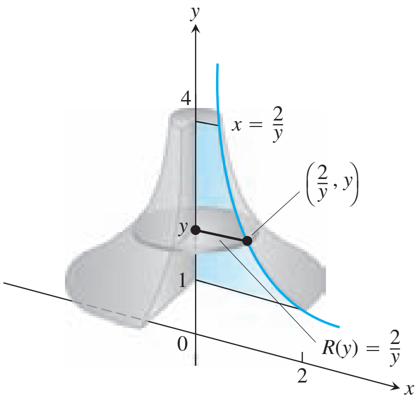
EJEMPLO 7 Determine el volumen del sólido generado al hacer girar con respecto al eje y la región comprendida entre el eje y y la curva $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio representativo y el sólido generado (figura 6.11). El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,dy \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy && \text{Radio } R(y) = \frac{2}{y} \text{ para rotación alrededor del eje } y. \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi. \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 6.11 La región (a) y parte del sólido de revolución (b) del ejemplo 7.

EJEMPLO 8 Determine el volumen del sólido generado al hacer girar con respecto a la recta $x = 3$ la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$.

Solución Dibujamos figuras que muestren la región, un radio representativo y el sólido generado (figura 6.12). Observe que las secciones transversales son perpendiculares a la recta $x = 3$, además de que tienen coordenadas y desde $y = -\sqrt{2}$ hasta $y = \sqrt{2}$. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\,dy && y = \pm\sqrt{2} \text{ cuando } x = 3 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\,dy && \text{Radio } R(y) = 3 - (y^2 + 1) \text{ para rotación alrededor del eje } x = 3. \\ &= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\,dy && \text{Desarrollar el integrando.} \\ &= \pi\left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} && \text{Integrar.} \\ &= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

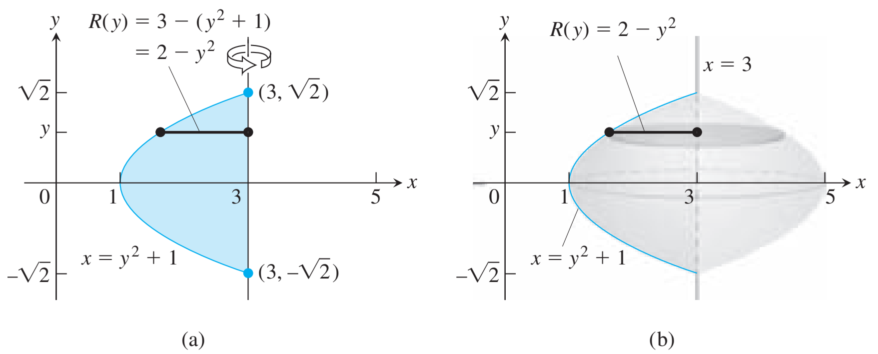


FIGURA 6.12 La región (a) y el sólido de revolución (b) del ejemplo 8.

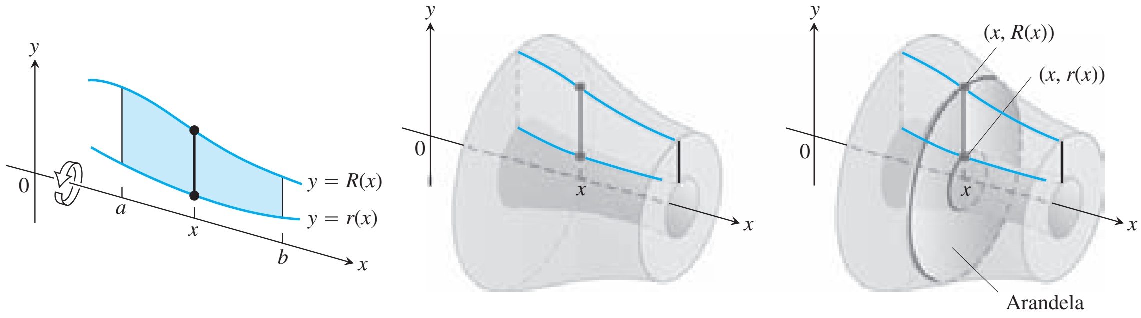


FIGURA 6.13 Aquí las secciones transversales del sólido de revolución generado son arandelas, no discos, por lo que la integral $\int_a^b A(x)\,dx$ conduce a una fórmula ligeramente diferente.

Sólidos de revolución: El método de las arandelas

Si la región que hacemos girar para generar un sólido no cruza o no hace frontera con el eje de revolución, el sólido tendrá un agujero (figura 6.13). Las secciones transversales perpendiculares al eje de revolución, en vez de discos, son *arandelas* (la superficie circular en medio de la figura 6.13). Las dimensiones de una arandela representativa son

$$\text{Radio exterior:} \quad R(x)$$

$$\text{Radio interior:} \quad r(x)$$

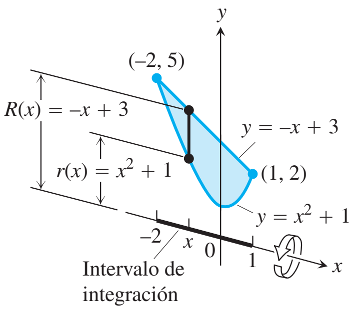
El área de la arandela es

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2).$$

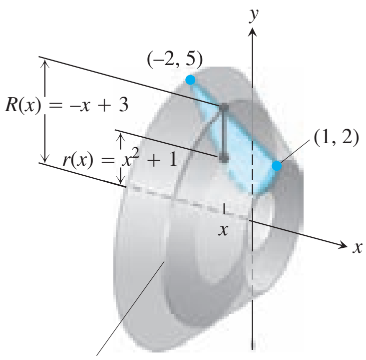
En consecuencia, la definición de volumen da

Volumen mediante arandelas para rotación alrededor del eje x

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx.$$



(a)



Sección transversal, arandela
Radio exterior: $R(x) = -x + 3$
Radio interior: $r(x) = x^2 + 1$

(b)

FIGURA 6.14 (a) La región del ejemplo 9 generada por un segmento de recta perpendicular al eje de revolución. (b) Cuando la región se hace girar alrededor del eje x, el segmento de recta genera una arandela.

Este método para calcular el volumen de un sólido de revolución se denomina **método de las arandelas**, ya que cada pequeña pieza parece una arandela circular de radio exterior $R(x)$ y radio interior $r(x)$.

EJEMPLO 9 Para generar un sólido, se hace girar alrededor del eje x la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$. Determine el volumen del sólido.

Solución Utilizamos los cuatro pasos para el cálculo del volumen de un sólido, como se hizo anteriormente en esta sección.

1. Dibuje la región y elabore un bosquejo de un segmento de recta que la cruce y sea perpendicular al eje de revolución (el segmento en color negro de la figura 6.14a).
2. Determine los radios exterior e interior de la arandela que se generan al hacer girar este segmento alrededor del eje x.

   Dichos radios son las distancias de los extremos del segmento de recta al eje de revolución (figura 6.14).

$$\text{Radio exterior:} \quad R(x) = -x + 3$$

$$\text{Radio interior:} \quad r(x) = x^2 + 1$$

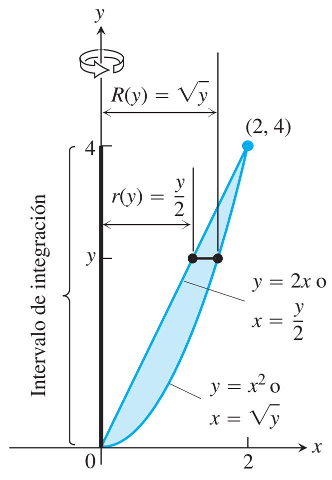
3. Calcule los límites de integración determinando las coordenadas x de los puntos de intersección de la curva y la recta de la figura 6.14a.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x = -2, \quad x &= 1 \end{aligned}$$

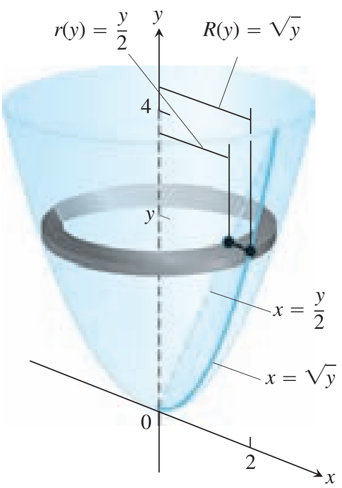
Límites de integración

4. Evalúe la integral del volumen.

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx && \text{Rotación alrededor del eje } x \\ &= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\,dx && \text{Valores de los pasos 2 y 3.} \\ &= \pi \int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx && \text{Simplificar algebraicamente.} \\ &= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$



(a)



(b)

FIGURA 6.15 (a) La región que será girada alrededor del eje y, los radios de las arandelas y los límites de integración del ejemplo 10. (b) La arandela descrita por el segmento de recta del inciso (a).

Para determinar el volumen de un sólido formado al hacer girar una región alrededor del eje y, utilizamos el mismo procedimiento que en el ejemplo 9, pero integramos con respecto a y no con respecto a x. En tal situación, el segmento de recta describe una arandela representativa que es perpendicular al eje y (el eje de revolución), así como los radios exterior e interior de la arandela son funciones de y.

EJEMPLO 10 Para generar un sólido, se hace girar alrededor del eje y la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante. Determine el volumen del sólido.

Solución Primero bosquejamos la región y dibujamos un segmento de recta en la región que sea perpendicular al eje de revolución (el eje y). Véase la figura 6.15a.

Los radios de la arandela, que se describe por el segmento de recta, son $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ (figura 6.15).

La recta y la parábola se intersecan en $y = 0$ y $y = 4$, por lo que los límites de integración son $c = 0$ y $d = 4$. Integramos para determinar el volumen:

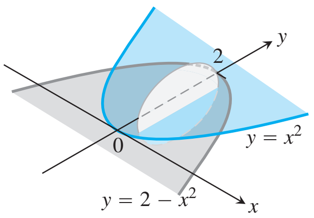
$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,dy && \text{Rotación alrededor del eje } y. \\ &= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right)dy && \text{Sustituir los límites de integración por los radios.} \\ &= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ejercicios 6.1

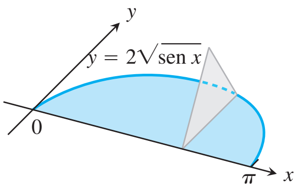
Volúmenes mediante rebanadas

Determine el volumen de cada uno de los sólidos en los ejercicios 1 a 10.

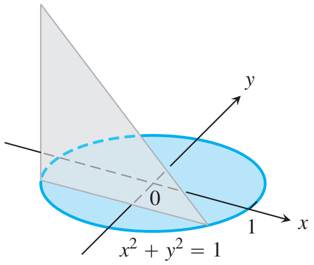
1. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x en el intervalo $0 \leq x \leq 4$ son cuadrados cuyas diagonales van desde la parábola $y = -\sqrt{x}$ hasta la parábola $y = \sqrt{x}$.
2. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son discos circulares cuyos diámetros van desde la parábola $y = x^2$ hasta la parábola $y = 2 - x^2$.



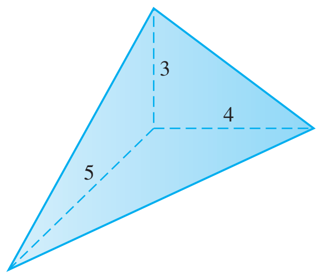
3. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos son cuadrados cuyas bases van desde la semicircunferencia $y = -\sqrt{1 - x^2}$ a la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$.
4. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre tales planos son cuadrados cuyas diagonales van desde la semicircunferencia $y = -\sqrt{1 - x^2}$ a la semicircunferencia $y = \sqrt{1 - x^2}$.
5. La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son
   a. triángulos equiláteros con bases que van desde el eje x a la curva, como se muestra en la figura.



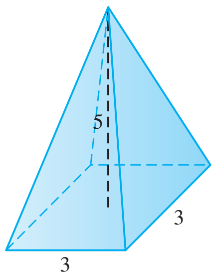
   b. cuadrados con bases que van desde el eje x hasta la curva.
6. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son
   a. discos circulares con diámetros que van desde la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.
   b. cuadrados cuyas bases van de la curva $y = \tan x$ a la curva $y = \sec x$.
7. La base de un sólido es la región acotada por las gráficas de $y = 3x$, $y = 6$ y $x = 0$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son
   a. rectángulos de altura 10.
   b. rectángulo de perímetro 20.
8. La base de un sólido es la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = x/2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son
   a. triángulos isósceles de altura 6.
   b. semicírculos con diámetros cruzan la base del sólido.
9. El sólido que se encuentra entre los planos perpendiculares al eje y en $y = 0$ y $y = 2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son discos circulares con diámetros que van desde el eje y hasta la parábola $x = \sqrt{5}y^2$.
10. La base del sólido es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Las secciones transversales son triángulos rectángulos isósceles determinados por planos perpendiculares al eje y entre $y = -1$ y $y = 1$, con uno de los catetos en el disco.



11. Determine el volumen del tetraedro dado. (*Sugerencia:* Considere rebanadas perpendiculares a uno de los lados marcados).

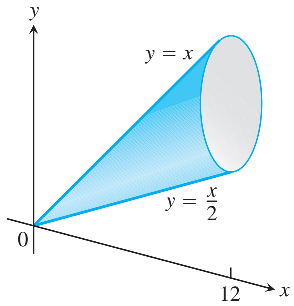


12. Determine el volumen de la pirámide dada, que tiene base cuadrada de área 9 y altura 5.



13. **Un sólido torcido.** Un cuadrado de lado con longitud s se encuentra en un plano perpendicular a la recta L. Un vértice del cuadrado está en L. Conforme este cuadrado se mueve una distancia h a lo largo de L, el cuadrado da una vuelta alrededor de L para generar una columna con forma de sacacorchos con secciones transversales cuadradas.
    a. Determine el volumen de la columna.
    b. ¿Cuál será el volumen si el cuadrado da dos vueltas en vez de una? Justifique su respuesta.

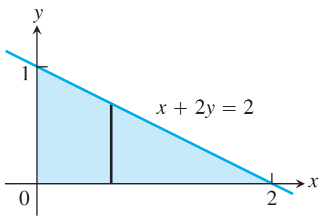
14. Principio de Cavalieri Un sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 12$. Las secciones transversales son discos circulares determinados por planos perpendiculares al eje x, sus diámetros van desde la recta $y = x/2$ a la recta $y = x$, como se ilustra en la siguiente figura. Explique por qué el sólido tiene el mismo volumen que el de un cono circular recto con base de radio 3 y altura 12.



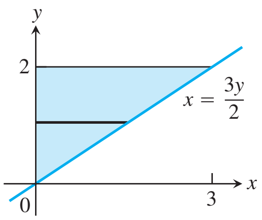
Cálculo de volúmenes por medio del método de los discos

En los ejercicios 15 a 18, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje dado.

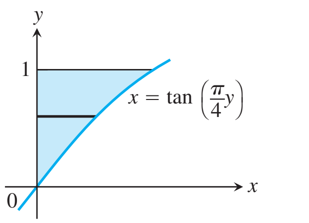
15. Alrededor del eje x



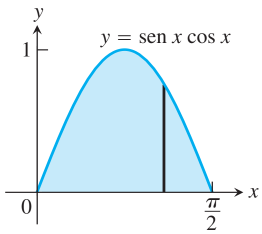
16. Alrededor del eje y



17. Alrededor del eje y



18. Alrededor del eje x



En los ejercicios 19 a 24, determine los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y las curvas alrededor del eje x.

19. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

20. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

21. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

22. $y = x - x^2, \quad y = 0$

23. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

24. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

En los ejercicios 25 y 26, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de la recta dada.

25. La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = \sqrt{2}$, por abajo por la curva $y = \sec x \tan x$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = \sqrt{2}$

26. La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la recta $y = 2$, abajo por la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, y a la izquierda por el eje y, alrededor de la recta $y = 2$.

En los ejercicios 27 a 32, determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar la región acotada por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje y.

27. La región encerrada por $x = \sqrt{5}\, y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$

28. La región encerrada por $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

29. La región encerrada por $x = \sqrt{2 \operatorname{sen} 2y}, \quad 0 \leq y \leq \pi/2, \quad x = 0$

30. La región encerrada por $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}, \quad -2 \leq y \leq 0, x = 0$

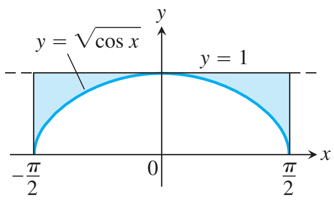
31. $x = 2/(y + 1), \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3$

32. $x = \sqrt{2y}/(y^2 + 1), \quad x = 0, \quad y = 1$

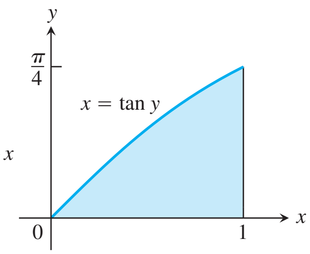
Cálculo de volúmenes por medio del método de las arandelas

En los ejercicios 33 y 34, determine el volumen de cada uno de los sólidos generados al hacer girar las regiones sombreadas alrededor del eje indicado.

33. El eje x



34. El eje y



En los ejercicios 35 a 40, determine el volumen del sólido generado al hacer girar las regiones acotadas por las rectas y las curvas alrededor del eje x.

35. $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

36. $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

37. $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

38. $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

39. $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\pi/4 \leq x \leq \pi/4$

40. $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

En los ejercicios 41 a 44, determine el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje y.

41. La región encerrada por el triángulo con vértices (1, 0), (2, 1) y (1, 1).

42. La región encerrada por el triángulo con vértices (0, 1), (1, 0) y (1, 1).

43. La región en el primer cuadrante, acotada por arriba por la parábola $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 2$.

44. La región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, a la derecha por la recta $x = \sqrt{3}$, y por arriba por la recta $y = \sqrt{3}$.

En los ejercicios 45 y 46, determine el volumen del sólido generado al hacer girar cada región alrededor del eje dado.

45. La región en el primer cuadrante acotada por arriba por la curva $y = x^2$, abajo por el eje x, y a la derecha por la recta $x = 1$, alrededor de la recta $x = -1$.

46. La región en el segundo cuadrante acotada por arriba por la curva $y = -x^3$, abajo por el eje x, y a la izquierda por la recta $x = -1$, alrededor de la recta $x = -2$.

Volúmenes de sólidos de revolución

47. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = \sqrt{x}$ así como por las rectas $y = 2$ y $x = 0$, alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.

c. la recta $y = 2$. **d.** la recta $x = 4$.

48. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por las rectas y $= 2$x, $y = 0$ y $x = 1$ alrededor de

a. la recta $x = 1$. **b.** la recta $x = 2$.

49. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ alrededor de

a. la recta $y = 1$. **b.** la recta $y = 2$.

c. la recta $y = -1$.

50. Por medio de integración, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, h)$, alrededor de

a. el eje x. **b.** el eje y.

Teoría y aplicaciones

51. Volumen de un toro Se hace girar el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ alrededor de la recta $x = b$ $(b > a)$ para generar un sólido que tiene forma de una rosquilla, el cual se denomina toro. Determine su volumen. (*Sugerencia:* Considere $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$, ya que es el área de un semicírculo de radio a).

52. Volumen de un tazón Un tazón tiene una forma que puede generarse al hacer girar la gráfica de $y = x^2/2$ entre $y = 0$ y $y = 5$ alrededor del eje y.

a. Determine el volumen del tazón.

b. Razones relacionadas Si llenamos el tazón con agua a una velocidad constante de 3 unidades cúbicas por segundo, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua en el tazón cuando el agua tiene una profundidad de 4 unidades?

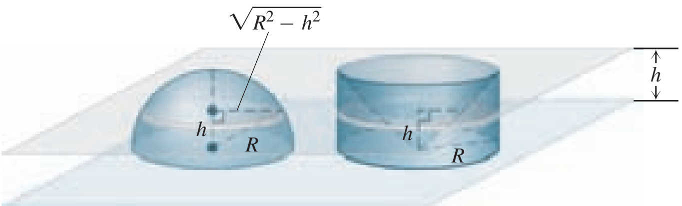
53. Volumen de un tazón

a. Un tazón semiesférico de radio a contiene agua a una profundidad h. Determine el volumen del agua en el tazón.

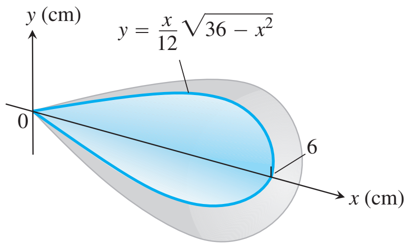
b. Razones relacionadas Entra agua a un tazón semiesférico de concreto de radio de 5 m a una velocidad de 0.2 m^3/seg. ¿Qué tan rápido se eleva el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 4 m?

54. Explique cómo podría estimar el volumen de un sólido de revolución midiendo la sombra proyectada sobre una mesa paralela a su eje de revolución por una luz que brilla directamente encima del sólido.

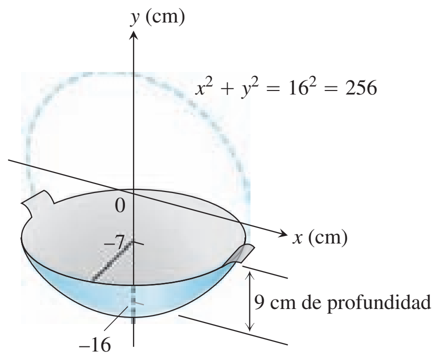
55. Volumen de una semiesfera Deduzca la fórmula $V = (2/3)\pi R^3$ para el volumen de una semiesfera de radio R comparando sus secciones transversales con las secciones transversales de un cilindro circular recto sólido de radio R y altura R, del cual se quita un cono circular recto sólido de base R y altura R, como se sugiere en la siguiente figura.



56. Diseño de una plomada Se le ha pedido que diseñe una plomada que pese alrededor de 190 g, por lo que decide que la forma debe ser parecida a la del sólido de revolución que se ilustra a continuación. Determine el volumen de la plomada. Si se elige latón, que tiene un peso de 8.5 g/cm^3, ¿cuánto pesará la plomada? (Aproxime al gramo más cercano).



57. Diseño de un wok Se le pide diseñar un wok (una sartén china) que tenga forma de un tazón esférico con asas. Un poco de experiencia en casa le convence que puede obtener uno con una capacidad de 3 L, si lo construye con 9 cm de profundidad y con un radio de 16 cm. Para asegurarse, se imagina la sartén como un sólido de revolución, como el que se muestra a continuación, y calcula su volumen con una integral. ¿Cuál es el volumen que se tiene realmente? Redondee la respuesta al centímetro cúbico más cercano. (1 L $= 1000$ cm^3).

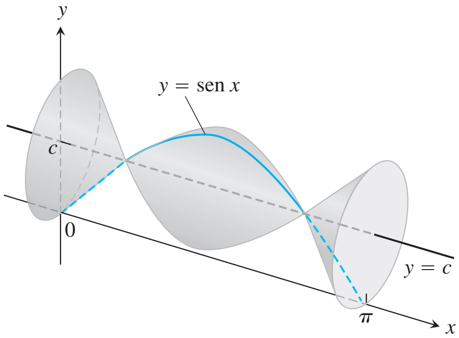


58. Máx-mín El arco $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, se hace girar alrededor de la recta $y = c$, $0 \leq c \leq 1$, para generar el sólido de la siguiente figura.

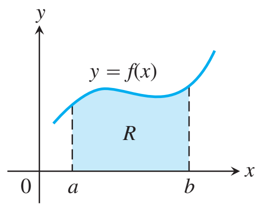
a. Determine el valor de c que minimice el volumen del sólido. ¿Cuál es el volumen mínimo?

b. ¿Cuál es el valor de c en $[0, 1]$ que maximiza el volumen del sólido?

T **c.** Grafique el volumen del sólido como una función de c, primero para $0 \leq c \leq 1$ y después sobre un dominio más grande. ¿Qué le sucede al volumen del sólido cuando c se aleja de $[0, 1]$? ¿Esto tiene sentido físico? Justifique sus respuestas.



59. Considere la región R acotada por las gráficas de $y = f(x) > 0$, $x = a > 0$, $x = b > a$ y $y = 0$ (véase la siguiente figura). Si el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar R alrededor del eje x es 4π, y el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar R alrededor de la recta $y = -1$ es 8π, determine el área de R.



60. Considere la región R dada en el ejercicio 59. Si el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar R alrededor del eje x es 6π, y el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar R alrededor de la recta $y = -2$ es 10π, determine el área de R.

6.2 Cálculo de volúmenes por medio de cascarones cilíndricos

En la sección 6.1 definimos el volumen de un sólido S como la integral definida $V = \int_a^b A(x)\,dx$, donde $A(x)$ es un área de sección transversal integrable del sólido de $x = a$ a $x = b$. El área $A(x)$ se obtuvo al rebanar el sólido con un plano perpendicular al eje x. Sin embargo, este método de rebanar en ocasiones es difícil de aplicar, como lo ilustramos en nuestro primer ejemplo. Para superar esta dificultad, utilizamos la misma definición para volumen, pero obtenemos el área al rebanar el sólido de una manera diferente.

Rebanadas mediante cilindros

Suponga que rebanamos el sólido utilizando cilindros circulares de radios crecientes, de manera semejante a cortadoras de galletas. Rebanamos el sólido de manera perpendicular al eje x, con el eje del cilindro paralelo al eje y. El eje vertical de cada cilindro es la misma línea, pero los radios de los cilindros crecen para cada rebanada. De esta forma, el sólido se rebana en delgados cascarones cilíndricos de grosor constante, cuyo radio crece cuando se aleja del eje común, igual que los anillos circulares de un árbol. Si se extiende un cascarón cilíndrico, se observa que su volumen es aproximadamente el de una pieza rectangular con área $A(x)$ y grosor Δx. Lo anterior nos permite aplicar la misma definición de integral para volumen, como ya se hizo. Antes de describir el método en general, veamos un ejemplo para obtener un poco de comprensión al respecto.

EJEMPLO 1 La región encerrada por el eje x y la parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ se hace girar alrededor de la recta vertical $x = -1$ para generar la forma de un sólido (figura 6.16). Determine el volumen del sólido.

Solución En este caso, utilizar el método de las arandelas de la sección 6.1 sería complicado, ya que necesitaríamos expresar los valores de x de las ramas izquierda y derecha de la parábola (en la figura 6.16a) en términos de y. (Tales valores de x son los radios exterior e interior de una arandela representativa, por lo que necesitamos despejar x de $y = 3x - x^2$, lo cual conduce a fórmulas complicadas). En vez de hacer girar una tira horizontal de grosor Δy, hacemos girar una *franja vertical* de grosor Δx. Dicha rotación produce un *cascarón cilíndrico* de altura y_k por arriba de un punto x_k en la base de la franja vertical y de grosor Δx. Un ejemplo de un cascarón cilíndrico se muestra en el interior de la figura 6.17. Podemos considerar el cascarón cilíndrico que se muestra en la figura como una aproximación a una rebanada del sólido, que se obtiene al cortar en forma recta y paralela al eje de revolución, muy cerca del agujero central. Luego cortamos otra rebanada cilíndrica, haciendo mayor el agujero central, después otra y así sucesivamente para obtener n cilindros. Los radios de los cilindros crecen de forma

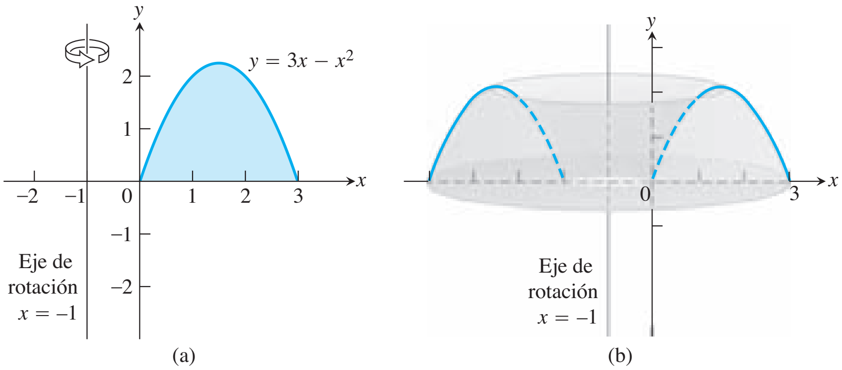


FIGURA 6.16 (a) Gráfica de la región del ejemplo 1, antes de hacerla girar. (b) El sólido formado cuando la región del inciso (a) se hace girar alrededor del eje de rotación $x = -1$.

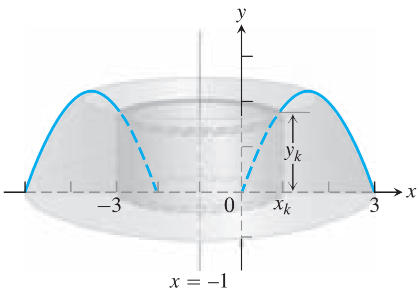


FIGURA 6.17 Un cascarón cilíndrico de altura y_k obtenido al hacer girar una franja vertical de grosor Δx_k alrededor de la recta $x = -1$. El radio exterior del cilindro está en x_k, donde la altura de la parábola es $y_k = 3x_k - x_k^2$ (ejemplo 1).

gradual y las alturas de los cilindros siguen el contorno de la parábola, de la más pequeña a la más grande y luego de regreso a más pequeña (figura 6.16a).

Cada rebanada está sobre un subintervalo del eje x de longitud (ancho) Δx_k. Su radio es aproximadamente $(1 + x_k)$ y su altura es aproximadamente $3x_k - x_k^2$. Si desenrollamos el cilindro en x_k y lo extendemos, se convierte en (casi) una placa rectangular con grosor Δx_k (figura 6.18). La circunferencia externa del k-ésimo cilindro es $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi(1 + x_k)$, que es la longitud de la placa rectangular desenrollada. El volumen de ésta es aproximadamente el de este sólido rectangular, es decir,

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \text{circunferencia} \times \text{altura} \times \text{grosor}\\ &= 2\pi(1 + x_k) \cdot \left(3x_k - x_k^2\right) \cdot \Delta x_k.\end{aligned}$$

Al sumar todos los volúmenes ΔV_k de cada uno de los cascarones cilíndricos en el intervalo $[0, 3]$ se obtiene la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x_k.$$

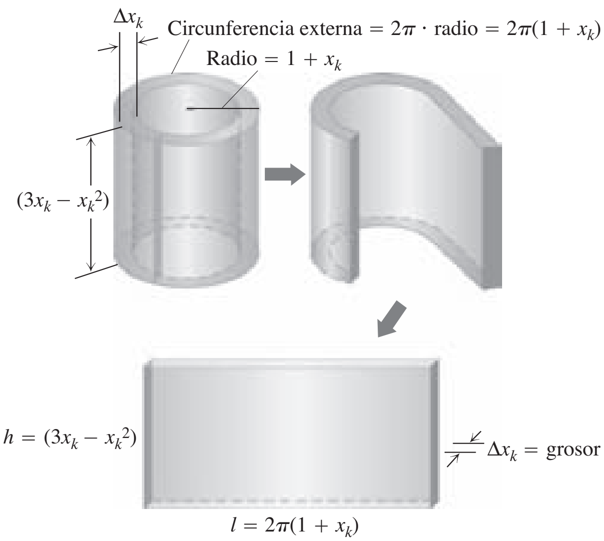


FIGURA 6.18 Imagine que corta y desenrolla un cascarón cilíndrico para obtener un sólido plano (casi) rectangular (ejemplo 1).

Si tomamos el límite cuando el grosor $\Delta x_k \to 0$ y $n \to \infty$, se obtiene la integral del volumen

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi(x_k + 1)\left(3x_k - x_k^2\right) \Delta x_k \\ &= \int_0^3 2\pi(x + 1)(3x - x^2)\, dx \\ &= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\, dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ahora generalizamos el procedimiento utilizado en el ejemplo 1.

Método de los cascarones

Suponga que la región acotada por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ y el eje x en el intervalo finito cerrado $[a, b]$ se encuentra a la derecha de la recta vertical $x = L$ (figura 6.19a). Suponemos que $a \geq L$, por lo que la recta vertical puede tocar a la región, pero no atravesarla. Generamos un sólido S al hacer girar dicha región alrededor de la recta vertical L.

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ dada por los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y sea c_k el punto medio del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Aproximamos la región de la figura 6.19a por medio de rectángulos con base en esta partición de $[a, b]$. Un rectángulo representativo de la aproximación tiene altura $f(c_k)$ y ancho $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si este rectángulo se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, entonces genera un cascarón, como se ilustra en la figura 6.19b. Una fórmula de geometría nos indica que el volumen del cascarón obtenido a partir del rectángulo es

El volumen de un cascarón cilíndrico de altura h con radio interno r y radio externo R es

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = 2\pi\left(\frac{R + r}{2}\right)(h)(R - r)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= 2\pi \times \text{radio promedio del cascarón} \times \text{altura del cascarón} \times \text{grosor} \\ &= 2\pi \cdot (c_k - L) \cdot f(c_k) \cdot \Delta x_k. \end{aligned}$$

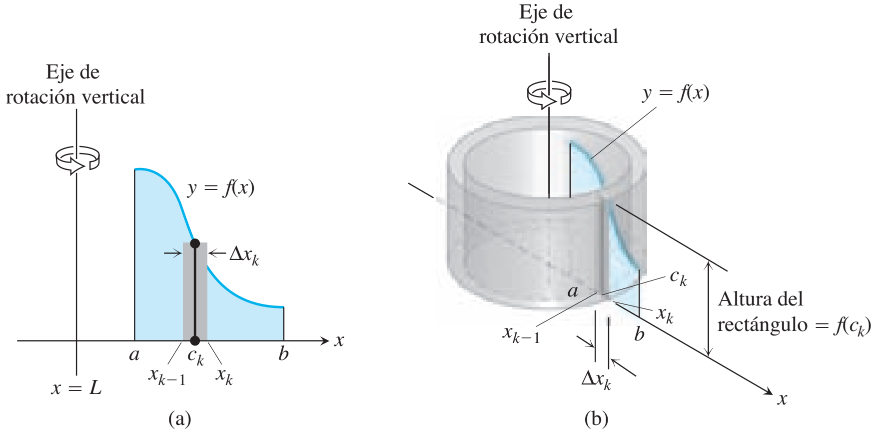


FIGURA 6.19 Cuando la región que se muestra en (a) se hace girar alrededor de la recta vertical $x = L$, se produce un sólido que puede rebanarse en cascarones cilíndricos. Un cascarón típico se muestra en (b).

Aproximamos el volumen del sólido S por medio de la suma de los volúmenes de los cascarones generados por los n rectángulos, basados en la partición P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k.$$

El límite de esta suma de Riemann, cuando cada $\Delta x_k \to 0$ y $n \to \infty$ proporciona el volumen del sólido como una integral definida:

$$\begin{aligned} V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k &= \int_a^b 2\pi(\text{radio del cascarón})(\text{altura del cascarón})\, dx. \\ &= \int_a^b 2\pi(x - L)f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Nos referimos a la variable de integración, en este caso x, como la **variable del grosor**. Utilizamos la primera integral, en vez de la segunda que tiene una fórmula para el integrando, para poner énfasis en el *proceso* del método de los cascarones, lo cual permitirá también rotaciones alrededor de una recta horizontal L.

Fórmula de los cascarones para rotación alrededor de una recta vertical

El volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor de la recta vertical $x = L$, la región entre el eje x y la gráfica de una función continua $y = f(x) \geq 0$, $L \leq a \leq x \leq b$ es

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del} \\ \text{cascarón}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{altura del} \\ \text{cascarón}\end{pmatrix} dx.$$

EJEMPLO 2 La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

Solución Bosqueje la región y dibuje un segmento de recta que la cruce en forma *paralela* al eje de revolución (figura 6.20a). Indique la altura del segmento (altura del cascarón) y la distancia al eje de revolución (radio del cascarón). (Nosotros dibujamos el cascarón en la figura 6.20b, pero usted no necesita hacerlo).

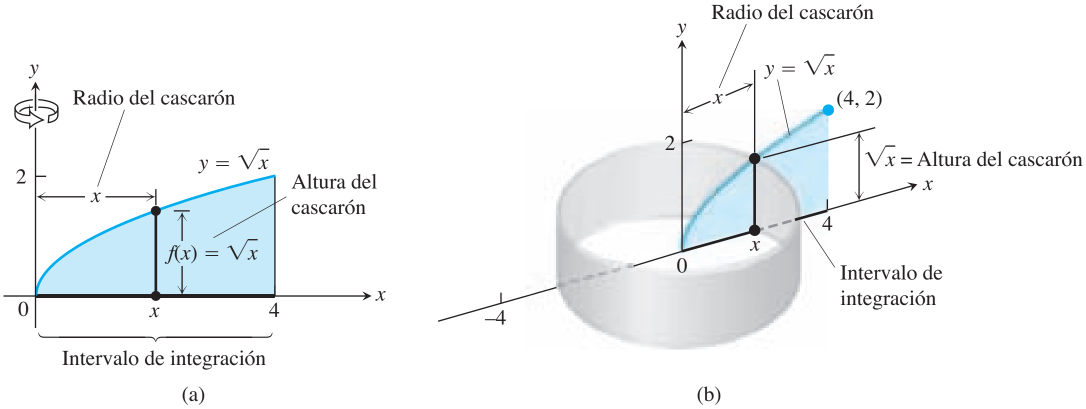


FIGURA 6.20 (a) La región, las dimensiones del cascarón y el intervalo de integración del ejemplo 2. (b) El cascarón generado por el segmento vertical del inciso (a) con un ancho de Δx.

La variable del grosor del cascarón es x, de manera que los límites de integración para la fórmula del cascarón son $a = 0$ y $b = 4$ (figura 6.20). Entonces, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{cascarón}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{cascarón}\end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^4 2\pi(x)\left(\sqrt{x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos utilizado ejes de revolución verticales. Para ejes horizontales, remplazamos las x con y.

EJEMPLO 3 La región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido; para ello, utilice el método de los cascarones.

Solución Éste es el sólido cuyo volumen se encontró por medio del método de los discos en el ejemplo 4 de la sección 6.1. Ahora determinaremos su volumen mediante el método de los cascarones. Primero, bosqueje la región y dibuje un segmento de recta que la cruce en forma *paralela* al eje de revolución (figura 6.21a). Indique la longitud del segmento (altura del cascarón) y la distancia al eje de revolución (radio del cascarón). (Nosotros dibujamos el cascarón en la figura 6.21b, pero usted no necesita hacerlo).

En este caso, la variable del grosor del cascarón es y, de manera que los límites de integración para la fórmula del método de cascarones son $a = 0$ y $b = 2$ (a lo largo del eje y en la figura 6.21). El volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{radio del}\\ \text{cascarón}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{altura del}\\ \text{cascarón}\end{pmatrix} dy \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy \\ &= 2\pi\int_0^2 (4y - y^3)\, dy \\ &= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi. \end{aligned}$$

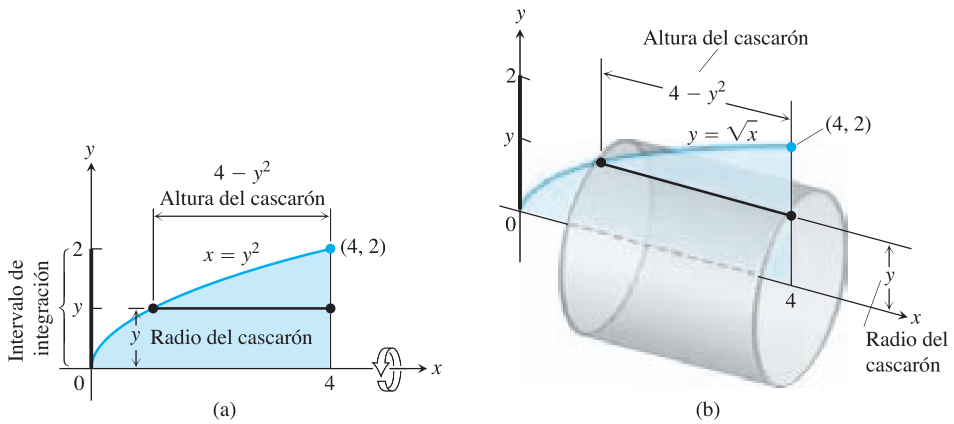


FIGURA 6.21 (a) La región, las dimensiones del cascarón y el intervalo de integración del ejemplo 3. (b) El cascarón generado por el segmento horizontal del inciso (a) con un ancho de Δy.

Resumen del método de los cascarones

Sin importar la posición del eje de revolución (horizontal o vertical), los pasos para poner en práctica el método de los cascarones son los siguientes.

1. *Dibuje la región y bosqueje un segmento de recta* que la cruce en forma *paralela* al eje de revolución. *Indique* la altura o longitud del segmento (altura del cascarón) y la distancia al eje de revolución (radio del cascarón).
2. *Determine los límites de integración* para la variable del grosor.
3. *Integre* el producto 2π (radio del cascarón)(altura del cascarón) con respecto a la variable del grosor (x o y) para determinar el volumen.

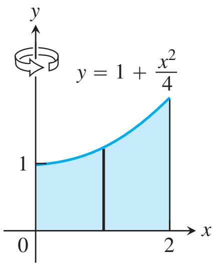
El método de los cascarones da la misma respuesta que el método de las arandelas cuando ambos se utilizan para calcular el volumen de una región. Aquí no demostraremos ese resultado, pero se ilustra en los ejercicios 37 y 38. (El ejercicio 60 de la sección 7.1 da las líneas generales de una demostración). En realidad, ambas fórmulas para el volumen son casos especiales de una fórmula general para el volumen que veremos al estudiar integrales dobles y triples en el capítulo 15. Esa fórmula general nos permitirá calcular volúmenes de otros sólidos, además de los que se obtienen al hacer girar una región.

Ejercicios 6.2

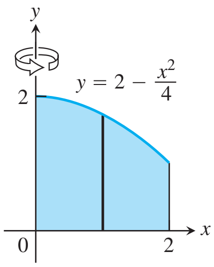
Rotación alrededor de los ejes

En los ejercicios 1 a 6, utilice el método de los cascarones para determinar el volumen de los sólidos generados al hacer girar la región sombreada alrededor del eje indicado.

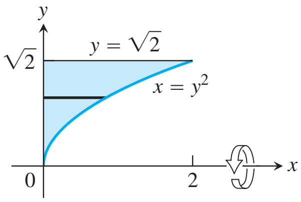
1.



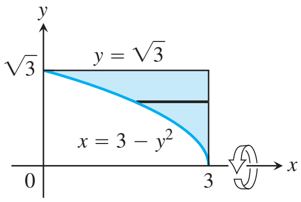
2.



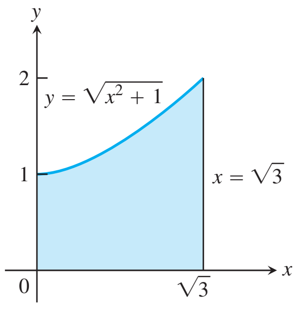
3.



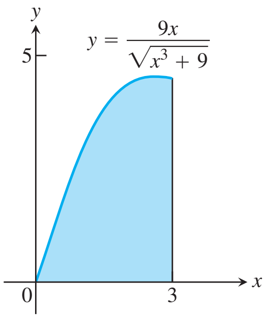
4.



5. El eje y



6. El eje y



Rotación alrededor del eje y

Utilice el método de los cascarones para determinar el volumen de cada uno de los sólidos que se obtienen al hacer girar alrededor del eje y las regiones acotadas por las curvas y las rectas dadas en los ejercicios 7 a 12.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, \quad$ para $x \geq 0$

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

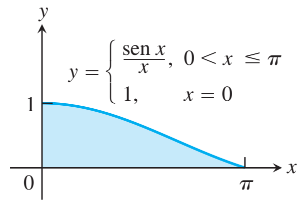
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/\left(2\sqrt{x}\right), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Sea $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{sen} x)/x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

a. Demuestre que $x\,f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$

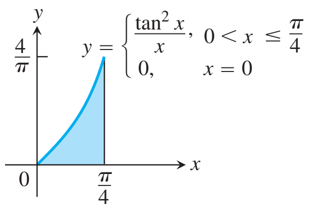
b. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje y, la región sombreada en la siguiente figura.



14. Sea $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a. Demuestre que $xg(x) = (\tan x)^2$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

b. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje y, la región sombreada de la siguiente figura.



Rotación alrededor del eje x

Utilice el método de los cascarones para determinar los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar, alrededor del eje x, las regiones acotadas por las curvas y las rectas en los ejercicios 15 a 22.

15. $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

16. $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2, \quad y \geq 0$

17. $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

18. $x = 2y - y^2, \quad x = y$

19. $y = |x|, \quad y = 1$

20. $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

21. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

Rotación alrededor de rectas horizontales y verticales

En los ejercicios 23 a 26, utilice el método de los cascarones para determinar los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones acotadas por las curvas que se indican alrededor de las rectas dadas.

23. $y = 3x, \quad y = 0, \quad x = 2$

a. El eje y **b.** La recta $x = 4$

c. La recta $x = -1$ **d.** El eje x

e. La recta $y = 7$ **f.** La recta $y = -2$.

24. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

a. El eje y **b.** La recta $x = 3$

c. La recta $x = -2$ **d.** El eje x

e. La recta $y = 8$ **f.** La recta $y = -1$

25. $y = x + 2, \quad y = x^2$

a. La recta $x = 2$ **b.** La recta $x = -1$

c. El eje x **d.** La recta $y = 4$

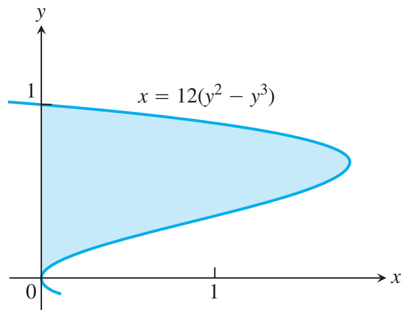
26. $y = x^4, \quad y = 4 - 3x^2$

a. La recta $x = 1$ **c.** El eje x

En los ejercicios 27 y 28, utilice el método de los cascarones para determinar los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar, alrededor del eje indicado, las regiones sombreadas.

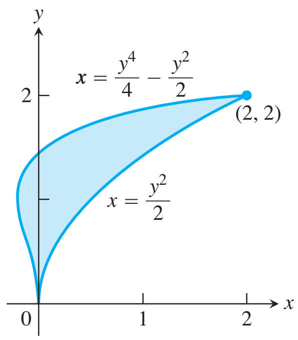
27. **a.** El eje x **b.** La recta $y = 1$

c. La recta $y = 8/5$ **b.** La recta $y = -2/5$



28. **a.** El eje x **b.** La recta $y = 2$

c. La recta $y = 5$ **d.** La recta $y = -5/8$



Elección entre el método de las arandelas y el de los cascarones

Para algunas regiones, ambos métodos, el de las arandelas y el de los cascarones, funcionan bien para el sólido generado al hacer girar la región alrededor de los ejes coordenados, pero esto no siempre es así. Por ejemplo, cuando una región se hace girar alrededor del eje y y se utiliza el método de las arandelas, debemos integrar con respecto a y. Sin embargo, tal vez no sea posible expresar el integrando en términos de y. En tal caso, el método de los cascarones nos permitirá integrar con respecto a x. Los ejercicios 29 y 30 arrojan algo de luz al respecto.

29. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor de cada eje coordenado, la región acotada por $y = x$ y $y = x^2$ por medio de

a. el método de los cascarones. **b.** el método de las arandelas.

30. Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar la región triangular acotada por $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$ alrededor de

a. el eje x usando el método de las arandelas.

b. el eje y con el método de los cascarones.

c. la recta $x = 4$ usando el método de los cascarones.

d. la recta y $= 8$ con el método de las arandelas.

En los ejercicios 31 a 36, determine los volúmenes de los sólidos generados al hacer girar las regiones alrededor de los ejes dados. Si cree que sería mejor emplear arandelas en cualquier caso, siéntase en libertad para utilizarlas.

31. El triángulo con vértices (1, 1), (1, 2) y (2, 2) alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y

c. la recta $x = 10/3$ **d.** la recta $y = 1$

32. La región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$ alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y

c. la recta $x = 4$ **d.** la recta $y = 2$

33. La región del primer cuadrante acotada por la curva $x = y - y^3$ y el eje y alrededor de

a. el eje x **b.** la recta $y = 1$

34. La región en el primer cuadrante acotada por $x = y - y^3$, $x = 1$ y $y = 1$ alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y

c. la recta $x = 1$ **d.** la recta $y = 1$

35. La región acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2/8$ alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y

36. La región acotada por $y = 2x - x^2$ y $y = x$ alrededor de

a. el eje y **b.** la recta $x = 1$

37. La región en el primer cuadrante, que está acotada arriba por la curva $y = 1/x^{1/4}$, a la izquierda por la recta $x = 1/16$, y abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido por medio de

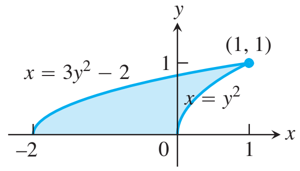
a. el método de las arandelas. **b.** el método de los cascarones.

38. La región en el primer cuadrante, que está acotada arriba por la curva $y = 1/\sqrt{x}$, a la izquierda por la recta $x = 1/4$, y por abajo por la recta $y = 1$, se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido por medio de

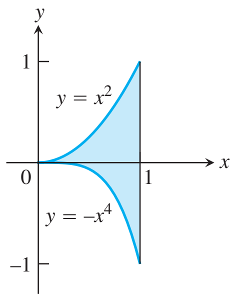
a. el método de las arandelas. **b.** el método de los cascarones.

Elección entre discos, arandelas o cascarones

39. La región que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (discos, arandelas, cascarones) podría utilizar para determinar el volumen del sólido? En cada caso, ¿cuántas integrales son necesarias? Explique.



40. La región que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (discos, arandelas, cascarones) podría utilizar para determinar el volumen del sólido? En cada caso, ¿cuántas integrales son necesarias? Justifique sus respuestas.



41. Se crea una cuenta a partir de una esfera de radio 5, luego de perforar un diámetro de la esfera con un pequeño taladro de radio 3.

a. Determine el volumen de la cuenta.

b. Determine el volumen de la parte eliminada de la esfera.

42. Un pastel Bundt, conocido por tener una forma anular, se forma haciendo girar, alrededor del eje y, la región acotada por la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x^2 - 1)$ y el eje x a lo largo del intervalo $1 \leq x \leq \sqrt{1 + \pi}$. Determine el volumen del pastel.

43. Deduzca la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura h y radio r usando un sólido de revolución apropiado.

44. Deduzca la ecuación para el volumen de una esfera de radio r mediante el método de los cascarones.

6.3 Longitud de arco

Sabemos lo que significa la longitud de un segmento de recta, pero sin el cálculo no tenemos una noción precisa de la longitud de una curva general. Si la curva es la gráfica de una función continua definida en un intervalo, entonces determinamos la longitud de la curva mediante un procedimiento similar al que utilizamos para definir el área entre la curva y el eje x. Este procedimiento da lugar a una división de la curva desde el punto A hasta el punto B en muchos pedazos y a la unión de puntos sucesivos de división por medio de segmentos de recta. Luego sumamos las longitudes de todos estos segmentos de recta y definimos la longitud de la curva como el valor límite de dicha suma cuando el número de segmentos tiende a infinito.

Longitud de una curva $y = f(x)$

Suponga que la curva cuya longitud necesitamos determinar es la gráfica de la función $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. Para deducir una fórmula integral para la longitud de la curva, suponemos que f tiene una derivada continua en todo punto de $[a, b]$. Tal función se denomina **suave** y la gráfica es una **curva suave**, ya que no tiene corte, esquinas o picos.

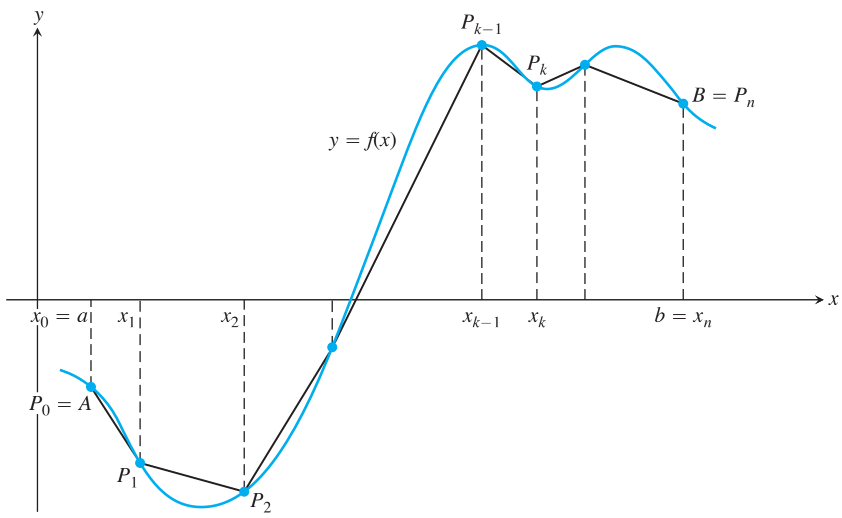


FIGURA 6.22 La longitud de la trayectoria poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ aproxima la longitud de la curva $y = f(x)$ desde el punto A al punto B.

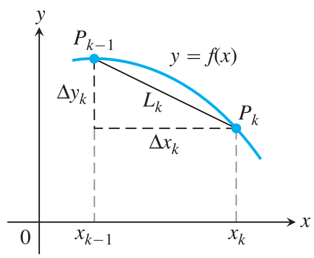


FIGURA 6.23 El arco $P_{k-1}P_k$ de la curva $y = f(x)$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, el cual tiene longitud $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Si $y_k = f(x_k)$, entonces el punto correspondiente $P_k(x_k, y_k)$ está en la curva. Luego conectamos los puntos consecutivos P_{k-1} y P_k con segmentos de recta que, juntos, forman una trayectoria poligonal cuya longitud aproxima la longitud de la curva (figura 6.22). Si $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, entonces un segmento de recta representativo en la trayectoria tiene longitud (figura 6.23).

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2},$$

por lo que la longitud de la curva se aproxima por la suma

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \qquad (1)$$

Esperamos que la aproximación mejore cuando la partición de $[a, b]$ se haga más fina. Ahora, por el teorema del valor medio, existe un punto c_k, con $x_{k-1} < c_k < x_k$, tal que

$$\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k.$$

Con esta sustitución por Δy_k, las sumas en la ecuación (1) toman la forma

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Puesto que $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua en $[a, b]$, el límite de la suma de Riemann en el lado derecho de la ecuación (2) existe cuando la norma de la partición tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Definimos el valor de dicha integral límite como la longitud de la curva.

DEFINICIÓN Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la **longitud (longitud de arco)** de la curva $y = f(x)$ desde el punto $A = (a, f(a))$ al punto $b = (b, f(b))$ es el valor de la integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (3)$$

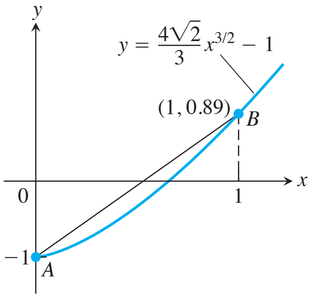


FIGURA 6.24 La longitud de la curva es un poco mayor que la longitud del segmento de recta que une los puntos A y B (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Determine la longitud de la curva (figura 6.24).

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Solución Utilizamos la ecuación (3) con $a = 0$, $b = 1$ y

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \qquad x = 1, y \approx 0.89$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.$$

La longitud de la curva a lo largo de $x = 0$ hasta $x = 1$ es

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx \qquad \text{Ecuación (3) con } a = 0,\ b = 1.$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 + 8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \approx 2.17. \qquad \text{Sea } u = 1 + 8x, \text{ integrar y remplazar } u \text{ con } 1 + 8x.$$

Observe que la longitud de la curva es un poco mayor que la longitud del segmento de recta que une los puntos de la curva $A = (0, -1)$ y $B = \left(1, 4\sqrt{2}/3 - 1\right)$ (figura 6.24):

$$2.17 > \sqrt{1^2 + (1.089)^2} \approx 2.14 \qquad \text{Aproximaciones decimales}$$

■

EJEMPLO 2 Determine la longitud de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \qquad 1 \le x \le 4.$$

Solución En la figura 6.25 se muestra una gráfica de la función. Para utilizar la ecuación (3), determinamos

$$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

por lo que

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

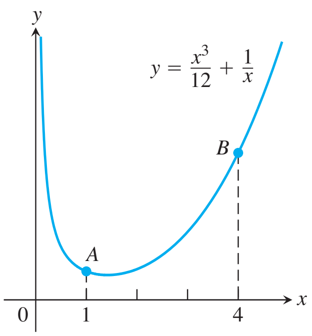


FIGURA 6.25 La curva en el ejemplo 2, donde $A = (1, 13/12)$ y $B = (4, 67/12)$.

La longitud de la gráfica en $[1, 4]$ es

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \left(\frac{64}{12} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{72}{12} = 6.$$

■

Cómo tratar las discontinuidades en dy/dx

En un punto en la curva donde dy/dx no existe, es posible que exista dx/dy. En este caso, podríamos ser capaces de determinar la longitud de la curva si expresamos x como una función de y y aplicamos el siguiente análogo de la ecuación (3):

Fórmula para la longitud de arco de $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$
Si g' es continua en $[c, d]$, la longitud de la curva $x = g(y)$ desde $A = (g(c), c)$ a $B = (g(d), d)$ es

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Determine la longitud de la curva $y = (x/2)^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Solución La derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

no está definida en $x = 0$, por lo que no es posible determinar la longitud de la curva mediante la ecuación (3).

Por lo tanto, rescribimos la ecuación para expresar a x en términos de y:

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$$

$$y^{3/2} = \frac{x}{2} \qquad \text{Elevar ambos lados a la } 3/2.$$

$$x = 2y^{3/2}. \qquad \text{Despejar } x.$$

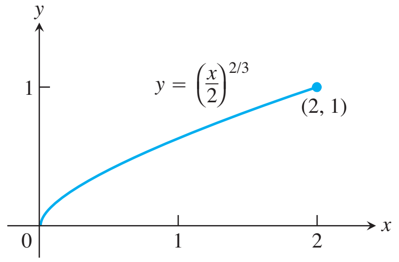


FIGURA 6.26 La gráfica de $y = (x/2)^{2/3}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$, también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$ (ejemplo 3).

Con base en esto, vemos que la curva cuya longitud queremos también es la gráfica de $x = 2y^{3/2}$ desde $y = 0$ a $y = 1$ (figura 6.26).

La derivada

$$\frac{dx}{dy} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

es continua en $[0, 1]$. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación (4) para determinar la longitud de la curva:

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\, dy && \text{Ecuación (4) con } c = 0,\ d = 1. \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 && \text{Sea } u = 1 + 9y,\ du/9 = dy, \text{ integrar y sustituir.} \\ &= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \approx 2.27. \end{aligned}$$

■

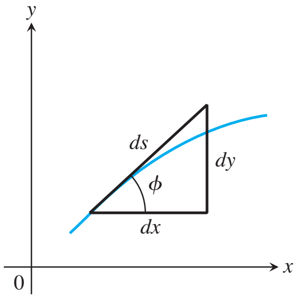
Fórmula diferencial para la longitud de arco

Si $y = f(x)$ y si f' es continua en $[a, b]$, entonces, por el teorema fundamental del cálculo, podemos definir una nueva función

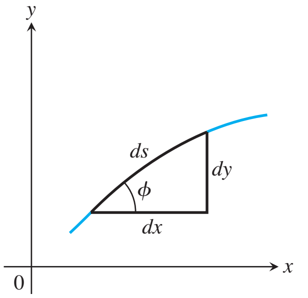
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt. \tag{5}$$

Con base en la ecuación (3) y la figura 6.22, vemos que esta función s(x) es continua y mide la longitud a lo largo de la curva $y = f(x)$ desde el punto inicial $P_0(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$ para cada $x \in [a, b]$. La función s se denomina **función longitud de arco** para $y = f(x)$. De acuerdo con el teorema fundamental, la función s es diferenciable en (a, b) y

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$



(a)



(b)

FIGURA 6.27 Diagramas para memorizar la ecuación $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Entonces la diferencial de la longitud de arco es

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{6}$$

Una forma útil de recordar la ecuación (6) es escribir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{7}$$

que puede integrarse entre límites apropiados para obtener la longitud total de la curva. Desde este punto de vista, todas las fórmulas para la longitud de arco simplemente son expresiones diferentes para la ecuación $L = \int ds$. La figura 6.27a ofrece una interpretación exacta de ds correspondiente a la ecuación (7). En sentido estricto, la figura 6.27b no es precisa, aunque se considera una aproximación simplificada de la figura 6.27a. Esto es, $ds \approx \Delta s$.

EJEMPLO 4 Determine la función longitud de arco para la curva en el ejemplo 2 tomando $A = (1, 13/12)$ como el punto inicial (figura 6.25).

Solución En la solución del ejemplo 2, encontramos que

$$1 + [f'(x)]^2 = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

Por lo tanto, la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt = \int_1^x \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{t^2}\right) dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{12} - \frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x} + \frac{11}{12}.$$

Por ejemplo, para calcular la longitud de arco de la curva desde $A = (1, 13/12)$ hasta $B = (4, 67/12)$, simplemente calculamos

$$s(4) = \frac{4^3}{12} - \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = 6.$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos en el ejemplo 2. ■

Ejercicios 6.3

Determinación de longitudes de curvas

En los ejercicios 1 a 10, determine la longitud de cada curva. Si tiene una graficadora, podría graficar estas curvas para verlas.

1. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 3$

2. $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 4$

3. $x = (y^3/3) + 1/(4y)$ de $y = 1$ a $y = 3$

4. $x = (y^{3/2}/3) - y^{1/2}$ de $y = 1$ a $y = 9$

5. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2)$ de $y = 1$ a $y = 2$

6. $x = (y^3/6) + 1/(2y)$ de $y = 2$ a $y = 3$

7. $y = (3/4)x^{4/3} - (3/8)x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$

8. $y = (x^3/3) + x^2 + x + 1/(4x + 4), \quad 0 \le x \le 2$

9. $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt, \quad -\pi/4 \le y \le \pi/4$

10. $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1$

T Determinación de integrales para longitudes de curvas

En los ejercicios 11 a 18, haga lo siguiente.

a. Establezca una integral para la longitud de la curva.

b. Grafique la curva para ver su forma.

c. Utilice el evaluador de integrales de su graficadora o computadora para determinar de forma numérica la longitud de la curva.

11. $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$

12. $y = \tan x, \quad -\pi/3 \le x \le 0$

13. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi$

14. $x = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1/2 \le y \le 1/2$

15. $y^2 + 2y = 2x + 1 \quad$ de $\quad (-1, -1)$ a $(7, 3)$

16. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

17. $y = \displaystyle\int_0^x \tan t\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/6$

18. $x = \displaystyle\int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\, dt, \quad -\pi/3 \le y \le \pi/4$

Teoría y ejemplos

19. a. Determine una curva que pase por el punto (1, 1) cuya integral de su longitud (ecuación 3) sea

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx.$$

b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

20. a. Determine una curva que pase por el punto (0, 1), cuya integral de su longitud (ecuación 4) sea

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}\, dy.$$

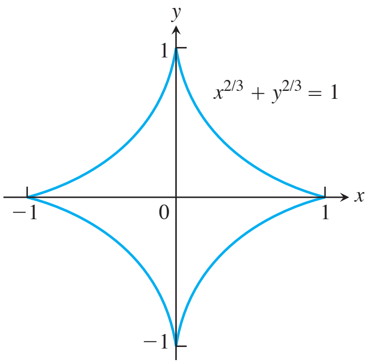
b. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

21. Determine la longitud de la curva

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt$$

desde $x = 0$ a $x = \pi/4$.

22. Longitud de una astroide La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una familia de curvas denominada *astroides* (no "asteroides") en virtud de su apariencia de estrella (véase la figura). Determine la longitud de esta astroide particular; para ello, calcule la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $\sqrt{2}/4 \le x \le 1$ y multiplique por 8.



23. Longitud de un segmento de recta Utilice la fórmula de longitud de arco (ecuación 3) para determinar la longitud del segmento de recta $y = 3 - 2x$, $0 \le x \le 2$. Verifique su respuesta calculando la longitud del segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

24. Circunferencia de un círculo Plantee una integral para determinar la circunferencia de un círculo de radio r con centro en el origen. Aprenderá cómo evaluar la integral en la sección 8.3.

25. Si $9x^2 = y(y - 3)^2$, demuestre que

$$ds^2 = \frac{(y+1)^2}{4y}\, dy^2.$$

26. Si $4x^2 - y^2 = 64$, muestre que

$$ds^2 = \frac{4}{y^2}\left(5x^2 - 16\right) dx^2.$$

27. ¿Existe alguna curva suave (continuamente diferenciable) $y = f(x)$ cuya longitud en el intervalo $0 \le x \le a$ sea siempre $\sqrt{2}a$? Justifique su respuesta.

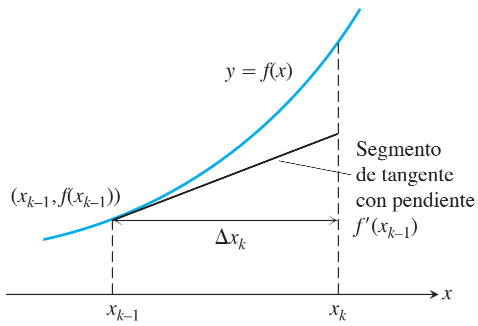
28. Uso de tangentes para deducir la fórmula de la longitud de una curva Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que divide este intervalo de la forma usual. En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, construimos un pequeño *segmento de tangente* en el punto $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, como se muestra en la siguiente figura.

a. Demuestre que la longitud del k-ésimo segmento de tangente en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es igual a $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\, \Delta x_k)^2}$.

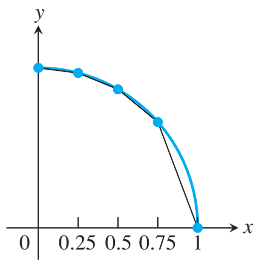
b. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{long. del } k \text{ segmento de tang.}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

que es la longitud L de la curva $y = f(x)$ de a a b.



29. Aproxime la longitud de arco de un cuarto del círculo unitario (que es $\frac{\pi}{2}$) calculando la longitud de la aproximación poligonal con $n = 4$ segmentos (véase la siguiente figura).



30. Distancia entre dos puntos Suponga que los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en la gráfica de la recta $y = mx + b$. Utilice la fórmula de longitud de arco (ecuación 3) para determinar la distancia entre los dos puntos.

31. Determine la función longitud de arco para la gráfica $f(x) = 2x^{3/2}$ usando (0, 0) como el punto inicial. ¿Cuál es la longitud de la curva desde (0, 0) a (1, 2)?

32. Determine la función longitud de arco para la curva en el ejercicio 8, usando $(0, 1/4)$ como el punto inicial. ¿Cuál es la longitud de la curva desde $(0, 1/4)$ a $(1, 59/24)$?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 33 a 38, utilice un SAC para realizar los siguientes pasos para la curva dada en el intervalo cerrado.

a. Trace la curva junto con las trayectorias poligonales aproximadas para $n = 2, 4, 8$ puntos en la partición del intervalo. (Véase la figura 6.22).

b. Determine la aproximación correspondiente a la longitud de la curva, sumando las longitudes de los segmentos de recta.

c. Evalúe la longitud de la curva por medio de una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con la longitud real dada por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones cuando n crece? Explique su respuesta.

33. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

34. $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

35. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

36. $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

37. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4x^2 + 1}, \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le 1$

38. $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

6.4 Áreas de superficies de revolución

Cuando usted salta la cuerda, ésta barre una superficie en el espacio alrededor de usted, similar a lo que se denomina superficie de revolución. La superficie que rodea un volumen de revolución y muchas aplicaciones requiere que conozcamos el área de la superficie y no el volumen que encierra. En esta sección definiremos áreas de superficies de revolución. En el capítulo 16 se tratarán superficies más generales.

Definición del área de una superficie

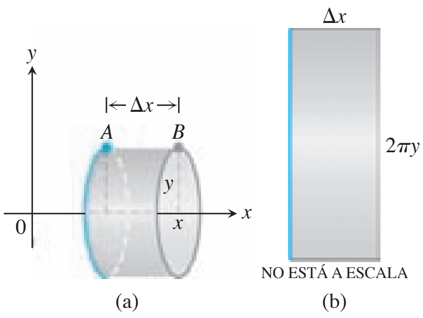


FIGURA 6.28 Una superficie cilíndrica generada al hacer girar el segmento de recta horizontal AB de longitud Δx alrededor del eje x tiene área $2\pi y \Delta x$. (b) Al cortar y desenrollar la superficie cilíndrica se obtiene un rectángulo.

Si usted hace girar una región en el plano que está acotada por la gráfica de una función en un intervalo, describirá un sólido de revolución, como ya vimos en el capítulo. Sin embargo, si sólo hace girar la curva frontera, eso no describe el volumen interior, sino sólo una superficie que rodea al sólido y forma parte de su frontera. Al igual que estuvimos interesados en definir y determinar la longitud de una curva en la sección anterior, ahora estamos interesados en definir y determinar el área de una superficie generada al hacer girar una curva alrededor de un eje.

Antes de considerar curvas generales, empezamos haciendo girar alrededor del eje x segmentos de recta horizontales e inclinados. Si hacemos girar alrededor del eje x el segmento de recta horizontal AB, que tiene longitud Δx (figura 6.28a), generaremos un cilindro con área de superficie $2\pi y \Delta x$. Dicha área es la misma que la del rectángulo con lados de longitudes Δx y $2\pi y$ (figura 6.28b). La longitud $2\pi y$ es la circunferencia del círculo de radio y generado al hacer girar, alrededor del eje x, el punto (x, y) en la línea AB.

Suponga que el segmento AB tiene longitud L y está inclinado, en vez de ser horizontal. Ahora, cuando se hace girar alrededor del eje x, genera el tronco de un cono (figura 6.29a). De acuerdo con la geometría clásica, el área de la superficie del tronco de un cono es $2\pi y^* L$, donde $y^* = (y_1 + y_2)/2$ es la altura promedio, por encima del eje x, del segmento inclinado AB. Esta área de superficie es la misma que la de un rectángulo con lados de longitud L y $2\pi y^*$ (figura 6.29b).

Construyamos con base en tales principios geométricos para definir el área de una superficie que se describe al hacer girar alrededor del eje x curvas más generales. Suponga que queremos determinar el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, $a \le x \le b$, alrededor del eje x. Dividimos el intervalo cerrado $[a, b]$ de la manera usual y utilizamos los puntos de la partición para subdividir la gráfica en pequeños arcos. La figura 6.30 muestra un arco representativo PQ y la banda que describe como parte de la gráfica de f.

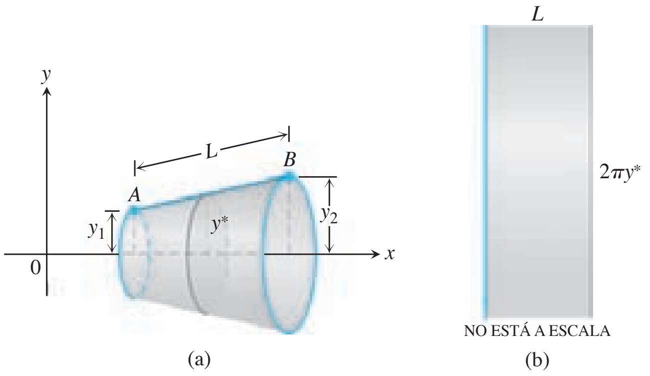


FIGURA 6.29 (a) El tronco de un cono generado por la rotación del segmento inclinado de recta AB de longitud L alrededor del eje x tiene área $2\pi y^*L$. (b) El área del rectángulo para $y^* = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, la altura promedio de AB por encima del eje x.

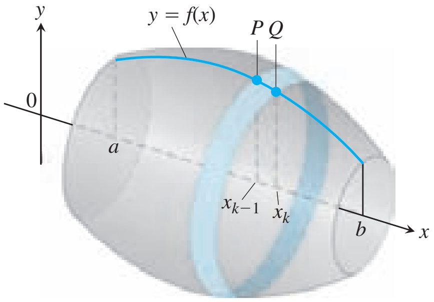


FIGURA 6.30 Superficie generada al hacer girar alrededor del eje x la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. La superficie es la unión de bandas como la que genera el arco PQ.

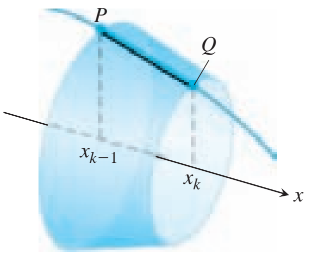


FIGURA 6.31 Segmento de recta que une a P y Q genera un tronco de un cono.

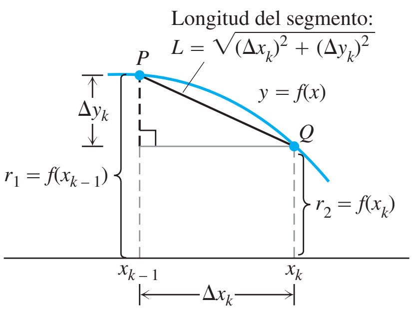


FIGURA 6.32 Dimensiones asociadas con el arco y el segmento de recta PQ.

Conforme el arco PQ gira alrededor del eje x, el segmento que une a P y Q barre el tronco de un cono cuyo eje está en el eje x (figura 6.31). El área de la superficie de este tronco aproxima el área de la superficie de la banda barrida por el arco PQ. El área de la superficie del tronco que se representa en la figura 6.31 es $2\pi y^*L$, donde y^* es la altura promedio del segmento que une a P y Q, mientras L es su longitud (igual que antes). Como $f \geq 0$, en la figura 6.32 vemos que la altura promedio del segmento de recta es $y^* = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$ y la longitud inclinada es $L = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie del tronco} &= 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.\end{aligned}$$

El área de la superficie original, al ser la suma de las áreas de las bandas barridas por los arcos como el PQ, se aproxima por medio de la suma de las áreas de los troncos

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}. \tag{1}$$

Esperamos que la aproximación mejore conforme la partición de $[a, b]$ se haga más fina. Además, si la función f es diferenciable, entonces por el teorema del valor medio, existe un punto $(c_k, f(c_k))$ en la curva entre P y Q donde la tangente es paralela al segmento PQ (figura 6.33). En este punto,

$$\begin{aligned} f'(c_k) &= \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \\ \Delta y_k &= f'(c_k)\, \Delta x_k. \end{aligned}$$

Con dicha sustitución para Δy_k, las sumas en la ecuación (1) toman la forma

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\,\Delta x_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\,\Delta x_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Tales sumas no son las sumas de Riemann de alguna función, ya que los puntos x_{k-1}, x_k y c_k no son iguales. Sin embargo, se puede demostrar que cuando la norma de la partición de $[a, b]$ tiende a cero, las sumas de la ecuación (2) convergen a la integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

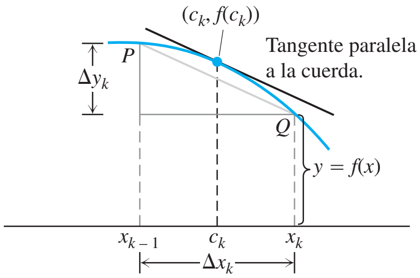


FIGURA 6.33 Si f es suave, el teorema del valor medio asegura la existencia de un punto c_k en donde la tangente es paralela al segmento PQ.

Por lo tanto, definimos la integral como el área de la superficie barrida por la gráfica de f de a a b.

DEFINICIÓN Si la función $f(x) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$, el **área de la superficie** generada al hacer girar alrededor del eje x la curva $y = f(x)$ es

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (3)$$

La raíz cuadrada en la ecuación (3) es la misma que aparece en la fórmula para la longitud diferencial de la curva generada en la ecuación (6) de la sección 6.3.

EJEMPLO 1 Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$, alrededor del eje x (figura 6.34)

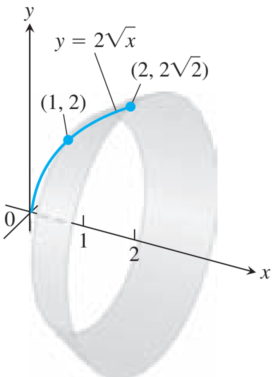


FIGURA 6.34 En el ejemplo 1 calculamos el área de esta superficie.

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{Ecuación (3)}$$

con

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Primero, realizamos algunas manipulaciones algebraicas en el radical del integrando para transformarlo en una expresión que sea más fácil de integrar.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

Con tales sustituciones, tenemos

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\, dx = 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}\, dx$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

Rotación alrededor del eje y

Para rotaciones alrededor del eje y, intercambiamos x y y en la ecuación (3).

Área de la superficie para rotación alrededor del eje y

Si $x = g(y) \geq 0$ es continuamente diferenciable en $[c, d]$, el área de la superficie generada al hacer girar la gráfica de $x = g(y)$ alrededor del eje y es

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy. \qquad (4)$$

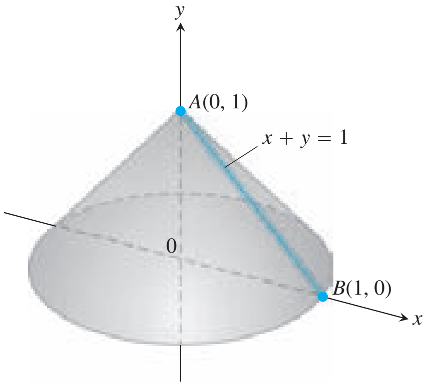


FIGURA 6.35 Al hacer girar el segmento de recta AB alrededor del eje y se genera un cono cuya superficie lateral se puede calcular de dos formas distintas (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 El segmento de recta $x = 1 - y$, $0 \le y \le 1$ se hace girar alrededor del eje y para generar el cono de la figura 6.35. Determine el área de su superficie lateral (la cual excluye el área de la base).

Solución En este caso, tenemos un cálculo que se comprueba con una fórmula de geometría:

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{\text{circunferencia de la base}}{2} \times \text{altura inclinada} = \pi\sqrt{2}.$$

Para ver cómo la ecuación (4) da el mismo resultado, tomamos

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

y calculamos

$$\begin{aligned} S &= \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\, dy \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Los resultados coinciden, como debe ser. ■

Ejercicios 6.4

Determinación de integrales para áreas de superficies

En los ejercicios 1 a 8:

a. Establezca una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado.

T **b.** Grafique la curva para observar su apariencia. Si puede, también grafique la superficie.

T **c.** Utilice el evaluador de integrales de su graficadora o de su computadora para determinar numéricamente el área de la superficie.

1. $y = \tan x, \quad 0 \le x \le \pi/4;$ eje x

2. $y = x^2, \quad 0 \le x \le 2;$ eje x

3. $xy = 1, \quad 1 \le y \le 2;$ eje y

4. $x = \operatorname{sen} y, \quad 0 \le y \le \pi;$ eje y

5. $x^{1/2} + y^{1/2} = 3$ de $(4, 1)$ a $(1, 4)$; eje x

6. $y + 2\sqrt{y} = x, \quad 1 \le y \le 2;$ eje y

7. $x = \displaystyle\int_0^y \tan t\, dt, \quad 0 \le y \le \pi/3;$ eje y

8. $y = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt, \quad 1 \le x \le \sqrt{5};$ eje x

Determinación de áreas de superficies

9. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje x. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada}.$$

10. Determine el área de la superficie lateral del cono generado al hacer girar el segmento de recta $y = x/2$, $0 \le x \le 4$, alrededor del eje y. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie lateral} = \frac{1}{2} \times \text{circunferencia de la base} \times \text{altura inclinada}.$$

11. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje x. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada}.$$

12. Determine el área de la superficie del tronco de un cono que se genera al hacer girar el segmento de recta $y = (x/2) + (1/2)$, $1 \le x \le 3$, alrededor del eje y. Compruebe su resultado con la fórmula geométrica

$$\text{Área de la superficie de un tronco} = \pi(r_1 + r_2) \times \text{altura inclinada}.$$

En los ejercicios 13 a 23 determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje indicado. Si tiene una graficadora, podría graficar dichas curvas para ver su apariencia.

13. $y = x^3/9, \quad 0 \le x \le 2;$ eje x

14. $y = \sqrt{x}, \quad 3/4 \le x \le 15/4;$ eje x

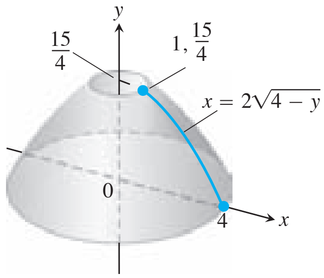
15. $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5;$ eje x

16. $y = \sqrt{x + 1}, \quad 1 \le x \le 5;$ eje x

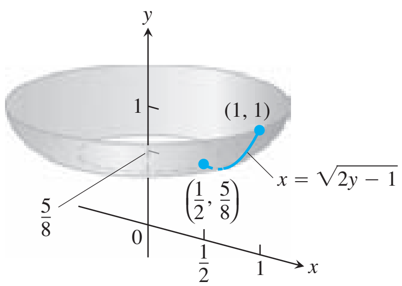
17. $x = y^3/3, \quad 0 \le y \le 1;$ eje y

18. $x = (1/3)y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3;$ eje y

19. $x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \le y \le 15/4; \quad$ eje y



20. $x = \sqrt{2y - 1}, \quad 5/8 \le y \le 1; \quad$ eje y



21. $y = (x^2/2) + (1/2), \quad 0 \le x \le 1; \quad$ eje y

22. $y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}, \quad 0 \le x \le \sqrt{2}; \quad$ eje y (*Sugerencia:* Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dx y evalúe la integral $S = \int 2\pi x \, ds$ con límites apropiados.)

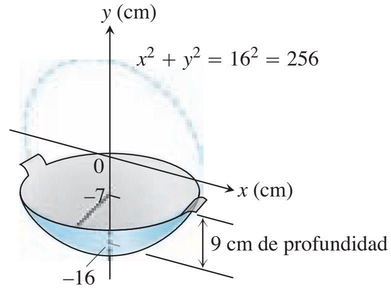
23. $x = (y^4/4) + 1/(8y^2), \quad 1 \le y \le 2; \quad$ eje x (*Sugerencia:* Exprese $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en términos de dy y evalúe la integral $S = \int 2\pi y \, ds$ con límites apropiados).

24. Escriba una integral para el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \cos x, -\pi/2 \le x \le \pi/2$, alrededor del eje x. En la sección 8.4 veremos cómo evaluar tales integrales.

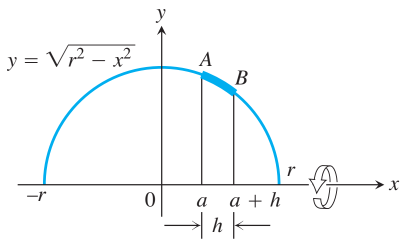
25. Prueba de la nueva definición Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$ utilizando la ecuación (3) para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \le x \le a$, alrededor del eje x.

26. Prueba de la nueva definición El área de la superficie lateral de un cono de altura h y radio de la base r debe ser $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, el semiperímetro de la base por la altura inclinada. Demuestre que éste es el caso; para ello, determine el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x el segmento de recta $y = (r/h)x, 0 \le x \le h$.

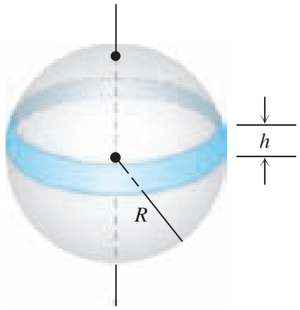
T **27. Esmaltado de sartenes** Su compañía decidió producir una versión de lujo de la sartén (el wok) que usted diseñó. El plan es recubrir el interior con un esmalte blanco y el exterior con esmalte azul. Cada esmalte se aplicará en una capa de 0.5 mm de grosor antes de hornearlo. (Véase la siguiente figura). El departamento de manufactura necesita conocer cuánto esmalte debe tener disponible para producir 5000 sartenes. ¿Qué les diría? (No tome en cuenta el material que se desperdicia ni el material no utilizado, y dé su respuesta en litros. Recuerde que 1 cm^3 = 1 mL, por lo que 1 L = 1000 cm^3).



28. Rebanadas de pan ¿Sabía que si corta una pieza esférica de pan en rebanadas del mismo ancho, cada una tendrá la misma cantidad de corteza? Para ver por qué, suponga que la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ que se representa aquí se hace girar alrededor del eje x para generar una esfera. Sea AB un arco de la semicircunferencia que está sobre un intervalo de longitud h en el eje x. Demuestre que el área barrida por AB no depende de la ubicación del intervalo. (Depende de la longitud del intervalo).



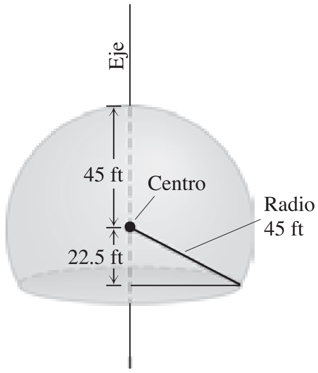
29. La banda sombreada que se muestra a continuación se corta a partir de una esfera de radio R por medio de planos paralelos separados una distancia h. Demuestre que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$.



30. A continuación se presenta un dibujo esquemático del domo de 90 ft que utilizó el Servicio Meteorológico Nacional de Estados Unidos para alojar un radar en Bozeman, Montana.

a. ¿Cuál es la cantidad de superficie exterior que se requiere pintar? (No tome en cuenta la parte inferior).

T **b.** Exprese la respuesta al ft^2 más cercano.

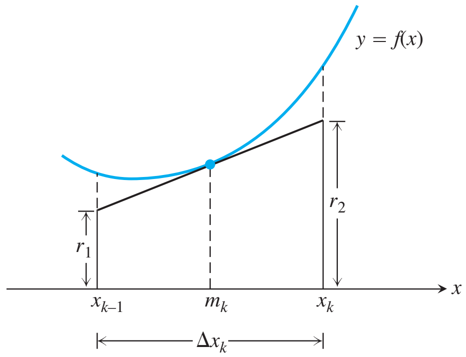


31. Una deducción alternativa de la fórmula para el área de una superficie Suponga que f es suave en $[a, b]$ y que $[a, b]$ se divide en la forma usual. En el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se construye la recta tangente a la curva en el punto medio $m_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, como se muestra en la siguiente figura.

a. Demuestre que

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}.$$

b. Demuestre que la longitud L_k del segmento de recta tangente en el k-ésimo subintervalo es $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\,\Delta x_k)^2}$.



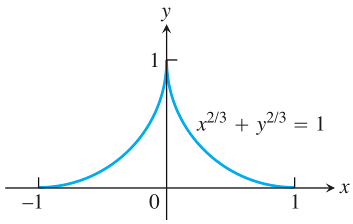
c. Demuestre que el área de la superficie lateral del tronco del cono barrido por el segmento de recta tangente, cuando éste se hace girar alrededor del eje x, es $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\,\Delta x_k$.

d. Demuestre que el área de la superficie generada al hacer girar $y = f(x)$ alrededor del eje x en $[a, b]$ es

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{área de la superficie lateral}\\ \text{del } k \text{ ésimo tronco}\end{pmatrix} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

32. Superficie de una astroide Determine el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x, la parte de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que se muestra en la siguiente figura.

(*Sugerencia:* Haga girar alrededor del eje x la parte en el primer cuadrante $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, y multiplique por 2 su resultado).



6.5 Trabajo y fuerza de fluidos

En la vida cotidiana, *trabajo* significa una actividad que requiere esfuerzo muscular o mental. En la ciencia, el término se refiere específicamente a una fuerza que actúa sobre un cuerpo (u objeto) y el desplazamiento posterior del cuerpo. Esta sección muestra cómo se calcula el trabajo. Las aplicaciones van desde la compresión de resortes en vagones de ferrocarril y el drenado de tanques subterráneos hasta el trabajo que implica forzar la unión de electrones y poner en órbita satélites.

Trabajo realizado por una fuerza constante

Cuando un cuerpo se desplaza una distancia d a lo largo de una línea recta como resultado de la aplicación de una fuerza de magnitud constante f en la dirección del movimiento, definimos el **trabajo** W realizado por la fuerza sobre el cuerpo con la fórmula

$$W = Fd \quad \text{(Fórmula para el trabajo con fuerza constante).} \tag{1}$$

En la ecuación (1) vemos que la unidad de trabajo en cualquier sistema es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En las unidades del *Sistema Internacional* (SI), la unidad de fuerza es el newton, la unidad de distancia el metro y la unidad de trabajo es el newton-metro (N · m). Tal combinación aparece con tanta frecuencia que tiene un nombre especial, el **joule**. En el sistema inglés, la unidad de trabajo es la libra-ft, una unidad utilizada comúnmente por los ingenieros.

Joules
El joule, abreviado “J”, se denomina así en honor del físico inglés James Prescott Joule (1818-1889). La ecuación que lo define es

1 joule = (1 newton)(1 metro).

En símbolos, 1 J = 1 N · m.

EJEMPLO 1 Si usted levanta con un gato 1.25 ft el lado de un automóvil de 2000 libras para cambiar un neumático, el gato aplica una fuerza vertical constante de alrededor de 1000 lb en el lado que se levanta el automóvil (pero a consecuencia de la ventaja mecánica del gato, la fuerza que usted aplica al gato mismo es sólo de aproximadamente 30 lb). El trabajo total realizado por el gato sobre el automóvil es $1000 \times 1.25 = 1250$ lb-ft. En unidades del SI, ha aplicado una fuerza de 4448 N a lo largo de una distancia de 0.381 m para hacer $4448 \times 0.381 \approx 1695$ J de trabajo. ■

Trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una recta

Si la fuerza que usted aplica varía durante el proceso, como al comprimir un resorte, la fórmula $W = Fd$ tiene que remplazarse por una integral que tome en cuenta la variación de F.

Suponga que la fuerza que realiza el trabajo actúa a lo largo de una línea que consideraremos como el eje x y que la magnitud de la fuerza es una función continua F de la posición x del objeto. Queremos determinar el trabajo realizado en el intervalo de $x = a$ a $x = b$. Hacemos una partición de $[a, b]$ en la forma usual y elegimos un punto arbitrario c_k en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Si el intervalo es suficientemente pequeño, la función continua f no variará mucho de x_{k-1} a x_k. La cantidad de trabajo realizado a lo largo del intervalo será aproximadamente $F(c_k)$ por la distancia Δx_k, la misma que obtendríamos si F fuera constante y aplicáramos la ecuación (1). Por lo tanto, el trabajo total realizado de a a b se aproxima mediante la suma de Riemann

$$\text{Trabajo} \approx \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k.$$

Esperamos que la aproximación mejore conforme la norma de la partición tienda a cero, así que definimos el trabajo realizado por la fuerza de a a b como la integral de F de a a b.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(c_k)\,\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx.$$

DEFINICIÓN El **trabajo** realizado por una fuerza variable $F(x)$ en la dirección del movimiento a lo largo del eje x, desde $x = a$ a $x = b$, es

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (2)$$

Las unidades de la integral son joules si F está en newtons y x en metros, y serán libras-ft si f está en libras y x en ft. En consecuencia, el trabajo realizado por la fuerza de $F(x) = 1/x^2$ newtons a lo largo del eje x desde $x = 1$ m hasta $x = 10$ m es

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9 \text{ J.}$$

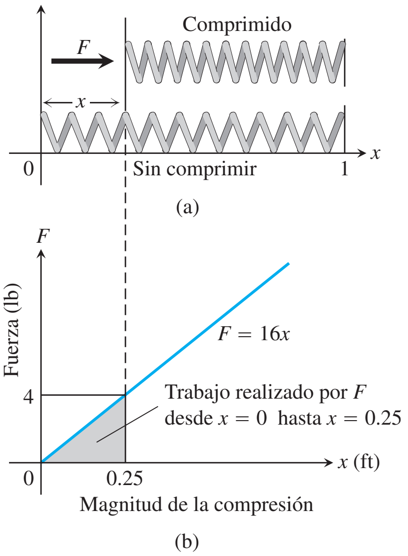


FIGURA 6.36 La fuerza f necesaria para mantener un resorte bajo compresión aumenta linealmente conforme se comprime el resorte (ejemplo 2).

Ley de Hooke para resortes: $F = kx$

La **ley de Hooke** establece que la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte x unidades de longitud, a partir de su longitud natural (sin comprimir), es proporcional a x. En símbolos,

$$F = kx. \qquad (3)$$

La constante k, medida en unidades de fuerza por unidad de longitud, es una característica del resorte, denominada **constante del resorte** (o **constante de fuerza del resorte**). La ley de Hooke, ecuación (3), da buenos resultados siempre y cuando la fuerza no distorsione el metal del resorte. En esta sección supondremos que las fuerzas son muy pequeñas para hacerlo.

EJEMPLO 2 Determine el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 ft a una longitud de 0.75 ft, si la constante del resorte es $k = 16$ lb/ft.

Solución Dibujamos el resorte sin comprimir sobre el eje x con su extremo móvil en el origen y el extremo fijo en $x = 1$ ft (figura 6.36). Lo anterior nos permite describir la fuerza requerida para comprimir el resorte desde 0 hasta x con la fórmula $F = 16x$. Para comprimir el resorte desde 0 hasta 0.25 ft, la fuerza debe aumentar de

$$F(0) = 16 \cdot 0 = 0 \text{ lb} \qquad \text{a} \qquad F(0.25) = 16 \cdot 0.25 = 4 \text{ lb}.$$

El trabajo realizado por F en el intervalo es

$$W = \int_0^{0.25} 16x\, dx = 8x^2 \Big]_0^{0.25} = 0.5 \text{ lb-ft.}$$

Ec. (2) con $a = 0, b = 0.25$, $F(x) = 16x$ ■

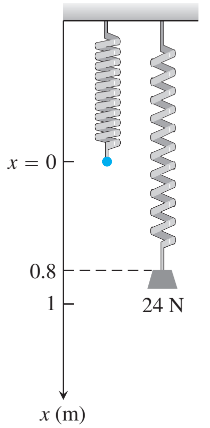


FIGURA 6.37 Un peso de 24 N alarga este resorte 0.8 m más que su longitud natural (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Un resorte tiene una longitud natural de 1 m y una fuerza de 24 n lo estira a una longitud total de 1.8 m.

(a) Determine la constante k del resorte.

(b) ¿Cuánto trabajo requerirá estirar el resorte 2 m más que su longitud natural?

(c) ¿Hasta qué longitud se estirará un resorte si le aplicamos una fuerza de 45 N?

Solución

(a) *La constante del resorte*. Determinamos la constante del resorte a partir de la ecuación (3). Una fuerza de 24 N estira el resorte 0.8 m, así

$$24 = k(0.8)$$
$$k = 24/0.8 = 30 \text{ N/m.}$$

Ec. (3) con $F = 24, x = 0.8$

(b) *El trabajo para estirar el resorte* 2 m. Imaginemos que el resorte sin estirar cuelga a lo largo del eje x con su extremo libre en $x = 0$ (figura 6.37). La fuerza requerida para estirar el resorte x m más allá de su longitud natural es la fuerza que se requiere para tirar del extremo libre del resorte x unidades desde el origen. La ley de Hooke con $k = 30$ establece que esta fuerza es

$$F(x) = 30x.$$

El trabajo realizado por F sobre el resorte desde $x = 0$ m hasta $x = 2$ m es

$$W = \int_0^2 30x\, dx = 15x^2 \Big]_0^2 = 60 \text{ J.}$$

(c) *¿A qué longitud estira el resorte una fuerza de* 45 N? Sustituimos $F = 45$ en la ecuación $F = 30x$ para determinar

$$45 = 30x, \qquad \text{o} \qquad x = 1.5 \text{ m.}$$

Una fuerza de 45 N estirará el resorte 1.5 m más allá de su longitud natural. ■

La integral del trabajo es útil para calcular el trabajo realizado al elevar objetos cuyos pesos varían con su elevación.

EJEMPLO 4 Una cubeta de 5 lb se eleva desde el suelo tirando de ella con una cuerda de 20 ft, a una velocidad constante (figura 6.38). La cuerda pesa 0.08 lb/ft. ¿Cuánto trabajo se realizó al subir la cubeta y la cuerda?

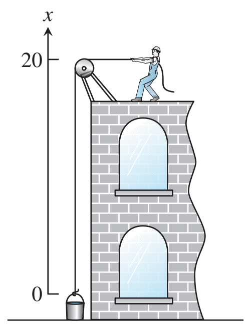


FIGURA 6.38 Elevación de la cubeta del ejemplo 4.

Solución La cubeta tiene un peso constante, por lo que el trabajo realizado al elevar sólo la cubeta es peso × distancia = 5 · 20 = 100 lb-ft.

El peso de la cuerda varía conforme se sube la cubeta, ya que hay menos cuerda colgando. Cuando la cubeta se encuentra a x ft del suelo, la parte de la cuerda que falta por subir pesa $(0.08)\cdot(20 - x)$ lb. Por lo que el trabajo para subir la cuerda es

$$\text{Trabajo sobre la cuerda} = \int_0^{20} (0.08)(20 - x)\, dx = \int_0^{20} (1.6 - 0.08x)\, dx$$
$$= \Big[1.6x - 0.04x^2\Big]_0^{20} = 32 - 16 = 16 \text{ lb-ft.}$$

El trabajo total para la cubeta y la cuerda juntas es

$$100 + 16 = 116 \text{ lb-ft.}$$ ■

Bombeo de líquidos desde contenedores

¿Cuánto trabajo se requiere para bombear todo o parte del líquido desde un contenedor? Con frecuencia los ingenieros necesitan conocer la respuesta con la finalidad de diseñar o elegir la bomba correcta para transportar agua o algún otro líquido de un lugar a otro. Para determinar cuánto trabajo se requiere para bombear el líquido, imaginemos que se eleva una delgada capa horizontal del líquido a la vez y aplicamos la ecuación $W = Fd$ a cada capa. Luego evaluamos la integral que se obtiene cuando las capas son cada vez más delgadas y más numerosas. La integral que obtenemos cada vez depende del peso del líquido y de las dimensiones del contenedor, pero la forma de determinar la integral siempre es la misma. El siguiente ejemplo ilustra cómo hacerlo.

EJEMPLO 5 El tanque cónico de la figura 6.39 se llena hasta 2 ft del borde superior con aceite de oliva, que pesa 57 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite hasta el borde del tanque?

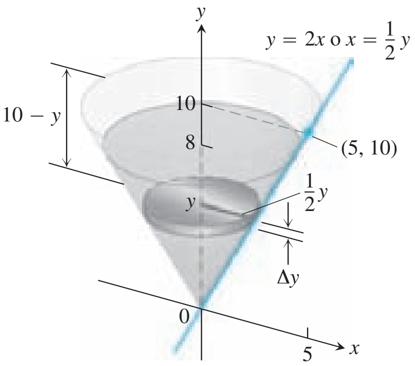


FIGURA 6.39 Aceite de oliva y tanque del ejemplo 5.

Solución Imaginemos que, por medio de planos perpendiculares al eje y, el aceite se divide en delgadas capas en los puntos de una partición del intervalo [0, 8].

Una capa representativa entre los planos en y y $y + \Delta y$ tiene un volumen aproximado de

$$\Delta V = \pi(\text{radio})^2(\text{grosor}) = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ ft}^3.$$

La fuerza $F(y)$ requerida para elevar esta capa es igual a su peso,

$$F(y) = 57\,\Delta V = \frac{57\pi}{4}y^2\,\Delta y \text{ lb.}$$

Peso = (peso por unidad de volumen) × volumen

La distancia a través de la cual $F(y)$ debe actuar para elevar esta capa al nivel del borde del cono es aproximadamente $(10 - y)$ ft, así que el trabajo realizado para elevar la capa es aproximadamente

$$\Delta W = \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,\Delta y \text{ lb-ft.}$$

Suponiendo que existen n capas asociadas con la partición de [0, 8] y que $y = y_k$ denota el plano asociado con la k-ésima capa de grosor Δy_k, se aproxima el trabajo realizado elevando todas las capas con la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2\,\Delta y_k \text{ lb-ft.}$$

El trabajo de bombear el aceite al borde es el límite de tales sumas cuando la norma de la partición tiende a cero y el número de capas tiende a infinito:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{57\pi}{4}(10 - y_k){y_k}^2\,\Delta y_k = \int_0^8 \frac{57\pi}{4}(10 - y)y^2\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ &= \frac{57\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 \approx 30{,}561 \text{ lb-ft.} \end{aligned}$$

Presiones y fuerzas en fluidos

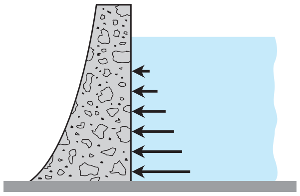


FIGURA 6.40 Para soportar la presión creciente, las presas se construyen más gruesas conforme se desciende a la base.

Las cortinas de las presas se construyen más gruesas en la base que en la parte superior (figura 6.40), ya que la presión contra ellas aumenta con la profundidad. La presión en cualquier punto de una presa depende sólo de qué tan abajo de la superficie se encuentre el punto y no de cuánta superficie de la presa esté inclinada en ese punto. En un punto h ft por debajo de la superficie, la presión en libras por ft^2 siempre es 62.4 h. El número 62.4 es la densidad específica del agua en libras por ft^3. La presión h ft por debajo de la superficie de cualquier fluido es la *densidad específica* por h.

Densidad específica
La densidad específica de un fluido w es su peso por unidad de volumen. A continuación se listan valores típicos (lb/ft^3).

Gasolina	42
Mercurio	849
Leche	64.5
Melaza	100
Aceite de oliva	57
Agua de mar	64
Agua dulce	62.4

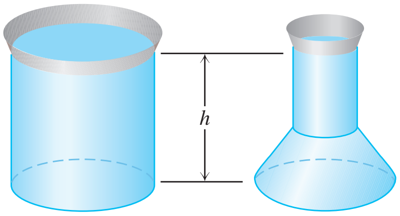


FIGURA 6.41 Los contenedores están llenos con agua a la misma profundidad y tienen la misma área de su base. Por lo tanto, la fuerza total es la misma en la base de cada contenedor. Aquí no importan las formas de los contenedores.

Ecuación de presión-profundidad
En un fluido que está en reposo, la presión p a una profundidad h es la densidad específica del fluido w por h:

$$p = wh. \tag{4}$$

En un depósito de fluidos con base plana horizontal, la fuerza total ejercida por el fluido contra la base se calcula multiplicando el área de la base por la presión en la base. Podemos hacer esto, ya que la fuerza total es igual a la fuerza por unidad de área (presión) por el área. (Véase la figura 6.41). Si F, p y A son la fuerza total, la presión y el área, entonces

$$\begin{aligned} F &= \text{fuerza total} = \text{fuerza por unidad de área} \times \text{área} \\ &= \text{presión} \times \text{área} = pA \\ &= whA. \qquad \text{De la ecuación (4) } p = wh. \end{aligned}$$

Fuerza de un fluido sobre una superficie de profundidad constante

$$F = pA = whA \tag{5}$$

Por ejemplo, la densidad específica del agua dulce es de 62.4 lb/ft^3, por lo que la fuerza del fluido en la parte inferior de una alberca rectangular de 10 ft $\times$ 20 ft y 3 ft de profundidad es

$$\begin{aligned} F &= whA = (62.4\ \text{lb/ft}^3)(3\ \text{ft})(10 \cdot 20\ \text{ft}^2) \\ &= 37{,}440\ \text{lb}. \end{aligned}$$

Para una placa plana sumergida *horizontalmente*, como el fondo de la alberca que se acaba de analizar, la fuerza hacia abajo que actúa sobre la cara superior debida a la presión del líquido está dada por la ecuación (5). Sin embargo, si la placa se sumerge *verticalmente*, entonces la presión contra ella será diferente a distintas profundidades y ya no se puede utilizar la ecuación (5) en esa forma (ya que h varía).

Suponga que queremos conocer la fuerza ejercida por un fluido contra un lado de una placa vertical sumergida en un fluido con densidad w. Para determinarla, modelamos la placa como una región que se extiende desde $y = a$ hasta $y = b$ en el plano xy (figura 6.42). Hacemos una partición $[a, b]$ de la manera usual e imaginamos que la región se corta en delgadas franjas por medio de planos perpendiculares al eje y en los puntos de la partición. La franja representativa de y a $y + \Delta y$ es de Δy unidades de ancho por $L(y)$ unidades de largo. Suponemos que $L(y)$ es una función continua de y.

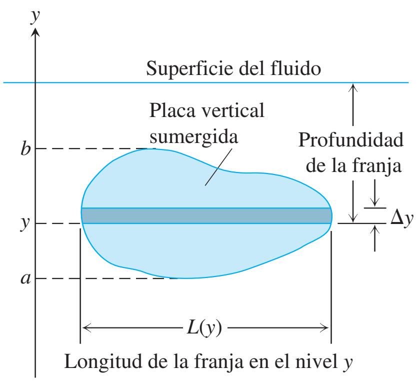


FIGURA 6.42 La fuerza ejercida por un fluido contra un lado de una franja delgada horizontal es aproximadamente ΔF = presión $\times$ área $= w \times$ (profundidad de la franja) $\times$ $L(y)\Delta y$.

La presión varía a lo largo de la franja de la parte superior a la inferior. Sin embargo, si la franja es suficientemente delgada, la presión permanecerá cercana al valor en su parte inferior e igual a $w \times$ (profundidad de la franja). La fuerza ejercida por el fluido contra un lado de la franja será aproximadamente

$$\begin{aligned} \Delta F &= (\text{presión a lo largo de la parte inferior}) \times (\text{área}) \\ &= w \cdot (\text{profundidad de la franja}) \cdot L(y)\,\Delta y. \end{aligned}$$

Suponga que hay n franjas asociadas con la partición de $a \le y \le b$ y que y_k es el lado inferior de la k-ésima franja que tiene longitud $L(y_k)$ y ancho Δy_k. La fuerza contra toda la placa es aproximadamente la suma de las fuerzas contra cada franja, lo cual da la suma de Riemann

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidad de la franja})_k \cdot L(y_k))\,\Delta y_k. \tag{6}$$

La suma en la ecuación (6) es una suma de Riemann para una función continua en $[a, b]$, por lo que esperamos que las aproximaciones mejoren conforme la norma de la partición tienda a cero. La fuerza contra la placa es el límite de estas sumas:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (w \cdot (\text{profundidad de la franja})_k \cdot L(y_k))\,\Delta y_k = \int_a^b w \cdot (\text{produndidad de la franja}) \cdot L(y)\,dy.$$

La integral para la fuerza del fluido contra una placa vertical plana

Suponga que una placa sumergida verticalmente en un fluido de densidad específica w va desde $y = a$ hasta $y = b$ en el eje y. Sea $L(y)$ la longitud de la franja horizontal medida de izquierda a derecha a lo largo de la superficie de la placa en el nivel y. Por consiguiente, la fuerza ejercida por el fluido contra un lado de la placa es

$$F = \int_a^b w \cdot (\text{profundidad de la placa}) \cdot L(y)\, dy. \tag{7}$$

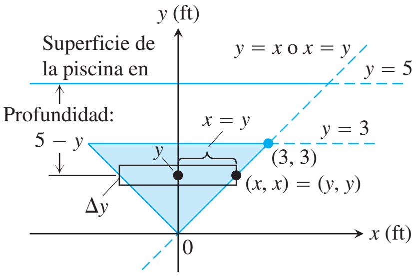


FIGURA 6.43 Para determinar la fuerza sobre un lado de la placa sumergida del ejemplo 6, utilizamos un sistema de coordenadas como el que se muestra aquí.

EJEMPLO 6 Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles con base de 6 ft y altura de 3 ft se sumerge verticalmente, con la base hacia arriba, 2 ft por debajo de la superficie de una alberca. Determine la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa.

Solución Establecemos un sistema de coordenadas para trabajar, colocando el origen en el vértice inferior de la placa y el eje y hacia arriba sobre el eje de simetría de la placa (figura 6.43). La superficie de la alberca está a lo largo de la recta $y = 5$ y el lado superior de la placa a lo largo de la recta $y = 3$. El cateto del lado derecho está a lo largo de la recta $y = x$, con el vértice superior derecho en (3, 3). La longitud de una franja delgada en el nivel y es

$$L(y) = 2x = 2y.$$

La profundidad de la placa por debajo de la superficie es $(5 - y)$. Por lo tanto, la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa es

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b w \cdot \begin{pmatrix}\text{profundidad}\\ \text{de la franja}\end{pmatrix} \cdot L(y)\, dy \qquad \text{Ecuación (7)}\\
&= \int_0^3 62.4(5 - y)2y\, dy\\
&= 124.8 \int_0^3 (5y - y^2)\, dy\\
&= 124.8 \left[\frac{5}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = 1684.8 \text{ lb}.
\end{aligned}$$

■

Ejercicios 6.5

Resortes

1. **Constante del resorte** Se requirieron 1800 J de trabajo para estirar un resorte de su longitud natural de 2 m a una longitud de 5 m. Determine la constante del resorte.
2. **Estiramiento de un resorte** Un resorte tiene una longitud natural de 10 in. Una fuerza de 800 libras lo estira a 14 in.
   a. Determine la constante del resorte.
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para alargar el resorte de 10 in a 12 in?
   c. ¿Cuánto estirará al resorte más allá de su longitud natural una fuerza de 1600 lb?
3. **Estiramiento de una banda elástica** Una fuerza de 2 N estirará una banda elástica 2 cm (0.02 m). Si suponemos que en este caso se cumple la ley de Hooke, ¿cuánto estirará la banda una fuerza de 4 N? ¿Cuánto trabajo se realizará para estirar la banda tal distancia?
4. **Estiramiento de un resorte** Si una fuerza de 90 N estira un resorte 1 m más que su longitud natural, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte 5 m a partir de su longitud natural?
5. **Resortes en los carros de un tren subterráneo** Se requiere una fuerza de 21,714 lb para comprimir un montaje de resortes en espiral en el tren subterráneo de la ciudad de Nueva York, desde su altura original de 8 in a su altura completamente comprimida de 5 in.
   a. ¿Cuál es la constante del resorte del montaje?
   b. ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimir el montaje la primera media pulgada? Redondee su respuesta a la lb-in más cercana.
6. **Báscula de baño** Una báscula de baño se comprime 1/16 in cuando se sube en ella una persona de 150 lb. Suponiendo que la báscula se comporta como un resorte que cumple la ley de Hooke, ¿cuánto pesa alguien que comprime la báscula 1/8 de pulgada? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir la báscula 1/8 de pulgada?

Trabajo realizado por una fuerza variable

7. **Elevación de una cuerda** Un alpinista está a punto de recoger una cuerda que cuelga de 50 m de longitud. ¿Cuánto trabajo se requiere si la cuerda pesa 0.624 N/m?

8. **Bolsa de arena con un agujero** Una bolsa de arena que pesaba originalmente 144 lb se subió a una velocidad constante; mientras se subía, la arena se salía a un ritmo constante. Al subir, la arena también sale a una velocidad constante. Cuando la bolsa se subió 18 ft, había perdido la mitad de la arena. ¿Cuánto trabajo se realizó al subir la arena hasta esta altura? (No tome en cuenta el peso de la bolsa ni del equipo para subirla).

9. **Ascensión del cable de un elevador** Un elevador eléctrico con un motor en la parte superior tiene un cable con varios cabos que pesan 4.5 lb/ft. Cuando el carro del elevador está en el primer piso, el cable se extiende 180 ft; cuando el carro está en el piso superior, el cable se extiende 0 ft. ¿Cuánto trabajo realiza el motor para elevar sólo al cable cuando sube el carro del primero al último piso?

10. **Fuerza de atracción** Cuando una partícula de masa m está en $(x, 0)$, es atraída hacia el origen con una fuerza de magnitud k/x^2. Si la partícula parte del reposo en $x = b$ y no actúa sobre ella ninguna otra fuerza, determine el trabajo realizado sobre ella cuando llega a $x = a$, $0 < a < b$.

11. **Cubeta que gotea** Suponga que la cubeta del ejemplo 4 gotea. Inicia con 2 galones de agua (16 lb) y gotea a un ritmo constante. Justo cuando llega a la parte superior se vacía. ¿Cuánto trabajo se realizó para subir sólo el agua? (*Sugerencia:* No incluya la cuerda ni la cubeta, pero determine la proporción de agua que sale a la altura de x ft.)

12. (*Continuación del ejercicio 11.*) Los trabajadores del ejemplo 4 y del ejercicio 11 utilizaron una cubeta más grande que contenía 5 galones (40 libras) de agua, pero esta cubeta tenía un agujero más grande, así que también llegó vacía a la parte superior. Si suponemos que el agua sale a ritmo constante, ¿cuánto trabajo se realizó al subir sólo el agua? (No incluya la cuerda ni la cubeta.)

Bombeo de líquidos desde contenedores

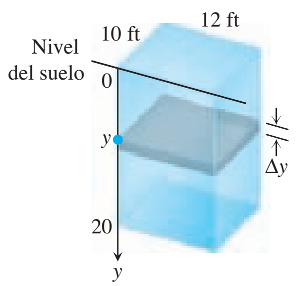
13. **Bombeo de agua** El tanque rectangular que se muestra a continuación, con su parte superior al nivel del suelo, se utiliza para recolectar escurrimientos de agua. Suponga que el agua pesa 62.4 lb/ft^3.

    a. Una vez que el tanque está lleno, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciar el tanque al bombear el agua al nivel del piso?

    b. Si el agua se bombea al nivel del suelo con un motor de (5/11) caballos de fuerza (hp)(con un rendimiento de 250 lb-ft/seg), ¿cuánto tiempo le tomará vaciar el tanque? (Redondee al minuto más cercano).

    c. Demuestre que la bomba del inciso (b) hará bajar el nivel a 10 ft (la mitad) durante los primeros 25 minutos de bombeo.

    d. **Peso del agua** ¿Cuáles serían las respuestas a los incisos a) y b) en donde el agua pesa 62.26 lb/ft^3? ¿En dónde pesa 62.59 lb/ft^3?



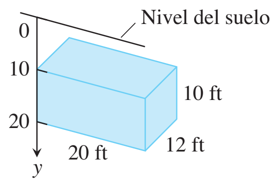
14. **Vaciado de una cisterna** La cisterna rectangular (tanque de almacenamiento para recolectar el agua de lluvia) que se ilustra más adelante tiene su parte superior 10 ft por debajo del nivel del suelo. La cisterna, actualmente llena, se vaciará para inspeccionarla bombeando su contenido al nivel del suelo.

    a. ¿Cuánto trabajo se realizará para vaciar la cisterna?

    b. ¿Cuánto tardará en vaciar el tanque una bomba de 1/2 hp con una eficiencia de 275 lb-ft/seg?

    c. ¿Cuánto tardará la bomba del inciso (b) en vaciar la mitad del tanque? (Es menos de la mitad del tiempo que se requiere para vaciar por completo el tanque).

    d. **Peso del agua** ¿Cuáles son las respuestas de los incisos (a) a (c) en un lugar donde el agua pesa 62.26 lb/ft^3? ¿Y en donde pesa 62.59 lb/ft^3?



15. **Bombeo de aceite** ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el aceite del tanque del ejemplo 5 al nivel de la parte superior del tanque si el tanque estuviera completamente lleno?

16. **Bombeo de un tanque medio lleno** Suponga que, en vez de estar lleno, el tanque del ejemplo 5 sólo se encuentra a la mitad. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el aceite que queda a un nivel de 4 ft por encima de la parte superior del tanque?

17. **Vaciado de un tanque** Un tanque en forma de cilindro circular recto mide 30 ft de altura y 20 ft de diámetro. Está lleno de keroseno, que pesa 51.2 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el keroseno al nivel de la parte superior del tanque?

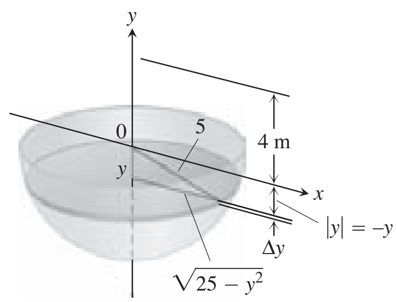
18. **a.** **Bombeo de leche** Suponga que el contenedor cónico del ejemplo 5 contiene leche (que pesa 64.5 lb/ft^3), en vez de aceite de oliva. ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el contenido al borde el contenedor?

    b. **Bombeo de aceite** ¿Cuánto trabajo se requerirá para bombear el aceite del ejemplo 5 a un nivel de 3 ft por encima del borde del cono?

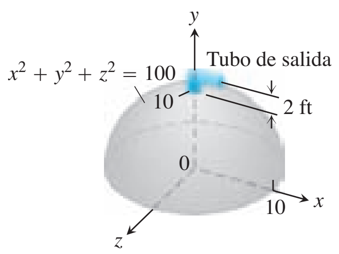
19. La gráfica de $y = x^2$ en $0 \leq x \leq 2$ gira alrededor de eje y para formar un tanque que se llena después con agua salada del Mar Muerto (que pesa aproximadamente 73 lb/ft^3). ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear toda el agua al borde superior del tanque?

20. Un tanque cilíndrico circular con altura de 10 ft y radio de 5 ft yace horizontalmente y se llena con diesel que pesa 53 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear todo el combustible a una altura de 15 ft por arriba de la parte superior del tanque?

21. **Vaciado de un depósito de agua** Modelamos el bombeo de contenedores esféricos, de la forma en que lo hacemos para otros contenedores, con el eje de integración a lo largo del eje vertical de la esfera. Utilice la siguiente figura para determinar cuánto trabajo requerirá vaciar el depósito semiesférico de radio 5 m si está lleno y el agua se bombea a una altura de 4 m por encima de la parte superior del depósito. El agua pesa 9800 N/m^3.



22. Usted está a cargo del vaciado y la reparación del tanque de almacenamiento que se muestra a continuación. El tanque es una semiesfera de radio de 10 ft y está completamente lleno de benceno, que pesa 56 lb/ft^3. Una compañía le dice que puede vaciar el tanque por 1/2 centavo por libra-ft de trabajo. Determine el trabajo requerido para vaciar el tanque bombeando el benceno hasta una salida que está 2 ft por encima del nivel superior del tanque. Si tiene un presupuesto de $5000 para el trabajo, ¿puede contratar a la compañía para realizarlo?



Trabajo y energía cinética

23. Energía cinética Si una fuerza variable de magnitud $F(x)$ mueve un cuerpo de masa m a lo largo del eje x, desde x_1 a x_2, la velocidad del cuerpo v puede expresarse como dx/dt (donde t representa el tiempo). Utilice la segunda ley de Newton para el movimiento $f = m(dv/dt)$ y la regla de la cadena

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

para mostrar que el trabajo neto realizado por la fuerza al mover el cuerpo de x_1 a x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades del cuerpo en x_1 y x_2. En física, la expresión $(1/2)mv^2$ se denomina *energía cinética* de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v. Por lo tanto, *el trabajo realizado por la fuerza es igual al cambio en la energía cinética del cuerpo*, por lo que determinamos el trabajo calculando este cambio.

En los ejercicios 24 a 28, utilice el resultado del ejercicio 23.

24. Tenis Una pelota de tenis de 2 onzas fue servida a 160 ft/segundo (casi 109 mph). ¿Cuánto trabajo se realizó sobre la pelota para lograr esa velocidad? (Para determinar la masa de la pelota a partir de su peso, exprese el peso en libras y divida entre 32 ft/segundo^2 la aceleración debida a la gravedad).

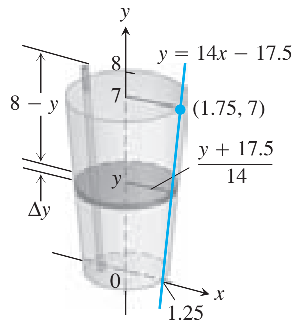
25. Béisbol ¿Cuántas libras-ft de trabajo se requieren para lanzar una pelota de béisbol a 90 mph? Una pelota de béisbol pesa 5 onzas o 0.3125 lb.

26. Golf Una pelota de golf de 1.6 onzas se lanza a una velocidad de 280 ft/segundo (casi 191 mph). ¿Cuántas libras-ft de trabajo se realizaron sobre la pelota para lanzarla al aire?

27. El 11 de junio de 2004, durante el partido entre Andy Roddick y Paradon Srichaphan en el torneo Stella Artois en Londres, Inglaterra, Roddick lanzó un servicio que fue medido en 153 mph. ¿Cuánto trabajo realizó Andy sobre la pelota de 2 onzas para obtener esa velocidad?

28. Softbol ¿Cuánto trabajo tiene que realizarse sobre una pelota de softbol para lanzarla a 132 ft/seg (90 mph)?

29. Succión de una malteada El contenedor en forma de cono truncado que se muestra a continuación está lleno de malteada de fresa que pesa 4/9 onzas/in^3. Como ve, el contenedor tiene una profundidad de 7 in, 2.5 in de diámetro en la base y 3.5 in de diámetro en la parte superior (un tamaño estándar en Brighams's en Boston). La pajilla sobresale una pulgada por arriba de la parte superior. Aproximadamente, ¿cuánto trabajo será necesario para succionar la malteada por la pajilla (no tome en cuenta la fricción)? Dé la respuesta en in-onzas.



Dimensiones en pulgadas

30. Colocación de un satélite en órbita La fuerza del campo gravitacional de la Tierra varía con la distancia al centro de ésta, mientras la magnitud de la fuerza gravitacional experimentada por un satélite de masa m durante y después del lanzamiento es

$$F(r) = \frac{mMG}{r^2}.$$

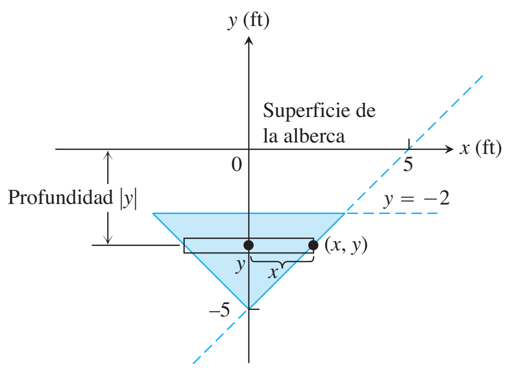
Aquí, $M = 5.975 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra, $G = 6.6720 \times 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2 kg^{-2} es la constante de gravitación universal y r se mide en metros. Por lo tanto, el trabajo que se requiere para elevar un satélite de 1000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una órbita circular a 35,780 km del centro de la Tierra, está dado por la integral

$$\text{Trabajo} = \int_{6,370,000}^{35,780,000} \frac{1000MG}{r^2}\,dr \text{ joules.}$$

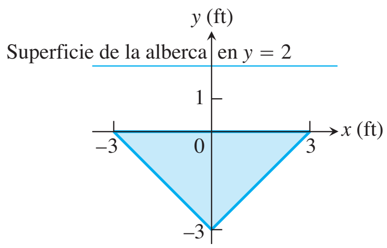
Evalúe la integral. El límite inferior de integración es el radio de la Tierra en metros en el sitio del lanzamiento. (Este cálculo no toma en cuenta la energía que se utiliza para lanzar el vehículo o la energía para poner al satélite a su velocidad orbital).

Encontrar la fuerza de los fluidos

31. Placa triangular Calcule la fuerza del fluido sobre un lado de la placa del ejemplo 6; para ello, utilice el sistema de coordenadas mostrado aquí.



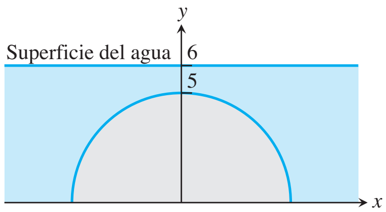
32. Placa triangular Calcule la fuerza del fluido sobre un lado de la placa en el ejemplo 6; para ello, utilice el siguiente sistema de coordenadas.



33. Placa rectangular En una alberca llena de agua, con profundidad de 10 ft, calcule la fuerza del fluido en un lado de una placa rectangular de 3 por 4 ft, si la placa reposa verticalmente en el fondo de la alberca

a. en el lado de 4 ft **b.** en el lado de 3 ft.

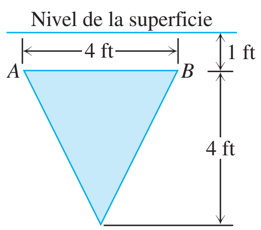
34. Placa semicircular Calcule la fuerza del fluido en un lado de una placa semicircular de radio de 5 ft, que descansa verticalmente sobre su diámetro en el fondo de una alberca llena de agua, a una profundidad de 6 ft.



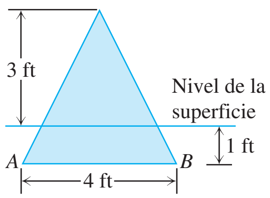
35. Placa triangular La placa en forma de triángulo isósceles que se muestra a continuación se sumerge verticalmente 1 ft por debajo de la superficie de un lago de agua dulce.

a. Determine la fuerza del fluido contra una cara de la placa.

b. ¿Cuál será la fuerza del fluido sobre un lado de la placa si el agua fuera de mar en vez de agua dulce?



36. Placa triangular girada La placa del ejercicio 35 se gira 180° con respecto a la recta AB de manera que parte de la placa sobresale del lago, como se muestra a continuación. Ahora, ¿cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre cada una de las caras de la placa?



37. Acuario en Nueva Inglaterra El visor de una ventana rectangular de vidrio en una pecera típica en el Acuario de Nueva Inglaterra, en Boston, es de 63 in de ancho y va desde 0.5 a 33.5 in bajo la superficie. Determine la fuerza del fluido contra esta parte de la ventana. La densidad del agua de mar es de 64 lb/ft^3. (Por si se lo pregunta, el vidrio tiene un espesor de $3/4$ de pulgada y las paredes del tanque se extienden 4 in por arriba del nivel del agua para evitar que los peces salten hacia fuera).

38. Placa semicircular Una placa semicircular de 2 ft de diámetro se sumerge en agua fresca con el diámetro a lo largo de la superficie. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

39. Placa inclinada Calcule la fuerza del fluido sobre un lado de una placa cuadrada de 5 por 5 ft, si ésta se encuentra en el fondo de una alberca llena de agua con una profundidad de 8 ft y

a. descansa sobre su cara de 5 por 5 ft.

b. se mantiene en forma vertical con un lado de 5 ft.

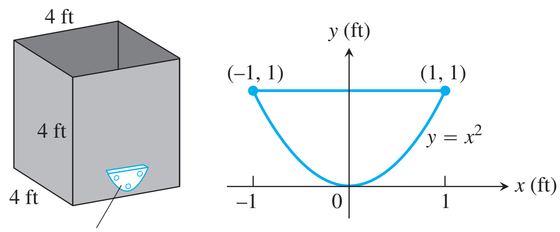
c. se mantiene sobre un lado de 5 ft e inclinada 45° con respecto al fondo de la alberca.

40. Placa inclinada Calcule la fuerza del fluido sobre uno de los lados de una placa en forma de triángulo rectángulo con lados de 3, 4 y 5 ft si la placa se asienta en el fondo de una alberca llena con agua a una profundidad de 6 ft sobre su lado de 3 ft y está inclinada 60° con respecto al fondo de la alberca.

41. El tanque cúbico de metal que se ilustra a continuación tiene una compuerta parabólica, que se mantiene en su lugar por medio de tornillos y fue diseñada para soportar una fuerza del fluido de 160 lb sin romperse. El líquido que planea almacenar tiene una densidad de 50 lb/ft^3.

a. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la compuerta cuando el líquido tiene 2 ft de profundidad?

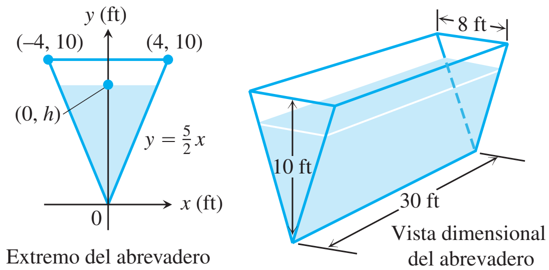
b. ¿Cuál es la altura máxima a la cual el depósito puede llenarse sin exceder sus limitaciones de diseño?



Compuerta parabólica

Vista ampliada de la compuerta parabólica

42. Las paredes de los extremos del abrevadero que se muestra aquí fueron diseñadas para soportar una fuerza de 6667 lb. ¿Cuántos ft^3 de agua puede contener el tanque sin exceder esta limitación? Redondee su resultado al ft^3 más cercano.



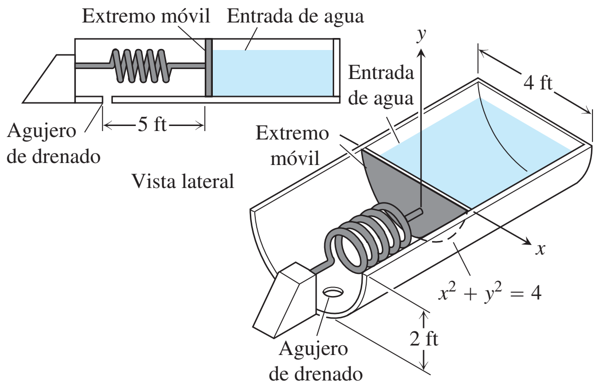
Extremo del abrevadero

Vista dimensional del abrevadero

43. Una placa rectangular vertical de a unidades de largo por b unidades de ancho se sumerge en un fluido con densidad específica w, con sus aristas más largas paralelas a la superficie del fluido. Determine el valor promedio de la presión a lo largo de la dimensión vertical de la placa. Justifique su respuesta.

44. (*Continuación del ejercicio 43*) Demuestre que la fuerza ejercida por el fluido sobre un lado de la placa es el valor promedio de la presión (determinada en el ejercicio 43) por el área de la placa.

45. Se vierte agua en el tanque que se ilustra a continuación a razón de 4 ft^3/min. Las secciones transversales del tanque son semicírculos de 4 ft de diámetro. Un extremo del tanque es móvil, pero moverlo para aumentar el volumen comprime un resorte. La constante del resorte es $k = 100$ lb/ft. Si el extremo del tanque se mueve 5 ft contra el resorte, el agua se drenará por un agujero de seguridad en el fondo a razón de 5 ft^3/min. ¿El extremo móvil alcanzará el agujero antes de que el tanque se derrame?



46. Abrevadero Los extremos verticales de un abrevadero son cuadrados de 3 ft por lado.

a. Determine la fuerza del fluido contra los extremos cuando el abrevadero está lleno.

b. Para reducir 25% la fuerza del fluido, ¿cuántas pulgadas debe bajar el nivel del agua en el abrevadero?

6.6 Momentos y centros de masa

Muchas estructuras y sistemas mecánicos se comportan como si sus masas estuvieran concentradas en un solo punto, llamado *centro de masa* (figura 6.44). Es importante conocer cómo localizar este punto, y hacerlo es una tarea básicamente matemática. Por el momento, analizaremos sólo objetos con una o dos dimensiones. Los objetos de tres dimensiones se estudian mejor con las integrales múltiples del capítulo 15.

Masas en una línea

Desarrollaremos nuestro modelo matemático por etapas. La primera consiste en imaginar las masas m_1, m_2 y m_3 en un eje rígido horizontal x con un punto de apoyo (fulcro) en el origen.

El sistema resultante puede o no quedar balanceado, dependiendo del tamaño de las masas y de cómo estén distribuidas a lo largo del eje x.

Cada masa m_k ejerce una fuerza hacia abajo $m_k g$ (el peso de m_k) igual a la magnitud de la masa por la aceleración debida a la gravedad. Cada una de estas fuerzas tiene una tendencia a girar el eje alrededor del origen, de la misma manera que un niño juega en un balancín (subibaja). Este efecto de giro, denominado **torque** (o torca), se mide al multiplicar la fuerza $m_k g$ por la distancia con signo x_k desde el punto de aplicación al origen. Las masas a la izquierda del origen ejercen un torque negativo (en contra de las manecillas del reloj). Las masas a la derecha del origen ejercen un torque positivo (en sentido de las manecillas del reloj).

La suma de los torques mide la tendencia de un sistema para girar alrededor del origen. Esta suma se denomina **torque del sistema**.

$$\text{Torque del sistema} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{1}$$

El sistema quedará equilibrado si y sólo si su torque es cero.

Si en la ecuación (1) factorizamos la g, veremos que el torque del sistema es

$$\underbrace{g}_{\substack{\text{una caracterís-}\\ \text{tica del medio}}} \cdot \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\substack{\text{una característica}\\ \text{del sistema}}}.$$

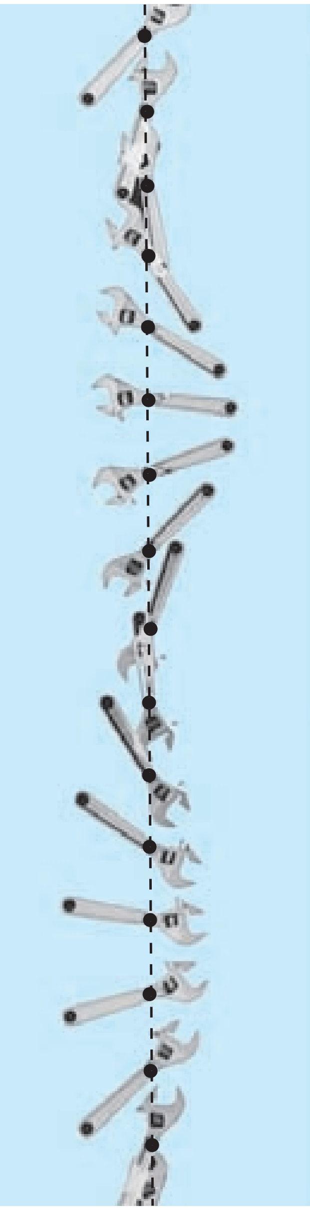


FIGURA 6.44 El movimiento de esta llave de tuercas que se desliza en hielo gira alrededor de su centro de masa, mientras que el centro de masa se desliza en línea recta.

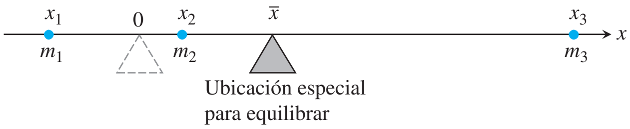
Así, el torque es el producto de la aceleración gravitacional g, que es una característica del sistema en el cual éste se encuentre, y el número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$, que es una característica del sistema mismo, una constante que permanece igual sin importar en dónde se coloque el sistema.

El número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ se denomina **momento del sistema con respecto al origen**. Es la suma de los momentos m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3 de las masas individuales.

$$M_0 = \text{Momento del sistema con respecto al origen} = \sum m_k x_k$$

(Escribimos lo anterior con la notación sigma para permitir sumas con más términos).

Por lo regular, queremos saber dónde colocar el fulcro para que el sistema esté equilibrado; esto es, en qué punto $\bar{x}$ habrá de colocarse para que la suma de los torques sea cero.



En esta posición especial, el torque de cada masa con respecto al punto de apoyo, es

$$\text{Torque de } m_k \text{ con respecto a } \bar{x} = \begin{pmatrix}\text{distancia con signo}\\ \text{de } m_k \text{ desde } \bar{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{fuerza}\\ \text{hacia abajo}\end{pmatrix}$$
$$= (x_k - \bar{x})m_k g.$$

Cuando escribimos la ecuación que dice que la suma de estos torques es cero, obtenemos una ecuación donde podemos despejar $\bar{x}$:

$$\sum (x_k - \bar{x})m_k g = 0 \qquad \text{La suma de los torques es igual a cero.}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \qquad \text{Despejar } \bar{x}$$

Esta última ecuación nos permite determinar $\bar{x}$ dividiendo el momento del sistema con respecto al origen entre la masa total del sistema:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{\text{momento del sistema con respecto al origen}}{\text{masa del sistema}}. \tag{2}$$

El punto $\bar{x}$ se denomina **centro de masa** del sistema.

Masas distribuidas sobre una región plana

Suponga que tenemos una colección finita de masas ubicadas en el plano, con masa m_k en el punto (x_k, y_k) (figura 6.45). La masa del sistema es

$$\text{Masa del sistema:} \qquad M = \sum m_k.$$

Cada masa m_k tiene un momento con respecto a cada eje. Su momento con respecto al eje x es $m_k y_k$ y su momento con respecto al eje y es $m_k y_k$. Los momentos del sistema completo con respecto a los dos ejes son

$$\text{Momento con respecto al eje } x\text{:} \qquad M_x = \sum m_k y_k,$$
$$\text{Momento con respecto al eje } y\text{:} \qquad M_y = \sum m_k x_k.$$

La coordenada x del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}. \tag{3}$$

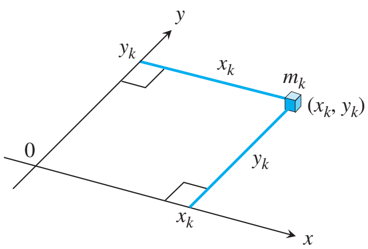


FIGURA 6.45 Cada masa m_k tiene un momento con respecto a cada eje.

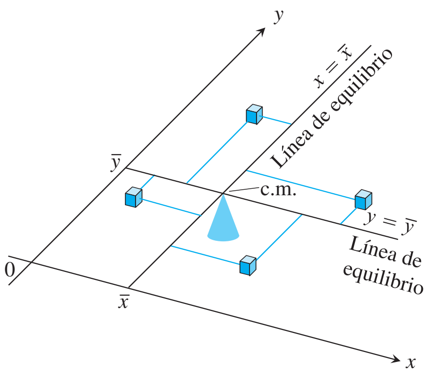


FIGURA 6.46 Un arreglo en dos dimensiones de masas se equilibra en su centro de masa.

Con esta elección de $\bar{x}$, como en el caso de una dimensión, el sistema se equilibra con respecto a la recta $x = \bar{x}$ (figura 6.46).

La coordenada y del centro de masa del sistema se define como

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \tag{4}$$

Con esta elección de $\bar{y}$, el sistema también se equilibra con respecto a la recta $y = \bar{y}$. El torque ejercido por las masas con respecto a la recta $y = \bar{y}$ se cancela. Así, en lo que se refiere al equilibrio, el sistema se comporta como si todas las masas estuvieran en un solo punto $(\bar{x}, \bar{y})$. A este punto le llamamos **centro de masa** del sistema.

Placas planas y delgadas

En muchas aplicaciones necesitamos determinar el centro de masa de una placa plana y delgada; por ejemplo, un disco de aluminio o una hoja triangular de acero. En tales casos, suponemos que la distribución de masa es continua y las fórmulas que utilizamos para calcular $\bar{x}$ y $\bar{y}$ contienen integrales en vez de sumas finitas. Las integrales surgen de la siguiente manera.

Imagine que la placa que ocupa una región del plano xy se corta en delgadas franjas paralelas a uno de los ejes (en la figura 6.47, el eje y). El centro de masa de una franja representativa es $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Tratamos la masa de la franja Δm como si estuviera concentrada en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Entonces, el momento de la franja con respecto al eje y es $\tilde{x}\,\Delta m$. El momento de la franja con respecto al eje x es $\tilde{y}\,\Delta m$. Por lo que las ecuaciones (3) y (4) se transforman en

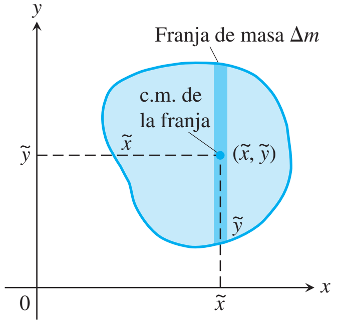


FIGURA 6.47 Una placa se corta en delgadas franjas paralelas al eje y. El momento ejercido por una franja representativa con respecto a cada eje es el momento que su masa Δm ejercería si estuviera concentrada en el centro de masa de la franja s$\tilde{x}$, $\tilde{y}$d

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Las sumas son sumas de Riemann para integrales y aproximan a estas integrales como límites cuando las franjas en las que se corta la placa se hacen cada vez más angostas. Escribimos estas integrales de manera simbólica como

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}.$$

Momentos, masa y centro de masa de una placa delgada que cubre una región en el plano *xy*

$$\begin{aligned} &\text{Momento con respecto al eje } x\text{:} && M_x = \int \tilde{y}\,dm \\ &\text{Momento con respecto al eje } y\text{:} && M_y = \int \tilde{x}\,dm \\ &\text{Masa:} && M = \int dm \\ &\text{Centro de masa:} && \bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} \end{aligned} \tag{5}$$

Densidad
La densidad de un material es su masa por unidad de área. Para alambres, varillas y franjas delgadas, utilizamos masa por unidad de longitud.

La diferencial dm es la masa de la franja. Suponiendo que la densidad δ de la placa sea una función continua, la diferencial de masa dm es igual al producto $\delta\,dA$ (masa por unidad de área por área). Aquí dA representa el área de la franja.

Para evaluar las integrales de las ecuaciones (5), dibujamos la placa en el plano coordenado y bosquejamos una franja de masa, paralela a uno de los ejes coordenados. Luego, expresamos la masa de la franja dm y las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y})$ del centro de masa de la franja en términos de x o y. Por último, integramos $\tilde{y}\,dm$, $\tilde{x}\,dm$, y dm entre los límites de integración determinados por la ubicación de la placa en el plano.

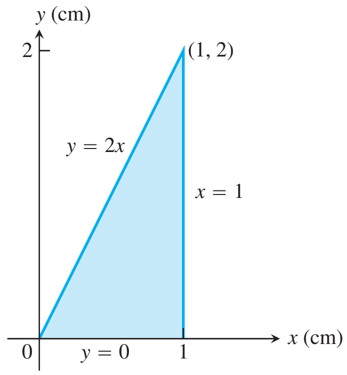


FIGURA 6.48 La placa del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 La placa triangular que se muestra en la figura 6.48 tiene una densidad constante de $\delta = 3\ \text{g/cm}^2$. Determine

(a) el momento M_y de la placa con respecto al eje y. **(b)** la masa M de la placa.

(c) la coordenada x del centro de masa de la placa (c.m.)

Solución **Método 1: Franjas verticales** (figura 6.49)

(a) El momento M_y: La franja vertical tiene la siguiente información relevante.

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$

longitud: $2x$

ancho: dx

área: $dA = 2x\,dx$

masa: $dm = \delta\,dA = 3 \cdot 2x\,dx = 6x\,dx$

distancia del c.m. al eje y: $\tilde{x} = x$

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\,dm = x \cdot 6x\,dx = 6x^2\,dx.$$

Por lo tanto, el momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 6x^2\,dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\,dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3\ \text{g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

Por medio de un cálculo análogo, podríamos determinar M_x y $\bar{y} = M_x/M$.

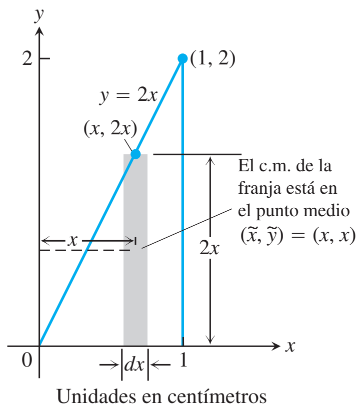


FIGURA 6.49 Modelación de la placa del ejemplo 1 mediante franjas verticales.

Método 2: Franjas horizontales (figura 6.50)

(a) El momento M_y: La coordenada y del centro de masa de una franja horizontal representativa es y (véase la figura), así que

$$\tilde{y} = y.$$

La coordenada x es la coordenada x de la mitad del segmento que cruza el triángulo. Esto produce un promedio de $y/2$ (el valor de x del lado izquierdo de la franja) y 1 (el valor de x de lado derecho de la franja):

$$\tilde{x} = \frac{(y/2) + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}.$$

También tenemos

longitud: $1 - \dfrac{y}{2} = \dfrac{2-y}{2}$

ancho: dy

área: $dA = \dfrac{2-y}{2}\,dy$

masa: $dm = \delta\,dA = 3 \cdot \dfrac{2-y}{2}\,dy$

distancia del c.m. al eje y: $\tilde{x} = \dfrac{y+2}{4}.$

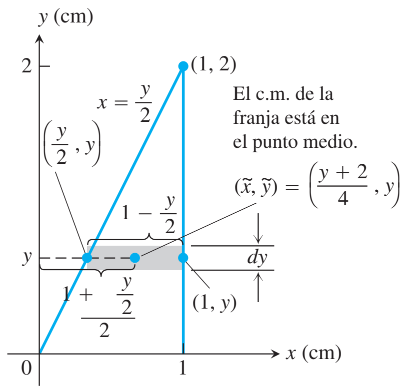


FIGURA 6.50 Modelación de la placa del ejemplo 1 con franjas horizontales.

El momento de la franja con respecto al eje y es

$$\tilde{x}\,dm = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,dy = \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy.$$

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,dy = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\ \text{g} \cdot \text{cm}.$$

(b) La masa de la placa:

$$M = \int dm = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,dy = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\ \text{g}.$$

(c) La coordenada x del centro de masa de la placa:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\ \text{g} \cdot \text{cm}}{3\ \text{g}} = \frac{2}{3}\ \text{cm}.$$

Por un cálculo análogo, podemos determinar M_x y $\bar{y}$. ■

Si la distribución de masa en una placa plana y delgada tiene un eje de simetría, el centro de masa estará en dicho eje. Si tiene dos ejes de simetría, el centro de masa estará en su intersección. Con frecuencia, esto nos ayuda a simplificar nuestro trabajo.

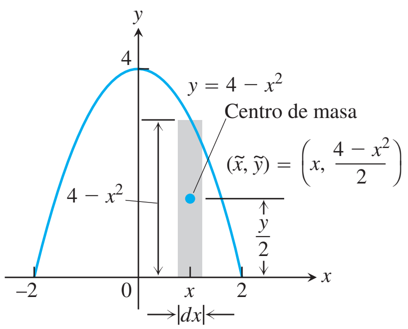


FIGURA 6.51 Modelación de la placa del ejemplo 2 con franjas verticales.

EJEMPLO 2 Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada arriba por la parábola $y = 4 - x^2$ y abajo por el eje x (figura 6.51). Suponga que la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta = 2x^2$, que es el doble del cuadrado de la distancia del punto al eje y.

Solución La distribución de masa sigue siendo simétrica con respecto al eje y, por lo que $\bar{x} = 0$. Modelamos la distribución de masa mediante franjas verticales, ya que la densidad se da como una función de la variable x. La franja vertical típica (figura 6.51) tiene la siguiente información relevante.

centro de masa (c.m.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4-x^2}{2}\right)$

largo: $4 - x^2$

ancho: dx

área: $dA = (4 - x^2)\,dx$

masa: $dm = \delta\,dA = \delta(4 - x^2)\,dx$

distancia del c.m. al eje x: $\tilde{y} = \dfrac{4-x^2}{2}$

El momento de la franja con respecto al eje x es

$$\tilde{y}\,dm = \frac{4-x^2}{2} \cdot \delta(4-x^2)\,dx = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,dx.$$

El momento de la placa con respecto al eje x es

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y}\,dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,dx = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\,dx \\ &= \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\,dx = \frac{2048}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4-x^2)\,dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4-x^2)\,dx \\ &= \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\,dx = \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

El centro de masa de la placa es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right).$$

Placas acotadas por dos curvas

Suponga que una placa cubre una región que está entre dos curvas $y = g(x)$ y $y = f(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ y $a \leq x \leq b$. La franja vertical típica (figura 6.52) tiene

$$\begin{aligned} \text{centro de masa (c.m.):}\quad & (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, \tfrac{1}{2}[f(x) + g(x)]) \\ \text{largo:}\quad & f(x) - g(x) \\ \text{ancho:}\quad & dx \\ \text{área:}\quad & dA = [f(x) - g(x)]\,dx \\ \text{masa:}\quad & dm = \delta\,dA = \delta[f(x) - g(x)]\,dx. \end{aligned}$$

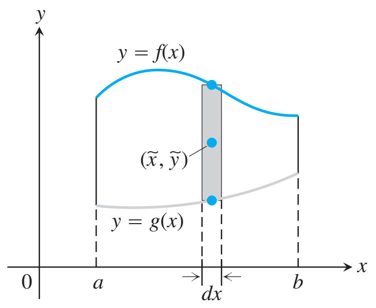


FIGURA 6.52 Modelación de la placa acotada por dos curvas mediante franjas verticales. El c.m. de la franja está a la mitad, así que $\tilde{y} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$.

El momento de la placa con respecto al eje y es

$$M_y = \int x\,dm = \int_a^b x\delta[f(x) - g(x)]\,dx,$$

y el momento con respecto al eje x es

$$\begin{aligned} M_x &= \int y\,dm = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] \cdot \delta[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\,dx. \end{aligned}$$

Estos momentos dan lugar a las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b \delta x\,[f(x) - g(x)]\,dx \qquad (6)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\,dx \qquad (7)$$

EJEMPLO 3 Con base en las ecuaciones (6) y (7), determine el centro de masa de una placa delgada acotada por las curvas $g(x) = x/2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ (figura 6.53), cuya función de densidad es $\delta(x) = x^2$.

Solución Primero calculamos la masa de la placa, donde $dm = \delta[f(x) - g(x)]\,dx$:

$$M = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{56}.$$

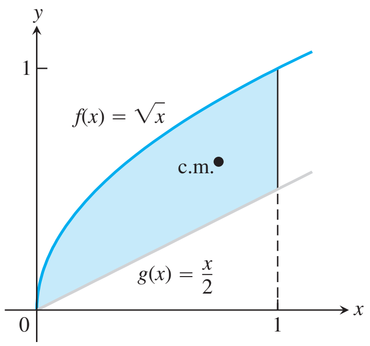


FIGURA 6.53 La región del ejemplo 3.

Entonces, con base en las ecuaciones (6) y (7), obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{56}{9}\int_0^1 x^2 \cdot x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx \\ &= \frac{56}{9}\int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{x^4}{2}\right)dx \\ &= \frac{56}{9}\left[\frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{308}{405},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{56}{9}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx \\ &= \frac{28}{9}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)dx \\ &= \frac{28}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^1 = \frac{252}{405}.\end{aligned}$$

El centro de masa se muestra en la figura 6.53. ■

Centroides

Cuando la función de densidad es constante, ésta se cancela del numerador y el denominador en las fórmulas para $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Así, cuando la densidad es constante, la ubicación del centro de masa es una característica de la geometría del objeto y no del material del cual está fabricado. En tales casos, los ingenieros podrían llamar al centro de masa el **centroide** de la forma, como en "Determine el centroide de un triángulo o de un cono sólido". Para hacerlo, sólo se tiene que igualar δ a 1 y proceder a determinar $\bar{x}$ y $\bar{y}$ como ya se hizo, dividiendo momentos entre masas.

EJEMPLO 4 Determine el centro de masa (centroide) de un alambre delgado, con densidad constante δ, que tiene forma de una semicircunferencia de radio a.

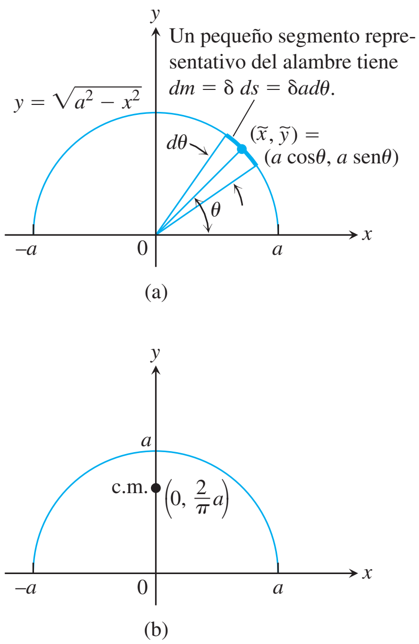


FIGURA 6.54 El alambre semicircular del ejemplo 4. (a) Las dimensiones y las variables utilizadas para determinar el centro de masa. (b) El centro de masa no está en el alambre.

Solución Modelamos el alambre con la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.54). La distribución de masa es simétrica con respecto al eje y, por lo que $\bar{x} = 0$. Para determinar $\bar{y}$, imaginamos que dividimos el alambre en pequeños segmentos. Si $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es el centro de masa de un subarco y θ es el ángulo entre el eje x, mientras la recta radial que une el origen con $(\tilde{x}, \tilde{y})$, entonces $\tilde{y} = a \operatorname{sen}\theta$ es una función del ángulo θ medido en radianes (véase la figura 6.54a). La longitud ds del subarco que contiene a $(\tilde{x}, \tilde{y})$ subtiende un ángulo de $d\theta$ radianes, por lo que $ds = a\, d\theta$. Así, un segmento de subarco típico tiene la siguiente información relevante para el cálculo de $\bar{y}$:

$$\begin{aligned}\text{longitud:}\quad & ds = a\, d\theta \\ \text{masa:}\quad & dm = \delta\, ds = \delta a\, d\theta \\ \text{distancia del c.m. al eje } x\text{:}\quad & \tilde{y} = a \operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

Masa por unidad de longitud por longitud

De donde,

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^\pi a \operatorname{sen}\theta \cdot \delta a\, d\theta}{\int_0^\pi \delta a\, d\theta} = \frac{\delta a^2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi}a.$$

El centro de masa está en el eje de simetría en el punto $(0, 2a/\pi)$, aproximadamente a dos tercios del origen (figura 6.54b). Observe cómo δ se cancela en la ecuación para $\bar{y}$, por lo que podríamos haber hecho $\delta = 1$ en todas partes y obtener el mismo valor para $\bar{y}$. ■

En el ejemplo 4 encontramos el centro de masa de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la gráfica de una función diferenciable en el plano xy. En el capítulo 16 aprenderemos cómo determinar el centro de masa de alambres a lo largo de curvas suaves más generales en el plano (o en el espacio).

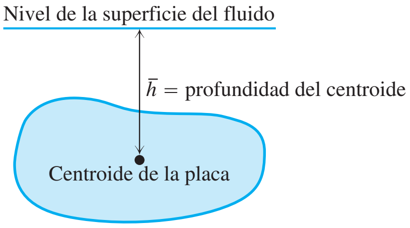


FIGURA 6.55 La fuerza ejercida contra un lado de la placa es $w \cdot \bar{h} \cdot$ área de la placa.

Fuerzas de fluidos y centroides

Si conocemos la ubicación del centroide de una placa plana vertical sumergida (figura 6.55), podemos tomar un atajo para determinar la fuerza contra un lado de la placa. De la ecuación (7), en la sección 6.5

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b w \times (\text{profundidad de la franja}) \times L(y)\, dy \\ &= w \int_a^b (\text{profundidad de la franja}) \times L(y)\, dy \\ &= w \times (\text{momento con respecto a la línea del nivel de la superficie} \\ &\qquad \text{de la región ocupada por la placa}) \\ &= w \times (\text{profundidad del centroide de la placa}) \times (\text{área de la placa}). \end{aligned}$$

Fuerza de fluidos y centroides
La fuerza de un fluido de densidad específica w contra un lado de una placa plana vertical sumergida es el producto de w, la distancia $\bar{h}$ desde el centroide de la placa a la superficie del fluido y el área de la placa:

$$F = w\bar{h}A. \tag{8}$$

EJEMPLO 5 Una placa plana en forma de triángulo rectángulo isósceles con base de 6 ft y altura de 3 ft se sumerge verticalmente con la base hacia arriba y su vértice en el origen, por lo que la base está 2 ft por debajo de la superficie de una alberca. (Éste es el ejemplo 6, sección 6.5). Utilice la ecuación (8) para determinar la fuerza ejercida por el agua contra un lado de la placa.

Solución El centroide del triángulo (figura 6.43) está en el eje y, a un tercio de la distancia de la base al vértice; así $\bar{h} = 3$ (donde $y = 2$), ya que la superficie de la alberca está en $y = 5$. El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}(6)(3) = 9.$$

De aquí que,

$$F = w\bar{h}A = (62.4)(3)(9) = 1684.8 \text{ lb}.$$

El teorema de Pappus

En el siglo III, un griego de Alejandría llamado Pappus descubrió dos fórmulas que relacionan los centroides con las superficies con los sólidos de revolución. Tales fórmulas proporcionan atajos para cálculos que, de otra forma, serían muy largos.

TEOREMA 1: Teorema de Pappus para volúmenes
Si una región plana se hacer girar alrededor de una línea en el plano que no corte el interior de la región, entonces el volumen del sólido generado es igual al área de la región por la distancia recorrida por el centroide de la región durante la rotación. Si ρ es la distancia del eje de rotación al centroide, entonces

$$V = 2\pi\rho A. \tag{9}$$

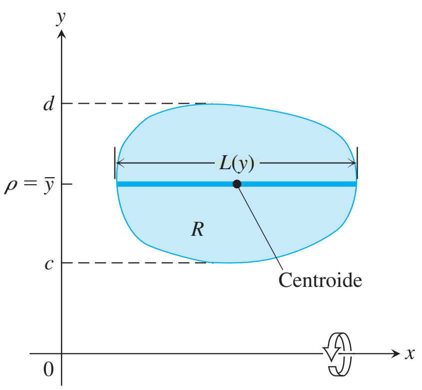


FIGURA 6.56 La región R se hará girar (una vez) alrededor del eje x para generar un sólido. Un teorema de hace 1700 años establece que el volumen del sólido puede calcularse multiplicando el área de la región por la distancia recorrida por el centroide durante la rotación.

Demostración Dibujamos el eje de rotación como el eje x con la región R en el primer cuadrante (figura 6.56). Denotamos con $L(y)$ a la longitud de la sección transversal de R perpendicular al eje y en y. Suponemos que $L(y)$ es continua.

Por el método de los cascarones cilíndricos, el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es

$$V = \int_c^d 2\pi(\text{radio del cascarón})(\text{altura del cascarón})\,dy = 2\pi\int_c^d y\,L(y)\,dy. \qquad (10)$$

La coordenada y del centroide de R es

$$\bar{y} = \frac{\int_c^d \tilde{y}\,dA}{A} = \frac{\int_c^d y\,L(y)\,dy}{A}, \qquad \tilde{y} = y,\ dA = L(y)\,dy$$

por lo que

$$\int_c^d y\,L(y)\,dy = A\bar{y}.$$

Sustituyendo $A\bar{y}$ por la última integral de la ecuación (10), se obtiene $V = 2\pi\bar{y}A$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $V = 2\pi\rho A$. ■

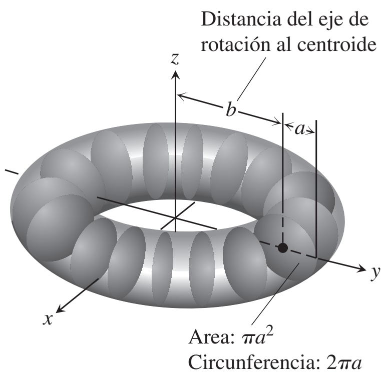


FIGURA 6.57 Con el primer teorema de Pappus, podemos determinar el volumen de un toro sin tener que integrar (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Determine el volumen de un toro (con forma de rosquilla) generado al hacer girar un disco circular de radio a alrededor de un eje en su plano a una distancia $b \geq a$ de su centro (figura 6.57).

Solución Aplicamos el teorema de Pappus para volúmenes. El centroide de un disco está ubicado en su centro, el área es $A = \pi a^2$ y $\rho = b$ es la distancia del centroide al eje de revolución (figura 6.57). Al sustituir dichos valores en la ecuación (9), encontramos que el volumen del toro es

$$V = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2.$$ ■

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar la ecuación (9) en el teorema de Pappus para determinar una de las coordenadas del centroide de una región plana de área conocida A cuando conocemos el volumen V del sólido generado al hacer girar la región alrededor de otro eje de coordenadas. Esto es, si $\bar{y}$ es la coordenada que queremos determinar, hacemos girar la región alrededor del eje x de manera que $\bar{y} = \rho$ es la distancia del centroide al eje de revolución. La idea es que la rotación genere un sólido de revolución cuyo volumen V ya es una cantidad conocida. Luego despejamos ρ de la ecuación (9), que es el valor de la coordenada del centroide $\bar{y}$.

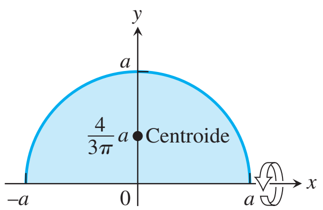


FIGURA 6.58 Con el primer teorema de Pappus, localizamos el centroide de una región semicircular sin tener que integrar (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Localice el centroide de una región semicircular de radio a.

Solución Consideramos la región entre la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 6.58) y el eje x, luego imaginamos que hacemos girar la región alrededor del eje x para generar una esfera sólida. Por simetría, la coordenada x del centroide es $\bar{x} = 0$. Con $\bar{y} = \rho$ en la ecuación (9), tenemos

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{(4/3)\pi a^3}{2\pi(1/2)\pi a^2} = \frac{4}{3\pi}a.$$ ■

TEOREMA 2: Teorema de Pappus para áreas de superficies

Si un arco de una curva plana suave se hace girar una vez alrededor de una recta en el plano que no corte el interior del arco, entonces el área de la superficie generada por el arco es igual a la longitud del arco por la distancia recorrida por el centroide del arco durante la rotación. Si ρ es la distancia del eje de rotación al centroide, entonces

$$S = 2\pi\rho L. \qquad (11)$$

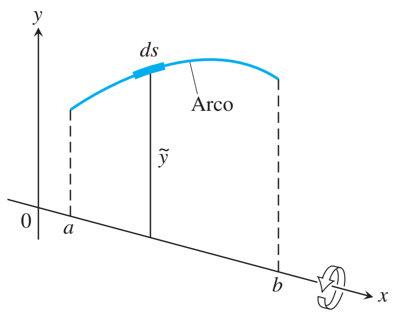


FIGURA 6.59 Figura para demostrar el teorema de Pappus para áreas de superficies. La diferencial de la longitud de arco ds está dada por la ecuación (6) de la sección 6.3.

La demostración que damos supone que podemos modelar el eje de rotación como el eje x y el arco como la gráfica de una función continuamente diferenciable de x.

Prueba Dibujamos el eje de rotación como el eje x con el arco extendiéndose desde $x = a$ a $x = b$ en el primer cuadrante (figura 6.59). El área de la superficie generada por el arco es

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y\, ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\, ds. \tag{12}$$

La coordenada y del centroide del arco es

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y}\, ds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y\, ds}{L}.$$

$L = \int ds$ es la longitud del arco y $\tilde{y} = y$.

Por lo que

$$\int_{x=a}^{x=b} y\, ds = \bar{y}L.$$

Al sustituir $\bar{y}L$ por la última integral en la ecuación (12) se obtiene $S = 2\pi\bar{y}L$. Con ρ igual a $\bar{y}$, tenemos $S = 2\pi\rho L$. ■

EJEMPLO 8 Utilice el teorema de Pappus para áreas con la finalidad de determinar el área de la superficie del toro del ejemplo 6.

Solución Con base en la figura 6.57, la superficie del toro es generada al hacer girar un círculo de radio a alrededor del eje z, y $b \geq a$ es la distancia desde el centroide al eje de rotación. La longitud de arco de la curva suave que genera la superficie de revolución es la circunferencia del círculo, así que $L = 2\pi a$. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (11), encontraremos que el área de la superficie del toro es

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba.$$ ■

Ejercicios 6.6

Placas delgadas con densidad constante

En los ejercicios 1 a 12, determine el centro de masa de una placa delgada con densidad constante δ que cubre la región dada.

1. La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.
2. La región acotada por la parábola $y = 25 - x^2$ y el eje x.
3. La región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y la recta $y = -x$.
4. La región encerrada por las parábolas $y = x^2 - 3$ y $y = -2x^2$.
5. La región acotada por el eje y y la curva $x = y - y^3$, $0 \leq y \leq 1$.
6. La región acotada por la parábola $x = y^2 - y$ y la recta $y = x$.
7. La región acotada por el eje x y la curva $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
8. La región entre el eje x y la curva $y = \sec^2 x$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.
9. La región acotada por las parábolas $y = 2x^2 - 4x$ y $y = 2x - x^2$.
10. **a.** La región del primer cuadrante cortada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.
    b. La región acotada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{9 - x^2}$

    Compare su respuesta del inciso (b) con la respuesta del inciso (a).
11. La región "triangular" en el primer cuadrante, comprendida entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y las rectas $x = 3$ y $y = 3$. (*Sugerencia:* Utilice geometría para determinar el área).
12. La región acotada arriba por la curva $y = 1/x^3$, abajo por la curva $y = -1/x^3$, y a la izquierda y derecha por las rectas $x = 1$ y $x = a > 1$. También determine $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$.

Placas delgadas con densidad variable

13. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región entre el eje x y la curva $y = 2/x^2$, $1 \leq x \leq 2$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = x^2$.
14. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada abajo por la parábola $y = x^2$ y arriba por la recta $y = x$, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 12x$.

15. La región acotada por las curvas $y = \pm 4/\sqrt{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido.

a. Determine el volumen del sólido.

b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = 1/x$,

c. Elabore un bosquejo de la placa y muestre el centro de masa en el dibujo.

16. La región entre la curva $y = 2/x$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.

a. Determine el volumen del sólido.

b. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región, si la densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x) = \sqrt{x}$.

c. Elabore un bosquejo de la placa e indique el centro de masa en el dibujo.

Centroides de triángulos

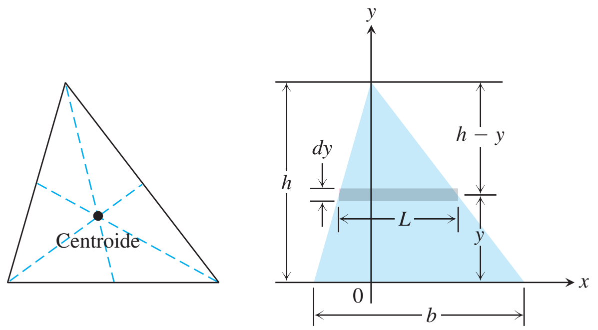
17. El centroide de un triángulo está en la intersección de las medianas del triángulo Recordará que el punto dentro del triángulo que está a un tercio de la distancia del punto medio de cada lado al vértice opuesto es el punto donde se intersecan las tres medianas del triángulo. Demuestre que el centroide está en la intersección de las medianas, indicando que también se encuentra a un tercio de la distancia de cada lado al vértice opuesto. Para hacerlo, realice los siguientes pasos.

i) Coloque un lado del triángulo en el eje x como en el inciso (b) de la siguiente figura. Exprese dm en términos de L y dy.

ii) Utilice triángulos semejantes para demostrar que $L = (b/h)(h - y)$. Sustituya esta expresión para L en su fórmula para dm.

iii) Demuestre que $\bar{y} = h/3$.

iv) Aplique el argumento a los otros lados.



(a) (b)

Utilice el resultado del ejercicio 17 para determinar los centroides del triángulo cuyos vértices aparecen en los ejercicios 18 a 22. Suponga que $a, b > 0$.

18. $(-1, 0), (1, 0), (0, 3)$

19. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

20. $(0, 0), (a, 0), (0, a)$

21. $(0, 0), (a, 0), (0, b)$

22. $(0, 0), (a, 0), (a/2, b)$

Alambres delgados

23. Densidad constante Determine el momento con respecto al eje x de un alambre de densidad constante que está a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

24. Densidad constante Determine el momento con respecto al eje x de un alambre de densidad constante que está a lo largo de la curva $y = x^3$, desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

25. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 4 es $\delta = k \operatorname{sen} \theta$ (k constante). Determine el centro de masa.

26. Densidad variable Suponga que la densidad del alambre del ejemplo 4 es $\delta = 1 + k|\cos \theta|$ (k constante). Determine el centro de masa.

Placas acotadas por dos curvas

En los ejercicios 27 a 30, determine el centroide de la placa delgada acotada por las gráficas de las funciones dadas. Utilice las ecuaciones (6) y (7) con $\delta = 1$ y $M =$ área de la región cubierta por la placa.

27. $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 6$

28. $g(x) = x^2(x + 1)$, $f(x) = 2$, y $x = 0$

29. $g(x) = x^2(x - 1)$ y $f(x) = x^2$

30. $g(x) = 0$, $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $x = 0$, y $x = 2\pi$

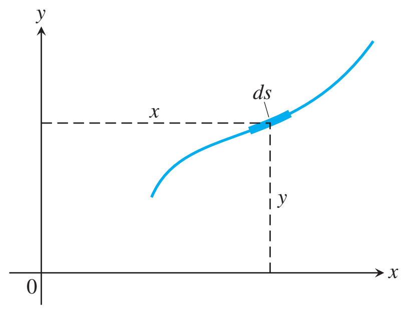
(*Sugerencia:* $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C$.)

Teoría y ejemplos

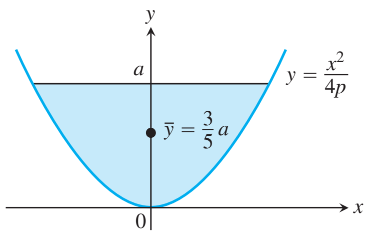
Verifique las afirmaciones y fórmulas en los ejercicios 31 y 32.

31. Las coordenadas del centroide de una curva plana diferenciable son

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\text{longitud}}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\text{longitud}}.$$



32. Sin importar el valor de $p > 0$ en la ecuación $y = x^2/(4p)$, la coordenada y del centroide del segmento parabólico que se muestra a continuación es $\bar{y} = (3/5)a$.



Los teoremas de Pappus

33. La región cuadrada con vértices (0, 2), (2, 0), (4, 2) y (2, 4) se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen y el área de la superficie del sólido.

34. Utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen generado al hacer girar alrededor de la recta $x = 5$ la región triangular acotada por los ejes coordenados y la recta $2x + y = 6$ (véase el ejercicio 17).

35. Determine el volumen del toro generado al hacer girar la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, alrededor del eje y.

36. Utilice el teorema de Pappus para determinar el área de la superficie lateral y el volumen de un cono circular recto.

37. Utilice el teorema de Pappus para el área de una superficie y el hecho de que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$ para determinar el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

38. Como determinó en el ejercicio 37, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ se encuentra en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie que se barre al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = a$.

39. El área de la región R acotada por la semielipse $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ y el eje x es $(1/2)\pi ab$, mientras el volumen del elipsoide generado al hacer girar R alrededor del eje x es $(4/3)\pi ab^2$. Determine el centroide de R. Observe que la ubicación es independiente de a.

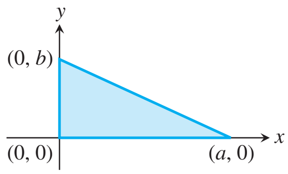
40. Como se determinó en el ejemplo 7, el centroide de la región encerrada por el eje x y la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 4a/3\pi)$. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar esta región alrededor de la recta $y = -a$.

41. La región del ejercicio 40 se hace girar alrededor de la recta $y = x - a$ para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

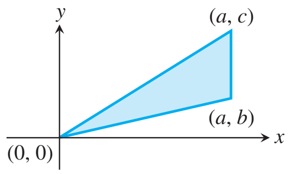
42. Como se determinó en el ejercicio 37, el centroide de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ está en el punto $(0, 2a/\pi)$. Determine el área de la superficie generada al hacer girar la semicircunferencia alrededor de la recta $y = x - a$.

En los ejercicios 43 y 44, utilice un teorema de Pappus para determinar el centroide del triángulo dado. Maneje el hecho de que el volumen de un cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

43.



44.



Capítulo 6 Preguntas de repaso

1. ¿Cómo define y calcula los volúmenes de sólidos por medio del método de las rebanadas? Dé un ejemplo.

2. ¿Cómo se deducen los métodos de los discos y de las arandelas para el cálculo de volúmenes a partir del método de las rebanadas? Dé ejemplos de cálculo de volúmenes por medio de tales métodos.

3. Describa el método de los cascarones cilíndricos. Dé un ejemplo.

4. ¿Cómo determina la longitud de la gráfica de una función suave en un intervalo cerrado? Dé un ejemplo. ¿Qué puede decir acerca de funciones que no tienen primeras derivadas continuas?

5. ¿Cómo define y calcula el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje x la gráfica de una función suave $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Dé un ejemplo.

6. ¿Cómo define y calcula el trabajo realizado por una fuerza variable dirigida a lo largo de una parte del eje x? ¿Cómo calcula el trabajo que se hace para bombear un líquido desde un tanque? Dé ejemplos.

7. ¿Cómo calcula la fuerza ejercida por un líquido contra una parte de una pared vertical? Dé un ejemplo.

8. ¿Qué es el centro de masa? ¿Qué es un centroide?

9. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una placa delgada y plana de material? Dé un ejemplo.

10. ¿Cómo se localiza el centro de masa de una placa delgada acotada por dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ sobre $a \le x \le b$?

Capítulo 6 Ejercicios de práctica

Volúmenes

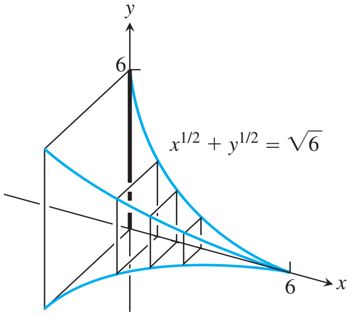
Determine los volúmenes de los sólidos en los ejercicios 1 a 16.

1. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van desde la parábola $y = x^2$ a la parábola $y = \sqrt{x}$.

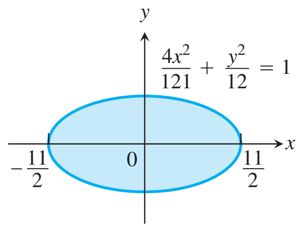
2. La base del sólido es la región en el primer cuadrante entre la recta $y = x$ y la parábola $y = 2\sqrt{x}$. Las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros cuyas bases se extienden de la recta a la curva.

3. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$. Las secciones transversales entres dichos planos son discos circulares cuyos diámetros van desde la curva $y = 2\cos x$ a la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$.

4. El sólido está entre los planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 6$. Las secciones transversales entre estos planos son cuadrados cuyas bases van del eje x hasta la curva $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$.



5. El sólido está entre planos perpendiculares al eje x en $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales del sólido perpendiculares al eje x entre estos planos son discos circulares cuyos diámetros van desde la curva $x^2 = 4y$ a la curva $y^2 = 4x$.
6. La base del sólido es la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 1$ en el plano xy. Cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero con un lado en el plano. (Todos los triángulos están en el mismo lado del plano).
7. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x, la curva $y = 3x^4$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 1$; **(d)** de la recta $y = 3$.
8. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región "triangular" acotada por la curva $y = 4/x^3$ y las rectas $x = 1$ y $y = 1/2$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 2$; **(d)** de la recta $y = 4$.
9. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2 + 1$ y a la derecha por la recta $x = 5$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 5$.
10. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** del eje y; **(c)** de la recta $x = 4$; **(d)** de la recta $y = 4$.
11. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región "triangular" acotada por el eje x, la recta $x = \pi/3$ y la curva $y = \tan x$ en el primer cuadrante alrededor del eje x.
12. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = 0$, $x = \pi$ y $y = 2$ alrededor de la recta $y = 2$.
13. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región entre el eje x y la curva $y = x^2 - 2x$ alrededor **(a)** del eje x; **(b)** de la recta $y = -1$; **(c)** de la recta $x = 2$; **(d)** de la recta $y = 2$.
14. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por $y = 2 \tan x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$. (La región está en el primero y tercer cuadrantes y se asemeja a una corbata de moño).
15. **Volumen de un sólido con un agujero redondo** Se hace un agujero redondo de radio $\sqrt{3}$ ft a través del centro de una esfera sólida de radio de 2 ft. Determine el volumen del material removido de la esfera.
16. **Volumen de un balón de fútbol americano** El perfil de un balón de fútbol americano asemeja la elipse que se ilustra a continuación. Determine el volumen del balón aproximado a la pulgada cúbica más cercana.



Longitud de curvas

Determine las longitudes de las curvas en los ejercicios 17 a 20.

17. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$
18. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$
19. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$
20. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

Áreas de superficies de revolución

En los ejercicios 21 a 24, determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje dado.

21. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \le x \le 3;$ eje x
22. $y = x^3/3, \quad 0 \le x \le 1;$ eje x
23. $x = \sqrt{4y - y^2}, \quad 1 \le y \le 2;$ eje y
24. $x = \sqrt{y}, \quad 2 \le y \le 6;$ eje y

Trabajo

25. **Elevación de un equipo** Una alpinista subirá su equipo de 100 N (aproximadamente 22.5 lb) que cuelga abajo de ella de una cuerda de 40 m que pesa 0.8 newtons por metro. ¿Cuánto trabajo realizará? (*Sugerencia:* Resuelva el asunto de la cuerda y del equipo por separado y luego sume los resultados).
26. **Tanque con gotera** Usted manejó un camión con un tanque de 800 galones de agua desde la base del monte Washington hasta la cima y descubre que llegó con el tanque hasta la mitad. Inició con el tanque lleno, subió a una velocidad constante y realizó el ascenso de 4750 ft en 50 minutos. Suponiendo que el agua se derramó a razón constante, ¿cuánto trabajo requirió para llevar el agua hasta la cima? No tome en cuenta el trabajo realizado para subirlo a usted y al camión. El agua pesa 8 lb/galón.
27. **Estiramiento de un resorte** Si se requiere una fuerza de 20 lb para mantener estirado un resorte a un ft de su longitud natural, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar el resorte a esta distancia? ¿Y a un pie más?
28. **Resorte de la puerta de una cochera** Una fuerza de 200 N estirará el resorte de la puerta de una cochera 0.8 m más que su longitud natural. ¿Cuánto estirará el resorte una fuerza de 300 N? ¿Cuánto trabajo requerirá estirar el resorte esta distancia de su longitud natural?
29. **Bombeo desde un depósito** Un depósito con forma de cono circular recto, que apunta hacia abajo y que mide 20 ft de diámetro en la parte superior y 8 ft de profundidad, está completamente lleno de agua. ¿Cuánto trabajo será necesario realizar para bombear el agua a un nivel de 6 ft por encima de la parte superior del depósito?
30. **Bombeo desde un depósito** (*Continuación del ejercicio 29.*) El depósito está lleno a una profundidad de 5 ft y el agua será bombeada al borde de la parte superior del depósito. ¿Cuánto trabajo se requerirá?
31. **Bombeo desde un tanque cónico** Un tanque en forma de cono circular recto, que apunta hacia abajo, con radio superior de 5 ft y una altura de 10 ft, está lleno con un líquido cuya densidad es 60 lb/ft^3. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear el líquido a un punto 2 ft arriba del tanque? Si la bomba tiene un motor de 275 lb-ft/seg (1/2 hp), ¿cuánto tardará la bomba en vaciar el tanque?

32. Bombeo de un tanque cilíndrico Un tanque de almacenamiento tiene la forma de un cilindro circular recto de 20 ft de largo y 8 ft de diámetro con su eje horizontal. Si el tanque está lleno hasta la mitad de aceite de oliva, que pesa 57 lb/ft^3, determine el trabajo realizado al vaciarlo a través de un tubo que va desde la parte inferior del tanque a una salida que se encuentra 6 ft por encima de la parte superior del tanque.

Centros de masa y centroides

33. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región encerrada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 3 - x^2$.

34. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región encerrada por el eje x, las rectas $x = 2$, $x = -2$ y la parábola $y = x^2$.

35. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje y, la parábola $y = x^2/4$ y la recta $y = 4$.

36. Determine el centroide de una placa plana delgada que cubre la región encerrada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$.

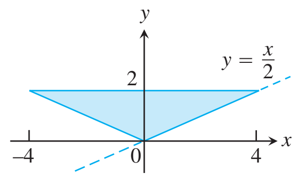
37. Determine el centro de masa de una placa plana delgada que cubre la región encerrada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 2y$, si la función de densidad es $\delta(y) = 1 + y$. (Utilice franjas horizontales).

38. a. Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 3/x^{3/2}$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 9$.

a. Determine el centro de masa de la placa si, en vez de tener densidad constante, la densidad es $\delta(x) = x$. (Utilice franjas verticales).

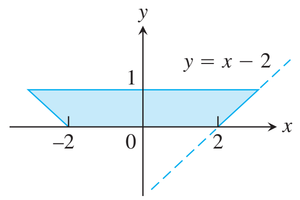
Fuerza de fluido

39. Abrevadero La placa triangular vertical que se representa a continuación es la placa de un extremo de un abrevadero completamente lleno de agua ($w = 62.4$). ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la placa?



UNIDADES EN FT

40. Abrevadero con miel maple La placa trapezoidal vertical que se muestra a continuación es el extremo final de un abrevadero lleno de miel de maple, que pesa 75 lb/ft^3. ¿Cuál es la fuerza ejercida por la miel contra la placa extrema del abrevadero cuando la miel tiene una profundidad de 10 in?



UNIDADES EN FT

41. Fuerza sobre una compuerta parabólica Una compuerta plana vertical en la cortina de una presa tiene la forma de una región parabólica comprendida entre la curva $y = 4x^2$ y la recta $y = 4$, con las medidas en ft. La parte superior de la compuerta está 5 ft por debajo de la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre la compuerta ($w = 62.4$).

T **42.** Usted planea almacenar mercurio ($w = 849$ lb/ft^3) en un tanque rectangular vertical con una base cuadrada de 1 ft por lado, cuya pared lateral interna puede soportar una fuerza total de 40,000 lb. Aproximadamente, ¿cuántos ft^3 de mercurio puede almacenar en el tanque en cualquier momento?

Capítulo 6 Ejercicios adicionales y avanzados

Volumen y longitud

1. Se genera un sólido haciendo girar alrededor del eje x la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x y la recta fija $x = a$, y la recta variable $x = b$, $b > a$. Su volumen, para toda b, es $b^2 - ab$. Determine $f(x)$.

2. Se genera un sólido haciendo girar alrededor del eje x la región acotada por la gráfica de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = a$. Su volumen, para toda $a > 0$, es $a^2 + a$. Determine $f(x)$.

3. Suponga que la función creciente $f(x)$ es suave para $x \geq 0$ y que $f(0) = a$. Denote con $s(x)$ la longitud de la gráfica de f desde $(0, a)$ hasta $(x, f(x))$, $x > 0$. Determine $f(x)$, si $s(x) = Cx$, para alguna constante C. ¿Cuáles valores son permisibles para C?

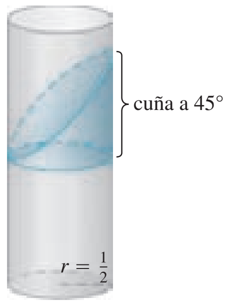
4. a. Demuestre que para $0 < \alpha \leq \pi/2$,

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

b. Generalice el resultado del inciso a).

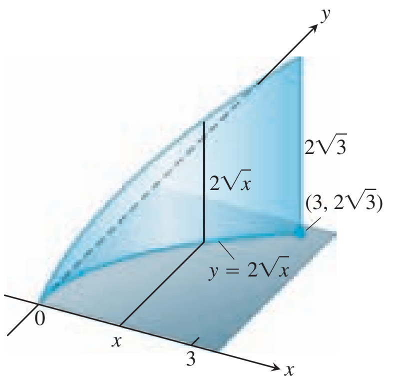
5. Determine el volumen del sólido que se forma al hacer girar alrededor de la recta $y = x$ la región acotada por las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$.

6. Considere un cilindro circular recto de diámetro 1. Construya una cuña haciendo un corte paralelo a la base del cilindro y otro corte en un ángulo de 45° con respecto al primero que lo interseque en el lado opuesto del cilindro (véase el siguiente diagrama). Determine el volumen de la cuña.

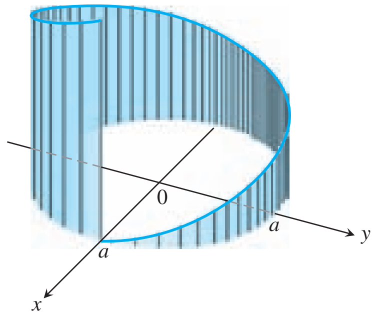


Área de superficie

7. En los puntos de la curva $y = 2\sqrt{x}$, se trazan segmentos de longitud $h = y$, que son perpendiculares al plano xy. (Véase la siguiente figura). Determine el área de la superficie formada por estas perpendiculares desde (0, 0) hasta $(3, 2\sqrt{3})$.



8. En los puntos de la circunferencia de radio a se trazan segmentos perpendiculares al plano de la circunferencia; la perpendicular en cada punto P tiene una longitud ks, donde s es la longitud del arco de la circunferencia medido contra el movimiento de las manecillas del reloj desde $(a, 0)$ a P y k es una constante positiva, como se muestra a continuación. Determine el área de la superficie formada por las perpendiculares a lo largo del arco que empieza en $(a, 0)$ y se extiende una vez alrededor de la circunferencia.



Trabajo

9. Una partícula de masa m parte del reposo en el instante $t = 0$ y se desplaza a lo largo del eje x con aceleración constante a desde $x = 0$ hasta $x = h$ contra una fuerza variable de magnitud $F(t) = t^2$. Determine el trabajo realizado.

10. **Trabajo y energía cinética** Suponga que una pelota de golf de 1.6 onzas se coloca en un resorte vertical con constante $k = 2$ lb/in. El resorte se comprime 6 in y después se suelta. ¿Qué altura alcanza la pelota (medida desde la posición de reposo del resorte)?

Centros de masa

11. Determine el centroide de la región acotada abajo por el eje x y arriba por la curva $y = 1 - x^n$; n es un entero positivo par. ¿Cuál es la posición límite del centroide cuando $n \to \infty$?

12. Usted transporta un poste telefónico en un remolque de dos ruedas detrás de un camión y quiere que las ruedas estén 3 ft, aproximadamente, detrás del centro de masa del poste para tener una distribución adecuada del peso. Los postes de madera de 40 ft, utilizados por Verizon, tienen una circunferencia en la parte superior de 27 ft y una circunferencia de 43.5 in en la base. ¿Aproximadamente a qué distancia de la parte superior se encuentra el centro de masa?

13. Suponga que una placa delgada de metal de área A y densidad constante δ ocupa una región R en el plano xy. Sea M_y el momento de la placa con respecto al eje y. Demuestre que el momento de la placa con respecto a la recta $x = b$ es

    a. $M_y - b\delta A$, si la placa está a la derecha de la recta y

    b. $b\delta A - M_y$ si la placa está a la izquierda de la recta.

14. Determine el centro de masa de una placa delgada que cubre la región acotada por la curva $y^2 = 4ax$ y la recta $x = a$, siendo a una constante positiva, si la densidad en (x, y) es directamente proporcional a **(a)** x, **(b)** $|y|$.

15. **a.** Determine el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por dos circunferencias concéntricas y los ejes coordenados, si las circunferencias tienen radios a y b, $0 < a < b$, y sus centros están en el origen.

    b. Determine los límites de las coordenadas del centroide cuando a se aproxima a b y analice el significado del resultado.

16. Una esquina triangular se corta a partir de un cuadrado de 1 ft por lado. El área del triángulo que se removió es de 36 in^2. Si el centroide de la región restante está a 7 in de un lado del cuadrado original, ¿a qué distancia está de los otros lados?

Fuerza en fluidos

17. Una placa triangular ABC se sumerge en agua con su plano vertical. El lado AB, con longitud de 4 ft, está 6 ft por debajo de la superficie del agua, mientras que el vértice C está 2 ft debajo de la superficie. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre un lado de la placa.

18. Una placa rectangular vertical se sumerge en un fluido, con su lado superior paralelo a la superficie del fluido. Demuestre que la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la placa es igual al valor promedio de la presión arriba y abajo de la placa, multiplicado por el área de la placa.

Capítulo 6 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Uso de sumas de Riemann para estimar áreas, volúmenes y longitudes de curvas

Visualice y aproxime áreas y volúmenes en la **Parte I** y la **Parte II**: Volúmenes de revolución; y **Parte III**: Longitudes de curvas.

Modelado de la cuerda para un bungee

Recolecte datos (o utilice datos previamente recolectados) para construir y afinar un modelo para la fuerza ejercida por la cuerda del saltador de un bungee. Utilice el teorema de trabajo-energía para calcular la distancia que cae un saltador y la longitud dada de una cuerda de bungee.

7

FUNCIONES TRASCENDENTES

INTRODUCCIÓN Las funciones pueden clasificarse en dos grandes grupos complementarios denominados *funciones algebraicas* y *funciones trascendentes* (véase la sección 1.1). Excepto por las funciones trigonométricas, hasta ahora nuestro estudio se ha concentrado en las funciones algebraicas. En este capítulo estudiaremos el cálculo de importantes funciones trascendentes, que incluyen las funciones logarítmicas, las exponenciales, las trigonométricas inversas y las hiperbólicas. Éstas aparecen con frecuencia en muchos escenarios matemáticos y en aplicaciones científicas.

7.1 Funciones inversas y sus derivadas

Una función que deshace, o invierte, el efecto de una función f se denomina *inversa* de f. Muchas funciones comunes, aunque no todas, están aparejadas con una inversa. Con frecuencia, importantes funciones inversas aparecen en diversas aplicaciones. Las funciones inversas también desempeñan un papel importante en el desarrollo y las propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales, como veremos en la sección 7.3.

Funciones inyectivas (uno a uno)

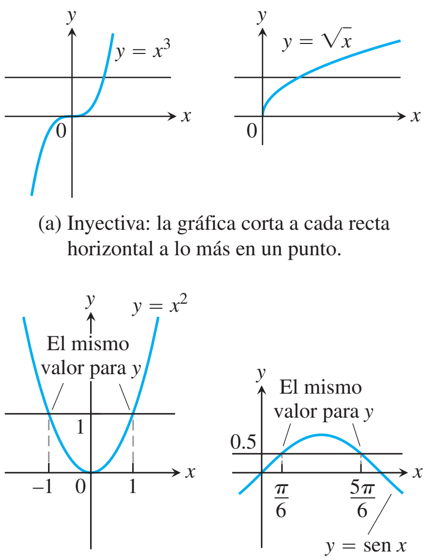
Una función es una regla que asigna un valor, dentro de su rango, a cada uno de los puntos de su dominio. Algunas funciones asignan el mismo valor del rango a más de un elemento del dominio. La función $f(x) = x^2$ asigna el mismo valor, 1, a ambos números -1 y $+1$; tanto el seno de $\pi/3$ como el de $2\pi/3$ tienen el valor $\sqrt{3}/2$. Otras funciones asumen cada valor en su rango no más de una vez. La raíz cuadrada y el cubo de números diferentes son siempre diferentes. Una función con valores distintos en elementos distintos en su dominio se denomina inyectiva (o uno a uno). Estas funciones toman exactamente una vez cada valor de su rango.

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es **inyectiva** en el dominio D si $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$ en D.

EJEMPLO 1 Algunas funciones son inyectivas en todo su dominio natural. Otras funciones no son inyectivas en todo su dominio, pero al restringir la función a un dominio más pequeño, es posible crear una función que sea inyectiva. Las funciones, la original y la restringida, no son la misma función, pues sus dominios son diferentes. Sin embargo, las dos funciones tienen los mismos valores en el dominio pequeño, así que la función original es una extensión de la función restringida de su dominio menor al dominio más grande.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en cualquier dominio de números no negativos porque $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ siempre que $x_1 \neq x_2$.

(b) $g(x) = \operatorname{sen} x$ *no* es inyectiva en el intervalo $[0, \pi]$, porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \operatorname{sen}(5\pi/6)$. De hecho, para cada elemento x_1 en el subintervalo $[0, \pi/2)$, existe un elemento correspondiente x_2 en el subintervalo $(\pi/2, \pi]$ que satisface $\operatorname{sen} x_1 = \operatorname{sen} x_2$, así que a elementos distintos



(a) Inyectiva: la gráfica corta a cada recta horizontal a lo más en un punto.

(b) No es inyectiva: la gráfica corta a una o más rectas horizontales más de una vez.

FIGURA 7.1 (a) $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$ y $[0, \infty)$. (b) $y = x^2$ y $y = \operatorname{sen} x$ no son inyectivas en sus dominios $(-\infty, \infty)$.

en el dominio se les asigna el mismo valor en el rango. Sin embargo, la función seno es inyectiva en $[0, \pi/2]$, ya que el seno es una función estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$, lo que da salidas distintas para entradas distintas. ■

La gráfica de una función inyectiva $y = f(x)$ puede intersecar a lo más una vez a una recta horizontal dada. Si la cruza más de una vez, toma el mismo valor de y para al menos dos valores diferentes de x; por lo tanto, no es inyectiva (figura 7.1).

Prueba de la recta horizontal para funciones inyectivas
Una función $y = f(x)$ es inyectiva si y sólo si su gráfica interseca cada recta horizontal a lo más una vez.

Funciones inversas

Como cada resultado de una función inyectiva proviene sólo de una entrada, invertimos el efecto de la función para enviar una salida de regreso a la entrada de donde provino.

DEFINICIÓN Suponga que f es una función inyectiva en un dominio D con rango R. La **función inversa** f^{-1} se define como

$$f^{-1}(b) = a \text{ si } f(a) = b.$$

El dominio de f^{-1} es R y el rango de f^{-1} es D.

El símbolo f^{-1} para la inversa de f se lee "inversa de f". El "-1" de f^{-1} *no* es un exponente: $f^{-1}(x)$ no significa $1/f(x)$. Observe que los dominios y rangos de f y f^{-1} se intercambian.

EJEMPLO 2 Suponga que se da una función inyectiva, $y = f(x)$, por medio de una tabla de valores

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5

De esta forma, una tabla para los valores de $x = f^{-1}(x)$ se puede obtener con sólo intercambiar los valores en las columnas de la tabla para f:

y	3	4.5	7	10.5	15	20.5	27	34.5
$f^{-1}(y)$	1	2	3	4	5	6	7	8

■

Si aplicamos f para enviar una entrada x a la salida $f(x)$ y en seguida aplicamos f^{-1} a $f(x)$, obtenemos nuevamente x, justo donde iniciamos. De manera análoga, si tomamos algún número y en el rango de f, le aplicamos f^{-1} y luego aplicamos f al valor resultante $f^{-1}(y)$, obtenemos una vez más el valor y con el que iniciamos. Componer una función y su inversa anula cualquier trabajo.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

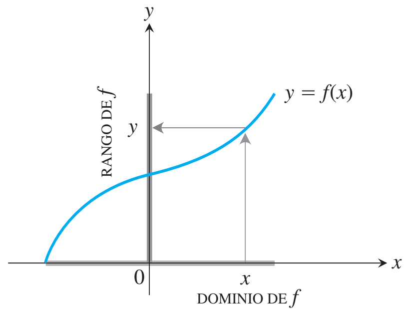
$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \qquad \text{para toda } y \text{ en el dominio de } f^{-1} \text{ (o rango de } f)$$

Sólo una función que sea inyectiva puede tener una inversa. La razón es que si $f(x_1) = y$ y $f(x^2) = y$ para dos entradas distintas x_1 y x_2, entonces no existe forma de asignar un valor a $f^{-1}(y)$ que satisfaga al mismo tiempo $f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ y $f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.

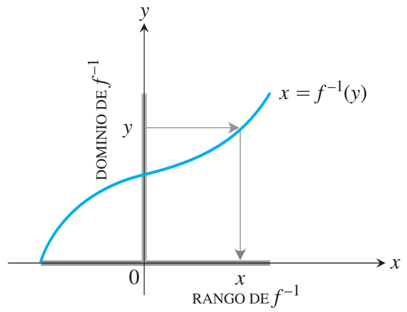
Una función que es creciente en un intervalo, de manera que satisface la desigualdad $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$, es inyectiva y tiene una inversa. Las funciones decrecientes también tienen una inversa. Las funciones que no son crecientes ni decrecientes aún pueden ser inyectivas y tener una inversa, como la función $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, definida en $(-\infty, \infty)$ que pasa la prueba de la recta horizontal.

Determinación de la función inversa

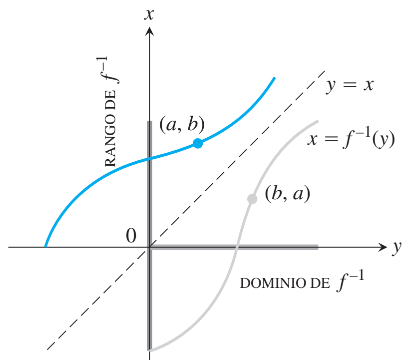
Las gráficas de una función y su inversa están relacionadas de manera muy estrecha. Para leer con base en su gráfica el valor de una función, iniciamos con un punto x en el eje x, vamos verticalmente hasta la gráfica y luego nos movemos horizontalmente al eje y para leer el valor de y. La función inversa puede leerse a partir de la gráfica si se revierte dicho proceso. Iniciamos con un punto y en el eje y, vamos horizontalmente a la gráfica de $y = f(x)$ y luego nos movemos de forma vertical al eje x para leer el valor de $x = f^{-1}(y)$ (figura 7.2).



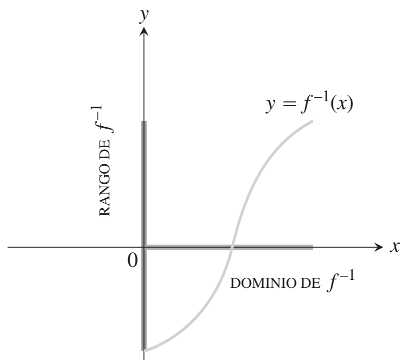
(a) Para determinar el valor de f en x, iniciamos en x, subimos a la curva y luego nos dirigimos al eje y.



(b) La gráfica de f^{-1} es la gráfica de f, pero con x y y intercambiadas. Para determinar x dada y, iniciamos en y y vamos hacia la curva, luego bajamos al eje x. El dominio de f^{-1} es el rango de f. El rango de f^{-1} es el dominio de f.



(c) Para dibujar la gráfica de f^{-1} de la manera más usual, reflejamos el sistema con respecto a la recta $y = x$.



(d) Después intercambiamos las letras x y y. Ahora tenemos una vista normal de la gráfica de f^{-1} como una función de x.

FIGURA 7.2 Determinación de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$.

Queremos establecer la gráfica de f^{-1} de manera que sus valores de entrada estén en el eje x, como se hace comúnmente para las funciones, en vez de ubicarlos en el eje y. Para realizar esto, intercambiamos los ejes x y y para reflejar, con respecto a la recta de 45°, $y = x$. Después de esta reflexión, tenemos una nueva gráfica que representa f^{-1}. El valor de $f^{-1}(x)$ ahora puede leerse de la gráfica de la manera usual, pero hay que iniciar con un punto x en el eje x, que recorre en sentido vertical la gráfica y luego de forma horizontal hacia el eje y para obtener el valor de $f^{-1}(x)$. La figura 7.2 indica la relación entre las gráficas de f y f^{-1}. Las gráficas se intercambian por medio de la reflexión con respecto a la recta $y = x$. Aunque este enfoque geométrico no es una demostración, vuelve razonable el hecho de que la inversa de una función continua e inyectiva definida en un intervalo también es continua.

El proceso de pasar de f a f^{-1} puede resumirse como un proceso de dos pasos.

1. Despeje x de la ecuación $y = f(x)$. Lo anterior proporciona una fórmula $x = f^{-1}(y)$, donde x está expresada como una función de y.
2. Intercambie x y y para obtener una fórmula $y = f^{-1}(x)$, donde f^{-1} se expresa en el formato convencional con x como la variable independiente y y como la variable dependiente.

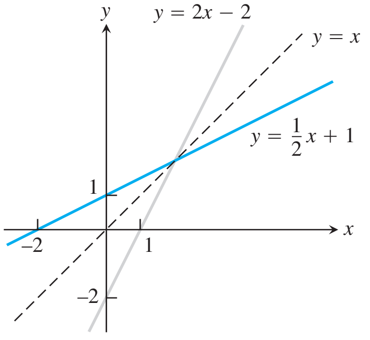


FIGURA 7.3 Al graficar juntas $f(x) = (1/2)x + 1$ y $f^{-1}(x) = 2x - 2$ se muestra la simetría de las gráficas con respecto a la recta $y = x$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Determine la inversa de $y = \frac{1}{2}x + 1$ expresada como función de x.

Solución

1. *Despeje a x en términos de y*:
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$
$$2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2.$$
2. *Intercambie x y y*: $y = 2x - 2$.

La inversa de la función $f(x) = (1/2)x + 1$ es la función $f^{-1}(x) = 2x - 2$. (Véase la figura 7.3). Para comprobarlo, veremos si las dos composiciones producen la función identidad:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

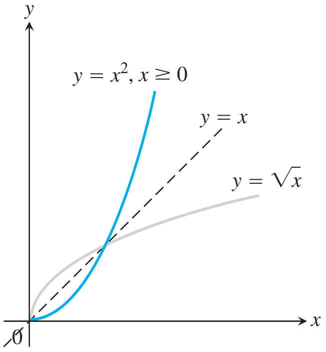


FIGURA 7.4 Las funciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2, x \geq 0$, son inversas una de la otra (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Determine la inversa de la función $y = x^2, x \geq 0$, expresada como una función de x.

Solución Primero despejamos a x en términos de y:

$$y = x^2$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad |x| = x \text{ ya que } x \geq 0$$

Luego intercambiamos x y y, para obtener

$$y = \sqrt{x}.$$

La inversa de la función $y = x^2, x \geq 0$ es la función $y = \sqrt{x}$ (figura 7.4).

Observe que la función $y = x^2$, $x \geq 0$, con dominio *restringido* a los números reales no negativos, es inyectiva (figura 7.4) y tiene una inversa. Por otra parte, la función $y = x^2$ con dominio no restringido, *no* es inyectiva (figura 7.1b); por lo tanto, no tiene inversa.

Derivadas de inversas de funciones derivables

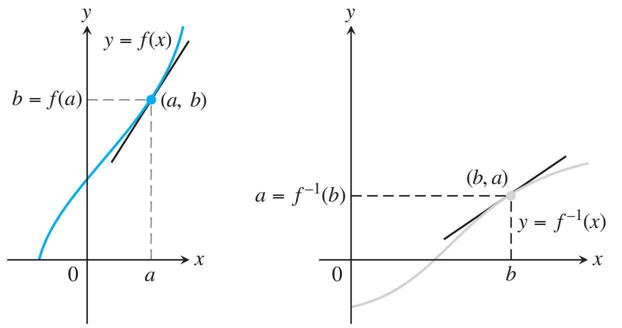
Si calculamos las derivadas de $f(x) = (1/2)x + 1$ y su inversa $f^{-1}(x) = 2x - 2$, del ejemplo 3, veremos que

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2.$$

Las derivadas son recíprocas mutuamente, por lo que la pendiente de una recta es el recíproco de la pendiente de su recta inversa. (Véase la figura 7.3).

Éste no es un caso especial. Siempre que cualquier recta no horizontal o no vertical se refleja con respecto a la recta $y = x$, se invierte su pendiente. Si la recta original tiene pendiente $m \neq 0$, la recta reflejada tendrá pendiente $1/m$.



Las pendientes son recíprocas: $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ o $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

FIGURA 7.5 Las gráficas de funciones inversas tienen pendientes recíprocas en puntos correspondientes.

La relación recíproca entre las pendientes de f y f^{-1} también es válida en el caso de otras funciones, pero debemos tener cuidado de comparar pendientes en puntos correspondientes. Si la pendiente de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$ y $f'(a) \neq 0$, entonces la pendiente de $y = f^{-1}(x)$ en el punto correspondiente $(f(a), a)$ es el recíproco $1/f'(a)$ (figura 7.5). Entonces, si establecemos que $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $y = f(x)$ tiene una recta tangente horizontal en $(a, f(a))$, entonces la función inversa f^{-1} tiene una recta tangente vertical en $(f(a), a)$, pendiente infinita que implica que f^{-1} no es derivable en $f(a)$. El teorema 1 indica las condiciones en las cuales f^{-1} es derivable en su dominio, que es el mismo que el rango de f.

TEOREMA 1: Regla de la derivada para inversas Si f tiene un intervalo I como dominio, y $f'(x)$ existe y nunca es cero en I, entonces f^{-1} es derivable en cada punto de su dominio (el rango de f). El valor de $(f^{-1})'$ en un punto b en el dominio de f^{-1} es el recíproco del valor de f' en el punto $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \tag{1}$$

o

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

El teorema 1 hace dos afirmaciones. La primera de éstas tiene que ver con las condiciones en las cuales f^{-1} es derivable; la segunda afirmación es una fórmula para la derivada de f^{-1}, cuando ésta existe. Aunque omitimos la demostración de la primera afirmación, la segunda se demuestra de la siguiente forma:

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{Relación de la función inversa}$$

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = 1 \qquad \text{Derivando ambos lados}$$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \qquad \text{Despejando la derivada.}$$

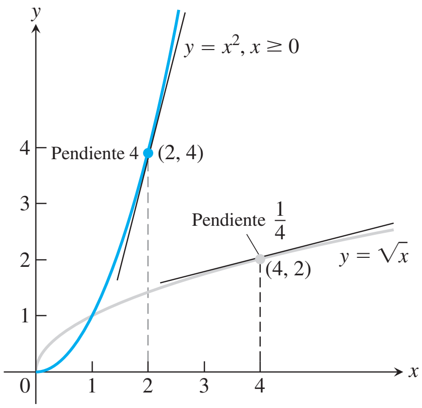


FIGURA 7.6 La derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4, 2) es el recíproco de la derivada de $f(x) = x^2$ en (2, 4) (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, y su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ tienen derivadas $f'(x) = 2x$ y $(f^{-1})'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Verificamos que el teorema 1 proporciona la misma fórmula para la derivada de $f^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{2(f^{-1}(x))} && f'(x) = 2x \text{ con } x \text{ remplazada por } f^{-1}(x)\\ &= \frac{1}{2(\sqrt{x})}.\end{aligned}$$

El teorema 1 proporciona una derivada que coincide con nuestros cálculos usando la regla conocida para la derivada de la función raíz cuadrada.

Examinemos el teorema 1 en un punto específico. Tomamos $x = 2$ (el número a) y $f(2) = 4$ (el valor b). El teorema 1 indica que la derivada de f en 2, $f'(2) = 4$ y la derivada de f^{-1} en $f(2)$, $(f^{-1})'(4)$, son recíprocos. Esto establece que

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \frac{1}{f'(2)} = \left.\frac{1}{2x}\right|_{x=2} = \frac{1}{4}.$$

Véase la figura 7.6. ■

A lo largo de este capítulo, utilizaremos el procedimiento ilustrado en el ejemplo 5 para calcular fórmulas para las derivadas de muchas funciones inversas. En ocasiones, la ecuación (1) nos permite determinar valores específicos de df^{-1}/dx sin conocer la fórmula para f^{-1}.

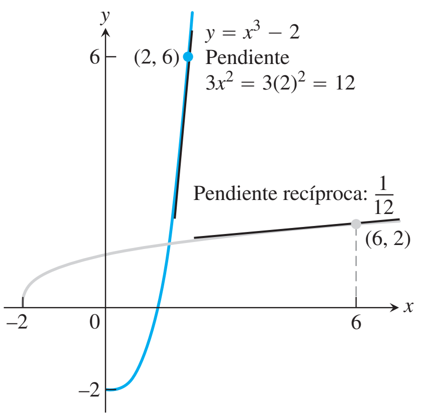


FIGURA 7.7 La derivada de $f(x) = x^3 - 2$ en $x = 2$, nos da la derivada de f^{-1} en $x = 6$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Sea $f(x) = x^3 - 2$. Halle el valor de df^{-1}/dx en $x = 6 = f(2)$ sin encontrar la fórmula de $f^{-1}(x)$.

Solución Aplicamos el teorema 1 para obtener el valor de la derivada de f^{-1} en $x = 6$:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=2}} = \frac{1}{12} \qquad \text{Ecuación (1)}$$

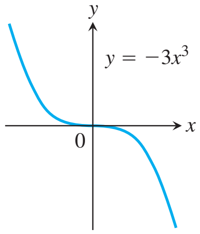
Véase la figura 7.7. ■

Ejercicios 7.1

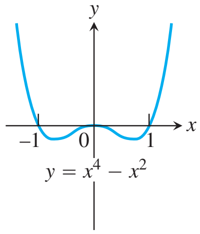
Identificación gráfica de funciones inyectivas

¿Cuál de las funciones, cuyas gráficas se muestran en los ejercicios 1 a 6, son inyectivas y cuáles no?

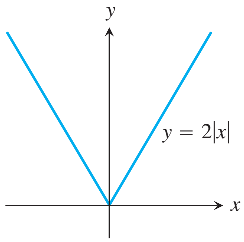
1.



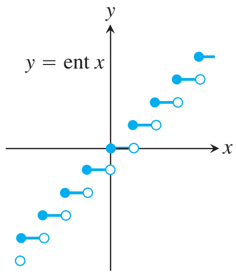
2.



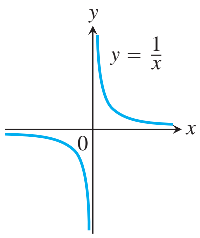
3.



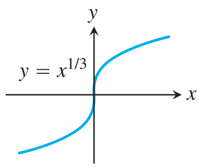
4.



5.



6.



En los ejercicios 7 a 10, con base en su gráfica, determine si la función es inyectiva.

7. $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3, & x \geq 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x \leq -3 \\ x + 4, & x > -3 \end{cases}$

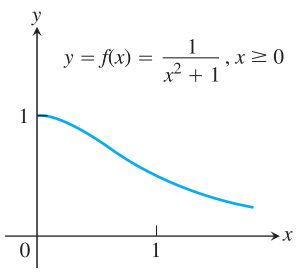
9. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x+2}, & x > 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

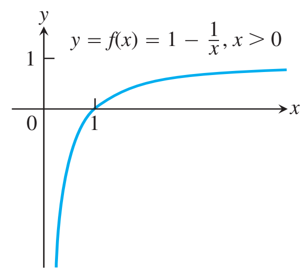
Gráficas de funciones inversas

En los ejercicios 11 a 16 se presenta la gráfica de una función $y = f(x)$. Copie la gráfica y dibuje la recta $y = x$. Luego, utilice la simetría con respecto a la recta $y = x$ para agregar la gráfica de f^{-1}. (No es necesario hallar la fórmula de f^{-1}). Identifique el dominio y el rango de f^{-1}.

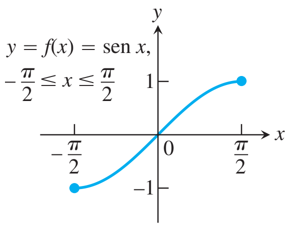
11.



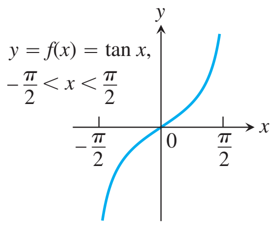
12.



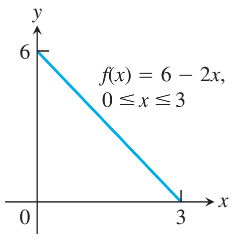
13.



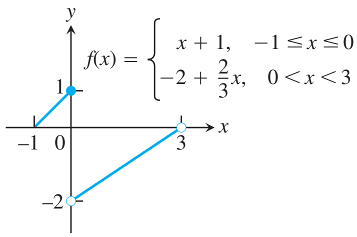
14.



15.



16.



17. **a.** Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. ¿Qué simetría tiene la gráfica?

b. Muestre que f es su propia inversa. (Recuerde que $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$.)

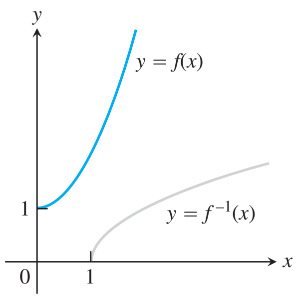
18. **a.** Trace la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. ¿Qué simetría tiene?

b. Muestre que f es su propia inversa.

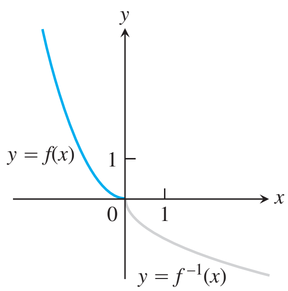
Fórmulas para funciones inversas

En cada uno de los ejercicios 19 a 24 se presenta una fórmula de una función $y = f(x)$ y se muestran gráficas de f y f^{-1}. En cada caso, determine una fórmula para f^{-1}.

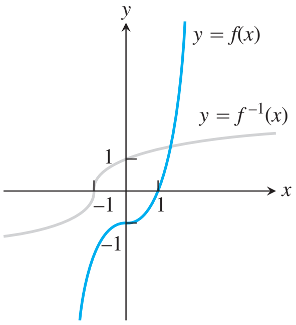
19. $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$



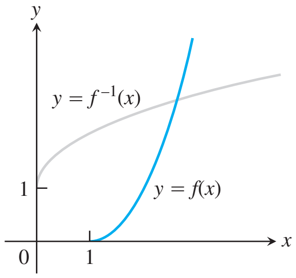
20. $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$



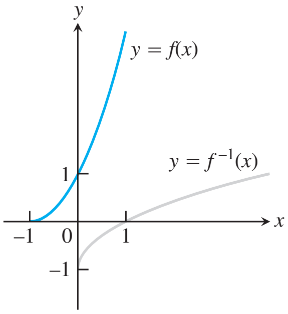
21. $f(x) = x^3 - 1$



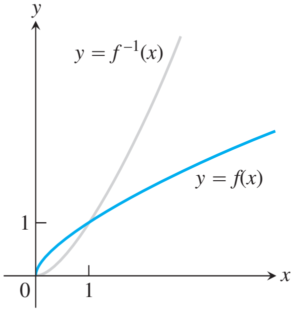
22. $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$



23. $f(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1$



24. $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$



Derivadas para funciones inversas

En los ejercicios 25 a 34 se presenta una fórmula de una función $y = f(x)$. En cada caso, determine $f^{-1}(x)$ e identifique el dominio y el rango de f^{-1}. Para comprobar, demuestre que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

25. $f(x) = x^5$

26. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

27. $f(x) = x^3 + 1$

28. $f(x) = (1/2)x - 7/2$

29. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = 1/x^3, \quad x \neq 0$

31. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

33. $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \leq 1$
(*Sugerencia:* Complete el cuadrado).

34. $f(x) = (2x^3 + 1)^{1/5}$

En los ejercicios 35 a 38:

a. Determine $f^{-1}(x)$.

b. Trace juntas las gráficas de f y f^{-1}.

c. Evalúe df/dx en $x = a$, df^{-1}/dx en $x = f(a)$, para mostrar que en esos puntos $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

35. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

36. $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$

37. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$

38. $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

39. a. Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$ son inversas.

b. Trace las gráficas de f y g sobre un intervalo en el eje x lo suficientemente grande para mostrar que se intersecan en (1, 1) y $(-1, -1)$. Asegúrese de que el dibujo muestre la simetría requerida con respecto a la recta $y = x$.

c. Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de f y g en (1, 1) y $(-1, -1)$ (cuatro tangentes en total).

d. ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

40. a. Demuestre que $h(x) = x^3/4$ y $k(x) = (4x)^{1/3}$ son inversas.

b. Trace las gráficas de h y k sobre un intervalo en el eje x lo suficientemente grande para mostrar que se intersecan en (2, 2) y $(-2, -2)$. Asegúrese de que el dibujo muestre la simetría requerida con respecto a la recta $y = x$.

c. Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de h y k en (2, 2) y $(-2, -2)$.

d. ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?

41. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, x \geq 2$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = -1 = f(3)$.

42. Sea $f(x) = x^2 - 4x - 5, x > 2$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $x = 0 = f(5)$.

43. Suponga que la función derivable $y = f(x)$ tiene inversa y que la gráfica de f pasa por el punto (2, 4), donde tiene pendiente igual a $1/3$. Determine el valor de df^{-1}/dx en $x = 4$.

44. Suponga que la función derivable $y = g(x)$ tiene inversa y que la gráfica de g pasa por el origen con pendiente 2. Determine la pendiente de la gráfica de g^{-1} en el origen.

Inversas de rectas

45. a. Determine la inversa de la función $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero.

b. ¿Qué conclusión obtiene a partir de la inversa de $y = f(x)$ cuya gráfica es una recta que cruza el origen con pendiente m diferente de cero?

46. Demuestre que la gráfica de la inversa de $f(x) = mx + b$, con m y b constantes y $m \neq 0$, es una recta con pendiente $1/m$, y ordenada al origen $-b/m$.

47. a. Determine la inversa de $f(x) = x + 1$. Trace juntas las gráficas de f y su inversa. Agregue la recta $y = x$ con guiones o puntos para que destaque.

b. Determine la inversa de $f(x) = x + b$ (b constante). ¿Cómo es la gráfica de f^{-1} en relación con la de f?

c. ¿Que concluye sobre las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas paralelas a la recta $y = x$?

48. a. Determine la inversa de $f(x) = -x + 1$. Trace juntas las gráficas de las rectas $y = -x + 1$ y $y = x$. ¿Qué ángulo forman?

b. Determine la inversa de $f(x) = -x + b$ (b constante). ¿Qué ángulo forman las rectas $y = -x + b$ y $y = x$?

c. ¿Qué concluye sobre las inversas de funciones cuyas gráficas son rectas perpendiculares a la recta $y = x$?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

49. Demuestre que tanto las funciones crecientes como las decrecientes son inyectivas. Es decir, para cualquiera x_1 y x_2 de I, $x_2 \neq x_1$ implica que $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Utilice los resultados del ejercicio 49 para mostrar que las funciones de los ejercicios 50 a 54 tienen inversas en sus dominios. Determine una fórmula para df^{-1}/dx con el teorema 1.

50. $f(x) = (1/3)x + (5/6)$

51. $f(x) = 27x^3$

52. $f(x) = 1 - 8x^3$

53. $f(x) = (1 - x)^3$

54. $f(x) = x^{5/3}$

Teoría y aplicaciones

55. Si $f(x)$ es inyectiva, ¿qué puede decir de $g(x) = -f(x)$? ¿También es inyectiva? Justifique su respuesta.

56. Si $f(x)$ es inyectiva y $f(x)$ nunca es 0, ¿qué puede decir de $h(x) = 1/f(x)$? ¿También es inyectiva? Justifique su respuesta.

57. Suponga que el rango de g está en el dominio de f, por lo cual la composición $f \circ g$ está definida. Si f y g son inyectivas, ¿qué puede decir de $f \circ g$? Justifique su respuesta.

58. Si una composición $f \circ g$ es inyectiva, ¿también g debe serlo? Justifique su respuesta.

59. Suponga que f y g son funciones derivables e inversas entre sí, de manera que $(g \circ f)(x) = x$. Derive ambos lados de la ecuación con respecto a x, con la regla de la cadena, para expresar $(g \circ f)'(x)$ como un producto de derivadas de g y f. ¿Qué encontró? (Ésta no es una demostración del teorema 1, porque aquí hemos supuesto la conclusión del teorema, es decir, que $g = f^{-1}$ es derivable).

60. Equivalencia de los métodos de las arandelas y los cascarones para calcular volúmenes Sea f derivable y creciente en el intervalo $a \le x \le b$, con $a > 0$, y suponga que f tiene inversa derivable, f^{-1}. Haga girar alrededor del eje y la región acotada por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $y = f(b)$, para generar un sólido. Entonces, los valores de las integrales obtenidas por los métodos de las arandelas y los cascarones para calcular el volumen tienen valores idénticos:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,dx.$$

Para demostrar esta igualdad, defina

$$W(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi((f^{-1}(y))^2 - a^2)\,dy$$

$$S(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,dx.$$

Ahora demuestre que las funciones W y S coinciden en un punto de $[a, b]$ y tienen derivadas idénticas en $[a, b]$. Como vio en el ejercicio 90 de la sección 4.7, esto garantiza que $W(t) = S(t)$ para toda t en $[a, b]$. En particular, $W(b) = S(b)$. (*Fuente:* "Disks and Shells Revisited", por Walter Carlip, *American Mathematical Monthly*, vol. 98, núm. 2, febrero de 1991, pp. 154-156).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 61 a 68 explorará algunas funciones y sus inversas, junto con sus derivadas y funciones lineales de aproximación en puntos específicos. Realice los siguientes pasos con el manejo de su SAC:

a. Trace la función $y = f(x)$ junto con su derivada en el intervalo dado. Explique por qué sabe que f es una función inyectiva en el intervalo.

b. Despeje a x de la ecuación $y = f(x)$ como una función de y, luego llame a la función inversa resultante g.

c. Determine la ecuación para la recta tangente a f en el punto específico $(x_0, f(x_0))$.

d. Determine la ecuación para la recta tangente a f en el punto $(f(x_0), x_0)$, que está ubicado simétricamente con respecto a la recta de 45° $y = x$ (que es la gráfica de la función identidad). Utilice el teorema 1 para hallar la pendiente de dicha recta tangente.

e. Trace las funciones f y g, la identidad, las dos rectas tangentes y el segmento de recta que une a los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(f(x_0), x_0)$. Analice las simetrías que vea con respecto a la diagonal principal.

61. $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

62. $y = \frac{3x + 2}{2x - 11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = 1/2$

63. $y = \frac{4x}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

64. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

65. $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

66. $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

67. $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

68. $y = \operatorname{sen} x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

En los ejercicios 69 y 70, repita los pasos anteriores para las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ definidas de manera implícita por medio de las ecuaciones dadas en el intervalo.

69. $y^{1/3} - 1 = (x + 2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -3/2$

70. $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = 1/2$

7.2 Logaritmos naturales

Históricamente los logaritmos desempeñaron un papel importante en cálculos aritméticos, lo cual hizo posible los grandes avances del siglo XVII en la navegación en alta mar y la mecánica celeste. En esta sección definiremos el logaritmo natural como una integral, empleando el teorema fundamental del cálculo. Aunque tal vez este enfoque indirecto le parezca extraño a primera vista, ofrece una manera elegante y rigurosa de obtener las características claves de las funciones logarítmicas y exponenciales.

Definición de la función logaritmo natural

El logaritmo natural de un número positivo x, escrito como $\ln x$, es el valor de una integral.

DEFINICIÓN El **logaritmo natural** es la función dada por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0. \tag{1}$$

A partir del teorema fundamental del cálculo, $\ln x$ es una función continua. Geométricamente, si $x > 1$, entonces $\ln x$ es el área debajo de la curva $y = 1/t$ desde $t = 1$ hasta $t = x$ (figura 7.8). Para $0 < x < 1$, $\ln x$ proporciona el negativo del área bajo la curva desde x hasta 1. Para $x \leq 0$, la función no está definida. Con base en la regla del intervalo de ancho cero para integrales definidas, también tenemos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0.$$

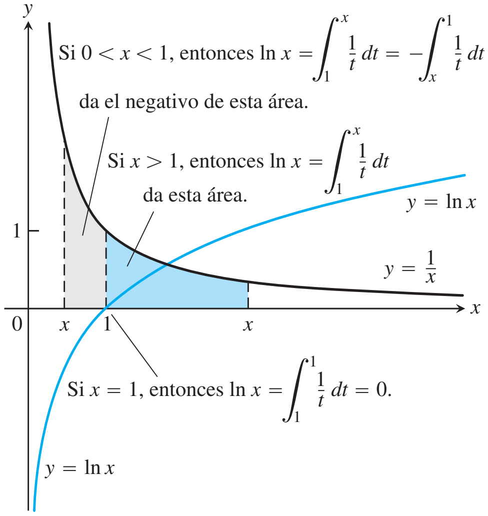


FIGURA 7.8 La gráfica de $y = \ln x$ y su relación con la función $y = 1/x$, $x > 0$. La gráfica del logaritmo se eleva por arriba del eje x cuando x se mueve desde 1 hacia la derecha, mientras desciende por debajo del eje x cuando x se mueve desde 1 hacia la izquierda.

Observe que en la figura 7.8 mostramos la gráfica de $y = 1/x$, pero utilizamos $y = 1/t$ en la integral. Al usar x para todo, habríamos escrito

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx,$$

con x con dos significados diferentes. Así que cambiamos a t como variable de integración.

Para obtener aproximaciones finitas del área debajo de la gráfica de $y = 1/t$ en el intervalo entre $t = 1$ y $t = x$, por medio de rectángulos, como en la sección 5.1, podemos aproximar los valores de la función $\ln x$. En la tabla 7.1 se presentan varios valores especiales. Existe un número importante entre $x = 2$ y $x = 3$ cuyo logaritmo natural es igual a 1. Este número, que ahora definimos, existe, ya que $\ln x$ es una función continua y por lo tanto satisface el teorema del valor intermedio en [2, 3].

TABLA 7.1 Valores comunes, con dos decimales, de $\ln x$

x	$\ln x$
0	no definido
0.05	-3.00
0.5	-0.69
1	0
2	0.69
3	1.10
4	1.39
10	2.30

DEFINICIÓN Así que el **número *e*** está dentro del intervalo [2, 3] y satisface

$$\ln(e) = 1.$$

Así que el número e está dentro del intervalo [2, 3] y satisface

$$\int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

Al interpretarlo de manera geométrica, el número e corresponde al punto en el eje x para el cual el área debajo de la gráfica de $y = 1/t$ y sobre el intervalo $[1, e]$ tiene el área exacta de un cuadrado unitario. Esto es, el área de la región sombreada en naranja en la figura 7.8 es 1 unidad cuadrada cuando $x = e$. En la siguiente sección veremos que el número e puede calcularse como un límite y tiene el valor numérico $e \approx 2.718281828459045$ a 15 lugares decimales.

La derivada de $y = \ln x$

Según la primera parte del teorema fundamental del cálculo (sección 5.4),

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Así, para todos los valores positivos de x, tenemos

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},$$

y la regla de la cadena extiende dicha fórmula para funciones positivas $u(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{du}\ln u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad u > 0.} \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Utilizamos la ecuación (2) para determinar derivadas,

(a) $\dfrac{d}{dx}\ln 2x = \dfrac{1}{2x}\dfrac{d}{dx}(2x) = \dfrac{1}{2x}(2) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

(b) La ecuación (2) con $u = x^2 + 3$ da

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 3) = \frac{1}{x^2 + 3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$ ■

Observe el caso extraordinario del ejemplo 1a. La función $y = \ln 2x$ tiene la misma derivada que $y = \ln x$. Esto es válido para $y = \ln bx$, para cualquier constante b, siempre que $bx > 0$:

$$\frac{d}{dx}\ln bx = \frac{1}{bx}\cdot\frac{d}{dx}(bx) = \frac{1}{bx}(b) = \frac{1}{x}. \tag{3}$$

Si $x < 0$ y $b < 0$, entonces $bx > 0$, por lo que la ecuación (3) sigue siendo válida. En particular, si $x < 0$ y $b = -1$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x} \qquad \text{para } x < 0.$$

Puesto que $|x| = x$, cuando $x > 0$ y $|x| = -x$ cuando $x < 0$, tenemos el siguiente resultado importante, el cual indica que $\ln|x|$ es una antiderivada de $1/x$, $x \neq 0$.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0} \tag{4}$$

Propiedades de los logaritmos

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

John Napier
(1550–1617)

Los logaritmos fueron inventados por John Napier y fueron el avance individual más importante en el cálculo aritmético antes de las modernas computadoras electrónicas. Lo que los hace tan útiles es que las propiedades de los logaritmos permiten la multiplicación de números positivos por medio de la suma de sus logaritmos, la división de números positivos por medio de la resta de sus logaritmos y la exponenciación de un número por medio de la multiplicación de su logaritmo por el exponente.

TEOREMA 2: Propiedades algebraicas de los logaritmos naturales Para cualesquiera números $b > 0$ y $x > 0$, el logaritmo natural satisface las siguientes reglas:

1. *Regla del producto*: $\ln bx = \ln b + \ln x$
2. *Regla del cociente*: $\ln \frac{b}{x} = \ln b - \ln x$
3. *Regla del recíproco*: $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ Regla 2 con $b = 1$
4. *Regla de la potencia*: $\ln x^r = r \ln x$ Para r racional

Por ahora sólo consideraremos exponentes racionales en la regla 4. En la sección 7.3 veremos que la regla también se cumple para todos los exponentes reales.

EJEMPLO 2

(a) $\ln 4 + \ln \operatorname{sen} x = \ln (4 \operatorname{sen} x)$ Producto

(b) $\ln \frac{x + 1}{2x - 3} = \ln (x + 1) - \ln (2x - 3)$ Cociente

(c) $\ln \frac{1}{8} = -\ln 8$ Recíproco

$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2$ Potencia ■

Ahora haremos la demostración del teorema 2. Las propiedades se demuestran aplicando a cada una de ellas el corolario 2 del teorema del valor medio.

Demostración de que $\ln bx = \ln b + \ln x$ El argumento inicia con la observación de que $\ln bx$ y $\ln x$ tienen la misma derivada:

$$\frac{d}{dx} \ln (bx) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln x.$$

Entonces, de acuerdo con el corolario 2 del teorema del valor medio, las funciones deben diferir por una constante, lo cual significa que

$$\ln bx = \ln x + C$$

para alguna constante C.

Como esta última ecuación se cumple para todos los valores positivos de x, debe satisfacerse para $x = 1$. De aquí que,

$$\begin{aligned} \ln (b \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln b &= 0 + C \qquad \ln 1 = 0 \\ C &= \ln b. \end{aligned}$$

Al sustituir, concluimos que

$$\ln bx = \ln b + \ln x.$$ ■

Demostración de que $\ln x^r = r \ln x$ (suponiendo que r sea racional) Nuevamente utilizamos el argumento de la misma derivada. Para todos los valores positivos de x,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln x^r &= \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}(x^r) && \text{Ecuación (2) con } u = x^r \\
&= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} && \text{Regla de la potencia general para derivadas, } r \text{ es racional} \\
&= r \cdot \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x).
\end{aligned}$$

Como $\ln x^r$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada,

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

para alguna constante C. Tomando x igual a 1, se deduce que C es cero, con lo cual concluye la demostración. (En el ejercicio 46 de la sección 3.7 se pide una demostración de la regla general para derivadas de potencias cuando r es racional).

En el ejercicio 86 se le pedirá demostrar la regla 2. La regla 3 es un caso especial de la regla 2, que se obtiene estableciendo que $b = 1$ y observando que $\ln 1 = 0$. Esto cubre todos los casos del teorema 2. ■

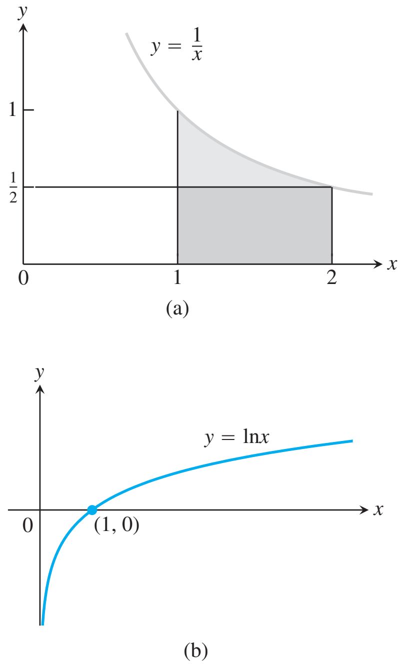


FIGURA 7.9 (a) El rectángulo de altura $y = 1/2$ cabe exactamente debajo de la gráfica de $y = 1/x$ para el intervalo $1 \leq x \leq 2$. (b) La gráfica del logaritmo natural.

Aún no hemos demostrado la regla 4 para r irracional; sin embargo, la regla se cumple para toda r, racional o irracional. En la siguiente sección demostraremos esto después de definir las funciones exponenciales y los exponentes irracionales.

La gráfica y el rango de ln *x*

En la figura 7.8 mostramos la gráfica de $y = \ln x$. Verifiquemos sus propiedades. La derivada $d(\ln x)/dx = 1/x$ es positiva para $x > 0$; por lo tanto, $\ln x$ es una función creciente de x. La segunda derivada, $-1/x^2$, es negativa, por lo cual la gráfica de $\ln x$ es cóncava hacia abajo.

Podemos estimar el valor de ln 2, si consideramos el área debajo de la gráfica de $1/x$ y arriba del intervalo [1, 2]. En la figura 7.9a un rectángulo de altura $1/2$ sobre el intervalo [1, 2] cabe debajo de la gráfica. Por lo tanto, el área bajo la gráfica, que es ln 2, es mayor que el área del rectángulo, $1/2$. Así, $\ln 2 > 1/2$. Sabiendo esto, tenemos,

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

y

$$\ln 2^{-n} = -n \ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}.$$

Se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Definimos $\ln x$ para $x > 0$, de manera que el dominio de $\ln x$ es el conjunto de los números reales positivos. El análisis anterior y el teorema del valor intermedio indican que su rango es toda la recta real, con lo que se obtiene la gráfica de $y = \ln x$ que se presenta en la figura 7.9b.

La integral $\int (1/u)\, du$

La ecuación (4) conduce a la siguiente fórmula integral.

> Si u es una función derivable que nunca es cero,
>
> $$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C. \tag{5}$$

La ecuación (5) dice que las integrales de cierta forma conducen a logaritmos. Si $u = f(x)$, entonces $du = f'(x)dx$ y

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

siempre que $f(x)$ sea una función derivable que nunca sea cero.

EJEMPLO 3 Aquí reconocemos una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{du}{u}$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,dx &= \int_{-5}^{-1} \frac{du}{u} = \ln|u|\,\Big]_{-5}^{-1} && u = x^2 - 5,\quad du = 2x\,dx,\\ &&& u(0) = -5,\quad u(2) = -1\\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5\end{aligned}$$

■

Las integrales de tan x, cot x, sec x y csc x

La ecuación (5) nos indica cómo integrar estas funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} && u = \cos x > 0 \text{ en } (-\pi/2, \pi/2),\\ &&& du = -\operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C\\ &= \ln\frac{1}{|\cos x|} + C = \ln|\sec x| + C. && \text{Regla del recíproco}\end{aligned}$$

Para la cotangente,

$$\begin{aligned}\int \cot x\,dx &= \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{du}{u} && u = \operatorname{sen} x,\\ &&& du = \cos x\,dx\\ &= \ln|u| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\ln|\csc x| + C.\end{aligned}$$

Para integrar sec x, multiplicamos por y dividimos entre (sec x + tan x).

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x\,\frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\,dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \begin{aligned}&u = \sec x + \tan x\\ &du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx\end{aligned}$$

Para el caso de csc x, multiplicamos por y dividimos entre (csc x + cot x).

$$\int \csc x\,dx = \int \csc x\,\frac{(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\,dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}\,dx$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C \qquad \begin{aligned}&u = \csc x + \cot x\\ &du = (-\csc x \cot x - \csc^2 x)\,dx\end{aligned}$$

Integrales de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C \qquad \int \csc u\,du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

EJEMPLO 4

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x\, dx = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u\, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\sec u| \Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

Sustituya $u = 2x$, $dx = du/2$, $u(0) = 0$, $u(\pi/6) = \pi/3$ ■

Derivación logarítmica

Con frecuencia, las derivadas de funciones positivas cuyas fórmulas incluyen productos, cocientes y potencias se obtienen más rápidamente al calcular los logaritmos naturales de ambos lados antes de hacer la derivación. Lo anterior nos permite utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar las ecuaciones antes de obtener sus derivadas. Este proceso se denomina **derivación logarítmica** y se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Determine dy/dx si

$$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \qquad x > 1.$$

Solución Tomamos el logaritmo natural en ambos lados y simplificamos el resultado con las propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \\
&= \ln ((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln (x - 1) && \text{Regla 2} \\
&= \ln (x^2 + 1) + \ln (x + 3)^{1/2} - \ln (x - 1) && \text{Regla 1} \\
&= \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln (x - 1). && \text{Regla 4}
\end{aligned}$$

Luego, derivamos ambos lados con respecto a x, con la ecuación (2) en la izquierda:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}.$$

Ahora despejamos dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$

Por último, sustituimos la y de la ecuación original:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}\left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1}\right).$$ ■

Un cálculo directo en el ejemplo 5 utilizando las reglas del cociente y del producto sería mucho más largo.

Ejercicios 7.2

Uso de las propiedades algebraicas: Teorema 2

1. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 2 y ln 3.

   a. $\ln 0.75$ **b.** $\ln (4/9)$ **c.** $\ln (1/2)$

   d. $\ln \sqrt[3]{9}$ **e.** $\ln 3\sqrt{2}$ **f.** $\ln \sqrt{13.5}$

2. Exprese los siguientes logaritmos en términos de ln 5 y ln 7.

   a. $\ln (1/125)$ **b.** $\ln 9.8$ **c.** $\ln 7\sqrt{7}$

   d. $\ln 1225$ **e.** $\ln 0.056$

   f. $(\ln 35 + \ln (1/7))/(\ln 25)$

Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar las expresiones en los ejercicios 3 y 4.

3. **a.** $\ln \operatorname{sen}\theta - \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{5}\right)$ **b.** $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$

c. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

4. **a.** $\ln\sec\theta + \ln\cos\theta$ **b.** $\ln(8x + 4) - 2\ln 2$

c. $3\ln\sqrt[3]{t^2 - 1} - \ln(t + 1)$

Determinación de derivadas

En los ejercicios 5 a 36, determine la derivada de y con respecto a x, t o θ, según corresponda.

5. $y = \ln 3x$ **6.** $y = \ln kx$, k constante

7. $y = \ln(t^2)$ **8.** $y = \ln(t^{3/2})$

9. $y = \ln\frac{3}{x}$ **10.** $y = \ln\frac{10}{x}$

11. $y = \ln(\theta + 1)$ **12.** $y = \ln(2\theta + 2)$

13. $y = \ln x^3$ **14.** $y = (\ln x)^3$

15. $y = t(\ln t)^2$ **16.** $y = t\sqrt{\ln t}$

17. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$ **18.** $y = (x^2 \ln x)^4$

19. $y = \frac{\ln t}{t}$ **20.** $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

21. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$ **22.** $y = \frac{x\ln x}{1 + \ln x}$

23. $y = \ln(\ln x)$ **24.** $y = \ln(\ln(\ln x))$

25. $y = \theta(\operatorname{sen}(\ln\theta) + \cos(\ln\theta))$

26. $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

27. $y = \ln\frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$ **28.** $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$

29. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$ **30.** $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$

31. $y = \ln(\sec(\ln\theta))$ **32.** $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$

33. $y = \ln\left(\frac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$ **34.** $y = \ln\sqrt{\frac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

35. $y = \int_{x^2/2}^{x^2}\ln\sqrt{t}\,dt$ **36.** $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln t\,dt$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 37 a 54.

37. $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x}$ **38.** $\int_{-1}^{0}\frac{3\,dx}{3x - 2}$

39. $\int\frac{2y\,dy}{y^2 - 25}$ **40.** $\int\frac{8r\,dr}{4r^2 - 5}$

41. $\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} t}{2 - \cos t}\,dt$ **42.** $\int_0^{\pi/3}\frac{4\operatorname{sen}\theta}{1 - 4\cos\theta}\,d\theta$

43. $\int_1^2\frac{2\ln x}{x}\,dx$ **44.** $\int_2^4\frac{dx}{x\ln x}$

45. $\int_2^4\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ **46.** $\int_2^{16}\frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$

47. $\int\frac{3\sec^2 t}{6 + 3\tan t}\,dt$ **48.** $\int\frac{\sec y\tan y}{2 + \sec y}\,dy$

49. $\int_0^{\pi/2}\tan\frac{x}{2}\,dx$ **50.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot t\,dt$

51. $\int_{\pi/2}^{\pi}2\cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$ **52.** $\int_0^{\pi/12}6\tan 3x\,dx$

53. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x} + 2x}$ **54.** $\int\frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$

Derivación logarítmica

En los ejercicios 55 a 68, utilice derivación logarítmica para determinar la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

55. $y = \sqrt{x(x + 1)}$ **56.** $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

57. $y = \sqrt{\frac{t}{t + 1}}$ **58.** $y = \sqrt{\frac{1}{t(t + 1)}}$

59. $y = \sqrt{\theta + 3}\operatorname{sen}\theta$ **60.** $y = (\tan\theta)\sqrt{2\theta + 1}$

61. $y = t(t + 1)(t + 2)$ **62.** $y = \frac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$

63. $y = \frac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}$ **64.** $y = \frac{\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

65. $y = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$ **66.** $y = \sqrt{\frac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$

67. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$ **68.** $y = \sqrt[3]{\frac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

Teoría y aplicaciones

69. Localice e identifique los valores extremos absolutos de

a. $\ln(\cos x)$ en $[-\pi/4, \pi/3]$,

b. $\cos(\ln x)$ en $[1/2, 2]$.

70. **a.** Demuestre que $f(x) = x - \ln x$ es creciente para $x > 1$.

b. Utilice el inciso (a) para demostrar que $\ln x < x$, si $x > 1$.

71. Determine el área entre las curvas $y = \ln x$ y $y = \ln 2x$ desde $x = 1$ hasta $x = 5$.

72. Determine el área entre la curva $y = \tan x$ y el eje x desde $x = -\pi/4$ hasta $x = \pi/3$.

73. La región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la recta $y = 3$ y la curva $x = 2/\sqrt{y + 1}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

74. La región entre la curva $y = \sqrt{\cot x}$ y el eje x desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/2$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

75. La región entre la curva $y = 1/x^2$ y el eje x desde $x = 1/2$ hasta $x = 2$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

76. En el ejercicio 6 de la sección 6.2 hicimos girar alrededor del eje y la región entre la curva $y = 9x/\sqrt{x^3 + 9}$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 3$ para generar un sólido de volumen de 36π. Si hacemos girar la región alrededor del eje x, ¿qué volumen se obtendría? (Para conocer la gráfica, véase el ejercicio 6 de la sección 6.2).

77. Determine las longitudes de las siguientes curvas.

a. $y = (x^2/8) - \ln x$, $4 \le x \le 8$

b. $x = (y/4)^2 - 2\ln(y/4)$, $4 \le y \le 12$

78. Determine una curva que pase por el punto (1, 0) cuya longitud desde $x = 1$ hasta $x = 2$ sea

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx.$$

T **79.** **a.** Determine el centroide de la región entre la curva $y = 1/x$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 2$. Indique las coordenadas con dos decimales.

b. Elabore un bosquejo de la región y en el dibujo muestre el centroide.

80. **a.** Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad constante que cubre la región entre la curva $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 16$.

b. Determine el centro de masa si la densidad, en vez de ser constante, es $\delta(x) = 4/\sqrt{x}$.

81. Utilice una derivada para demostrar que $f(x) = \ln(x^3 - 1)$ es inyectiva.

82. Utilice una derivada para demostrar que $g(x) = \sqrt{x^2 + \ln x}$ es inyectiva.

Resuelva los problemas con valor inicial en los ejercicios 83 y 84.

83. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

84. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0 \quad \text{y} \quad y'(0) = 1$

T **85.** **Linealización de $\ln(1 + x)$ en $x = 0$** En vez de aproximar $\ln x$ alrededor de $x = 1$, aproximamos $\ln(1 + x)$ alrededor de $x = 0$. De esta manera obtendremos una fórmula más sencilla.

a. Deduzca la linealización de $\ln(1 + x) \approx x$ en $x = 0$.

b. Estime a cinco decimales el error en el que se incurre al remplazar $\ln(1 + x)$ por x en el intervalo $[0, 0.1]$.

c. Trace juntas la gráfica de $\ln(1 + x)$ y x para $0 \le x \le 0.5$. Si es posible, utilice colores diferentes. ¿En qué puntos es mejor la aproximación de $\ln(1 + x)$? ¿Menos buena? Por medio de la lectura directa de las coordenadas en las gráficas, determine, tan bien como su graficadora le permita, una cota superior para el error.

86. Utilice el argumento de igual derivada, como cuando demostramos las reglas 1 y 4 del teorema 2, para probar la propiedad del cociente de los logaritmos.

T **87.** **a.** Grafique juntas $y = \operatorname{sen} x$ y las curvas $y = \ln(a + \operatorname{sen} x)$ para $a = 2, 4, 8, 20$ y 50 para $0 \le x \le 23$. $0 \le x \le 23$.

b. ¿Por qué las curvas se aplanan cuando aumenta a? (*Sugerencia:* Determine una cota superior para $|y'|$ que dependa de a).

T **88.** La gráfica de $y = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$, ¿tiene un punto de inflexión? Trate de responder la pregunta **(a)** por medio de graficación, **(b)** por medio de cálculo.

7.3 Funciones exponenciales

Una vez que hemos desarrollado la teoría de la función $\ln x$, introduciremos la función exponencial $\exp x = e^x$ como la inversa de $\ln x$. Estudiaremos sus propiedades y calcularemos su derivada y su integral. Demostraremos la regla de la potencia para derivadas que incluyen exponentes reales generales. Por último, estudiaremos funciones exponenciales generales, a^x, y funciones logarítmicas generales, $\log_a x$.

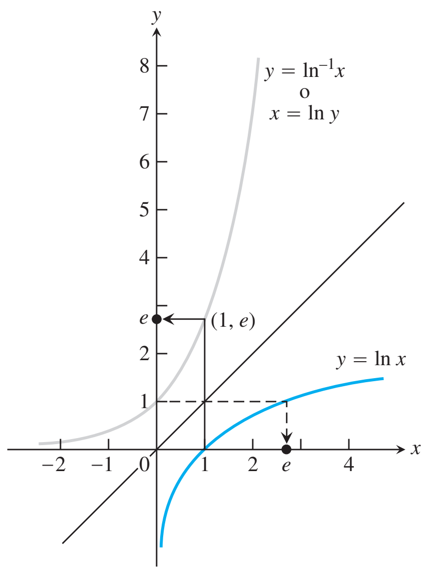


FIGURA 7.10 Las gráficas de $y = \ln x$ y $y = \ln^{-1} x = \exp x$. El número e es $\ln^{-1} 1 = \exp(1)$.

Inversa de $\ln x$ y el número e

La función $\ln x$, al ser una función creciente de x con dominio $(0, \infty)$ y rango $(-\infty, \infty)$, tiene una inversa, $\ln^{-1} x$, con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. La gráfica de $\ln^{-1} x$ es la gráfica de $\ln x$ reflejada con respecto a la recta $y = x$. Como vemos en la figura 7.10,

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0.$$

La función $\ln^{-1} x$ también se denota con $\exp x$. Ahora demostramos que $\exp x$ es una función exponencial con base e.

El número e se definió por medio de la ecuación $\ln(e) = 1$; así, $e = \exp(1)$. De la manera usual, podemos elevar el número e a una potencia racional:

$$e^2 = e \cdot e, \qquad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \qquad e^{1/2} = \sqrt{e},$$

y así sucesivamente. Como e es positivo, e^r también es positivo, por lo que podemos tomar el logaritmo de e^r. Cuando lo hacemos, determinamos que para r racional

$$\ln e^r = r \ln e = r \cdot 1 = r. \qquad \text{Teorema 2, regla 4}$$

Luego, aplicando la función $\ln^{-1}$ a ambos lados de la ecuación $\ln e^r = r$, determinamos que

$$e^r = \exp r \qquad \text{para } r \text{ racional}. \qquad \exp \text{ es } \ln^{-1}. \tag{1}$$

Aún no hemos encontrado una manera que nos permita dar un significado obvio a e^x para x irracional. Pero $\ln^{-1} x$ tiene significado para cualquier x, racional o irracional. Así, la ecuación (1) ofrece una manera de extender la definición de e^x a valores irracionales de x. La función exp x se define para toda x, así que la utilizamos para asignar un valor a e^x en todo punto.

DEFINICIÓN Para todo número real x, definimos la **función exponencial natural** como $e^x = \exp x$.

Valores comunes de e^x

x	e^x (redondeado)
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
10	22026
100	2.6881×10^{43}

Por primera vez hemos dado una definición precisa para un exponente irracional: elevamos un número específico e a cualquier potencia x, racional o irracional. Ya que las funciones $\ln x$ y e^x son inversas una de la otra, tenemos las siguientes relaciones.

Ecuaciones inversas para e^x y $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{para toda } x > 0)$$

$$\ln(e^x) = x \qquad (\text{para toda } x)$$

EJEMPLO 1 Resuelva para x la ecuación $e^{2x-6} = 4$.

Solución Tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación y utilizamos la segunda ecuación inversa:

$$\begin{aligned} \ln(e^{2x-6}) &= \ln 4 \\ 2x - 6 &= \ln 4 && \text{Relaciones inversas} \\ 2x &= 6 + \ln 4 \\ x &= 3 + \frac{1}{2}\ln 4 = 3 + \ln 4^{1/2} \\ x &= 3 + \ln 2 \end{aligned}$$

La derivada y la integral de e^x

De acuerdo con el teorema 1, la función exponencial natural tiene derivada porque es la inversa de una función derivable, cuya derivada nunca es cero. Calculamos su derivada por medio de la relación inversa y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x && \text{Relación inversa} \\ \frac{d}{dx}\ln(e^x) &= 1 && \text{Derivar ambos lados.} \\ \frac{1}{e^x}\cdot\frac{d}{dx}(e^x) &= 1 && \text{La ecuación (2) de la sección 7.2, con } u = e^x \\ \frac{d}{dx}e^x &= e^x. && \text{Despejar la derivada.} \end{aligned}$$

Esto es, para $y = e^x$ encontramos que $dy/dx = e^x$, así que la función exponencial natural es su propia derivada. Además, si $f(x) = e^x$, entonces $f'(0) = e^0 = 1$. Esto significa que la función exponencial natural, e^x, tiene pendiente 1 cuando cruza el eje y en $x = 0$.

La regla de la cadena extiende el resultado de la derivada para la función exponencial natural a una forma más general que incluye a la función $u(x)$:

Si u es cualquier función derivable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Por medio de la ecuación (2), determine la derivada de cada función exponencial.

(a) $\dfrac{d}{dx}(5e^x) = 5\dfrac{d}{dx}e^x = 5e^x$

(b) $\dfrac{d}{dx}e^{-x} = e^{-x}\dfrac{d}{dx}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ Ecuación (2) con $u = -x$

(c) $\dfrac{d}{dx}e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x$ Ecuación (2) con $u = \operatorname{sen} x$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{3x+1}}\right) = e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3x+1}\right)$ Ecuación (2) con $u = \sqrt{3x+1}$

$$= e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}\cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}e^{\sqrt{3x+1}}$$ ■

Como e^x es su propia derivada, también es su propia antiderivada. Así que la integral equivalente de la ecuación (2) es la siguiente.

> **La antiderivada general de la función exponencial**
>
> $$\int e^u\,du = e^u + C$$

EJEMPLO 3

(a) $$\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx = \int_0^{\ln 8} e^u\cdot\frac{1}{3}\,du$$

$u = 3x,\quad \frac{1}{3}du = dx,\quad u(0) = 0,$
$u(\ln 2) = 3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,du$$

$$= \frac{1}{3}e^u\Big]_0^{\ln 8}$$

$$= \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

(b) $$\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x}\Big]_0^{\pi/2}$$ Antiderivada del ejemplo 2c

$$= e^1 - e^0 = e - 1$$ ■

La derivada de e^x existe y siempre es positiva, lo cual confirma que es una función continua y creciente, como se mostró en la figura 7.10. Ya que la segunda derivada de e^x también es e^x y positiva siempre, entonces la gráfica es cóncava hacia arriba. Además, la figura 7.10 indica que la función exponencial tiene los límites

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

En el primero de estos límites, vemos que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de $y = e^x$.

Leyes de los exponentes

Aunque e^x se define en una forma un tanto compleja como $\ln^{-1} x$, obedece las más conocidas leyes del álgebra para los exponentes. El teorema 3 nos muestra que tales leyes son consecuencia de las definiciones de $\ln x$ y e^x.

TEOREMA 3 Para todos los números x, x_1 y x_2, la exponencial natural e^x cumple las siguientes leyes:

1. $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ **2.** $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

3. $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$ **4.** $(e^{x_1})^r = e^{r x_1}$, si r es racional

Demostración de la ley 1 Sea $y_1 = e^{x_1}$ y $y_2 = e^{x_2}$. Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
x_1 = \ln y_1 \quad \text{y} \quad x_2 &= \ln y_2 && \text{Ecuaciones inversas} \\
x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\
&= \ln y_1 y_2 && \text{Regla del producto para logaritmos} \\
e^{x_1 + x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{Exponenciar.} \\
&= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\
&= e^{x_1} e^{x_2}. && \blacksquare
\end{aligned}
$$

Demostración de la ley 4 Sea $y = (e^{x_1})^r$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln (e^{x_1})^r \\
&= r \ln (e^{x_1}) && \text{Regla de la potencia para logaritmos, con } r \text{ racional.} \\
&= r x_1 && \ln e^u = u \text{ con } u = x_1
\end{aligned}
$$

Así, si tomamos exponenciales de ambos lados,

$$
y = e^{r x_1}. \qquad e^{\ln y} = y \qquad \blacksquare
$$

Las leyes 2 y 3 se deducen de la ley 1. Al igual que la regla de la potencia para logaritmos, la ley 4 se cumple para todo número real r.

La función exponencial general a^x

Como $a = e^{\ln a}$ para cualquier número positivo a, es posible considerar a^x como $(e^{\ln a})x = e^{x \ln a}$. Por lo tanto, utilizamos la función e^x para definir las otras funciones exponenciales, las cuales nos permiten elevar cualquier número positivo a un exponente irracional.

DEFINICIÓN Para cualesquiera números $a > 0$ y x, la **función exponencial con base *a*** es

$$
a^x = e^{x \ln a}.
$$

Cuando $a = e$, la definición da $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$.

El teorema 3 también es válido para a^x, la función exponencial con base a. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
a^{x_1} \cdot a^{x_2} &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} && \text{Definición de } a^x \\
&= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} && \text{Ley 1} \\
&= e^{(x_1 + x_2) \ln a} && \text{Factorizar } \ln a \\
&= a^{x_1 + x_2}. && \text{Definición de } a^x
\end{aligned}
$$

En particular, $a^n \cdot a^{-1} = a^{n-1}$ para cualquier número real n.

Demostración de la regla de la potencia (versión general)

La definición de la función exponencial general nos permite darle sentido a elevar cualquier número positivo a una potencia real n, racional o irracional. Esto es, podemos definir la función potencia $y = x^n$ para cualquier exponente n.

DEFINICIÓN Para cualquier $x > 0$ y para cualquier número real n,

$$x^n = e^{n \ln x}.$$

Puesto que las funciones logaritmo y exponencial son inversas una de la otra, la definición da

$$\ln x^n = n \ln x, \quad \text{para cualquier número real } n.$$

Esto es, la regla de la potencia para el logaritmo natural se cumple para *todo* exponente real n, no sólo para exponentes racionales, como se estableció en el teorema 2.

La definición de la función potencia también nos permite establecer la regla de la derivada para potencias, con potencias que sean cualquier número real n, como se estableció en la sección 3.3.

Regla de la derivada para potencias generales
Para $x > 0$ y cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Si $x \leq 0$, entonces la fórmula se cumple siempre que la derivada, x^n, y x^{n-1} existan.

Demostración Al derivar x^n con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} e^{n \ln x} && \text{Definición de } x^n,\ x > 0 \\
&= e^{n \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(n \ln x) && \text{Regla de la cadena para } e^u \text{, ecuación (2)} \\
&= x^n \cdot \frac{n}{x} && \text{Definición y derivada de } \ln x \\
&= nx^{n-1}. && x^n \cdot x^{-1} = x^{n-1}
\end{aligned}$$

En resumen, siempre que $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Para $x < 0$, si existen $y = x^n$, y' y x^{n-1}, entonces

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n \ln|x|.$$

Mediante derivación implícita (la cual supone la existencia de la derivada y') y la ecuación 4 de la sección 7.2, tenemos

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}.$$

Al despejar la derivada,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Se puede demostrar directamente, con base en la definición de la derivada, que la derivada es igual a cero cuando $x = 0$ y $n \geq 1$. Esto completa la demostración de la versión general de la regla de la potencia para todos los valores de x. ■

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = x^x, x > 0$.

Solución Aquí no podemos aplicar la regla de la potencia, ya que el exponente es la variable x, en vez de ser un valor constante n (racional o irracional). Sin embargo, en la definición de la función exponencial general notamos que $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, y al derivar se obtiene

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \ln x}) \\
&= e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) && \text{Ecuación (2) con } u = x \ln x \\
&= e^{x \ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \\
&= x^x(\ln x + 1). && x > 0
\end{aligned}
$$

■

El número e expresado como un límite

Hemos definido el número e como el número para el cual $\ln e = 1$ o, de forma equivalente, el valor de $\exp(1)$. Vemos que e es una constante importante para las funciones logarítmica y exponencial, pero ¿cuál es su valor numérico? El siguiente teorema muestra una manera de calcular e como un límite.

TEOREMA 4: El número e como un límite El número e puede calcularse como el límite

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

Demostración Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = 1/x$, por lo que $f'(1) = 1$. Pero, por la definición de derivada,

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) && \ln 1 = 0 \\
&= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right] && \text{ln es continua; utilizar el teorema 10 del capítulo 2.}
\end{aligned}
$$

Ya que $f'(1) = 1$, tenemos

$$\ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

Por lo tanto, al exponenciar ambos lados obtenemos

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

■

Si aproximamos el límite en el teorema 4 tomando x muy pequeña se obtienen aproximaciones a e. Su valor es $e \approx 2.718281828459045$ con 15 decimales de precisión, como se había observado antes.

Derivada de a^u

Para determinar dicha derivada, comenzamos con la definición $a^x = e^{x \ln a}$. Entonces, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln a) && \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \\
&= a^x \ln a.
\end{aligned}
$$

Ahora vemos por qué e^x es la función exponencial preferida en cálculo. Si $a = e$, entonces $\ln a = 1$ y la derivada de a^x se simplifica a

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ln e = e^x.$$

Con la regla de la cadena, obtenemos la siguiente forma para la derivada de la función exponencial general.

Si $a > 0$ y u es una función derivable de x, entonces a^u es una función derivable de x y

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

La integral equivalente de este último resultado da la antiderivada general

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \tag{4}$$

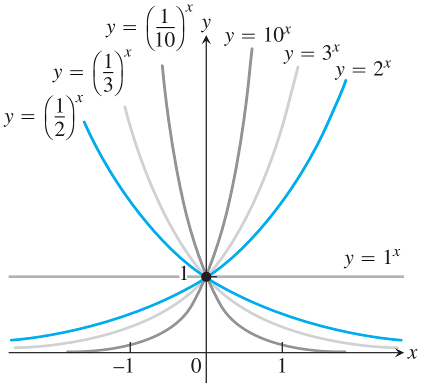


FIGURA 7.11 Las funciones exponenciales decrecen si $0 < a < 1$ y crecen si $a > 1$. Cuando $x \to \infty$, tenemos $a^x \to 0$ si $0 < a < 1$ y $a^x \to \infty$ si $a > 1$. Cuando $x \to -\infty$, tenemos que $a^x \to \infty$ si $0 < a < 1$ y $a^x \to 0$ si $a > 1$.

Con base en la ecuación (3) con $u = x$, vemos que la derivada de a^x es positiva si $\ln a > 0$ o $a > 1$, y negativa si $\ln a < 0$, o bien, $0 < a < 1$. Así, a^x es una función creciente de x si $a > 1$ y una función decreciente de x, si $0 < x < 1$. En cada caso, a^x es inyectiva. La segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = \frac{d}{dx}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

es positiva para toda x, por lo que la gráfica de a^x es cóncava hacia arriba para todo intervalo de la recta real. La figura 7.11 presenta las gráficas de varias funciones exponenciales.

EJEMPLO 5 Determinamos las derivadas y las integrales usando las ecuaciones (3) y (4).

(a) $\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3$ — Ecuación (3) con $a = 3$, $u = x$

(b) $\frac{d}{dx} 3^{-x} = 3^{-x}(\ln 3) \frac{d}{dx}(-x) = -3^{-x} \ln 3$ — Ecuación (3) con $a = 3$, $u = -x$

(c) $\frac{d}{dx} 3^{\operatorname{sen} x} = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3) \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 3^{\operatorname{sen} x}(\ln 3) \cos x$ — $\ldots$, $u = \operatorname{sen} x$

(d) $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ — Ecuación (4) con $a = 2$, $u = x$

(e) $\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = \int 2^u \, du = \frac{2^u}{\ln 2} + C$ — $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x \, dx$, y ec. (4)

$= \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + C$ — u se remplaza con $\operatorname{sen} x$ ■

Logaritmos con base *a*

Si a es cualquier número positivo diferente de 1, la función a^x es inyectiva y tiene una derivada diferente de cero en todo punto. Por lo tanto, posee una inversa derivable. A esta inversa la llamamos **logaritmo de x con base a** y la designamos con $\log_a x$.

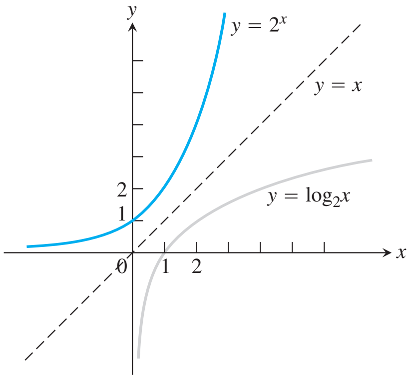


FIGURA 7.12 La gráfica de 2^x y su inversa, $\log_2 x$.

DEFINICIÓN Para cualquier número positivo $a \neq 1$,

$\log_a x$ es la función inversa de a^x.

La gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta de 45°, $y = x$ (figura 7.12). Cuando $a = e$, tenemos $\log_e x =$ inversa de $e^x = \ln x$. (En ocasiones, la función $\log_{10} x$ se escribe simplemente como $\log x$ y se denomina **logaritmo común** de x). Como $\log_a x$ y a^x son inversas una de otra, la composición de ellas en cualquier orden da la función identidad.

Ecuaciones inversas para a^x y $\log_a x$

$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$$
$$\log_a (a^x) = x \qquad (\text{para toda } x)$$

En realidad, la función $\log_a x$ es sólo un múltiplo numérico de $\ln x$. Para ver esto, consideramos $y = \log_a x$ y luego tomamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación equivalente $a^y = x$ para obtener $y \ln a = \ln x$. Si despejamos y obtenemos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{5}$$

TABLA 7.2 Reglas para logaritmos de base a

Para cualesquiera números $x > 0$ y $y > 0$

1. *Regla del producto*:
   $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. *Regla del cociente*:
   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. *Regla del recíproco*:
   $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
4. *Regla de la potencia*:
   $\log_a x^y = y \log_a x$

Las reglas algebraicas que satisface $\log_a x$ son las mismas que las de $\ln x$. Tales reglas, que se presentan en la tabla 7.2, pueden demostrarse si se usa la ecuación (5) y se dividen las reglas correspondientes para la función logaritmo natural entre $\ln a$. Por ejemplo,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{Regla 1 para logaritmos naturales …}$$
$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \text{… dividiendo entre } \ln a \text{ …}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \qquad \text{… se obtiene la regla 1 para logaritmos de base } a.$$

Derivadas e integrales que incluyen $\log_a x$

Para determinar derivadas o integrales que incluyan logaritmos de base a, los convertimos a logaritmos naturales. Si u es una función positiva derivable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO 6

(a) $\dfrac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \dfrac{1}{\ln 10}\cdot\dfrac{1}{3x+1}\dfrac{d}{dx}(3x+1) = \dfrac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\log_2 x}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

$\displaystyle = \frac{1}{\ln 2}\int u\,du \qquad u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C$

Ejercicios 7.3

Resolución de ecuaciones exponenciales

En los ejercicios 1 a 4, despeje t.

1. a. $e^{-0.3t} = 27$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{2}$ **c.** $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$

2. a. $e^{-0.01t} = 1000$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{10}$ **c.** $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

3. $e^{\sqrt{t}} = x^2$

4. $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Determinación de derivadas

En los ejercicios 5 a 24, determine la derivada de y con respecto a x, t o θ, según sea el caso.

5. $y = e^{-5x}$

6. $y = e^{2x/3}$

7. $y = e^{5-7x}$

8. $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

9. $y = xe^x - e^x$

10. $y = (1+2x)e^{-2x}$

11. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

12. $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

13. $y = e^{\theta}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

14. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

15. $y = \cos(e^{-\theta^2})$

16. $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

17. $y = \ln(3te^{-t})$

18. $y = \ln(2e^{-t}\operatorname{sen} t)$

19. $y = \ln\left(\dfrac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}\right)$

20. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

21. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

22. $y = e^{\operatorname{sen} t}(\ln t^2 + 1)$

23. $y = \displaystyle\int_0^{\ln x} \operatorname{sen} e^t\,dt$

24. $y = \displaystyle\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$

En los ejercicios 25 a 28, determine dy/dx.

25. $\ln y = e^y \operatorname{sen} x$

26. $\ln xy = e^{x+y}$

27. $e^{2x} = \operatorname{sen}(x+3y)$

28. $\tan y = e^x + \ln x$

Determinación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 29 al 50.

29. $\displaystyle\int (e^{3x} + 5e^{-x})\,dx$

30. $\displaystyle\int (2e^x - 3e^{-2x})\,dx$

31. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$

32. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx$

33. $\displaystyle\int 8e^{(x+1)}\,dx$

34. $\displaystyle\int 2e^{(2x-1)}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^{\ln 16} e^{x/4}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$

38. $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr$

39. $\displaystyle\int 2t\,e^{-t^2}\,dt$

40. $\displaystyle\int t^3 e^{(t^4)}\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + e^{\tan\theta})\sec^2\theta\,d\theta$

44. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + e^{\cot\theta})\csc^2\theta\,d\theta$

45. $\displaystyle\int e^{\sec \pi t}\sec \pi t\tan \pi t\,dt$

46. $\displaystyle\int e^{\csc(\pi+t)}\csc(\pi+t)\cot(\pi+t)\,dt$

47. $\displaystyle\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v\cos e^v\,dv$

48. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x\,e^{x^2}\cos(e^{x^2})\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{e^r}{1+e^r}\,dr$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 51 a 54, resuelva los problemas con valor inicial.

51. $\dfrac{dy}{dt} = e^t\operatorname{sen}(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0$

52. $\dfrac{dy}{dt} = e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi$

53. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1 \quad \text{y} \quad y'(0) = 0$

54. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1 \quad \text{y} \quad y'(1) = 0$

Derivación

En los ejercicios 55 a 82, determine la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

55. $y = 2^x$

56. $y = 3^{-x}$

57. $y = 5^{\sqrt{s}}$

58. $y = 2^{(s^2)}$

59. $y = x^{\pi}$

60. $y = t^{1-e}$

61. $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

62. $y = (\ln\theta)^{\pi}$

63. $y = 7^{\sec\theta}\ln 7$

64. $y = 3^{\tan\theta}\ln 3$

65. $y = 2^{\operatorname{sen} 3t}$

66. $y = 5^{-\cos 2t}$

67. $y = \log_2 5\theta$

68. $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

69. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

70. $y = \log_{25} e^x - \log_5\sqrt{x}$

71. $y = x^3\log_{10} x$

72. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

73. $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

74. $y = \log_5\sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2}\right)^{\ln 5}}$

75. $y = \theta\operatorname{sen}(\log_7\theta)$

76. $y = \log_7\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{e^{\theta}2^{\theta}}\right)$

77. $y = \log_{10} e^x$

78. $y = \dfrac{\theta 5^{\theta}}{2 - \log_5\theta}$

79. $y = 3^{\log_2 t}$

80. $y = 3\log_8(\log_2 t)$

81. $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

82. $y = t\log_3\left(e^{(\operatorname{sen} t)(\ln 3)}\right)$

Integración

Evalúe las integrales en los ejercicios 83 a 92.

83. $\displaystyle\int 5^x\,dx$

84. $\displaystyle\int \frac{3^x}{3 - 3^x}\,dx$

85. $\displaystyle\int_0^1 2^{-\theta}\,d\theta$

86. $\displaystyle\int_{-2}^0 5^{-\theta}\,d\theta$

87. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\,dx$

88. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

89. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

90. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t}\sec^2 t\,dt$

91. $\displaystyle\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x)\,dx$

92. $\displaystyle\int \frac{x2^{x^2}}{1 + 2^{x^2}}\,dx$

Evalúe las integrales en los ejercicios 93 a 106.

93. $\displaystyle\int 3x^{\sqrt{3}}\,dx$

94. $\displaystyle\int x^{\sqrt{2}-1}\,dx$

95. $\displaystyle\int_0^3 (\sqrt{2} + 1)x^{\sqrt{2}}\,dx$

96. $\displaystyle\int_1^e x^{(\ln 2)-1}\,dx$

97. $\displaystyle\int \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$

98. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,dx$

99. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln 2\log_2 x}{x}\,dx$

100. $\displaystyle\int_1^e \frac{2\ln 10\log_{10} x}{x}\,dx$

101. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,dx$

102. $\displaystyle\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,dx$

103. $\displaystyle\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,dx$

104. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,dx$

105. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log_{10} x}$

106. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 107 a 110.

107. $\displaystyle\int_1^{\ln x}\frac{1}{t}\,dt, \quad x > 1$

108. $\displaystyle\int_1^{e^x}\frac{1}{t}\,dt$

109. $\displaystyle\int_1^{1/x}\frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$

110. $\displaystyle\frac{1}{\ln a}\int_1^x\frac{1}{t}\,dt, \quad x > 0$

Derivación logarítmica

En los ejercicios 111 a 118, utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de y con respecto a la variable independiente dada.

111. $y = (x + 1)^x$

112. $y = x^2 + x^{2x}$

113. $y = (\sqrt{t})^t$

114. $y = t^{\sqrt{t}}$

115. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

116. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

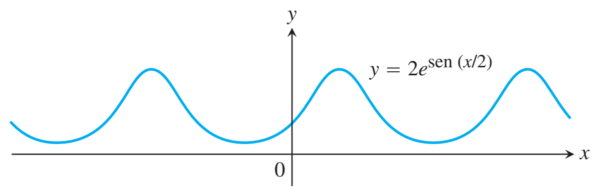
117. $y = \operatorname{sen} x^x$

118. $y = (\ln x)^{\ln x}$

Teoría y aplicaciones

119. Determine los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = e^x - 2x$ en $[0, 1]$.

120. La función periódica $f(x) = 2e^{\operatorname{sen}(x/2)}$, ¿en dónde alcanza sus valores extremos? ¿Cuáles son esos valores?



121. Sea $f(x) = xe^{-x}$.

a. Determine todos los valores extremos absolutos para f.

b. Determine todos los puntos de inflexión para f.

122. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

a. Determine todos los valores extremos absolutos para f.

b. Determine todos los puntos de inflexión para f.

123. Determine el valor máximo de $f(x) = x^2\ln(1/x)$ y diga dónde se alcanza.

T **124.** Trace juntas las gráficas de $f(x) = (x - 3)^2 e^x$ y dé su primera derivada. Comente acerca del comportamiento de f en relación con los signos y valores de f'. Identifique los puntos significativos de las gráficas por medio de cálculo, según se requiera.

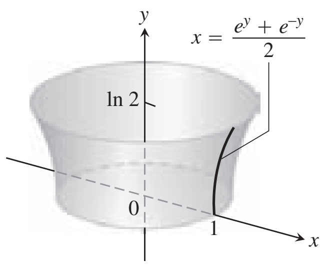
125. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{2x}$, abajo por la curva $y = e^x$ y a la derecha por la recta $x = \ln 3$.

126. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada arriba por la curva $y = e^{x/2}$, por abajo por la curva $y = e^{-x/2}$ y a la derecha por la recta $x = 2\ln 2$.

127. Determine una curva que pase por el origen en el plano xy, cuya longitud desde $x = 0$ hasta $x = 1$ sea

$$L = \int_0^1\sqrt{1 + \frac{1}{4}e^x}\,dx.$$

128. Determine el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje y, la curva $x = (e^y + e^{-y})/2$, $0 \le y \le \ln 2$.



En los ejercicios 129 a 132, determine la longitud de cada curva.

129. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

130. $y = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)$, desde $x = \ln 2$ hasta $x = \ln 3$.

131. $y = \ln(\cos x)$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$.

132. $y = \ln(\csc x)$ desde $x = \pi/6$ hasta $x = \pi/4$.

133. **a.** Demuestre que $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$.

b. Determine el valor promedio de $\ln x$ en $[1, e]$.

134. Determine el valor promedio de $f(x) = 1/x$ en $[1, 2]$.

135. Linealización de e^x en $x = 0$

a. Deduzca la aproximación lineal $e^x \approx 1 + x$ en $x = 0$.

T **b.** Calcule a cinco decimales la magnitud del error al sustituir e^x por $1 + x$ en el intervalo $[0, 0.2]$.

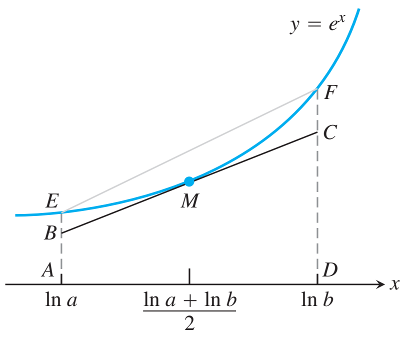
T **c.** Trace juntas las gráficas de e^x y $1 + x$ para $-2 \le x \le 2$. Si es posible, utilice colores diferentes. ¿En qué intervalo parece que la aproximación sobreestima el valor de e^x? ¿En dónde la subestima?

136. Desigualdades de las medias aritmética, geométrica y logarítmica

a. Demuestre que la gráfica de e^x es cóncava hacia arriba en todo intervalo de valores de x.

b. Demuestre, haciendo referencia a la siguiente figura, que si $0 < a < b$ entonces

$$e^{(\ln a+\ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\, dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a).$$



NO ESTÁ A ESCALA

c. Utilice la desigualdad del inciso (b) para concluir que

$$\sqrt{ab} < \frac{b - a}{\ln b - \ln a} < \frac{a + b}{2}.$$

Esta desigualdad indica que la media geométrica de dos números positivos es menor que su media logarítmica, la cual a la vez es menor que su media aritmética.

137. Determine el área de la región entre la curva $y = 2x/(1 + x^2)$ y el intervalo $-2 \le x \le 2$ del eje x.

138. Determine el área de la región entre la curva $y = 2^{1-x}$ y el intervalo $-1 \le x \le 1$ del eje x.

T **139.** La ecuación $x^2 = 2^x$ tiene tres soluciones: $x = 2$, $x = 4$ y otra. Por medio de una gráfica, calcule la tercera solución con la mayor precisión posible.

T **140.** ¿Es posible que $x^{\ln 2}$ sea igual a $2^{\ln x}$ para $x > 0$? Grafique las dos funciones y explique lo que vea.

141. Linealización de 2^x

a. Determine la linealización de $f(x) = 2^x$ en $x = 0$. Luego redondee los coeficientes a dos decimales.

T **b.** Trace juntas las gráficas de la linealización y de la función para $-3 \le x \le 3$ y $-1 \le x \le 1$.

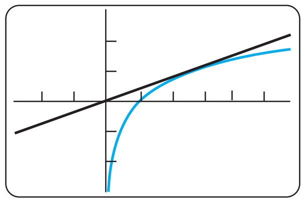
142. Linealización de $\log_3 x$

a. Determine la linealización de $f(x) = \log_3 x$ en $x = 3$. Luego redondee los coeficientes a dos decimales.

T **b.** Trace juntas las gráficas de la linealización y de la función en la ventana $0 \le x \le 8$ y $2 \le x \le 4$.

T **143. ¿Cuál es más grande, π^e o e^π?** Las calculadoras han develado un poco del misterio de ésta, alguna vez, desafiante pregunta. (Continúe y compruebe; verá que es un resultado sorprendentemente cercano). Aunque puede responder la pregunta sin calculadora.

a. Determine una ecuación para la línea que pasa por el origen y es tangente a la gráfica de $y = \ln x$.



[–3, 6] por [–3, 3]

b. Con base en las gráficas de $y = \ln x$ y la recta tangente, dé un argumento para explicar por qué $\ln x < x/e$ para toda x positiva, $x \ne$ e.

c. Demuestre que $\ln(x^e) < x$ para toda x positiva, $x \ne e$.

d. Concluya que $x^e < e^x$ para toda x positiva, $x \ne e$.

e. Por lo tanto, ¿cuál es más grande, π^e o e^π?

T **144. Una representación decimal de e** Por medio de la resolución de la ecuación $\ln x = 1$, determine e con tantos decimales como su calculadora lo permita; para ello, utilice el método de Newton de la sección 4.6.

7.4 Cambio exponencial y ecuaciones diferenciales con variables separables

Las funciones exponenciales aumentan o disminuyen muy rápidamente con cambios en la variable independiente. Éstas describen crecimiento o decaimiento en una amplia variedad de situaciones naturales e industriales. La variedad de modelos que tienen como base dichas funciones explican en parte su importancia. Ahora estudiaremos la suposición básica de proporcionalidad que conduce a tal *cambio exponencial*.

Cambio exponencial

Al modelar muchas situaciones de la realidad, una cantidad y aumenta o disminuye a una tasa proporcional a su magnitud en un instante dado t. Ejemplos de tales cantidades incluyen la cantidad de un material radiactivo que decae, el tamaño de una población, y la diferencia de temperaturas entre una taza de café caliente y la de la habitación. Las cantidades varían de acuerdo con el **cambio exponencial**.

Si denominamos y_0 a la cantidad presente en el instante $t = 0$, entonces determinamos y como una función de t, resolviendo el siguiente problema de valor inicial:

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dy}{dt} = ky \tag{1a}$$

$$\text{Condición inicial:} \quad y = y_0 \quad \text{cuando} \quad t = 0. \tag{1b}$$

Si y es positiva y creciente, entonces k es positiva y utilizamos la ecuación (1a) para decir que la tasa de crecimiento es proporcional a lo acumulado. Si y es positiva y decreciente, entonces k es negativa y utilizamos la ecuación (1a) para decir que la tasa de decaimiento es proporcional a la cantidad que aún queda.

Es claro que si $y_0 = 0$, la función constante $y = 0$ es una solución de la ecuación (1a). Para determinar las soluciones distintas de cero, dividimos la ecuación (1a) entre y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} &= k && y \neq 0\\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int k\,dt && \text{Integrar con respecto a } t;\\
\ln|y| &= kt + C && \textstyle\int (1/u)\,du = \ln|u| + C.\\
|y| &= e^{kt+C} && \text{Exponenciar.}\\
|y| &= e^{C}\cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^a\cdot e^b\\
y &= \pm e^{C}e^{kt} && \text{Si } |y| = r, \text{ entonces } y = \pm r.\\
y &= Ae^{kt}. && A \text{ es una forma abreviada para } \pm e^{C}.
\end{aligned}$$

Al permitir que A tome el valor de cero, además de todos los valores posibles $\pm e^C$, en la fórmula podemos incluir la solución $y = 0$.

El valor de A para el problema de valor inicial se determina despejando A cuando $y = y_0$ y $t = 0$:

$$y_0 = Ae^{k\cdot 0} = A.$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y = y_0 e^{kt}. \tag{2}$$

Se dice que las cantidades que cambian de esta manera experimentan un **crecimiento exponencial** si $k > 0$, y **decaimiento exponencial** si $k < 0$. El número k se denomina **tasa constante** de cambio.

La deducción de la ecuación (2) indica que las únicas funciones que son su propia derivada son múltiplos constantes de la función exponencial.

Antes de presentar varios ejemplos de cambio exponencial, consideraremos el proceso que utilizamos para hacerlo.

Ecuaciones diferenciales separables

El cambio exponencial se modela mediante una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = ky$, para alguna constante k diferente de cero. Con mayor generalidad, suponga que tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

donde f es una función *tanto* de la variable independiente como de la variable dependiente. Una **solución** de la ecuación es una función derivable $y = y(x)$ definida en un intervalo de valores de x (quizás infinito), tal que

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = f(x, y(x))$$

en ese intervalo. Esto es, cuando $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se sustituyen en la ecuación diferencial, la ecuación resultante es verdadera para toda x en el intervalo de solución. La **solución general** es una solución $y(x)$ que contiene a todas las soluciones posibles y siempre tiene una constante arbitraria.

La ecuación (3) es **separable**, si f puede expresarse como un producto de una función de x y una función de y. Así, la ecuación diferencial tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)H(y).$$

g es una función de x; H es una función de y.

Cuando rescribimos esta ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

$H(y) = \frac{1}{h(y)}$

su forma diferencial nos permite agrupar todos los términos de y con dy y todos los términos de x con dx:

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Ahora simplemente integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx. \tag{4}$$

Después de completar la integración obtenemos la solución y definida de manera implícita como una función de x.

La justificación de que basta con que integremos ambos lados en la ecuación (4), tiene como base la regla de sustitución (sección 5.5):

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx\\ &= \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}\\ &= \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y)e^x, \quad y > -1.$$

Solución Como $1 + y$ nunca es cero para $y > -1$, podemos resolver la ecuación mediante la separación de variables.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + y)e^x\\ dy &= (1 + y)e^x\,dx && \text{Trate a } dy/dx \text{ como un cociente de diferenciales y multiplique ambos lados por } dx.\\ \frac{dy}{1 + y} &= e^x\,dx && \text{Divida entre } (1 + y).\\ \int \frac{dy}{1 + y} &= \int e^x\,dx && \text{Integre ambos lados.}\\ \ln(1 + y) &= e^x + C && C \text{ representa la constante combinada de integración.}\end{aligned}$$

La última ecuación da y como una función implícita de x. ■

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $y(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x(y^2+1)$.

Solución Cambiamos a la forma diferencial, separamos las variables e integramos.

$$
\begin{aligned}
y\,(x+1)\,dy &= x(y^2+1)\,dx \\
\frac{y\,dy}{y^2+1} &= \frac{x\,dx}{x+1} && x \neq -1 \\
\int \frac{y\,dy}{1+y^2} &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx && \text{Divida } x \text{ entre } x+1. \\
\frac{1}{2}\ln(1+y^2) &= x - \ln|x+1| + C.
\end{aligned}
$$

La última ecuación brinda la solución y como una función implícita de x. ■

El problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad y(0) = y_0$$

incluye una ecuación diferencial separable, y la solución $y = y_0e^{kt}$ expresa un cambio exponencial. Ahora presentamos varios ejemplos de tal cambio.

Crecimiento ilimitado de población

En sentido estricto, el número de individuos en una población (por ejemplo, de personas, plantas, animales o bacterias) es una función no continua del tiempo, ya que adopta valores discretos. Sin embargo, cuando el número de individuos se vuelve bastante grande, la población puede aproximarse por medio de una función continua. En muchos contextos, otra hipótesis razonable es la diferenciabilidad de la función que se usa para aproximar, porque permite el uso de cálculo para modelar y predecir el tamaño de la población.

Si suponemos que la proporción de individuos que se reproducen se mantiene constante y que hay una fecundidad constante, entonces la tasa (o razón) de nacimientos es proporcional al número $y(t)$ de individuos presentes en cualquier instante t. También supondremos que la tasa de mortalidad de la población es estable y proporcional a $y(t)$. Si, además, ignoramos el fenómeno de la migración (emigración e inmigración), entonces la tasa de crecimiento dy/dt es la tasa de nacimiento menos la tasa de mortalidad, que es igual, de acuerdo con nuestras hipótesis, a la diferencia de las dos proporciones. En otras palabras, $dy/dt = ky$, por lo que $y = y_0e^{kt}$, donde y_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. Como sucede con todo fenómeno de crecimiento, éste podría tener limitaciones debido al entorno, pero no nos ocuparemos de ello. La proporcionalidad $dy/dt = ky$ modela un *crecimiento ilimitado de población*.

En el siguiente ejemplo suponemos este modelo demográfico para ver cómo en una población el número de individuos infectados por una enfermedad disminuye cuando la enfermedad se trata de manera adecuada.

EJEMPLO 3 Un modelo para la forma de erradicar una enfermedad, cuando se trata de manera adecuada, supone que la tasa dy/dt a la cual cambia el número de individuos infectados es proporcional al número y. El número de personas sanadas es proporcional al número y de individuos infectados. Suponga que en el curso de cualquier año dado, el número de casos de una enfermedad se reduce en 20 por ciento. Si actualmente hay 10,000 casos, ¿cuántos años serán necesarios para reducir el número a 1000?

Solución Utilizamos la ecuación $y = y_0e^{kt}$. Hay tres cosas por determinar: el valor de y_0, el valor de k y el tiempo cuando $y = 1000$.

Valor de y_0. Tenemos libertad de iniciar la cuenta del tiempo en cualquier instante. Si contamos a partir de hoy, entonces $y = 10{,}000$ cuando $t = 0$, así que $y_0 = 10{,}000$. Ahora nuestra ecuación es

$$y = 10{,}000\,e^{kt}. \tag{5}$$

Valor de k. Cuando $t = 1$ año, el número de casos será 80% de su valor actual, esto es, 8000. De ahí que,

$$\begin{aligned} 8000 &= 10{,}000e^{k(1)} && \text{Ecuación (5) con } t = 1 \text{ y } y = 8000 \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 && \text{Tomar logaritmo de ambos lados.} \\ k &= \ln 0.8 < 0. \end{aligned}$$

En cualquier instante dado t,

$$y = 10{,}000e^{(\ln 0.8)t}. \tag{6}$$

El valor de t que hace $y = 1000$. En la ecuación (4) igualamos y a 1000 y despejamos a t:

$$\begin{aligned} 1000 &= 10{,}000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 && \text{Tomar logaritmo de ambos lados.} \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \text{ años}. \end{aligned}$$

Tardará un poco más de 10 años reducir el número de casos a 1000. ■

Radiactividad

Algunos átomos son inestables, lo que significa que, de forma espontánea, son capaces de emitir masa o radiación. Este proceso se denomina **decaimiento radiactivo**, y el elemento cuyos átomos sufren espontáneamente este proceso se conoce como **radiactivo**. En ocasiones, cuando un átomo emite parte de su masa en este proceso de radiactividad, el resto de los átomos se reestructuran para formar un átomo de algún nuevo elemento. Por ejemplo, el carbono 14 radiactivo decae en nitrógeno, mientras que el radio, a lo largo de varios pasos radiactivos intermedios, se transforma en plomo.

Los experimentos han demostrado que, en cualquier instante, la tasa a la que decae un elemento radiactivo (medido como el número de núcleos que cambian por unidad de tiempo) es aproximadamente proporcional al número de núcleos radiactivos presentes. En consecuencia, el decaimiento de un elemento radiactivo se describe por medio de la ecuación $dy/dt = -ky$, $k > 0$. Por convención, aquí se utiliza $-k$, con $k > 0$, para enfatizar que y decrece. Si y_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en el instante cero, entonces su número en cualquier instante posterior t será

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad k > 0.$$

En el caso del gas radón 222, t se mide en días y $k = 0.18$. En el caso del radio 226, que se utilizaba en las carátulas de los relojes para hacer que brillaran en la noche (una práctica peligrosa), t se mide en años y $k = 4.3 \times 10^{-4}$.

La **vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo que se requiere para que la mitad de los núcleos en una muestra se desintegren. Es un hecho interesante que la vida media es una constante que no depende del número de núcleos radiactivos iniciales en la muestra, sino sólo de la sustancia radiactiva.

Para ver por qué, sea y_0 el número de núcleos radiactivos en la muestra al inicio. Entonces el número y de núcleos en cualquier instante t será $y = y_0e^{-kt}$. Buscamos el valor de t en el que el número de núcleos radiactivos presentes sea igual a la mitad del número original:

$$\begin{aligned} y_0 e^{-kt} &= \frac{1}{2} y_0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 && \text{Regla del recíproco para logaritmos} \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

$$\text{Vida media} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7}$$

Por ejemplo, la vida media del radón 222 es

$$\text{vida media} = \frac{\ln 2}{0.18} \approx 3.9 \text{ días.}$$

EJEMPLO 4 En ocasiones, el decaimiento de elementos radiactivos puede utilizarse para datar hechos del pasado de la Tierra. En un organismo vivo, la razón de carbono radiactivo, carbono 14, a carbono ordinario permanece constante durante la vida del organismo, que es aproximadamente igual a la razón del entorno del organismo en su época. Sin embargo, al morir el organismo ya no ingiere carbono 14, por lo que la proporción de carbono 14 en los restos del organismo disminuye conforme el carbono 14 decae.

Para el fechado con carbono 14, los científicos emplean la cifra de 5700 años para la vida media. Determine la edad de una muestra en la que el 10% del núcleo radiactivo original se ha desintegrado.

Solución Utilizamos la ecuación de decaimiento $y = y_0 e^{-kt}$. Debemos determinar dos cosas: el valor de k y el valor de t cuando y es $0.9y_0$ (aún se conserva el 90% de los núcleos radiactivos). Esto es, determinamos t cuando $y_0 e^{-kt} = 0.9y_0$ o $e^{-kt} = 0.9$.

Valor de k: Utilizamos la ecuación (7) de la vida media:

$$k = \frac{\ln 2}{\text{vida media}} = \frac{\ln 2}{5700} \qquad (\text{alrededor de } 1.2 \times 10^{-4})$$

Valor de t que hace $e^{-kt} = 0.9$:

$$\begin{aligned} e^{-kt} &= 0.9 \\ e^{-(\ln 2/5700)t} &= 0.9 \\ -\frac{\ln 2}{5700} t &= \ln 0.9 && \text{Tomamos logaritmos en ambos lados.} \\ t &= -\frac{5700 \ln 0.9}{\ln 2} \approx 866 \text{ años} \end{aligned}$$

La muestra tiene una antigüedad de aproximadamente 866 años. ■

Transferencia de calor: Ley de Newton del enfriamiento

Cuando se deja sopa en un tazón metálico, el contenido se enfría hasta llegar a la temperatura ambiente. Un lingote de plata caliente inmerso en agua se enfría a la temperatura de ésta. En tales situaciones, la velocidad a la que la temperatura de un objeto cambia en cualquier instante es casi proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del medio que lo rodea. Dicha observación se denomina *ley de Newton del enfriamiento*, aunque también se aplica para calentamiento.

Si H es la temperatura del objeto en el instante t, y H_S es la temperatura constante del ambiente, entonces la ecuación diferencial es

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S). \tag{8}$$

Si sustituimos y por $(H - H_S)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}(H - H_S) = \frac{dH}{dt} - \frac{d}{dt}(H_S) \\
&= \frac{dH}{dt} - 0 && \text{H_S es una constante} \\
&= \frac{dH}{dt} \\
&= -k(H - H_S) && \text{Ecuación (8)} \\
&= -ky. && H - H_S = y
\end{aligned}$$

Ahora sabemos que $y = y_0 e^{-kt}$ es la solución de $dy/dt = -ky$, donde $y(0) = y_0$. La sustitución de $(H - H_S)$ por y nos indica que

$$H - H_S = (H_0 - H_S)e^{-kt}, \tag{9}$$

donde H_0 es la temperatura en $t = 0$. Ésta es la ecuación para la ley de Newton del enfriamiento.

EJEMPLO 5 Un huevo cocido a 98 °C se pone en agua a 18 °C. Después de 5 minutos, la temperatura del huevo es de 38 °C. Suponiendo que el agua no se calienta de forma apreciable, ¿cuánto tardará el huevo en llegar a 20 °C?

Solución Determinamos cuánto tarda el huevo en enfriarse de 98 °C a 20 °C y restamos los 5 minutos ya transcurridos. Por medio de la ecuación (9) con $H_S = 18$ y $H_0 = 98$, la temperatura del huevo al cabo de t minutos, después de colocarlo en el agua, es

$$H = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}.$$

Para hallar k, utilizamos la información de que $H = 38$ cuando $t = 5$:

$$\begin{aligned}
38 &= 18 + 80e^{-5k} \\
e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\
-5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\
k &= \frac{1}{5}\ln 4 = 0.2 \ln 4 \qquad (\text{aproximadamente } 0.28).
\end{aligned}$$

La temperatura del huevo en el instante t es $H = 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t}$. Ahora determinamos el instante t cuando $H = 20$:

$$\begin{aligned}
20 &= 18 + 80e^{-(0.2 \ln 4)t} \\
80e^{-(0.2 \ln 4)t} &= 2 \\
e^{-(0.2 \ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\
-(0.2 \ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\
t &= \frac{\ln 40}{0.2 \ln 4} \approx 13 \text{ min}.
\end{aligned}$$

La temperatura del huevo será de 20 °C al cabo de 13 minutos después de colocarlo en el agua para enfriarlo. Puesto que tomó 5 minutos en llegar a 38 °C, entonces tardará casi 8 minutos más en llegar a 20 °C. ■

Ejercicios 7.4

Verificación de soluciones

En los ejercicios 1 a 4, demuestre que cada función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que le acompaña.

1. $2y' + 3y = e^{-x}$
   a. $y = e^{-x}$ b. $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$
   c. $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$
2. $y' = y^2$
   a. $y = -\dfrac{1}{x}$ b. $y = -\dfrac{1}{x+3}$ c. $y = -\dfrac{1}{x+C}$
3. $y = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \quad x^2y' + xy = e^x$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,dt, \quad y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 5 a 8, demuestre que cada función es una solución del problema con valor inicial dado.

	Ecuación diferencial	Condición inicial	Solución candidata
5.	$y' + y = \dfrac{2}{1+4e^{2x}}$	$y(-\ln 2) = \dfrac{\pi}{2}$	$y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$
6.	$y' = e^{-x^2} - 2xy$	$y(2) = 0$	$y = (x-2)e^{-x^2}$
7.	$xy' + y = -\operatorname{sen} x,$ $x > 0$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$	$y = \dfrac{\cos x}{x}$
8.	$x^2y' = xy - y^2,$ $x > 1$	$y(e) = e$	$y = \dfrac{x}{\ln x}$

Ecuaciones diferenciales separables

En los ejercicios 9 a 22, resuelva la ecuación diferencial.

9. $2\sqrt{xy}\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x, y > 0$
10. $\dfrac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$
11. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$
12. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{-y}$
13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}\cos^2\sqrt{y}$
14. $\sqrt{2xy}\dfrac{dy}{dx} = 1$
15. $\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$
16. $(\sec x)\dfrac{dy}{dx} = e^{y+\operatorname{sen} x}$
17. $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$
18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$
19. $y^2\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y^3 - 6x^2$
20. $\dfrac{dy}{dx} = xy + 3x - 2y - 6$
21. $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = ye^{x^2} + 2\sqrt{y}\,e^{x^2}$
22. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^x + e^{-y} + 1$

Aplicaciones y ejemplos

T Las respuestas de la mayoría de los siguientes ejercicios están en términos de logaritmos y exponenciales. Sería útil usar una calculadora que permita expresar las respuestas en forma decimal.

23. **La evolución humana continúa** El análisis de la reducción del tamaño de los dientes, realizada por C. Loring Brace y sus colegas del Museo de Antropología de la Universidad de Michigan, indica que el tamaño de los dientes humanos decrece de manera continua y que el proceso de evolución no se detuvo hace aproximadamente 30,000 años, como muchos científicos aseguran. Por ejemplo, el tamaño de los dientes de los europeos septentrionales actualmente disminuye a razón de 1% por cada 1000 años.
    a. Si t representa el tiempo, en años, y y representa el tamaño de los dientes, utilizamos la condición $y = 0.99y_0$ cuando $t = 1000$ para determinar el valor de k en la ecuación $y = y_0e^{kt}$. Luego utilizamos este valor de k para responder las preguntas restantes.
    b. ¿En cuántos años los dientes humanos serán del 90% de su tamaño actual?
    c. ¿Cuál será el tamaño de los dientes de nuestros descendientes dentro de 20,000 años (como un porcentaje del tamaño actual)?
24. **Presión atmosférica** La presión atmosférica de la Tierra p con frecuencia se modela suponiendo que la tasa dp/dh a la cual cambia p con la altura sobre el nivel del mar h es proporcional a p. Suponga que la presión al nivel del mar es de 1013 milibares (aproximadamente 14.7 libras por in^2) y que la presión a una altura de 20 km es de 90 milibares.
    a. Resuelva el problema de valor inicial

       Ecuación diferencial: $dp/dh = kp$ (k una constante)

       Condición inicial: $p = p_0$ cuando $h = 0$

       para expresar p en términos de h. Determine los valores de p_0 y k a partir de la información de la altura y la presión dadas.
    b. ¿Cuál es la presión atmosférica en $h = 50$ km?
    c. ¿A qué altura la presión es igual a 900 milibares?
25. **Reacciones químicas de primer orden** En algunas reacciones químicas, la tasa a la cual la cantidad de una sustancia cambia con el tiempo es proporcional a la cantidad presente. Por ejemplo, para la transformación de δ-glucono lactona en ácido glucónico tenemos
$$\frac{dy}{dt} = -0.6y$$
cuando t se mide en horas. Si cuando $t = 0$ hay 100 gramos de δ-glucono lactona, ¿cuántos gramos quedarán después de la primera hora?
26. **Inversión del azúcar** El procesamiento de azúcar sin refinar incluye un paso denominado "inversión", que modifica la estructura molecular del azúcar. Una vez que el proceso inicia, la tasa de cambio de la cantidad de azúcar sin refinar es proporcional a la cantidad de azúcar que queda sin refinar. Si durante las primeras 10 horas, 1000 kg de azúcar sin refinar se reducen a 800 kg, ¿qué cantidad de azúcar sin refinar quedará después de otras 14 horas?
27. **Trabajo submarino** La intensidad de la luz, $L(x)$, a x ft bajo la superficie del océano satisface la ecuación diferencial
$$\frac{dL}{dx} = -kL.$$
Como buzo, usted sabe por experiencia que la intensidad de la luz se reduce a la mitad a 18 ft de profundidad en el mar Caribe. Cuando la intensidad de la luz se reduce a menos de un décimo de su valor en la superficie no es posible trabajar sin luz artificial. ¿Hasta que profundidad espera trabajar sin luz artificial?

28. Voltaje en un condensador que se descarga Suponga que la electricidad fluye desde un condensador a una velocidad que es proporcional al voltaje V que cruza sus terminales y que, si t se mide en segundos,

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V.$$

Despeje V de esta ecuación; para ello, use V_0 como el valor de V cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará el voltaje en reducirse al 10% de su valor original?

29. Bacteria del cólera Suponga que las bacterias en una colonia crecen desenfrenadamente, por la ley de cambio exponencial. La colonia inicia con 1 bacteria y se duplica cada media hora. ¿Cuántas bacterias tendrá la colonia al término de 24 horas? (En condiciones favorables de laboratorio, el número de bacterias de cólera puede duplicarse cada 30 minutos. En una persona infectada, muchas bacterias se destruyen, pero este ejemplo ayuda a explicar por qué una persona que se siente bien en la mañana, por la noche puede estar muy grave).

30. Crecimiento de bacterias Una colonia de bacterias crece en condiciones ideales en un laboratorio, de manera que la población aumenta con el tiempo de forma exponencial. Después de 3 horas, hay 10,000 bacterias. Después de 5, hay 40,000. ¿Cuántas bacterias había al principio?

31. Incidencia de una enfermedad (*Continuación del ejemplo 3*). Suponga que en cualquier año dado, el número de casos puede reducirse en 25% en vez del 20 por ciento.

a. ¿Cuánto tardará en reducirse el número de casos a 1000?

b. ¿Cuánto tardará en erradicarse la enfermedad, esto es, en reducirse el número de casos a menos de 1?

32. Población de Estados Unidos La Oficina de Censos de Estados Unidos lleva un registro permanente de la población del país. El 26 de marzo de 2008 el total crecía a razón de 1 persona cada 13 segundos. La cifra de ese día a las 2:31 P.M., hora del Este, fue de 303,714,725.

a. Si suponemos crecimiento exponencial a una tasa constante, determine la constante para la tasa de crecimiento de la población (personas por año de 365 días).

b. A esa tasa, ¿cuál será la población de Estados Unidos a las 2:31 P.M. horas del Este el 26 de marzo de 2015?

33. Agotamiento del petróleo Suponga que la cantidad de petróleo bombeado desde un pozo en Whittier, California, disminuye a una razón continua del 10% anual. ¿Cuándo disminuirá la producción a una quinta parte de su valor actual?

34. Descuento continuo en precio Para alentar a los clientes a hacer compras de 100 unidades, el departamento de ventas de su compañía aplica un descuento continuo, lo que hace del precio unitario una función $p(x)$ del número x de unidades compradas. El descuento reduce el precio a razón de \$0.01 por unidad adquirida. El precio por unidad para un pedido de 100 unidades es $p(100) = \$20.09$.

a. Determine $p(x)$ resolviendo el siguiente problema de valor inicial:

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{100}p$$

$$\text{Condición inicial:} \quad p(100) = 20.09.$$

b. Determine el precio unitario $p(10)$ para un pedido de 10 unidades, y el precio unitario $p(90)$ para un pedido de 90 unidades.

c. El departamento de ventas le ha preguntado si este descuento es tan grande que el ingreso de la compañía, $r(x) = x \cdot p(x)$ sería menor para un pedido de 100 unidades que, digamos, para uno de 90. Asegúrese de demostrar que r tiene un valor máximo en $x = 100$.

d. Elabore la gráfica de la función de ingresos $r(x) = xp(x)$ para $0 \le x \le 200$.

35. Plutonio 239 La vida media del isótopo de plutonio es de 24,360 años. Si en un accidente nuclear se liberan a la atmósfera 10 *g* de plutonio, ¿cuántos años pasarán para que decaiga el 80% de los isótopos?

36. Polonio 210 La vida media del polonio es de 139 días, pero la muestra ya no será útil cuando se haya desintegrado el 95% de los núcleos radiactivos presentes en ella al recibirse la muestra. ¿Hasta cuántos días después de recibida la muestra de polonio podrá utilizarse?

37. La vida media de un núcleo radiactivo Los físicos que usan la ecuación de la radiactividad $y = y_0e^{-kt}$ llaman vida media de un núcleo radiactivo al número $1/k$. Para el radón, la vida media es alrededor de $1/0.18 = 5.6$ días. La vida media de un núcleo de carbono 14 es de más de 8000 años. Demuestre que el 95% de los núcleos radiactivos presentes en la muestra se desintegrarán antes de tres vidas medias, es decir, en el instante $t = 3/k$. Así, la vida media del núcleo representa un método sencillo para estimar cuánto dura la radiactividad de una muestra.

38. Californio 252 ¿Qué elemento cuesta 27 millones de dólares por gramo y sirve para combatir el cáncer cerebral, para analizar el contenido de azufre del carbón y para detectar explosivos en el equipaje? La repuesta es el californio 252, un isótopo radiactivo tan raro que en el mundo occidental sólo se han obtenido 8 *g* desde que Glenn Seaborg lo descubrió en 1950. La vida media del isótopo es de 2.645 años: bastante larga para ser útil y bastante corta para tener alta radiactividad por masa unitaria. Un microgramo del isótopo libera 170 millones de neutrones por segundo.

a. ¿Cuál es el valor de k en la ecuación de decaimiento de este isótopo?

b. ¿Cuál es la vida media del isótopo? (Véase el ejercicio 37).

c. ¿Cuánto tardará en desintegrarse el 95% de los núcleos radiactivos de una muestra?

39. Cómo se enfría la sopa Suponga que un tazón de sopa se enfría de 90 °C a 60 °C en 10 minutos, en una habitación a 20 ° C. Responda las siguientes preguntas usando la ley de Newton del enfriamiento.

a. ¿Cuánto más tardará la sopa en enfriarse a 35 °C?

b. En vez de dejarla en la habitación, la sopa a 90 °C se guarda en un congelador a −15 °C. ¿Cuánto tardará en enfriarse de 90 °C a 35 °C?

40. Una viga a temperatura desconocida Una viga de aluminio expuesta al frío exterior entra en un taller de troquelado donde la temperatura se mantiene a 65 °F. A los 10 minutos, la viga se calienta a 35 °F, y en otros 10 llega a 50 °F. Estime la temperatura inicial de la viga con la ley de Newton del enfriamiento.

41. Un entorno de temperatura desconocida En un refrigerador se guarda una olla de agua tibia (46 °C). A los 10 minutos, la temperatura del agua es de 39 °C; 10 minutos después, su temperatura es de 33 °C. Con base en la ley de Newton del enfriamiento, estime a qué temperatura está el refrigerador.

42. Enfriamiento de plata en el aire La temperatura de un lingote de plata es ahora 60 °C más alta que la temperatura ambiente. Hace 20 minutos era 70 °C más alta que ésta. ¿Cuánto más alta que la temperatura ambiente estará la plata

a. ¿Dentro de 15 minutos? **b.** ¿Dentro de 2 horas?

c. ¿Cuándo estará a 10 °C más que la temperatura ambiente?

43. **La edad del lago Cráter** El carbón vegetal de un árbol caído durante la erupción volcánica que formó el lago Cráter, en Oregon, contenía el 44.5% del carbono 14 que se encuentra por lo regular en la materia viva. ¿Cuál es la edad del lago Cráter?

44. **Sensibilidad del fechado con carbono 14 a la medición** Para apreciar el efecto de un error relativamente pequeño en la estimación del contenido de carbono 14 de una muestra cuya antigüedad desea determinarse, considere esta situación hipotética:
   a. Un hueso fósil descubierto en el centro de Illinois en el año 2000 d.C. conserva el 17% de su carbono 14 original. Estime en qué año murió el animal.
   b. Repita el inciso (a), pero ahora suponga el 18% en vez del 17 por ciento.
   c. Repita el inciso (a), pero ahora suponga el 16% en vez del 17 por ciento.

45. **Carbono 14** La momia humana congelada más antigua conocida, descubierta en el glacial Schnalstal en los Alpes italianos en 1991 y llamada Otzi, se encontró con unos zapatos de paja y un abrigo de piel con pelo de cabra puestos; además, la momia se encuentra sujetando un hacha de cobre y un cuchillo de piedra. Se estima que Otzi murió 5000 años antes de que fuera descubierto en el glacial. ¿Cuánto del carbono 14 permanecía en Otzi en el momento en el que fue descubierto?

46. **Falsificaciones de arte** Un cuadro atribuido a Vermeer (1632-1675), que hoy no podría contener más del 96.2% de su carbono 14 original, contiene 99.5 por ciento. ¿Cuál es la antigüedad de la falsificación?

7.5 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Guillaume François Antoine de l'Hôpital
(1661–1704)
Johann Bernoulli
(1667–1748)

Johann Bernoulli descubrió una regla para calcular límites de fracciones cuyos numeradores y denominadores tendían a cero o a $+\infty$. La regla ahora se conoce como **regla de L'Hôpital**, en honor de Guillaume de L'Hôpital, un noble francés que escribió el primer texto introductorio de cálculo diferencial, en el que apareció impresa esta regla. Con frecuencia, los límites que incluyen funciones trascendentes requieren el uso de la regla para su cálculo.

Forma indeterminada 0/0

Si queremos conocer cómo se comporta la función

$$F(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

cerca de $x = 0$ (donde no está definida), podemos examinar el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$. No podemos aplicar la regla del cociente para límites (teorema 1 del capítulo 2), porque el límite del denominador es cero. Además, en este caso, *ambos* (numerador y denominador) tienden a 0, y $0/0$ no está definido. En general, tales límites pueden existir o no, pero el límite sí existe para la función $f(x)$ bajo estudio aplicando la regla de L'Hôpital, como veremos en el ejemplo 1d.

Si las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ son ambas cero en $x = a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

no puede determinarse sustituyendo $x = a$. La sustitución produce $0/0$, una expresión carente de significado, que no podemos evaluar. Utilizamos $0/0$ como una notación para una expresión conocida como **forma indeterminada**. Con frecuencia aparecen otras expresiones carentes de significado, tales como ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, 0^0 y 1^∞, que no es posible evaluar de una manera sistemática; estas formas también se denominan formas indeterminadas. En ocasiones, no siempre, los límites que llevan a formas indeterminadas pueden encontrarse mediante cancelación, reacomodo de términos u otras manipulaciones algebraicas. Tal fue nuestra experiencia en el capítulo 2. Nos tomó un trabajo considerable en la sección 2.4 determinar $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$. Pero tuvimos éxito con el límite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

a partir de que calculamos derivadas y el cual produce la forma indeterminada $0/0$ cuando sustituimos $x = a$. La regla de L'Hôpital nos permite recurrir a nuestro éxito con las derivadas para evaluar los límites que, de otra forma, conducirían a formas indeterminadas.

TEOREMA 5: Regla de L'Hôpital Suponga que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son derivables en un intervalo abierto I que contiene a a, y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Así,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite de la derecha de esta ecuación.

Al final de esta sección damos una demostración del teorema 5.

¡Precaución!
Para aplicar la regla de L'Hôpital a f/g, divida la derivada de f entre la derivada de g. No caiga en la trampa de tomar la derivada de f/g. El cociente a utilizar es f'/g', no $(f/g)'$.

EJEMPLO 1 Los siguientes límites incluyen las formas indeterminadas $0/0$, así que aplicamos la regla de L'Hôpital. En algunos casos, debe aplicarse de manera repetida.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3 - \cos x}{1} = \left.\frac{3 - \cos x}{1}\right|_{x=0} = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \frac{1}{2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x} \qquad \text{Todavía } \frac{0}{0}\text{; derivar otra vez.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} \qquad \text{No aparece } \frac{0}{0}\text{; el límite se encuentra.}$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \qquad \text{Aún queda } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \qquad \text{Aún queda } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \qquad \text{No aparece } \frac{0}{0}\text{; el límite se encuentra.}$$ ■

A continuación se presenta un resumen del procedimiento seguido en el ejemplo 1.

Uso de la regla de L'Hôpital
Para determinar

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

mediante la regla de L'Hôpital, continuamos derivando f y g, mientras se tenga la forma $0/0$ en $x = a$. Pero tan pronto como una o la otra de las derivadas sea diferente de cero en $x = a$, detenemos la derivación. La regla de L'Hôpital no se aplica cuando el numerador o el denominador tienen un límite finito distinto de cero.

EJEMPLO 2 Tenga cuidado de aplicar correctamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \text{No aparece } \frac{0}{0}\text{; el límite se encuentra.}$$

Hasta ahora, el cálculo es correcto, pero si continuamos derivando en un intento de aplicar una vez más la regla de L'Hôpital, obtendremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

que no es el límite correcto. La regla de L'Hôpital sólo puede aplicarse a límites que dan formas indeterminadas, y $0/1$ no es una forma indeterminada. ■

La regla de L'Hôpital también se aplica a límites laterales.

EJEMPLO 3 En este ejemplo los límites laterales son diferentes.

Recuerde que ∞ y $+\infty$ significan lo mismo.

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \text{Positivo para } x > 0$$

(b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad \text{Negativo para } x < 0$$ ■

Formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$

Algunas veces, cuando tratamos de evaluar un límite cuando $x \to a$ y sustituimos $x = a$, obtenemos una forma indeterminada como ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, en vez de $0/0$. Primero consideramos la forma ∞/∞.

En tratamientos de cálculo más avanzados se demuestra que la regla de L'Hôpital se aplica a la forma indeterminada ∞/∞, así como a $0/0$. Si $f(x) \to \pm\infty$ y $g(x) \to \pm\infty$, cuando $x \to a$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que exista el límite del lado derecho. En la notación $x \to a$, a puede ser finito o infinito. Además, $x \to a$ puede remplazarse por los límites laterales $x \to a^+$ o $x \to a^-$.

EJEMPLO 4 Determine los límites de estas formas ∞/∞:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Solución

(a) El numerador y el denominador son discontinuos en $x = \pi/2$, así que allí analizamos los límites laterales. Para aplicar la regla de L'Hôpital, seleccionamos I como cualquier intervalo abierto con $x = \pi/2$ como uno de sus extremos.

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty} \text{ del lado izquierdo}$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1$$

El límite por la derecha también es 1, con $(-\infty)/(-\infty)$ como la forma indeterminada. Por lo tanto, el límite bilateral es igual a 1.

(b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\displaystyle \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$ ■

Ahora ponemos nuestra atención en las formas indeterminadas $\infty \cdot 0$ y $\infty - \infty$. En ocasiones, tales formas pueden manejarse mediante manipulaciones algebraicas para convertirlas a una forma $0/0$ o ∞/∞. Una vez más, no queremos sugerir que $\infty \cdot 0$ o $\infty - \infty$ es un número. Sólo son notaciones para comportamientos funcionales cuando consideramos los límites. A continuación se presentan ejemplos de cómo trabajar con tales formas indeterminadas.

EJEMPLO 5 Determine los límites de estas formas $\infty \cdot 0$:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ **(b)** $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

Solución

(a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h} \operatorname{sen} h\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ $\infty \cdot 0$; sea $h = 1/x$.

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}$ $\infty \cdot 0$ convertido a ∞/∞

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/2x^{3/2}}$$ Regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-2\sqrt{x}\right) = 0$$ ■

EJEMPLO 6 Determine el límite de esta forma $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right).$$

Solución Si $x \to 0^+$, entonces $\operatorname{sen} x \to 0^+$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty.$$

De manera similar, si $x \to 0^-$, entonces $\operatorname{sen} x \to 0^-$ y

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty.$$

Ninguna forma revela lo que sucede en el límite. Para determinarlo, primero combinamos las fracciones:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$ El denominador común es $x \operatorname{sen} x$.

Luego aplicamos la regla de L'Hôpital al resultado:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$ $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x}$$ Aún se tiene $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.$$ ■

Potencias indeterminadas

Los límites que llevan a las formas indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^0 en ocasiones pueden manejarse tomando primero el logaritmo de la función. Utilizamos la regla de L'Hôpital para determinar el límite de la expresión logarítmica y luego exponenciamos el resultado para determinar el límite de la función original. Tal procedimiento se justifica por la continuidad de la función exponencial y el teorema 10 de la sección 2.5; además, se formula como sigue. (La fórmula también es válida para límites laterales).

> Si $\lim_{x\to a} \ln f(x) = L$, entonces
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L.$$
>
> Aquí a puede ser finito o infinito.

EJEMPLO 7 Aplique la regla de L'Hôpital para demostrar que $\lim_{x\to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$.

Solución El límite conduce a la forma indeterminada 1^∞. Dejamos que $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ y determinamos $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$. Como

$$\ln f(x) = \ln (1 + x)^{1/x} = \frac{1}{x} \ln (1 + x),$$

Ahora la regla de L'Hôpital se aplica para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (1 + x)}{x} \qquad \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \\
&= \frac{1}{1} = 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e.$ ■

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Solución El límite conduce a la forma indeterminada ∞^0. Dejamos que $f(x) = x^{1/x}$ y determinamos $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$. Como

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x},$$

la regla de L'Hôpital da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} \\
&= \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$ ■

Demostración de la regla de L'Hôpital

La demostración de la regla de L'Hôpital tiene como base el teorema del valor medio de Cauchy, una extensión del teorema del valor medio que incluye dos funciones en vez de una. Primero demostramos el teorema de Cauchy y luego mostramos cómo éste conduce a la regla de L'Hôpital.

Biografía histórica

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

TEOREMA 6: Teorema de valor medio de Cauchy Suponga que las funciones f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en todo el intervalo (a, b); también suponga que $g'(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces existe un número c en (a, b) en el que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demostración Aplicamos dos veces el teorema del valor medio de la sección 4.2. Primero lo usamos para mostrar que $g(a) \neq g(b)$. Puesto que si $g(b)$ fuera igual a $g(a)$, entonces el teorema del valor medio daría

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

para alguna c entre a y b, lo cual no puede suceder, ya que $g'(x) \neq 0$ en (a, b).

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Esta función es continua y derivable donde f y g lo sean, mientras $F(b) = F(a) = 0$. Por lo tanto, existe un número c entre a y b para el que $F'(c) = 0$. Cuando expresamos esto en términos de f y g, la ecuación se convierte en

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

por lo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \qquad \blacksquare$$

Observe que el teorema del valor medio de la sección 4.2 es el teorema 6 con $g(x) = x$.

El teorema del valor medio de Cauchy tiene una interpretación geométrica para una curva general C en el plano que une a los dos puntos $A = (g(a), f(a))$ y $B = (g(b), f(b))$. En el capítulo 11 aprenderá cómo la curva C puede formularse de manera que exista al menos un punto P en la curva para el que la tangente a la curva en P sea paralela a la recta secante que une a los puntos A y B. La pendiente de esa recta tangente resulta ser el cociente f'/g', evaluado en el número c en el intervalo (a, b), como se asegura en el teorema 6. Puesto que la pendiente de la recta secante que une a A y B es

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

la ecuación en el teorema del valor medio de Cauchy dice que la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la recta secante. Tal interpretación geométrica se muestra en la figura 7.13. En la figura observe que es posible que más de un punto en la curva C tenga una recta tangente que sea paralela a la recta secante que une a A y B.

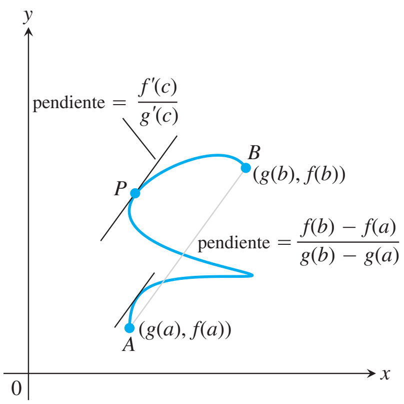


FIGURA 7.13 Existe al menos un punto P en la curva C para el que la pendiente de la tangente a la curva en P es igual que la pendiente de la recta secante que une a los puntos $A(g(a), f(a))$ y $B(g(b), f(b))$.

Demostración de la regla de L'Hôpital Primero establecemos la ecuación límite para el caso $x \to a^+$. El método casi no necesita cambio para aplicarse a $x \to a^-$, mientras la combinación de estos dos casos establece el resultado.

Suponga que x está a la derecha de a. Entonces, $g'(x) \neq 0$, y aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo cerrado de a a x. Este paso produce un número c entre a y x, tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Pero, $f(a) = g(a) = 0$, por lo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cuando x tiende a a, c se aproxima a a, ya que siempre está entre a y x. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

que establece la regla de L'Hôpital para el caso donde x tiende a a por arriba. El caso donde x tiende a a por abajo se demuestra al aplicar el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo cerrado $[x, a]$, $x < a$. ■

Ejercicios 7.5

Determinación de límites de dos formas

En los ejercicios 1 a 6, utilice la regla de L'Hôpital para evaluar el límite. Luego evalúe el límite usando un método estudiado en el capítulo 2.

1. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Aplicación de la regla de L'Hôpital

Utilice la regla de L'Hôpital para determinar los límites en los ejercicios 7 a 50.

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
8. $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$
9. $\lim_{t\to -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$
10. $\lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x}{7x^3+3}$
12. $\lim_{x\to\infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$
13. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t^2}{t}$
14. $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5t}{2t}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1}$
16. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$
17. $\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$
18. $\lim_{\theta\to-\pi/3} \frac{3\theta+\pi}{\operatorname{sen}(\theta+(\pi/3))}$
19. $\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}\theta}{1+\cos 2\theta}$
20. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x - \operatorname{sen}\pi x}$
21. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$
22. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(\csc x)}{(x-(\pi/2))^2}$
23. $\lim_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\operatorname{sen} t}$
24. $\lim_{t\to 0} \frac{t \operatorname{sen} t}{1-\cos t}$
25. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sec x$
26. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$
27. $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen}\theta}-1}{\theta}$
28. $\lim_{\theta\to 0} \frac{(1/2)^\theta-1}{\theta}$
29. $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$
30. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$
31. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$
32. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$
33. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$
34. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$
35. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$
36. $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}, \quad a>0$
37. $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$
38. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \operatorname{sen} x)$
39. $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\ln(\operatorname{sen} x)}$
40. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$
41. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$
42. $\lim_{x\to 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x)$
43. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta-1}{e^\theta-\theta-1}$
44. $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-(1+h)}{h^2}$
45. $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t+t^2}{e^t-t}$
46. $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$
47. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x\tan x}$
48. $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x\operatorname{sen} x}$
49. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\tan\theta-\theta}$
50. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x-3x+x^2}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}$

Productos y potencias indeterminadas

Determine los límites en los ejercicios 51 a 66.

51. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$
52. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$
53. $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$
54. $\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$
55. $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$
56. $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$
57. $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$
58. $\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$
59. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
60. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

61. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$

62. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}$

63. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

64. $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$

65. $\lim_{x\to 0^+} x \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

66. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln x$

Teoría y aplicaciones

La regla de L'Hôpital no ayuda con los límites de los ejercicios 67 al 74. Inténtelo, sólo se quedará en ciclos. Determine los límites de alguna otra forma.

67. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

68. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

69. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x}$

70. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\csc x}$

71. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-3^x}{3^x+4^x}$

72. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+4^x}{5^x-2^x}$

73. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{xe^x}$

74. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^{-1/x}}$

75. ¿Cuál es correcto y cuál es incorrecto? Justifique sus respuestas.

a. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$

b. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-3}=\frac{0}{6}=0$

76. ¿Cuál es correcto y cuál es incorrecto? Justifique sus respuestas.

a. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{2+\operatorname{sen} x}=\frac{2}{2+0}=1$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x^2-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{2x-\cos x}=\frac{-2}{0-1}=2$

77. Sólo uno de estos cálculos es correcto. ¿Cuál es? ¿Por qué son incorrectos los otros? Justifique sus respuestas.

a. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)=0$

b. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)=-\infty$

c. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}=\frac{-\infty}{\infty}=-1$

d. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1/x)}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1/x)}{(-1/x^2)}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

78. Determine todos los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio de Cauchy para las funciones y el intervalo dados.

a. $f(x)=x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)=(-2,0)$

b. $f(x)=x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)$ arbitrario

c. $f(x)=x^3/3-4x,\quad g(x)=x^2,\quad (a,b)=(0,3)$

79. Extensión continua Determine un valor de x que hace que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x-3\operatorname{sen} 3x}{5x^3}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

sea continua en $x=0$. Explique por qué su valor de c funciona.

80. ¿Para qué valores de a y b es

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)=0?$$

T **81. Forma $\infty-\infty$**

a. Estime el valor de

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$$

graficando $f(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ en un intervalo convenientemente grande de valores de x.

b. Ahora confirme su estimación determinando el límite con la regla de L'Hôpital. Como primer paso, multiplique $f(x)$ por la fracción $(x+\sqrt{x^2+x})/(x+\sqrt{x^2+x})$ y simplifique el nuevo numerador.

82. Determine $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$.

T **83. Forma 0/0** Estime el valor de

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

graficando. Luego confirme su estimación con la regla de L'Hôpital.

84. Este ejercicio explora la diferencia entre el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

y el límite

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

a. Utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

T **b.** Grafique

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \quad \text{y} \quad g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

juntas para $x\geq 0$. Compare el comportamiento de f con el de g. Estime el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

c. Confirme su estimación de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ calculándolo con la regla de L'Hôpital.

85. Demuestre que

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{k}\right)^k=e^r.$$

86. Puesto que $x>0$, determine el valor máximo, si existe, de

a. $x^{1/x}$

b. x^{1/x^2}

c. x^{1/x^n} (n es un entero positivo)

d. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n}=1$ para cada entero positivo n.

87. Utilice límites para determinar las asíntotas horizontales de cada función.

a. $y=x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

b. $y=\frac{3x+e^{2x}}{2x+e^{3x}}$

88. Determine $f'(0)$ para $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

T **89. Extensión continua de (sen x)^x para [0, π]**

a. Grafique $f(x) = (\text{sen } x)^x$ en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. ¿Qué valor asignaría a f para hacerla continua en $x = 0$?

b. Verifique su conclusión del inciso (a) determinando $\text{lím}_{x\to 0^+} f(x)$ con la regla de L'Hôpital.

c. Regrese a la gráfica; ahora estime el valor máximo de f en [0, p]. ¿Aproximadamente en dónde se alcanza máx f?

d. Afine su estimación del inciso (c) graficando f' en la misma ventana para ver en dónde su gráfica cruza al eje x. Para simplificar su trabajo, debería borrar el factor exponencial de la expresión para f' y sólo graficar el factor que tiene un cero (raíz).

T **90. La función (sen x)tan x** (*Continuación del ejercicio 89*)

a. Grafique $f(x) = (\text{sen } x)^{\tan x}$ en el intervalo $-7 \leq x \leq 7$. ¿Cómo explica los huecos en la gráfica? ¿De qué ancho son los huecos?

b. Ahora grafique f en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$. La función no está definida en $x = \pi/2$, pero la gráfica no se corta en este punto. ¿Hacia dónde va? ¿Qué valor parece que tiene la gráfica para f en $x = \pi/2$? (*Sugerencia:* Utilice la regla de L'Hôpital para determinar lím f cuando $x \to (\pi/2)^-$ y cuando $x \to (\pi/2)^+$].

c. Continuando con las gráficas en el inciso (b), determine máx f y mín f de manera tan precisa como sea posible y estime los valores de x en los cuales se alcanzan tales valores.

7.6 Funciones trigonométricas inversas

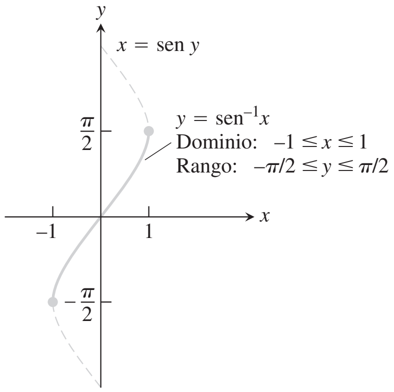


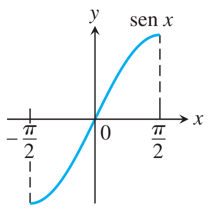
FIGURA 7.14 La gráfica de $y = \text{sen}^{-1} x$.

Las funciones trigonométricas inversas surgen cuando queremos calcular ángulos con base en las medidas de un triángulo. También proporcionan antiderivadas útiles y con frecuencia aparecen en las soluciones de ecuaciones diferenciales. Esta sección muestra cómo dichas funciones se definen, grafican y evalúan, cómo se calculan sus derivadas y por qué aparecen como antiderivadas importantes.

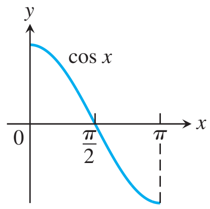
Definición de las inversas

Las seis funciones trigonométricas básicas no son inyectivas (sus valores se repiten de manera periódica). Sin embargo, podemos restringir sus dominios a intervalos en los que sean inyectivas. La función seno aumenta desde -1 en $x = -\pi/2$ hasta $+1$ en $x = \pi/2$. Al restringir su dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ la hacemos inyectiva, de manera que tiene una inversa, $\text{sen}^{-1} x$ (figura 7.14). De manera similar, pueden aplicarse restricciones a los dominios de las seis funciones trigonométricas.

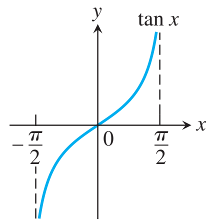
Restricciones de los dominios que hacen inyectivas a las funciones trigonométricas



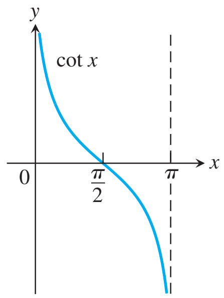
$y = \text{sen } x$
Dominio: $[-\pi/2, \pi/2]$
Rango: $[-1, 1]$



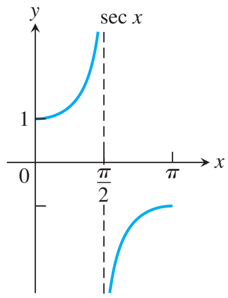
$y = \cos x$
Dominio: $[0, \pi]$
Rango: $[-1, 1]$



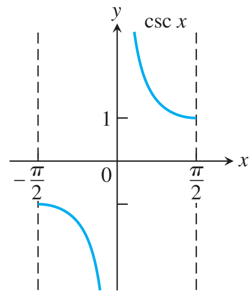
$y = \tan x$
Dominio: $(-\pi/2, \pi/2)$
Rango: $(-\infty, \infty)$



$y = \cot x$
Dominio: $(0, \pi)$
Rango: $(-\infty, \infty)$

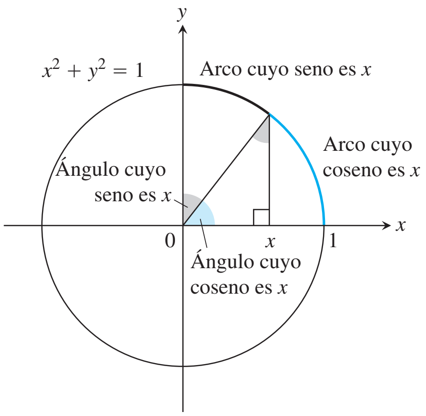


$y = \sec x$
Dominio: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



$y = \csc x$
Dominio: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

El "arco" en arco seno y arco coseno
La siguiente figura da una interpretación geométrica de $y = \text{sen}^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ para ángulos medidos en radianes, que están en el primer cuadrante. Para un círculo unitario, la ecuación $s = r\theta$ se convierte en $s = \theta$, por lo que los ángulos centrales y los arcos que subtienden tienen la misma medida. Si $x = \text{sen}\, y$, entonces, además de ser el ángulo cuyo seno es x, la variable y también es la longitud del arco sobre el círculo unitario que subtiende un ángulo cuyo seno es x. Así, llamamos a y "el arco cuyo seno es x".



Como ahora estas funciones restringidas son inyectivas, tienen inversas, que denotamos con

$$
\begin{array}{lcl}
y = \text{sen}^{-1} x & \text{o} & y = \arcsin x \\
y = \cos^{-1} x & \text{o} & y = \arccos x \\
y = \tan^{-1} x & \text{o} & y = \arctan x \\
y = \cot^{-1} x & \text{o} & y = \operatorname{arccot} x \\
y = \sec^{-1} x & \text{o} & y = \operatorname{arcsec} x \\
y = \csc^{-1} x & \text{o} & y = \operatorname{arccsc} x
\end{array}
$$

Estas ecuaciones se leen "y igual al arco seno de x" o "y igual al arco sen de x" y así sucesivamente.

Precaución El -1 en las expresiones de la inversa significa "inversa". *No* significa recíproco. Por ejemplo, el *recíproco* de sen x es $(\text{sen}\, x)^{-1} = 1/\text{sen}\, x = \csc x$.

Las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas se presentan en la figura 7.15. Obtenemos tales gráficas reflejando las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas con respecto a la recta $y = x$, como en la sección 7.1. Ahora analizaremos con mayor detalle estas funciones y sus derivadas.

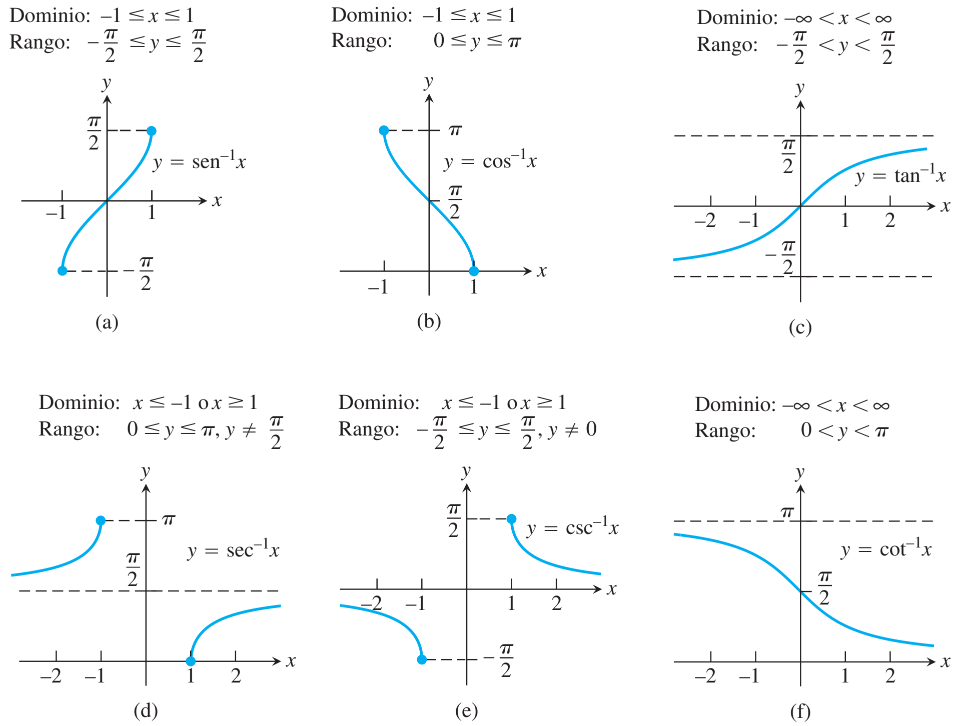


FIGURA 7.15 Gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas básicas.

Las funciones arco seno y arco coseno

Definimos el arco seno y el arco coseno como funciones cuyos valores son ángulos (medidos en radianes) que pertenecen a dominios restringidos de las funciones seno y coseno.

DEFINICIÓN

$\boldsymbol{y = \text{sen}^{-1} x}$ es el número en $[-\pi/2, \pi/2]$ para el cual $\text{sen}\, y = x$.

$\boldsymbol{y = \cos^{-1} x}$ es el número en $[0, \pi]$ para el cual $\cos y = x$.

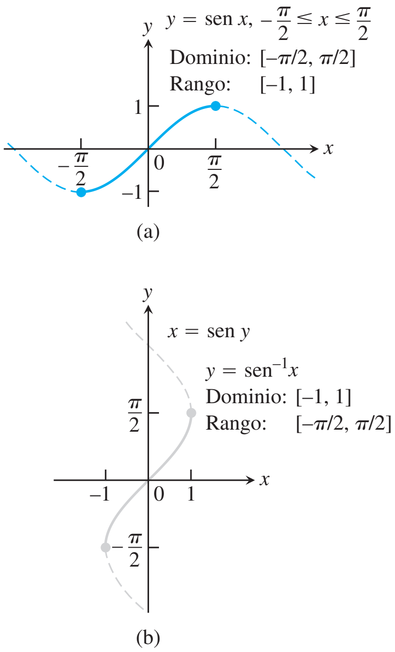


FIGURA 7.16 Las gráficas de (a) $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ y (b) su inversa, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. La gráfica de $\operatorname{sen}^{-1} x$, que se obtuvo por medio de una reflexión con respecto a la recta $y = x$, es una parte de la curva $x = \operatorname{sen} y$.

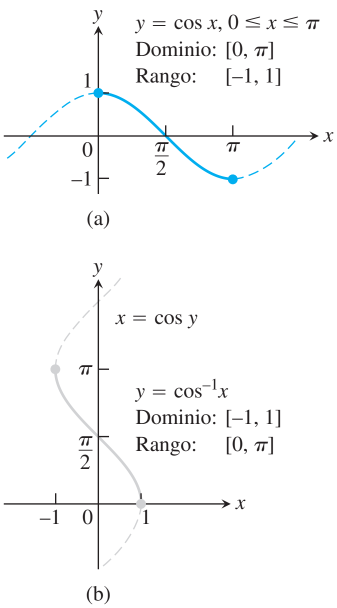


FIGURA 7.17 Las gráficas de (a) $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ y (b) su inversa, $y = \cos^{-1} x$. La gráfica de $\cos-1\ x$, que se obtuvo por medio de la reflexión con respecto a la recta $y = x$, es una parte de la curva $x = \cos y$.

La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ (figura 7.16) es simétrica con respecto al origen (coincide con la gráfica de $x = \operatorname{sen} y$). Por lo tanto, el arco seno es una función impar:

$$\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x. \tag{1}$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ (figura 7.17) no tiene tal simetría.

EJEMPLO 1 Evalúe **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución

(a) Vemos que

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ya que $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ y $\pi/3$ pertenece al rango $[-\pi/2, \pi/2]$ de la función arco seno. Véase la figura 7.18a.

(b) Tenemos

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

ya que $\cos(2\pi/3) = -1/2$ y $2\pi/3$ pertenece al rango $[0, \pi]$ de la función arco coseno. Véase la figura 7.18b. ■

Usando el mismo procedimiento que se ilustró en el ejemplo 1, podemos crear la siguiente tabla de valores comunes para las funciones arco seno y arco coseno.

x	$\operatorname{sen}^{-1} x$	$\cos^{-1} x$
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$	$\pi/3$
$-1/2$	$-\pi/6$	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$

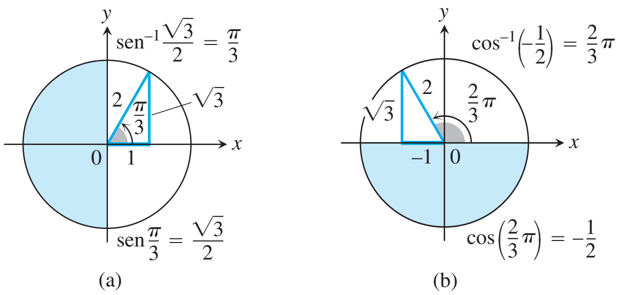


FIGURA 7.18 Valores de las funciones arco seno y arco coseno (ejemplo 1).

EJEMPLO 2 Durante el vuelo de una aeronave de Chicago a San Luis, el piloto considera que el avión está 12 millas fuera de curso, como se indica en la figura 7.19. Determine el ángulo a para un curso paralelo al curso original correcto, el ángulo b, y el ángulo de corrección, $c = a + b$.

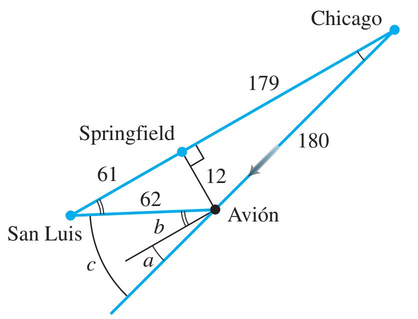


FIGURA 7.19 Diagrama para la corrección del curso (ejemplo 2), con distancias redondeadas a la milla más próxima (el dibujo no está a escala).

Solución De acuerdo con la figura 7.19 y con geometría básica, vemos que 180 sen $a = 12$ y 62 sen $b = 12$, por lo que

$$a = \operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{180} \approx 0.067 \text{ radianes} \approx 3.8°$$

$$b = \operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{62} \approx 0.195 \text{ radianes} \approx 11.2°$$

$$c = a + b \approx 15°.$$

■

Identidades que incluyen arco seno y arco coseno

Como vimos en la figura 7.20, el arco coseno de x satisface la identidad

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi, \tag{2}$$

o

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x. \tag{3}$$

Además, con base en el triángulo de la figura 7.21, vemos que para $x > 0$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2. \tag{4}$$

La ecuación (4) también se cumple para los otros valores de x en $[-1, 1]$, pero no lo podemos concluir a partir del triángulo en la figura 7.21. Sin embargo, es una consecuencia de las ecuaciones (1) y (3) (ejercicio 113).

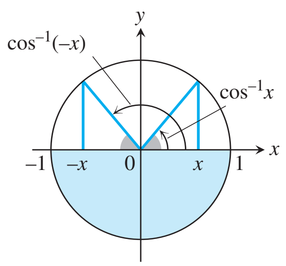


FIGURA 7.20 $\cos^{-1} x$ y $\cos^{-1}(-x)$ son ángulos suplementarios (así que su suma es π).

Inversas de tan x, cot x, sec x y csc x,

El arco tangente de x es un ángulo cuya tangente es x. El arco cotangente de x es un ángulo cuya cotangente es x. Los ángulos pertenecen a los dominios restringidos de las funciones tangente y cotangente.

DEFINICIÓN

$y = \tan^{-1} x$ es el número $(-\pi/2, \pi/2)$ para el que $\tan y = x$.

$y = \cot^{-1} x$ es el número $(0, \pi)$ para el que $\cot y = x$.

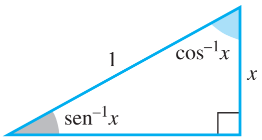


FIGURA 7.21 $\operatorname{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$ son ángulos complementarios (así que su suma es $\pi/2$).

Para evitar valores en los que la tangente o la cotangente estén indefinidas, utilizamos intervalos abiertos.

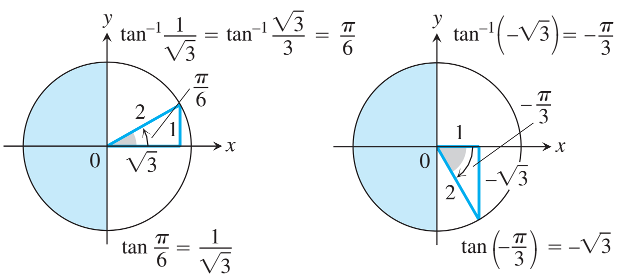
La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ es simétrica con respecto al origen, ya que es una rama de la gráfica $x = \tan y$, que es simétrica con respecto al origen (figura 7.15c). Algebraicamente, esto significa que

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x;$$

el arco tangente es una función impar. La gráfica de $y = \cot^{-1} x$ no tiene tal simetría (figura 7.15f). En la figura 7.15c, observe que la gráfica de la función arco tangente tiene dos asíntotas horizontales: una en $y = \pi/2$ y otra en $y = -\pi/2$.

x	$\tan^{-1} x$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$

EJEMPLO 3 Las siguientes figuras muestran dos valores de $\tan^{-1} x$.



Los ángulos provienen del primero y cuarto cuadrantes, ya que el rango de $\tan^{-1} x$ es $(-\pi/2, \pi/2)$.

■

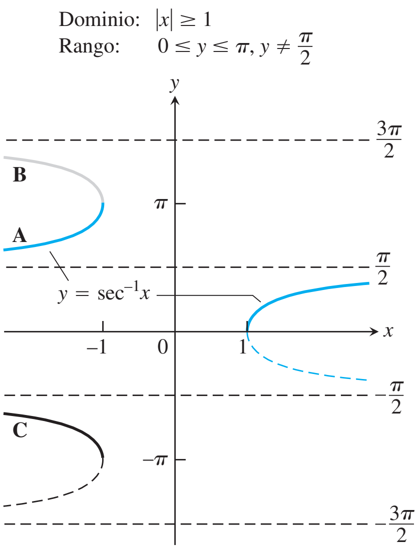


FIGURA 7.22 Hay varias elecciones lógicas para la rama izquierda de $y = \sec^{-1} x$. Con la opción **A**, $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$, una identidad útil, empleada en muchas calculadoras.

Las inversas de las formas restringidas de $\sec x$ y $\csc x$ se eligen para que resulten las funciones graficadas en las figuras 7.15d y 7.15e.

Precaución No hay consenso general acerca de cómo definir $\sec^{-1} x$ para valores negativos de x. Elegimos ángulos en el segundo cuadrante entre $\pi/2$ y π. Esta elección hace que $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$; también hace que $\sec^{-1} x$ sea una función creciente en cada intervalo de su dominio. En algunas tablas, para $x < 0$, se elige $\sec^{-1} x$ en $[-\pi, -\pi/2)$, y en algunos textos se toma en $[\pi, 3\pi/2)$ (figura 7.22). Tales elecciones simplifican la fórmula para la derivada (nuestra fórmula necesita signos de valor absoluto), pero no se cumple la ecuación $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$. Con base en esto, deducimos la identidad

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5}$$

aplicando la ecuación (4).

Derivada de $y = \operatorname{sen}^{-1} u$

Sabemos que la función $x = \operatorname{sen} y$ es derivable en el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ y que su derivada, el coseno, es positiva ahí. Por lo tanto, el teorema 1 de la sección 7.1 nos asegura que la función inversa $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ es derivable en todo el intervalo $-1 < x < 1$. No podemos esperar que sea derivable en $x = 1$ o $x = -1$, ya que en esos puntos las tangentes a la gráfica son verticales (figura 7.23).

Determinamos la inversa de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ aplicando el teorema 1 con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$:

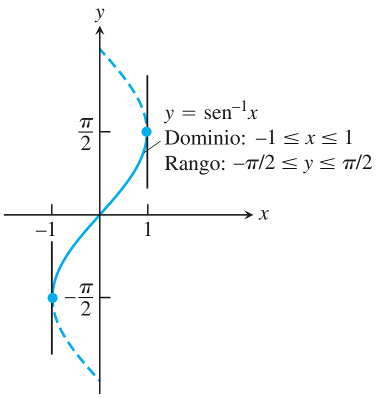


FIGURA 7.23 La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ tiene tangentes verticales en $x = -1$ y $x = 1$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1} \\
&= \frac{1}{\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)} && f'(u) = \cos u \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1} x)}} && \cos u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} && \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

Si u es una función derivable de x con $|u| < 1$, aplicamos la regla de la cadena para obtener

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1.}$$

EJEMPLO 4 Por medio de la regla de la cadena, calculamos la derivada

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$ ■

Derivada de $y = \tan^{-1} u$

Determinamos la derivada de $y = \tan^{-1} x$ aplicando el teorema 1 con $f(x) = \tan x$ y $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$. El teorema 1 puede aplicarse, ya que la derivada de $\tan x$ es positiva para $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1}\\
&= \frac{1}{\sec^2(\tan^{-1} x)} && f'(u) = \sec^2 u\\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} && \sec^2 u = 1 + \tan^2 u\\
&= \frac{1}{1 + x^2} && \tan(\tan^{-1} x) = x
\end{aligned}
$$

La derivada está definida para todos los números reales. Si u es una función derivable de x, con base en la regla de la cadena obtenemos:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1 + u^2}\frac{du}{dx}.}$$

Derivada de $y = \sec^{-1} u$

Como la derivada de la $\sec x$ es positiva para $0 < x < \pi/2$ y $\pi/2 < x < \pi$, el teorema 1 nos indica que la función inversa $y = \sec^{-1} x$ es derivable. En vez de aplicar la fórmula del teorema 1 de manera directa, determinamos la derivada de $y = \sec^{-1} x$, $|x| > 1$, por medio de derivación implícita y la regla de la cadena como sigue:

$$
\begin{aligned}
y &= \sec^{-1} x\\
\sec y &= x && \text{Relación de la función inversa}\\
\frac{d}{dx}(\sec y) &= \frac{d}{dx} x && \text{Derivar en ambos lados.}\\
\sec y \tan y \frac{dy}{dx} &= 1 && \text{Regla de la cadena}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y} && \text{Como } |x| > 1,\ y \text{ está en } (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi) \text{ y } \sec y \tan y \neq 0
\end{aligned}
$$

Para expresar el resultado en términos de x, utilizamos las relaciones

$$\sec y = x \qquad \text{y} \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

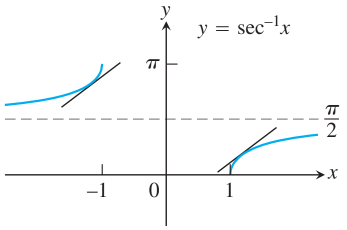


FIGURA 7.24 La pendiente de la curva $y = \sec^{-1} x$ es positiva, tanto para $x < -1$ como para $x > 1$.

¿Podemos hacer algo con respecto al signo $\pm$? Al observar la figura 7.24 se ve que la pendiente de la gráfica $y = \sec^{-1} x$ siempre es positiva. Así,

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \begin{cases} +\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Con el símbolo de valor absoluto, escribimos una sola expresión que elimina la ambigüedad del signo "$\pm$":

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Si u es una función derivable de x con $|u| > 1$, tenemos la fórmula

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1.}$$

EJEMPLO 5 Mediante la regla de la cadena y la derivada de la función arco secante, determinamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4) &= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4) \\ &= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) \qquad 5x^4 > 1 > 0 \\ &= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}. \end{aligned}$$

Derivadas de las otras tres funciones

Podríamos utilizar las mismas técnicas para determinar las derivadas de las otras tres funciones trigonométricas inversas: arco coseno, arco cotangente y arco cosecante. Sin embargo, existe una forma mucho más sencilla, gracias a las siguientes identidades.

Identidades de cofunción inversa-función inversa

$$\cos^{-1} x = \pi/2 - \operatorname{sen}^{-1} x$$
$$\cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x$$
$$\csc^{-1} x = \pi/2 - \sec^{-1} x$$

En la ecuación (4) vimos la primera de estas identidades. Las otras se deducen de una manera análoga. Fácilmente se deduce que las derivadas de las cofunciones inversas son las negativas de las derivadas de las funciones inversas correspondientes. Por ejemplo, la derivada del $\cos^{-1} x$ se calcula como sigue:

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x\right) \qquad \text{Identidad}$$

$$= -\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Derivada de arco seno}$$

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se resumen en la tabla 7.3.

TABLA 7.3 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1. $\dfrac{d(\operatorname{sen}^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \quad |u| < 1$

2. $\dfrac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}, \quad |u| < 1$

3. $\dfrac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \quad |u| > 1$

6. $\dfrac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = -\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}, \quad |u| > 1$

Fórmulas de integración

Las fórmulas de derivadas de la tabla 7.3 dan tres útiles fórmulas de integración de la tabla 7.4. Las fórmulas se verifican con facilidad derivando las funciones del lado derecho.

TABLA 7.4 Integrales evaluadas con funciones trigonométricas inversas

Las siguientes fórmulas se cumplen para cualquier constante $a \neq 0$.

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad$ (Válida para $u^2 < a^2$)

2. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad$ (Válida para toda u)

3. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C \qquad$ (Válida para $|u| > a > 0$)

Las fórmulas de derivadas de la tabla 7.3 tienen $a = 1$, pero en la mayoría de las integraciones $a \neq 1$ y las fórmulas de la tabla 7.4 son más útiles.

EJEMPLO 6 Los siguientes ejemplos ilustran cómo utilizar la tabla 7.4.

(a) $$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$ $a = 1, u = x$ en la fórmula 1, tabla 7.4

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

(b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$ $a = \sqrt{3}, u = 2x$, y $du/2 = dx$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ Fórmula 1, tabla 7.4

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{u^2-a^2}}$$ $u = e^x, du = e^x\, dx,$ $dx = du/e^x = du/u,$ $a = \sqrt{6}$

$$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$ Fórmula 3, tabla 7.4

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C$$ ■

EJEMPLO 7 Evalúe

(a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$ **(b)** $$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

Solución **(a)** La expresión $\sqrt{4x-x^2}$ no coincide con ninguna de las fórmulas de la tabla 7.4, por lo que primero rescribimos $4x - x^2$ para completar el cuadrado:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 = 4 - (x-2)^2.$$

Luego sustituimos $a = 2, u = x - 2$, y $du = dx$ para obtener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$ $a = 2, u = x - 2$, y $du = dx$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ Fórmula 1 de la tabla 7.4

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

(b) Completamos el cuadrado en el binomio $4x^2 + 4x$:

$$4x^2 + 4x + 2 = 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4}$$

$$= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x+1)^2 + 1.$$

Entonces,

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+a^2} \qquad a = 1, u = 2x+1, \text{ y } du/2 = dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad \text{Tabla 7.4, fórmula 2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1) + C \qquad a = 1, u = 2x+1$$

■

Ejercicios 7.6

Valores comunes

Utilice triángulos de referencia como los de los ejemplos 1 al 3 para determinar los ángulos en los ejercicios 1 a 12.

1. **a.** $\tan^{-1} 1$ **b.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. **a.** $\tan^{-1}(-1)$ **b.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. **a.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. **a.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. **a.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. **a.** $\csc^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1} 2$

7. **a.** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1}(-2)$

8. **a.** $\cot^{-1}(-1)$ **b.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Evaluaciones

En los ejercicios 9 a 12, determine los valores.

9. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **10.** $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

11. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ **12.** $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Límites

Determine los límites en los ejercicios 13 a 20. (Si tiene duda, vea la gráfica de la función).

13. $\lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{sen}^{-1} x$ **14.** $\lim\limits_{x\to -1^+} \cos^{-1} x$

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \tan^{-1} x$ **16.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \tan^{-1} x$

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \sec^{-1} x$ **18.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \sec^{-1} x$

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \csc^{-1} x$ **20.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \csc^{-1} x$

Determinación de derivadas

En los ejercicios 21 a 42, determine la derivada de y con respecto a la variable apropiada.

21. $y = \cos^{-1}(x^2)$ **22.** $y = \cos^{-1}(1/x)$

23. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{2}\,t$ **24.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(1-t)$

25. $y = \sec^{-1}(2s+1)$ **26.** $y = \sec^{-1} 5s$

27. $y = \csc^{-1}(x^2+1), \quad x > 0$

28. $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

29. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$ **30.** $y = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{t^2}$

31. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$ **32.** $y = \cot^{-1}\sqrt{t-1}$

33. $y = \ln(\tan^{-1} x)$ **34.** $y = \tan^{-1}(\ln x)$

35. $y = \csc^{-1}(e^t)$ **36.** $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

37. $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s$ **38.** $y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s$

39. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$

40. $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$ **41.** $y = x\operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

42. $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 43 a 66.

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **44.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{17+x^2}$ **46.** $\displaystyle\int \frac{dx}{9+3x^2}$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$ **48.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}}$

49. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$ **50.** $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{2}/4} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

51. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}$ **52.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2}$

53. $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$ **54.** $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$

55. $\displaystyle\int \frac{3\,dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$ **56.** $\displaystyle\int \frac{6\,dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+(x-1)^2}$ **58.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+(3x+1)^2}$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

61. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{1+(\operatorname{sen}\theta)^2}$

62. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\, dx}{1+(\cot x)^2}$

63. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$

64. $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\, dt}{t(1+\ln^2 t)}$

65. $\displaystyle\int \frac{y\, dy}{\sqrt{1-y^4}}$

66. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\, dy}{\sqrt{1-\tan^2 y}}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 67 a 80.

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

68. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

69. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{6\, dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$

70. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{6\, dt}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$

71. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+5}$

72. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+6y+10}$

73. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8\, dx}{x^2-2x+2}$

74. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2\, dx}{x^2-6x+10}$

75. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+4}\, dx$

76. $\displaystyle\int \frac{t-2}{t^2-6t+10}\, dt$

77. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^2+9}\, dx$

78. $\displaystyle\int \frac{t^3-2t^2+3t-4}{t^2+1}\, dt$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 81 a 90.

81. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{sen}^{-1} x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

82. $\displaystyle\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

83. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

84. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\, dx}{1+x^2}$

85. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1+y^2)}$

86. $\displaystyle\int \frac{dy}{(\operatorname{sen}^{-1} y)\sqrt{1-y^2}}$

87. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\, dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

88. $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{\cos(\sec^{-1} x)\, dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

89. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)\left(\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2+9\right)}\, dx$

90. $\displaystyle\int \frac{e^x \operatorname{sen}^{-1} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$

Regla de L'Hôpital

Determine los límites en los ejercicios 91 a 98.

91. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} 5x}{x}$

92. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1} x}$

93. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\frac{2}{x}$

94. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

95. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x^2}{x\operatorname{sen}^{-1} x}$

96. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\tan^{-1} e^x}{e^{2x}+x}$

97. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x+1}}$

98. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x^2}{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2}$

Fórmulas de integración

En los ejercicios 99 a 102, verifique las fórmulas de integración.

99. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\, dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

100. $\displaystyle\int x^3\cos^{-1} 5x\, dx = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

101. $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx = x(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}^{-1} x + C$

102. $\displaystyle\int \ln(a^2+x^2)\, dx = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

Problemas con valor inicial

En los problemas 103 al 106, resuelva los que tienen valor inicial.

103. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

104. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

105. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1; \quad y(2) = \pi$

106. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

Aplicaciones y teoría

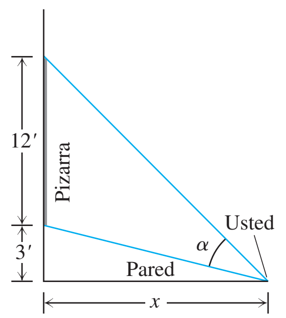
107. Usted se encuentra en un salón de clases, sentado junto a una pared, mirando la pizarra que se encuentra al frente. Ésta mide 12 ft de largo y empieza a 3 ft de la pared que está junto a usted.

a. Demuestre que su ángulo de visión es

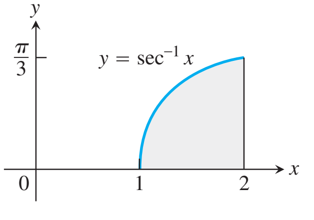
$$\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{15} - \cot^{-1}\frac{x}{3}$$

si usted está a x ft de la pared del frente.

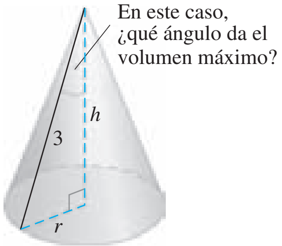
b. Determine x de manera que α sea tan grande como sea posible.



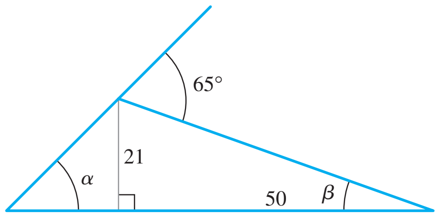
108. La región que está entre la curva $y = \sec^{-1} x$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = 2$ (como se ilustra aquí), se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.



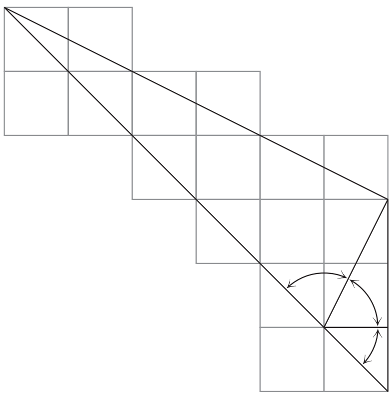
109. La altura inclinada del cono que aparece aquí es de 3 m. ¿Cuál debe ser el ángulo señalado para maximizar el volumen del cono?



110. Determine el ángulo α

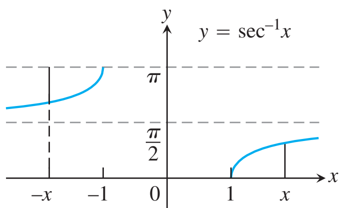


111. Ésta es una demostración informal de que $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$. Explique por qué.



112. Dos deducciones de la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$.

a. (*Geométrica*) Esta ilustración prueba que $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$. Trate de averiguar por qué.



b. (*Algebraica*) Deduzca la identidad $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ combinando las siguientes dos ecuaciones, tomadas del texto:

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) \qquad \text{Ecuación (5)}$$

113. La identidad $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ La figura 7.21 establece la identidad para $0 < x < 1$. Con la finalidad de establecerla para el resto del intervalo $[-1, 1]$, verifique por medio de cálculo directo que se cumple para $x = 1$, 0 y -1. Luego, para los valores de x en $(-1, 0)$, sea $x = -a$, $a > 0$ y aplique las ecuaciones (1) y (3) a la suma $\operatorname{sen}^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$.

114. Demuestre que la suma $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x)$ es constante.

115. Utilice la identidad

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

para deducir la fórmula de la tabla 7.3, para la derivada de $\csc^{-1} u$ con base en la fórmula de la derivada de $\sec^{-1} u$.

116. Deduzca la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

para la derivada de $y = \tan^{-1} x$ por medio de la derivación de ambos lados de la ecuación equivalente $\tan y = x$.

117. Utilice la regla de derivación del teorema 1 para deducir

$$\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad |x| > 1.$$

118. Utilice la identidad

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

para deducir la fórmula para la derivada de $\cot^{-1} u$ en la tabla 7.3 con base en la fórmula para la derivada de $\tan^{-1} u$.

119. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \geq 0, \quad \text{y} \quad g(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x}?$$

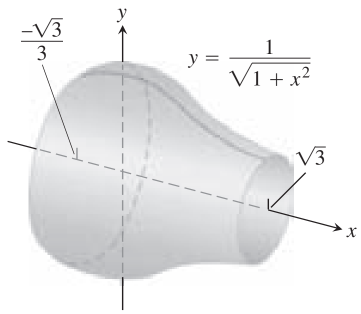
Explique.

120. ¿Qué tienen de especial las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{y} \quad g(x) = \tan^{-1} \frac{1}{x}?$$

Explique.

121. Determine el volumen del sólido de revolución que se ilustra a continuación.



122. Longitud de arco Determine la circunferencia de un círculo de radio r; para ello, utilice la ecuación (3) de la sección 6.3.

Determine los volúmenes de los sólidos en los ejercicios 123 y 124.

123. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a. círculos cuyos diámetros se extienden desde la curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

b. cuadrados verticales cuyos lados de su base van desde la curva $y = -1/\sqrt{1 + x^2}$ a la curva $y = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

124. El sólido se encuentra entre los planos perpendiculares al eje x en $x = -\sqrt{2}/2$ y $x = \sqrt{2}/2$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son

a. círculos cuyos diámetros se extienden desde el eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

b. cuadrados cuyas diagonales van desde el eje x a la curva $y = 2/\sqrt[4]{1 - x^2}$.

T **125.** Determine los valores de

a. $\sec^{-1} 1.5$ **b.** $\csc^{-1}(-1.5)$ **c.** $\cot^{-1} 2$

T **126.** Determine los valores de

a. $\sec^{-1}(-3)$ **b.** $\csc^{-1} 1.7$ **c.** $\cot^{-1}(-2)$

T En los ejercicios 127 a 129, determine el dominio y el rango de cada función compuesta. Luego trace la gráfica de las composiciones en pantallas separadas. En cada caso, ¿tienen sentido las gráficas? Explique. Comente cualquier diferencia que vea.

127. **a.** $y = \tan^{-1}(\tan x)$ **b.** $y = \tan(\tan^{-1} x)$

128. **a.** $y = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ **b.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$

129. **a.** $y = \cos^{-1}(\cos x)$ **b.** $y = \cos(\cos^{-1} x)$

T Utilice su utilería de graficación para los ejercicios 130 a 134.

130. Elabore la gráfica de $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(1/x))$. Explique lo que vea.

131. La serpentina de Newton Trace la gráfica de $y = 4x/(x^2 + 1)$, conocida como la serpentina de Newton. Luego elabore la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}(2 \tan^{-1} x)$ en la misma ventana de graficación. ¿Qué observa? Explique.

132. Trace la gráfica de la función racional $y = (2 - x^2)/x^2$. Luego trace la gráfica $y = \cos(2 \sec^{-1} x)$ en la misma ventana de graficación. ¿Qué observa? Explique.

133. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ junto con sus primeras dos derivadas. Comente sobre el comportamiento de f y la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

134. Trace la gráfica de $f(x) = \tan^{-1} x$ junto con sus primeras dos derivadas. Comente sobre el comportamiento de f y la forma de su gráfica en relación con los signos y valores de f' y f''.

7.7 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se forman por medio de combinaciones de dos funciones exponenciales e^x y e^{-x}. Las funciones hiperbólicas simplifican muchas expresiones matemáticas y son importantes en aplicaciones matemáticas. En esta sección damos una breve introducción a las funciones hiperbólicas, sus gráficas y sus derivadas.

Definiciones e identidades

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen por las ecuaciones

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

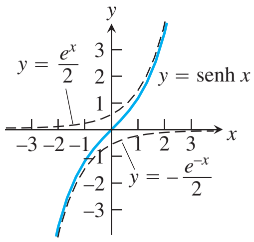
Con base en este par básico, definimos las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas. Las ecuaciones que las definen y las gráficas de tales funciones se muestran en la tabla 7.5. Veremos que las funciones hiperbólicas cuentan con muchas similitudes con las funciones trigonométricas a partir de las cuales se nombran.

Las funciones hiperbólicas satisfacen las identidades de la tabla 7.6. Salvo por la diferencia de signo, ya conocíamos dichas identidades para funciones trigonométricas. Las identidades se demuestran directamente de las definiciones, como lo mostramos a continuación para la segunda:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{senh} x \cosh x &= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \operatorname{senh} 2x. \end{aligned}$$

Las otras identidades se obtienen de manera análoga, sustituyendo las definiciones de las funciones hiperbólicas y usando el álgebra. Al igual que muchas funciones estándar, las funciones hiperbólicas y sus inversas se evalúan con facilidad mediante las calculadoras, que con frecuencia tienen teclas especiales para ese propósito.

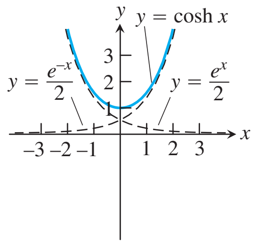
TABLA 7.5 Las seis funciones hiperbólicas básicas



(a)

Seno hiperbólico:

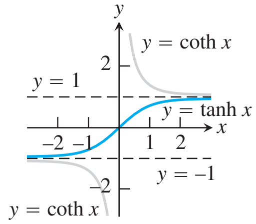
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

Coseno hiperbólico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



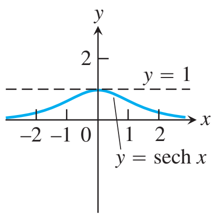
(c)

Tangente hiperbólica:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica:

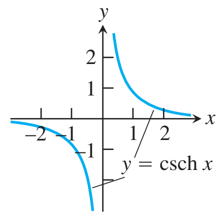
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



(d)

Secante hiperbólica:

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



(e)

Cosecante hiperbólica:

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

TABLA 7.6 Identidades para funciones hiperbólicas

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$
$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$
$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

TABLA 7.7 Derivadas de funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

Para cualquier número real u, sabemos que el punto con coordenada $(\cos u, \operatorname{sen} u)$ está en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, por lo que las funciones trigonométricas se denominan funciones *circulares*. Como consecuencia de la primera identidad

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,$$

con u sustituida por x en la tabla 7.6, el punto que tiene coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ está en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. De aquí toman su nombre las funciones *hiperbólicas* (véase el ejercicio 86).

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas

Las seis funciones hiperbólicas, como son combinaciones racionales de las funciones derivables e^x y e^{-x}, tienen derivadas en todos los puntos donde estén definidas (tabla 7.7). Nuevamente, existen semejanzas con las funciones trigonométricas.

Las fórmulas de las derivadas se deducen de la derivada de e^u:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) \qquad \text{Definición de senh } u$$

$$= \frac{e^u\, du/dx + e^{-u}\, du/dx}{2} \qquad \text{Derivada de } e^u$$

$$= \cosh u \frac{du}{dx} \qquad \text{Definición de cosh } u.$$

TABLA 7.8 Fórmulas de integrales para funciones hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Esto proporciona la primera fórmula de derivada. A partir de la definición, calculamos la derivada de la función cosecante hiperbólica como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{senh} u}\right) && \text{Definición de csch } u\\
&= -\frac{\cosh u}{\operatorname{senh}^2 u}\frac{du}{dx} && \text{Regla del cociente}\\
&= -\frac{1}{\operatorname{senh} u}\frac{\cosh u}{\operatorname{senh} u}\frac{du}{dx} && \text{Reacomodar términos.}\\
&= -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx} && \text{Definiciones de csch } u \text{ y coth } u
\end{aligned}$$

Las otras fórmulas en la tabla 7.7 se obtienen de manera análoga.

Las fórmulas de las derivadas conducen a las fórmulas de integral en la tabla 7.8.

EJEMPLO 1

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\tanh\sqrt{1+t^2}\right) &= \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right)\\
&= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\int \coth 5x\, dx &= \int \frac{\cosh 5x}{\operatorname{senh} 5x}dx = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u} && u = \operatorname{senh} 5x,\ du = 5\cosh 5x\, dx\\
&= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\operatorname{senh} 5x| + C
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \operatorname{senh}^2 x\, dx &= \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}dx && \text{Tabla 7.6}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1(\cosh 2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{senh} 2x}{2} - x\right]_0^1\\
&= \frac{\operatorname{senh} 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.40672 && \text{Evalúe con una calculadora}
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} 4e^x \operatorname{senh} x\, dx &= \int_0^{\ln 2} 4e^x\frac{e^x - e^{-x}}{2}dx = \int_0^{\ln 2}(2e^{2x} - 2)\, dx\\
&= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)\\
&= 4 - 2\ln 2 - 1 \approx 1.6137
\end{aligned}$$

■

Funciones hiperbólicas inversas

Las inversas de las seis funciones hiperbólicas básicas son muy útiles en integración (véase el capítulo 8). Como $d(\operatorname{senh} x)/dx = \cosh x > 0$, el seno hiperbólico es una función creciente de x. Denotamos su inversa por

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x.$$

Para todo valor de x en el intervalo $-\infty < x < \infty$, el valor de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ es el número cuyo seno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ se muestran en la figura 7.25a.

La función $y = \cosh x$ no es inyectiva porque su gráfica en la tabla 7.5 no pasa la prueba de la recta horizontal. Sin embargo, la función restringida $y = \cosh x, x \geq 0$ es inyectiva; por lo tanto, tiene una inversa, denotada por

$$y = \cosh^{-1} x.$$

Para todo valor de $x \geq 1$, $y = \cosh^{-1} x$ es el número en el intervalo $0 \leq y < \infty$, cuyo coseno hiperbólico es x. Las gráficas de $y = \cosh x$, $x \geq 0$ y $y = \cosh^{-1} x$ se muestran en la figura 7.25b.

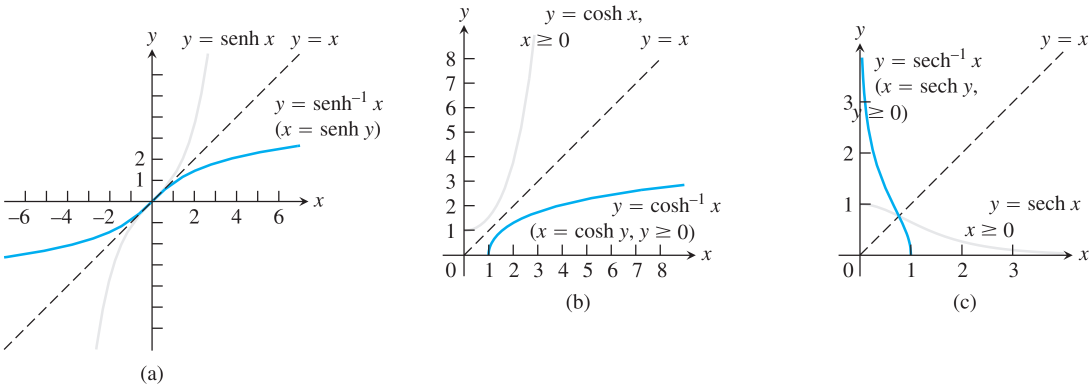


FIGURA 7.25 Gráficas de seno, coseno y secante hiperbólicos inversos de x. Observe las simetrías con respecto a la recta $y = x$.

Al igual que $y = \cosh x$, la función $y = \operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ no es inyectiva, pero su restricción a valores no negativos de x tiene una inversa, denotada por

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Para cada valor de x en el intervalo $(0, 1]$, $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ es el número no negativo cuya secante hiperbólica es x. Las gráficas de $y = \operatorname{sech} x$, $x \geq 0$ y $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ se muestran en la figura 7.25c.

La tangente, la cotangente y la cosecante hiperbólicas son inyectivas en sus dominios; por lo tanto, tienen inversas, denotadas por

$$y = \tanh^{-1} x, \qquad y = \coth^{-1} x, \qquad y = \operatorname{csch}^{-1} x.$$

Estas funciones se grafican en la figura 7.26.

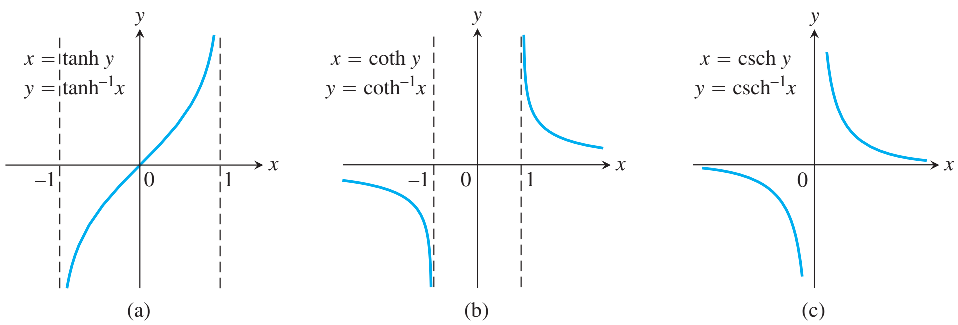


FIGURA 7.26 Gráficas de seno, coseno y secante hiperbólicos inversos de x. Observe las simetrías con respecto a la recta $y = x$.

TABLA 7.9 Identidades para las funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$$

Identidades útiles

Las identidades de la tabla 7.9 las utilizamos para obtener con una calculadora los valores de $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$, que sólo dan $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$. Tales identidades son consecuencia directa de las definiciones. Por ejemplo, si $0 < x \leq 1$, entonces

$$\operatorname{sech}\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\cosh\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x.$$

También sabemos que $\operatorname{sech}(\operatorname{sech}^{-1} x) = x$; como la secante hiperbólica es inyectiva en $(0, 1]$, tenemos

$$\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x.$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

La mayor utilidad de las funciones hiperbólicas inversas está en la integración para revertir las fórmulas de derivadas de la tabla 7.10.

TABLA 7.10 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cosh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad u > 1$$

$$\frac{d(\tanh^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| < 1$$

$$\frac{d(\coth^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \qquad |u| > 1$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad 0 < u < 1$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1} u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}, \qquad u \neq 0$$

Las restricciones $|u| < 1$ y $|u| > 1$ en las fórmulas de la derivada de $\tanh^{-1} u$ y $\coth^{-1} u$ provienen de las restricciones naturales en los valores de dichas funciones. (Véase las figuras 7.26a y b). La distinción entre $|u| < 1$ y $|u| > 1$ se vuelve importante cuando convertimos las fórmulas de derivadas en fórmulas de integrales.

En el ejemplo 2, ilustramos cómo se deducen las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas, donde calculamos $d(\cosh^{-1} u)/dx$. Las otras derivadas se obtienen por medio de cálculos similares.

EJEMPLO 2 Demuestre que si u es una función derivable de x, cuyos valores son mayores que 1, entonces

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

Solución Primero determinamos la derivada de $y = \cosh^{-1} x$ para $x > 1$, para lo cual aplicamos el teorema 1 con $f(x) = \cosh x$ y $f^{-1}(x) = \cosh^{-1} x$. Este teorema puede aplicarse, ya que la derivada de $\cosh x$ es positiva para $x > 0$.

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} && \text{Teorema 1}\\
&= \frac{1}{\operatorname{senh}(\cosh^{-1} x)} && f'(u) = \operatorname{senh} u\\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}} && \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,\ \operatorname{senh} u = \sqrt{\cosh^2 u - 1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \cosh(\cosh^{-1} x) = x
\end{aligned}$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Sonya Kovalevsky
(1850–1891)

La regla de la cadena produce el resultado final:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx}. \qquad \blacksquare$$

Con sustituciones adecuadas, las fórmulas de las derivadas en la tabla 7.10 conducen a las fórmulas de integración en la tabla 7.11. Cada una de las fórmulas en la tabla 7.11 puede verificarse derivando la expresión del lado derecho.

TABLA 7.11 Integrales que conducen a funciones hiperbólicas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad a > 0$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad u > a > 0$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C, & u^2 < a^2 \\ \dfrac{1}{a}\coth^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C, & u^2 > a^2 \end{cases}$

4. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \qquad 0 < u < a$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \qquad u \neq 0 \text{ y } a > 0$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}}.$$

Solución La integral indefinida es

$$\begin{aligned} \int \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} && u = 2x, \quad du = 2\,dx, \quad a = \sqrt{3} \\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C && \text{Fórmula de la tabla 7.11} \\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3 + 4x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{senh}^{-1}(0) \\ &= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0 \approx 0.98665. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicios 7.7

Valores e identidades

Cada uno de los ejercicios 1 a 4 da un valor de senh x o cosh x. Utilice las definiciones y la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para determinar los valores de las restantes cinco funciones hiperbólicas.

1. $\operatorname{senh} x = -\frac{3}{4}$

2. $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$

3. $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

4. $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

Rescriba las expresiones en los ejercicios 5 a 10 en términos de exponenciales y simplifique los resultados tanto como sea posible.

5. $2\cosh(\ln x)$

6. $\operatorname{senh}(2\ln x)$

7. $\cosh 5x + \operatorname{senh} 5x$

8. $\cosh 3x - \operatorname{senh} 3x$

9. $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^4$

10. $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

11. Demuestre las identidades

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y,$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y.$$

Luego utilícelas para demostrar que

a. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$.

b. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$.

12. Utilice las definiciones de $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$ para demostrar que

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

Determinación de derivadas

En los ejercicios 13 a 24, determine la derivada de y con respecto a la variable apropiada.

13. $y = 6 \operatorname{senh} \frac{x}{3}$

14. $y = \frac{1}{2} \operatorname{senh}(2x + 1)$

15. $y = 2\sqrt{t} \tanh \sqrt{t}$

16. $y = t^2 \tanh \frac{1}{t}$

17. $y = \ln(\operatorname{senh} z)$

18. $y = \ln(\cosh z)$

19. $y = \operatorname{sech} \theta(1 - \ln \operatorname{sech} \theta)$

20. $y = \operatorname{csch} \theta(1 - \ln \operatorname{csch} \theta)$

21. $y = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \tanh^2 v$

22. $y = \ln \operatorname{senh} v - \frac{1}{2} \coth^2 v$

23. $y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x)$

(*Sugerencia:* Antes de derivar, exprese en términos de exponenciales y simplifique).

24. $y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x)$

En los ejercicios 25 a 36, determine la derivada de y con respecto a la variable apropiada.

25. $y = \operatorname{senh}^{-1} \sqrt{x}$

26. $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x + 1}$

27. $y = (1 - \theta) \tanh^{-1} \theta$

28. $y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta + 1)$

29. $y = (1 - t) \coth^{-1} \sqrt{t}$

30. $y = (1 - t^2) \coth^{-1} t$

31. $y = \cos^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x$

32. $y = \ln x + \sqrt{1 - x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$

33. $y = \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\theta}$

34. $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^{\theta}$

35. $y = \operatorname{senh}^{-1}(\tan x)$

36. $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2$

Fórmulas de integración

Verifique las fórmulas de integración en los ejercicios 37 a 40.

37. a. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\, dx = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x) + C$

b. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) + C$

38. $\displaystyle\int x \operatorname{sech}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2} + C$

39. $\displaystyle\int x \coth^{-1} x\, dx = \frac{x^2 - 1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

40. $\displaystyle\int \tanh^{-1} x\, dx = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios del 41 a 60.

41. $\displaystyle\int \operatorname{senh} 2x\, dx$

42. $\displaystyle\int \operatorname{senh} \frac{x}{5}\, dx$

43. $\displaystyle\int 6 \cosh\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) dx$

44. $\displaystyle\int 4 \cosh(3x - \ln 2)\, dx$

45. $\displaystyle\int \tanh \frac{x}{7}\, dx$

46. $\displaystyle\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}}\, d\theta$

47. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx$

48. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2(5 - x)\, dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t}}$

50. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)\, dt}{t}$

51. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x\, dx$

52. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \tanh 2x\, dx$

53. $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta\, d\theta$

54. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \operatorname{senh} \theta\, d\theta$

55. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta\, d\theta$

56. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{senh}(\operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$

57. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\, dt$

58. $\displaystyle\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

59. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

60. $\displaystyle\int_0^{\ln 10} 4 \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Evaluación de funciones hiperbólicas inversas e integrales

Cuando en su calculadora no están disponibles las teclas de funciones hiperbólicas, aún es posible evaluar las funciones hiperbólicas inversas, lo que se logra expresándolas como logaritmos, tal como se muestra aquí.

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad |x| < 1$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \qquad |x| > 1$$

Utilice las fórmulas del cuadro anterior para expresar los números en los ejercicios 61 a 66 en términos de logaritmos naturales.

61. $\operatorname{senh}^{-1}(-5/12)$

62. $\cosh^{-1}(5/3)$

63. $\tanh^{-1}(-1/2)$

64. $\coth^{-1}(5/4)$

65. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$

66. $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

Evalúe las integrales en los ejercicios 67 a 74 en términos de

a. funciones hiperbólicas inversas.

b. logaritmos naturales.

67. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{6\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$

69. $\displaystyle\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$

71. $\displaystyle\int_{1/5}^{3/13} \frac{dx}{x\sqrt{1-16x^2}}$

72. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

73. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$

74. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

Aplicaciones y ejemplos

75. Demuestre que si una función f está definida en un intervalo simétrico con respecto al origen (de manera que f está definida en $-x$ siempre que esté definida en x), entonces

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}. \qquad (1)$$

Ahora demuestre que $(f(x)+f(-x))/2$ es par y que $(f(x)-f(-x))/2$ es impar.

76. Deduzca la fórmula $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ para toda x real. Explique por qué al deducirla se usa el signo más con la raíz cuadrada, en vez del signo menos.

77. Salto en caída libre Si un cuerpo de masa m que cae libremente desde el reposo encuentra una resistencia del aire proporcional al cuadrado de su velocidad, entonces su velocidad a t segundos de caída satisface la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y de la densidad del aire. (Suponemos que la caída es lo suficientemente corta para que la variación de la densidad del aire no afecte el resultado de manera significativa).

a. Demuestre que

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

satisface la ecuación diferencial y la condición inicial de que $v = 0$ cuando $t = 0$.

b. Calcule la *velocidad límite* del cuerpo, $\lim_{t\to\infty} v$.

c. Para un paracaidista de 160 lb ($mg = 160$), el tiempo en segundos y la distancia en ft, un valor común para k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad límite del paracaidista?

78. Aceleraciones de magnitud proporcional al desplazamiento Supongamos que, en el instante t, la posición de un móvil que se desplaza sobre una recta coordenada es

a. $s = a\cos kt + b\operatorname{sen} kt$.

b. $s = a\cosh kt + b\operatorname{senh} kt$.

Demuestre que en ambos casos la aceleración d^2s/dt^2 es proporcional a s, pero en el primero, el móvil se dirige hacia el origen, mientras que en el segundo se aleja de él.

79. Volumen Una región del primer cuadrante está acotada arriba por la curva $y = \cosh x$, abajo por la curva $y = \operatorname{senh} x$, y por la izquierda y la derecha por el eje y y la recta $x = 2$, respectivamente. Determine el volumen del sólido que esa región genera al girar sobre el eje x.

80. Volumen La región encerrada por la curva $y = \operatorname{sech} x$, el eje x y las rectas $x = \pm\ln\sqrt{3}$ se hace girar alrededor del eje x y genera un sólido. ¿Cuál es el volumen del sólido?

81. Longitud de arco Determine la longitud del segmento de la curva $y = (1/2)\cosh 2x$ desde $x = 0$ hasta $x = \ln\sqrt{5}$.

82. Utilice las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$ **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh x$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ **(d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

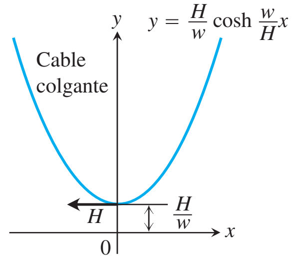
(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$ **(f)** $\lim\limits_{x\to\infty} \coth x$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \coth x$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \coth x$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

83. Cables colgantes Imagine un cable, como los de teléfono o televisión, que está tendido entre dos postes y cuelga libremente. El peso del cable por unidad de longitud es w, y la tensión horizontal en el punto más bajo es un *vector* de longitud H. Si elegimos un sistema coordenado para el plano del cable, en el cual el eje x es horizontal, la fuerza debida a la gravedad apunta hacia abajo, el extremo positivo del eje y apunta hacia arriba y el punto más abajo del cable se localiza en $y = H/w$ sobre el eje y (véase la siguiente figura), entonces será posible demostrar que la posición del cable coincide con la gráfica del coseno hiperbólico

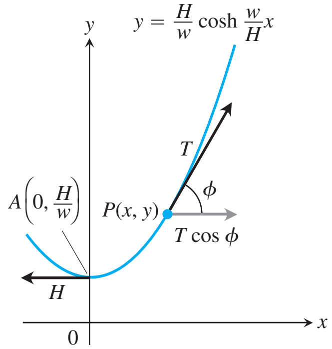
$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x.$$



A veces, una curva como ésta se designa **curva de la cadena** o **catenaria**, término que proviene del latín *catena*, que significa cadena.

a. Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario sobre el cable. La siguiente figura ilustra la tensión en P como un vector de longitud (magnitud) T, y la tensión H en el punto más bajo A. Demuestre que la pendiente del cable en P es

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{senh}\frac{w}{H}x.$$



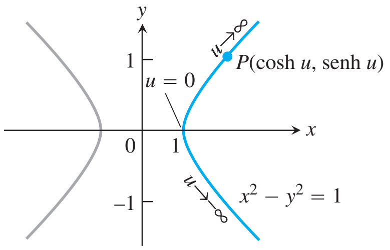
b. Con el resultado del inciso (a) y si sabemos que la tensión en P debe ser igual a H (el cable no se mueve), demuestre que $T = wy$. Por lo tanto, la magnitud de la tensión en $P(x, y)$ es exactamente igual al peso de y unidades de cable.

84. (*Continuación del ejercicio 83*) La longitud del arco AP de la figura del ejercicio 83 es $s = (1/a)$ senh ax, donde $a = w/H$. Demuestre que se pueden expresar las coordenadas de P en términos de s como

$$x = \frac{1}{a}\operatorname{senh}^{-1} as, \qquad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

85. Área Demuestre que el área de la región en el primer cuadrante encerrada por la curva $y = (1/a)\cosh ax$, los ejes coordenados y la recta $x = b$ es la misma que el área de un rectángulo de altura $1/a$ y largo s, donde s es la longitud de la curva desde $x = 0$ hasta $x = b$. Elabore un dibujo que ilustre tal resultado.

86. Lo hiperbólico en las funciones hiperbólicas Al igual que $x = \cos u$ y $y = \operatorname{sen} u$ se han identificado con los puntos (x, y) en la circunferencia unitaria, las funciones $x = \cosh u$ y $y = \operatorname{senh} u$ se identifican con los puntos (x, y) en la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$.



Ya que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$, el punto $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ se encuentra en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ para todo valor de u (ejercicio 86).

Otra analogía entre funciones hiperbólicas y funciones circulares es que la variable u en las coordenadas $(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ para los puntos de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ es el doble del área del sector AOP de la siguiente figura. Para saber por qué, siga estos pasos.

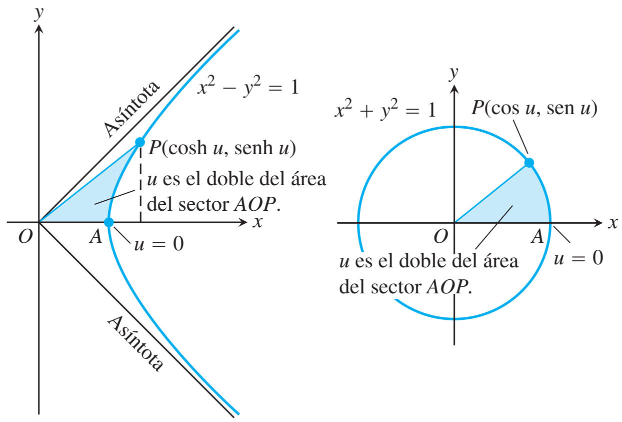
a. Demuestre que el área $A(u)$ del sector AOP es

$$A(u) = \frac{1}{2}\cosh u \operatorname{senh} u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

b. Derive ambos lados de la ecuación del inciso (a) con respecto a u, para demostrar que

$$A'(u) = \frac{1}{2}.$$

c. Despeje $A(u)$ en esta última ecuación. ¿Cuál es el valor de $A(0)$? ¿Cuál es el valor de la constante de integración C en su solución? Una vez hallada C, ¿qué puede decir acerca de la relación entre u y $A(u)$?



Una de las analogías entre las funciones hiperbólicas y circulares se muestra en estos dos diagramas (ejercicio 86).

7.8 Razones relativas de crecimiento

En matemáticas, ciencias de la computación e ingeniería con frecuencia es importante comparar las razones a las cuales las funciones de x se incrementan conforme x aumenta. Las funciones exponenciales son importantes en estas comparaciones en virtud de su muy rápido crecimiento, mientras que las funciones logarítmicas lo son debido a su muy lento crecimiento. En esta sección introducimos la notación o *pequeña* y o *grande* para describir los resultados de tales comparaciones. Restringimos nuestra atención a funciones cuyos valores, con el tiempo, son positivos y así permanecen cuando $x \to \infty$.

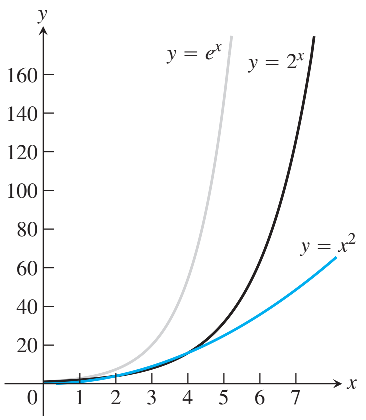


FIGURA 7.27 Gráficas de e^x, $2x$ y x^2.

Tasas de crecimiento de funciones

Quizá notó que las funciones exponenciales como $2x$ y e^x parecen crecer más rápido que las funciones polinomiales y racionales, cuando x toma valores grandes. En realidad, dichas exponenciales crecen más rápidamente que x misma y usted puede ver que $2x$ sobrepasa por mucho a x^2 cuando x aumenta en la figura 7.27. De hecho, cuando $x \to \infty$, las funciones $2x$ y e^x crecen más rápido que cualquier potencia de x, incluso que $x^{1{,}000{,}000}$ (ejercicio 19). En cambio, las funciones logarítmicas como $y = \log_2 x$ y $y = \ln x$ crecen más lentamente cuando $x \to \infty$ que cualquier potencia positiva de x (ejercicio 21).

Para ver qué tan rápido crecen los valores de $y = e^x$ cuando x aumenta, piense en graficar la función en un enorme pizarrón, con los ejes marcados en centímetros. En $x = 1$ cm, la grá-

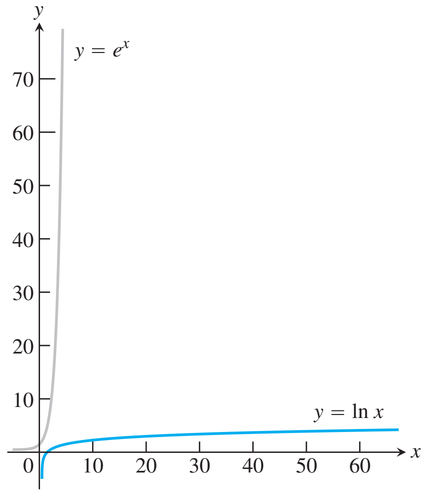


FIGURA 7.28 Dibujo a escala de las gráficas de e^x y $\ln x$.

fica está $e^1 \approx 3$ cm por arriba del eje x. En $x = 6$ cm, la gráfica se encuentra a $e^6 \approx 403$ cm $\approx$ 4 m de altura (está casi saliendo por el techo, si no es que ya salió). En $x = 10$ cm, la gráfica está $e^{10} \approx 22{,}026$ cm ≈ 220 m de altura, más alta que la mayoría de los edificios. En $x = 24$ cm, la gráfica está a más de la mitad de la distancia a la Luna y en $x = 43$ cm del origen, la gráfica tiene una altura suficiente para llegar a la estrella vecina más cercana al Sol, la estrella enana roja Próxima Centauri. En contraste, con los ejes marcados en centímetros, usted debería alejarse casi 5 años luz a lo largo del eje x para encontrar un punto donde la gráfica de $y = \ln x$ tenga una altura de $y = 43$ cm. Observe la figura 7.28.

Estas comparaciones importantes de las funciones exponencial, polinomial y logarítmica pueden hacerse con precisión definiendo lo que significa para una función $f(x)$ crecer más rápido que otra función $g(x)$ cuando $x \to \infty$.

DEFINICIÓN Tasas de crecimiento cuando $x \to \infty$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande.

1. f **crece más rápido que** g cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

o, de forma equivalente, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

También decimos que g **crece más lentamente que** f cuando $x \to \infty$.

2. f y g **crecen a la misma tasa** cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

donde L es finita y positiva.

De acuerdo con tales definiciones, $y = 2x$ no crece más rápido que $y = x$. Las dos funciones crecen a la misma tasa, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2,$$

que es un límite finito y positivo. La razón para esta aparente contradicción con el sentido común es que necesitamos que el significado de "f crece más rápido que g" sea que para valores grandes de x, g sea despreciable cuando se compara con f.

EJEMPLO 1 A continuación comparamos las tasas de crecimiento de varias funciones comunes.

(a) e^x crece más rápido que x^2 cuando $x \to \infty$ ya que

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\infty/\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\infty/\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty. \quad \text{Al aplicar dos veces la regla de L'Hôpital}$$

(b) 3^x crece más rápido que $2x$ cuando $x \to \infty$ ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty.$$

(c) x^2 crece más rápido que $\ln x$ cuando $x \to \infty$ ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty. \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

(d) $\ln x$ crece más lentamente que x cuando $x \to \infty$ para cualquier entero positivo n, ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{(1/n)\,x^{(1/n)-1}} \qquad \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n}{x^{1/n}} = 0. \qquad n \text{ es constante.}$$

(e) Como sugiere el inciso (b), las funciones exponenciales con bases diferentes nunca crecen a la misma tasa cuando $x \to \infty$. Si $a > b > 0$, entonces a^x crece más rápido que b^x. Ya que $(a/b) > 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty.$$

(f) En contraste con las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas con bases diferentes $a > b$ y $b > a$ siempre crecen a la misma tasa cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Esta razón límite siempre es finita y nunca es cero. ■

Si f crece a la misma tasa que g cuando $x \to \infty$, y g crece a la misma tasa que h cuando $x \to \infty$, entonces f crece a la misma tasa que h cuando $x \to \infty$. La razón es que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

implican

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2.$$

Si L_1 y L_2 son finitos y distintos de cero, entonces también lo es $L_1 L_2$.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\sqrt{x^2 + 5}$ y $(2\sqrt{x} - 1)^2$ crecen a la misma tasa cuando $x \to \infty$.

Solución Mostramos que las funciones crecen a la misma tasa al demostrar que ambas crecen a la misma tasa que la función $f(x) = x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4.$$ ■

Orden y notación O

La notación "o pequeña" y "O grande", inventada por varios teóricos hace un siglo, ahora es de uso común en análisis matemático y ciencias de la computación.

DEFINICIÓN Una función f es **de orden más pequeño que** g cuando $x \to \infty$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Esto lo indicamos escribiendo $\boldsymbol{f = o(g)}$ ("f es o pequeña de g").

Observe que decir $f = o(g)$ cuando $x \to \infty$ es otra forma de indicar que f crece más lentamente que g cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 3 A continuación utilizamos la notación o pequeña.

(a) $\ln x = o(x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

(b) $x^2 = o(x^3 + 1)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3 + 1} = 0$ ■

DEFINICIÓN Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas para x suficientemente grande. Entonces f es **a lo sumo del mismo orden que** g cuando $x \to \infty$ si existe un entero positivo M para el que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le M,$$

para x suficientemente grande. Esto lo indicamos escribiendo $\boldsymbol{f = O(g)}$ ("f es O grande de g").

EJEMPLO 4 A continuación utilizamos la notación O grande.

(a) $x + \operatorname{sen} x = O(x)$ as $x \to \infty$ ya que $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x} \le 2$ para x suficientemente grande.

(b) $e^x + x^2 = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\dfrac{e^x + x^2}{e^x} \to 1$ cuando $x \to \infty$.

(c) $x = O(e^x)$ cuando $x \to \infty$ ya que $\dfrac{x}{e^x} \to 0$ como $x \to \infty$. ■

Si analiza de nuevo la definición, verá que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$ para funciones que son positivas para x suficientemente grande. Además, si f y g crecen a la misma tasa, entonces $f = O(g)$ y $g = O(f)$ (ejercicio 11).

Búsqueda secuencial en comparación con búsqueda binaria

Con frecuencia en ciencias de la computación la eficiencia de un algoritmo se mide contando el número de pasos que requiere una computadora para ejecutar el algoritmo. Puede haber diferencias significativas en la forma como algoritmos diseñados de manera eficiente realizan la misma tarea. Tales diferencias a menudo se describen en notación O grande. A continuación damos un ejemplo.

El *International Dictionary de Webster* lista alrededor de 26,000 palabras que empiezan con la letra *a*. Una manera de buscar una palabra, o saber si no se encuentra en el diccionario, es recorrer la lista leyendo una palabra a la vez hasta que se encuentre la palabra o se determine que no está. Este método, denominado **búsqueda secuencial**, no aprovecha el hecho de que las palabras estén ordenadas alfabéticamente. Usted está seguro de obtener una respuesta, pero podría tomarle 26,000 pasos.

Otra manera de encontrar la palabra o saber que no está es ir directamente a la mitad de la lista (palabras antes o palabras después). Si no está la palabra, entonces habrá que ir a la mitad de la parte que la puede contener y olvidarse de la otra parte que no la tiene. (Usted sabe qué mitad la puede tener, ya que sabe que la lista está en orden alfabético). Este método, denominado **búsqueda binaria**, elimina aproximadamente 13,000 palabras en un solo paso. Si no encuentra la palabra en el segundo intento, entonces pase a la mitad de la parte que la puede contener. Continúe de esta forma hasta que encuentre la palabra o divida la lista en mitades tantas veces que no queden palabras por revisar. ¿Cuántas veces tiene que dividir la lista para encontrar la palabra o saber que no se encuentra? A lo sumo 15, ya que

$$(26{,}000/2^{15}) < 1.$$

Esto, desde luego, es mucho mejor que los posibles 26,000 pasos.

Para una lista de longitud n, un algoritmo de búsqueda secuencial tarda del orden de n pasos para encontrar una palabra o determinar que no se encuentra en la lista. Una búsqueda binaria, como se conoce el segundo método, tarda del orden de $\log_2 n$ pasos. La razón es que si $2^{m-1} < n \leq 2m$, entonces $m - 1 < \log_2 n \leq m$ y el número de bisecciones requeridas para reducir la lista a una palabra será a lo sumo $m = \lceil \log_2 n \rceil$, la función entera techo para $\log_2 n$.

La notación O grande representa una manera compacta de decir esto. El número de pasos en una búsqueda secuencial en una lista ordenada es $O(n)$; el número de pasos en una búsqueda binaria es $O(\log_2 n)$. En nuestro ejemplo, hay una gran diferencia entre las dos (26,000 *vs.* 15); la diferencia sólo puede aumentar con n, ya que n crece más rápido que $\log_2 n$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicios 7.8

Comparaciones con la exponencial e^x

1. Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando e^x como $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x - 3$ **b.** $x^3 + \operatorname{sen}^2 x$
c. $\sqrt{x}$ **d.** 4^x
e. $(3/2)^x$ **f.** $e^{x/2}$
g. $e^x/2$ **h.** $\log_{10} x$

2. Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que e^x cuando e^x como $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que e^x? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $10x^4 + 30x + 1$ **b.** $x \ln x - x$
c. $\sqrt{1 + x^4}$ **d.** $(5/2)^x$
e. e^{-x} **f.** xe^x
g. $e^{\cos x}$ **h.** e^{x-1}

Comparaciones con la potencia x^2

3. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 como $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x^2 + 4x$ **b.** $x^5 - x^2$
c. $\sqrt{x^4 + x^3}$ **d.** $(x + 3)^2$
e. $x \ln x$ **f.** 2^x
g. $x^3 e^{-x}$ **h.** $8x^2$

4. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que x^2? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $x^2 + \sqrt{x}$ **b.** $10x^2$
c. $x^2 e^{-x}$ **d.** $\log_{10}(x^2)$
e. $x^3 - x^2$ **f.** $(1/10)^x$
g. $(1.1)^x$ **h.** $x^2 + 100x$

Comparaciones con el logaritmo $\ln x$

5. Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que $\ln x$ cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que $\ln x$? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $\log_3 x$ **b.** $\ln 2x$
c. $\ln \sqrt{x}$ **d.** $\sqrt{x}$
e. x **f.** $5 \ln x$
g. $1/x$ **h.** e^x

6. ¿Cuáles de las siguientes funciones crecen más rápidamente que $\ln x$ cuando $x \to \infty$? ¿Cuáles crecen a la misma razón que $\ln x$? ¿Cuáles crecen más lentamente?

a. $\log_2(x^2)$ **b.** $\log_{10} 10x$
c. $1/\sqrt{x}$ **d.** $1/x^2$
e. $x - 2\ln x$ **f.** e^{-x}
g. $\ln(\ln x)$ **h.** $\ln(2x + 5)$

Clasificación de funciones según la razón de crecimiento

7. Ordene las siguientes funciones, de la más lenta a la más rápida, con base en su crecimiento cuando $x \to \infty$.

a. e^x **b.** x^x
c. $(\ln x)^x$ **d.** $e^{x/2}$

8. Ordene las siguientes funciones, de la más lenta a la más rápida, con base en su crecimiento, cuando $x \to \infty$.

a. 2^x **b.** x^2
c. $(\ln 2)^x$ **d.** e^x

O grande y o pequeña; orden

9. ¿Es cierto o falso? Cuando $x \to \infty$,

a. $x = o(x)$ **b.** $x = o(x + 5)$
c. $x = O(x + 5)$ **d.** $x = O(2x)$
e. $e^x = o(e^{2x})$ **f.** $x + \ln x = O(x)$
g. $\ln x = o(\ln 2x)$ **h.** $\sqrt{x^2 + 5} = O(x)$

10. ¿Es cierto o falso? Cuando $x \to \infty$,

a. $\frac{1}{x + 3} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ **b.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$
c. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ **d.** $2 + \cos x = O(2)$
e. $e^x + x = O(e^x)$ **f.** $x \ln x = o(x^2)$
g. $\ln(\ln x) = O(\ln x)$ **h.** $\ln(x) = o(\ln(x^2 + 1))$

11. Demuestre que si las funciones positivas $f(x)$ y $g(x)$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$, entonces $f = O(g)$ y $g = O(f)$.

12. ¿En qué caso el polinomio $f(x)$ es de orden menor que el polinomio $g(x)$ cuando $x \to \infty$? Justifique su respuesta.

13. ¿En qué caso el polinomio $f(x)$ es a lo sumo del orden del polinomio $g(x)$ cuando $x \to \infty$? Justifique su respuesta.

14. ¿Qué revelan nuestras conclusiones de la sección 2.4, sobre los límites de funciones racionales, acerca del crecimiento relativo de polinomios cuando $x \to \infty$?

Otras comparaciones

T **15.** Investigue

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}.$$

Después, utilice la regla de L'Hôpital para explicar lo que encontró.

16. (*Continuación del ejercicio 15*). Demuestre que el valor de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

es el mismo, sin importar el valor que se asigne a la constante a. ¿Qué revela esto sobre las razones relativas a las que crecen las funciones $f(x) = \ln(x + a)$ y $g(x) = \ln x$?

17. Demuestre que $\sqrt{10x+1}$ y $\sqrt{x+1}$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$; para ello, compruebe que ambas crecen a la misma razón que $\sqrt{x}$ cuando $x \to \infty$.

18. Demuestre que $\sqrt{x^4+x}$ y $\sqrt{x^4-x^3}$ crecen a la misma razón cuando $x \to \infty$; para ello, compruebe que ambas crecen a la misma razón que x^2 cuando $x \to \infty$.

19. Demuestre que e^x crece más rápidamente cuando $x \to \infty$, que x^n para cualquier entero positivo n, incluso $x^{1{,}000{,}000}$. (*Sugerencia:* Pregúntese cuál es la n-ésima derivada de x^n).

20. La función e^x sobrepasa a cualquier polinomio. Demuestre que e^x crece más rápidamente, cuando $x \to \infty$, que cualquier polinomio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

21. a. Demuestre que $\ln x$ crece más lentamente, cuando $x \to \infty$, que $x^{1/n}$ para cualquier entero positivo n, incluso $x^{1/1{,}000{,}000}$.

T **b.** Aun cuando los valores de $x^{1/1{,}000{,}000}$ sobrepasan finalmente a los de $\ln x$, hay que avanzar mucho en el eje x antes de que eso ocurra. Determine un valor de x, mayor que 1, para el cual $x^{1/1{,}000{,}000} > \ln x$. Podría iniciar si observa que cuando $x > 1$ la ecuación $\ln x = x^{1/1{,}000{,}000}$ es equivalente a $\ln(\ln x) = (\ln x)/1{,}000{,}000$.

T **c.** Incluso $x^{1/10}$ tarda mucho en sobrepasar a $\ln x$. Experimente con la calculadora para hallar el valor de x donde las gráficas de $x^{1/10}$ y $\ln x$ se cruzan, es decir, donde $\ln x = 10 \ln(\ln x)$. Trate de localizar el punto de intersección entre las potencias de 10 y afine cada vez más el resultado mediante particiones sucesivas en mitades.

T **d.** (*Continuación del inciso c*). El valor de x donde $\ln x = 10\ln(\ln x)$ es demasiado lejano para que lo identifiquen algunas graficadoras y programas para calcular raíces. Inténtelo con el equipo disponible y observe los resultados.

22. La función $\ln x$ crece más lentamente que cualquier polinomio. Demuestre que $\ln x$ crece más lentamente cuando $x \to \infty$, que cualquier polinomio no constante.

Algoritmos y búsquedas

23. a. Suponga que tiene tres algoritmos diferentes para resolver un mismo problema y el número de pasos que requiere cada uno es del orden de alguna de estas funciones:

$$n \log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2.$$

¿Cuál de los algoritmos es más eficiente? Justifique su respuesta.

T **b.** Trace juntas las funciones del inciso a) para apreciar con cuánta rapidez crece cada una.

24. Repita el ejercicio 23 con estas funciones:

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^2.$$

T **25.** Suponga que busca un elemento en una lista ordenada de un millón de ellos. ¿Cuántos pasos podría requerir para localizarlo en una búsqueda secuencial? ¿Y en una binaria?

T **26.** Si busca un elemento en una lista ordenada de 450,000 elementos (que es la extensión del *Webster's Third New International Dictionary*), ¿cuántos pasos podría requerir para localizarlo en una búsqueda secuencial? ¿Y en una binaria?

Capítulo 7 Preguntas de repaso

1. ¿Cuáles funciones tienen inversas? ¿Cómo sabe si dos funciones, f y g, son inversas una de la otra? Dé ejemplos de funciones que sean (o no sean) inversas una de la otra.
2. ¿Cómo están relacionados los dominios, los rangos y las gráficas de funciones y sus inversas? Dé un ejemplo.
3. ¿Cómo puede expresar en ocasiones la inversa de una función de x como una función de x?
4. ¿En qué circunstancias puede asegurar que la inversa de una función f es derivable? ¿Cómo están relacionadas las derivadas de f y f^{-1}?
5. ¿Qué es la función logaritmo natural? ¿Cuáles son su dominio, rango y derivada? ¿Qué propiedades aritméticas tiene? Comente acerca de su gráfica.
6. ¿Qué es la derivación logarítmica? Dé un ejemplo.
7. ¿Qué integrales conducen a logaritmos? Dé ejemplos. ¿Cuáles son las integrales de $\tan x$ y $\cot x$?
8. ¿Cómo se define la función exponencial e^x? ¿Cuáles son su dominio, rango y derivada? ¿Qué leyes de exponentes cumple? Comente con respecto a su gráfica.
9. ¿Cómo se definen las funciones a^x y $\log_a x$? ¿Existen restricciones sobre a? ¿Cómo está relacionada la gráfica de $\log_a x$ con la de $\ln x$? ¿Es verdadera la afirmación de que en realidad sólo existen una función exponencial y una función logaritmo?
10. ¿Cómo resuelve ecuaciones diferenciales separables de primer orden?
11. ¿Cuál es la ley de cambio de exponenciales? ¿Cómo puede deducirse con base en un problema de valor inicial? ¿Cuáles son algunas de las aplicaciones de esta ley?
12. Describa la regla de L'Hôpital. ¿Cómo sabe cuándo utilizar la regla y cuándo detenerse? Dé un ejemplo.

13. En ocasiones, ¿cómo puede manejar límites que llevan a las formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$? Dé ejemplos.
14. En ocasiones, ¿cómo puede manejar límites que conducen a las formas indeterminadas 1^∞, 0^0 e ∞^∞? Dé ejemplos.
15. ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas inversas? En ocasiones, ¿cómo puede utilizar triángulos rectángulos para determinar los valores de esas funciones? Dé ejemplos.
16. ¿Qué son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas? ¿Cómo son los dominios de las derivadas comparados con los dominios de las funciones?
17. ¿Qué integrales llevan a funciones trigonométricas inversas? ¿De qué forma la sustitución y completar cuadrados amplían la aplicación de estas integrales?
18. ¿Cuáles son las seis funciones hiperbólicas básicas? Comente acerca de sus dominios, sus rangos y sus gráficas. ¿Cuáles son algunas de las identidades que las relacionan?
19. ¿Cuáles son las derivadas de las seis funciones hiperbólicas básicas? ¿Cuáles son las correspondientes fórmulas de integrales? ¿Qué similitudes ve aquí con las seis funciones trigonométricas básicas?
20. ¿Cómo se definen las funciones hiperbólicas inversas? Comente acerca de sus dominios, sus rangos y sus gráficas. ¿Cómo puede determinar los valores de $\operatorname{sech}^{-1} x$, $\operatorname{csch}^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ por medio de las teclas de la calculadora para $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$?
21. ¿Qué integrales llevan de manera natural a las funciones hiperbólicas inversas?
22. ¿Cómo compara las tasas de crecimiento de funciones positivas cuando $x \to \infty$?
23. ¿Qué papel desempeñan las funciones e^x y $\ln x$ en las comparaciones de crecimiento?
24. Describa la notación o pequeña y O grande. Dé ejemplos.
25. ¿Qué es más eficiente, una búsqueda secuencial o una búsqueda binaria? Explique.

Capítulo 7 Ejercicios de práctica

Determinación de derivadas

En los ejercicios 1 a 24, determine la derivada de y con respecto a la variable apropiada.

1. $y = 10e^{-x/5}$
2. $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$
3. $y = \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$
4. $y = x^2 e^{-2/x}$
5. $y = \ln(\operatorname{sen}^2\theta)$
6. $y = \ln(\sec^2\theta)$
7. $y = \log_2(x^2/2)$
8. $y = \log_5(3x - 7)$
9. $y = 8^{-t}$
10. $y = 9^{2t}$
11. $y = 5x^{3.6}$
12. $y = \sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$
13. $y = (x + 2)^{x+2}$
14. $y = 2(\ln x)^{x/2}$
15. $y = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{1 - u^2}, \quad 0 < u < 1$
16. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad v > 1$
17. $y = \ln\cos^{-1} x$
18. $y = z\cos^{-1} z - \sqrt{1 - z^2}$
19. $y = t\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\ln t$
20. $y = (1 + t^2)\cot^{-1} 2t$
21. $y = z\sec^{-1} z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad z > 1$
22. $y = 2\sqrt{x - 1}\,\sec^{-1}\sqrt{x}$
23. $y = \csc^{-1}(\sec\theta), \quad 0 < \theta < \pi/2$
24. $y = (1 + x^2)e^{\tan^{-1} x}$

Derivación logarítmica

En los ejercicios 25 a 30, utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de y respecto de la variable apropiada.

25. $y = \dfrac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{\cos 2x}}$
26. $y = \sqrt[10]{\dfrac{3x + 4}{2x - 4}}$
27. $y = \left(\dfrac{(t + 1)(t - 1)}{(t - 2)(t + 3)}\right)^5, \quad t > 2$
28. $y = \dfrac{2u2^u}{\sqrt{u^2 + 1}}$
29. $y = (\operatorname{sen}\theta)^{\sqrt{\theta}}$
30. $y = (\ln x)^{1/(\ln x)}$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 31 a 78.

31. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$
32. $\int e^t \cos(3e^t - 2)\,dt$
33. $\int e^x \sec^2(e^x - 7)\,dx$
34. $\int e^y \csc(e^y + 1)\cot(e^y + 1)\,dy$
35. $\int \sec^2(x)e^{\tan x}\,dx$
36. $\int \csc^2 x\, e^{\cot x}\,dx$
37. $\int_{-1}^{1} \dfrac{dx}{3x - 4}$
38. $\int_1^e \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
39. $\int_0^\pi \tan\dfrac{x}{3}\,dx$
40. $\int_{1/6}^{1/4} 2\cot\pi x\,dx$
41. $\int_0^4 \dfrac{2t}{t^2 - 25}\,dt$
42. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \dfrac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}\,dt$
43. $\int \dfrac{\tan(\ln v)}{v}\,dv$
44. $\int \dfrac{dv}{v\ln v}$
45. $\int \dfrac{(\ln x)^{-3}}{x}\,dx$
46. $\int \dfrac{\ln(x - 5)}{x - 5}\,dx$
47. $\int \dfrac{1}{r}\csc^2(1 + \ln r)\,dr$
48. $\int \dfrac{\cos(1 - \ln v)}{v}\,dv$
49. $\int x3^{x^2}\,dx$
50. $\int 2^{\tan x}\sec^2 x\,dx$
51. $\int_1^7 \dfrac{3}{x}\,dx$
52. $\int_1^{32} \dfrac{1}{5x}\,dx$

53. $\int_1^4 \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right) dx$

54. $\int_1^8 \left(\frac{2}{3x} - \frac{8}{x^2}\right) dx$

55. $\int_{-2}^{-1} e^{-(x+1)}\, dx$

56. $\int_{-\ln 2}^{0} e^{2w}\, dw$

57. $\int_0^{\ln 5} e^r(3e^r + 1)^{-3/2}\, dr$

58. $\int_0^{\ln 9} e^{\theta}(e^{\theta} - 1)^{1/2}\, d\theta$

59. $\int_1^e \frac{1}{x}(1 + 7\ln x)^{-1/3}\, dx$

60. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$

61. $\int_1^3 \frac{(\ln(v+1))^2}{v+1}\, dv$

62. $\int_2^4 (1 + \ln t)t \ln t\, dt$

63. $\int_1^8 \frac{\log_4 \theta}{\theta}\, d\theta$

64. $\int_1^e \frac{8 \ln 3 \log_3 \theta}{\theta}\, d\theta$

65. $\int_{-3/4}^{3/4} \frac{6\, dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$

66. $\int_{-1/5}^{1/5} \frac{6\, dx}{\sqrt{4 - 25x^2}}$

67. $\int_{-2}^{2} \frac{3\, dt}{4 + 3t^2}$

68. $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dt}{3 + t^2}$

69. $\int \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 1}}$

70. $\int \frac{24\, dy}{y\sqrt{y^2 - 16}}$

71. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dy}{|y|\sqrt{9y^2 - 1}}$

72. $\int_{-2/\sqrt{5}}^{-\sqrt{6}/\sqrt{5}} \frac{dy}{|y|\sqrt{5y^2 - 3}}$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x - x^2}}$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 1}}$

75. $\int_{-2}^{-1} \frac{2\, dv}{v^2 + 4v + 5}$

76. $\int_{-1}^{1} \frac{3\, dv}{4v^2 + 4v + 4}$

77. $\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2 + 2t - 8}}$

78. $\int \frac{dt}{(3t+1)\sqrt{9t^2 + 6t}}$

Resolución de ecuaciones

En los ejercicios 79 a 84, despeje a y.

79. $3^y = 2^{y+1}$

80. $4^{-y} = 3^{y+2}$

81. $9e^{2y} = x^2$

82. $3^y = 3 \ln x$

83. $\ln(y - 1) = x + \ln y$

84. $\ln(10 \ln y) = \ln 5x$

Aplicación de la regla de L'Hôpital

En los ejercicios 85 a 108, utilice la regla de L'Hôpital para determinar los límites.

85. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

86. $\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$

87. $\lim_{x\to \pi} \frac{\tan x}{x}$

88. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x + \operatorname{sen} x}$

89. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan(x^2)}$

90. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$

91. $\lim_{x\to \pi/2^-} \sec 7x \cos 3x$

92. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} \sec x$

93. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

94. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$

95. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

96. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1}\right)$

97. $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 1}{x}$

98. $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^\theta - 1}{\theta}$

99. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$

100. $\lim_{x\to 0} \frac{2^{-\operatorname{sen} x} - 1}{e^x - 1}$

101. $\lim_{x\to 0} \frac{5 - 5\cos x}{e^x - x - 1}$

102. $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x^2}{\tan^3 x}$

103. $\lim_{t\to 0^+} \frac{t - \ln(1 + 2t)}{t^2}$

104. $\lim_{x\to 4} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{e^{x-4} + 3 - x}$

105. $\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right)$

106. $\lim_{y\to 0^+} e^{-1/y} \ln y$

107. $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{\ln x}$

108. $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Comparación de tasas de crecimiento de funciones

109. ¿f crece más rápido, más lentamente o a la misma tasa que g cuando $x \to \infty$? Justifique sus respuestas.

a. $f(x) = \log_2 x$, $\quad g(x) = \log_3 x$

b. $f(x) = x$, $\quad g(x) = x + \frac{1}{x}$

c. $f(x) = x/100$, $\quad g(x) = xe^{-x}$

d. $f(x) = x$, $\quad g(x) = \tan^{-1} x$

e. $f(x) = \csc^{-1} x$, $\quad g(x) = 1/x$

f. $f(x) = \operatorname{senh} x$, $\quad g(x) = e^x$

110. ¿f crece más rápido, más lentamente o a la misma tasa que g cuando $x \to \infty$? Justifique sus respuestas.

a. $f(x) = 3^{-x}$, $\quad g(x) = 2^{-x}$

b. $f(x) = \ln 2x$, $\quad g(x) = \ln x^2$

c. $f(x) = 10x^3 + 2x^2$, $\quad g(x) = e^x$

d. $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$, $\quad g(x) = 1/x$

e. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$, $\quad g(x) = 1/x^2$

f. $f(x) = \operatorname{sech} x$, $\quad g(x) = e^{-x}$

111. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$

c. $x = o(x + \ln x)$

d. $\ln(\ln x) = o(\ln x)$

e. $\tan^{-1} x = O(1)$

f. $\cosh x = O(e^x)$

112. ¿Verdadero o falso? Justifique sus respuestas.

a. $\frac{1}{x^4} = O\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$

b. $\frac{1}{x^4} = o\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$

c. $\ln x = o(x + 1)$

d. $\ln 2x = O(\ln x)$

e. $\sec^{-1} x = O(1)$

f. $\operatorname{senh} x = O(e^x)$

Teoría y aplicaciones

113. Ya que la función $f(x) = e^x + x$ es derivable e inyectiva, tiene una inversa derivable $f^{-1}(x)$. Determine el valor de df^{-1}/dx en el punto $f(\ln 2)$.

114. Determine la inversa de la función $f(x) = 1 + (1/x), x \neq 0$. Después, demuestre que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ y que

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

En los ejercicios 115 y 116, determine los valores máximo absoluto y mínimo absolutos de cada función en el intervalo dado.

115. $y = x \ln 2x - x, \quad \left[\frac{1}{2e}, \frac{e}{2}\right]$

116. $y = 10x(2 - \ln x), \quad (0, e^2]$

117. Área Calcule el área bajo la curva $y = 2(\ln x)/x$ y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = e$.

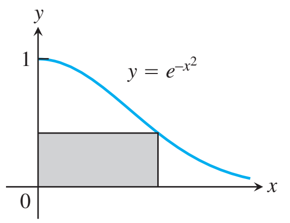
118. a. Demuestre que el área que está entre la curva $y = 1/x$ y el eje x, desde $x = 10$ hasta $x = 20$, es igual al área que está entre la curva y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

b. Demuestre que el área que está entre la curva $y = 1/x$ y el eje x desde ka hasta kb es igual al área que está entre curva y el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$ $(0 < a < b, k > 0)$.

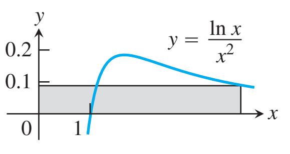
119. Una partícula viaja hacia arriba y a la derecha sobre la curva $y = \ln x$. Su coordenada x crece según la razón $(dx/dt) = \sqrt{x}$ m/sec. ¿Cuál es la tasa de cambio de la coordenada y en el punto $(e^2, 2)$?

120. Una niña se desliza por un tobogán cuya forma es la curva $y = 9e^{-x/3}$. Su coordenada y cambia según la razón $dy/dt = (-1/4)\sqrt{9 - y}$ ft/seg. ¿Aproximadamente a qué razón cambia su coordenada x cuando llega a la parte inferior del tobogán en $x = 9$ ft? (Considere que e^3 es 20 y redondee la respuesta al ft/seg más cercano).

121. El rectángulo de la siguiente ilustración tiene un lado sobre el eje y positivo, otro sobre el eje x positivo y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = e^{-x^2}$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo su mayor área y cuál es esa área?



122. El rectángulo de la ilustración tiene un lado sobre el eje y positivo, otro sobre el eje x positivo, y su vértice superior derecho está sobre la curva $y = (\ln x)/x^2$. ¿Con qué dimensiones alcanza el rectángulo su mayor área y cuál es tal área?



T **123.** Trace las gráficas de las siguientes funciones y utilice sus observaciones para localizar y estimar los valores extremos para identificar las coordenadas de los puntos de inflexión, así como para determinar los intervalos donde las gráficas son cóncavas hacia arriba y hacia abajo. Después, confirme sus estimaciones; para ello, trabaje con las derivadas de las funciones.

a. $y = (\ln x)/\sqrt{x}$ **b.** $y = e^{-x^2}$ **c.** $y = (1 + x)e^{-x}$

T **124.** Trace la gráfica de $f(x) = x \ln x$. ¿Le parece que la función tenga un valor mínimo absoluto? Confirme su respuesta mediante cálculo.

En los ejercicios 125 a 128 resuelva la ecuación diferencial.

125. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \cos^2 \sqrt{y}$ **126.** $y' = \frac{3y(x + 1)^2}{y - 1}$

127. $yy' = \sec y^2 \sec^2 x$ **128.** $y \cos^2 x\, dy + \operatorname{sen} x\, dx = 0$

En los ejercicios 129 a 132 resuelva el problema de valor inicial.

129. $\frac{dy}{dx} = e^{-x-y-2}, \quad y(0) = -2$

130. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{1 + x^2}, \quad y(0) = e^2$

131. $x\, dy - \left(y + \sqrt{y}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$

132. $y^{-2} \frac{dx}{dy} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}, \quad y(0) = 1$

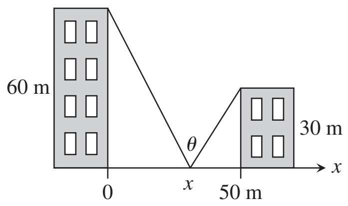
133. ¿Cuál es la edad de una muestra de carbón vegetal en la cual el 90% del carbono 14 original ha decaído?

134. Enfriamiento de una tarta En un plato hondo, una tarta, cuya temperatura interna era de 220 °F al ser sacada del horno, se deja enfriar en una terraza bien ventilada a 40 °F. A los 15 minutos, la temperatura interna de la tarta era de 180 °F. ¿Cuánto tiempo más tardará en enfriarse hasta llegar a 70 °F?

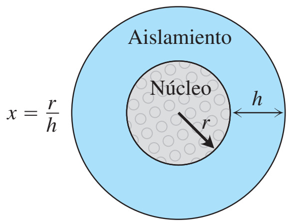
135. Localización de una estación solar Usted ha firmado un contrato para construir una estación solar al nivel del suelo, con alineación este-oeste entre los dos edificios de la ilustración. ¿A qué distancia del edificio más alto debe ubicar la estación para maximizar el número de horas que recibirá la luz solar en un día cuando el sol pase directamente por arriba? Observe primero que

$$\theta = \pi - \cot^{-1} \frac{x}{60} - \cot^{-1} \frac{50 - x}{30}.$$

Después, encuentre el valor de x que maximiza θ.



136. Un cable redondo para transmisión submarina está formado por un núcleo de alambres de cobre, forrado de un aislamiento no conductor. Si x es la razón o el cociente entre el radio del núcleo y el grosor del aislamiento, sabemos que la velocidad de la señal transmitida está dada por la ecuación $\upsilon = x^2 \ln (1/x)$. Si el radio del núcleo es de 1 cm, ¿qué grosor del aislamiento h permitirá la mayor velocidad de transmisión?



Capítulo 7 Ejercicios adicionales y avanzados

Límites

Determine los límites en los ejercicios 1 a 6.

1. $\lim\limits_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \tan^{-1} t\, dt$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{1/x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+e^x)^{2/x}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}\right)$

7. Sea $A(t)$ el área de la región comprendida en el primer cuadrante y encerrada por los ejes coordenados, la curva $y=-e^x$ y la recta vertical $x=t$, $t>0$. Sea $V(t)$ el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x. Determine los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{t\to\infty} A(t)$ **b.** $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ **c.** $\lim\limits_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$

8. Variación de la base de un logaritmo

a. Determine lím $\log_a 2$ cuando $a\to 0^+, 1^-, 1^+$ e ∞.

T **b.** Trace la gráfica de $y=\log_a 2$ como una función de a en el intervalo $0<a\le 4$.

Teoría y ejemplos

9. Determine las áreas entre las curvas $y=2(\log_2 x)/x$ y $y=2(\log_4 x)/x$ y el eje x desde $x=1$ hasta $x=e$. ¿Cuál es la razón entre el área mayor y el área menor?

T **10.** Trace la gráfica de $f(x)=\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1/x)$ para $-5\le x\le 5$. Después utilice cálculo para explicar lo que observe. ¿Cómo esperaría que f se comporte fuera del intervalo $[-5, 5]$? Justifique su respuesta.

11. ¿Para qué $x>0$ se cumple $x^{(x^x)}=(x^x)^x$? Justifique su respuesta.

T **12.** Trace la gráfica de $f(x)=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ en $[0, 3\pi]$. Explique lo que observe.

13. Determine $f'(2)$ si $f(x)=e^{g(x)}$ y $g(x)=\int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$.

14. a. Determine df/dx si

$$f(x)=\int_1^{e^x}\frac{2\ln t}{t}\,dt.$$

b. Encuentre $f(0)$.

c. ¿Qué puede concluir con respecto a la gráfica de f? Justifique su respuesta.

15. Descomposiciones par-impar

a. Suponga que g es una función par de x, y h es una función impar de x. Demuestre que si $g(x)+h(x)=0$ para toda x, entonces $g(x)=0$ para toda x, y $h(x)=0$ para toda x.

b. Si $f(x)=f_E(x)+f_O(x)$ es la suma de una función par $f_E(x)$ y una función impar $f_O(x)$, demuestre que entonces

$$f_E(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad f_O(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

c. ¿Cuál es el significado del resultado del inciso (b)?

16. Sea g una función que es derivable en todo intervalo abierto que contiene al origen. Suponga que g tiene las siguientes propiedades:

i) $g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ para todos los números reales x, y y $x+y$ en el dominio de g.

ii) $\lim\limits_{h\to 0} g(h)=0$

iii) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=1$

a. Demuestre que $g(0)=0$.

b. Demuestre que $g'(x)=1+[g(x)]^2$.

c. Determine $g(x)$ resolviendo la ecuación diferencial del inciso (b).

17. Centro de masa Determine el centro de masa de un placa delgada de densidad constante que cubre una región localizada en el primero y cuarto cuadrantes, delimitada por las curvas $y=1/(1+x^2)$ y $y=-1/(1+x^2)$, así como por las rectas $x=0$ y $x=1$.

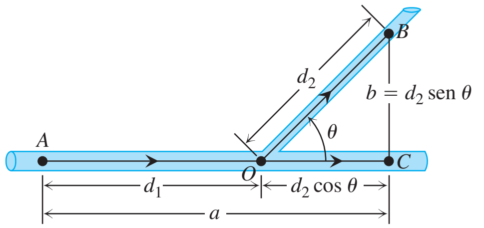
18. Sólido de revolución La región que está entre la curva $y=1/(2\sqrt{x})$ y el eje x, desde $x=1/4$ hasta $x=4$, gira sobre el eje x para generar un sólido.

a. Calcule el volumen del sólido.

b. Determine el centroide de la región.

19. Los mejores ángulos para ramificaciones de vasos sanguíneos y tuberías Cuando un tubo pequeño se ramifica en otro más pequeño en un sistema de flujo, es posible que deseemos darle el ángulo más adecuado desde el punto de vista del ahorro de energía. Se podría requerir, por ejemplo, que la pérdida de energía a causa de la fricción se minimice en la sección AOB de la siguiente figura. En este diagrama, B es un punto dado al cual debe tener acceso el tubo pequeño; A es un punto del tubo más grande, corriente arriba de B; y O es el punto donde se localiza la ramificación. Una ley, enunciada por Poiseuille, establece que, en un flujo no turbulento, la pérdida de energía a causa de la fricción es proporcional a la longitud del trayecto recorrido e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio del tubo. Así, la pérdida a lo largo de AO es $(kd_1)/R^4$ y a lo largo de OB es $(kd_2)/r^4$, donde k es una constante, d_1 es la longitud de AO, d_2 es la longitud de OB, R es el radio del tubo grande y r es el radio del tubo pequeño. Es necesario elegir el ángulo θ de manera que se minimice la suma de estas dos pérdidas:

$$L=k\frac{d_1}{R^4}+k\frac{d_2}{r^4}.$$



En nuestro modelo hemos supuesto que $AC=a$ y $BC=b$ son longitudes fijas. Así, tenemos las relaciones

$$d_1+d_2\cos\theta=a \qquad d_2\operatorname{sen}\theta=b$$

por lo cual

$$d_2 = b \csc \theta,$$
$$d_1 = a - d_2 \cos \theta = a - b \cot \theta.$$

La pérdida total L se puede expresar como una función de θ:

$$L = k\left(\frac{a - b \cot \theta}{R^4} + \frac{b \csc \theta}{r^4}\right).$$

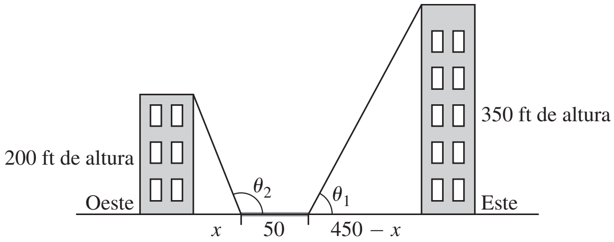
a. Demuestre que el valor crítico de θ para el cual $dL/d\theta$ es igual a cero es

$$\theta_c = \cos^{-1} \frac{r^4}{R^4}.$$

b. Si la razón entre los radios de los tubos es $r/R = 5/6$, estime el ángulo de ramificación óptimo descrito en el inciso (a); redondee al grado más próximo.

El análisis matemático que hemos descrito se usa también para explicar los ángulos en los que se ramifican las arterias en el cuerpo de un animal.

T **20. Jardinería urbana** Una hortaliza de 50 ft de ancho se encuentra en el suelo entre dos edificios, que están separados 500 ft a lo largo de la línea este-oeste. Si los edificios tienen una altura de 200 y 350 ft, respectivamente, ¿dónde debe colocarse la hortaliza para que pueda recibir el número máximo de horas de luz solar? (*Sugerencia:* En la siguiente figura determine el valor de x que maximiza la exposición a la luz solar de la hortaliza).



8

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

INTRODUCCIÓN El teorema fundamental nos dice cómo evaluar una integral definida, una vez que tenemos una antiderivada para la función integrando. La tabla 8.1 resume las formas de antiderivadas para muchas de las funciones que hemos estudiado, mientras que el método de sustitución nos ayuda a utilizar la tabla para evaluar funciones más complicadas que incluyan a las básicas. En este capítulo estudiaremos otras técnicas importantes para determinar antiderivadas (o integrales indefinidas) para muchas combinaciones de funciones cuyas antiderivadas no pueden determinarse utilizando los métodos presentados hasta ahora.

TABLA 8.1 Fórmulas básicas de integración

1. $\int k\,dx = kx + C \qquad (\text{cualquier número } k)$	**12.** $\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert + C$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	**13.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert + C$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**14.** $\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$	**15.** $\int \csc x\,dx = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + C$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$	**16.** $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	**17.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**19.** $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**20.** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\dfrac{x}{a}\right\rvert + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	**21.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	**22.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C \qquad (x > a > 0)$

8.1 Integración por partes

La integración por partes es una técnica para simplificar integrales de la forma

$$\int f(x)g(x)\,dx.$$

Es útil cuando f es derivable de manera repetida y g es integrable repetidamente sin dificultad. Las integrales

$$\int x\cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int x^2e^x\,dx$$

son ejemplos de tales integrales, donde $f(x) = x$ o $f(x) = x^2$ pueden derivarse repetidamente hasta convertirse en cero, y $g(x) = \cos x$ o $g(x) = e^x$ puede integrarse de manera repetida sin dificultad. La integración por partes también se aplica a integrales como

$$\int \ln x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x\cos x\,dx.$$

En el primer caso, $f(x) = \ln x$ es fácil derivar y $g(x) = 1$ es fácil de integrar, para dar x. En el segundo caso, cada parte del integrando aparece una y otra vez después de derivaciones e integraciones sucesivas.

Regla del producto en forma de integral

Si f y g son funciones derivables de x, la regla del producto establece

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En términos de integrales indefinidas, esta ecuación se transforma en

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$$

o

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Si reacomodamos los términos de esta última ecuación, obtendremos

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

lo que conduce a la fórmula de **integración por partes**

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (1)}$$

En ocasiones es más fácil recordar la fórmula si la escribimos en forma diferencial. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces, $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$. Utilizando la regla de sustitución, la fórmula de integración por partes se transforma en

Fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (2)$$

Esta fórmula expresa una integral, $\int u\,dv$, en términos de una segunda integral, $\int v\,du$. Con una elección adecuada de u y v, la segunda integral puede ser más fácil de evaluar que la primera. Para utilizar la fórmula, hay varias opciones posibles para u y dv. Los siguientes ejemplos ilustran la técnica. Para evitar errores, siempre listamos nuestras elecciones para u y dv, luego añadimos a la lista los términos nuevos du y v; por último, aplicamos la fórmula de la ecuación (2).

EJEMPLO 1 Determine

$$\int x \cos x\,dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \cos x\,dx, \\ du &= dx, & v &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$ La antiderivada más sencilla de $\cos x$.

Luego,

$$\int x\cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Existen cuatro opciones disponibles para u y dv en el ejemplo 1.

1. Hacer $u = 1$ y $dv = x\cos x\,dx$.
2. Hacer $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$.
3. Hacer $u = x\cos x$ y $dv = dx$.
4. Hacer $u = \cos x$ y $dv = x\,dx$.

La opción 2 se utilizó en el ejemplo 1. Las otras tres elecciones conducen a integrales que no sabemos cómo integrar. Por ejemplo, la opción 3 lleva a la integral

$$\int (x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x)\,dx.$$

El objetivo de la integración por partes es pasar de una integral $\int u\,dv$ que no vemos cómo evaluar, a una integral $\int v\,du$ que sí podamos evaluar. Por lo general, primero se elige que dv sea tanto del integrando, incluyendo a dx, como sea posible integrar fácilmente; u es la parte restante. Al determinar v a partir de dv, cualquier antiderivada funcionará, pero por lo regular elegimos la más sencilla; no se necesitan constantes de integración en v, ya que se cancelarían en el lado derecho de la ecuación (2).

EJEMPLO 2 Determine

$$\int \ln x\,dx.$$

Solución Como $\int \ln x\,dx$ puede escribirse como $\int \ln x \cdot 1\,dx$, utilizamos la fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ con

$u = \ln x$ Se simplifica cuando se obtiene la diferencial $\qquad dv = dx$ Fácil de integrar

$du = \dfrac{1}{x}\,dx, \qquad v = x.$ La antiderivada más sencilla.

Así, a partir de la ecuación (2),

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \qquad \blacksquare$$

A veces tenemos que utilizar la integración por partes más de una vez.

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int x^2 e^x\, dx.$$

Solución Con $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$, $du = 2x\, dx$ y $v = e^x$, tenemos

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

La nueva integral es menos complicada que la original, ya que el exponente en x se redujo en uno. Para evaluar la integral de la derecha, nuevamente integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x\, dx$. Entonces, $du = dx$, $v = e^x$ y

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C.$$

En consecuencia, si utilizamos esta última evaluación, obtenemos

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x\, dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

La técnica del ejemplo 3 funciona para cualquier integral $\int x^n e^x\, dx$ en la que n es un entero positivo, ya que al derivar x^n finalmente se llegará a cero, y la integración de e^x es sencilla.

Integrales como la del siguiente ejemplo aparecen en ingeniería eléctrica. Su evaluación requiere dos integraciones por partes, seguidas por un despeje de la integral desconocida.

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Solución Sean $u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$. Entonces $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$ y

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

La segunda integral es como la primera, salvo que tiene $\operatorname{sen} x$ en vez de $\cos x$. Para evaluarla, utilizamos integración por partes con

$$u = e^x, \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx, \qquad v = -\cos x, \qquad du = e^x\, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x\, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x\, dx)\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.\end{aligned}$$

Ahora la integral desconocida aparece en ambos lados de la ecuación. Sumando la integral a ambos lados y agregando la constante de integración, se obtiene

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C_1.$$

Si se divide entre 2 y se renombra la constante de integración, se obtiene

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C.$$

EJEMPLO 5 Obtenga una fórmula que exprese la integral

$$\int \cos^n x\,dx$$

en términos de una integral con una potencia menor de $\cos x$.

Solución Podríamos considerar a $\cos^n x$ como $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$. Entonces hacemos

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{y} \qquad dv = \cos x\,dx,$$

por lo que

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\operatorname{sen} x\,dx) \qquad \text{y} \qquad v = \operatorname{sen} x.$$

Entonces, la integración por partes da

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx.\end{aligned}$$

Si sumamos

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

a ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

Luego dividimos entre n; el resultado final es

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

La fórmula que se encontró en el ejemplo 5 se denomina **fórmula de reducción**, ya que remplaza una integral que contiene alguna potencia de una función con una integral de la misma forma cuya potencia es reducida. Cuando n es un entero positivo, podríamos aplicar varias veces la fórmula hasta que la integral que quede sea fácil de evaluar. Por ejemplo, el resultado en el ejemplo 5 nos dice que

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

Evaluación de integrales definidas mediante integración por partes

La fórmula de integración por partes en la ecuación (1) puede combinarse con la parte 2 del teorema fundamental para evaluar integrales definidas por partes. Si suponemos que f' y g' son continuas en el intervalo $[a, b]$, la parte 2 del teorema fundamental da

Fórmula de integración por partes para integrales definidas

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

Al aplicar la ecuación (3), por lo regular utilizamos las notaciones u y v de la ecuación (2), ya que son más fáciles de recordar. He aquí un ejemplo.

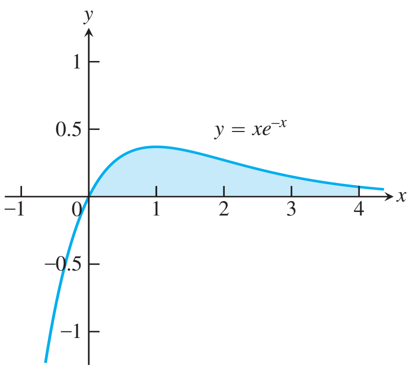


FIGURA 8.1 La región del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Determine el área de la región acotada por la curva $y = xe^{-x}$ y el eje x desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Solución La región aparece sombreada en la figura 8.1. Su área es

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

Sea $u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ y $du = dx$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\
&= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\
&= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\
&= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.
\end{aligned}$$

■

Integración tabular

Hemos visto que las integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$, en las que f se deriva de forma repetida hasta volverse cero y g se integra varias veces sin dificultad, son candidatas naturales para integración por partes. Sin embargo, si se requieren muchas repeticiones, los cálculos pueden volverse pesados, o tal vez usted elija sustituciones para una integración repetida por partes que termine por regresar a la integral original que se trata de encontrar. En situaciones como ésta, existe una manera de organizar los cálculos que evita estas fallas y hace el trabajo mucho más sencillo. Se denomina **integración tabular** y se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

Solución Con $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, listamos:

***f*(*x*) y sus derivadas**		***g*(*x*) y sus integrales**
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con el signo de la operación que está encima de las flechas, para obtener

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Compare esto con el resultado del ejemplo 3. ■

EJEMPLO 8 Evalúe

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx.$$

Solución Con $f(x) = x^3$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, listamos

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^3	$(+)$	$\operatorname{sen} x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\operatorname{sen} x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\operatorname{sen} x$

Nuevamente combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con los signos de operación que están encima de las flechas, para obtener

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C.$$ ■

Los ejercicios adicionales, al final de este capítulo, muestran cómo la integración tabular puede utilizarse cuando ninguna de las dos funciones, f y g, puede derivarse de manera repetida para convertirse en cero.

Ejercicios 8.1

Integración por partes

Mediante integración por partes, evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 24.

1. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\,dx$

2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$

3. $\int t^2 \cos t\,dt$

4. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$

6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$

7. $\int xe^x\,dx$

8. $\int xe^{3x}\,dx$

9. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

10. $\int (x^2 - 2x + 1)\,e^{2x}\,dx$

11. $\int \tan^{-1} y\,dy$

12. $\int \operatorname{sen}^{-1} y\,dy$

13. $\int x \sec^2 x\,dx$

14. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$

15. $\int x^3 e^x\,dx$

16. $\int p^4 e^{-p}\,dp$

17. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$

18. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$

19. $\int x^5 e^x\,dx$

20. $\int t^2 e^{4t}\,dt$

21. $\int e^\theta \operatorname{sen} \theta\,d\theta$

22. $\int e^{-y} \cos y\,dy$

23. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$

24. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x\,dx$

Uso de la sustitución

Evalúe las integrales en los ejercicios 25 a 30; para ello, use una sustitución antes de la integración por partes.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$

26. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x}\,dx$

27. $\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x\, dx$

28. $\int \ln (x + x^2)\, dx$

29. $\int \operatorname{sen} (\ln x)\, dx$

30. $\int z(\ln z)^2\, dz$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 31 a 50. Algunas integrales no requieren de integración por partes.

31. $\int x \sec x^2\, dx$

32. $3\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

33. $\int x (\ln x)^2\, dx$

34. $\int \frac{1}{x (\ln x)^2}\, dx$

35. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

36. $3\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

37. $\int x^3 e^{x^4}\, dx$

38. $\int x^5 e^{x^3}\, dx$

39. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

40. $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$

41. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

42. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx$

43. $\int e^x \operatorname{sen} e^x\, dx$

44. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

46. $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

47. $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

48. $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$

49. $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t\, dt$

50. $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1} (x^2)\, dx$

Teoría y ejemplos

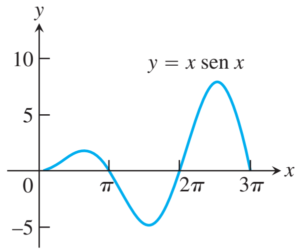
51. Cálculo de áreas Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$ y el eje x (véase la figura) para

a. $0 \le x \le \pi$.

b. $\pi \le x \le 2\pi$.

c. $2\pi \le x \le 3\pi$.

d. ¿Observa algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para $n\pi \le x \le (n + 1)\pi$, donde n es un entero no negativo arbitrario? Justifique su respuesta.



52. Cálculo de áreas Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \cos x$ y el eje x (véase la figura) para

a. $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

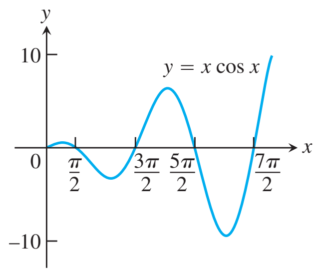
b. $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$.

c. $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$.

d. ¿Observa algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para

$$\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n + 1}{2}\right)\pi,$$

donde n es un entero positivo arbitrario? Justifique su respuesta.



53. Cálculo del volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor de la recta $x = \ln 2$, la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln 2$.

54. Cálculo del volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

a. alrededor del eje y.

b. alrededor de la recta $x = 1$.

55. Cálculo del volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$, alrededor

a. del eje y.

b. de la recta $x = \pi/2$.

56. Cálculo del volumen Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, alrededor

a. del eje y

b. de la recta $x = \pi$.

(Véase la gráfica en el ejercicio 51)

57. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

a. Determine el área de la región.

b. Determine el volumen del sólido que se forma al hacer girar esta región alrededor del eje x.

c. Determine el volumen del sólido formado al hacer girar esta región alrededor de la recta $x = -2$.

d. Determine el centroide de la región.

58. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \tan^{-1} x$, $y = 0$ y $x = 1$.

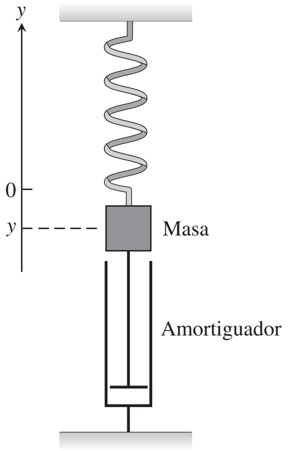
a. Determine el área de la región.

b. Determine el volumen del sólido formado al hacer girar esta región alrededor del eje y.

59. Valor promedio Una fuerza de retardo, simbolizada en la figura por el amortiguador, reduce el movimiento del resorte con un peso de manera que la posición de la masa en el instante t es

$$y = 2e^{-t} \cos t, \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.



60. Valor promedio En un sistema masa-resorte-amortiguador como el del ejercicio 59, la posición de la masa en el instante t es

$$y = 4e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas de reducción

En los ejercicios 61 a 64, utilice integración por partes para establecer la fórmula de reducción.

61. $\displaystyle\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx$

62. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

63. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \quad a \ne 0$

64. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

65. Demuestre que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)dx = \int_a^b (x-a)f(x)\,dx.$$

66. Utilice integración por partes para obtener la fórmula

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Integración de funciones inversas

La integración por partes conduce a una regla para la integración de inversas, que por lo regular da buenos resultados:

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\,dx &= \int y f'(y)\,dy && y = f^{-1}(x), \quad x = f(y) \\ & && dx = f'(y)\,dy \\ &= yf(y) - \int f(y)\,dy && \text{Integración por partes con } u = y,\ dv = f'(y)\,dy \\ &= xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy\end{aligned}$$

La idea es tomar la parte más complicada de la integral, en este caso $f^{-1}(x)$, y simplificarla en primer lugar. Para la integral de $\ln x$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int ye^y\,dy && y = \ln x, \quad x = e^y \\ & && dx = e^y\,dy \\ &= ye^y - e^y + C \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Para la integral de $\cos^{-1} x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x\,dx &= x\cos^{-1} x - \int \cos y\,dy && y = \cos^{-1} x \\ &= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen} y + C \\ &= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C.\end{aligned}$$

Utilice la fórmula

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy \qquad y = f^{-1}(x) \tag{4}$$

para evaluar las integrales en los ejercicios 67 a 70. Exprese su respuesta en términos de x.

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx$

68. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx$

69. $\displaystyle\int \sec^{-1} x\,dx$

70. $\displaystyle\int \log_2 x\,dx$

Otra forma de integrar $f^{-1}(x)$ (por supuesto, cuando $f^{-1}(x)$ es integrable) es utilizar integración por partes con $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$ para rescribir la integral de f^{-1} como

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)dx. \tag{5}$$

Los ejercicios 71 y 72 comparan los resultados de utilizar las ecuaciones (4) y (5).

71. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\cos^{-1} x$:

a. $\displaystyle\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$ Ec. (4)

b. $\displaystyle\int \cos^{-1} x\,dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$ Ec. (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

72. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\tan^{-1} x$:

a. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sec(\tan^{-1} x) + C$ Ec. (4)

b. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$ Ec. (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

Evalúe las integrales en los ejercicios 73 y 74 **(a)** con la ecuación (4) y **(b)** con la ecuación (5). En cada caso, verifique su respuesta derivándola con respecto a x.

73. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1} x\,dx$

74. $\displaystyle\int \tanh^{-1} x\,dx$

8.2 Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas incluyen combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas. En principio, siempre es posible expresar tales integrales en términos de senos y cosenos, pero con frecuencia es más sencillo con otras funciones, como en la integral

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C.$$

La idea general es utilizar identidades para transformar las integrales en otras que sean más sencillas de trabajar.

Productos de potencias de senos y cosenos

Iniciamos con integrales de la forma:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

donde m y n son enteros no negativos (positivo o cero). Podemos separar el trabajo en tres casos, ya sea que m y n sean pares o impares.

Caso 1 Si ***m* es impar**, escribimos m como $2k + 1$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para obtener

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{2k+1} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^k \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

Después combinamos en la integral el sen x, que está solo, con dx y hacemos sen $x\, dx$ igual a $-d(\cos x)$.

Caso 2 Si ***m* es par y *n* es impar** en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, escribimos n como $2k + 1$ y utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para obtener

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x.$$

Luego, combinamos el cos x, que está solo, con dx y hacemos cos $x\, dx$ igual a $d(\operatorname{sen} x)$.

Caso 3 Si ***m* y *n* son pares** en $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, sustituimos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{2}$$

para reducir el integrando a uno en potencias menores de cos $2x$.

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran cada caso.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 1

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx && m \text{ es impar.}\\ &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,(-d\,(\cos x)) && \operatorname{sen} x\,dx = -d(\cos x)\\ &= \int (1-u^2)(u^2)(-du) && u = \cos x\\ &= \int (u^4-u^2)\,du && \text{Multiplicar términos.}\\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \cos^5 x\,dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 2, donde $m = 0$ es par y $n = 5$ es impar.

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^2\,d(\operatorname{sen} x) && \cos x\,dx = d(\operatorname{sen} x)\\ &= \int (1-u^2)^2\,du && u = \operatorname{sen} x\\ &= \int (1-2u^2+u^4)\,du && \text{Cuadrado de } 1-u^2.\\ &= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx.$$

Solución Éste es un ejemplo del caso 3.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx && m \text{ y } n \text{ son pares}\\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx\right].\end{aligned}$$

Para el término que incluye a $\cos^2 2x$ utilizamos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right). && \text{Se omite la constante de integración hasta el resultado final.}\end{aligned}$$

Para el término $\cos^3 2x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^3 2x\,dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx && u = \operatorname{sen} 2x,\ du = 2\cos 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right). && \text{Nuevamente se omite } C.\end{aligned}$$

Combinando todo y simplificando, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C.$$ ■

Eliminación de raíces cuadradas

En el siguiente ejemplo, utilizamos la identidad $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ para eliminar una raíz cuadrada.

EJEMPLO 4 Evalúe

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx.$$

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, utilizamos la identidad

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \text{o} \qquad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta.$$

Con $\theta = 2x$, esto se transforma en

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \cos 4x}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,dx\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx && \cos 2x \ge 0 \text{ en } [0, \pi/4]\\ &= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}[1 - 0] = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$ ■

Integrales de potencias de tan *x* y sec *x*

Sabemos cómo integrar la tangente y la secante y sus cuadrados. Para integrar potencias mayores, utilizamos las identidades $\tan^2 x = \sec^2 - 1$ y $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, luego integramos por partes, cuando sea necesario, para reducir las potencias más altas en potencias más bajas.

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int \tan^4 x\,dx.$$

Solución

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x\,dx = \int \tan^2 x \cdot (\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx + \int dx.\end{aligned}$$

En la primera integral, hacemos

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x\, dx$$

y tenemos

$$\int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C_1.$$

Las otras integrales son formas estándar, por lo que

$$\int \tan^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\int \sec^3 x\, dx.$$

Solución Integramos por partes, usando

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\, dx, \qquad v = \tan x, \qquad du = \sec x \tan x\, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\, dx &= \sec x \tan x - \int (\tan x)(\sec x \tan x\, dx)\\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx \qquad \tan^2 x = \sec^2 x - 1\\ &= \sec x \tan x + \int \sec x\, dx - \int \sec^3 x\, dx.\end{aligned}$$

Combinando las dos integrales de secante cúbica, se obtiene

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$$

y

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \qquad \blacksquare$$

Productos de senos y cosenos

Las integrales

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx \qquad \text{y} \qquad \int \cos mx \cos nx\, dx$$

surgen en muchos lugares donde se incluyen funciones periódicas. Es posible evaluar tales integrales a través de integración por partes, pero en cada caso se requieren dos de ellas. Es más sencillo utilizar las identidades

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x], \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x], \tag{4}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]. \tag{5}$$

Estas identidades provienen de las fórmulas de la suma de ángulos para las funciones seno y coseno (sección 1.3). Proporcionan funciones cuyas antiderivadas son fáciles de encontrar.

EJEMPLO 7 Evalúe

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx.$$

Solución De la ecuación (4) con $m = 3$ y $n = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(-2x) + \operatorname{sen} 8x]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)\, dx \\ &= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

Ejercicios 8.2

Potencias de senos y cosenos

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 22.

1. $\int \cos 2x\, dx$
2. $\int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx$
3. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos 2x\, dx$
5. $3\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$
6. $\int \cos^3 4x\, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$
8. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
9. $\int \cos^3 x\, dx$
10. $\int_0^{\pi/6} 3\cos^5 3x\, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$
12. $\int \cos^3 2x \operatorname{sen}^5 2x\, dx$
13. $\int \cos^2 x\, dx$
14. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y\, dy$
16. $\int 7\cos^7 t\, dt$
17. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 x\, dx$
18. $\int 8\cos^4 2\pi x\, dx$
19. $\int 16 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
20. $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 y \cos^2 y\, dy$
21. $\int 8\cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$
22. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cos^3 2\theta\, d\theta$

Integrales con raíces cuadradas

Evalúe las integrales de los ejercicios 23 a 32.

23. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\, dx$
24. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$
25. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, dt$
26. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 \theta}\, d\theta$
27. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$
28. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\, dx$

    $\left(\textit{Sugerencia}\text{: Multiplicar por } \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}.\right)$
29. $\int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\, dx$
30. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\, dx$
31. $\int_0^{\pi/2} \theta\sqrt{1-\cos 2\theta}\, d\theta$
32. $\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2}\, dt$

Potencias de tangentes y secantes

Evalúe las integrales de los ejercicios 33 a 50.

33. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$
34. $\int \sec x \tan^2 x\, dx$
35. $\int \sec^3 x \tan x\, dx$
36. $\int \sec^3 x \tan^3 x\, dx$
37. $\int \sec^2 x \tan^2 x\, dx$
38. $\int \sec^4 x \tan^2 x\, dx$
39. $\int_{-\pi/3}^{0} 2\sec^3 x\, dx$
40. $\int e^x \sec^3 e^x\, dx$
41. $\int \sec^4 \theta\, d\theta$
42. $\int 3\sec^4 3x\, dx$
43. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^4 \theta\, d\theta$
44. $\int \sec^6 x\, dx$
45. $\int 4\tan^3 x\, dx$
46. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 6\tan^4 x\, dx$
47. $\int \tan^5 x\, dx$
48. $\int \cot^6 2x\, dx$
49. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3 x\, dx$
50. $\int 8\cot^4 t\, dt$

Productos de senos y cosenos

Evalúe las integrales de los ejercicios 51 a 56.

51. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

52. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$

53. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

55. $\displaystyle\int \cos 3x \cos 4x\, dx$

56. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos 7x\, dx$

Los ejercicios 57 a 62 requieren del uso de varias identidades trigonométricas antes de que se evalúen las integrales.

57. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos 3\theta\, d\theta$

58. $\displaystyle\int \cos^2 2\theta \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

59. $\displaystyle\int \cos^3 \theta \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

60. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 \theta \cos 2\theta\, d\theta$

61. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos 3\theta\, d\theta$

62. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

Integraciones diversas

Utilice cualquier método para evaluar las integrales de los ejercicios 63 a 68.

63. $\displaystyle\int \frac{\sec^3 x}{\tan x}\, dx$

64. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

65. $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\csc x}\, dx$

66. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\cos^2 x}\, dx$

67. $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

68. $\displaystyle\int x \cos^3 x\, dx$

Aplicaciones

69. Longitud de arco Determine la longitud de la curva

$$y = \ln(\sec x), \quad 0 \le x \le \pi/4.$$

70. Centro de gravedad Determine el centro de gravedad de la región acotada por el eje x, la curva $y = \sec x$ y las rectas $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$.

71. Volumen Determine el volumen generado al hacer girar un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x.

72. Área Determine el área entre el eje x y la curva $y = \sqrt{1 + \cos 4x}$, $0 \le x \le \pi$.

73. Centroide Determine el centroide de la región acotada por las gráficas de $y = x + \cos x$ y $y = 0$ para $0 \le x \le 2\pi$.

74. Volumen Determine el volumen del sólido que se forma al hacer girar, alrededor del eje x, la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x + \sec x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/3$.

8.3 Sustituciones trigonométricas

Las sustituciones trigonométricas aparecen cuando remplazamos la variable de integración por una función trigonométrica. Las sustituciones más comunes son $x = a \tan \theta$, $x = a \operatorname{sen} \theta$ y $x = a \sec \theta$. Tales sustituciones son eficaces al transformar integrales que incluyen $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que es posible evaluar de manera directa, ya que hacen referencia a los triángulos rectángulos de la figura 8.2.

Con $x = a \tan \theta$,

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2(1 + \tan^2 \theta) = a^2 \sec^2 \theta.$$

Con $x = a \operatorname{sen} \theta$

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \cos^2 \theta.$$

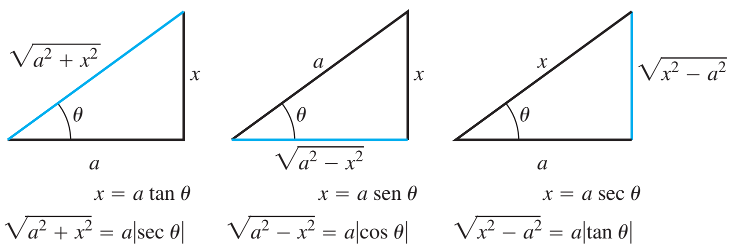


FIGURA 8.2 Triángulos de referencia para las tres sustituciones básicas que identifican los lados etiquetados con x y a para cada sustitución.

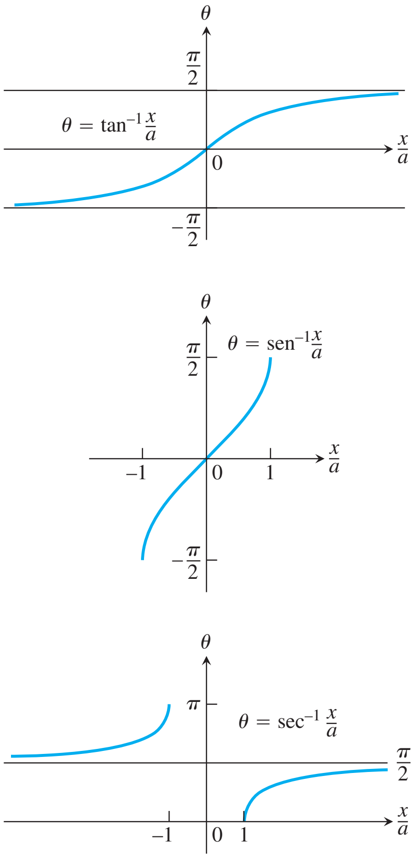


FIGURA 8.3 Arco tangente, arco seno y arco secante de x/a, graficados como funciones de x/a.

Con $x = a \sec \theta$,

$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2(\sec^2 \theta - 1) = a^2 \tan^2 \theta.$$

Queremos que cualquier sustitución que utilicemos en una integración sea reversible, para que sea posible restituirla a su variable original. Por ejemplo, si $x = a \tan \theta$, deseamos hacer $\theta = \tan^{-1}(x/a)$ después de realizar la integración. Si $x = a \operatorname{sen} \theta$, deseamos hacer $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$ cuando hayamos terminado la integración, y de manera similar para $x = a \sec \theta$.

Como sabemos, por la sección 7.6, las funciones en estas sustituciones sólo tienen inversa para

$$x = a \tan \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \sec \theta \quad \text{requiere} \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \ge 1, \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi & \text{si} \quad \dfrac{x}{a} \le -1. \end{cases}$$

Para simplificar los cálculos con la sustitución $x = a \sec \theta$, restringiremos su uso a integrales en las que $x/a \ge 1$. Esto colocará a θ en $[0, \pi/2)$ y hará $\tan \theta \ge 0$. Después tendremos $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = |a \tan \theta| = a \tan \theta$, sin valores absolutos, con tal que $a > 0$.

Procedimiento para una sustitución trigonométrica

1. Escriba la sustitución para x, calcule la diferencial dx y especifique los valores seleccionados de θ para la sustitución.
2. Sustituya la expresión trigonométrica y la diferencial calculada en el integrando, luego simplifique de manera algebraica los resultados.
3. Integre la integral trigonométrica; para la reversibilidad, tenga en cuenta las restricciones en el ángulo θ.
4. Elabore un dibujo del triángulo de referencia adecuado para revertir la sustitución en el resultado de la integración y convertirlo en términos de la variable original x.

EJEMPLO 1 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

Solución Hacemos

$$x = 2 \tan \theta, \qquad dx = 2 \sec^2 \theta \, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$4 + x^2 = 4 + 4 \tan^2 \theta = 4(1 + \tan^2 \theta) = 4 \sec^2 \theta.$$

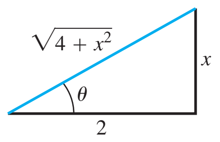


FIGURA 8.4 Triángulo de referencia para $x = 2\tan\theta$ (ejemplo 1):

$$\tan\theta = \frac{x}{2}$$

y

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| \\
&= \int \sec\theta\, d\theta && \sec\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C. && \text{De la figura 8.4}
\end{aligned}$$

Observe cómo expresamos $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ en términos de x. Dibujamos un triángulo de referencia para la sustitución original $x = 2\tan\theta$ (figura 8.4) y con base en el triángulo obtenemos las razones. ■

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Solución Hacemos

$$x = 3\,\text{sen}\,\theta, \qquad dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$9 - x^2 = 9 - 9\,\text{sen}^2\theta = 9(1 - \text{sen}^2\theta) = 9\cos^2\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{9\,\text{sen}^2\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta}{|3\cos\theta|} \\
&= 9\int \text{sen}^2\theta\, d\theta && \cos\theta > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\
&= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta) + C && \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\text{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C && \text{Figura 8.5} \\
&= \frac{9}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.
\end{aligned}$$

■

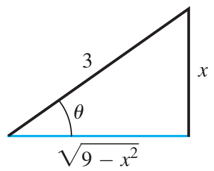


FIGURA 8.5 Triángulo de referencia para $x = 3\,\text{sen}\,\theta$ (ejemplo 2):

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x}{3}$$

y

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}.$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

Solución Primero rescribimos el radical como

$$\begin{aligned}
\sqrt{25x^2-4} &= \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} \\
&= 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}
\end{aligned}$$

para poner el radical en la forma $x^2 - a^2$. Después sustituimos

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \qquad dx = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25}$$

$$= \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta.$$

$\tan\theta > 0$ para $0 < \theta < \pi/2$

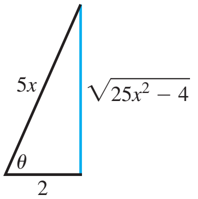


FIGURA 8.6 Si $x = (2/5)\sec\theta$, $0 < \theta < \pi/2$, entonces $\theta = \sec^{-1}(5x/2)$ y podemos leer los valores de las otras funciones trigonométricas de θ con base en este triángulo rectángulo (ejemplo 3).

Con estas sustituciones, tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{5 \cdot (2/5)\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C.$$

Figura 8.6 ■

Ejercicios 8.3

Aplicación de sustituciones trigonométricas

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 14.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

2. $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{1 + 9x^2}}$

3. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4 + x^2}$

4. $\int_0^2 \frac{dx}{8 + 2x^2}$

5. $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

6. $\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

7. $\int \sqrt{25 - t^2}\, dt$

8. $\int \sqrt{1 - 9t^2}\, dt$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 49}}, \quad x > \frac{7}{2}$

10. $\int \frac{5\, dx}{\sqrt{25x^2 - 9}}, \quad x > \frac{3}{5}$

11. $\int \frac{\sqrt{y^2 - 49}}{y}\, dy, \quad y > 7$

12. $\int \frac{\sqrt{y^2 - 25}}{y^3}\, dy, \quad y > 5$

13. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$

14. $\int \frac{2\, dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$

Integraciones diversas

Utilice cualquier método para evaluar las integrales en los ejercicios 15 a 34. La mayoría de ellas requerirá de sustituciones trigonométricas, pero algunas pueden evaluarse mediante otros métodos.

15. $\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

16. $\int \frac{x^2}{4 + x^2}\, dx$

17. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$

19. $\int \frac{8\, dw}{w^2\sqrt{4 - w^2}}$

20. $\int \frac{\sqrt{9 - w^2}}{w^2}\, dw$

21. $\int \frac{100}{36 + 25x^2}\, dx$

22. $\int x\sqrt{x^2 - 4}\, dx$

23. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\, dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

24. $\int_0^1 \frac{dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$

25. $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}, \quad x > 1$

26. $\int \frac{x^2\, dx}{(x^2 - 1)^{5/2}}, \quad x > 1$

27. $\int \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{x^6}\, dx$

28. $\int \frac{(1 - x^2)^{1/2}}{x^4}\, dx$

29. $\int \frac{8\, dx}{(4x^2 + 1)^2}$

30. $\int \frac{6\, dt}{(9t^2 + 1)^2}$

31. $\int \frac{x^3\, dx}{x^2 - 1}$

32. $\int \frac{x\, dx}{25 + 4x^2}$

33. $\int \frac{v^2\, dv}{(1 - v^2)^{5/2}}$

34. $\int \frac{(1 - r^2)^{5/2}}{r^8}\, dr$

En los ejercicios 35 a 48, utilice una sustitución apropiada y después una sustitución trigonométrica para evaluar las integrales.

35. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t} + 9}}$

36. $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\, dt}{(1 + e^{2t})^{3/2}}$

37. $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\, dt}{\sqrt{t} + 4t\sqrt{t}}$

38. $\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1 + (\ln y)^2}}$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$

41. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

43. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x\ln x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{4-x}{x}}\,dx$

(*Sugerencia:* Haga $x = u^2$).

46. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$

(*Sugerencia:* Haga $u = x^{3/2}$).

47. $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial de los ejercicios 49 a 52 para y como una función de x.

49. $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$

50. $\sqrt{x^2-9}\,\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$

51. $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = 3, \quad y(2) = 0$

52. $(x^2+1)^2\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

Aplicaciones y ejemplos

53. Área Determine el área de la región en el primer cuadrante que está encerrada por los ejes coordenados y la curva $y = \sqrt{9-x^2}/3$.

54. Área Determine el área encerrada por la elipse

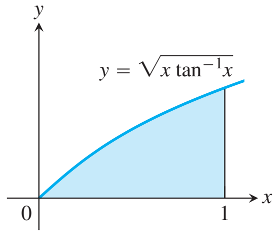
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

55. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $y = 0$ y $x = 1/2$.

a. Determine el área de la región.

b. Determine el centroide de la región.

56. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x \tan^{-1} x}$ y $y = 0$, para $0 \leq x \leq 1$. Determine el volumen del sólido que se forma al hacer girar esta región alrededor del eje x (véase la siguiente figura).



57. Evalúe $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ mediante

a. integración por partes.

b. una sustitución con la variable u.

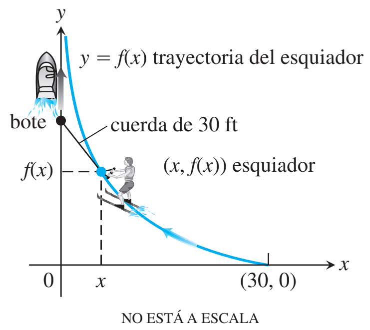
c. una sustitución trigonométrica.

58. Trayectoria de un esquiador acuático Suponga que se coloca un bote en el origen con un esquiador sujeto al bote en el punto (30, 0) mediante una cuerda de 30 ft de largo. Cuando el bote viaja a lo largo del eje y, el esquiador va detrás del bote siguiendo una trayectoria desconocida $y = f(x)$, como se muestra en la siguiente figura.

a. Demuestre que $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{900-x^2}}{x}$.

[*Sugerencia*: Suponga que el esquiador siempre apunta directamente hacia el bote y la cuerda está en la recta tangente a la trayectoria $y = f(x)$].

b. Resuelva la ecuación del inciso (a), para $f(x)$, usando $f(30) = 0$.



8.4 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

Esta sección muestra cómo expresar una función racional (un cociente de polinomios) como una suma de fracciones más sencillas, denominadas *fracciones parciales*, que son fáciles de integrar. Por ejemplo, la función racional $(5x-3)/(x^2-2x-3)$ puede rescribirse como

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}.$$

Usted puede verificar la ecuación de manera algebraica si coloca las fracciones del lado derecho con un denominador común, $(x+1)(x-3)$. La habilidad adquirida al escribir funciones racionales como tal suma también es útil en otros contextos; por ejemplo, cuando se utilizan ciertos métodos de transformación para resolver ecuaciones diferenciales. Para integrar la función racional $(5x - 3)/(x^2 - 2x - 3)$ en el lado izquierdo de nuestra expresión, simplemente sumamos las integrales de las fracciones del lado derecho:

$$\int \frac{5x - 3}{(x + 1)(x - 3)}\,dx = \int \frac{2}{x + 1}\,dx + \int \frac{3}{x - 3}\,dx$$
$$= 2 \ln |x + 1| + 3 \ln |x - 3| + C.$$

El método para rescribir funciones racionales como una suma de fracciones más sencillas se denomina **método de las fracciones parciales**. En el caso del ejemplo anterior, éste consiste en determinar las constantes A y B tal que

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}. \tag{1}$$

(Por un momento, suponga que no sabe que $A = 2$ y $B = 3$ funcionarán). Llamamos **fracciones parciales** a las fracciones $A/(x + 1)$ y $B/(x - 3)$, ya que sus denominadores sólo son parte del denominador original $x^2 - 2x - 3$. Decimos que A y B son **coeficientes indeterminados** hasta que encontremos valores adecuados para ellos.

Para determinar A y B, primero quitamos las fracciones de la ecuación (1) y reagrupamos las potencias de x, con lo que obtenemos

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1) = (A + B)x - 3A + B.$$

Lo anterior será una identidad en x, si y sólo si los coeficientes de potencias iguales de x en los dos lados son iguales:

$$A + B = 5, \qquad -3A + B = -3.$$

Al resolver de manera simultánea dichas ecuaciones se obtiene $A = 2$ y $B = 3$.

Descripción general del método

El éxito al escribir una función racional $f(x)/g(x)$ como una suma de fracciones racionales depende de dos cosas:

- *El grado de $f(x)$ debe ser menor que el grado de $g(x)$.* Esto es, la fracción tiene que ser propia. Si no es así, divida $f(x)$ entre $g(x)$ y trabaje con el residuo. Véase el ejemplo 3 de esta sección.
- *Debemos conocer los factores de $g(x)$.* En teoría, cualquier polinomio con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales reales y factores cuadráticos reales. En la práctica, tales factores pueden ser difíciles de obtener.

A continuación veremos cómo determinar las fracciones parciales de una fracción propia $f(x)/g(x)$ cuando se conocen los factores de $g(x)$. Un polinomio cuadrático (o factor) es **irreducible** si no puede escribirse como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales. Esto es, el polinomio no tiene raíces reales.

Método de las fracciones parciales ($f(x)/g(x)$ propias)

1. Sea $x - r$ un factor lineal de $g(x)$. Suponga que $(x - r)^m$ es la potencia más grande de $x - r$ que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asigne la suma de las m fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x - r)} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

Haga lo anterior para cada factor lineal distinto de $g(x)$.

continúa

2. Sea $x^2 + px + q$ un factor cuadrático irreducible de $g(x)$, de manera que $x^2 + px + q$ no tenga raíces reales. Suponga que $(x^2 + px + q)^n$ es la potencia más grande de este factor que divide a $g(x)$. Entonces, para este factor, asigne la suma de las n fracciones parciales:

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Hacer esto para cada factor cuadrático distinto de $g(x)$ que no pueda factorizarse con factores lineales con coeficientes reales.

3. Iguale la fracción original $f(x)/g(x)$ a la suma de todas estas fracciones parciales. Elimine las fracciones de la ecuación resultante y reacomode los términos en potencias decrecientes de x.
4. Iguale los coeficientes de potencias correspondientes de x y resuelva las ecuaciones resultantes para los coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 1 Utilice fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\, dx.$$

Solución La descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 3}.$$

Para encontrar los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C, quitamos las fracciones y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= A(x + 1)(x + 3) + B(x - 1)(x + 3) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= A(x^2 + 4x + 3) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x^2 - 1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (4A + 2B)x + (3A - 3B - C). \end{aligned}$$

Los polinomios en ambos lados de la ecuación anterior son idénticos, por lo que igualamos los coeficientes de potencias iguales de x, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} &\text{Coeficiente de } x^2\text{:} && A + B + C = 1 \\ &\text{Coeficiente de } x^1\text{:} && 4A + 2B = 4 \\ &\text{Coeficiente de } x^0\text{:} && 3A - 3B - C = 1 \end{aligned}$$

Hay varias formas de resolver el sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas A, B y C, entre las que se incluyen la eliminación de variables y el uso de una calculadora o una computadora. Sin importar el método que se use, la solución es $A = 3/4$, $B = 1/2$ y $C = -1/4$. De aquí tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}\, dx &= \int \left[\frac{3}{4}\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x + 3}\right] dx \\ &= \frac{3}{4}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| - \frac{1}{4}\ln|x + 3| + K, \end{aligned}$$

donde K es la constante arbitraria de integración (para evitar confusión con el coeficiente indeterminado C). ■

EJEMPLO 2 Utilice fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{6x + 7}{(x + 2)^2}\, dx.$$

Solución Primero expresamos el integrando como una suma de fracciones parciales con coeficientes indeterminados

$$
\begin{aligned}
\frac{6x+7}{(x+2)^2} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \\
6x + 7 &= A(x+2) + B && \text{Multiplicar ambos lados por } (x+2)^2. \\
&= Ax + (2A + B)
\end{aligned}
$$

Al igualar coeficientes de potencias correspondientes de x se obtiene:

$$A = 6 \quad \text{y} \quad 2A + B = 12 + B = 7, \quad \text{o} \quad A = 6 \quad \text{y} \quad B = -5.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}\right) dx \\
&= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int (x+2)^{-2}\,dx \\
&= 6 \ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + C.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 3 Utilice fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx.$$

Solución Primero dividimos el numerador entre el denominador para obtener un polinomio más una fracción propia.

$$
\begin{array}{r}
2x \phantom{{}-4x^2-x-3} \\
x^2 - 2x - 3 \,\big)\overline{\,2x^3 - 4x^2 - x - 3} \\
\underline{2x^3 - 4x^2 - 6x} \phantom{{}-3} \\
5x - 3
\end{array}
$$

Después escribimos la fracción impropia como un polinomio más una fracción propia.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Encontramos la descomposición en fracciones parciales de la fracción del lado derecho en el ejemplo inicial, por lo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}\,dx &= \int 2x\,dx + \int \frac{5x-3}{x^2 - 2x - 3}\,dx \\
&= \int 2x\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx \\
&= x^2 + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 4 Utilice fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx.$$

Solución El denominador tiene un factor cuadrático irreducible así como un factor lineal repetido, por lo que escribimos

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}. \tag{2}$$

Al eliminar las fracciones de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned}-2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1)\\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2\\ &\quad + (A - 2B + C)x + (B - C + D).\end{aligned}$$

Al igualar coeficientes de términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned}&\text{Coeficiente de } x^3: && 0 = A + C\\ &\text{Coeficiente de } x^2: && 0 = -2A + B - C + D\\ &\text{Coeficiente de } x^1: && -2 = A - 2B + C\\ &\text{Coeficiente de } x^0: && 4 = B - C + D\end{aligned}$$

Resolvemos estas ecuaciones de manera simultánea para determinar los valores de A, B, C y D:

$$\begin{aligned}&-4 = -2A, \quad A = 2 && \text{Restar la cuarta de la segunda ecuación.}\\ &C = -A = -2 && \text{De la primera ecuación}\\ &B = (A + C + 2)/2 = 1 && \text{De la tercera ecuación y } C = -A\\ &D = 4 - B + C = 1. && \text{De la cuarta ecuación.}\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (2), de donde se obtiene

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Por último, usando el desarrollo anterior podemos integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx\\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx\\ &= \ln(x^2 + 1) + \tan^{-1} x - 2\ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Utilice fracciones parciales para evaluar

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}.$$

Solución La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)$, tenemos

$$\begin{aligned}1 &= A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x\\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex\\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A\end{aligned}$$

Si igualamos coeficientes, obtenemos el sistema

$$A + B = 0, \qquad C = 0, \qquad 2A + B + D = 0, \qquad C + E = 0, \qquad A = 1.$$

Al resolver este sistema, se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = -1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}\right] dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \qquad \begin{array}{l} u = x^2+1, \\ du = 2x\,dx \end{array} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{2u} + K \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + K \\
&= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K.
\end{aligned}$$

■

Biografía histórica

Oliver Heaviside
(1850–1925)

Método de "eliminación" de Heaviside para factores lineales

Cuando el grado del polinomio $f(x)$ es menor que el grado de $g(x)$ y

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

es un producto de n factores lineales distintos, cada uno elevado a la primera potencia, existe una manera rápida de desarrollar $f(x)/g(x)$ por medio de fracciones parciales.

EJEMPLO 6 Determine A, B y C en el desarrollo de fracciones parciales

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}. \tag{3}$$

Solución Si multiplicamos ambos lados de la ecuación (3) por $(x - 1)$ para obtener

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

y hacemos $x = 1$, la ecuación resultante da el valor de A:

$$\begin{aligned}
\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} &= A + 0 + 0, \\
A &= 1.
\end{aligned}$$

Así, el valor de A es el número que habríamos obtenido si eliminamos el factor $(x - 1)$ en el denominador de la fracción original

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \tag{4}$$

y evaluamos el resto en $x = 1$:

$$A = \frac{(1)^2+1}{\underbrace{\boxed{(x-1)}}_{\Uparrow\ \text{Eliminado}}(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1.$$

De manera análoga, determinamos el valor de B en la ecuación (3) si eliminamos el factor $(x-2)$ en la expresión (4) y evaluamos el resto en $x = 2$:

$$B = \frac{(2)^2 + 1}{(2-1)\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\Uparrow \text{ Eliminado}}(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5.$$

Por último, C se determina eliminando $(x-3)$ en la expresión (4) y evaluando el resto en $x = 3$:

$$C = \frac{(3)^2 + 1}{(3-1)(3-2)\underbrace{\boxed{(x-3)}}_{\Uparrow \text{ Eliminado}}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5.$$ ■

Método de Heaviside

1. *Escriba el cociente con* $g(x)$ *en forma factorizada:*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

2. *Elimine uno a uno los factores* $(x - r_i)$, cada vez remplazando todas las x no eliminadas por el número r_i. Lo anterior produce un número A_i para cada raíz r_i:

$$A_1 = \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}$$

$$A_2 = \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}.$$

3. *Escriba el desarrollo de la fracción parcial de* $f(x)/g(x)$ como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}.$$

EJEMPLO 7 Utilice el método de Heaviside para evaluar

$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx.$$

Solución El grado de $f(x) = x + 4$ es menor que el grado de $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$, con $g(x)$ factorizada,

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}.$$

Las raíces de $g(x)$ son $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ y $r_3 = -5$. Determinamos

$$A_1 = \frac{0 + 4}{\underbrace{\boxed{x}}_{\Uparrow\ \text{Eliminado}}\,(0 - 2)(0 + 5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

$$A_2 = \frac{2 + 4}{2\,\underbrace{\boxed{(x - 2)}}_{\Uparrow\ \text{Eliminado}}\,(2 + 5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{-5 + 4}{(-5)(-5 - 2)\,\underbrace{\boxed{(x + 5)}}_{\Uparrow\ \text{Eliminado}}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x - 2)} - \frac{1}{35(x + 5)},$$

y

$$\int \frac{x + 4}{x(x - 2)(x + 5)}\,dx = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x - 2| - \frac{1}{35}\ln|x + 5| + C. \qquad \blacksquare$$

Otras formas de determinar los coeficientes

Otra forma de determinar las constantes que aparecen en las fracciones parciales es derivar, como en el siguiente ejemplo. Otra forma consiste en asignar los valores numéricos seleccionados a x.

EJEMPLO 8 Determine A, B y C en la ecuación

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}$$

eliminando fracciones, derivando el resultado y haciendo la sustitución $x = -1$.

Solución Primero eliminamos las fracciones:

$$x - 1 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C.$$

La sustitución $x = -1$ indica que $C = -2$. Después derivamos ambos lados con respecto a x, de donde se obtiene

$$1 = 2A(x + 1) + B.$$

La sustitución $x = -1$ indica que $B = 1$. Nuevamente derivamos para obtener $0 = 2A$, lo cual muestra que $A = 0$. De aquí que

$$\frac{x - 1}{(x + 1)^3} = \frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{2}{(x + 1)^3}. \qquad \blacksquare$$

En algunos problemas, la asignación de valores pequeños a x, tales como $x = 0, \pm 1, \pm 2$, para obtener ecuaciones en A, B y C, ofrece una alternativa rápida frente a otros métodos.

EJEMPLO 9 Determine A, B y C en la expresión

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

asignando valores numéricos a x.

Solución Elimine las fracciones para obtener

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Después haga $x = 1, 2, 3$, sucesivamente para determinar A, B y C:

$$\begin{aligned}
x = 1: \quad (1)^2 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0)\\
2 &= 2A\\
A &= 1\\
x = 2: \quad (2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0)\\
5 &= -B\\
B &= -5\\
x = 3: \quad (3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1)\\
10 &= 2C\\
C &= 5.
\end{aligned}$$

Conclusión:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

Ejercicios 8.4

Desarrollo de cocientes en fracciones parciales

Desarrolle los cocientes en los ejercicios 1 a 8 por medio de fracciones parciales.

1. $\dfrac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

2. $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$

3. $\dfrac{x+4}{(x+1)^2}$

4. $\dfrac{2x+2}{x^2-2x+1}$

5. $\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$

6. $\dfrac{z}{z^3-z^2-6z}$

7. $\dfrac{t^2+8}{t^2-5t+6}$

8. $\dfrac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

Factores lineales no repetidos

En los ejercicios 9 a 16, exprese los integrandos como suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

11. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

13. $\displaystyle\int_4^8 \frac{y\,dy}{y^2-2y-3}$

14. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,dy$

15. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3+t^2-2t}$

16. $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,dx$

Factores lineales repetidos

En los ejercicios 17 a 20, exprese los integrandos como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^2+2x+1}$

18. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3\,dx}{x^2-2x+1}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

Factores cuadráticos irreducibles

En los ejercicios 21 a 32, exprese los integrandos como una suma de fracciones parciales y evalúe las integrales.

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

22. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$

24. $\displaystyle\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,ds$

26. $\displaystyle\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,ds$

27. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^4-3x^2-4}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,d\theta$

32. $\displaystyle\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,d\theta$

Fracciones impropias

En los ejercicios 33 a 38, realice la división larga del integrando, escriba la fracción propia como una suma de fracciones parciales y evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{16x^3}{4x^2 - 4x + 1}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{y^4 + y^2 - 1}{y^3 + y}\,dy$

38. $\displaystyle\int \frac{2y^4}{y^3 - y^2 + y - 1}\,dy$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 39 a 50.

39. $\displaystyle\int \frac{e^t\,dt}{e^{2t} + 3e^t + 2}$

40. $\displaystyle\int \frac{e^{4t} + 2e^{2t} - e^t}{e^{2t} + 1}\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 6}$

42. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

43. $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x) - 12x^3 - 3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x) + 9x^3 + x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{x^{3/2} - \sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^{1/3} - 1)\sqrt{x}}\,dx$

(*Sugerencia:* Haga $x = u^6$).

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

(*Sugerencia:* Haga $x + 1 = u^2$).

48. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+9}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx$

$\left(\textit{Sugerencia}\text{: Multiplique por } \dfrac{x^3}{x^3}.\right)$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6(x^5+4)}\,dx$

Problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial en los ejercicios 51 a 54 para x como una función de t.

51. $(t^2 - 3t + 2)\dfrac{dx}{dt} = 1 \quad (t > 2), \quad x(3) = 0$

52. $(3t^4 + 4t^2 + 1)\dfrac{dx}{dt} = 2\sqrt{3}, \quad x(1) = -\pi\sqrt{3}/4$

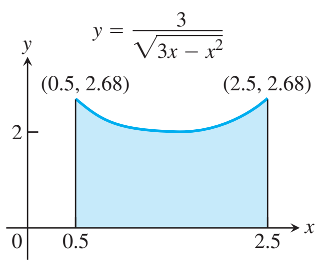
53. $(t^2 + 2t)\dfrac{dx}{dt} = 2x + 2 \quad (t, x > 0), \quad x(1) = 1$

54. $(t + 1)\dfrac{dx}{dt} = x^2 + 1 \quad (t > -1), \quad x(0) = 0$

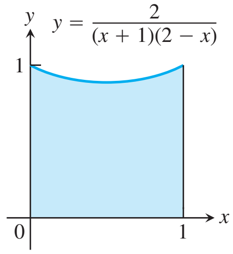
Aplicaciones y ejemplos

En los ejercicios 55 y 56, determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región sombreada alrededor del eje que se indica.

55. El eje x

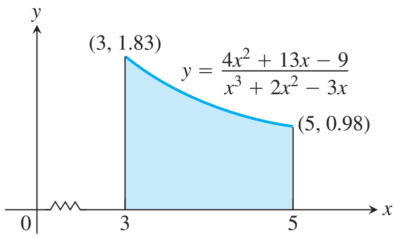


56. El eje y



T 57. Determine, con dos decimales, la coordenada x del centroide de la región en el primer cuadrante acotada por el eje x, la curva $y = \tan^{-1} x$ y la recta $x = \sqrt{3}$.

T 58. Determine la coordenada x, con dos decimales, del centroide de esta región.



T 59. Difusión social En ocasiones, los sociólogos utilizan la frase "difusión social" para describir la manera en que la información se difunde en una población. La información puede ser un rumor, una moda cultural o una noticia acerca de una innovación tecnológica. En una población suficientemente grande, el número de personas x que conocen la información se trata como una función diferenciable del tiempo t, mientras que la velocidad de difusión, dx/dt, se supone proporcional al número de personas que conocen la información por el número de personas que la desconocen. Lo anterior lleva a la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

donde N es el número de personas en la población.

Suponga que t está en días, $k = 1/250$, y que dos personas inician un rumor en el instante $t = 0$ en un población de $N = 1000$ personas.

a. Determine a x como una función de t.

b. ¿Cuándo la mitad de la población ha escuchado el rumor? (Esto es cuando el rumor se propaga de la manera más rápida).

T 60. Reacciones químicas de segundo orden Muchas reacciones químicas son resultado de la interacción de dos moléculas que sufren un cambio para dar un nuevo producto. La velocidad de la reacción comúnmente depende de las concentraciones de las dos clases de moléculas. Si a es la cantidad de sustancia A, b es la cantidad de sustancia B en el instante $t = 0$, y x es la cantidad de producto en el instante t, entonces la velocidad de formación de x puede expresarse por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

o

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)}\frac{dx}{dt} = k,$$

donde k es una constante para la reacción. Integre ambos lados de esta ecuación para obtener una relación entre x y t, **(a)** si $a = b$ y **(b)** si $a \neq b$. En cada caso, suponga que $x = 0$ cuando $t = 0$.

8.5 Tablas de integrales y sistemas de álgebra por computadora (SAC)

En esta sección analizamos cómo utilizar tablas y sistemas de álgebra por computadora para evaluar integrales.

Tablas de integrales

Una tabla de integrales se incluye al final del libro, después del índice. (Tablas más extensas aparecen en compilaciones como *CRC Mathematical Tables*, que contienen miles de integrales). Las fórmulas de integración se establecen en términos de constantes a, b, c, m, n, etcétera. Por lo regular, dichas constantes toman cualquier valor real y no necesitan ser enteros. Las restricciones ocasionales en sus valores se indican en las fórmulas. Por ejemplo, la fórmula 5 requiere que $n \neq -1$, mientras la fórmula 11 requiere que $n \neq -2$.

En las fórmulas se supone que las constantes no toman valores que implican la división entre cero ni la extracción de raíces pares de números negativos. Por ejemplo, la fórmula 8 supone que $a \neq 0$, en tanto que las fórmulas 13a y 13b no pueden utilizarse a menos que b sea positiva.

EJEMPLO 1 Determine

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx.$$

Solución Utilizamos la fórmula 23 del final del libro (no la 22, la cual necesita que $n \neq -1$):

$$\int x(ax + b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 5$, tenemos

$$\int x(2x + 5)^{-1}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} \ln |2x + 5| + C.$$ ■

EJEMPLO 2 Determine

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 4}}.$$

Solución Utilizamos la fórmula 29a:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax - b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax - b}{b}} + C.$$

Con $a = 2$ y $b = 4$, tenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - 4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x - 4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x - 2}{2}} + C.$$ ■

EJEMPLO 3 Determine

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx.$$

Solución Iniciamos con la fórmula 106:

$$\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n + 1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \qquad n \neq -1.$$

Con $n = 1$ y $a = 1$, tenemos

$$\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ahora utilizamos la fórmula 49 para determinar la integral de la derecha:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Con $a = 1$,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

El resultado combinado es

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C\right)\\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + C'.\end{aligned}$$

■

Fórmulas de reducción

El tiempo que se requiere para integraciones repetidas por partes en ocasiones se puede reducir si se aplican fórmulas como

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n - 1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx \tag{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + n} + \frac{n - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^m x\, dx \qquad (n \neq -m). \tag{3}$$

Al aplicar tal fórmula de manera repetida, se puede expresar la integral original en términos de una potencia suficientemente baja que se evalúa de manera directa. El siguiente ejemplo ilustra dicho procedimiento.

EJEMPLO 4 Determine

$$\int \tan^5 x\, dx.$$

Solución Aplicamos la ecuación (1) con $n = 5$ para obtener

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x\, dx.$$

Después aplicamos de nuevo la ecuación (1), con $n = 3$, para evaluar la integral:

$$\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

El resultado combinado es

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C'.$$

■

Como lo sugiere su forma, las fórmulas de reducción se deducen por medio de integración por partes. (Véase el ejemplo 5 en la sección 8.1.)

Integración con un SAC

Una de las capacidades más potentes de los sistemas de álgebra por computadora es la integración simbólica. Esto se realiza con un **comando para integrar** específico para cada sistema particular (por ejemplo, **int** en Maple, **Integrate** en Mathematica).

EJEMPLO 5 Suponga que quiere evaluar la integral indefinida de la función

$$f(x) = x^2\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Por medio de Maple, primero se define o declara la función:

$$> f\!:= x\hat{\ }2 * \mathrm{sqrt}\,(a\hat{\ }2 + x\hat{\ }2);$$

Después se utiliza el comando para integrar sobre f, identificando la variable de integración:

$$> \mathrm{int}(f, x);$$

Maple da la siguiente solución:

$$\frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{3/2} - \frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Si quiere ver si la respuesta puede simplificarse, introduzca

$$> \mathrm{simplify}(\%);$$

Maple responde

$$\frac{1}{8}a^2x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{4}x^3\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{1}{8}a^4\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right).$$

Si quiere la integral definida para $0 \le x \le \pi/2$, puede utilizar el formato

$$> \mathrm{int}(f, x = 0..\mathrm{Pi}/2);$$

Maple dará

$$\frac{1}{64}\pi(4a^2 + \pi^2)^{(3/2)} - \frac{1}{32}a^2\pi\sqrt{4a^2 + \pi^2} + \frac{1}{8}a^4\ln(2)$$
$$- \frac{1}{8}a^4\ln\left(\pi + \sqrt{4a^2 + \pi^2}\right) + \frac{1}{16}a^4\ln(a^2).$$

También puede hallar la integral definida para un valor particular de la constante a:

$$> a\!:= 1;$$
$$> \mathrm{int}(f, x = 0..1);$$

Maple da la respuesta numérica

$$\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right).$$ ■

EJEMPLO 6 Utilice un SAC para determinar

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Solución Con Maple, tenemos la entrada

$$> \mathrm{int}\,((\sin\hat{\ }2)(x) * (\cos\hat{\ }3)(x), x);$$

con la respuesta inmediata

$$-\frac{1}{5}\sin(x)\cos(x)^4 + \frac{1}{15}\cos(x)^2\sin(x) + \frac{2}{15}\sin(x).$$ ■

Los sistemas de álgebra computacional varían en la forma como procesan las integraciones. En los ejemplos 5 y 6 utilizamos Maple. Mathematica habría dado resultados un poco diferentes:

1. En el ejemplo 5, da

$$In\ [1]\!:= \text{ Integrate } [x\verb|^|2 * \text{Sqrt } [a\verb|^|2 + x\verb|^|2], x]$$

Mathematica da

$$Out\ [1]= \sqrt{a^2 + x^2}\left(\frac{a^2 x}{8} + \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{8}a^4 \text{ Log}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

sin tener que simplificar un resultado intermedio. La respuesta es parecida a la fórmula 22 en la tabla de integrales.

2. La respuesta de Mathematica para la integral

$$In\ [2]\!:= \text{ Integrate } [\text{Sin } [x]\verb|^|2 * \text{Cos } [x]\verb|^|3, x]$$

del ejemplo 6 es

$$Out\ [2]= \frac{\text{Sin } [x]}{8} - \frac{1}{48}\text{Sin } [3\,x] - \frac{1}{80}\text{Sin } [5\,x]$$

diferente de la respuesta de Maple. Ambas respuestas son correctas.

Aunque un SAC es muy poderoso y nos puede ayudar a resolver problemas difíciles, cada uno tiene sus propias limitaciones. Incluso existen situaciones en las que un SAC hace más complicado un problema (en el sentido de producir una respuesta que es extremadamente difícil de utilizar o interpretar). También, observe que ni Maple ni Mathematica dan como respuesta una constante arbitraria $+C$. Por otro lado, con un poco de reflexión matemática de su parte, será posible reducir el problema a otro que sea más fácil de resolver. En el ejercicio 67 presentamos un ejemplo de esto.

Integrales no elementales

El desarrollo de computadoras y calculadoras que encuentran antiderivadas por medio de manipulación simbólica ha llevado a un interés renovado por la determinación de cuáles antiderivadas pueden expresarse como una combinación finita de funciones elementales (las funciones que hemos estudiado) y cuáles no. Las integrales de funciones que no tienen antiderivadas elementales se denominan integrales **no elementales**. Para su evaluación, requieren de series infinitas (capítulo 10) o de métodos numéricos cuando dan una aproximación. Ejemplo de estas últimas integrales es la función error (que mide la probabilidad de errores aleatorios)

$$\text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

e integrales como

$$\int \operatorname{sen} x^2\,dx \qquad \text{y} \qquad \int \sqrt{1 + x^4}\,dx$$

que surgen en ingeniería y física. Éstas y otras, tales como

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int e^{(e^x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \qquad \int \ln(\ln x)\,dx, \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx, \qquad 0 < k < 1,$$

se ven tan sencillas que nos sentimos tentados a ver de dónde surgieron. Sin embargo, se puede demostrar que no hay forma de expresar dichas integrales como combinaciones finitas de funciones elementales. Lo mismo se aplica a integrales que se transforman en éstas por sustitución. Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, parte 1, todos los integrandos tienen antiderivadas, ya que son continuos. No obstante, ninguna de sus antiderivadas es elemental.

Ninguna de las integrales que se le ha pedido evaluar en este capítulo caen en esta categoría, pero en otros trabajos podría encontrarse con integrales no elementales.

Ejercicios 8.5

Uso de tablas de integrales

Utilice la tabla de integrales de la parte final del libro para evaluar las integrales de los ejercicios 1 a 26.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

3. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-2}}$

4. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(2x+3)^{3/2}}$

5. $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$

6. $\displaystyle\int x(7x+5)^{3/2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x-9}}$

9. $\displaystyle\int x\sqrt{4x-x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7+x^2}}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{7-x^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int e^{2t}\cos 3t\,dt$

16. $\displaystyle\int e^{-3t}\operatorname{sen} 4t\,dt$

17. $\displaystyle\int x\cos^{-1}x\,dx$

18. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

19. $\displaystyle\int x^2\tan^{-1}x\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx$

22. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\cos 3x\,dx$

23. $\displaystyle\int 8\operatorname{sen} 4t\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt$

24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\frac{t}{3}\operatorname{sen}\frac{t}{6}\,dt$

25. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{4}\,d\theta$

26. $\displaystyle\int \cos\frac{\theta}{2}\cos 7\theta\,d\theta$

Sustitución y tablas de integrales

En los ejercicios 27 a 40, utilice una sustitución para cambiar la integral en una que pueda encontrar en la tabla. Después evalúe la integral.

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \cot t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,dt, \quad 0<t<\pi/2$

34. $\displaystyle\int \frac{dt}{\tan t\sqrt{4-\operatorname{sen}^2 t}}$

35. $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$

36. $\displaystyle\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,dy$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx$

(*Sugerencia:* Complete el cuadrado).

38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

39. $\displaystyle\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

Uso de fórmulas de reducción

Utilice las fórmulas de reducción para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 50.

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 2x\,dx$

42. $\displaystyle\int 8\cos^4 2\pi t\,dt$

43. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 2\theta\cos^3 2\theta\,d\theta$

44. $\displaystyle\int 2\operatorname{sen}^2 t\sec^4 t\,dt$

45. $\displaystyle\int 4\tan^3 2x\,dx$

46. $\displaystyle\int 8\cot^4 t\,dt$

47. $\displaystyle\int 2\sec^3\pi x\,dx$

48. $\displaystyle\int 3\sec^4 3x\,dx$

49. $\displaystyle\int \csc^5 x\,dx$

50. $\displaystyle\int 16x^3(\ln x)^2\,dx$

Evalúe las integrales de los ejercicios 51 a 56; primero haga una sustitución (quizá trigonométrica) y después aplique una fórmula de reducción.

51. $\displaystyle\int e^t\sec^3(e^t-1)\,dt$

52. $\displaystyle\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$

53. $\displaystyle\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{(1-y^2)^{5/2}}$

55. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,dr$

56. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2+1)^{7/2}}$

Aplicaciones

57. Área de una superficie Determine el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y=\sqrt{x^2+2}$, $0\le x\le\sqrt{2}$, .

58. Longitud de arco Determine la longitud de la curva $y=x^2$, $0\le x\le\sqrt{3}/2$.

59. Centroide Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante determinada por la curva $y=1/\sqrt{x+1}$ y la recta $x=3$.

60. Momento con respecto al eje *y* Una delgada placa de densidad constante $\delta=1$ ocupa la región encerrada por la curva $y=36/(2x+3)$ y la recta $x=3$ en el primer cuadrante. Determine el momento de la placa con respecto al eje y.

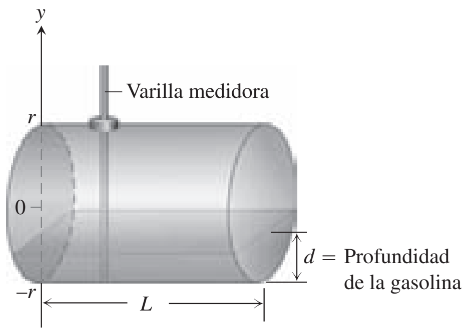
T **61.** Utilice la tabla de integrales y una calculadora para determinar, con dos decimales, el área de la superficie generada al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y=x^2$, $-1\le x\le 1$.

62. Volumen El jefe del departamento de contabilidad de su empresa le ha pedido determinar una fórmula que él pueda utilizar en un programa de cómputo para calcular el inventario de fin de año de la gasolina contenida en los depósitos de la compañía. Cada depósito tiene la forma de un cilindro circular recto de radio r y longitud L, montado en forma horizontal, como se muestra a continuación. La información que llega al departamento de contabilidad, como medidas de la profundidad, se toma de una varilla medidora graduada en centímetros.

a. Muestre, en la notación de la figura, que el volumen que ocupa la gasolina en el tanque hasta una profundidad d es

$$V = 2L\int_{-r}^{-r+d}\sqrt{r^2 - y^2}\,dy.$$

b. Evalúe la integral.



63. ¿Cuál es el mayor valor de

$$\int_a^b \sqrt{x - x^2}\,dx$$

que puede tener para cualesquiera valores de a y b? Justifique su respuesta.

64. ¿Cuál es el mayor valor de

$$\int_a^b x\sqrt{2x - x^2}\,dx$$

que puede tener para cualesquiera valores de a y b? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 65 y 66, utilice un SAC para realizar las integraciones.

65. Evalúe las integrales

a. $\int x\ln x\,dx$ **b.** $\int x^2\ln x\,dx$ **c.** $\int x^3\ln x\,dx$.

d. ¿Observa algún patrón? Trate de predecir la fórmula para $\int x^4 \ln x\,dx$ y después vea si su conjetura es correcta evaluándola con un SAC.

e. ¿Cuál es la fórmula para $\int x^n\ln x\,dx$, $n \geq 1$? Compruebe su respuesta utilizando un SAC.

66. Evalúe las integrales

a. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **b.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ **c.** $\int \frac{\ln x}{x^4}\,dx$.

d. ¿Observa algún patrón? Trate de predecir la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx$$

Y después vea si es correcta; para ello, evalúela con un SAC.

e. ¿Cuál es la fórmula para

$$\int \frac{\ln x}{x^n}\,dx, \quad n \geq 2?$$

Verifique su respuesta con un SAC.

67. a. Utilice un SAC para evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx$$

donde n es un entero positivo arbitrario. ¿Puede su SAC determinar el resultado?

b. De manera sucesiva, determine la integral cuando $n = 1, 2, 3, 5$ y 7. Comente acerca de la complejidad de los resultados.

c. Ahora haga la sustitución $x = (\pi/2) - u$ y sume la nueva integral con la anterior. ¿Cuál es el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx?$$

Este ejercicio ilustra cómo un poco de ingenio matemático permite resolver un problema que no puede resolverse de forma inmediata con un SAC.

8.6 Integración numérica

Las antiderivadas de algunas funciones como $\operatorname{sen}(x^2)$, $1/\ln x$ y $\sqrt{1 + x^4}$ no tienen fórmulas elementales. Cuando no es posible determinar una antiderivada que pueda manejarse para una función f que tenemos que integrar, podemos dividir el intervalo de integración, remplazar f por un polinomio que se ajuste bien en cada subintervalo, integrar los polinomios y sumar los resultados para aproximar la integral de f. Este procedimiento es un ejemplo de integración numérica. En esta sección estudiamos dos de estos métodos, la *regla del trapecio* y la *regla de Simpson*. En nuestra presentación, supondremos que f es positiva, pero el único requisito es que sea continua en el intervalo de integración $[a, b]$.

Aproximaciones por trapecios

La regla del trapecio para el valor de la integral definida se basa en la aproximación de la región entre una curva y el eje x, con trapecios en lugar de rectángulos, como en la figura 8.7.

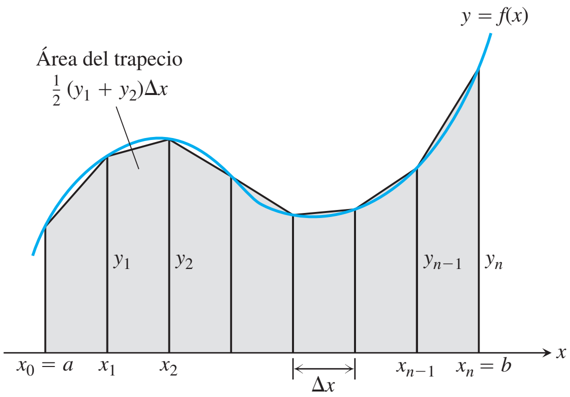


FIGURA 8.7 La regla del trapecio aproxima pequeñas secciones de la curva $y = f(x)$ con segmentos de rectas. Para aproximar la integral de f desde a hasta b, sumamos las áreas de los trapecios formados al unir los extremos de los segmentos con el eje x.

No es necesario que en la figura los puntos de subdivisión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ estén igualmente espaciados, pero la fórmula es mucho más sencilla si lo están. Por lo tanto, supondremos que la longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

La longitud $\Delta x = (b - a)/n$ se denomina **longitud del paso** o **tamaño de la malla**. El área del trapecio que está arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

donde $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ y $y_i = f(x_i)$. Esta área es igual a la longitud Δx de la "altura" horizontal del trapecio multiplicada por el promedio de sus dos "bases" verticales. (Véase la figura 8.7). Entonces, el área debajo de la curva $y = f(x)$ y arriba del eje x se aproxima si se suman las áreas de todos los trapecios:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})\Delta x + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x \\ &= \Delta x\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n), \end{aligned}$$

donde

$$y_0 = f(a), \qquad y_1 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = f(x_{n-1}), \qquad y_n = f(b).$$

La regla del trapecio indica lo siguiente: utilice T para estimar la integral de f desde a hasta b. Es equivalente a la regla del punto medio analizada en la sección 5.1.

Regla del trapecio

Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, utilice

$$T = \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right).$$

Las y son los valores de f en los puntos de la partición

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b,$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

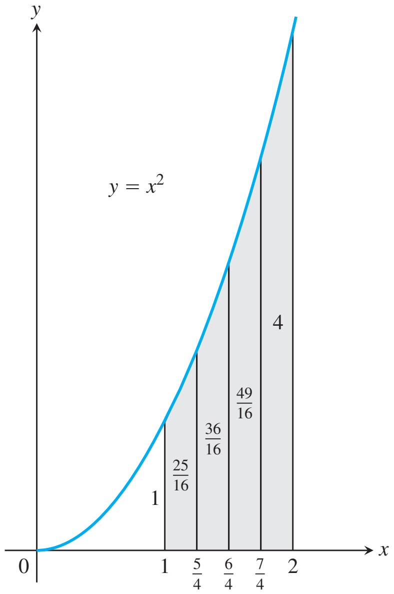


FIGURA 8.8 La aproximación por medio de trapecios del área bajo la gráfica de $y = x^2$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$, es un ligera sobreestimación (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Utilice la regla del trapecio con $n = 4$ para estimar $\int_1^2 x^2\,dx$. Compare la estimación con el valor exacto.

Solución Divida el intervalo [1, 2] en cuatro subintervalos de la misma longitud (figura 8.8). Después evalúe $y = x^2$ en cada punto de la partición (tabla 8.2).

Utilizando estos valores de y, $n = 4$ y $\Delta x = (2 - 1)/4 = 1/4$ en la regla del trapecio, tenemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{25}{16}\right) + 2\left(\frac{36}{16}\right) + 2\left(\frac{49}{16}\right) + 4\right) \\ &= \frac{75}{32} = 2.34375. \end{aligned}$$

TABLA 8.2

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

Como la parábola es cóncava hacia *arriba*, los segmentos de aproximación están sobre la curva, lo que implica que cada trapecio tiene un área ligeramente mayor que la correspondiente franja bajo la curva. El valor exacto de la integral es

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

La aproximación T sobreestima la integral en alrededor de medio por ciento de su valor verdadero de $7/3$. El porcentaje de error es $(2.34375 - 7/3)/(7/3) \approx 0.00446$ o 0.446 por ciento. ■

Regla de Simpson: Aproximaciones por medio de parábolas

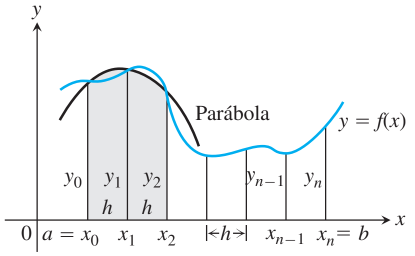


FIGURA 8.9 La regla de Simpson aproxima pequeñas secciones de la curva por medio de parábolas.

Otra regla para aproximar la integral definida de una función continua resulta de utilizar parábolas en vez de segmentos de recta que producen trapecios. Como antes, hacemos una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez requerimos que n sea un número par. En cada par de intervalos consecutivos, aproximamos la curva $y = f(x) \geq 0$ por medio de una parábola, como se ilustra en la figura 8.9. Un parábola típica pasa por los tres puntos consecutivos (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) de la curva.

Calculemos el área de la región sombreada que tiene una parábola que pasa por tres puntos consecutivos. Para simplificar nuestros cálculos, primero tomamos el caso en donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$ (figura 8.10), donde $h = \Delta x = (b - a)/n$. El área debajo de la parábola será

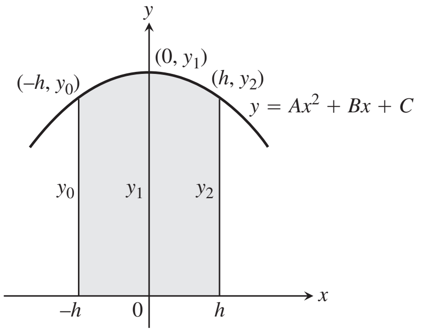


FIGURA 8.10 Al integrar desde $-h$ hasta h, determinamos que el área sombreada es

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

la misma si desplazamos el eje y hacia la izquierda o hacia la derecha. La parábola tiene una ecuación de la forma

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

por lo que el área debajo de ella desde $x = -h$ hasta $x = h$ es

$$\begin{aligned} A_p &= \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\Big]_{-h}^{h} \\ &= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \end{aligned}$$

Como la curva pasa por los tres puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2), también tenemos

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \qquad y_1 = C, \qquad y_2 = Ah^2 + Bh + C,$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} C &= y_1, \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1, \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1, \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1. \end{aligned}$$

De esta forma, expresando el área A_p en términos de las ordenadas y_0, y_1 y y_2, tenemos

$$A_p = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Ahora si en la figura 8.9 desplazamos la parábola de manera horizontal a su posición sombreada, no cambia el área debajo de ella. Así, el área debajo de la parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la figura 8.9 es

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

De forma análoga, el área debajo de la parábola que pasa por los puntos (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Si calculamos las áreas debajo de todas las parábolas y sumamos los resultados, obtendremos la aproximación

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots \\ &\quad + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \end{aligned}$$

El resultado se conoce como regla de Simpson. La función no necesita ser positiva, como en nuestra deducción, pero el número n de subintervalos debe ser par para aplicar la regla, ya que cada arco parabólico utiliza dos subintervalos.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Thomas Simpson
(1720–1761)

Regla de Simpson

Para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, utilice

$$S = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Las y son los valores de f en los puntos de la partición

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

El número n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

Observe el patrón de coeficientes en la regla anterior: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, …, 4, 1.

EJEMPLO 2 Utilice la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_0^2 5x^4\,dx$.

TABLA 8.3

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
1	5
$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{16}$
2	80

Solución Dividimos [0, 2] en cuatro subintervalos y evaluamos $y = 5x^4$ en los puntos de la partición (tabla 8.3). Después, aplicamos la regla de Simpson con $n = 4$ y $\Delta x = 1/2$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\frac{5}{16}\right) + 2(5) + 4\left(\frac{405}{16}\right) + 80\right) \\ &= 32\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esta estimación difiere del valor exacto (32) en sólo $1/12$, un error porcentual de menos de tres décimos de uno por ciento, lo cual se logró con sólo cuatro subintervalos. ■

Análisis del error

Siempre que utilicemos una técnica de aproximación, la cuestión que surge es qué tan precisa puede ser la aproximación. El siguiente teorema ofrece fórmulas para la estimación de errores cuando se maneja la regla del trapecio y la regla de Simpson. El **error** es la diferencia entre la aproximación que se obtiene mediante la regla y el valor real de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA 1: Estimación de los errores en la regla del trapecio y en la regla de Simpson Si f'' es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f''|$ en $[a, b]$, entonces el error E_T en la aproximación por medio de trapecios a la integral de f, desde a hasta b, para n pasos satisface la desigualdad

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}. \qquad \text{Regla del trapecio}$$

Si $f(4)$ es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f(4)|$ en $[a, b]$, entonces el error E_S en la aproximación de la regla de Simpson a la integral de f, desde a hasta b para n pasos, satisface la desigualdad

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}. \qquad \text{Regla de Simpson}$$

Para ver por qué el teorema 1 es cierto en el caso de la regla del trapecio, iniciaremos con un resultado del cálculo avanzado, el cual dice que si f'' es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12}\cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

para algún número c entre a y b. Así, cuando Δx tiende a cero, el error definido por

$$E_T = -\frac{b-a}{12} \cdot f''(c)(\Delta x)^2$$

se aproxima a cero como el cuadrado de Δx.

La desigualdad

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} \text{máx} |f''(x)| (\Delta x)^2$$

donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, da una cota superior para la magnitud del error. En la práctica, por lo regular no es posible determinar el valor exacto de máx$|f''(x)|$, por lo que, en vez de ello, tenemos que estimar una cota superior o valor para el "peor caso". Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f''(x)|$ en $[a, b]$ de manera que $|f''(x)| \le M$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} M(\Delta x)^2.$$

Si sustituimos $(b-a)/n$ por Δx, obtendremos

$$|E_T| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Para estimar el error en la regla de Simpson, iniciamos con un resultado de cálculo avanzado que dice que si la cuarta derivada $f^{(4)}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$$

para algún punto c entre a y b. Así, cuando Δx tiende a cero, el error,

$$E_S = -\frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(c)(\Delta x)^4,$$

tiende a cero como la *cuarta potencia* de Δx. (Lo anterior ayuda a explicar por qué es muy probable que la regla de Simpson arroje mejores resultados que la regla del trapecio).

La desigualdad

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} \text{máx} |f^{(4)}(x)| (\Delta x)^4,$$

donde máx se refiere al intervalo $[a, b]$, brinda una cota superior para la magnitud del error. Al igual que sucede con máx$|f''|$ en la fórmula del error para la regla del trapecio, por lo regular no es posible determinar el valor exacto de máx$|f^{(4)}(x)|$, de manera que tenemos que remplazarlo con una cota superior. Si M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}|$ en $[a, b]$, entonces

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} M(\Delta x)^4.$$

Si se sustituye $(b-a)/n$ por Δx en la expresión anterior, se tiene

$$|E_S| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

EJEMPLO 3 Determine una cota superior para el error al estimar $\int_0^2 5x^4\,dx$ usando la regla de Simpson con $n = 4$ (ejemplo 2).

Solución Para estimar el error, primero encontramos una cota superior M para la magnitud de la cuarta derivada de $f(x) = 5x^4$ en el intervalo $0 \le x \le 2$. Como la cuarta derivada tiene el valor constante $f^{(4)}(x) = 120$, tomamos $M = 120$. Con $b - a = 2$ y $n = 4$, la estimación del error para la regla de Simpson da

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(2)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{1}{12}.$$

Dicha estimación es congruente con el resultado del ejemplo 2. ■

El teorema 1 también puede usarse para estimar el número de subintervalos que se requieren cuando se utiliza la regla del trapecio o la regla de Simpson, si especificamos una cierta tolerancia para el error.

EJEMPLO 4 Estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar la integral del ejemplo 3 utilizando la regla de Simpson con un error de magnitud menor que 10^{-4}.

Solución Usando la desigualdad en el teorema 1, elegimos el número de subintervalos n que satisfaga

$$\frac{M(b-a)^5}{180n^4} < 10^{-4},$$

entonces el error E_S en la regla de Simpson satisface $|E_S| < 10^{-4}$ como se pidió.

En la solución en el ejemplo 3, tenemos $M = 120$ y $b - a = 2$, así que necesitamos que n satisfaga

$$\frac{120(2)^5}{180n^4} < \frac{1}{10^4}$$

o, de manera equivalente,

$$n^4 > \frac{64 \cdot 10^4}{3}.$$

Se sigue que

$$n > 10\left(\frac{64}{3}\right)^{1/4} \approx 21.5.$$

Como en la regla de Simpson n debe ser par, estimamos el número mínimo de subintervalos necesarios como $n = 22$ para la tolerancia del error que se dio. ■

EJEMPLO 5 Como vimos en el capítulo 7, el valor de ln 2 puede calcularse a partir de la integral

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

La tabla 8.4 muestra los valores T y S para las aproximaciones de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ si se utilizan varios valores de n. Observe que la regla de Simpson mejora radicalmente los valores de la regla del trapecio. En particular, observe que cuando duplicamos el valor de n (y por lo tanto

TABLA 8.4 Aproximaciones de la regla del trapecio (T_n) y de la regla de Simpson (S_n) de $\ln 2 = \int_1^2 (1/x)\,dx$

n	T_n	|Error| menor que…	S_n	|Error| Menor que…
10	0.6937714032	0.0006242227	0.6931502307	0.0000030502
20	0.6933033818	0.0001562013	0.6931473747	0.0000001942
30	0.6932166154	0.0000694349	0.6931472190	0.0000000385
40	0.6931862400	0.0000390595	0.6931471927	0.0000000122
50	0.6931721793	0.0000249988	0.6931471856	0.0000000050
100	0.6931534305	0.0000062500	0.6931471809	0.0000000004

se divide entre dos el valor de $h = \Delta x$), el error para T se divide entre 2 al *cuadrado*, mientras que el error para S se divide entre 2 *a la cuarta*.

Lo anterior tiene un efecto radical cuando $\Delta x = (2 - 1)/n$ se hace pequeño. La aproximación de Simpson para $n = 50$ aproxima a siete decimales y para $n = 100$ coincide con nueve decimales (¡una aproximación de mil millonésimas!). ■

Si $f(x)$ es un polinomio de grado menor que cuatro, entonces su cuarta derivada será cero, y

$$E_S = -\frac{b-a}{180} f^{(4)}(c)(\Delta x)^4 = -\frac{b-a}{180}(0)(\Delta x)^4 = 0.$$

Así, no habrá error en la aproximación de Simpson de cualquier integral de f. En otras palabras, si f es una constante, una función lineal, o un polinomio cuadrático o cúbico, la regla de Simpson dará el valor exacto de cualquier integral de f, sin importar el número de subdivisiones. De manera análoga, si f es una constante o una función lineal, entonces su segunda derivada es cero y

$$E_T = -\frac{b-a}{12} f''(c)(\Delta x)^2 = -\frac{b-a}{12}(0)(\Delta x)^2 = 0.$$

Por lo tanto, la regla del trapecio dará el valor exacto de cualquier integral de f. Esto no sorprende, ya que los trapecios se ajustan perfectamente a la gráfica.

Aunque, en teoría, la disminución del tamaño del paso Δx reduce el error en las aproximaciones de Simpson y del trapecio, en la práctica podría no ser así. Cuando Δx es muy pequeña, digamos $\Delta x = 10^{-5}$, los errores de redondeo de las computadoras y calculadoras en la aritmética que se requiere para calcular S y T se acumulan a tal grado que las fórmulas de error podrían dejar de describir lo que pasa. La reducción de Δx por debajo de cierto tamaño empeoraría las cosas. Aunque éste no es tema del texto, si tiene problemas con el redondeo, debe consultar un libro de análisis numérico para métodos alternativos.

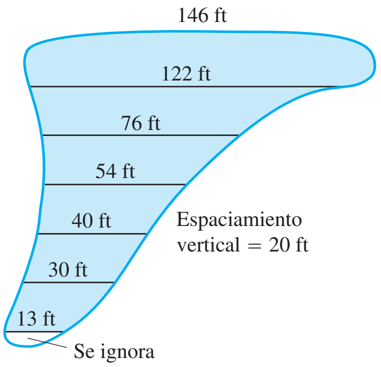


FIGURA 8.11 Dimensiones del pantano del ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Un poblado quiere desecar y rellenar un pequeño pantano contaminado (figura 8.11). El pantano tiene un promedio de 5 ft de profundidad. ¿Aproximadamente cuántas yardas cúbicas de tierra se necesitarán para llenar el área después de desecar el pantano?

Solución Para calcular el volumen del pantano, estimamos el área de la superficie y la multiplicamos por 5. Para estimar el área, utilizamos la regla de Simpson con $\Delta x = 20$ ft y las y iguales a las distancias medidas a través del pantano, como se indica en la figura 8.11.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\ &= \frac{20}{3}(146 + 488 + 152 + 216 + 80 + 120 + 13) = 8100 \end{aligned}$$

El volumen es de alrededor de $(8100)(5) = 40{,}500\ \text{ft}^3$ o $1500\ \text{yd}^3$. ■

Ejercicios 8.6

Estimación de integrales

Las instrucciones para las integrales en los ejercicios 1 a 10, tienen dos partes: una para la regla del trapecio y otra para la regla de Simpson.

I. Uso de la regla del trapecio

a. Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_T|$.

b. Evalúe la integral directamente y determine $|E_T|$.

c. Utilice la fórmula $(|E_T|/(\text{valor verdadero})) \times 100$ para expresar $|E_T|$ como un porcentaje del valor verdadero de la integral.

II. Uso de la regla de Simpson

a. Estime la integral con $n = 4$ pasos y determine una cota superior para $|E_S|$.

b. Evalúe la integral directamente y determine $|E_S|$.

c. Utilice la fórmula $(|E_S|/(\text{valor verdadero})) \times 100$ para expresar $|E_S|$ como un porcentaje del valor verdadero de la integral.

1. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^3 (2x - 1)\,dx$

3. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\, dx$

4. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 1)\, dx$

5. $\int_{0}^{2} (t^3 + t)\, dt$

6. $\int_{-1}^{1} (t^3 + 1)\, dt$

7. $\int_{1}^{2} \frac{1}{s^2}\, ds$

8. $\int_{2}^{4} \frac{1}{(s - 1)^2}\, ds$

9. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt$

10. $\int_{0}^{1} \operatorname{sen} \pi t\, dt$

Estimación del número de subintervalos

En los ejercicios 11 a 22, estime el número mínimo de subintervalos necesarios para aproximar las integrales con un error de magnitud menor que 10^{-4} por medio de **(a)** la regla del trapecio y **(b)** la regla de Simpson. (Las integrales en los ejercicios 11 a 18 son las integrales de los ejercicios 1 a 8).

11. $\int_{1}^{2} x\, dx$

12. $\int_{1}^{3} (2x - 1)\, dx$

13. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\, dx$

14. $\int_{-2}^{0} (x^2 - 1)\, dx$

15. $\int_{0}^{2} (t^3 + t)\, dt$

16. $\int_{-1}^{1} (t^3 + 1)\, dt$

17. $\int_{1}^{2} \frac{1}{s^2}\, ds$

18. $\int_{2}^{4} \frac{1}{(s - 1)^2}\, ds$

19. $\int_{0}^{3} \sqrt{x + 1}\, dx$

20. $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{x + 1}}\, dx$

21. $\int_{0}^{2} \operatorname{sen}(x + 1)\, dx$

22. $\int_{-1}^{1} \cos(x + \pi)\, dx$

Estimaciones con información numérica

23. **Volumen de agua en una alberca** Una alberca rectangular mide 30 ft de ancho por 50 ft de largo. La tabla indica la profundidad $h(x)$ del agua a intervalos de 5 ft desde un extremo de la alberca al otro. Estime el volumen del agua en la alberca por medio de la regla del trapecio con $n = 10$, aplicada a la integral

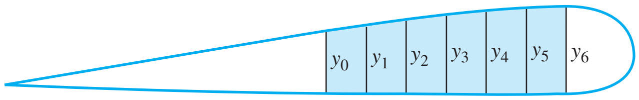
$$V = \int_{0}^{50} 30 \cdot h(x)\, dx.$$

Posición (ft) x	Profundidad (ft) $h(x)$	Posición (ft) x	Profundidad (ft) $h(x)$
0	6.0	30	11.5
5	8.2	35	11.9
10	9.1	40	12.3
15	9.9	45	12.7
20	10.5	50	13.0
25	11.0		

24. **Distancia recorrida** La siguiente tabla incluye la información de tiempo y velocidad para un automóvil deportivo que acelera desde el reposo a 130 mph. ¿Qué distancia recorrió el automóvil en el momento que alcanzó esta velocidad? (Utilice trapecios para estimar el área debajo de la curva de la velocidad, pero sea cuidadoso. Los intervalos de tiempo no son de la misma longitud).

Cambio de velocidad	Tiempo (seg)
Cero a 30 mph	2.2
40 mph	3.2
50 mph	4.5
60 mph	5.9
70 mph	7.8
80 mph	10.2
90 mph	12.7
100 mph	16.0
110 mph	20.6
120 mph	26.2
130 mph	37.1

25. **Diseño de alas de un avión** El diseño de un nuevo avión requiere de un tanque de gasolina de área de sección transversal constante en cada ala. A continuación se presenta un dibujo a escala de la sección transversal. El tanque debe tener capacidad para 5000 lb de gasolina, cuya densidad es de 42 lb/ft³. Estime la longitud del tanque mediante la regla de Simpson.



$y_0 = 1.5$ ft, $y_1 = 1.6$ ft, $y_2 = 1.8$ ft, $y_3 = 1.9$ ft,
$y_4 = 2.0$ ft, $y_5 = y_6 = 2.1$ ft Espaciamiento horizontal $= 1$ ft

26. **Consumo de petróleo en la Isla Pathfinder** Un generador diesel funciona continuamente consumiendo petróleo a una razón que aumenta en forma gradual hasta que debe detenerse de modo temporal para remplazar los filtros. Utilice la regla del trapecio para estimar la cantidad de petróleo consumido por el generador durante una semana.

Día	Razón de consumo de petróleo (litros/h)
Dom	0.019
Lun	0.020
Ma	0.021
Mie	0.023
Jue	0.025
Vie	0.028
Sáb	0.031
Dom	0.035

Teoría y ejemplos

27. **Valores utilizables de la función integral del seno** *La función integral del seno,*

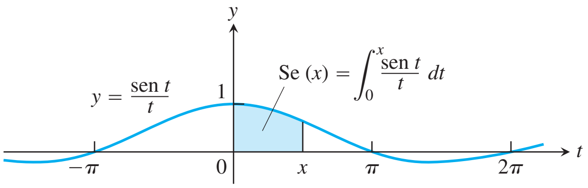
$$\operatorname{Si}(x) = \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt, \quad \text{“Integral del seno de } x\text{”}$$

es una de las muchas funciones en ingeniería cuyas fórmulas no pueden simplificarse. No existe una fórmula elemental para la antiderivada de $(\operatorname{sen} t)/t$. Sin embargo, los valores de $\operatorname{Si}(x)$ se estiman con facilidad por medio de integración numérica.

Aunque la notación no lo muestra de manera explícita, la función que debe integrarse es

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

la extensión continua de (sen t)/t al intervalo $[0, x]$. La función tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de su dominio. Su gráfica es suave, por lo que es posible esperar buenos resultados con la regla de Simpson.



a. Utilice el hecho de que $|f^{(4)}| \le 1$ en $[0, \pi/2]$ para dar una cota superior del error que ocurre si

$$\text{Se}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen } t}{t}\, dt$$

se estima por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

b. Estime Se$(\pi/2)$ por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

c. Exprese la cota del error que encontró en el inciso (a), como un porcentaje del valor que encontró en el inciso (b).

28. Función error *La función error,*

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

importante en probabilidad, así como en las teorías de flujo de calor y transmisión de señales, debe evaluarse numéricamente, ya que no existe expresión elemental para la antiderivada de e^{-t^2}.

a. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar erf(1).

b. En $[0, 1]$,

$$\left| \frac{d^4}{dt^4}\left(e^{-t^2}\right) \right| \le 12.$$

Dé una cota superior para la magnitud del error de la estimación en el inciso (a).

29. Demuestre que la suma T en la regla del trapecio para $\int_a^b f(x)\, dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. (*Sugerencia:* Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar la existencia de c_k en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que satisface $f(c_k) = (f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$).

30. Demuestre que la suma S en la regla de Simpson para $\int_a^b f(x)\, dx$ es una suma de Riemann para f continua en $[a, b]$. (Véase el ejercicio 29).

T **31. Integrales elípticas** La longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

resulta ser

$$\text{Longitud} = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt,$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. La integral en esta fórmula se denomina *integral elíptica*, que no es elemental salvo cuando $e = 0$ o 1.

a. Utilice la regla del trapecio con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse cuando $a = 1$ y $e = 1/2$.

b. Utilice el hecho de que el valor absoluto de la segunda derivada de $f(t) = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$ es menor que 1, para determinar una cota superior para el error en la aproximación que obtuvo en el inciso (a).

Aplicaciones

T **32.** La longitud de un arco de la curva $y = \text{sen } x$ está dado por

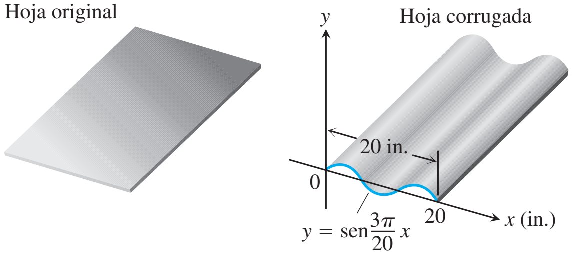
$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Estime L por medio de la regla de Simpson con $n = 8$.

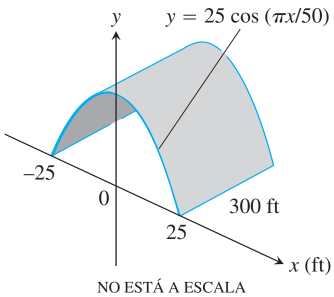
T **33.** Su compañía de fabricación de metal tiene una oferta para firmar un contrato y producir hojas de acero corrugado para techos, como la que se muestra en la figura. Las secciones transversales de las hojas corrugadas tienen la forma de la curva

$$y = \text{sen } \frac{3\pi}{20} x, \quad 0 \le x \le 20 \text{ in}.$$

Si el techo se forja a partir de las hojas planas por medio de un proceso que no estira el material, ¿cuál debe ser el ancho del material original? Para determinarlo, utilice integración numérica para aproximar la longitud de la curva seno a dos decimales.



T **34.** Su compañía tiene un contrato para construir el túnel que se ilustra a continuación. Éste tiene una longitud de 300 ft de largo y 50 ft de ancho en la base. Las secciones transversales tienen la forma de un arco de la curva $y = 25 \cos(\pi x/50)$. Hasta su terminación, la superficie interna del túnel (excluyendo el camino) se tratará con un sellador resistente al agua, que tiene un costo de \$1.75 por ft cuadrado. ¿Cuánto cuesta aplicar el sellador? (*Sugerencia:* Utilice integración numérica para determinar la longitud de la curva coseno).



Determine, con dos decimales, las áreas de las superficies generadas al hacer girar, alrededor del eje x, las curvas de los ejercicios 35 y 36.

35. $y = \text{sen } x, \quad 0 \le x \le \pi$

36. $y = x^2/4, \quad 0 \le x \le 2$

37. Utilice integración numérica para aproximar el valor de

$$\text{sen}^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Como referencia, $\text{sen}^{-1} 0.6 = 0.64350$ redondeado a cinco decimales.

38. Utilice integración numérica para aproximar el valor de

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx.$$

8.7 Integrales impropias

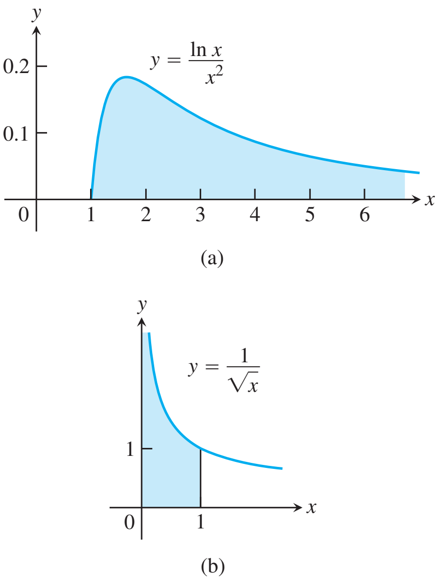


FIGURA 8.12 ¿Son finitas las áreas debajo de estas curvas infinitas? Veremos que en ambos casos la respuesta es "sí".

Hasta el momento, se ha requerido que las integrales definidas tengan dos propiedades. Primera, que el dominio de integración $[a, b]$ sea finito. Segunda, que el rango del integrando sea finito en este dominio. En la práctica, es posible encontrar problemas que no cumplen una o ambas de tales condiciones. La integral para el área debajo de la curva $y = (\ln x)/x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = \infty$ es un ejemplo para el cual el dominio es infinito (figura 8.12a). La integral para el área debajo de la curva $y = 1/\sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es un ejemplo para el que el rango del integrando es infinito (figura 8.12b). En cualquier caso, se dice que las integrales son *impropias* y se calculan como límites. Cuando analicemos la convergencia de ciertas series infinitas en el capítulo 10, veremos que las integrales impropias desempeñan un papel importante.

Límites de integración infinitos

Considere la región infinita que está bajo la curva $y = e^{-x/2}$ en el primer cuadrante (figura 8.13a). Podría pensarse que dicha región tiene área infinita, pero veremos que el valor es finito. Asignamos un valor al área de la siguiente manera. Primero determinamos el área $A(b)$ de la parte de la región acotada a la derecha por $x = b$ (figura 8.13b).

$$A(b) = \int_0^b e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_0^b = -2e^{-b/2} + 2$$

Después determinamos el límite de $A(b)$ cuando $b \to \infty$

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} \left(-2e^{-b/2} + 2\right) = 2.$$

El valor que asignamos al área bajo la curva desde 0 hasta ∞ es

$$\int_0^{\infty} e^{-x/2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x/2}\,dx = 2.$$

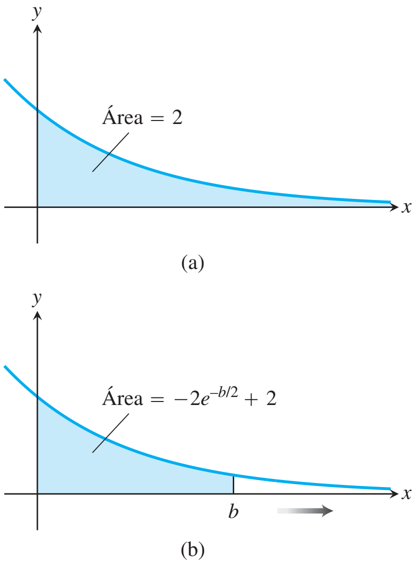


FIGURA 8.13 (a) El área en el primer cuadrante de la curva $y = e^{-x}/2$. (b) El área es una integral impropia del primer tipo.

DEFINICIÓN Las integrales con límites de integración infinitos son **integrales impropias del tipo I**.

1. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,$$

donde c es cualquier número real.

En cada caso, si el límite es finito, decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral impropia **diverge**.

Puede demostrarse que la elección de c en la parte 3 de la definición no es importante. Evaluamos o determinamos la convergencia o divergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ con cualquier elección adecuada.

Cualquiera de las integrales en la definición anterior se interpreta como un área si $f \geq 0$ en el intervalo de integración. Por ejemplo, interpretamos la integral impropia en la figura 8.13 como un área. En ese caso, el área tiene el valor finito 2. Si $f \geq 0$ y la integral impropia diverge, decimos que el área bajo la curva es **infinita**.

EJEMPLO 1 ¿Es finita el área bajo la curva $y = (\ln x)/x^2$ desde $x = 1$ hasta $x = \infty$? Si es así, ¿cuál es?

Solución Determinamos el área bajo la curva desde $x = 1$ hasta $x = b$ y examinamos el límite cuando $b \to \infty$. Si el límite es finito, lo tomamos como el área bajo la curva (figura 8.14). El área desde 1 hasta b es

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b \\ &= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1.\end{aligned}$$

Integración por partes con $u = \ln x,\ dv = dx/x^2,$ $du = dx/x,\ v = -1/x$

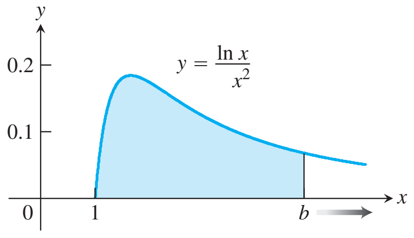


FIGURA 8.14 El área debajo de esta curva es una integral impropia (ejemplo 1).

El límite del área cuando $b \to \infty$ es

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] \\ &= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1 \\ &= -\left[\lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1.\end{aligned}$$

Regla de L'Hôpital.

Así, la integral impropia converge y el área tiene un valor finito de 1. ■

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Solución De acuerdo con la definición (parte 3), es posible elegir $c = 0$ y escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

Ahora, evaluamos cada integral impropia del lado derecho de la ecuación anterior.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} \tan^{-1} x\Big]_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

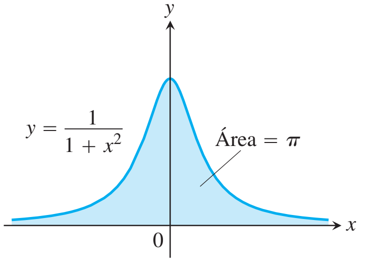


FIGURA 8.15 El área debajo de esta curva es finita (ejemplo 2).

Como $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia puede interpretarse como el área (finita) por abajo de la curva y por arriba del eje x (figura 8.15). ■

La integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$

La función $y = 1/x$ es la frontera entre las integrales convergentes y las divergentes con integrandos de la forma $y = 1/x^p$. Como muestra el siguiente ejemplo, la integral impropia converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3 ¿Para cuáles valores de p la integral $\int_1^{\infty} dx/x^p$ converge? Cuando la integral converge, ¿a qué valor lo hace?

Solución Si $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right).$$

Así,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

ya que

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral converge al valor $1/(p-1)$, si $p > 1$, y diverge si $p < 1$.

Si $p = 1$, la integral también diverge:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln x \Big]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.\end{aligned}$$

Integrandos con asíntotas verticales

Otro tipo de integrales impropias surge cuando el integrando tiene una asíntota vertical —una discontinuidad infinita— en un límite de integración o en algún punto entre los límites de integración. Si el integrando f es positivo en el intervalo de integración, nuevamente interpretamos la integral impropia como el área debajo de la gráfica de f y por arriba del eje x, entre los límites de integración.

Considere la región en el primer cuadrante que está debajo de la curva $y = 1/\sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (figura 8.12b). Primero determinamos el área de la porción desde a hasta 1 (figura 8.16).

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}.$$

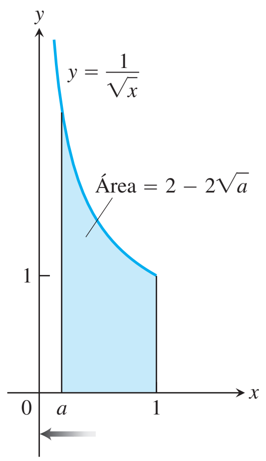


FIGURA 8.16 El área debajo de esta curva es un ejemplo de una integral impropia de segundo tipo.

Después determinamos el límite de esta área cuando $a \to 0^+$:

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2.$$

Por lo tanto, el área debajo de la curva desde 0 hasta 1 es finita e igual a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

DEFINICIÓN Las integrales de funciones que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración son **integrales impropias de tipo II**.

1. Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

3. Si $f(x)$ es discontinua en c, donde $a < c < b$, y es continua en $[a, c) \cup (c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En cada caso, si el límite es finito decimos que la integral impropia **converge** y que el límite es el **valor** de la integral impropia. Si el límite no existe, la integral **diverge**.

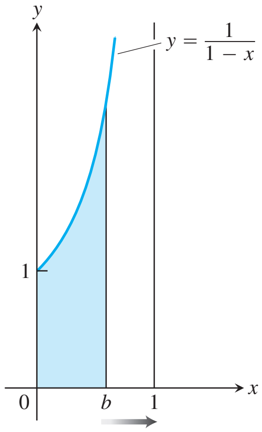


FIGURA 8.17 El área debajo de la curva y arriba del eje x para $[0, 1]$ no es un número real (ejemplo 4).

En la parte 3 de la definición, la integral del lado izquierdo de la ecuación converge si *ambas* integrales del lado derecho convergen; de otra forma, diverge.

EJEMPLO 4 Investigue la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$$

Solución El integrando $f(x) = 1/(1-x)$ es continuo en $[0, 1)$, pero es discontinuo en $x = 1$, aunque se vuelve infinito cuando $x \to 1^-$ (figura 8.17). Evaluamos la integral como

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx &= \lim_{b\to 1^-} \Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} [-\ln(1-b) + 0] = \infty.\end{aligned}$$

El límite es infinito, por lo que la integral diverge. ■

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

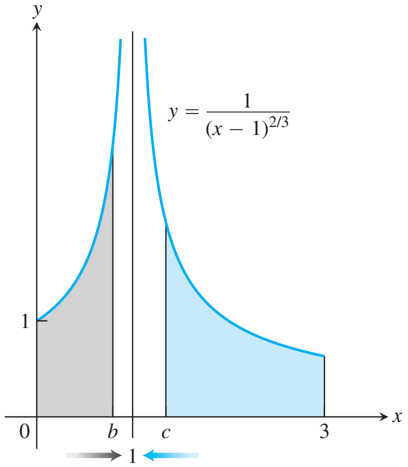


FIGURA 8.18 El ejemplo 5 muestra que el área debajo de la curva existe (así que es un número real).

Solución El integrando tiene una asíntota vertical en $x = 1$; además, es continua en $[0, 1)$ y $(1, 3]$ (figura 8.18). Por lo tanto, por la parte 3 de la definición anterior,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Ahora evaluamos cada integral impropia del lado derecho de esta ecuación.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3 \\ \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3 \\ &= \lim_{c\to 1^+} \Big[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\Big] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$ ■

Integrales impropias con un SAC

Los sistemas de álgebra computacional evalúan muchas integrales impropias convergentes. Para evaluar la integral

$$\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

(la cual converge) usando Maple, ingrese

$$> f := (x + 3)/((x - 1) * (x\hat{\ }2 + 1));$$

Después, utilice el comando de integración

$$> \text{int}(f, x = 2..\text{infinity});$$

Maple da la respuesta

$$-\frac{1}{2}\pi + \ln(5) + \arctan(2).$$

Para obtener un resultado numérico, utilice el comando para evaluar **evalf** y especifique el número de dígitos como sigue:

$$> \text{evalf}(\%, 6);$$

El símbolo % indica a la computadora que evalúe la última expresión en la pantalla; en este caso, $(-1/2)\pi + \ln(5) + \arctan(2)$. Maple indica 1.14579.

Utilizando Mathematica, se introduce

$$\textit{In [1]:=} \text{ Integrate } [(x + 3)/((x - 1)(x\hat{\ }2 + 1)), \{x, 2, \text{Infinity}\}]$$

y se obtiene

$$\textit{Out [1]=} \frac{-\pi}{2} + \text{ArcTan}[2] + \text{Log}[5].$$

Para obtener un resultado con seis dígitos, utilice el comando "N[%,6]"; también se obtiene 1.14579.

Criterios para convergencia y divergencia

Cuando no podemos evaluar de manera directa una integral impropia, tratamos de determinar si converge o diverge. Si la integral diverge, acaba el problema. Si converge, podemos utilizar métodos numéricos para aproximar su valor. Los principales criterios para convergencia o divergencia son la comparación directa y la comparación del límite.

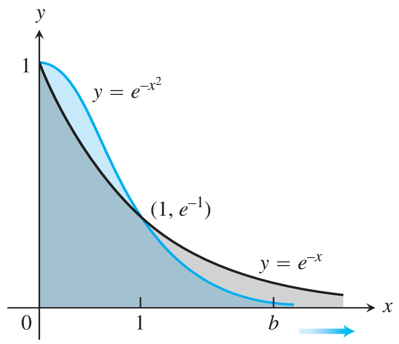


FIGURA 8.19 está por debajo de la gráfica de e^{-x} para $x > 1$ (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 ¿La integral $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge?

Solución Por definición,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx.$$

De forma directa, no es posible evaluar la última integral, ya que no es elemental. Pero podemos mostrar que su límite es finito cuando $b \to \infty$. Sabemos que $\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ es una función creciente de b; por lo tanto, se vuelve infinita cuando $b \to \infty$ o tiene un límite finito cuando $b \to \infty$. No se vuelve infinita: para todo valor de $x \geq 1$, tenemos $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ (figura 8.19), de manera que

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788.$$

De ahí que

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

converge a algún valor finito definido. No sabemos exactamente cuál es el valor, excepto que es positivo y menor que 0.37. En este caso, dependemos de la propiedad de completez de los números reales, que se analiza en el apéndice 6. ■

La comparación de e^{-x^2} y e^{-x} en el ejemplo 6 es un caso especial del siguiente criterio.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Karl Weierstrass
(1815–1897)

TEOREMA 2: Criterio de comparación directa Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ con $0 \le f(x) \le g(x)$ para toda $x \ge a$. Entonces

1. $$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge si} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

2. $$\int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{diverge si} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$

Demostración El razonamiento que sustenta el argumento establecido en el teorema 2 es similar al del ejemplo 6. Si $0 \le f(x) \le g(x)$, para $x \ge a$, entonces, por la regla 7 del teorema 2 de la sección 5.3, tenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx, \qquad b > a.$$

Con base en lo anterior, puede argumentarse, como en el ejemplo 6, que

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge si} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{converge.}$$

Si invertimos esto, indica que

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{diverge si} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{diverge.}$$ ■

EJEMPLO 7 Los siguientes ejemplos ilustran cómo utilizar el teorema 2.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$ converge ya que

$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{sobre} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \quad \text{converge.}$$ Ejemplo 3

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\,dx$ diverge ya que

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \ge \frac{1}{x} \quad \text{sobre} \quad [1, \infty) \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \quad \text{diverge.}$$ Ejemplo 3 ■

TEOREMA 3: Criterio de comparación del límite Si las funciones positivas f y g son continuas en $[a, \infty)$ y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

ambas convergen o ambas divergen.

Omitimos la demostración del teorema 3, que requiere cálculo más avanzado.

Aunque las integrales impropias de dos funciones, desde a hasta ∞, pueden converger, esto no significa que sus integrales necesariamente tengan el mismo valor, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Demuestre que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

converge, comparando con $\int_1^{\infty} (1/x^2)\, dx$. Determine y compare los valores de las dos integrales.

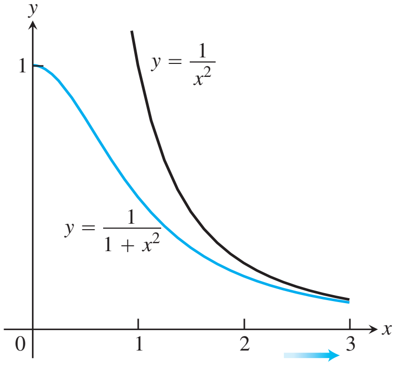


FIGURA 8.20 Las funciones del ejemplo 8.

Solución Las funciones $f(x) = 1/x^2$ y $g(x) = 1/(1+x^2)$ son positivas y continuas en $[1, \infty)$. Además,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0+1 = 1,\end{aligned}$$

un límite positivo finito (figura 8.20). Por lo tanto, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge, ya que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Sin embargo, las integrales convergen a valores diferentes.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2-1} = 1 \qquad \text{Ejemplo 3}$$

y

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b\to\infty} [\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Investigue la convergencia de $\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$.

Solución El integrando sugiere la comparación de $f(x) = (1-e^{-x})/x$ con $g(x) = 1/x$. Sin embargo, no es posible utilizar el criterio de la comparación directa, ya que $f(x) \le g(x)$ y la integral de $g(x)$ *diverge*. Por otra parte, si se usa el criterio de comparación del límite encontraremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty} (1-e^{-x}) = 1,$$

que es un límite positivo y finito. Por lo tanto, $\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$ diverge, ya que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Las aproximaciones a la integral impropia se dan en la tabla 8.5. Observe que los valores no parecen acercarse a algún valor límite fijo cuando $b \to \infty$.

TABLA 8.5

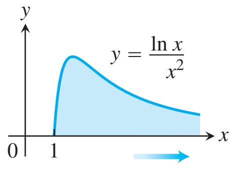
b	$\int_1^{b} \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$
2	0.5226637569
5	1.3912002736
10	2.0832053156
100	4.3857862516
1000	6.6883713446
10000	8.9909564376
100000	11.2935415306

Tipos de integrales impropias analizados en esta sección

LÍMITES INFINITOS DE INTEGRACIÓN: TIPO I

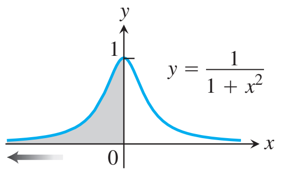
1. Límite superior

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



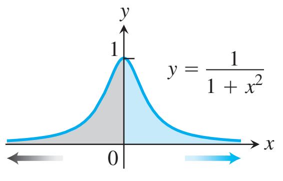
2. Límite inferior

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Ambos límites

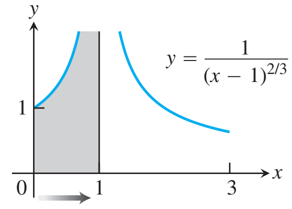
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} \frac{dx}{1+x^2}$$



EL INTEGRANDO SE VUELVE INFINITO: TIPO II

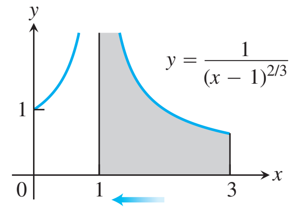
4. Extremo superior

$$\int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-} \int_0^{b} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



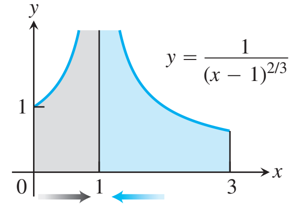
5. Extremo inferior

$$\int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+} \int_d^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Punto interior

$$\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^{1} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^{3} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



Ejercicios 8.7

Evaluación de integrales impropias

Evalúe las integrales en los ejercicios 1 a 34 sin utilizar tablas.

1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.001}}$

3. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

6. $\int_{-8}^{1} \frac{dx}{x^{1/3}}$

7. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\int_0^{1} \frac{dr}{r^{0.999}}$

9. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$

10. $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

11. $\int_2^{\infty} \frac{2}{v^2-v}\,dv$

12. $\int_2^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2-1}$

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

15. $\int_0^{1} \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,d\theta$

16. $\int_0^{2} \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,ds$

17. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

18. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

19. $\int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(1+\tan^{-1} v)}$

20. $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1} x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,d\theta$

22. $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

23. $\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$

24. $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

25. $\int_0^{1} x\ln x\,dx$

26. $\int_0^{1} (-\ln x)\,dx$

27. $\int_0^{2} \frac{ds}{\sqrt{4-s^2}}$

28. $\int_0^{1} \frac{4r\,dr}{\sqrt{1-r^4}}$

29. $\int_1^{2} \frac{ds}{s\sqrt{s^2-1}}$

30. $\int_2^{4} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}}$

31. $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

32. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$

33. $\int_{-1}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

34. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Criterio de convergencia

En los ejercicios 35 a 64, utilice integración, criterio de comparación directa o criterio de comparación del límite para averiguar la convergencia de las integrales. Si es posible aplicar más de un método, utilice el que prefiera.

35. $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,d\theta$

37. $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

38. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

39. $\int_0^{\ln 2} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$

40. $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

41. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$

42. $\int_0^{1} \frac{dt}{t-\operatorname{sen} t}$ (*Sugerencia:* $t \geq \operatorname{sen} t$ para $t \geq 0$).

43. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x^2}$

44. $\int_0^{2} \frac{dx}{1-x}$

45. $\int_{-1}^{1} \ln|x|\,dx$

46. $\int_{-1}^{1} -x\ln|x|\,dx$

47. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

48. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

49. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v-1}}$

50. $\int_0^{\infty} \frac{d\theta}{1+e^{\theta}}$

51. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

52. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

53. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$

54. $\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

55. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,dx$

56. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$

57. $\int_4^{\infty} \frac{2\,dt}{t^{3/2}-1}$

58. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

59. $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$

60. $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,dx$

61. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\,dx$

62. $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x}\,dx$

63. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

64. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Teoría y ejemplos

65. Determine los valores de p para los cuales converge cada integral.

 a. $\int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ b. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

66. **$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ podría no ser igual a $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$** Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

diverge, de aquí que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

también diverge. Después demuestre que

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0.$$

Los ejercicios 67 a 70 están relacionados con la región infinita en el primer cuadrante entre la curva $y = e^{-x}$ y el eje x.

67. Determine el área de la región.

68. Determine el centroide de la región.

69. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje y.

70. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x.

71. Determine el área de la región que está entre las curvas $y = \sec x$ y $y = \tan x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.

72. La región del ejercicio 71 se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido.

a. Determine el volumen del sólido.

b. Demuestre que la superficie interior y la exterior del sólido tienen área infinita.

73. Estimación del valor de una integral impropia convergente cuyo dominio es infinito

a. Demuestre que

$$\int_3^{\infty} e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000042,$$

y por lo tanto que $\int_3^{\infty} e^{-x^2}\,dx < 0.000042$. Explique por qué esto significa que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ puede remplazarse por $\int_0^{3} e^{-x^2}\,dx$ sin introducir un error de magnitud mayor que 0.000042.

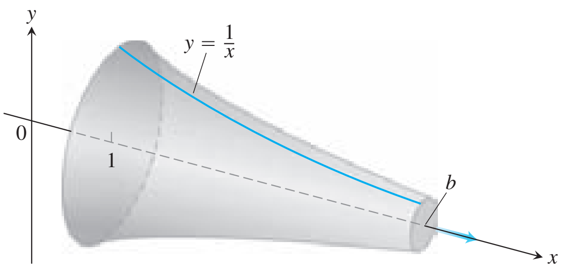
T **b.** Evalúe numéricamente $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$.

74. La lata de pintura infinita o la trompeta de Gabriel Como lo muestra el ejemplo 3, la integral $\int_1^{\infty} (dx/x)$ diverge. Lo anterior significa que la integral

$$\int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx,$$

que mide el *área de la superficie* del sólido de revolución generado al hacer girar, alrededor del eje x, la curva $y = 1/x$, $1 \le x$, también diverge. Si comparamos las dos integrales, veremos que, para todo valor finito $b > 1$,

$$\int_1^{b} 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx > 2\pi\int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx.$$



Sin embargo, la integral

$$\int_1^{\infty} \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

para el *volumen* del sólido converge.

a. Calcúlelo.

b. Este sólido de revolución con frecuencia se describe como una lata que no puede contener pintura suficiente para cubrir su propio interior. Piense acerca de esto por un momento. Es de sentido común que una cantidad finita de pintura no pueda cubrir una superficie infinita. Pero si llenamos la lata con pintura (una cantidad finita), entonces *sí* habremos cubierto una superficie infinita. Explique la aparente contradicción.

75. Función integral del seno La integral

$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt,$$

se llama *función integral del seno*; tiene aplicaciones importantes en óptica.

T **a.** Trace la gráfica del integrando $(\operatorname{sen} t)/t$ para $t > 0$. La función $\mathrm{Se}(x)$, ¿es creciente o decreciente? ¿Cree que $\mathrm{Se}(x) = 0$ para $x > 0$? Compruebe sus respuestas graficando la función $\mathrm{Se}(x)$ para $0 \le x \le 25$.

b. Explore la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor lo hace?

76. Función error La función

$$\mathrm{erf}\,(x) = \int_0^{x} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt,$$

denominada *función error*, tiene aplicaciones importantes en probabilidad y estadística.

T **a.** Trace la gráfica de la función error para $0 \le x \le 25$.

b. Explore la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt.$$

Si converge, ¿a qué valor parece hacerlo? Verá cómo confirmar su estimación en el ejercicio 41 de la sección 15.4.

77. Función de distribución normal La función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

se denomina *función de densidad normal* con media μ y desviación estándar σ. El número μ indica dónde está centrada la distribución, y σ mide la "dispersión" alrededor de la media.

De la teoría de probabilidad, se sabe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

En lo que sigue, sea $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

T **a.** Dibuje la gráfica de f. Determine los intervalos en los que f es creciente, los intervalos en los que f es decreciente y los valores extremos locales, así como dónde ocurren.

b. Evalúe

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

para $n = 1, 2, 3$.

c. Dé un argumento convincente de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

(*Sugerencia:* Demuestre que $0 < f(x) < e^{-x/2}$ para $x > 1$ y para $b > 1$,

$$\int_b^{\infty} e^{-x/2}\,dx \rightarrow 0 \quad \text{como} \quad b \rightarrow \infty.)$$

78. Demuestre que si $f(x)$ es integrable en todo intervalo de números reales y a y b son números reales con $a < b$, entonces

a. $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ convergen si y sólo si $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_b^{\infty} f(x)\,dx$ convergen.

b. $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$ cuando las integrales incluidas convergen.

EXPLORACIÓN CON COMPUTADORA

En los ejercicios 79 a 82, utilice un SAC para explorar las integrales para diferentes valores de p (donde se incluyen números no enteros). ¿Para cuáles valores de p converge la integral? ¿Cuál es el valor de la integral cuando converge? Trace la gráfica del integrando para varios valores de p.

79. $\int_0^e x^p \ln x\, dx$

80. $\int_e^\infty x^p \ln x\, dx$

81. $\int_0^\infty x^p \ln x\, dx$

82. $\int_{-\infty}^\infty x^p \ln |x|\, dx$

Capítulo 8 Preguntas de repaso

1. ¿Cuál es la fórmula para la integración por partes? ¿De dónde surge? ¿Por qué la podría necesitar?
2. Cuando se aplica la fórmula de integración por partes, ¿cómo se selecciona la u y dv? ¿Cómo se aplica la integración por partes a una integral de la forma $\int f(x)\, dx$?
3. Si un integrando es un producto de la forma $\operatorname{sen}^n x \cos^m x$, donde m y n son enteros no negativos, ¿cómo evalúa la integral? Dé un ejemplo específico de cada caso.
4. ¿Qué sustituciones se hacen para evaluar integrales de sen mx sen nx, sen mx cos nx y cos mx cos nx? Dé un ejemplo de cada caso.
5. ¿Qué sustituciones se utilizan, en ocasiones, para transformar integrales que incluyen $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ en integrales que puedan evaluarse de manera directa? Dé un ejemplo de cada caso.
6. ¿Qué restricciones puede poner sobre las variables que se incluyen en las tres sustituciones trigonométricas básicas para asegurar que las sustituciones son reversibles (tengan inversas)?
7. ¿Cuál es el objetivo del método de las fracciones parciales?
8. Cuando el grado de un polinomio $f(x)$ es menor que el grado de un polinomio $g(x)$, ¿cómo escribe $f(x)/g(x)$ como una suma de fracciones parciales si $g(x)$
   a. es un producto de factores lineales distintos?
   b. consiste de un factor lineal repetido?
   c. contiene un factor cuadrático irreducible?

   ¿Qué se debe hacer si el grado de f *no* es menor que el grado de g?
9. ¿Cómo se utilizan las tablas típicas de integrales? ¿Qué haría usted si una integral particular que quiere evaluar no está en la tabla?
10. ¿Qué es una fórmula de reducción? ¿Cómo se deducen las fórmulas de reducción típicas? ¿Cómo se utilizan las fórmulas de reducción? Dé un ejemplo.
11. Usted colabora para elaborar un breve manual sobre cómo hacer integración numérica y escribe acerca de la regla del trapecio. **(a)** ¿Qué diría acerca de la regla y cómo usarla? ¿Cómo se logra una precisión requerida? **(b)** ¿Qué diría si escribiera acerca de la regla de Simpson?
12. ¿Cómo se comparan los méritos relativos de la regla de Simpson y los de la regla del trapecio?
13. ¿Qué es una integral impropia del tipo I? ¿Del tipo II? ¿Cómo se definen los valores de los diferentes tipos de integrales impropias? Dé ejemplos.
14. ¿Qué criterios están disponibles para determinar la convergencia y la divergencia de integrales impropias que no pueden evaluarse de manera directa? Dé ejemplos de su uso.

Capítulo 8 Ejercicios de práctica

Integración por partes

Evalúe las integrales en los ejercicios 1 a 8 por medio de integración por partes.

1. $\int \ln (x + 1)\, dx$

2. $\int x^2 \ln x\, dx$

3. $\int \tan^{-1} 3x\, dx$

4. $\int \cos^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) dx$

5. $\int (x + 1)^2 e^x\, dx$

6. $\int x^2 \operatorname{sen}(1 - x)\, dx$

7. $\int e^x \cos 2x\, dx$

8. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$

Fracciones parciales

En los ejercicios 9 a 28, evalúe las integrales. Tal vez sea necesario utilizar primero una sustitución.

9. $\int \frac{x\, dx}{x^2 - 3x + 2}$

10. $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 4x + 3}$

11. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^2}$

12. $\int \frac{x + 1}{x^2(x - 1)} dx$

13. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$

14. $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 6}$

15. $\int \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^3 + x} dx$

16. $\int \frac{4x\, dx}{x^3 + 4x}$

17. $\int \frac{v + 3}{2v^3 - 8v} dv$

18. $\int \frac{(3v - 7)\, dv}{(v - 1)(v - 2)(v - 3)}$

19. $\int \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 3}$

20. $\int \frac{t\, dt}{t^4 - t^2 - 2}$

21. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x - 2} dx$

22. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx$

23. $\int \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 4x + 3} dx$

24. $\int \frac{2x^3 + x^2 - 21x + 24}{x^2 + 2x - 8} dx$

25. $\int \frac{dx}{x\left(3\sqrt{x + 1}\right)}$

26. $\int \frac{dx}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}$

27. $\int \frac{ds}{e^s - 1}$

28. $\int \frac{ds}{\sqrt{e^s + 1}}$

Sustituciones trigonométricas

En los ejercicios 29 a 32, evalúe las integrales **(a)** sin utilizar una sustitución trigonométrica y **(b)** por medio de una sustitución trigonométrica.

29. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{16 - y^2}}$

30. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

31. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4 - x^2}$

32. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$

En los ejercicios 33 a 36, evalúe las integrales.

33. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{9 - x^2}$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{9 - x^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

Integrales trigonométricas

Evalúe las integrales de los ejercicios 37 a 44.

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$

38. $\displaystyle\int \cos^5 x \operatorname{sen}^5 x\,dx$

39. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^2 x\,dx$

40. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^3 x\,dx$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5\theta \cos 6\theta\,d\theta$

42. $\displaystyle\int \cos 3\theta \cos 3\theta\,d\theta$

43. $\displaystyle\int \sqrt{1 + \cos(t/2)}\,dt$

44. $\displaystyle\int e^t\sqrt{\tan^2 e^t + 1}\,dt$

Integración numérica

45. De acuerdo con la fórmula para la cota del error para la regla de Simpson, ¿cuántos subintervalos utilizaría para asegurar que el valor de la estimación de

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$

por medio de la regla de Simpson tenga un error absoluto no mayor de 10^{-4}? (Recuerde que para la regla de Simpson el número de subintervalos tiene que ser par).

46. Un cálculo rápido muestra que si $0 \le x \le 1$, entonces la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{1 + x^4}$ está entre 0 y 8. Con base en esto, si utiliza la regla del trapecio, ¿aproximadamente cuántas subdivisiones necesitaría para aproximar la integral de f desde 0 hasta 1 con un error absoluto no mayor de 10^{-3}?

47. Un cálculo directo indica que

$$\int_0^{\pi} 2\operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi.$$

¿Qué tan cercana es la aproximación de la regla del trapecio con $n = 6$? ¿Con la regla de Simpson con $n = 6$? Inténtelo y averígüelo.

48. Usted planea utilizar la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

con una magnitud de error menor que 10^{-5}. Usted determinó que $|f^{(4)}(x)| \le 3$ en todo el intervalo de integración. ¿Cuántos subintervalos debe utilizar para asegurar la precisión que se requiere? (Recuerde que para la regla de Simpson el número tiene que ser par).

49. Temperatura media Calcule el valor promedio de la función de temperatura

$$f(x) = 37\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right) + 25$$

para un año de 365 días. Ésta es una manera de estimar la temperatura media anual del aire en Fairbanks, Alaska. La cifra oficial del Servicio Meteorológico de Estados Unidos, un promedio numérico de la media normal diaria del aire durante el año, es de 25.7 °F, la cual es ligeramente mayor que el valor promedio de $f(x)$.

50. Calor específico de un gas El calor específico C_v es la cantidad de calor requerido para elevar 1 °C la temperatura de una masa de gas dada con volumen constante; se mide en unidades de cal/grado-gramo (calorías por grado gramo molecular). La capacidad calorífica del oxígeno depende de su temperatura T y satisface la fórmula

$$C_v = 8.27 + 10^{-5}(26T - 1.87T^2).$$

Determine el valor promedio de C_v para $20° \le T \le 675$ °C y la temperatura en la que se alcanza.

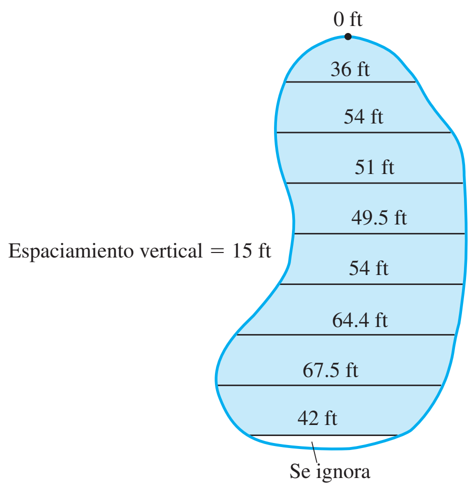
51. Eficiencia de gasolina La computadora de un automóvil da una lectura digital del consumo de gasolina en galones por hora. Durante un viaje, un pasajero registró el consumo de gasolina cada 5 minutos durante una hora completa de viaje.

Tiempo	Gal/h	Tiempo	Gal/h
0	2.5	35	2.5
5	2.4	40	2.4
10	2.3	45	2.3
15	2.4	50	2.4
20	2.4	55	2.4
25	2.5	60	2.3
30	2.6		

a. Utilice la regla del trapecio para aproximar el consumo total de gasolina durante la hora.

b. Si el automóvil recorre 60 millas en la hora, ¿cuál fue la eficiencia de la gasolina (en millas por galón) para esa parte del recorrido?

52. Un nuevo estacionamiento Para satisfacer la demanda de estacionamiento, su ciudad destina el área que se muestra. Como ingeniero de la ciudad, el consejo del pueblo le ha pedido que determine si el lote puede construirse con $11,000. El costo para limpiar el terreno será de $0.10 por ft^2, mientras que pavimentar el lote cuesta $2.00 por ft^2. Utilice la regla de Simpson para determinar si el trabajo puede realizarse con los $11,000.



Integrales impropias

Evalúe las integrales impropias de los ejercicios 53 a 62.

53. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

54. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$

55. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dy}{(y-1)^{2/3}}$

56. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{d\theta}{(\theta+1)^{3/5}}$

57. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{2\, du}{u^2-2u}$

58. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3v-1}{4v^3-v^2}\, dv$

59. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\, dx$

60. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{3x}\, dx$

61. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+9}$

62. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{4\, dx}{x^2+16}$

¿Cuáles de las integrales impropias en los ejercicios 63 a 68 convergen y cuáles divergen?

63. $\displaystyle\int_6^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$

64. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos u\, du$

65. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln z}{z}\, dz$

66. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$

67. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2\, dx}{e^x+e^{-x}}$

68. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Integraciones diversas

Evalúe las integrales en los ejercicios 69 a 116. Las integrales aparecen en orden aleatorio.

69. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$

70. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{4-x^2}\, dx$

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}}$

73. $\displaystyle\int \frac{2-\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

75. $\displaystyle\int \frac{9\, dv}{81-v^4}$

76. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x-1)^2}$

77. $\displaystyle\int \theta\cos(2\theta+1)\, d\theta$

78. $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{x^2-2x+1}$

79. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}$

80. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 4x}\, dx$

81. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2-x}}$

82. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\, dv$

83. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+2}$

84. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$

85. $\displaystyle\int \frac{z+1}{z^2(z^2+4)}\, dz$

86. $\displaystyle\int x^3e^{(x^2)}\, dx$

87. $\displaystyle\int \frac{t\, dt}{\sqrt{9-4t^2}}$

88. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\, dx$

89. $\displaystyle\int \frac{e^t\, dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

90. $\displaystyle\int \tan^3 t\, dt$

91. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln y}{y^3}\, dy$

92. $\displaystyle\int \frac{\cot v\, dv}{\ln \operatorname{sen} v}$

93. $\displaystyle\int e^{\ln\sqrt{x}}\, dx$

94. $\displaystyle\int e^\theta\sqrt{3+4e^\theta}\, d\theta$

95. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 5t\, dt}{1+(\cos 5t)^2}$

96. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v}-1}}$

97. $\displaystyle\int \frac{dr}{1+\sqrt{r}}$

98. $\displaystyle\int \frac{4x^3-20x}{x^4-10x^2+9}\, dx$

99. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$

100. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\, dx$

101. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1+x^3}\, dx$

102. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{(1+x)^3}\, dx$

103. $\displaystyle\int \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$

104. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{1+x}}\, dx$

105. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}\, dx$

106. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\, dx$

107. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x+x\ln x}\, dx$

108. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}\, dx$

109. $\displaystyle\int \frac{x^{\ln x}\ln x}{x}\, dx$

110. $\displaystyle\int (\ln x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\ln(\ln x)}{x}\right] dx$

111. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^4}}\, dx$

112. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\, dx$

113. **a.** Demuestre que $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$.

b. Utilice el inciso (a) para evaluar

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\, dx.$$

114. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\, dx$

115. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

116. $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx$

Capítulo 8 Ejercicios adicionales y avanzados

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 6.

1. $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

3. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{y}\, dy$

5. $\displaystyle\int \frac{dt}{t - \sqrt{1 - t^2}}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4}$

En los ejercicios 7 y 8, evalúe los límites.

7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \int_{x}^{1} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

En los ejercicios 9 y 10, evalúe los límites; luego identifíquelos con integrales definidas y evalúe las integrales.

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$

Aplicaciones

11. **Determinación de longitud de arco** Determine la longitud de la curva

$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}\, dt, \quad 0 \le x \le \pi/4.$$

12. **Determinación de longitud de arco** Determine la longitud de la curva $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le 1/2$.

13. **Determinación de un volumen** La región en el primer cuadrante que está encerrada por el eje x y la curva $y = 3x\sqrt{1 - x}$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

14. **Determinación de un volumen** La región en el primer cuadrante que está encerrada por el eje x, la curva $y = 5/\left(x\sqrt{5 - x}\right)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

15. **Determinación de un volumen** La región en el primer cuadrante que está encerrada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = 1$ se hace girar alrededor del eje y para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

16. **Determinación de un volumen** La región en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la curva $y = e^x - 1$, por abajo por el eje x y a la derecha por la recta $x = \ln 2$ se hace girar alrededor de la recta $x = \ln 2$ para generar un sólido. Determine el volumen del sólido.

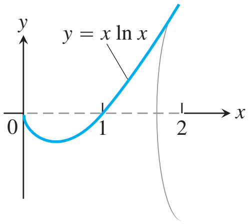
17. **Determinación de un volumen** Sea R la región "triangular" en el primer cuadrante que está acotada por arriba por la recta $y = 1$, por abajo por la curva $y = \ln x$, y a la izquierda por la recta $x = 1$. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor de
a. el eje x. **b.** la recta $y = 1$.

18. **Determinación de un volumen** (*Continuación del ejercicio 17*). Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región R alrededor de
a. el eje y. **b.** la recta $y = 1$.

19. **Determinación de un volumen** La región entre el eje x y la curva

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln x, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

se hace girar alrededor del eje x para generar el sólido que se ilustra a continuación.
a. Demuestre que f es continua en $x = 0$.
b. Determine el volumen del sólido



20. **Determinación de un volumen** La región infinita acotada por los ejes coordenados y la curva $y = -\ln x$ en el primer cuadrante se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen de este último.

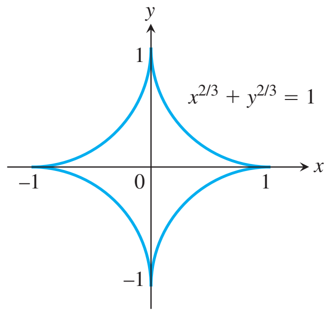
21. **Centroide de una región** Determine el centroide de la región en el primer cuadrante que está acotada abajo por el eje x, arriba por la curva $y = \ln x$, y a la derecha por la recta $x = e$.

22. **Centroide de una región** Determine el centroide de la región en el plano encerrada por las curvas $y = \pm(1 - x^2)^{-1/2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

23. **Longitud de una curva** Determine la longitud de la curva $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = e$.

24. **Determinación del área de una superficie** Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva del ejercicio 23 alrededor del eje y.

25. **Superficie generada por una astroide** La gráfica de la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ es una *astroide* (véase la figura). Determine el área de la superficie generada al hacer girar la curva alrededor del eje x.



26. **Longitud de una curva** Determine la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt, \qquad 1 \le x \le 16.$$

27. ¿Para qué valor o valores de a

$$\int_1^\infty \left(\frac{ax}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}\right) dx$$

converge? Evalúe la(s) integral(es) correspondiente(s).

28. Para cada $x > 0$, sea $G(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, dt$. Demuestre que $xG(x) = 1$ para toda $x > 0$.

29. **Área infinita y volumen finito** ¿Qué valores de p tienen la siguiente propiedad: el área de la región entre la curva $y = x^{-p}$, $-1 \le x < \infty$, y el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje x es finito?

30. **Área infinita y volumen finito** ¿Qué valores de p tienen la siguiente propiedad? El área de la región en el primer cuadrante encerrada por la curva $y = x^{-p}$, el eje y, la recta $x = 1$ y el intervalo $[0, 1]$ en el eje x es infinita, pero el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de uno de los ejes coordenados es finito.

La función gamma y la fórmula de Stirling

La función gamma de Euler $\Gamma(x)$ ("gamma de x"; Γ es la g mayúscula griega) utiliza una integral para ampliar la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. La fórmula es

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt, \quad x > 0.$$

Para cada x positiva, el número $\Gamma(x)$ es la integral de $t^{x-1}e^{-t}$ con respecto a t desde 0 hasta ∞. La figura 8.21 presenta la gráfica de Γ cerca del origen. Verá cómo calcular $\Gamma(1/2)$ si hace el ejercicio adicional 23 en el capítulo 14.

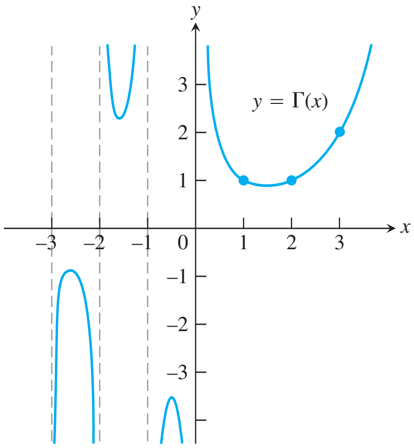


FIGURA 8.21 La función gamma de Euler, $\Gamma(x)$, es una función continua de x, cuyo valor en cada entero positivo $n + 1$ es $n!$. La fórmula por medio de una integral definida para Γ es válida sólo para $x > 0$, pero puede extenderse Γ a valores negativos no enteros de x con la fórmula $\Gamma(x) = (\Gamma(x + 1))/x$, que es tema del ejercicio 31.

31. Si n es un entero no negativo, $\Gamma(n + 1) = n!$

a. Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

b. Después, aplique integración por partes a la integral para $\Gamma(x + 1)$ para demostrar que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. Esto da

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6 \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n\,\Gamma(n) = n! \end{aligned} \tag{1}$$

c. Utilice inducción matemática para verificar la ecuación (1) para todo entero no negativo n.

32. Fórmula de Stirling El matemático escocés James Stirling (1692-1770) demostró que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\,\Gamma(x) = 1,$$

así que, para x grande,

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(1 + \epsilon(x)), \qquad \epsilon(x) \to 0 \text{ cuando } x \to \infty. \tag{2}$$

Al despreciar $\epsilon(x)$ llegamos a la aproximación

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \qquad \textbf{(Fórmula de Stirling)}. \tag{3}$$

a. Aproximación de Stirling para $n!$ Utilice la ecuación (3) y el hecho de que $n! = n\Gamma(n)$ para demostrar que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \qquad \textbf{(Aproximación de Stirling)}. \tag{4}$$

Como verá, si resuelve el ejercicio 104 de la sección 10.1, la ecuación (4) lleva a la aproximación

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}. \tag{5}$$

T **b.** Compare el valor de su calculadora para $n!$ con el valor dado por la aproximación de Stirling para $n = 10, 20, 30, \ldots$, tanto como su calculadora lo permita.

T **c.** Un refinamiento de la ecuación (2) da

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)}(1 + \epsilon(x))$$

o

$$\Gamma(x) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{1/(12x)},$$

lo cual nos indica que

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\, e^{1/(12n)}. \tag{6}$$

Compare los valores dados por su calculadora, por la aproximación de Stirling y por la ecuación (6) para 10!

Integración tabular

La técnica de integración tabular también se aplica a integrales de la forma $\int f(x)g(x)\,dx$ cuando ninguna de las funciones puede derivarse de manera repetida hasta convertirse en cero. Por ejemplo, para evaluar

$$\int e^{2x} \cos x\,dx$$

iniciamos, como antes, con una tabla que lista las derivadas sucesivas de e^{2x} y las integrales de cos x:

e^{2x} **y sus derivadas**		**cos x y sus integrales**
e^{2x}	$(+)$	$\cos x$
$2e^{2x}$	$(-)$	$\operatorname{sen} x$
$4e^{2x}$	$(+)$	$-\cos x$ ← *Deténgase aquí:* El renglón es el mismo que el primero, salvo por las constantes multiplicativas (4 a la izquierda, −1 a la derecha).

Detenemos la derivación y la integración tan pronto como alcancemos un renglón que sea igual al primero, excepto por constantes multiplicativas. Interpretamos la tabla diciendo que

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = +(e^{2x}\operatorname{sen} x) - (2e^{2x}(-\cos x)) + \int (4e^{2x})(-\cos x)\,dx.$$

Tomamos los productos con su signo, unidos por las flechas diagonales, y una integral con su signo para la última flecha horizontal. Al transponer la integral de la derecha al lado izquierdo se obtiene

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x$$

o bien,

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x}{5} + C,$$

después de dividir entre 5 y sumar la constante de integración.

Utilice la integración tabular para evaluar las integrales en los ejercicios 33 a 40.

33. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ **34.** $\int e^{3x}\operatorname{sen} 4x\,dx$

35. $\int \operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x\,dx$ **36.** $\int \cos 5x\operatorname{sen} 4x\,dx$

37. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ **38.** $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

39. $\int \ln(ax)\,dx$ **40.** $\int x^2\ln(ax)\,dx$

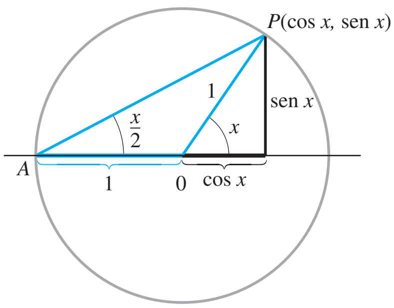
La sustitución $z = \tan(x/2)$

La sustitución

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{7}$$

reduce el problema de integración a una expresión racional de sen x, y cos x a un problema de integración de una función racional de z. Esto a la vez puede integrarse por medio de fracciones parciales.

Con base en la siguiente figura



es posible leer la relación

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

Por último, $x = 2\tan^{-1} z$, por lo que

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{8}$$

y

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}. \tag{9}$$

Finalmente, $x = 2\tan^{-1} z$,

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{10}$$

Ejemplos

a.
$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx = \int\frac{1+z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$= \int dz = z + C$$
$$= \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b.
$$\int\frac{1}{2+\operatorname{sen} x}dx = \int\frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$= \int\frac{dz}{z^2+z+1} = \int\frac{dz}{(z+(1/2))^2+3/4}$$
$$= \int\frac{du}{u^2+a^2}$$
$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C$$

Utilice las sustituciones de las ecuaciones (7) a (10) para evaluar las integrales en los ejercicios 41 a 48. Integrales como éstas surgen en el cálculo de la velocidad angular promedio del eje secundario de una junta universal cuando los ejes primario y secundario no están alineados.

41. $\int\frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$ **42.** $\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$

43. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ **44.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{1-\cos x}$

45. $\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ **46.** $\int_{\pi/2}^{2\pi/3}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$

47. $\int\frac{dt}{\operatorname{sen} t-\cos t}$ **48.** $\int\frac{\cos t\,dt}{1-\cos t}$

Utilice la sustitución $z = \tan(\theta/2)$ para evaluar las integrales de los ejercicios 49 y 50.

49. $\int\sec\theta\,d\theta$ **50.** $\int\csc\theta\,d\theta$

Capítulo 8 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo de Mathematica/Maple

Aproximaciones de Riemann, del trapecio y de Simpson

Parte I: Visualice el error en el que se incurre al usar sumas de Riemann para aproximar el área debajo de una curva.

Parte II: Construya una tabla de valores y calcule la magnitud relativa del error como una función del tamaño de paso Δx.

Parte III: Investigue el efecto de la función derivada sobre el error.

Partes IV y **V**: Aproximaciones por medio de trapecios.

Parte VI: Aproximaciones por medio de la regla de Simpson.

Juegos de elección: Exploración de la técnica probabilística Monte Carlo para integración numérica
De forma gráfica, explore el método Monte Carlo para aproximar integrales definidas.

Cálculo de probabilidades con integrales impropias
Más exploraciones del método Monte Carlo para la aproximación de integrales definidas.

9

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

INTRODUCCIÓN En la sección 4.7 dimos una introducción a las ecuaciones diferenciales de la forma $dy/dx = f(x)$, donde f está dada y y es una función desconocida de x. Cuando f es una función continua en algún intervalo, encontramos la solución general $y(x)$ por integración: $y = \int f(x)\,dx$. En la sección 7.4 resolvimos ecuaciones diferenciales con variables separables. Tales ecuaciones surgen cuando analizamos, por ejemplo, el crecimiento o el decaimiento exponencial. En este capítulo estudiaremos algunos otros tipos de ecuaciones diferenciales de *primer orden*. Éstas sólo incluyen la primera derivada de una función desconocida.

9.1 Soluciones, campos direccionales y el método de Euler

Iniciamos esta sección considerando la ecuación diferencial que incluye la primera derivada. Después, investigamos los campos direccionales, que dan un enfoque geométrico a las soluciones a tales ecuaciones. En muchos casos, las ecuaciones diferenciales no pueden resolverse mediante la obtención de una fórmula explícita para la solución. Sin embargo, con frecuencia es posible determinar aproximaciones numéricas a las soluciones. Aquí presentamos un método, denominado *método de Euler*, el cual es la base para muchos otros métodos numéricos.

Ecuación diferencial general de primer orden y su solución

Una **ecuación diferencial de primer orden** es una ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

en la que $f(x, y)$ es una función de dos variables definida sobre una región del plano xy. La ecuación es de *primer orden*, ya que sólo incluye la primera derivada dy/dx (y no a derivadas de orden superior). Hacemos notar que las ecuaciones

$$y' = f(x, y) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}y = f(x, y)$$

son equivalentes a la ecuación (1) y que las tres formas se utilizarán de manera indistinta en el texto.

Una **solución** de la ecuación (1) es una función derivable $y = y(x)$ definida en un intervalo I (tal vez infinito) de valores de x, tal que

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

en ese intervalo. Esto es, cuando $y(x)$ y su derivada $y'(x)$ se sustituyen en la ecuación (1), la ecuación resultante es verdadera para todos los valores de x en el intervalo I. La **solución general** para la ecuación diferencial de primer orden es una solución que incluye todas las soluciones posibles. La solución general siempre incluye una constante arbitraria, pero el hecho de que tenga dicha propiedad no significa que sea una solución general. Esto es, una solución puede incluir una constante arbitraria sin ser la solución general. Establecer que una solución es la solución general requiere resultados más profundos de la teoría de ecuaciones diferenciales, algo que se estudia mejor en un curso más avanzado de cálculo.

EJEMPLO 3 Demuestre que cada miembro de la familia de funciones

$$y = \frac{C}{x} + 2$$

es una solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y)$$

en el intervalo $(0, \infty)$, donde C es cualquier constante.

Solución Derivando $y = C/x + 2$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + 0 = -\frac{C}{x^2}.$$

Necesitamos demostrar que la ecuación diferencial se satisface cuando la sustituimos en las expresiones $(C/x) + 2$, para y y $-C/x^2$ para dy/dx. Esto es, requerimos verificar que para toda $x \in (0, \infty)$,

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right].$$

La última ecuación se obtiene inmediatamente al desarrollar la expresión del lado derecho:

$$\frac{1}{x}\left[2 - \left(\frac{C}{x} + 2\right)\right] = \frac{1}{x}\left(-\frac{C}{x}\right) = -\frac{C}{x^2}.$$

Por lo tanto, para todo valor de C la función $y = C/x + 2$ es una solución de la ecuación diferencial. ■

Como en el caso de hallar antiderivadas, con frecuencia necesitamos una solución *particular*, en vez de la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$. La **solución particular** que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ es la solución $y = y(x)$, cuyo valor es y_0 cuando $x = x_0$. Así, la gráfica de la solución particular pasa por el punto (x_0, y_0) en el plano xy. Un **problema de primer orden con valor inicial** es una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, cuya solución debe satisfacer una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

EJEMPLO 2 Demuestre que la función

$$y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$$

es una solución del problema de primer orden con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y - x, \qquad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Solución La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

es una ecuación diferencial de primer orden con $f(x, y) = y - x$.

En el lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + 1 - \frac{1}{3}e^x\right) = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

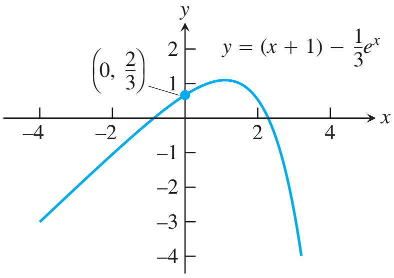


FIGURA 9.1 Gráfica de la solución para el problema con valor inicial en el ejemplo 2.

Del lado derecho de la ecuación:

$$y - x = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x - x = 1 - \frac{1}{3}e^x.$$

La función satisface la condición inicial, ya que

$$y(0) = \left[(x + 1) - \frac{1}{3}e^x\right]_{x=0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La gráfica de la función se presenta en la figura 9.1. ■

Campos direccionales: Visualización de las curvas solución

Cada vez que especificamos una condición inicial $y(x_0) = y_0$ para la solución de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, se requiere que la **curva solución** (gráfica de la solución) pase por el punto (x_0, y_0) y allí tenga pendiente $f(x_0, y_0)$. Es posible representar tales direcciones dibujando pequeños segmentos de recta de pendiente $f(x, y)$ en puntos seleccionados (x, y) de la región del plano xy que constituye el dominio de f. Cada segmento tiene la misma pendiente que la curva solución que pasa por (x, y); por lo tanto, allí es tangente a la curva. El dibujo resultante se denomina **campo direccional** (o **campo de direcciones**) y ofrece una visualización de la forma general de las curvas solución. La figura 9.2a muestra un campo direccional, con un bosquejo de una solución particular en la figura 9.2b. Vemos cómo estos segmentos de recta indican la dirección que la curva solución toma en cada punto por donde pasa.

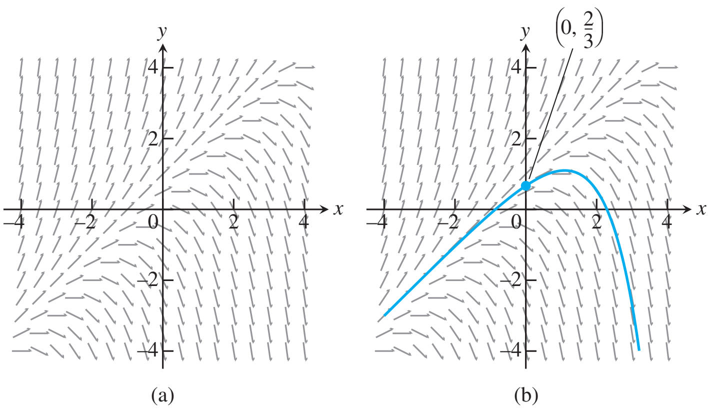
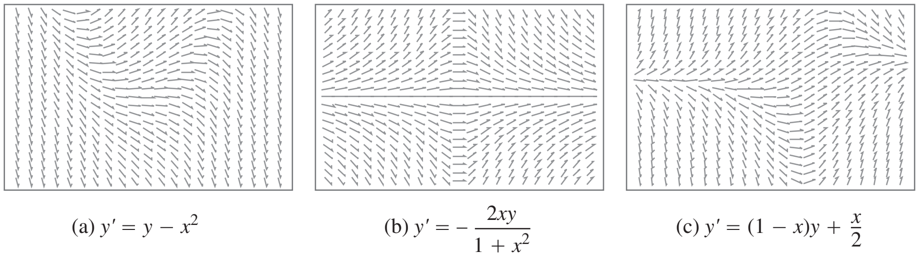


FIGURA 9.2 (a) Campo direccional para $\frac{dy}{dx} = y - x$. (b) Curva solución particular que pasa por el punto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ (ejemplo 2).

La figura 9.3 representa tres campos direccionales y observamos cómo se comportan las curvas solución siguiendo los segmentos de recta tangentes en dichos campos. Las pendientes son útiles porque indican el comportamiento global de la familia de curvas solución para una ecuación diferencial dada. Por ejemplo, el campo direccional en la figura 9.3b revela que toda solución $y(x)$ de la ecuación diferencial especificada en la figura satisface $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = 0$. Veremos que, con frecuencia, el conocimiento global de las curvas solución es fundamental para comprender y predecir resultados en un sistema del mundo real modelado mediante una ecuación diferencial.



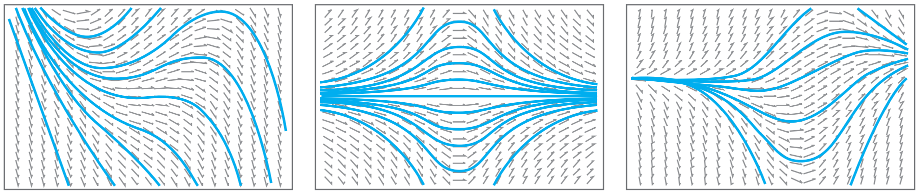


FIGURA 9.3 Campos direccionales (fila superior) y curvas solución seleccionadas (fila inferior). En computadoras, algunas veces los segmentos de pendiente se representan con flechas, como aquí. Sin embargo, no se toma como una indicación de que las pendientes tengan direcciones, porque no es así.

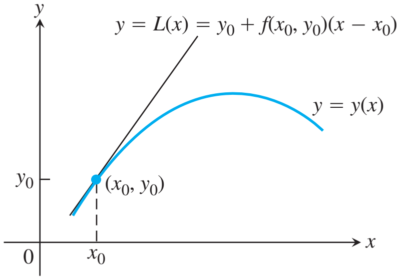


FIGURA 9.4 Linealización $L(x)$ de $y = y(x)$ cuando $x = x_0$.

La construcción de un campo direccional con lápiz y papel puede ser una tarea muy tediosa. Todos nuestros ejemplos fueron generados por medio de una computadora.

Método de Euler

Si no necesitamos o no podemos determinar de manera inmediata una solución *exacta* que dé una fórmula explícita para un problema de valor inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, con frecuencia podemos utilizar una computadora para generar una tabla de valores numéricos aproximados de y para valores de x en un intervalo apropiado. Tal tabla se denomina una **solución numérica** del problema, mientras que el método por medio del cual generamos la tabla se denomina **método numérico**.

Dada una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, es posible aproximar la solución $y = y(x)$ por medio de su linealización

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{o} \qquad L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

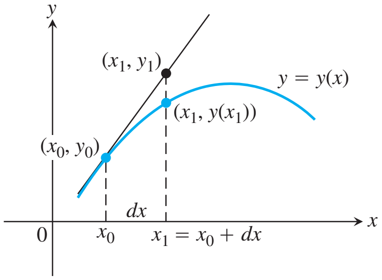


FIGURA 9.5 Primer paso de Euler que aproxima $y(x_1)$ con $y_1 = L(x_1)$.

La función $L(x)$ da una buena aproximación a la solución $y(x)$ en un intervalo pequeño alrededor de x_0 (figura 9.4). La base del método de Euler es colocar una cadena de linealizaciones para aproximar la curva en un espacio mayor. A continuación veremos cómo funciona el método.

Sabemos que el punto (x_0, y_0) está en la curva solución. Suponga que especificamos un nuevo valor para la variable independiente como $x_1 = x_0 + dx$. (Recuerde que $dx = \Delta x$ es la definición de diferenciales). Si el incremento dx es pequeño, entonces

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\, dx$$

es una buena aproximación al valor exacto $y = y(x_1)$. Así, a partir del punto (x_0, y_0), que está *exactamente* en la curva solución, obtuvimos el punto (x_1, y_1), que está muy cercano al punto $(x_1, y(x_1))$ en la curva solución (figura 9.5).

Por medio del punto (x_1, y_1) y la pendiente $f(x_1, y_1)$ de la curva solución en (x_1, y_1) damos un segundo paso. Si hacemos $x_2 = x_1 + dx$, utilizamos la linealización de la curva solución que pasa por (x_1, y_1) para calcular

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\, dx.$$

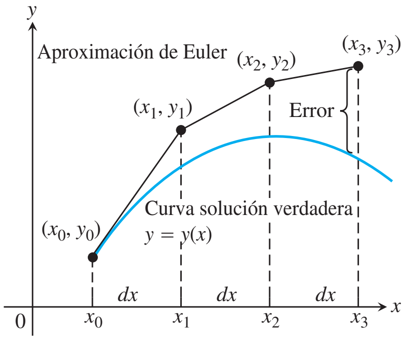


FIGURA 9.6 Tres pasos en la aproximación de Euler a la solución del problema con condición inicial $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Conforme damos más pasos, por lo común los errores se acumulan, pero no en la forma exagerada en la que se muestra aquí.

Lo anterior da la siguiente aproximación (x_2, y_2) para valores a lo largo de la curva solución $y = y(x)$ (figura 9.6). Si continuamos de esta manera, damos un tercer paso desde el punto (x_2, y_2) con pendiente $f(x_2, y_2)$ para obtener la tercera aproximación

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\, dx,$$

y así continuamos de forma sucesiva. Literalmente, construimos una aproximación a una de las soluciones siguiendo la dirección del direccional de la ecuación diferencial.

Los pasos en la figura 9.6 se dibujaron grandes para ilustrar el proceso de construcción, de manera que la aproximación parece muy burda. En la práctica, dx sería suficientemente pequeña para hacer que la curva en negro sea muy cercana a la curva en naranja y dé una buena aproximación.

EJEMPLO 3 Determine las primeras tres aproximaciones y_1, y_2 y y_3 por medio del método de Euler para el problema con valor inicial

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

iniciando en $x_0 = 0$ y $dx = 0.1$.

Solución Iniciamos con los valores $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Ahora determinamos los valores de x para los cuales la aproximación de Euler toma: $x_1 = x_0 + dx = 0.1$, $x_2 = x_0 + 2dx = 0.2$ y $x_3 = x_0 + 3dx = 0.3$. Entonces encontramos

$$\begin{aligned}
\textit{Primero:}\quad y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\
&= y_0 + (1 + y_0)\,dx \\
&= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \\
\textit{Segundo:}\quad y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\
&= y_1 + (1 + y_1)\,dx \\
&= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \\
\textit{Tercero:}\quad y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,dx \\
&= y_2 + (1 + y_2)\,dx \\
&= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662
\end{aligned}$$

■

El proceso paso a paso que se utilizó en el ejemplo 3 puede continuarse con facilidad. Por medio de valores igualmente espaciados para la variable independiente en la tabla para la solución numérica y generando n de ellos, se establece que

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + dx \\
x_2 &= x_1 + dx \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + dx.
\end{aligned}$$

Después se calculan las aproximaciones a la solución,

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,dx \\
y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,dx \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,dx.
\end{aligned}$$

El número de n pasos, puede ser tan grande como se quiera, pero los errores pueden acumularse si n es demasiado grande.

El método de Euler es fácil de implementar en una computadora o en una calculadora. Un programa de computadora genera una tabla de soluciones numéricas para un problema de valor inicial, lo cual nos permite introducir x_0 y y_0, el número de pasos n y el tamaño de paso dx. Después calcula los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de manera iterativa, como se acaba de describir.

Al resolver la ecuación separable del ejemplo 3, encontramos que la solución exacta al problema con valor inicial es $y = 2e^x - 1$. Utilicemos dicha información en el ejemplo 4.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Leonhard Euler
(1703–1783)

EJEMPLO 4 Utilice el método de Euler para resolver

$$y' = 1 + y, \qquad y(0) = 1,$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, iniciando en $x_0 = 0$ y tomando **(a)** $dx = 0.1$ y **(b)** $dx = 0.05$. Compare las aproximaciones con los valores de la solución exacta $y = 2e^x - 1$.

Solución

(a) Utilizamos una computadora para generar los valores aproximados de la tabla 9.1. La columna “Error” se obtuvo restando los valores de Euler de los valores obtenidos con la solución exacta, ambos sin redondear. Después, todas las entradas se redondearon a cuatro decimales.

TABLA 9.1 Solución de Euler de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño del paso $dx = 0.1$

x	y (Euler)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.1	1.2	1.2103	0.0103
0.2	1.42	1.4428	0.0228
0.3	1.662	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

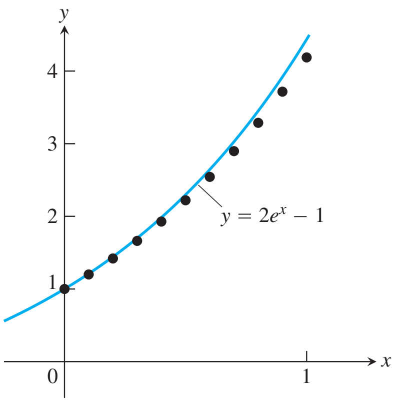


FIGURA 9.7 La gráfica de $y = 2e^x - 1$ sobrepuesta en un diagrama de las aproximaciones de Euler que se muestran en la tabla 9.1 (ejemplo 4).

Cuando se llega a $x = 1$ (después de 10 pasos), el error es aproximadamente el 5.6% de la solución exacta. En la figura 9.7 se presenta una gráfica de la curva de la solución exacta con un diagrama de dispersión de los puntos de Euler de la tabla 9.1.

(b) Una forma de tratar de reducir el error es disminuir el tamaño de paso. La tabla 9.2 presenta los resultados y sus comparaciones con las soluciones exactas cuando disminuimos el tamaño de paso a 0.05, al duplicar el número de pasos a 20. Como en la tabla 9.1, todos los cálculos se realizan antes de redondear. Esta vez, cuando se llega a $x = 1$, el error relativo es sólo de alrededor del 2.9 por ciento. ■

En el ejemplo 4 podríamos intentar reducir el tamaño de paso aún más para obtener una mayor precisión. Sin embargo, cada cálculo adicional no sólo requiere de más tiempo de cómputo, sino que también, algo más importante, agrega errores de redondeo debido a las representaciones aproximadas de los números en la computadora.

El análisis del error y la investigación de los métodos para reducirlo cuando hacemos cálculos numéricos son importantes, pero son apropiados en cursos más avanzados. Existen métodos numéricos más precisos que el método de Euler, como veremos en un estudio posterior de ecuaciones diferenciales.

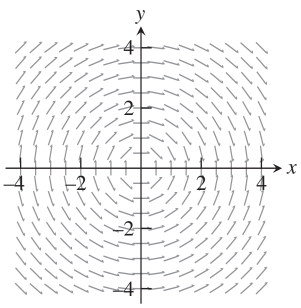
TABLA 9.2 Solución de Euler de $y' = 1 + y$, $y(0) = 1$, tamaño de paso $dx = 0.5$

x	y (Euler)	y (exacta)	Error
0	1	1	0
0.05	1.1	1.1025	0.0025
0.10	1.205	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0340
0.50	2.2578	2.2974	0.0397
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0853
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

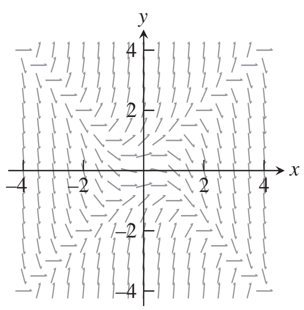
Ejercicios 9.1

Campos direccionales

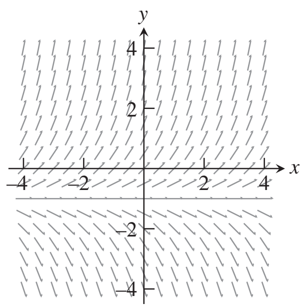
En los ejercicios 1 a 4, relacione cada ecuación diferencial con su campo direccional eligiendo entre las gráficas que aparecen a continuación.



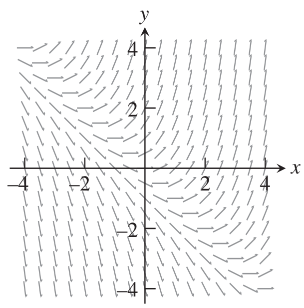
(a)



(b)



(c)



(d)

1. $y' = x + y$

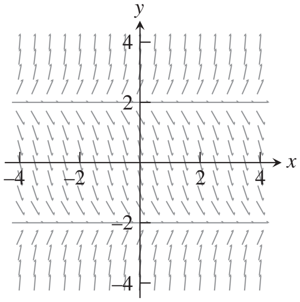
2. $y' = y + 1$

3. $y' = -\frac{x}{y}$

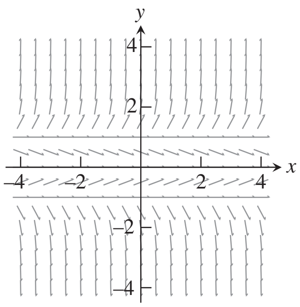
4. $y' = y^2 - x^2$

En los ejercicios 5 y 6, copie los campos direccionales y elabore un bosquejo de alguna de las curvas solución.

5. $y' = (y + 2)(y - 2)$



6. $y' = y(y + 1)(y - 1)$



Ecuaciones integrales

En los ejercicios 7 a 10, escriba una ecuación diferencial de primer orden y una condición inicial para y.

7. $y = -1 + \int_1^x (t - y(t))\, dt$

8. $y = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

9. $y = 2 - \int_0^x (1 + y(t)) \operatorname{sen} t\, dt$

10. $y = 1 + \int_0^x y(t)\, dt$

Aplicación del método de Euler

En los ejercicios 11 a 16, utilice el método de Euler para calcular las primeras tres aproximaciones al problema de valor inicial dado para el tamaño de paso (incremento) que se indica. Calcule la solución exacta e investigue la precisión de sus aproximaciones. Redondee sus resultados a cuatro decimales.

11. $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad dx = 0.5$

12. $y' = x(1 - y), \quad y(1) = 0, \quad dx = 0.2$

13. $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad dx = 0.2$

14. $y' = y^2(1 + 2x), \quad y(-1) = 1, \quad dx = 0.5$

T **15.** $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1$

T **16.** $y' = ye^x, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.5$

17. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(1)$ si $y' = y$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(1)$?

18. Utilice el método de Euler con $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$ si $y' = y/x$ y $y(1) = 2$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?

19. Utilice el método de Euler con $dx = 0.5$ para estimar $y(5)$ si $y' = y^2/\sqrt{x}$ y $y(1) = -1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(5)$?

20. Utilice el método de Euler con $dx = 1/3$ para estimar $y(2)$ si $y' = x \operatorname{sen} y$ y $y(0) = 1$. ¿Cuál es el valor exacto de $y(2)$?

21. Demuestre que la solución del problema con valor inicial

$$y' = x + y, \quad y(x_0) = y_0$$

es

$$y = -1 - x + (1 + x_0 + y_0)\, e^{x - x_0}.$$

22. ¿Qué ecuación integral es equivalente al problema con valor inicial $y' = f(x)$, $y(x_0) = y_0$?

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 23 a 28, obtenga un campo direccional y agréguele gráficas de las curvas solución que pasen por los puntos dados.

23. $y' = y$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$

24. $y' = 2(y - 4)$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 4)$ **c.** $(0, 5)$

25. $y' = y(x + y)$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, -2)$ **c.** $(0, 1/4)$ **d.** $(-1, -1)$

26. $y' = y^2$ con

a. $(0, 1)$ **b.** $(0, 2)$ **c.** $(0, -1)$ **d.** $(0, 0)$

27. $y' = (y - 1)(x + 2)$ con

a. $(0, -1)$ **b.** $(0, 1)$ **c.** $(0, 3)$ **d.** $(1, -1)$

28. $y' = \frac{xy}{x^2 + 4}$ con

a. $(0, 2)$ **b.** $(0, -6)$ **c.** $\left(-2\sqrt{3}, -4\right)$

En los ejercicios 29 y 30, obtenga un campo direccional y elabore la gráfica de la solución particular en el intervalo que se especifica. Utilice un SAC para encontrar la solución general de la ecuación diferencial.

29. Una ecuación logística $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2;$ $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3$

30. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6$

Los ejercicios 31 y 32 no tienen solución explícita en términos de funciones elementales. Utilice un SAC para explorar de manera gráfica cada una de las ecuaciones diferenciales.

31. $y' = \cos(2x - y), \quad y(0) = 2; \quad 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 5$

32. Una ecuación de Gompertz $y' = y(1/2 - \ln y), \quad y(0) = 1/3;$ $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3$

33. Utilice un SAC para determinar las soluciones de $y' + y = f(x)$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$ si $f(x)$ es

a. $2x$ **b.** $\operatorname{sen} 2x$ **c.** $3e^{x/2}$ **d.** $2e^{-x/2} \cos 2x$.

Elabore la gráfica de las cuatro funciones en el intervalo $-2 \le x \le 6$ para comparar los resultados.

34. a. Utilice un SAC para trazar el campo direccional de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

en la región $-3 \le x \le 3$ y $-3 \le y \le 3$.

b. Separe las variables y utilice el integrador de un SAC para determinar la solución general en forma implícita.

c. Por medio del graficador de funciones implícitas de un SAC, trace las curvas solución para los valores de la constante arbitraria $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$.

d. Determine y elabore la gráfica de la solución que satisface la condición inicial $y(0) = -1$.

En los ejercicios 35 a 38, utilice el método de Euler con el tamaño de paso especificado para estimar el valor de la solución en el punto dado, x^*. Determine el valor de la solución exacta en x^*.

35. $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

36. $y' = 2y^2(x - 1), \quad y(2) = -1/2, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 3$

37. $y' = \sqrt{x}/y, \quad y > 0, \quad y(0) = 1, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

38. $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0, \quad dx = 0.1, \quad x^* = 1$

Utilice un SAC para explorar gráficamente cada una de las ecuaciones diferenciales en los ejercicios 39 a 42. Realice los siguientes pasos en sus exploraciones.

a. Trace un campo direccional para la ecuación diferencial en la ventana xy dada.

b. Mediante el solucionado de ecuaciones diferenciales de su SAC, determine la solución general de la ecuación diferencial.

c. Grafique las soluciones para los valores de la constante arbitraria $C = -2, -1, 0, 1, 2$, sobrepuestas en el campo direccional que trazó.

d. Determine y grafique la solución que satisface la condición inicial especificada en el intervalo $[0, b]$.

e. Determine la aproximación numérica de Euler para la solución del problema de valor inicial; para ello, utilice 4 subintervalos del intervalo en x y trace la aproximación de Euler superpuesta sobre la gráfica que hizo en el inciso (d).

f. Repita el inciso (e) para 8, 16 y 32 subintervalos. Trace estas tres aproximaciones superpuestas en la gráfica del inciso (e).

g. Determine el error $((y(\text{exacta}) - y(\text{Euler}))$ en el punto especificado $x = b$ para cada una de sus cuatro aproximaciones. Analice la mejora en el error porcentual.

39. $y' = x + y, \quad y(0) = -7/10; \quad -4 \le x \le 4, \quad -4 \le y \le 4;$ $b = 1$

40. $y' = -x/y, \quad y(0) = 2; \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3;$ $b = 2$

41. $y' = y(2 - y), \quad y(0) = 1/2; \quad 0 \le x \le 4, \ 0 \le y \le 3;$ $b = 3$

42. $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y), \quad y(0) = 2; \quad -6 \le x \le 6, \quad -6 \le y \le 6;$ $b = 3\pi/2$

9.2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es aquella que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

donde P y Q son funciones continuas de x. La ecuación (1) es la **forma estándar** de la ecuación lineal. Como la ecuación de crecimiento/decaimiento exponencial $dy/dx = ky$ (sección 7.4) puede ponerse en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} - ky = 0,$$

vemos que es una ecuación lineal con $P(x) = -k$ y $Q(x) = 0$. La ecuación (1) es *lineal* (en y), ya que y y su derivada dy/dx sólo aparecen a la primera potencia, no se multiplican entre sí y no aparecen como el argumento de una función (tal como $\operatorname{sen} y$, e^y o $\sqrt{dy/dx}$).

EJEMPLO 1 Escriba la siguiente ecuación en forma estándar:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Solución

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{3}{x}y \qquad \text{Dividir entre } x.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{Forma estándar con } P(x) = -3/x \text{ y } Q(x) = x$$

Observe que $P(x)$ es $-3/x$, no $+3/x$. La forma estándar es $y' + P(x)y = Q(x)$, por lo que el signo de menos es parte de la fórmula para $P(x)$. ■

Solución de ecuaciones lineales

Resolvemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

multiplicando ambos lados por una función *positiva* $v(x)$ que transforme el lado izquierdo en la derivada del producto $v(x) \cdot y$. Ahora mostraremos cómo encontrar v, pero primero queremos mostrar cómo, una vez hallada, da la solución que buscamos.

He aquí por qué funciona multiplicar por $v(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

La ecuación original está en la forma estándar

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$

Multiplicar por $y(x)$ positiva.

$$\frac{d}{dx}(v(x) \cdot y) = v(x)Q(x)$$

$v(x)$ se elige para hacer $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v \cdot y)$.

$$v(x) \cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx$$

Integrar con respecto a x.

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx \tag{2}$$

La ecuación (2) expresa la solución de la ecuación (1) en términos de las funciones $v(x)$ y $Q(x)$. A $v(x)$ se le conoce como **factor integrante** para la ecuación (1), ya que su presencia hace que la ecuación se pueda integrar.

¿Por qué en la fórmula no aparece también $P(x)$? Sí lo hace, pero no directamente, en la construcción de la función positiva $v(x)$. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(vy) = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$

Condición impuesta en v

$$v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + Pvy$$

Regla del producto para derivadas

$$y\frac{dv}{dx} = Pvy$$

Se eliminan los términos $v\frac{dy}{dx}$.

Esta última ecuación se cumple si

$$\frac{dv}{dx} = Pv$$

$$\frac{dv}{v} = P\,dx$$

Variables separadas, $v > 0$

$$\int \frac{dv}{v} = \int P\,dx$$

Integrar ambos lados.

$$\ln v = \int P\,dx$$

Como $v > 0$, no necesitamos el valor absoluto de $\ln v$.

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,dx}$$

Tomar exponenciales en ambos lados para despejar v.

$$v = e^{\int P\,dx} \tag{3}$$

Por lo tanto, una fórmula para la solución general de la ecuación (1) está dada por la ecuación (2), donde $v(x)$ está dada por la ecuación (3). Sin embargo, en lugar de memorizar la fórmula, sólo recuerde cómo encontrar el factor integrante una vez que tiene la forma estándar para que $P(x)$ esté identificada de manera correcta. Cualquier antiderivada de P funciona para la ecuación (3).

> Para resolver la ecuación lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por el factor integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

En este procedimiento, cuando integre el producto del lado izquierdo, siempre obtendrá el producto $v(x)y$ del factor integrante y la función solución y por la forma en que se definió v.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0.$$

Solución Primero escribimos la ecuación en la forma estándar (ejemplo 1):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x,$$

de manera que se identifica $P(x) = -3/x$.

El factor integrante es

$$\begin{aligned} v(x) = e^{\int P(x)\,dx} &= e^{\int(-3/x)\,dx} && \text{La constante de integración es 0, de manera que } v \text{ asume un valor tan sencillo como sea posible.} \\ &= e^{-3\ln|x|} \\ &= e^{-3\ln x} && x > 0 \\ &= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}. \end{aligned}$$

Ahora multiplicamos ambos lados de la forma estándar por $v(x)$ e integramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y\right) &= \frac{1}{x^3}\cdot x \\ \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^4}y &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) &= \frac{1}{x^2} && \text{El lado izquierdo es } \frac{d}{dx}(v\cdot y). \\ \frac{1}{x^3}y &= \int \frac{1}{x^2}\,dx && \text{Integrar ambos lados.} \\ \frac{1}{x^3}y &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Al despejar y en esta última ecuación se obtiene la solución general:

$$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + C\right) = -x^2 + Cx^3, \qquad x > 0.$$ ■

EJEMPLO 3 Determine la solución particular de

$$3xy' - y = \ln x + 1, \qquad x > 0,$$

que satisface $y(1) = -2$.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Adrien Marie Legendre (1752–1833)

Solución Con $x > 0$, escribimos la ecuación en la forma estándar:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}.$$

Entonces el factor integrante está dado por

$$v = e^{\int -dx/3x} = e^{(-1/3)\ln x} = x^{-1/3}. \qquad x > 0$$

Así,

$$x^{-1/3}y = \frac{1}{3}\int (\ln x + 1)x^{-4/3}\,dx. \qquad \text{El lado izquierdo es } vy.$$

Al integrar por partes el lado derecho se obtiene

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) + \int x^{-4/3}\,dx + C.$$

Por lo tanto,

$$x^{-1/3}y = -x^{-1/3}(\ln x + 1) - 3x^{-1/3} + C$$

o, al despejar y,

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{1/3}.$$

Cuando $x = 1$ y $y = -2$, esta última ecuación se transforma en

$$-2 = -(0 + 4) + C,$$

por lo que

$$C = 2.$$

Al sustituir el valor de C en la ecuación de y se obtiene la solución particular

$$y = 2x^{1/3} - \ln x - 4.$$ ■

Al resolver la ecuación lineal del ejemplo 2, integramos ambos lados de la ecuación después de multiplicar cada lado por el factor integrante. Sin embargo, es posible reducir la cantidad de trabajo, como en el ejemplo 3, recordando que *siempre* que se integre el lado izquierdo se obtiene el producto $v(x) \cdot y$ del factor integrante por la función solución. Con base en la ecuación (2), esto significa que

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx. \tag{4}$$

Sólo necesitamos integrar el producto del factor integrante $v(x)$ con $Q(x)$ en el lado derecho de la ecuación (1) y luego igualar el resultado con $v(x)y$ para obtener la solución general. Sin embargo, para enfatizar el papel de $v(x)$ en el proceso de solución, en ocasiones seguimos el procedimiento completo, como se ilustró en el ejemplo 2.

Observe que si la función $Q(x)$ es idénticamente cero en la forma estándar, dada por la ecuación (1), la ecuación lineal es separable y se puede resolver con el método de la sección 7.4:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad Q(x) \equiv 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \qquad \text{Separación de variables.}$$

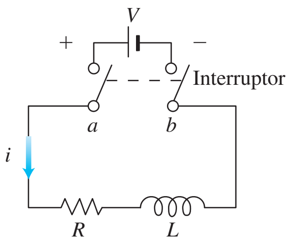


FIGURA 9.8 El circuito RL del ejemplo 4.

Circuitos RL

El diagrama de la figura 9.8 representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms, cuya autoinductancia, mostrada como una bobina de L henries, también es constante. Hay un interruptor cuyas terminales en a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V volts.

La ley de Ohm, $V = RI$, tiene que modificarse para ese circuito. La ecuación correcta asociada para la resistencia y la inductancia es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V, \tag{5}$$

donde i es la intensidad de la corriente en amperes y t es el tiempo en segundos. Si resolvemos esta ecuación, podemos predecir cómo fluye la corriente después de que se cierra el circuito.

EJEMPLO 4 El interruptor del circuito RL, en la figura 9.8, se cierra en el instante $t = 0$. ¿Cómo fluye la corriente como una función del tiempo?

Solución La ecuación (5) es una ecuación diferencial lineal de primer orden para i como una función de t. Su forma estándar es

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}, \tag{6}$$

y la correspondiente solución, dado que $i = 0$ cuando $t = 0$, es

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}. \tag{7}$$

(Dejamos los cálculos de la solución para que los haga en el ejercicio 28). Como R y L son positivas, $-(R/L)$ es negativo y $e^{-(R/L)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así,

$$\lim_{t\to\infty} i = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}.$$

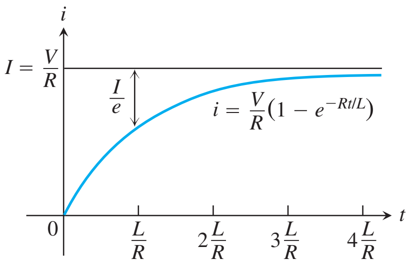


FIGURA 9.9 Crecimiento de la corriente en el circuito RL del ejemplo 4. I es el valor de estado estable de la corriente. El número $t = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. La corriente alcanza un nivel, dentro del 5%, de su valor de estado estable en 3 constantes de tiempo (ejercicio 27).

En cualquier instante dado, la corriente es teóricamente menor que V/R, pero conforme el tiempo pasa se aproxima al **valor de estado estable V/R**. De acuerdo con la ecuación

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

$I = V/R$ es la corriente que fluye en el circuito, si $L = 0$ (es decir, no hay inductancia), o bien, si $di/dt = 0$ (corriente estable, $i =$ constante) (figura 9.9).

La ecuación (7) expresa la solución de la ecuación (6) como la suma de dos términos: una solución de estado estable V/R y una solución transitoria $-(V/R)e^{-(R/L)t}$ que tiende a cero cuando $t \to \infty$. ■

Ejercicios 9.2

Ecuaciones lineales de primer orden

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 1 a 14.

1. $x\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$
2. $e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$
3. $xy' + 3y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}, \quad x > 0$
4. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
5. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$
6. $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$
7. $2y' = e^{x/2} + y$
8. $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$
9. $xy' - y = 2x \ln x$
10. $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

11. $(t-1)^3 \dfrac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t+1, \quad t > 1$

12. $(t+1)\dfrac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \dfrac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

13. $\operatorname{sen}\theta \dfrac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

14. $\tan\theta \dfrac{dr}{d\theta} + r = \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$

Resolución de problemas con valor inicial

Resuelva los problemas con valor inicial de los ejercicios 15 a 20.

15. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3, \quad y(0) = 1$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(2) = 1$

17. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} + y = \operatorname{sen}\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/2) = 1$

18. $\theta\dfrac{dy}{d\theta} - 2y = \theta^3 \sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0, \quad y(\pi/3) = 2$

19. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2(x^2+x)y = \dfrac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1, \quad y(0) = 5$

20. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x, \quad y(0) = -6$

21. Resuelva el problema con valor inicial de crecimiento/decaimiento exponencial para y como función de t, considerando la ecuación diferencial como una ecuación lineal de primer orden con $P(x) = -k$ y $Q(x) = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad (k \text{ constante}), \quad y(0) = y_0$$

22. Resuelva el siguiente problema con valor inicial para u como función de t:

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{m}u = 0 \quad (k \text{ y } m \text{ constantes positivas}), \quad u(0) = u_0$$

a. como una ecuación lineal de primer orden.

b. como una ecuación separable.

Teoría y ejemplos

23. ¿Alguna de las siguientes ecuaciones es correcta? Justifique sus respuestas.

a. $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + C$ **b.** $x\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| + Cx$

24. ¿Alguna de las siguientes ecuaciones es correcta? Justifique sus respuestas.

a. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + C$

b. $\dfrac{1}{\cos x}\displaystyle\int \cos x\,dx = \tan x + \frac{C}{\cos x}$

25. Corriente en un circuito *RL* cerrado ¿Cuántos segundos, después de que se cierra un circuito RL, tardará la corriente i en alcanzar la mitad de su valor de estado estacionario? Observe que el tiempo depende de R y L y no de la cantidad de voltaje que se aplique.

26. Corriente en un circuito *RL* abierto Si en un circuito RL, el interruptor se abre cuando el circuito alcanza su estado estacionario $I = V/R$, el decaimiento de la corriente (graficada a continuación) satisface la ecuación

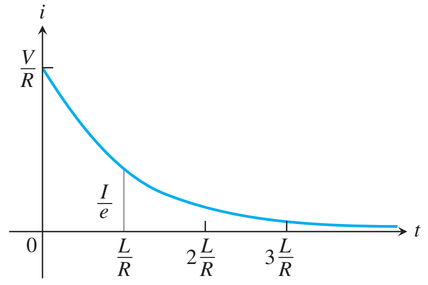
$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

que es la ecuación (5) con $V = 0$.

a. Resuelva la ecuación para expresar i como función de t.

b. ¿Cuánto tiempo después de que se abrió el circuito la corriente caerá a la mitad de su valor original?

c. Demuestre que el valor de la corriente es I/e cuando $t = L/R$. (El significado de este tiempo se explica en el siguiente ejercicio).



27. Constantes de tiempo Los ingenieros llaman al número L/R la *constante de tiempo* del circuito RL de la figura 9.9. El significado de la constante de tiempo es que la corriente alcanzará el 95% de su valor final dentro de 3 constantes de tiempo a partir de que el circuito se cierra (figura 9.9). Así, la constante de tiempo brinda una medida de qué tan rápido un circuito alcanzará su equilibrio.

a. Determine el valor de i en la ecuación (7) que corresponde a $t = 3L/R$ y demuestre que es alrededor del 95% del valor estacionario $I = V/R$.

b. ¿Aproximadamente qué porcentaje de la corriente de estado estable (estacionario) fluirá en el circuito 2 constantes de tiempo a partir de que se cierra el interruptor (esto es, cuando $t = 2L/R$)?

28. Deducción de la ecuación (7) del ejemplo 4

a. Demuestre que la solución de la ecuación

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

es

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}.$$

b. Después, utilice la condición inicial $i(0) = 0$ para determinar el valor de C. Esto completa la deducción de la ecuación (7).

c. Demuestre que $i = V/R$ es una solución de la ecuación (6) y que $i = Ce^{-(R/L)t}$ satisface la ecuación

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0.$$

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

James Bernoulli
(1654−1705)

La **ecuación diferencial de Bernoulli** es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Observe que si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x).$$

Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^2$$

tenemos $n = 2$, de manera que $u = y^{1-2} = y^{-1}$ y $du/dx = -y^{-2}dy/dx$. Entonces, $dy/dx = -y^2\,du/dx = -u^{-2}\,du/dx$. Al sustituir en la ecuación original, se obtiene

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^{-x}u^{-2}.$$

O, de manera equivalente,

$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x}.$$

Esta última ecuación es lineal en la variable dependiente (desconocida) u.

Resuelva las ecuaciones de Bernoulli de los ejercicios 29 a 32.

29. $y' - y = -y^2$

30. $y' - y = xy^2$

31. $xy' + y = y^{-2}$

32. $x^2y' + 2xy = y^3$

9.3 Aplicaciones

Ahora veremos cuatro aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. La primera aplicación analiza un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta mientras está sujeto a una fuerza que se opone al movimiento. La segunda es un modelo de crecimiento de población. La tercera aplicación considera una familia de curvas que intersecan *ortogonalmente* (esto es, en ángulo recto) a cada curva en una segunda familia de curvas. La última aplicación analiza concentraciones químicas que entran y salen de un contenedor. Los modelos incluyen ecuaciones separables o ecuaciones lineales de primer orden.

Movimiento con resistencia proporcional a la velocidad

En algunos casos es razonable suponer que la resistencia encontrada por un objeto en movimiento, tal como un automóvil que se va a detener, es proporcional a la velocidad del objeto. Cuanto más rápido se mueva el objeto, mayor es la resistencia que opone el aire que lo circunda a su avance. Representamos el objeto como una masa m que se mueve a lo largo de una recta coordenada con función de posición s y velocidad v en el instante t. De acuerdo con la segunda ley de Newton para el movimiento, la fuerza de resistencia que se opone al movimiento es

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración} = m\frac{dv}{dt}.$$

Si la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, escribimos

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \qquad \text{o} \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v \qquad (k > 0).$$

Ésta es una ecuación diferencial separable que representa un cambio exponencial. La solución para la ecuación con condición inicial $v = v_0$ en $t = 0$ es (sección 7.4)

$$v = v_0e^{-(k/m)t}. \tag{1}$$

¿Qué podemos aprender de la ecuación (1)? Por una parte, si m es grande, como la masa de un buque minero de 20,000 toneladas en el lago Erie, tardará mucho tiempo para que la velocidad se aproxime a cero (ya que t debe ser grande en el exponente de la ecuación para hacer que kt/m sea suficientemente grande para que v se haga pequeña). Es posible aprender aún más si integramos la ecuación (1) para determinar la posición s como una función del tiempo t.

Suponga que el cuerpo se desliza para detenerse y la única fuerza que actúa sobre él es una resistencia proporcional a su velocidad. ¿Cuánto se desplaza? Para determinarlo, iniciamos con la ecuación (1) y resolvemos el problema con valor inicial

$$\frac{ds}{dt} = v_0e^{-(k/m)t}, \qquad s(0) = 0.$$

Si integramos con respecto a t, obtendremos

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C.$$

Al sustituir $s = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \qquad \text{y} \qquad C = \frac{v_0 m}{k}.$$

Por lo tanto, la posición del cuerpo en el instante t es

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}). \tag{2}$$

Para determinar la distancia que el cuerpo se deslizará, determinamos el límite de $s(t)$ cuando $t \to \infty$. Como $-(k/m) < 0$, sabemos que $e^{-(k/m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, de manera que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \\ &= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}. \end{aligned}$$

Así,

$$\text{Distancia recorrida} = \frac{v_0 m}{k}. \tag{3}$$

El número $v_0 m/k$ es sólo una cota superior (aunque muy útil). Es cierto en la vida en al menos un sentido: si m es grande, el cuerpo se deslizará un gran trecho.

En el sistema inglés, donde el peso se mide en libras, la masa se mide en slugs. Así,

$$\text{Libras} = \text{slugs} \times 32,$$

suponiendo que la constante gravitacional es 32 ft/sec^2.

EJEMPLO 1 Para un patinador de 192 lb, la k en la ecuación (1) es de alrededor de $1/3$ slug/seg y $m = 192/32 = 6$ slugs. ¿Cuánto tardará el patinador en deslizarse de 11 ft/seg (7.5 mph) a 1 ft/seg? ¿Cuánto recorrerá antes de detenerse por completo?

Solución Respondemos la primera pregunta despejando t de la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 11e^{-t/18} &= 1 \\ e^{-t/18} &= 1/11 \qquad \text{Ecuación (1) con } k = 1/3,\ m = 6,\ v_0 = 11,\ v = 1 \\ -t/18 &= \ln(1/11) = -\ln 11 \\ t &= 18 \ln 11 \approx 43 \text{ sec}. \end{aligned}$$

Respondemos la segunda pregunta con la ecuación (3):

$$\begin{aligned} \text{Distancia recorrida} &= \frac{v_0 m}{k} = \frac{11 \cdot 6}{1/3} \\ &= 198 \text{ ft}. \end{aligned}$$

■

Imprecisión del modelo de crecimiento poblacional exponencial

En la sección 7.4 modelamos el crecimiento de la población por medio de la ley de cambio exponencial:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0$$

donde P es la población en el instante t, $k > 0$ es una tasa constante de crecimiento, y P_0 es el tamaño de la población en el instante $t = 0$. En la sección 7.4 encontramos la solución $P = P_0 e^{kt}$ para este modelo.

Para iniciar una valoración del modelo, observe que la ecuación diferencial de crecimiento exponencial indica que

$$\frac{dP/dt}{P} = k \tag{4}$$

TABLA 9.3 Población mundial (a medio año)

Año	Población (en millones)	$\Delta P/P$
1980	4454	$76/4454 \approx 0.0171$
1981	4530	$80/4530 \approx 0.0177$
1982	4610	$80/4610 \approx 0.0174$
1983	4690	$80/4690 \approx 0.0171$
1984	4770	$81/4770 \approx 0.0170$
1985	4851	$82/4851 \approx 0.0169$
1986	4933	$85/4933 \approx 0.0172$
1987	5018	$87/5018 \approx 0.0173$
1988	5105	$85/5105 \approx 0.0167$
1989	5190	

Fuente: U.S. Bureau of the Census (septiembre de 2007): www.census.gov/ipc/www/idb.

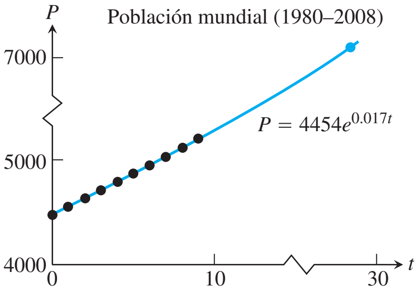


FIGURA 9.10 Observe que el valor de la solución $P = 4454e^{0.017t}$ es 7169 cuando $t = 28$, que es casi un 7% mayor que la población real en 2008.

es constante. Esta razón se denomina **tasa de crecimiento relativo**. Ahora, la tabla 9.3 indica la población mundial, a mitad de año, para los años 1980 a 1989. Tomando $dt = 1$ y $dP \approx \Delta P$ de la tabla, vemos que la tasa de crecimiento relativo en la ecuación (4) es aproximadamente la constante 0.017. Así, con base en los datos tabulados, $t = 0$ representa a 1980; $t = 1$ representa a 1981, y así sucesivamente; la población mundial podría modelarse por medio del problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.017P, \qquad P(0) = 4454.$$

La solución a este problema con valor inicial proporciona la función de población $P = 4454e^{0.017t}$. En 2008 (con $t = 28$) la solución predice que la población mundial a mitad de año será de 7169 millones o aproximadamente 7.2 mil millones (figura 9.10), que es más de la población real de 6707 millones de acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos. Un modelo más realista consideraría factores ambientales y otros factores que afectan a la tasa de crecimiento, la cual ha estado disminuyendo de manera constante a alrededor de 0.012 desde 1987. Consideraremos tal modelo en la sección 9.4.

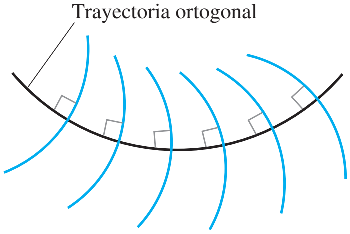


FIGURA 9.11 Una trayectoria ortogonal interseca a la familia de curvas en ángulo recto, esto es, ortogonalmente.

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que interseca en ángulo recto, u *ortogonalmente*, a cada curva de la familia (figura 9.11). Por ejemplo, cada recta que pasa por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias con centro en el origen, $x^2 + y^2 = a^2$ (figura 9.12). Esos sistemas de curvas mutuamente ortogonales son de particular importancia en problemas de física relacionados con el potencial eléctrico, donde las curvas de una familia corresponden al flujo de corriente eléctrica y las de la otra familia, a curvas de potencial constante. También aparecen en problemas de hidrodinámica y de flujo de calor.

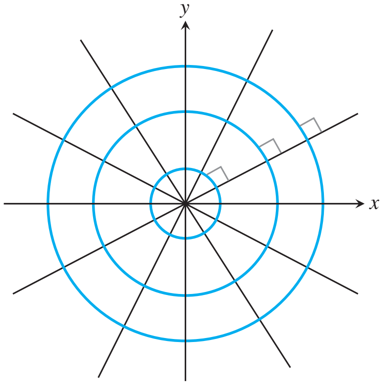


FIGURA 9.12 Cada recta que pasa por el origen es ortogonal a la familia de circunferencias con centro en el origen.

EJEMPLO 2 Determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $xy = a$, donde $a \neq 0$ es una constante arbitraria.

Solución Las curvas $xy = a$ forman una familia de hipérbolas que tienen a los ejes coordenados como asíntotas. Primero encontramos las pendientes de cada curva en esta familia, o sus valores dy/dx. Al derivar $xy = a$ de manera implícita, se obtiene

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Así, la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) en una de las hipérbolas $xy = a$ es $y' = -y/x$. En una trayectoria ortogonal, la pendiente de la recta tangente en este mismo punto debe ser el recíproco negativo, o x/y. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

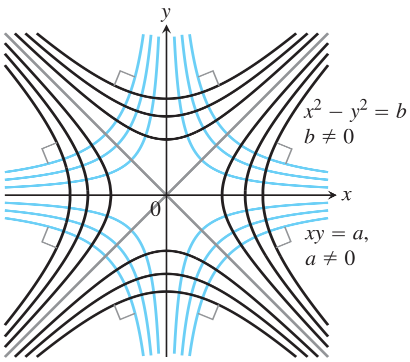


FIGURA 9.13 Cada curva es ortogonal a toda curva que pertenece a la otra familia (ejemplo 2).

Esta ecuación diferencial es separable y la resolvimos en la sección 7.4:

$$y\,dy = x\,dx \qquad \text{Variables separables.}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \qquad \text{Integrar en ambos lados.}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y^2 - x^2 = b, \tag{5}$$

donde $b = 2C$ es una constante arbitraria. Las trayectorias ortogonales son la familia de hipérbolas dada por la ecuación (5) y bosquejada en la figura 9.13. ■

Problemas de mezclas

Suponga que una sustancia química en una solución líquida (o dispersa en un gas) entra a un contenedor que contiene el líquido (o gas) con, posiblemente, una cantidad específica del químico disuelto. La mezcla se mantiene uniforme al revolverla y sacarla del contenedor a una velocidad conocida. En este proceso, con frecuencia es importante conocer la concentración del químico en el contenedor en cualquier instante dado. La ecuación diferencial que describe el proceso tiene como base la fórmula

$$\begin{array}{c}\text{Tasa de cambio}\\ \text{de la cantidad}\\ \text{en el contenedor}\end{array} = \left(\begin{array}{c}\text{tasa a la cual}\\ \text{llega la sustancia}\\ \text{química}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{tasa a la cual}\\ \text{sale la sustancia}\\ \text{química}\end{array}\right) \tag{6}$$

Si $y(t)$ es la cantidad de sustancia química en el contenedor en el instante t y $V(t)$ es el volumen total de líquido en el contenedor en el instante t, entonces la velocidad de salida de la sustancia en el instante t es

$$\begin{aligned}\text{Velocidad de salida} &= \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{razón de flujo de salida})\\ &= \left(\begin{array}{c}\text{concentración en el}\\ \text{contenedor en el instante } t\end{array}\right)\cdot(\text{razón de flujo de salida}).\end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con esto, la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{dy}{dt} = (\text{razón a la que llega la sustancia}) - \frac{y(t)}{V(t)}\cdot(\text{razón de flujo de salida}). \tag{8}$$

Si, por ejemplo, y se mide en libras, V en galones y t en minutos, las unidades en la ecuación (8) son

$$\frac{\text{libras}}{\text{minutos}} = \frac{\text{libras}}{\text{minutos}} - \frac{\text{libras}}{\text{galones}}\cdot\frac{\text{galones}}{\text{minutos}}.$$

EJEMPLO 3 En una refinería de petróleo, un tanque de almacenamiento contiene 2000 galones de gasolina, que inicialmente tiene 100 libras de un aditivo disuelto en él. En la preparación para el clima de invierno, se bombea al tanque de gasolina que contiene 2 lb de aditivo por galón, a razón de 40 gal/min. La solución bien mezclada se bombea hacia fuera a una tasa de 45 gal/min. ¿Cuánto aditivo está en el tanque 20 minutos después de que inicia el proceso de bombeo (figura 9.14)?

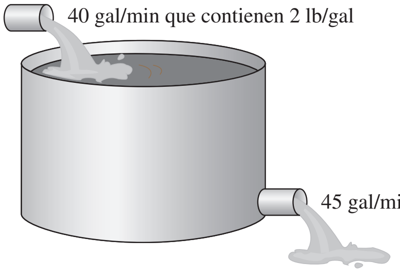


FIGURA 9.14 El depósito de almacenamiento del ejemplo 3 mezcla el líquido que entra con el almacenado para producir un líquido que sale.

Solución Sea y la cantidad (en libras) de aditivo en el tanque en el instante t. Sabemos que $y = 100$ cuando $t = 0$. El número de galones de gasolina y aditivo en la solución en el tanque en cualquier instante t es

$$\begin{aligned} V(t) &= 2000 \text{ gal} + \left(40 \frac{\text{gal}}{\text{min}} - 45 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)(t \text{ min}) \\ &= (2000 - 5t) \text{ gal}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Razón de salida} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{razón de flujo de salida} && \text{Ecuación (7)} \\ &= \left(\frac{y}{2000 - 5t}\right) 45 && \text{La razón de flujo de salida es } 45 \text{ gal/min y } v = 2000 - 5t. \\ &= \frac{45y}{2000 - 5t} \frac{\text{lb}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Razón de entrada} &= \left(2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(40 \frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) \\ &= 80 \frac{\text{lb}}{\text{min}}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que modela el proceso de mezclado es

$$\frac{dy}{dt} = 80 - \frac{45y}{2000 - 5t} \qquad \text{Ecuación (8)}$$

en libras por minuto.

Para resolver esta ecuación diferencial, primero la escribimos en la forma lineal estándar:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} y = 80.$$

Así, $P(t) = 45/(2000 - 5t)$ y $Q(t) = 80$. El factor integrante es

$$\begin{aligned} v(t) = e^{\int P\,dt} &= e^{\int \frac{45}{2000-5t} dt} \\ &= e^{-9 \ln (2000-5t)} && 2000 - 5t > 0 \\ &= (2000 - 5t)^{-9}. \end{aligned}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación estándar por $\upsilon(t)$ e integrar ambos lados se obtiene,

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot \left(\frac{dy}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t}\,y\right) = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}\frac{dy}{dt} + 45(2000 - 5t)^{-10}\,y = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[(2000 - 5t)^{-9}y\right] = 80(2000 - 5t)^{-9}$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = \int 80(2000 - 5t)^{-9}\,dt$$

$$(2000 - 5t)^{-9}y = 80 \cdot \frac{(2000 - 5t)^{-8}}{(-8)(-5)} + C.$$

La solución general es

$$y = 2(2000 - 5t) + C(2000 - 5t)^{9}.$$

Ya que $y = 100$ cuando $t = 0$, podemos determinar el valor de C:

$$100 = 2(2000 - 0) + C(2000 - 0)^{9}$$

$$C = -\frac{3900}{(2000)^{9}}.$$

La solución particular del problema con valor inicial es

$$y = 2(2000 - 5t) - \frac{3900}{(2000)^{9}}(2000 - 5t)^{9}.$$

La cantidad de aditivo 20 minutos después de iniciado el bombeo es

$$y(20) = 2[2000 - 5(20)] - \frac{3900}{(2000)^{9}}[2000 - 5(20)]^{9} \approx 1342 \text{ lb}.$$

■

Ejercicios 9.3

Movimiento a lo largo de una recta

1. **Deslizamiento de una bicicleta** Un ciclista de 66 kg, en una bicicleta de 7 kg, al dejar de pedalear avanza a 9 m/seg al nivel del piso. La k en la ecuación (1) es de alrededor de 3.9 kg/seg.
   a. Antes de detenerse por completo, ¿cuánto avanza el ciclista?
   b. ¿Cuánto tarda el ciclista en reducir su velocidad a 1 m/seg?

2. **Deslizamiento de un acorazado** Suponga que un acorazado de la clase Iowa tiene una masa de alrededor de 51,000 toneladas métricas (51,000,000 kg) y un valor de k en la ecuación (1) de aproximadamente 59,000 kg/seg. También que la nave pierde la potencia cuando se mueve a una velocidad de 9 m/seg.
   a. ¿Cuánto se alejará la nave de la costa antes de que quede a la deriva en el mar?
   b. ¿Cuánto tardará la velocidad de la nave en reducirse a 1 m/seg?

3. Los datos de la tabla 9.4 se recolectaron con un detector de movimiento y una CBLTM por Valerie Sharrits, un profesor de matemáticas de la DeSales High School en Columbus, Ohio. La tabla indica la distancia s (metros) que se deslizó en patines de línea en t segundos su hija Ashley cuando tenía 10 años de edad. Encuentre un modelo para la posición de Ashley en la forma de la ecuación (2), obtenido con la información de la tabla 9.4. Su velocidad inicial fue $\upsilon_0 = 2.75$ m/seg, su masa $m = 39.92$ kg

(ella pesaba 88 lb) y la distancia total que se deslizó hasta que se detuvo fue de 4.91 m.

TABLA 9.4 Datos del patinaje de Ashley Sharrits

t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)
0	0	2.24	3.05	4.48	4.77
0.16	0.31	2.40	3.22	4.64	4.82
0.32	0.57	2.56	3.38	4.80	4.84
0.48	0.80	2.72	3.52	4.96	4.86
0.64	1.05	2.88	3.67	5.12	4.88
0.80	1.28	3.04	3.82	5.28	4.89
0.96	1.50	3.20	3.96	5.44	4.90
1.12	1.72	3.36	4.08	5.60	4.90
1.28	1.93	3.52	4.18	5.76	4.91
1.44	2.09	3.68	4.31	5.92	4.90
1.60	2.30	3.84	4.41	6.08	4.91
1.76	2.53	4.00	4.52	6.24	4.90
1.92	2.73	4.16	4.63	6.40	4.91
2.08	2.89	4.32	4.69	6.56	4.91

4. **Deslizamiento hasta detenerse** La tabla 9.5 indica la distancia s (en metros) en términos del tiempo t que se deslizó Kelly Schmitzer en patines de línea. Determine un modelo para su posición en la forma de la ecuación (2). Su velocidad inicial fue $v_0 = 0.80$ m/s, su masa $m = 49.90$ kg (110 lb) y la distancia total que se deslizó hasta detenerse fue de 1.32 m.

TABLA 9.5 Datos del patinaje de Kelly Schmitzer

t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)	t (seg)	s (m)
0	0	1.5	0.89	3.1	1.30
0.1	0.07	1.7	0.97	3.3	1.31
0.3	0.22	1.9	1.05	3.5	1.32
0.5	0.36	2.1	1.11	3.7	1.32
0.7	0.49	2.3	1.17	3.9	1.32
0.9	0.60	2.5	1.22	4.1	1.32
1.1	0.71	2.7	1.25	4.3	1.32
1.3	0.81	2.9	1.28	4.5	1.32

Trayectorias ortogonales

En los ejercicios 5 a 10, determine las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Elabore un bosquejo de varios miembros de cada familia.

5. $y = mx$
6. $y = cx^2$
7. $kx^2 + y^2 = 1$
8. $2x^2 + y^2 = c^2$
9. $y = ce^{-x}$
10. $y = e^{kx}$
11. Demuestre que las curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ y $y^2 = x^3$ son ortogonales.
12. Determine la familia de soluciones de la ecuación diferencial dada y la familia de trayectorias ortogonales. Elabore un bosquejo de ambas familias.
    a. $x\,dx + y\,dy = 0$ **b.** $x\,dy - 2y\,dx = 0$

Problemas de mezcla

13. **Mezcla de sal** Un depósito inicialmente contiene 100 galones de salmuera en la que están disueltas 50 lb de sal. Al depósito entra salmuera, que contiene 2 lb/gal de sal, a una razón de 5 gal/min. La mezcla se mantiene uniforme al mezclarla y sale del tanque a razón de 4 gal/min.
    a. ¿A qué razón entra la sal (libras por minuto) al depósito en el instante t?
    b. En el instante t, ¿cuál es el volumen de la salmuera en el depósito?
    c. ¿A qué razón (libras por minuto) sale la sal del depósito en el instante t?
    d. Plantee y resuelva un problema de valor inicial que describa el proceso de mezclado.
    e. Determine la concentración de sal en el depósito 25 minutos después de iniciado el proceso.
14. **Problema de mezcla** Un tanque, con capacidad de 200 galones, está a la mitad con agua destilada. En el instante $t = 0$ se introduce al tanque una solución con 0.5 lb/gal de concentrado, a razón de 5 gal/min; la mezcla, que se revuelve perfectamente, se extrae a razón de 3 gal/min.
    a. ¿En qué instante se llena el tanque?
    b. En el instante en que el tanque está lleno, ¿cuántas libras de concentrado habrá en él?
15. **Mezcla de fertilizante** Un depósito contiene 100 galones de agua pura. Se introduce al tanque una solución que contiene 1 lb/gal de fertilizante soluble para césped, a razón de 1 gal/min, y la mezcla es bombeada fuera del depósito a razón de 3 gal/min. Determine la cantidad máxima de fertilizante en el tanque y el instante en el que se alcanza ese máximo.
16. **Contaminación con monóxido de carbono** En un inicio, la sala de conferencias de una compañía tiene 4500 ft^3 de aire libre de monóxido de carbono. Si se empieza en el instante $t = 0$, se lanza a la sala humo de cigarro que contiene un 4% de monóxido de carbono a razón de 0.3 ft^3/min. Un ventilador en el techo mantiene el aire de la sala con buena circulación y el aire sale de la habitación a la misma velocidad de 0.3 ft^3/min. Determine el tiempo en el que la concentración de monóxido de carbono en la sala llega al 0.01 por ciento.

9.4 Soluciones gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas

En el capítulo 4 aprendimos que el signo de la primera derivada indica dónde la gráfica de una función es creciente y dónde es decreciente. El signo de la segunda derivada indica la concavidad de la gráfica. Podemos fundamentar nuestro conocimiento sobre cómo las derivadas determinan la forma de una gráfica para resolver de manera gráfica una ecuación diferencial.

Veremos que la habilidad para distinguir el comportamiento físico a partir de las gráficas es una herramienta poderosa en la comprensión de sistemas en el mundo real. Las ideas iniciales para una solución gráfica son las nociones de *línea de fase* y *valor de equilibrio*. Llegamos a estas nociones investigando, desde un punto de vista diferente al estudiado en el capítulo 4, lo que sucede cuando la derivada de una función diferencial es cero.

Valores de equilibrio y líneas de fase

Cuando derivamos de manera implícita la ecuación

$$\frac{1}{5}\ln(5y - 15) = x + 1,$$

obtenemos

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{5y - 15}\right)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Al despejar $y = dy/dx$, encontramos $y' = 5y - 15 = 5(y - 3)$. En este caso, la derivada y' es una función sólo de y (la variable dependiente) y es cero cuando $y = 3$.

Una ecuación diferencial para la que dy/dx sólo es función de y se denomina ecuación diferencial **autónoma**. Investigue qué sucede cuando la derivada en una ecuación autónoma es cero. Suponemos que las derivadas son continuas.

DEFINICIÓN Si $dy/dx = g(y)$ es una ecuación diferencial autónoma, entonces los valores de y para los cuales $dy/dx = 0$ se denominan **valores de equilibrio** o **puntos de reposo**.

Así, los valores de equilibrio son aquellos en los que no ocurre cambio en la variable dependiente, por lo que y está en *reposo*. El énfasis está en el valor de y donde $dy/dx = 0$, no en el valor de x, como estudiamos en el capítulo 4. Por ejemplo, los valores de equilibrio para la ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

son $y = -1$ y $y = 2$.

Para construir una solución gráfica para una ecuación diferencial autónoma, primero construimos una **línea de fase** para la ecuación, una gráfica en el eje y que muestre los valores de equilibrio de la ecuación junto con los intervalos donde dy/dx y d^2y/dx^2 son positivos y negativos. Entonces, sabemos dónde son crecientes las soluciones y dónde son decrecientes, así como la concavidad de las curvas solución. Éstas son las características esenciales que encontramos en la sección 4.4, por lo que es posible determinar las formas de las curvas solución sin tener que determinar las fórmulas para ellas.

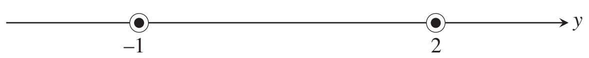
EJEMPLO 1 Dibuje una línea de fase para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y + 1)(y - 2)$$

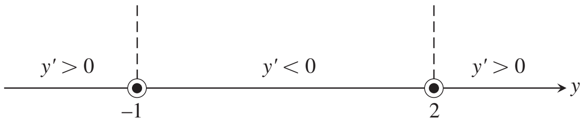
y utilícela para bosquejar las soluciones para la ecuación.

Solución

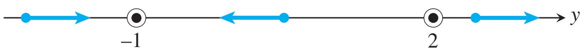
1. *Dibuje una recta numérica para y y marque los valores de equilibrio $y = -1$ y $y = 2$, donde $dy/dx = 0$.*



2. *Identifique y marque los intervalos donde* $y' > 0$ *y* $y' < 0$. Este paso se parece al que dimos en la sección 4.3, sólo que ahora marcamos el eje y en vez del eje x.



Podemos concentrar la información acerca del signo de y' en la misma línea de fase. Como $y' > 0$ en el intervalo a la izquierda de $y = -1$, una solución de la ecuación diferencial con valor de y menor que -1 crecerá hacia $y = -1$. Mostramos esta información dibujando una flecha en el intervalo que apunte hacia -1.



De manera similar, $y' < 0$ entre $y = -1$ y $y = 2$, de manera que cualquier solución con un valor en este intervalo disminuirá hacia $y = -1$.

Para $y > 2$, tenemos $y' > 0$, así que una solución con un valor de y mayor que 2 aumentará desde allí y sin cota.

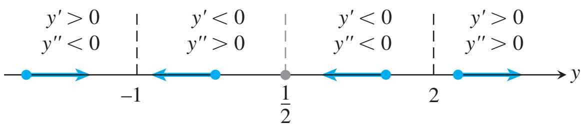
En resumen, las curvas solución por debajo de la recta horizontal $y = -1$ en el plano xy ascienden hacia $y = -1$. Las curvas solución entre las rectas $y = -1$ y $y = 2$ descienden desde $y = 2$ hacia $y = -1$. Las curvas solución por arriba de $y = 2$ ascienden desde $y = 2$ y se mantienen creciendo.

3. *Calcule* y'' *y marque los intervalos donde* $y'' > 0$ *y* $y'' < 0$. Para determinar y'', derivamos y' con respecto a x, por medio de derivación implícita.

$$y' = (y + 1)(y - 2) = y^2 - y - 2 \qquad \text{Fórmula para } y' \ldots$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(y^2 - y - 2) \\ &= 2yy' - y' \qquad \text{derivada implícitamente con respecto a } x \\ &= (2y - 1)y' \\ &= (2y - 1)(y + 1)(y - 2). \end{aligned}$$

Con base en esta fórmula, vemos que y'' cambia de signo en $y = -1$, $y = 1/2$ y $y = 2$. Agregamos la información del signo a la línea de fase.



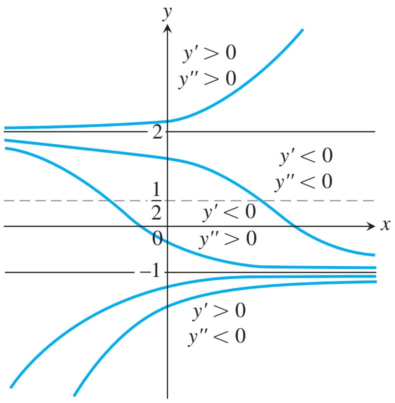


FIGURA 9.15 Soluciones gráficas del ejemplo 1; se incluyen las rectas horizontales $y = -1$ y $y = 2$, que pasan por los valores de equilibrio. No hay dos curvas de solución que se crucen o se toquen.

4. *Bosqueje una colección de curvas solución en el plano xy*. Las rectas horizontales $y = -1$, $y = 1/2$ y $y = 2$ dividen el plano en bandas horizontales en las que conocemos los signos de y' y y''. En cada banda, tal información nos dice si las curvas solución ascienden o descienden, y cuál es su curvatura cuando x aumenta (figura 9.15).

Las "líneas de equilibrio" $y = -1$ y $y = 2$ también son curvas solución. (Las funciones constantes $y = -1$ y $y = 2$ satisfacen la ecuación diferencial). Las curvas solución que cruzan la recta $y = 1/2$ tienen un punto de inflexión allí. La concavidad cambia de cóncava hacia abajo (arriba de la recta) a cóncava hacia arriba (abajo de la recta).

Como se dijo en el paso 2, las soluciones en las bandas de en medio e inferior se aproximan al valor de equilibrio $y = -1$ cuando x aumenta. Las soluciones en la banda superior ascienden constantemente alejándose del valor $y = 2$. ■

Equilibrio estable y equilibrio inestable

Observe de nuevo la figura 9.15, en particular preste atención al comportamiento de las curvas solución cerca de los valores de equilibrio. Una vez que una curva solución tiene un valor cercano a $y = -1$, tiende de manera uniforme hacia ese valor; $y = -1$ es un **equilibrio estable**. El comportamiento cerca de $y = 2$ es justamente lo opuesto; todas las soluciones, excepto la solución de equilibrio $y = 2$, se mueven *alejándose* de ella cuando x aumenta. Llamamos a $y = 2$ un **equilibrio inestable**. Si la solución está *en* ese valor, allí permanece, pero si está fuera por cualquier cantidad, no importa qué tan pequeña, se mueve alejándose. (En ocasiones un valor de equilibrio es inestable porque una solución se aleja de ella sólo de un lado del punto).

Ahora que sabemos lo que buscamos, ya podemos ver este comportamiento en la línea de fase inicial (el segundo diagrama en el paso 2 del ejemplo 1). Las flechas se alejan de $y = 2$ y, una vez a la izquierda de $y = 2$, se dirigen hacia $y = -1$.

Presentamos varios ejemplos aplicados para los cuales podemos bosquejar una familia de curvas solución para la ecuación diferencial por medio del método del ejemplo 1.

Ley de Newton del enfriamiento

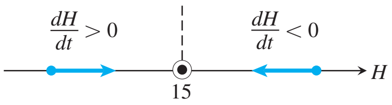


FIGURA 9.16 Primer paso en la construcción de la línea de fase para la ley de Newton del enfriamiento. A la larga, la temperatura tiende al valor de equilibrio (la del medio que lo rodea).

En la sección 7.4 resolvimos de manera analítica la ecuación diferencial

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_S), \qquad k > 0$$

que modela la ley de Newton del enfriamiento. Aquí H es la temperatura de un objeto en el instante t y H_S es la temperatura constante del entorno que rodea al objeto.

Suponga que el ambiente (digamos una habitación en una casa) tiene una temperatura constante de 15 °C. Entonces podemos expresar la diferencia de temperaturas como $H(t) - 15$. Si suponemos que H es una función diferenciable del tiempo t, por la ley de Newton del enfriamiento, existe una constante de proporcionalidad $k > 0$, tal que

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - 15) \tag{1}$$

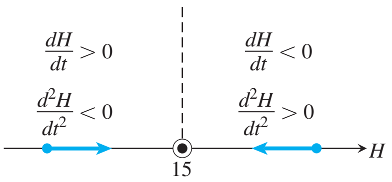


FIGURA 9.17 La línea de fase completa para la ley de Newton del enfriamiento.

(*menos* k para obtener una derivada negativa cuando $H > 15$).

Como $dH/dt = 0$ en $H = 15$, la temperatura 15 °C es un valor de equilibrio. Si $H > 15$, la ecuación (1) indica que $(H - 15) > 0$ y $dH/dt < 0$. Si el objeto está más caliente que la habitación, se enfriará. De manera análoga, si $H < 15$, entonces $(H - 15) < 0$ y $dH/dt > 0$. Un objeto más frío que la habitación se calentará. Así, el comportamiento descrito por medio de la ecuación (1) coincide con nuestra intuición sobre cómo debe comportarse la temperatura. Estas observaciones se reflejan en el diagrama de línea de fase inicial de la figura 9.16. El valor $H = 15$ es un equilibrio estable.

Determinamos la concavidad de las curvas solución, derivando ambos lados de la ecuación (1) con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dH}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-k(H - 15))$$

$$\frac{d^2H}{dt^2} = -k\frac{dH}{dt}.$$

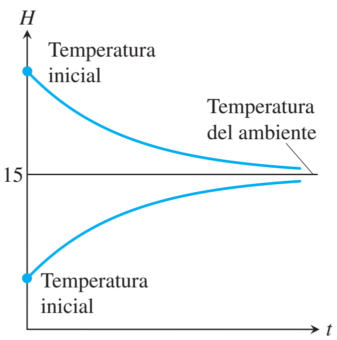


FIGURA 9.18 Temperatura contra tiempo. Sin importar la temperatura inicial, la temperatura del objeto $H(t)$ tiende hacia 15 °C, la temperatura del medio que lo rodea.

Como $-k$ es negativa, vemos que d^2H/dt^2 es positiva cuando $dH/dt < 0$ y negativa cuando $dH/dt > 0$. La figura 9.17 agrega esta información a la línea de fase.

La línea de fase completa indica que si la temperatura del objeto está por arriba del valor de equilibrio de 15 °C, la gráfica de $H(t)$ disminuirá y será cóncava hacia arriba. Si la temperatura está por debajo de 15 °C (la temperatura del ambiente), la gráfica de $H(t)$ aumentará y será cóncava hacia abajo. Utilizamos esta información para bosquejar curvas solución típicas (figura 9.18).

Con base en la curva solución superior de la figura 9.18, vemos que cuando el objeto se enfría, la razón a la cual lo hace disminuye, ya que dH/dt se aproxima a cero. Dicha observación está implícita en la ley de Newton del enfriamiento y contenida en la ecuación diferencial, pero el aplanamiento de la gráfica cuando el tiempo avanza ofrece una representación visual inmediata del fenómeno.

Caída de un cuerpo que encuentra una fuerza de resistencia

Newton observó que la tasa de cambio en el momento o momentum encontrado por un objeto móvil es igual a la fuerza neta aplicada a éste. En términos matemáticos,

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \tag{2}$$

donde *f* es la fuerza neta que actúa sobre el objeto, m y v la masa y la velocidad del objeto, respectivamente. Si m varía con el tiempo, como cuando el objeto es un cohete que quema combustible, el lado derecho de la ecuación (2) se expande a

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

utilizando la regla de la derivada de un producto. Sin embargo, en muchas situaciones m es constante, $dm/dt = 0$, por lo que la ecuación (2) toma la forma más sencilla

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{o} \qquad F = ma, \tag{3}$$

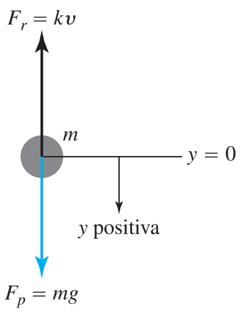


FIGURA 9.19 Un objeto que cae bajo la influencia de la gravedad con fuerza de resistencia, la cual se supone proporcional a la velocidad.

conocida como *la segunda ley de Newton del movimiento* (véase la sección 9.3).

En caída libre, la aceleración constante debida a la gravedad se denota por g y la fuerza que actúa hacia abajo en el cuerpo que cae es

$$F_p = mg,$$

la fuerza debida a la gravedad. Sin embargo, si consideramos un objeto real que cae en el aire, digamos una moneda desde una gran altura o un paracaidista desde una altura aún mayor, sabemos que la resistencia del aire es un factor que afecta la velocidad de la caída. Un modelo más realista de la caída libre incluiría la resistencia del aire, mostrada como una fuerza F_r en el diagrama de la figura 9.19.

Para rapideces bajas, por debajo de la rapidez del sonido, los experimentos físicos han mostrado que F_r es aproximadamente proporcional a la velocidad del cuerpo. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el objeto que cae es

$$F = F_p - F_r,$$

con lo que se obtiene,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{4}$$

Podemos utilizar la línea de fase para analizar las funciones de velocidad que resuelven esta ecuación diferencial.

El punto de equilibrio, que se obtiene igualando a cero el lado derecho de la ecuación (4), es

$$v = \frac{mg}{k}.$$

Si en un inicio el cuerpo se mueve más rápido que esto, dv/dt es negativa y el cuerpo aminora la velocidad. Si el cuerpo se mueve a una velocidad por debajo de mg/k, entonces $dv/dt > 0$ y el cuerpo aumenta su velocidad. Estas observaciones se representan en el diagrama inicial de línea de fase de la figura 9.20.

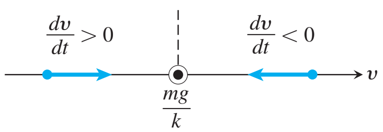


FIGURA 9.20 Línea de fase inicial para el cuerpo que cae y encuentra una resistencia.

Determinamos la concavidad de las curvas solución por medio de la diferenciación de ambos lados de la ecuación (4) con respecto a t:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(g - \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\frac{dv}{dt}.$$

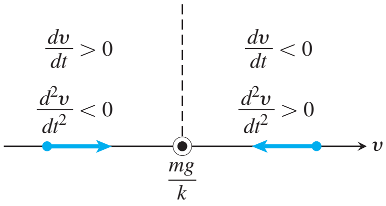


FIGURA 9.21 Línea de fase completa para el objeto que cae.

Vemos que $d^2v/dt^2 < 0$ cuando $v < mg/k$ y $d^2v/dt^2 > 0$ cuando $v > mg/k$. La figura 9.21 añade esta información a la línea de fase. Observe la similitud con respecto a la línea de fase para la ley de Newton del enfriamiento (figura 9.17). Las curvas solución también son similares (figura 9.22).

La figura 9.22 muestra dos curvas solución típicas. Sin importar la velocidad inicial, vemos que la velocidad del cuerpo tiende al valor límite $v = mg/k$. Este valor, un punto de equilibrio estable, se denomina **velocidad límite** o velocidad terminal del cuerpo. Los paracaidistas pueden variar su velocidad terminal desde 95 mph a 180 mph cambiando la cantidad de área corporal que se opone a la caída, la cual afecta el valor de k.

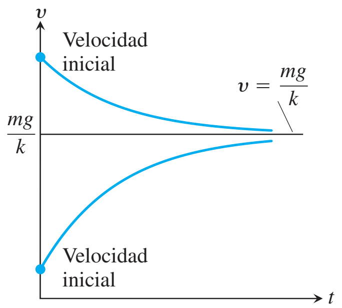


FIGURA 9.22 Curvas típicas de velocidad para el objeto que cae y encuentra resistencia. El valor $v = mg/k$ es la velocidad terminal.

Crecimiento poblacional logístico

En la sección 9.3 examinamos el crecimiento poblacional por medio del modelo de cambio exponencial. Esto es, si P representa el número de individuos y no consideramos los movimientos de emigración e inmigración, entonces

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{5}$$

donde $k > 0$ es la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad por individuo por unidad de tiempo.

Como el ambiente natural sólo tiene un número limitado de recursos para sustentar la vida, es razonable suponer que sólo una población máxima M puede sustentarse. Cuando la población se aproxima a esta **población límite** o **capacidad de sustentación**, los recursos se vuelven menos abundantes y la tasa de crecimiento k disminuye. Una relación sencilla que exhibe este comportamiento es

$$k = r(M - P),$$

donde $r > 0$ es una constante. Observe que k disminuye cuando P aumenta hacia M, y que k es negativa si P es mayor que M. Sustituyendo $r(M - P)$ por k en la ecuación (5), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = r(M - P)P = rMP - rP^2. \tag{6}$$

El modelo dado por la ecuación (6) se conoce como **crecimiento logístico**.

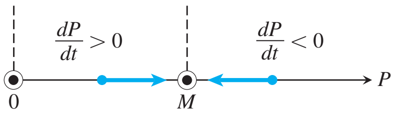


FIGURA 9.23 Línea de fase inicial para el crecimiento logístico (ecuación 6).

Podemos pronosticar el comportamiento de la población durante el tiempo si analizamos la línea de fase para la ecuación (6). Los valores de equilibrio son $P = M$ y $P = 0$, por lo que es posible ver que $dP/dt > 0$ si $0 < P < M$, y que $dP/dt < 0$ si $P > M$. Tales observaciones se registraron en la línea de fase en la figura 9.23.

Determinamos la concavidad de las curvas de población diferenciando ambos lados de la ecuación (6) con respecto a t:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(rMP - rP^2)\\ &= rM\frac{dP}{dt} - 2rP\frac{dP}{dt}\\ &= r(M - 2P)\frac{dP}{dt}.\end{aligned} \tag{7}$$

Si $P = M/2$, entonces $d^2P/dt^2 = 0$. Si $P < M/2$, entonces $(M - 2P)$ y dP/dt son positivas y $d^2P/dt^2 > 0$. Si $M/2 < P < M$, entonces $(M - 2P) < 0$, $dP/dt > 0$ y $d^2P/dt^2 < 0$. Si $P > M$,

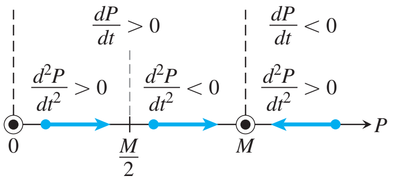


FIGURA 9.24 Línea de fase terminada para el crecimiento logístico (ecuación 6).

entonces $(M - 2P)$ y dP/dt son ambas negativas y $d^2P/dt^2 > 0$. Agregamos esta información a la línea de fase (figura 9.24).

Las rectas $P = M/2$ y $P = M$ dividen al primer cuadrante del plano tP en bandas horizontales en las que conocemos los signos de dP/dt y d^2P/dt^2. En cada banda, sabemos cómo ascienden y descienden las curvas solución y cómo es su concavidad cuando pasa el tiempo. Las rectas de equilibrio $P = 0$ y $P = M$ son ambas curvas de población. Las curvas de población que cruzan la recta $P = M/2$ tienen un punto de inflexión allí, lo que les da una forma **sigmoidea** (es decir, están curvadas en dos direcciones como una letra S). La figura 9.25 muestra curvas típicas de población. Observe que cada curva de población se aproxima a la población límite M cuando $t \to \infty$.

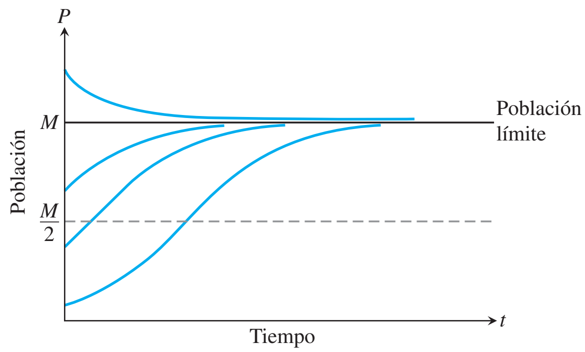


FIGURA 9.25 Curvas de población para el crecimiento logístico.

Ejercicios 9.4

Líneas de fase y curvas solución

En los ejercicios 1 a 8,

a. Identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles son inestables?

b. Construya una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c. Elabore un bosquejo de las curvas solución.

1. $\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 3)$

2. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

3. $\frac{dy}{dx} = y^3 - y$

4. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 2y$

5. $y' = \sqrt{y}, \quad y > 0$

6. $y' = y - \sqrt{y}, \quad y > 0$

7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

8. $y' = y^3 - y^2$

Modelos de crecimiento poblacional

Las ecuaciones diferenciales autónomas de los ejercicios 9 a 12 representan modelos para crecimiento poblacional. Para cada ejercicio, utilice un análisis de línea de fase para hacer un bosquejo de las curvas solución para $P(t)$, seleccionando diferentes valores de inicio $P(0)$. ¿Cuáles equilibrios son estables y cuáles son inestables?

9. $\frac{dP}{dt} = 1 - 2P$

10. $\frac{dP}{dt} = P(1 - 2P)$

11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$

12. $\frac{dP}{dt} = 3P(1 - P)\left(P - \frac{1}{2}\right)$

13. Cambio catastrófico en el crecimiento logístico Suponga que una población saludable de alguna especie crece en un ambiente limitado y que la población actual P_0 está bastante cercana a la capacidad de sustentación M_0. Podría imaginar una población de peces que viven en un lago de agua dulce en un parque natural. Repentinamente, una catástrofe, como la erupción volcánica del monte Santa Elena, contamina el lago y destruye una parte significativa del alimento y el oxígeno, de los cuales dependen los peces. El resultado es un nuevo ambiente con una capacidad de sustentación M_1 considerablemente menor que M_0 y, de hecho, menor que la población actual P_0. Iniciando en algún instante antes de la catástrofe, elabore un bosquejo de una curva "antes y después" que muestre cómo la población de peces responde al cambio en el ambiente.

14. Control de una población El departamento de pesca y deporte en cierto estado planea emitir permisos de caza para controlar la población de ciervos (un ciervo por permiso). Se sabe que si la población de ciervos cae por debajo de cierto nivel m, los ciervos se extinguirán. También se sabe que si la población de ciervos crece por arriba de la capacidad de sustentación M, la población se reducirá a M a consecuencia de enfermedades y mala nutrición.

a. Analice la sensatez del siguiente modelo para la tasa de crecimiento de la población de ciervos como una función del tiempo:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

donde P es la población de ciervos y r es una constante de proporcionalidad positiva. Incluya una línea de fase.

b. Explique cómo este modelo difiere del modelo logístico $dP/dt = rP(M - P)$. ¿Es mejor o peor que el modelo logístico?

c. Demuestre que si $P > M$ para toda t, entonces $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$.

d. ¿Qué sucede si $P < m$ para toda t?

e. Analice las soluciones de la ecuación diferencial. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio del modelo? Explique la dependencia del valor de estado estable de P sobre los valores iniciales de P. ¿Aproximadamente cuántos permisos deben emitirse?

Aplicaciones y ejemplos

15. Paracaidismo Si un cuerpo de masa m que cae desde el reposo bajo la acción de la gravedad encuentra una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, entonces la velocidad del cuerpo a t segundos de la caída satisface la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0$$

donde k es una constante que depende de las propiedades aerodinámicas del cuerpo y la densidad del aire. (Suponga que la caída es demasiado breve para que se vea afectada por cambios en la densidad del aire).

a. Dibuje una línea de fase para la ecuación.

b. Elabore un bosquejo de una curva típica de velocidad.

c. Para un paracaidista de 160 lb ($mg = 160$), así como con tiempo en segundos y distancia en ft, un valor típico de k es 0.005. ¿Cuál es la velocidad terminal del paracaidista?

16. Resistencia proporcional a $\sqrt{v}$ Un cuerpo de masa m es lanzado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0. Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad y determine la velocidad terminal con base en un análisis gráfico.

17. Veleo Un velero se dirige a lo largo de un curso recto mientras el viento ejerce una fuerza constante hacia delante de 50 lb. La única fuerza adicional que actúa sobre el bote es la resistencia cuando éste se mueve en el agua. La fuerza de resistencia es numéricamente igual a cinco veces la velocidad del bote y la velocidad inicial es de 1 ft/segundo. ¿Cuál es la velocidad máxima en ft por segundo del bote con este viento?

18. Difusión de información Los sociólogos reconocen un fenómeno denominado *difusión social*, que es la propagación de información, de una innovación tecnológica o de una moda cultural entre una población. Los miembros de la población pueden dividirse en dos clases: aquellos que conocen la información y aquellos que no la conocen. En una población fija, cuyo tamaño se conoce, es razonable suponer que la velocidad de difusión es proporcional al número que conoce la información por el número que aún no la conoce. Si x denota el número de individuos que tienen la información en una población con N personas, entonces un modelo matemático para la difusión social está dado por

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X),$$

donde t representa el tiempo en días y k es una constante positiva.

a. Analice la sensatez del modelo.

b. Construya una línea de fase identificando los signos de X' y X''.

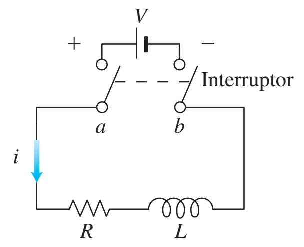
c. Elabore un bosquejo de curvas solución representativas.

d. Prediga el valor de x para el cual la información se esté propagando con la máxima rapidez. ¿Cuántas personas, finalmente, recibirán la información?

19. Corriente en un circuito *RL* El siguiente diagrama representa un circuito eléctrico cuya resistencia total es una constante de R ohms y cuya autoinductancia, mostrada como una bobina, es de L henries y también es constante. Hay un interruptor cuyas terminales en a y b pueden cerrarse para conectar una fuente eléctrica constante de V volts. De acuerdo con la sección 9.2, tenemos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V,$$

donde i es la intensidad de la corriente en amperes y t es el tiempo en segundos.



Utilice un análisis de línea de fase para bosquejar la curva solución; para ello, suponga que el interruptor en el circuito *RL* se cierra en el instante $t = 0$. ¿Qué le sucede a la corriente cuando $t \to \infty$? Este valor se denomina *solución de estado estable* o *solución estacionaria*.

20. Una perla en el shampoo Suponga que una perla está hundiéndose en un fluido viscoso, como el shampoo, y está sujeta a una fuerza de fricción que se opone a que caiga y es proporcional a su velocidad. Suponga también que hay una fuerza de resistencia boyante ejercida por el shampoo. De acuerdo con el *principio de Arquímedes*, la fuerza boyante es igual al peso del fluido desplazado por la perla. Utilizando m para designar la masa de la perla y P para la masa del shampoo desplazado por la perla cuando ésta desciende, complete los siguientes pasos.

a. Elabore un diagrama que muestre las fuerzas que actúan sobre la perla cuando se hunde, como en la figura 9.19.

b. Denotando como $v(t)$ la velocidad de la perla como una función del tiempo t, escriba una ecuación diferencial que modele la velocidad de la perla como un cuerpo que cae.

c. Construya una línea de fase que muestre los signos de v' y v''.

d. Elabore un bosquejo de curvas solución típicas.

e. ¿Cuál es la velocidad terminal de la perla?

9.5 Sistemas de ecuaciones y planos fase

En algunas situaciones debemos considerar no una, sino varias ecuaciones diferenciales de primer orden. Tal colección se denomina **sistema** de ecuaciones diferenciales. En esta sección presentamos un enfoque para comprender los sistemas a través de un procedimiento gráfico conocido como *análisis de plano fase*. Presentamos este análisis en el contexto de modelación de poblaciones de truchas y percas que viven en la misma laguna.

Planos fase

Un sistema general de dos ecuaciones diferenciales de primer orden puede tomar la forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Tal sistema de ecuaciones se denomina **autónomo**, ya que dx/dt y dy/dt no dependen de la variable independiente t, sino sólo de las variables dependientes x y y. Una **solución** de tal sistema consiste en un par de funciones $x(t)$ y $y(t)$ que satisfacen las dos ecuaciones diferenciales de forma simultánea para toda t en algún intervalo de tiempo (finito o infinito).

No podemos examinar sólo una de estas ecuaciones en forma aislada para determinar soluciones $x(t)$ o $y(t)$, ya que cada derivada depende tanto de x como de y. Para obtener una mejor comprensión de las soluciones, examinaremos las dos variables dependientes juntas graficando los puntos $(x(t), y(t))$ en el plano xy que inicia en un punto específico. Por lo tanto, las funciones solución definen una curva solución que pasa por el punto especificado y se denomina **trayectoria** del sistema. El plano xy mismo en el que se encuentran estas trayectorias se conoce como **plano fase**. Así, consideramos tanto las soluciones juntas como el estudio del comportamiento de todas las trayectorias solución en el plano fase. Puede demostrarse que dos trayectorias nunca se cruzan o tocan una con otra. (Las trayectorias solución son ejemplos de *curvas paramétricas*, que se estudiarán con profundidad en el capítulo 11).

Un modelo de cazadores en competencia

Imagine dos especies de peces, digamos truchas y percas, que compiten por los mismos recursos limitados (como alimento y oxígeno) en cierto lago. Representemos con $x(t)$ al número de truchas y con $y(t)$ al número de percas que viven en el lago en el instante t. En realidad, $x(t)$ y $y(t)$ siempre toman valores enteros, pero las aproximaremos con funciones diferenciales con valores reales. Esto nos permite aplicar los métodos de ecuaciones diferenciales.

Varios factores afectan las tasas de cambio de estas poblaciones. Conforme el tiempo pasa, cada especie se reproduce, así que suponemos que su población aumenta en forma proporcional a su tamaño. Si consideramos este hecho de manera individual, conduciría a un crecimiento exponencial en cada una de las dos poblaciones. Sin embargo, existe un efecto compensatorio del hecho de que las dos especies compiten. Un gran número de percas tiende a causar una disminución en el número de truchas y viceversa. Nuestro modelo considera que el tamaño de este efecto es proporcional a la frecuencia con la que las dos especies interactúan, que a la vez es proporcional a xy, el producto de las dos poblaciones. Estas consideraciones conducen al siguiente modelo para el crecimiento de las truchas y percas en el lago:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \tag{1a}$$

$$\frac{dy}{dt} = (m - nx)y. \tag{1b}$$

Aquí $x(t)$ representa la población de truchas y $y(t)$ la población de percas, mientras a, b, m y n son constantes positivas. Una solución de este sistema consiste en un par de funciones $x(t)$ y y(t) que permiten conocer la población de cada especie de peces en el instante t. Cada ecuación en (1) incluye las dos funciones desconocidas x y y, por lo que no es posible resolverlas de forma individual. En vez de ello, utilizaremos un análisis gráfico para estudiar las trayectorias solución de este **modelo de cazadores en competencia**.

Ahora examinaremos la naturaleza del plano fase en el modelo de población de truchas y percas. Estaremos interesados en el primer cuadrante del plano xy, donde $x \geq 0$ y $y \geq 0$, ya que las poblaciones no pueden ser negativas. Primero, determinamos dónde ambas poblaciones, la de truchas y la de percas, son constantes. Si observamos que los valores de $(x(t), y(t))$ permanecen sin cambio, cuando $dx/dt = 0$ y $dy/dt = 0$, entonces las ecuaciones (1a y 1b) se convierten en

$$(a - by)x = 0,$$

$$(m - nx)y = 0.$$

Este par de ecuaciones simultáneas tienen dos soluciones $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (m/n, a/b)$. En tales valores (x, y), denominados **puntos de equilibrio** o **puntos de reposo**, las dos poblaciones permanecen con valores constantes todo el tiempo. El punto (0, 0) representa un lago que no tiene miembros de estas especies; el punto $(m/n, a/b)$ corresponde a un lago con un número que no cambia de cada una de tales especies de peces.

A continuación, notamos que si $y = a/b$, entonces la ecuación (1a) implica que $dx/dt = 0$, por lo que la población de truchas, $x(t)$, es constante. De forma análoga, si $x = m/b$, entonces la ecuación (1b) implica que $dy/dt = 0$ y la población de percas, $y(t)$, es constante. Dicha información está registrada en la figura 9.26.

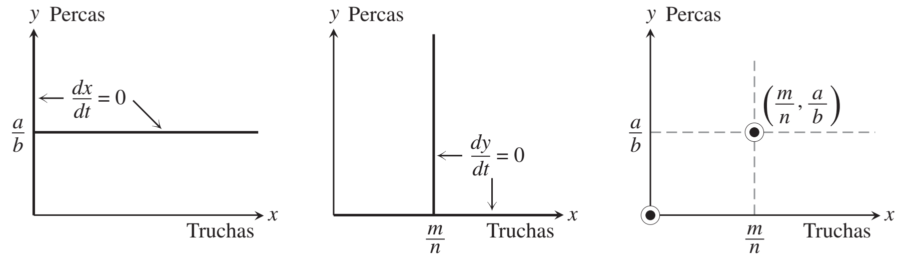


FIGURA 9.26 Puntos de reposo en el modelo de cazadores en competencia dado por las ecuaciones (1a) y (1b).

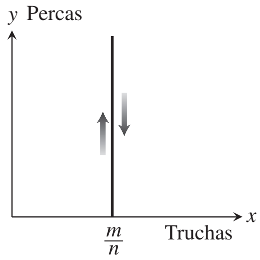


FIGURA 9.27 A la izquierda de la recta $x = m/n$ las trayectorias se mueven hacia arriba y las de la derecha se mueven hacia abajo.

Al configurar nuestro modelo de cazadores en competencia, por lo general no se conocen valores precisos de las constantes a, b, m y n. No obstante, podemos analizar el sistema de ecuaciones (1) para aprender la naturaleza de sus trayectorias solución. Iniciamos por determinar los signos de dx/dt y dy/dt en todo el plano fase. Aunque $x(t)$ representa el número de truchas y $y(t)$ el número de percas en el instante t, consideramos al par de valores $(x(t), y(t))$ como un punto que traza una curva trayectoria en el plano fase. Cuando dx/dt es positiva, $x(t)$ aumenta y el punto se mueve hacia la derecha en el plano fase. Si dx/dt es negativo, el punto se mueve hacia la izquierda. Asimismo, el punto se mueve hacia arriba donde dy/dt es positiva, y hacia abajo donde dy/dt es negativa.

Vimos que $dy/dt = 0$ a lo largo de la recta vertical $x = m/n$. A la izquierda de esta recta, dy/dt es positiva, ya que $dy/dt = (m - nx)y$ y $x < m/n$. Así, las trayectorias en este lado de la recta se dirigen hacia arriba. A la derecha de esta línea, dy/dt es negativa y las trayectorias apuntan hacia abajo. Las direcciones de las trayectorias asociadas se indican en la figura 9.27. De manera análoga, abajo de la línea horizontal $y = a/b$ tenemos $dx/dt < 0$ y las trayectorias se dirigen a la izquierda; debajo de dicha línea, van hacia la derecha, como se observa en la figura 9.28. Al combinar esta información, se obtienen cuatro regiones distintas en el plano, A, B, C y D, con sus respectivas direcciones, que se indican en la figura 9.29.

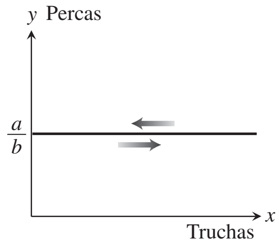


FIGURA 9.28 Arriba de la recta $y = a/b$ las trayectorias se mueven hacia la izquierda, y debajo de ella se mueven hacia la derecha.

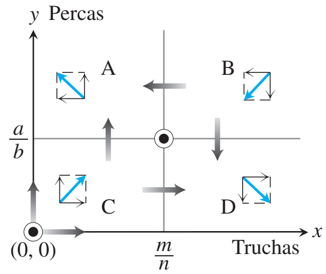


FIGURA 9.29 Análisis gráfico integrado de las direcciones de las trayectorias en las cuatro regiones determinadas por $x = m/n$ y $y = a/b$.

Ahora, examinaremos lo que sucede cerca de los dos puntos de equilibrio. Las trayectorias cerca del punto (0, 0) se alejan de él, hacia arriba y hacia la derecha. El comportamiento cerca del punto de equilibrio $(m/n, a/b)$ depende de la región en la que inicie la trayectoria. Si, por ejemplo, inicia en la región B, entonces se moverá hacia abajo y hacia la izquierda del punto de equilibrio. Dependiendo de donde inicie la trayectoria, puede moverse hacia abajo a la región

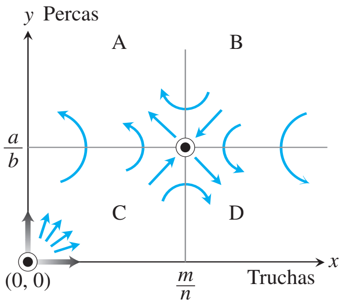


FIGURA 9.30 Movimiento a lo largo de las trayectorias cerca de los puntos de reposo (0, 0) y $(m/n, a/b)$.

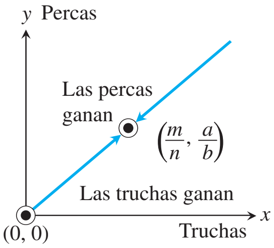


FIGURA 9.31 Resultados cualitativos del análisis del modelo de cazadores en competencia. Existen exactamente dos trayectorias que tienden al punto $(m/n, a/b)$.

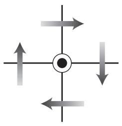


FIGURA 9.32 La dirección de una trayectoria cercana al punto de reposo (0, 0).

D, hacia la izquierda a la región A, o quizás en línea recta hacia el punto de equilibrio. Si entra a las regiones A o D, entonces continuará alejándose del punto de reposo. Decimos que ambos puntos de reposo son **inestables**, lo que (en este contexto) significa que existen trayectorias cerca de cada punto que se alejan de ellos. Dichas características se indican en la figura 9.30.

Resulta que en cada uno de los semiplanos arriba y abajo de la recta $y = a/b$, existe exactamente una trayectoria que tiende al punto de equilibrio $(m/n, a/b)$ (véase el ejercicio 7). Arriba de estas dos trayectorias la población de percas aumenta, y debajo de ella disminuye. Las dos trayectorias que tienden al punto de equilibrio se muestran en la figura 9.31.

Nuestro análisis gráfico nos lleva a concluir que, bajo las suposiciones del modelo de cazadores en competencia, no es probable que ambas especies alcancen niveles de equilibrio. Eso es porque sería casi imposible que las poblaciones de peces se movieran todo el tiempo exactamente a lo largo de las dos trayectorias de aproximación. Además, el punto de las poblaciones iniciales (x_0, y_0) determina cuál de las dos especies es más probable que sobreviva a lo largo del tiempo, y la coexistencia de las especies es muy poco probable.

Limitaciones del método de análisis del plano fase

A diferencia de la situación para el modelo de cazadores en competencia, no siempre es posible determinar el comportamiento de las trayectorias cerca de un punto de reposo. Por ejemplo, suponga que sabemos que las trayectorias cerca de un punto de reposo, elegido aquí como el origen (0, 0), se comportan como en la figura 9.32. La información de la figura 9.32 no es suficiente para distinguir entre las tres posibles trayectorias que se describen en la figura 9.33. Incluso si determináramos que una trayectoria cerca de un punto de equilibrio se parece a la figura 9.33c, no seríamos capaces de saber cómo se comportan las otras trayectorias. Podría suceder que una trayectoria cercana al origen se comporta como los movimientos que se representan en las figuras 9.33a o 9.33b. La trayectoria en espiral de la figura 9.33b en realidad nunca alcanza el punto de reposo en un periodo finito.

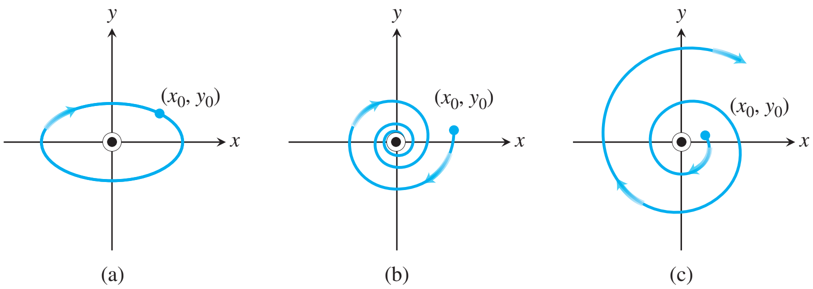


FIGURA 9.33 Tres posibles movimientos de las trayectorias: (a) movimiento periódico, (b) movimiento hacia un punto de reposo estable y (c) movimiento cerca de un punto de reposo no estable.

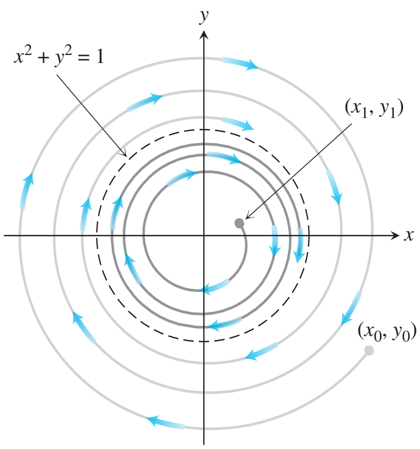


FIGURA 9.34 La solución $x^2 + y^2 = 1$ es un ciclo límite.

Otro tipo de comportamiento

Puede demostrarse que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + x - x(x^2 + y^2), \tag{2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2) \tag{2b}$$

tiene sólo un punto de equilibrio en (0, 0). Cualquier trayectoria que inicia en la circunferencia unitaria la recorre en el sentido de las manecillas del reloj porque, cuando $x^2 + y^2 = 1$, tenemos $dy/dx = -x/y$ (véase el ejercicio 2). Si una trayectoria inicia dentro del círculo unitario, gira en espiral hacia fuera, aproximándose a la circunferencia cuando $t \to \infty$. Si una trayectoria inicia fuera del círculo unitario, gira en espiral hacia dentro y otra vez tiende asintóticamente a la circunferencia cuando $t \to \infty$. La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se denomina **ciclo límite** del sistema (figura 9.34). En este sistema, los valores de x y y en algún momento se vuelven periódicos.

Ejercicios 9.5

1. Liste tres consideraciones importantes que se ignoran en el modelo de cazadores en competencia como se presentó en el texto.
2. Para el sistema (2a) y (2b), demuestre que cualquier trayectoria que inicia en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ recorrerá ésta en una solución periódica. Primero introduzca coordenadas polares y rescriba el sistema como $dr/dt = r(1 - r^2)$ y $-d\theta/dt = -1$.
3. Desarrolle un modelo para el crecimiento de truchas y percas, suponiendo que, en aislamiento, las truchas muestran un decaimiento exponencial [por lo que $a < 0$ en las ecuaciones (1a) y (1b)] y que la población de percas crece de manera logística con una población límite M. Analice gráficamente el movimiento en la vecindad de los puntos de reposo de su modelo. ¿Es posible la coexistencia?
4. ¿Cómo se validaría el modelo de cazadores en competencia? Incluya en su análisis cómo podrían estimarse las diferentes constantes a, b, m y n. ¿Cómo podrían utilizar el modelo las autoridades estatales de conservación para asegurar la supervivencia de ambas especies?
5. Considere otro modelo de cazadores en competencia definido mediante

$$\frac{dx}{dt} = a\left(1 - \frac{x}{k_1}\right)x - bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = m\left(1 - \frac{y}{k_2}\right)y - nxy,$$

donde x y y representan las poblaciones de truchas y percas, respectivamente.

a. ¿Qué suposiciones implícitas se hicieron acerca del crecimiento de truchas y percas en ausencia de competencia?

b. Interprete las constantes a, b, m, n, k_1 y k_2 en términos del problema físico.

c. Realice un análisis gráfico:

i) Encuentre los posibles niveles de equilibrio.

ii) Determine si es posible la coexistencia.

iii) Seleccione varios puntos típicos de inicio y bosqueje las trayectorias típicas en el plano fase.

iv) Interprete los resultados predichos por su análisis gráfico en términos de las constantes a, b, m, n, k_1 y k_2.

Nota: Cuando realice el inciso (iii), debería darse cuenta de que existen cinco casos. Necesitará analizar los cinco casos.

6. **Un modelo económico** Considere el siguiente modelo económico. Sea P el precio de un solo artículo en el mercado. Sea Q la cantidad de artículos disponibles en el mercado. Tanto P como Q son funciones del tiempo. Si uno considera el precio y la cantidad como dos especies que interactúan, podría establecerse el siguiente modelo:

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(\frac{b}{Q} - P\right),$$
$$\frac{dQ}{dt} = cQ(fP - Q),$$

donde a, b, c y f son constantes positivas. Justifique y analice la idoneidad del modelo.

a. Si $a = 1$, $b = 20{,}000$, $c = 1$ y $f = 30$, determine los puntos de equilibrio del sistema. Si es posible, clasifique cada punto de equilibrio con respecto a su estabilidad. Si un punto no puede clasificarse rápidamente, dé alguna explicación.

b. Realice un análisis gráfico de estabilidad para determinar qué sucede con los niveles de P y Q cuando el tiempo aumenta.

c. Dé una interpretación económica de las curvas que determinan los puntos de equilibrio.

7. **Dos trayectorias que tienden al equilibrio** Demuestre que las dos trayectorias que conducen a $(m/n, a/b)$ mostradas en la figura 9.31 son las únicas; hágalo llevando a cabo los siguientes pasos.

a. Con base en el sistema (1a) y (1b) aplique la regla de la cadena para deducir la siguiente ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m - nx)y}{(a - by)x}.$$

b. Separe las variables, integre y haga una exponenciación para obtener

$$y^a e^{-by} = Kx^m e^{-nx},$$

donde K es una constante de integración.

c. Sea $f(y) = y^a/e^{by}$ y $g(x) = x^m/e^{nx}$. Demuestre que $f(y)$ tiene un máximo único de $M_y = (a/eb)^a$, cuando $y = a/b$, como se muestra en la figura 9.35. De forma análoga, demuestre que $g(x)$ tiene un máximo único $M_x = (m/en)^m$ cuando $x = m/n$, como se indica también en la figura 9.35.

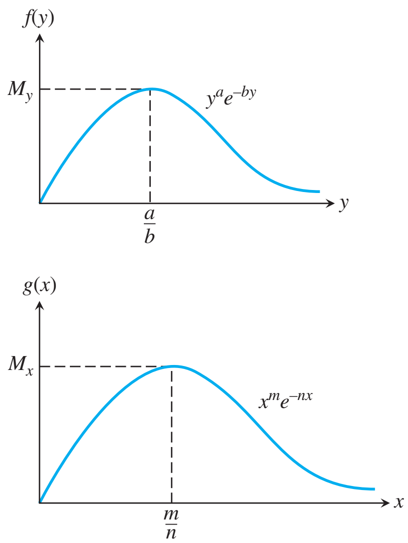


FIGURA 9.35 Gráficas de las funciones $f(y) = y^a/e^{by}$ y $g(x) = x^m/e^{nx}$.

d. Considere lo que sucede cuando (x, y) tiende a $(m/n, a/b)$. Tome límites en el inciso (b) cuando $x \to m/n$ y $y \to a/b$ para mostrar que

$$\lim_{x \to m/n} \left[\left(\frac{y^a}{e^{by}}\right)\left(\frac{e^{nx}}{x^m}\right)\right] = K$$

o $M_y/M_x = K$. Por lo tanto, cualquier trayectoria solución que tienda a $(m/n, a/b)$ debe satisfacer

$$\frac{y^a}{e^{by}} = \left(\frac{M_y}{M_x}\right)\left(\frac{x^m}{e^{nx}}\right).$$

e. Demuestre que sólo una trayectoria puede tender a $(m/n, a/b)$ desde abajo de la recta $y = a/b$. Seleccione $y_0 < a/b$. A partir de la figura 9.35, puede ver que $f(y_0) < M_y$, lo cual implica que

$$\frac{M_y}{M_x}\left(\frac{x^m}{e^{nx}}\right) = y_0{}^a/e^{by_0} < M_y.$$

Esto, a la vez, implica que

$$\frac{x^m}{e^{nx}} < M_x.$$

La figura 9.35 nos dice que para $g(x)$ existe un único valor $x_0 < m/n$ que satisface la última desigualdad. Esto es, para cada $y < a/b$ existe un único valor de x que satisface la ecuación en el inciso (d). Así que sólo puede existir una trayectoria solución que tienda a $(m/n, a/b)$ por abajo, como se muestra en la figura 9.36.

f. Utilice un argumento similar para demostrar que la trayectoria solución que conduce a $(m/n, a/b)$ es única si $y_0 > a/b$.

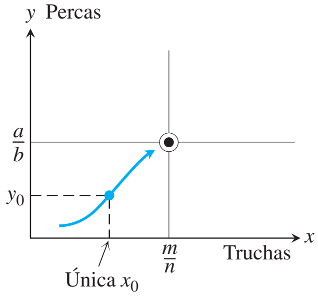


FIGURA 9.36 Para cualquier $y < a/b$, sólo una trayectoria solución lleva al punto de reposo $(m/n, a/b)$.

8. Demuestre que la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = F(x, y, y')$ puede reducirse a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = z,$$
$$\frac{dz}{dx} = F(x, y, z).$$

¿Puede hacerse algo similar con la ecuación diferencial, de orden $y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$?

Ecuaciones de Lotka-Volterra para un modelo presa-depredador

En 1925 Lotka y Volterra introdujeron las ecuaciones *presa-depredador*, un sistema de ecuaciones que modela las poblaciones de dos especies, una de las cuales es la presa de la otra. Suponga que $x(t)$ representa el número de conejos que viven en una región en el instante t, y $y(t)$ es el número de zorros en la misma región. Conforme transcurre el tiempo, el número de conejos crece a una tasa proporcional a su población y disminuye a una tasa proporcional al número de encuentros entre conejos y zorros. Los zorros, que compiten por alimento, aumentan su número a una tasa proporcional al número de encuentros con conejos, pero disminuyen a una tasa proporcional al número de zorros. Se supone que el número de encuentros entre conejos y zorros es proporcional al producto de las dos poblaciones. Estas suposiciones conducen al sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x$$
$$\frac{dy}{dt} = (-c + dx)y$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Los valores de estas constantes varían de acuerdo con la situación específica que se modela. Es posible estudiar la naturaleza de los cambios de la población sin dar valores específicos a tales constantes.

9. ¿Qué sucede con la población de conejos si no hay zorros?

10. ¿Qué sucede con la población de zorros si no hay conejos?

11. Demuestre que $(0, 0)$ y $(c/d, a/b)$ son puntos de equilibrio. Explique el significado de cada uno de estos puntos.

12. Demuestre, mediante diferenciación, que la función

$$C(t) = a \ln y(t) - by(t) - dx(t) + c \ln x(t)$$

es constante cuando $x(t)$ y $y(t)$ son positivas y satisfacen las ecuaciones del modelo presa depredador.

Mientras que x y y pueden cambiar con el tiempo, $C(t)$ no. De esta forma, C es una cantidad constante y su existencia proporciona una *ley de conservación*. Una trayectoria que inicia en un punto (x, y) en el instante $t = 0$ da un valor de C que permanece sin cambio en los tiempos futuros. Cada valor de la constante C da una trayectoria para el sistema autónomo y dichas trayectorias son cerradas, en vez de ser espirales hacia dentro o hacia fuera. Las poblaciones de conejos y zorros oscilan en ciclos a lo largo de una trayectoria fija. La figura 9.37 indica varias trayectorias para el sistema presa-depredador.

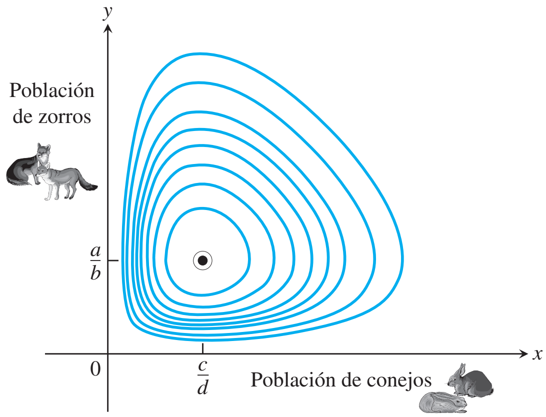


FIGURA 9.37 Algunas trayectorias a lo largo de la cual C se conserva.

13. Mediante un procedimiento similar al del texto para el modelo de cazadores en competencia, demuestre que la trayectoria se recorre en dirección contraria al de las manecillas del reloj cuando t aumenta.

A lo largo de cada trayectoria, las poblaciones de conejos y zorros fluctúan entre sus niveles máximo y mínimo. Los niveles máximo y mínimo para la población de conejos ocurren donde la trayectoria interseca a la recta horizontal $y = a/b$. Para la población de zorros, ocurren donde la trayectoria interseca a la recta vertical $x = c/d$. Cuando la población de conejos está en su máximo, la población de zorros está debajo de su valor máximo. Cuando la población de conejos disminuye desde este punto en el tiempo, nos movemos en contra de las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria y la población de zorros crece hasta que alcanza su valor máximo. En este punto, la población de conejos ha disminuido a $x = c/d$ y ya no está en su valor máximo. Vemos que la población de zorros alcanza su valor máximo en un tiempo posterior al de los conejos. La población de depredadores se *queda retrasada* con respecto a la de las presas para alcanzar sus valores máximos. Este efecto de retraso se aprecia en la figura 9.38, donde se grafica $x(t)$ y $y(t)$.

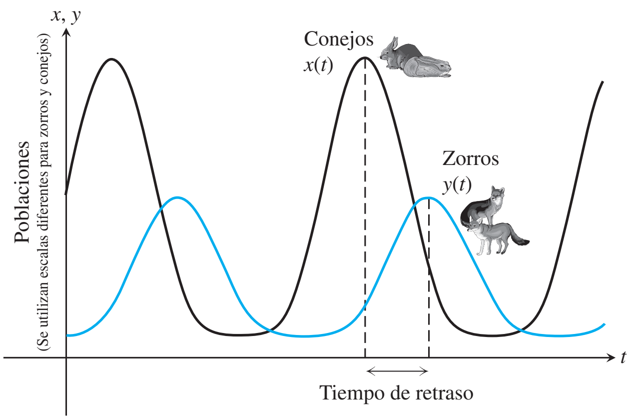


FIGURA 9.38 Las poblaciones de zorros y de conejos oscilan de manera periódica, con el máximo de la población de zorros retrasada con respecto al máximo de la población de conejos.

14. En algún momento durante un ciclo de la trayectoria, un lobo invade el territorio de conejos y zorros, come algunos conejos y luego se va. ¿Esto significa que, a partir de entonces, la población de zorros tendrá un valor máximo menor? Explique su respuesta.

Capítulo 9 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una ecuación diferencial de primer orden? ¿Cuándo una función es una solución de tal ecuación?
2. ¿Qué es una solución general? ¿Qué es una solución particular?
3. ¿Qué es el campo direccional de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$? ¿Qué puede aprender de tales campos?
4. Describa el método de Euler para resolver numéricamente el problema con valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Dé un ejemplo. Comente la precisión del método. ¿Por qué necesitaría resolver de manera numérica un problema con condición inicial?
5. ¿Cómo resuelve ecuaciones diferenciales lineales de primer orden?
6. ¿Qué es una trayectoria ortogonal de una familia de curvas? Describa cómo se determina para una familia de curvas dada.
7. ¿Qué es una ecuación diferencial autónoma? ¿Cuáles son los valores de equilibrio? ¿En qué difieren de los puntos críticos? ¿Qué es un valor de equilibrio estable? ¿Qué es un valor de equilibrio inestable?
8. ¿Cómo construye la línea de fase para una ecuación diferencial autónoma? ¿Cómo es que la línea de fase le ayuda a generar una gráfica que muestre cualitativamente una solución a la ecuación diferencial?
9. ¿Por qué el modelo exponencial no es realista para predecir el crecimiento poblacional a largo plazo? ¿Cómo corrige el modelo logístico la deficiencia del modelo exponencial para el crecimiento poblacional? ¿Qué es la ecuación diferencial logística? ¿Cuál es la forma de su solución? Describa la gráfica de la solución logística.
10. ¿Qué es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales? ¿Qué es una solución para tal sistema? ¿Qué es una trayectoria del sistema?

Capítulo 9 Ejercicios de práctica

En los ejercicios 1 a 16 resuelva la ecuación diferencial.

1. $y' = xe^y\sqrt{x-2}$

2. $y' = xye^{x^2}$

3. $\sec x\, dy + x\cos^2 y\, dx = 0$

4. $2x^2\, dx - 3\sqrt{y}\csc x\, dy = 0$

5. $y' = \dfrac{e^y}{xy}$

6. $y' = xe^{x-y}\csc y$

7. $x(x-1)\, dy - y\, dx = 0$

8. $y' = (y^2-1)x^{-1}$

9. $2y' - y = xe^{x/2}$

10. $\dfrac{y'}{2} + y = e^{-x}\operatorname{sen} x$

11. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$

12. $xy' - y = 2x\ln x$

13. $(1+e^x)\, dy + (ye^x + e^{-x})\, dx = 0$

14. $e^{-x}\, dy + (e^{-x}y - 4x)\, dx = 0$

15. $(x+3y^2)\, dy + y\, dx = 0$ (*Sugerencia:* $d(xy) = y\, dx + x\, dy$)

16. $x\, dy + (3y - x^{-2}\cos x)\, dx = 0, \quad x > 0$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 17 a 22 resuelva el problema con valor inicial.

17. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x, \quad x > -1, \quad y(0) = 1$

18. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$

19. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = -1$

20. $x\, dy + (y - \cos x)\, dx = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

21. $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}, \quad y(1) = 0$

22. $y\, dx + (3x - xy + 2)\, dy = 0, \quad y(2) = -1, \quad y < 0$

Método de Euler

En los ejercicios 23 y 24 utilice el método que se indica para resolver el problema con valor inicial en el intervalo dado, iniciando en x_0 con $dx = 0.1$.

T **23.** $y' = y + \cos x, \quad y(0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 2; \quad x_0 = 0$

T **24.** $y' = (2 - y)(2x + 3), \quad y(-3) = 1; -3 \leq x \leq -1; \quad x_0 = -3$

En los ejercicios 25 y 26 utilice el método de Euler con $dx = 0.05$ para estimar $y(c)$, donde y es la solución al problema con valor inicial.

T **25.** $c = 3; \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 2y}{x + 1}, \quad y(0) = 1$

T **26.** $c = 4; \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 2y + 1}{x}, \quad y(1) = 1$

En los ejercicios 27 y 28 utilice el método de Euler para resolver de manera gráfica el problema con condición inicial, iniciando en $x_0 = 0$ con

a. $dx = 0.1$. **b.** $dx = -0.1$.

T **27.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{x+y+2}}, \quad y(0) = -2$

T **28.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + y}{e^y + x}, \quad y(0) = 0$

Campos direccionales

En los ejercicios 29 a 32, elabore un bosquejo del campo direccional de la ecuación. Luego agregue a su bosquejo la curva solución que pase por el punto $P(1, -1)$. Utilice el método de Euler con $x_0 = 1$ y $dx = 0.2$ para estimar $y(2)$. Redondee su respuesta a cuatro decimales. Por comparación, determine el valor exacto de $y(2)$.

29. $y' = x$ **30.** $y' = 1/x$

31. $y' = xy$ **32.** $y' = 1/y$

Ecuaciones diferenciales autónomas y líneas de fase

En los ejercicios 33 y 34:

a. Identifique los valores de equilibrio. ¿Cuáles son estables y cuáles son inestables?

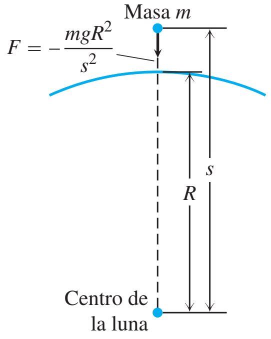
b. Construya una línea de fase. Identifique los signos de y' y y''.

c. Elabore un bosquejo de una selección representativa de curvas solución.

33. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 1$ **34.** $\dfrac{dy}{dx} = y - y^2$

Aplicaciones

35. Velocidad de escape La atracción gravitacional f ejercida por una luna sin atmósfera sobre un cuerpo de masa m a una distancia s del centro de la luna está dada por la ecuación $F = -mg\,R^2 s^{-2}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la luna y R es el radio de la luna (véase la figura). La fuerza f es negativa, ya que actúa en la dirección que disminuye s.



a. Si el cuerpo se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la luna, con una velocidad inicial v_0 en el instante $t = 0$, utilice la segunda ley de Newton, $f = ma$, para demostrar que la velocidad del cuerpo en la posición s está dada mediante la ecuación

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0{}^2 - 2gR.$$

Así, la velocidad permanece positiva mientras $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. La velocidad $v_0 = \sqrt{2gR}$ es la **velocidad de escape** de la luna. Un cuerpo lanzado hacia arriba con esta velocidad o mayor escapará de la atracción gravitacional de la luna.

b. Demuestre que si $v_0 = \sqrt{2gR}$, entonces

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}.$$

36. Deslizamiento hasta detenerse La tabla 9.6 indica la distancia s (en metros) que se deslizó Johnathon Krueger en patines de línea en t segundos. Determine un modelo para su posición en la forma de la ecuación (2) de la sección 9.3. Su velocidad inicial fue $v_0 = 0.86$ m/seg, su masa $m = 30.84$ kg (él pesa 68 lb) y la distancia total que se deslizó fue de 0.97 m.

TABLA 9.6 Datos del patinaje de Johnathon Krueger

t (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)	*t* (seg)	*s* (m)
0	0	0.93	0.61	1.86	0.93
0.13	0.08	1.06	0.68	2.00	0.94
0.27	0.19	1.20	0.74	2.13	0.95
0.40	0.28	1.33	0.79	2.26	0.96
0.53	0.36	1.46	0.83	2.39	0.96
0.67	0.45	1.60	0.87	2.53	0.97
0.80	0.53	1.73	0.90	2.66	0.97

Capítulo 9 Ejercicios adicionales y avanzados

Teoría y aplicaciones

1. Transporte a través de la membrana de una célula En algunas condiciones, el resultado del movimiento de una sustancia disuelta que cruza la membrana de una célula se describe mediante la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = k\frac{A}{V}(c - y).$$

En esta ecuación, y es la concentración de la sustancia dentro de la célula y dy/dt es la tasa a la cual y cambia con respecto al tiempo. Las letras k, A, V y c representan constantes; k es el *coeficiente de permeabilidad* (una propiedad de la membrana), A es el área de la superficie de la membrana, V es el volumen de la célula, y c es la concentración de la sustancia fuera de la célula. La ecuación dice que la tasa a la cual la concentración cambia dentro de la célula es proporcional a la diferencia entre la concentración en ésta y la concentración en el exterior.

a. Resuelva la ecuación para $y(t)$, usando y_0 para denotar $y(0)$.

b. Determine la concentración de estado estable, $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

2. Altura de un cohete Si una fuerza externa F actúa sobre un sistema cuya masa varía con el tiempo, la ley de Newton del movimiento es

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v + u)\frac{dm}{dt}.$$

En esta ecuación, m es la masa del sistema en el instante t, v su velocidad, y $v + u$ es la velocidad de la masa que entra (o sale) del sistema a una tasa dm/dt. Suponga que un cohete de masa inicial m_0 parte del reposo, pero es conducido hacia arriba por medio de la combustión de parte de su masa, directamente hacia atrás, a una tasa constante de $dm/dt = -b$ unidades por segundo y a una velocidad constante relativa del cohete de $u = -c$. La única fuerza externa que actúa sobre el cohete es $F = -mg$ debida a la gravedad. Considerando tales suposiciones, demuestre que la altura del cohete por arriba del suelo al cabo de t segundos (t pequeño comparado con m_0/b) es

$$y = c\left[t + \frac{m_0 - bt}{b}\ln\frac{m_0 - bt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2.$$

3. a. Suponga que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$. Utilice la primera parte del teorema fundamental del cálculo para demostrar que cualquier función y que satisface la ecuación

$$v(x)y = \int v(x)Q(x)\,dx + C$$

para $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ es una solución de la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

b. Si $C = y_0 v(x_0) - \int_{x_0}^{x} v(t)Q(t)\,dt$, entonces demuestre que cualquier solución y en el inciso (a) satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

4. (*Continuación del ejercicio 3*). Suponga las hipótesis del ejercicio 3 y que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal de primer orden que satisfacen la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

a. Verifique que $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ satisface el problema con valor inicial

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0.$$

b. Para el factor integrante $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$, demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(v(x)[y_1(x) - y_2(x)]\right) = 0.$$

Concluya que $v(x)[y_1(x) - y_2(x)] \equiv$ constante.

c. Con base en el inciso (a), tenemos $y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0$. Como $v(x) > 0$ para $a < x < b$, utilice el inciso (b) para establecer que $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$ en el intervalo (a, b). Por lo tanto, $y_1(x) = y_2(x)$ para toda $a < x < b$.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

se denomina *homogénea*. Puede transformarse en una ecuación cuyas variables son separables al definir una nueva variable $v = y/x$. Entonces, $y = vx$ y

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

La sustitución en la ecuación diferencial original y al agrupar los términos con variables semejantes da lugar a la ecuación con variables separables

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - F(v)} = 0.$$

Después de resolver la ecuación separable, la solución de la ecuación original se obtiene cuando remplazamos v por y/x.

Resuelva las ecuaciones homogéneas en los ejercicios 5 a 10. Primero ponga la ecuación en la forma de una ecuación homogénea.

5. $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

6. $x^2\,dy + (y^2 - xy)\,dx = 0$

7. $(xe^{y/x} + y)\,dx - x\,dy = 0$

8. $(x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0$

9. $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y - x}{x}$

10. $\left(x \operatorname{sen}\dfrac{y}{x} - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$

Capítulo 9 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo de Mathematica/Maple

Dosis de medicamentos: ¿Son efectivas? ¿Son seguras?
Formule y resuelva un modelo con condición inicial para la absorción de un medicamento en el torrente sanguíneo.

Ecuaciones diferenciales de primer orden y campos direccionales
Trace los campos direccionales y las curvas solución para varias condiciones iniciales de ecuaciones diferenciales de primer orden seleccionadas.

10

SUCESIONES Y SERIES INFINITAS

INTRODUCCIÓN Todos sabemos cómo sumar dos números, o incluso varios. Pero, ¿cómo sumar una cantidad infinita de números? En este capítulo responderemos tal pregunta, que es parte de la teoría de sucesiones y series infinitas.

Una aplicación de esta teoría es un método para representar una función derivable conocida $f(x)$ como una suma infinita de potencias de x, de manera que se vea como un "polinomio con un número infinito de términos". Además, el método amplía nuestro conocimiento de cómo evaluar, derivar e integrar polinomios, de forma que es posible trabajar con funciones más generales que las que nos hemos encontrado hasta ahora. Con frecuencia, las nuevas funciones son soluciones de problemas importantes en la ciencia y la ingeniería.

10.1 Sucesiones

ENSAYO HISTÓRICO

Sucesiones y series

Las sucesiones son fundamentales en el estudio de series infinitas y en muchas aplicaciones de matemáticas. Vimos un ejemplo de una sucesión cuando estudiamos el método de Newton en la sección 4.6. Allí produjimos una sucesión de aproximaciones x_n que es cada vez más cercana a la raíz de una función derivable. Ahora analizaremos sucesiones generales de números y las condiciones en las cuales convergen.

Representación de sucesiones

Una sucesión es una lista de números

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

en un orden dado. Cada a_1, a_2, a_3, etcétera, representa un número. Éstos son los **términos** de la sucesión. Por ejemplo, la sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots$$

tiene primer término $a_1 = 2$, segundo término $a_2 = 4$ y n-ésimo término $a_n = 2n$. El entero n se denomina **índice** de a_n e indica en dónde aparece a_n en la lista. El orden es importante. La sucesión 2, 4, 6, 8, … no es la misma que la sucesión 4, 2, 6, 8, …

Podemos considerar a la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

como una función que envía el 1 a a_1, 2 a a_2, 3 a a_3 y en general envía el entero positivo n al n-ésimo término a_n. Con mayor precisión, una **sucesión infinita** de números es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.

La función asociada a la sucesión

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, 2n, \dots$$

envía 1 a $a_1 = 2$, 2 a $a_2 = 4$ y así sucesivamente. El comportamiento general de dicha sucesión se describe por medio de la fórmula $a_n = 2n$.

Igualmente podemos hacer que el dominio sean los enteros mayores que un número dado n_0 y también permitimos las sucesiones de este tipo. Por ejemplo, la sucesión

$$12, 14, 16, 18, 20, 22 \ldots$$

se describe por medio de la fórmula $a_n = 10 + 2n$. También puede hacerse por medio de la simple fórmula $b_n = 2n$, donde el índice inicia en 6 y aumenta. Para tener fórmulas más sencillas, permitimos que el índice de la sucesión inicie en cualquier entero. En la sucesión anterior, $\{a_n\}$ inicia con a_1 mientras que $\{b_n\}$ inicia con b_6.

Las sucesiones pueden describirse anotando las reglas que especifican sus elementos, tal como

$$a_n = \sqrt{n}, \qquad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{n-1}{n}, \qquad d_n = (-1)^{n+1},$$

o bien, al listar sus términos,

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\right\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{c_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{d_n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}.$$

En ocasiones, también escribimos

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

La figura 10.1 muestra dos formas de representar de manera gráfica las sucesiones. La primera coloca los primeros puntos, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ en el eje real. El segundo método presenta la gráfica de la función que define a la sucesión. La función sólo está definida para entradas enteras, mientras la gráfica consiste en puntos en el plano xy, ubicados en $(1, a_1)$, $(2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$.

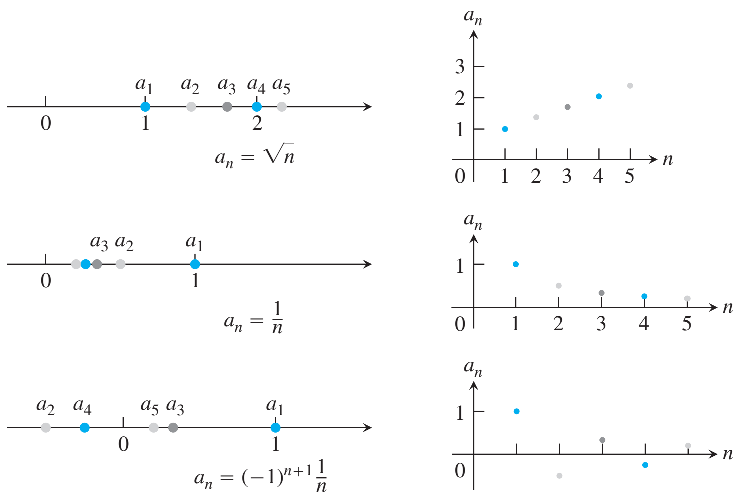


FIGURA 10.1 Las sucesiones pueden representarse como puntos en una recta real o como puntos en el plano, donde el eje horizontal n es el número índice del término y el eje vertical a_n es su valor.

Convergencia y divergencia

En ocasiones, los números en una sucesión se aproximan a un solo valor conforme el índice n crece. Lo anterior sucede en la sucesión cuyos términos se aproximan a 0 cuando n se hace grande, y en la sucesión

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

cuyos términos se aproximan a 1. Por otra parte, sucesiones como

$$\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

cuyos términos se aproximan a 1. Por otra parte, sucesiones como

$$\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

tienen términos que se hacen más grandes que cualquier número cuando n aumenta, en tanto sucesiones como

$$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$$

saltan de 1 a -1, nunca convergen en un solo valor. La siguiente definición capta el significado de tener una sucesión que converge a un valor límite. Indica que si avanzamos en la sucesión, tomando el índice n mayor que algún valor N, la diferencia entre a_n y el límite de la sucesión se hace menor que cualquier número preestablecido $\epsilon > 0$.

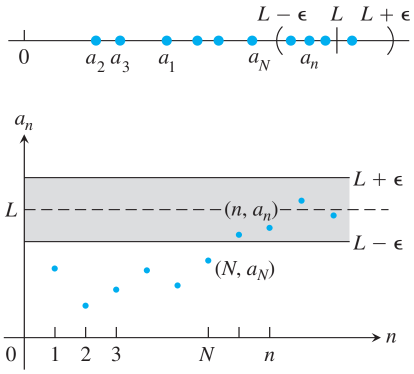


FIGURA 10.2 En la representación de una sucesión como puntos en el plano, $a_n \to L$ si $y = L$ es una asíntota horizontal de la sucesión de puntos $\{(n, a_n)\}$. En esta figura, todas las a_n, después de a_N, están a menos de ϵ de L.

DEFINICIONES La sucesión $\{a_n\}$ **converge** al número L, si para todo número positivo ϵ existe un entero N tal que para toda n

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \epsilon.$$

Si no existe tal número L, decimos que $\{a_n\}$ **diverge**.

Si $\{a_n\}$ converge a L, escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, o simplemente $a_n \to L$, y llamamos a L el límite de la sucesión (figura 10.2).

La definición es muy similar a la definición del límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ ($\lim_{x\to\infty} f(x)$, en la sección 2.6). Explotaremos tal relación para calcular límites de sucesiones.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Nicole Oresme
(ca. 1320–1382)

EJEMPLO 1 Demuestre que

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} k = k$ (k cualquier constante)

Solución

(a) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos demostrar que existe un entero N, tal que para toda n

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Dicha implicación se cumple si $(1/n) < \epsilon$ o $n > 1/\epsilon$. Si N es cualquier entero mayor que $1/\epsilon$, la implicación se cumplirá para toda $n > N$. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

(b) Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos demostrar que existe un entero N, tal que para toda n

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |k - k| < \epsilon.$$

Como $k - k = 0$, es posible utilizar cualquier entero positivo para N y la implicación se cumplirá. Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} k = k$ para cualquier constante k. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que la sucesión $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ diverge.

Solución Suponga que la sucesión converge a algún número L. Si elegimos $\epsilon = 1/2$ en la definición de límite, todos los términos a_n de la sucesión con índice n mayor que algún N deben estar a no más de $\epsilon = 1/2$ de L. Como el número 1 aparece en forma repetida como un elemento de la sucesión, debemos considerar que el número 1 está a menos de $\epsilon = 1/2$ de distancia de L. Se sigue que $|L - 1| < 1/2$ o, de manera equivalente, $1/2 < L < 3/2$.

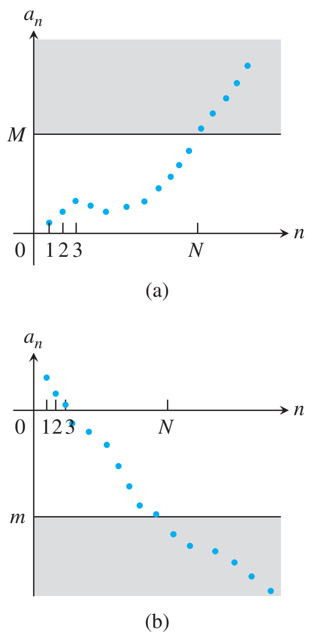


FIGURA 10.3 a) La sucesión diverge a ∞ porque, sin importar qué número M se elija, los términos de la sucesión, a partir de algún índice N, están en la banda sombreada por arriba de M. (b) La sucesión diverge a $-\infty$, pues todos los términos después de algún índice N están por debajo de cualquier número elegido m.

De la misma forma, el número -1 aparece de manera repetida en la sucesión con índice arbitrariamente grande. Así que también debemos tener que $|L - (-1)| < 1/2$ o, de manera equivalente, $-3/2 < L < -1/2$. Pero el número L no puede estar en ambos intervalos $(1/2, 3/2)$ y $(-3/2, -1/2)$, ya que no se intersecan. Por lo tanto, no existe el límite L y la sucesión diverge.

Observe que el mismo argumento funciona para cualquier número positivo ϵ menor que 1, no sólo $1/2$. ■

La sucesión $\{\sqrt{n}\}$ también diverge, pero por una razón diferente. Cuando n aumenta, sus términos se hacen mayores que cualquier número fijo. Describimos el comportamiento de esta sucesión escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty .$$

Al escribir infinito como el límite de una sucesión, no decimos que la diferencia entre los términos a_n e ∞ se haga más pequeña cuando n aumenta. Ni aseguramos que existe algún número infinito al que la sucesión se aproxime. Sólo utilizamos una notación que refleja la idea de que tarde o temprano a_n se hace y permanece mayor que cualquier número fijo cuando n aumenta (véase la figura 10.3a). Los términos de una sucesión también pueden decrecer hacia menos infinito, como en la figura 10.3b.

DEFINICIÓN La sucesión $\{a_n\}$ **diverge a infinito** si para todo número M existe un entero N, tal que para todo n, $a_n > M$. Si se cumple la condición, escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to \infty .$$

De manera análoga, si para todo número m existe un entero N, tal que para todo $n > N$, tenemos $a_n < m$, entonces decimos que $\{a_n\}$ **diverge a menos infinito** y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to -\infty .$$

Una sucesión puede divergir sin que dicha divergencia sea a infinito o a menos infinito, como vimos en el ejemplo 2. Las sucesiones $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, \ldots\}$ y $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots\}$ son ejemplos de tales divergencias.

Cálculo de límites de sucesiones

Como las sucesiones son funciones con dominio restringido a los enteros positivos, no es demasiado sorprendente que los teoremas acerca de límites de funciones estudiados en el capítulo 2 tengan su versión para sucesiones.

TEOREMA 1 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, y sean A y B números reales. Las siguientes reglas se cumplen si $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

1. *Regla de la suma:* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
5. *Regla del cociente:* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

La demostración es semejante a la del teorema 1 de la sección 2.2, por lo que se omite.

EJEMPLO 3 Si combinamos el teorema 1 con los límites del ejemplo 1, tendremos

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1\cdot 0 = 0$ Regla del múltiplo constante y el ejemplo 1a

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$ Regla de la diferencia y el ejemplo 1a

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0\cdot 0 = 0$ Regla del producto

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4/n^6)-7}{1+(3/n^6)} = \frac{0-7}{1+0} = -7.$ Reglas de la suma y el cociente ■

Sea cuidadoso al aplicar el teorema 1. Por ejemplo, no dice que cada una de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tiene límite si su suma $\{a_n + b_n\}$ tiene un límite. Por ejemplo, $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ambas divergen, pero su suma $\{a_n + b_n\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$ claramente converge a 0.

Una consecuencia del teorema 1 es que todo múltiplo diferente de cero de una sucesión divergente, $\{a_n\}$, diverge. Suponga lo contrario, es decir, que $\{ca_n\}$ converge para algún número $c \neq 0$. Entonces, si tomamos $k = 1/c$, en la regla de la multiplicación por una constante en el teorema 1, veremos que la sucesión

$$\left\{\frac{1}{c}\cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

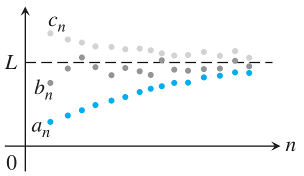


FIGURA 10.4 Los términos de la sucesión $\{b_n\}$ están encerrados entre los de $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$, lo que los lleva al mismo límite común L.

converge. Por lo tanto, $\{ca_n\}$ no puede converger, a menos que $\{a_n\}$ también converja. Si $\{a_n\}$ no converge, entonces $\{ca_n\}$ no converge.

El siguiente teorema es la versión para sucesiones del teorema de la compresión de la sección 2.2. En el ejercicio 109 se le pide que demuestre el teorema. (Véase la figura 10.4).

TEOREMA 2: El teorema de la compresión para sucesiones Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales. Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ se cumple para toda n mayor que algún índice N y si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces también $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Una consecuencia inmediata del teorema 2 es que si $|b_n| \leq c_n$ y $c_n \to 0$, entonces $b_n \to 0$, ya que $-c_n \leq b_n \leq c_n$. Utilizamos este hecho en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Como $1/n \to 0$, sabemos que

(a) $\frac{\cos n}{n} \to 0$ ya que $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$;

(b) $\frac{1}{2^n} \to 0$ ya que $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$;

(c) $(-1)^n\frac{1}{n} \to 0$ ya que $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$. ■

La aplicación de los teoremas 1 y 2 se amplió por medio de un teorema que establece que al usar funciones continuas para una sucesión convergente se produce una sucesión convergente. Establecemos el teorema, dejando su demostración como un ejercicio (ejercicio 110).

TEOREMA 3: El teorema de la función continua para sucesiones Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $a_n \to L$ y si f es una función continua en L, así como definida para toda a_n, entonces $f(a_n) \to f(L)$.

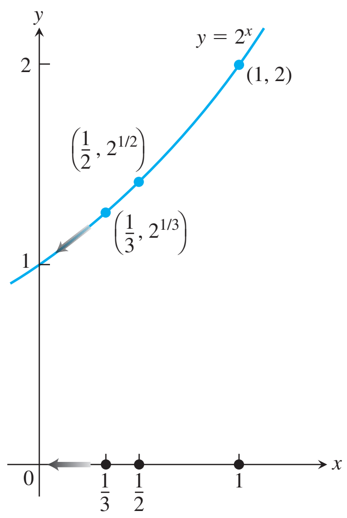


FIGURA 10.5 Cuando $n \to \infty$, $1/n \to 0$ y $2^{1/n} \to 2^0$ (ejemplo 6). Los términos de $\{1/n\}$ se muestran en el eje x; los términos de $\{2^{1/n}\}$ se muestran como los valores de y en la gráfica de $f(x) = 2x$.

EJEMPLO 5 Demuestre que $\sqrt{(n+1)/n} \to 1$.

Solución Sabemos que $(n+1)/n \to 1$. Si tomamos $f(x) = \sqrt{x}$ y $L = 1$ en el teorema 3, obtendremos $\sqrt{(n+1)/n} \to \sqrt{1} = 1$. ■

EJEMPLO 6 La sucesión $\{1/n\}$ converge a 0. Tomando $a_n = 1/n$, $f(x) = 2^x$ y $L = 0$ en el teorema 3, veremos que $2^{1/n} = f(1/n) \to f(L) = 2^0 = 1$. La sucesión $\{2^{1/n}\}$ converge a 1 (figura 10.5). ■

Uso de la regla de L'Hôpital

El siguiente teorema formaliza la relación entre $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Nos permite utilizar la regla de L'Hôpital para determinar los límites de algunas sucesiones.

TEOREMA 4 Suponga que $f(x)$ es una función definida para toda $x \geq n_0$ y que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq n_0$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Demostración Suponga que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Entonces, para cada número positivo ϵ, existe un número M, tal que para toda x,

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Sea N un entero mayor que M y mayor o igual a n_0. Entonces

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n = f(n) \quad \text{y} \quad |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon.$$ ■

EJEMPLO 7 Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Solución La función $(\ln x)/x$ está definida para toda $x \geq 1$ y coincide con la sucesión dada en los enteros positivos. Por lo tanto, por el teorema 4, $\lim_{n\to\infty}(\ln n)/n$ será igual a $\lim_{x\to\infty}(\ln x)/x$ si este último existe. Una sola aplicación de la regla de L'Hôpital indica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Concluimos que $\lim_{n\to\infty}(\ln n)/n = 0$. ■

Cuando utilizamos la regla de L'Hôpital para determinar el límite de una sucesión, con frecuencia tratamos a n como si fuera una variable continua real y derivamos directamente con respecto a n. Esto nos ahorra el trabajo de rescribir la fórmula para a_n, como lo hicimos en el ejemplo 7.

EJEMPLO 8 ¿La sucesión cuyo n-ésimo término es

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

converge? Si es así, determine el $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución El límite conduce a la forma indeterminada 1^∞. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital si cambiamos primero a la forma $\infty \cdot 0$ y tomamos el logaritmo natural de a_n:

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \text{Forma } \infty \cdot 0 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \text{Forma } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{Regla de L'Hôpital. Derivar el numerador y el denominador.} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2. \end{aligned}$$

Como $\ln a_n \to 2$ y $f(x) = e^x$ es continua, el teorema 4 nos dice que

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2.$$

La sucesión $\{a_n\}$ converge a e^2. ■

Límites que aparecen con frecuencia

El siguiente teorema indica algunos límites que surgen con frecuencia.

TEOREMA 5 Las seis sucesiones siguientes convergen a los límites que se listan:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \qquad (x > 0)$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$

5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (\text{cualquier } x)$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad (\text{cualquier } x)$

En las fórmulas (3) a la (6), x permanece fija cuando $n \to \infty$.

Demostración El primer límite se calculó en el ejemplo 7. Los siguientes dos pueden demostrarse tomando logaritmos y aplicando el teorema 4 (ejercicios 107 y 108). Las demostraciones restantes se incluyen en el apéndice 5. ■

EJEMPLO 9 Éstos son ejemplos de los límites en el teorema 5.

(a) $\displaystyle\frac{\ln(n^2)}{n} = \frac{2\ln n}{n} \to 2 \cdot 0 = 0$ — Fórmula 1

(b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to (1)^2 = 1$ — Fórmula 2

(c) $\sqrt[n]{3n} = 3^{1/n}(n^{1/n}) \to 1 \cdot 1 = 1$ — Fórmula 3 con $x = 3$ y fórmula 2

(d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ — Fórmula 4 con $x = -\frac{1}{2}$

Notación factorial
La notación $n!$ ("n factorial") significa el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ de los enteros desde 1 hasta n. Observe que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ Por lo tanto, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ y $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$. Definimos $0!$ como 1. Los factoriales crecen aún más rápido que las exponenciales, como lo sugiere la tabla. Los valores en la tabla fueron redondeados.

n	e^n	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22,026	3,628,800
20	4.9×10^8	2.4×10^{18}

(e) $\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$ Fórmula 5 con $x = -2$

(f) $\dfrac{100^n}{n!} \to 0$ Fórmula 6 con $x = 100$ ■

Definiciones recursivas

Hasta ahora hemos calculado cada a_n de manera directa a partir del valor de n. Pero en ocasiones las sucesiones se definen de **manera recursiva**, lo cual da

1. El valor (o valores) del (de los) término(s) inicial(es) y
2. Una regla, denominada **fórmula recursiva**, para calcular cualquier término posterior a partir de los términos que le preceden.

EJEMPLO 10

(a) Los enunciados $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definen la sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, de enteros positivos. Con $a_1 = 1$, tenemos $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 1 = 3$ y así sucesivamente.

(b) Los enunciados $a_1 = 1$ y $a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ definen la sucesión $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$, de factoriales. Con $a_1 = 1$, tenemos $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$, $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$, etcétera.

(c) Los enunciados $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para $n > 2$ definen la sucesión $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, de **números de Fibonacci**. Con $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$, tenemos $a_3 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = 3 + 2 = 5$ y así sucesivamente.

(d) Como vemos al aplicar el método de Newton (ejercicio 133), las proposiciones $x_0 = 1$ y $x_{n+1} = x_n - [(\operatorname{sen} x_n - x_n^2)/(\cos x_n - 2x_n)]$ para $n > 0$ definen una sucesión que, cuando converge, da una solución de la ecuación $\operatorname{sen} x - x^2 = 0$. ■

Sucesiones monótonas acotadas

Dos conceptos que desempeñan un papel importante en la determinación de la convergencia de una sucesión son los de sucesión *acotada* y de sucesión *monótona*.

DEFINICIONES Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para toda n. El número M es una **cota superior** para $\{a_n\}$. Si M es una cota superior para $\{a_n\}$, pero ningún número menor que M es una cota superior para $\{a_n\}$, entonces M es la **mínima cota superior** para $\{a_n\}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por abajo** si existe un número m tal que $a_n \geq m$ para toda n. El número m es una **cota inferior** para $\{a_n\}$. Si m es una cota inferior para $\{a_n\}$, pero ningún número mayor que m es una cota inferior para $\{a_n\}$, entonces m es la **máxima cota inferior** para $\{a_n\}$.

Si $\{a_n\}$ está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ está **acotada**. Si $\{a_n\}$ no está acotada, decimos que $\{a_n\}$ es una sucesión **no acotada**.

EJEMPLO 11

(a) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ no tiene cota superior, ya que en algún momento sobrepasa a todo número M. Sin embargo, está acotada por abajo por todo número real menor o igual a 1. El número $m = 1$ es la máxima cota inferior de la sucesión.

(b) La sucesión $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$ está acotada por arriba por todo número real mayor o igual a 1. La cota superior $M = 1$ es la mínima cota superior (ejercicio 125). La sucesión también está acotada por abajo por todo número menor o igual a $\dfrac{1}{2}$, que es su máxima cota inferior. ■

Las sucesiones convergentes están acotadas

Si una sucesión $\{a_n\}$ converge al número L, entonces por definición existe un número N tal que $|a_n - L| < 1$, si $n > N$. Esto es,

$$L - 1 < a_n < L + 1 \quad \text{para } n > N.$$

Si M es un número mayor que $L + 1$ y también mayor que la cantidad finita de números $a_1, a_2, \ldots, a_N$, entonces para todo índice n tenemos $a_n \leq M$, por lo que $\{a_n\}$ está acotada por arriba. De manera *an*áloga, si m es un número menor que $L - 1$ y menor que los números $a_1, a_2, \ldots, a_N$, entonces m es una cota inferior de la sucesión. Por lo tanto, todas las sucesiones convergentes están acotadas.

Aunque es cierto que toda sucesión convergente está acotada, existen sucesiones acotadas que no son convergentes. Un ejemplo es la sucesión acotada $\{(-1)^{n+1}\}$ analizada en el ejemplo 2. Aquí, el problema es que algunas sucesiones acotadas saltan dentro de una banda determinada por cualquier cota inferior m y cualquier cota superior M (figura 10.6). Un tipo importante de sucesión que no se comporta de esa manera es aquella en la que cada término es al menos tan grande, o al menos tan pequeño, como su predecesor.

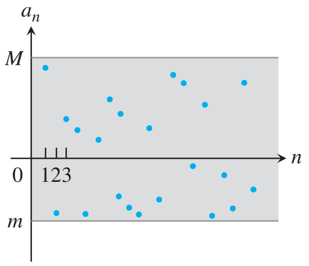


FIGURA 10.6 Algunas sucesiones acotadas saltan dentro de sus cotas y no convergen a límite alguno.

DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ es **no decreciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para toda n. Esto es, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ La sucesión es **no creciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n. La sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si es no decreciente o no creciente.

EJEMPLO 12

(a) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es no decreciente.

(b) La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ es no decreciente.

(c) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ es no creciente.

(d) La sucesión constante $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ es tanto no decreciente como no creciente.

(e) La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ es no monótona. ■

Una sucesión no decreciente que está acotada por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Asimismo, una sucesión no creciente acotada por abajo siempre cuenta con una máxima cota inferior. Tales resultados tienen como base la *propiedad de completez* de los números reales analizada en el apéndice 6. Ahora demostramos que si L es la mínima cota superior de una sucesión no decreciente, entonces la sucesión converge a L, y que si L es la máxima cota inferior de una sucesión no creciente, entonces la sucesión converge a L.

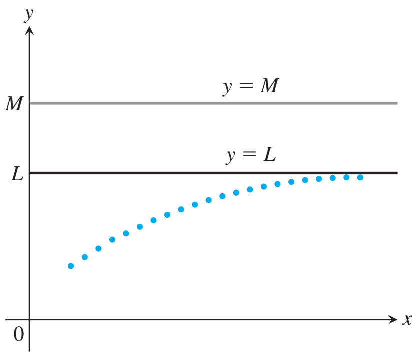


FIGURA 10.7 Si los términos de una sucesión no decreciente tienen una cota superior M, entonces tienen un límite $L \leq$ M.

TEOREMA 6: El teorema de la sucesión monótona Si una sucesión $\{a_n\}$ está acotada y es monótona, entonces la sucesión converge.

Demostración Suponga que $\{a_n\}$ es no decreciente, L es su mínima cota superior y trazamos los puntos $(1, a_1), (2, a_2), \ldots (n, a_n), \ldots$ en el plano xy. Si M es una cota superior de la sucesión, todos estos puntos estarán en o debajo de la recta $y = M$ (figura 10.7). La recta $y = L$ será la más baja. Ninguno de los puntos (n, a_n) estará por arriba de $y = L$, pero algunos estarán por arriba de cualquier recta inferior $y = L - \epsilon$, si ϵ es un número positivo. La sucesión converge a L, ya que

(a) $a_n \leq L$ para todos los valores de n y

(b) dado cualquier $\epsilon > 0$, existe al menos un entero N para el que $a_N > L - \epsilon$.

El hecho de que $\{a_n\}$ sea no decreciente, nos indica además que

$$a_n \geq a_N > L - \epsilon \qquad \text{para toda } n \geq N.$$

Por lo tanto, *todos* los números a_n posteriores al n-ésimo número estarán a menos de ϵ unidades de L. Ésta es precisamente la condición para que L sea el límite de la sucesión $\{a_n\}$.

La demostración para sucesiones no crecientes acotadas por abajo es similar. ■

Es importante hacer notar que el teorema 6 no dice que las sucesiones convergentes sean monótonas. La sucesión $\{(-1)^{n+1}/n\}$ converge y está acotada, pero no es monótona, ya que alterna entre valores positivos y negativos, cuando se aproxima a cero. Lo que indica el teorema es que una sucesión no decreciente converge cuando está acotada por arriba, aunque de otra forma diverge a infinito.

Ejercicios 10.1

Encontrar los términos de una sucesión

En cada uno de los ejercicios 1 a 6 proponga una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión $\{a_n\}$. Determine los valores de a_1, a_2, a_3 y a_4.

1. $a_n = \dfrac{1-n}{n^2}$

2. $a_n = \dfrac{1}{n!}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

4. $a_n = 2 + (-1)^n$

5. $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

6. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

Cada uno de los ejercicios 7 a 12 proporciona el primer término o los dos primeros términos de la sucesión con una fórmula recursiva para los términos restantes. Escriba los diez primeros términos de la sucesión.

7. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (1/2^n)$

8. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n/(n+1)$

9. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1}a_n/2$

10. $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = na_n/(n+1)$

11. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

12. $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}/a_n$

Encontrar la fórmula de una sucesión

En los ejercicios 13 a 26, halle una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión.

13. La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ — Números 1 con signos alternados

14. La sucesión $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ — Números 1 con signos alternados

15. La sucesión $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$ — Cuadrados de los enteros positivos, con signos alternados

16. La sucesión $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \ldots$ — Recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos, con signos alternados

17. $\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{12}, \dfrac{2^2}{15}, \dfrac{2^3}{18}, \dfrac{2^4}{21}, \ldots$ — Potencias de 2 divididas entre múltiplos de 3

18. $-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{3}{20}, \dfrac{5}{30}, \ldots$ — Enteros cuya diferencia es 2 divididos entre productos de enteros consecutivos

19. La sucesión $0, 3, 8, 15, 24, \ldots$ — Cuadrados de los enteros positivos disminuidos en 1

20. La sucesión $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$ — Enteros a partir de -3

21. La sucesión $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ — Uno de cada dos enteros positivos impares

22. La sucesión $2, 6, 10, 14, 18, \ldots$ — Uno de cada dos enteros positivos pares

23. $\dfrac{5}{1}, \dfrac{8}{2}, \dfrac{11}{6}, \dfrac{14}{24}, \dfrac{17}{120}, \ldots$ — Enteros cuya diferencia es 3 divididos entre factoriales

24. $\dfrac{1}{25}, \dfrac{8}{125}, \dfrac{27}{625}, \dfrac{64}{3125}, \dfrac{125}{15{,}625}, \ldots$ — Cubos de enteros positivos divididos por potencias de 5

25. La sucesión $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ — Números 1 y 0 alternados

26. La sucesión $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \ldots$ — Todos los enteros positivos se repiten

Convergencia y divergencia

¿Cuáles de las sucesiones $\{a_n\}$ en los ejercicios 27 a 90 convergen y cuáles divergen? Determine el límite de cada sucesión convergente.

27. $a_n = 2 + (0.1)^n$

28. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$

29. $a_n = \dfrac{1-2n}{1+2n}$

30. $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

31. $a_n = \dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

32. $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+5n+6}$

33. $a_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n-1}$

34. $a_n = \dfrac{1-n^3}{70-4n^2}$

35. $a_n = 1 + (-1)^n$

36. $a_n = (-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

37. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

38. $a_n = \left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)\left(3 + \dfrac{1}{2^n}\right)$

39. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

40. $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

41. $a_n = \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}$

42. $a_n = \dfrac{1}{(0.9)^n}$

43. $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right)$

44. $a_n = n\pi \cos(n\pi)$

45. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

46. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$

47. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

48. $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

49. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

50. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$

51. $a_n = 8^{1/n}$

52. $a_n = (0.03)^{1/n}$

53. $a_n = \left(1 + \dfrac{7}{n}\right)^n$

54. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

55. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

56. $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

57. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

58. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

59. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{1/n}}$

60. $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

61. $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

62. $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

63. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (*Sugerencia:* Compare con $1/n$.)

64. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

65. $a_n = \dfrac{n!}{10^{6n}}$

66. $a_n = \dfrac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

67. $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/(\ln n)}$

68. $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

69. $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

70. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

71. $a_n = \left(\dfrac{x^n}{2n+1}\right)^{1/n}, \quad x > 0$

72. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

73. $a_n = \dfrac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

74. $a_n = \dfrac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

75. $a_n = \tanh n$

76. $a_n = \operatorname{senh}(\ln n)$

77. $a_n = \dfrac{n^2}{2n-1} \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$

78. $a_n = n\left(1 - \cos \dfrac{1}{n}\right)$

79. $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

80. $a_n = (3^n + 5^n)^{1/n}$

81. $a_n = \tan^{-1} n$

82. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

83. $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

84. $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

85. $a_n = \dfrac{(\ln n)^{200}}{n}$

86. $a_n = \dfrac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

87. $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

88. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n}}$

89. $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

90. $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx, \quad p > 1$

Sucesiones definidas recursivamente

En los ejercicios 91 a 98, suponga que cada sucesión converge y determine su límite.

91. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{72}{1 + a_n}$

92. $a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + 6}{a_n + 2}$

93. $a_1 = -4, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$

94. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$

95. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$

96. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 12 - \sqrt{a_n}$

97. $2, 2 + \dfrac{1}{2}, 2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \ldots$

98. $\sqrt{1}, \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}, \ldots$

Teoría y ejemplos

99. El primer término de una sucesión es $x_1 = 1$. Cada término subsiguiente es la suma de todos los que le preceden:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Escriba una cantidad suficiente de términos de la sucesión para deducir una fórmula general para x_n que se cumpla para $n \geq 2$.

100. Una sucesión de números racionales se describe como sigue:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a + 2b}{a + b}, \ldots.$$

Aquí, los numeradores forman una sucesión, los denominadores una segunda sucesión y sus cocientes una tercera. Sean x_n y y_n, respectivamente, el numerador y el denominador de la n-ésima fracción $r_n = x_n/y_n$.

a. Verifique que $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ y, con mayor generalidad, que si $a^2 - 2b^2 = -1$ o $+1$, entonces

$$(a + 2b)^2 - 2(a + b)^2 = +1 \quad \text{o} \quad -1,$$

respectivamente.

b. Las fracciones $r_n = x_n/y_n$ tienden a un límite cuando n aumenta. ¿Cuál es ese límite? (*Sugerencia:* Utilice el inciso (a) para demostrar que $r_n^2 - 2 = \pm(1/y_n)^2$ y que y_n no es menor que n).

101. Método de Newton Las siguientes sucesiones provienen de la fórmula recursiva para el método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

¿Converge la sucesión? Si es así, ¿a qué valor? En cada caso, inicie identificando la función f que genera la sucesión.

a. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$

b. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

c. $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

102. a. Suponga que $f(x)$ es derivable para toda x en $[0, 1]$ y que $f(0) = 0$. Defina la sucesión $\{a_n\}$ por medio de la regla $a_n = nf(1/n)$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$. Utilice el resultado del inciso (a) para determinar los límites de las sucesiones $\{a_n\}$ siguientes.

b. $a_n = n \tan^{-1} \dfrac{1}{n}$

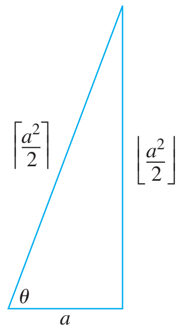
c. $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

d. $a_n = n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

103. Ternas pitagóricas Una terna de enteros positivos a, b y c se denomina **terna pitagórica** si $a^2 + b^2 = c^2$. Sea a un entero positivo impar y sean

$$b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor \quad \text{y} \quad c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$$

respectivamente el piso entero (máximo entero menor o igual) y el techo entero (mínimo entero mayor o igual) de $a^2/2$.



a. Demuestre que $a^2 + b^2 = c^2$. (*Sugerencia:* Deje que $a = 2n + 1$ y exprese b y c en términos de n).

b. Por medio de un cálculo directo, o con base en la figura anterior, determine

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}.$$

104. La raíz *n*-ésima de *n*!

a. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ y de aquí, por medio de la aproximación de Stirling (véase el ejercicio adicional 32a del capítulo 8), que

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \quad \text{para valores grandes de } n.$$

T **b.** Pruebe la aproximación del inciso (a) para $n = 40, 50, 60, \ldots,$ tanto como se lo permita su calculadora.

105. a. Suponiendo que $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$ si c es cualquier constante positiva, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$$

si c es cualquier constante positiva.

b. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}(1/n^c) = 0$ si c es cualquier constante positiva. (*Sugerencia:* Considere que si $\epsilon = 0.001$ y $c = 0.04$, ¿qué tan grande debe ser n para asegurar que $|1/n^c - 0| < \epsilon$, si $n > N$?).

106. El teorema del zipper Demuestre el "teorema del zipper" para sucesiones: Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen a L, entonces la sucesión

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

converge a L.

107. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

108. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1, (x > 0)$.

109. Demuestre el teorema 2. **110.** Demuestre el teorema 3.

En los ejercicios 111 a 114, determine si la sucesión es monótona y si está acotada.

111. $a_n = \dfrac{3n + 1}{n + 1}$ **112.** $a_n = \dfrac{(2n + 3)!}{(n + 1)!}$

113. $a_n = \dfrac{2^n 3^n}{n!}$ **114.** $a_n = 2 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{2^n}$

¿Cuáles de las sucesiones en los ejercicios 115 a 124 convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

115. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ **116.** $a_n = n - \dfrac{1}{n}$

117. $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ **118.** $a_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n}$

119. $a_n = ((-1)^n + 1)\left(\dfrac{n + 1}{n}\right)$

120. El primer término de una sucesión es $x_1 = \cos(1)$. Los siguientes términos son $x_2 = x_1$ o $\cos(2)$, el que sea mayor, y $x_3 = x_2$ o $\cos(3)$, el que sea mayor (aquel que esté más a la derecha). En general,

$$x_{n+1} = \text{máx}\,\{x_n, \cos(n + 1)\}.$$

Proporcione suficientes términos de la sucesión y, con base en ellos, determine si las sucesiones 121 a 124 convergen o divergen.

121. $a_n = \dfrac{1 + \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$ **122.** $a_n = \dfrac{n + 1}{n}$

123. $a_n = \dfrac{4^{n+1} + 3^n}{4^n}$

124. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

125. La sucesión $\{n/(n + 1)\}$ tiene una mínima cota superior de 1 Demuestre que si M es un número menor que 1, los términos de $\{n/(n + 1)\}$ superan finalmente a M. Es decir, que si $M < 1$, existe un entero N tal que $n/(n + 1) > M$, siempre que $n > N$. Puesto que $n/(n + 1) < 1$ para toda n, esto demuestra que 1 es una cota superior mínima de $\{n/n + 1)\}$.

126. Unicidad de la cota superior mínima Demuestre que si M_1 y M_2 son cotas superiores mínimas de la sucesión $\{a_n\}$, entonces $M_1 = M_2$. Es decir, una sucesión no puede tener dos cotas superiores mínimas diferentes.

127. ¿Es verdad que una sucesión $\{a_n\}$ de números positivos tiene que converger si está acotada superiormente? Justifique su respuesta.

128. Demuestre que si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, entonces a cada número positivo ϵ le corresponde un entero n tal que para toda m y n,

$$m > N \quad \text{y} \quad n > N \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

129. Unicidad de límites Demuestre que los límites de las sucesiones son únicos. Es decir, si L_1 y L_2 son números tales $a_n \to L_1$ y $a_n \to L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

130. Límites y subsucesiones Si los términos de una sucesión aparecen en otra sucesión en el orden dado, decimos que la primera sucesión es una **subsucesión** de la segunda. Demuestre que si dos subsucesiones de una sucesión $\{a_n\}$ tienen límites diferentes, $L_1 \neq L_2$, entonces $\{a_n\}$ diverge.

131. Para una sucesión $\{a_n\}$, los términos con índice par se simbolizan así: a_{2k}, y los términos de índice impar, así: a_{2k+1}. Demuestre que si $a_{2k} \to L$ y $a_{2k+1} \to L$, entonces $a_n \to L$.

132. Demuestre que una sucesión $\{a_n\}$ converge a 0 si y sólo si la sucesión de valores absolutos $\{|a_n|\}$ converge a 0.

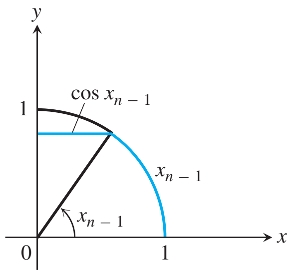
133. Sucesiones generadas por el método de Newton El método de Newton, aplicado a una función derivable $f(x)$, empieza con un valor inicial x_0 y a partir de él construye una sucesión de números $\{x_n\}$ que, en circunstancias favorables, converge a un cero de f. La fórmula recursiva para la sucesión es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

a. Demuestre que la fórmula recursiva para $f(x) = x^2 - a, a > 0$, puede escribirse como $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$.

T **b.** Si comenzamos con $x_0 = 1$ y $a = 3$, habrá que calcular los términos sucesivos de la sucesión hasta que el resultado empiece a repetirse. ¿A qué número se aproxima? Explique.

T **134. Una definición recursiva de $\pi/2$** Si empieza con $x_1 = 1$ y define los términos subsiguientes de $\{x_n\}$ de acuerdo con la regla $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$, generará una sucesión que converge rápidamente a $\pi/2$. (a) Inténtelo. (b) Utilizando la figura adjunta, explique por qué es tan rápida la convergencia.



EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Utilice un SAC para realizar los siguientes pasos para las sucesiones de los ejercicios 135 a 146.

a. Calcule y luego grafique los primeros 25 términos de la sucesión. ¿La sucesión parece estar acotada por arriba o por abajo? ¿Parece que converge o diverge? Si converge, ¿cuál es el límite L?

b. Si la sucesión converge, determine un entero N tal que $|a_n - L| \leq 0.01$ para $n \geq N$. ¿Cuánto debe avanzar en la sucesión para obtener términos que estén a menos de 0.0001 de L?

135. $a_n = \sqrt[n]{n}$

136. $a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$

137. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

138. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

139. $a_n = \operatorname{sen} n$

140. $a_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

141. $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$

142. $a_n = \frac{\ln n}{n}$

143. $a_n = (0.9999)^n$

144. $a_n = (123456)^{1/n}$

145. $a_n = \frac{8^n}{n!}$

146. $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$

10.2 Series infinitas

Una *serie infinita* es la suma de una sucesión infinita de números

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

El objetivo de esta sección es entender el significado de una suma infinita y desarrollar métodos para su cálculo. Como en una serie infinita existen una cantidad infinita de sumandos, no podemos sólo sumar para ver qué resulta. En vez de ello, vemos qué se obtiene si se suman los n primeros términos de la sucesión y nos detenemos. La suma de los n primeros términos

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

es una suma finita común y puede calcularse por medio de una suma usual, la cual se denomina *n-ésima suma parcial*. Conforme n se hace grande, esperamos que las sumas parciales se hagan más cercanas a un valor límite, en el mismo sentido en el que los términos de una sucesión se aproximan a un límite, como se analizó en la sección 10.1.

Por ejemplo, para asignar un significado a una expresión como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Sumamos los términos de uno en uno desde el inicio y buscamos un patrón de crecimiento de las sumas.

Suma parcial		**Valor**	**Expresión para la suma parcial**
Primera:	$s_1 = 1$	1	$2 - 1$
Segunda:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
Tercera:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

En realidad existe un patrón. Las sumas parciales forman una sucesión cuyo n-ésimo término es

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dicha sucesión de sumas parciales converge a 2, ya que $\lim_{n\to\infty}(1/2^{n-1}) = 0$. Decimos

$$\text{“la suma de la serie inifinta } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \text{ es 2.”}$$

¿La suma de cualquier número finito de términos en esta serie es igual a 2? No. ¿Realmente podemos sumar, de uno en uno, un número infinito de términos? No. Pero es posible definir su suma si la definimos como el límite de la sucesión de sumas parciales cuando $n \to \infty$, en este caso, 2 (figura 10.8). Nuestro conocimiento de sucesiones y límites nos permite rebasar las fronteras de las sumas finitas.

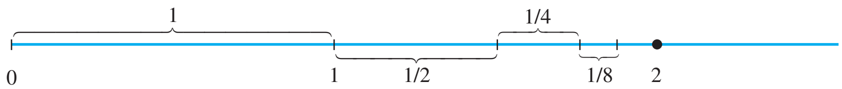


FIGURA 10.8 Conforme las longitudes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ se suman una a una, la suma se aproxima a 2.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Blaise Pascal
(1623–1662)

DEFINICIONES Dada una sucesión de números $\{a_n\}$, una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

es una **serie infinita**. El número a_n es el ***n*-ésimo término** de la serie. La sucesión $\{s_n\}$, definida como

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

es la **sucesión de sumas parciales** de la serie, donde el número s_n es la ***n*-ésima suma parcial**. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie **converge** y que su **suma** es L. En este caso, escribimos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Si la sucesión de sumas parciales de la serie no converge, decimos que la serie **diverge**.

Cuando empezamos a estudiar una serie dada $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, tal vez no sepamos si converge o diverge. En cualquier caso, es conveniente usar la notación sigma (de suma) para escribir la serie como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Una útil abreviación cuando se entiende que la suma es de 1 a ∞.

Series geométricas

Las **series geométricas** son series de la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

donde a y r son números reales fijos y $a \neq 0$. También se puede escribir la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. La **razón** r puede ser positiva, como en

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots, \qquad r = 1/2,\ a = 1$$

o negativa, como en

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots. \qquad r = -1/3,\ a = 1$$

Si $r = 1$, la n-ésima suma parcial de la serie geométrica es

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

y la serie diverge, porque $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, según sea el signo de a. Si $r = -1$, la serie diverge porque las n-ésimas sumas parciales alternan entre a y 0. Si $|r| \neq 1$, se determina la convergencia o divergencia de la serie en esta forma:

$$\begin{aligned}
s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\
rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n && \text{Multiplicar } s_n \text{ por } r. \\
s_n - rs_n &= a - ar^n && \text{Restar } rs_n \text{ de } s_n. \text{ La mayoría de los términos de lado derecho se cancelan.} \\
s_n(1 - r) &= a(1 - r^n) && \text{Factor.} \\
s_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1). && \text{Podemos despejar } s_n \text{ si } r \neq 1.
\end{aligned}$$

Si $|r| < 1$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (como en la sección 10.1) y $s_n \to a/(1 - r)$. Si $|r| > 1$, entonces $|r^n| \to \infty$ y la serie diverge.

Si $|r| < 1$, la serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converge a $a/(1 - r)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

Si $|r| > 1$, la serie diverge.

Hemos determinado cuándo una serie geométrica converge o diverge y a qué valor. Con frecuencia podemos determinar que una serie converge sin saber a qué valor lo hace, como lo veremos en varias de las siguientes secciones. La fórmula $a/(1 - r)$ para la suma de una serie geométrica *sólo* se aplica cuando el índice de la suma inicia con $n = 1$ en la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ (o cuando el índice es $n = 0$, si escribimos la serie como $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$).

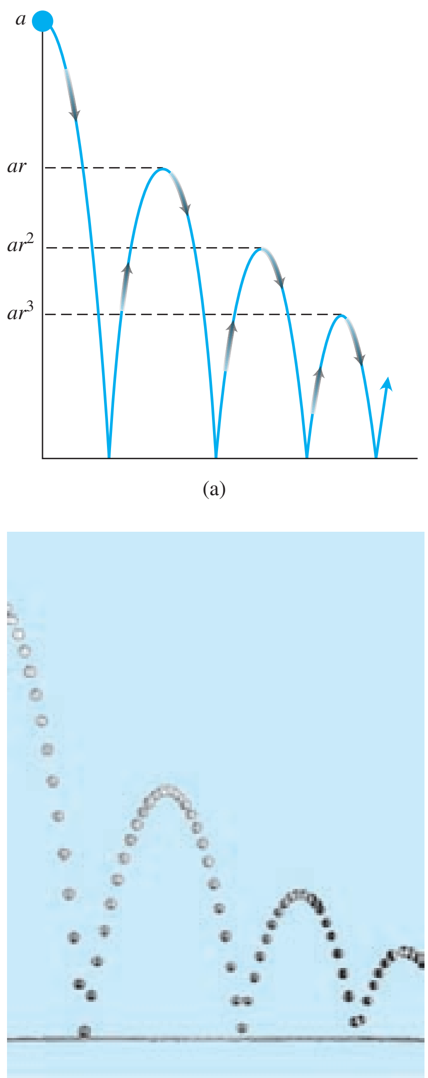
EJEMPLO 1 La serie geométrica con $a = 1/9$ y $r = 1/3$ es

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1 - (1/3)} = \frac{1}{6}.$$

■

EJEMPLO 2 La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots$$



(a)

(b)

FIGURA 10.9 (a) El ejemplo 3 muestra cómo utilizar una serie geométrica para calcular la distancia vertical total recorrida por una pelota que rebota, si la altura de cada rebote se reduce en el factor r.
(b) Una fotografía estroboscópica de una pelota que rebota.

es una serie geométrica con $a = 5$ y $r = -1/4$. Converge a

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1+(1/4)} = 4. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Se deja caer una pelota desde a metros de altura sobre una superficie plana. Cada vez que la pelota toca la superficie, después de caer una distancia h, rebota hasta una distancia rh, donde r es positiva, pero menor que 1. Determine la distancia total que viaja la pelota hacia arriba y hacia abajo (figura 10.9).

Solución La distancia total es

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\text{Esta suma es } 2ar/(1-r).} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\frac{1+r}{1-r}.$$

Por ejemplo, si $a = 6$ metros y $r = 2/3$, la distancia es

$$s = 6\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30 \text{ m}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Exprese el decimal periódico 5.232323… como la razón de dos enteros.

Solución Con base en la definición de un número decimal, obtenemos una serie geométrica

$$\begin{aligned} 5.232323\ldots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\ &= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a = 1,\ r = 1/100 \\ &= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Por desgracia, las fórmulas como la suma de una serie geométrica convergente son escasas, por lo que con frecuencia tenemos que conformarnos con un valor estimado de las sumas de las series (después estudiaremos algo más sobre ello). Sin embargo, el siguiente ejemplo es otro caso en el que podemos hallar el valor exacto de la suma.

EJEMPLO 5 Determine la suma de la serie "telescópica" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución Buscamos un patrón en la sucesión de sumas parciales que pueda conducirnos a una fórmula para s_k. La observación clave es la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

de manera que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

y

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Al suprimir los paréntesis y cancelar los términos adyacentes de signos opuestos, la suma se reduce a

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Ahora vemos que $s_k \to 1$ cuando $k \to \infty$. La serie converge y la suma es 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \qquad \blacksquare$$

El criterio del término n-ésimo para una serie divergente

Una razón de que una serie puede no converger es que sus términos no sean pequeños.

EJEMPLO 6 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

diverge porque las sumas parciales crecen finalmente por encima de cualquier número asignado. Cada término es mayor que 1, por lo cual la suma de n términos tiene que ser mayor que n. ■

Observe que $\lim_{n\to\infty} a_n$ tiene que ser igual a cero si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Para entender por qué, hagamos que S represente la suma de la serie y que $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ sea la n-ésima suma parcial. Cuando n es grande, tanto s_n como s_{n-1} están cerca de S, por lo cual su diferencia, a_n, es próxima a cero. En términos más formales,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \longrightarrow \quad S - S = 0.$$

Regla de la diferencia para sucesiones.

Esto prueba el siguiente teorema.

¡Precaución!
El teorema 7 *no dice* que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $a_n \to 0$. Es posible que una serie diverja cuando $a_n \to 0$.

TEOREMA 7 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$.

El teorema 7 conduce a un criterio para detectar el tipo de divergencia que ocurrió en el ejemplo 6.

Criterio del término n-ésimo para la divergencia

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si es diferente de cero.

EJEMPLO 7 Los siguientes son ejemplos de series divergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge porque $n^2 \to \infty$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge porque $\frac{n+1}{n} \to 1$. $\quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge porque $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ no existe.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ diverge porque $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$. ■

EJEMPLO 8 La serie

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{2 términos}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{4 términos}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ términos}} + \cdots$$

diverge, ya que los términos se pueden agrupar en grupos que suman 1, por lo que las sumas parciales aumentan sin cota. Sin embargo, los términos de la serie forman una sucesión que converge a cero. El ejemplo 1 de la sección 10.3 muestra que la serie armónica también se comporta de esta manera. ■

Combinación de series

Siempre que tenemos dos series convergentes, podemos sumarlas término a término, restarlas término a término o multiplicarlas por constantes para crear nuevas series convergentes.

TEOREMA 8 Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ son series convergentes, entonces

1. *Regla de la suma:* $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. *Regla de la diferencia:* $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (cualquier número k).

Demostración Las tres reglas para series provienen de las reglas análogas para sucesiones del teorema 1, sección 10.1. Para demostrar la regla de la suma para series, sean

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Entonces, las sumas parciales de $\sum(a_n + b_n)$ son

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n. \end{aligned}$$

Como $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$, tenemos $s_n \rightarrow A + B$ según la regla de la suma para sucesiones. La demostración de la regla de la diferencia es similar.

Para demostrar la regla del múltiplo constante para sucesiones, observe que las sumas parciales de

$$s_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n,$$

que converge a kA por la regla del múltiplo constante para sucesiones. ■

Como corolarios del teorema 8, tenemos los siguientes resultados. Omitimos sus demostraciones.

1. Todo múltiplo constante no cero de una serie divergente, diverge.
2. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, entonces tanto $\sum(a_n + b_n)$ como $\sum(a_n - b_n)$ divergen.

¡Cuidado! Recuerde que $\sum(a_n + b_n)$ puede converger a pesar de que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ diverjan. Por ejemplo, $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \cdots$ y $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \cdots$ divergen, mientras que $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \cdots$ converge a 0.

EJEMPLO 9 Halle las sumas de las siguientes series.

(a)
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} && \text{Regla de la diferencia} \\ &= \frac{1}{1 - (1/2)} - \frac{1}{1 - (1/6)} && \text{Serie geométrica con } a = 1 \text{ y } r = 1/2,\ 1/6 \\ &= 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$ Regla del múltiplo constante

$$= 4\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right)$$ Serie geométrica con $a = 1, r = 1/2$

$$= 8$$ ■

Adición o eliminación de términos

En una serie siempre podemos agregar o eliminar un número finito de términos sin alterar la convergencia o divergencia de la serie, aunque en el caso de la convergencia esto suele modificar la suma. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para cualquier $k > 1$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Inversamente, si $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge para toda $k > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

y

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}.$$

Renumeración de los términos

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Richard Dedekind
(1831–1916)

Mientras se preserve el orden de sus términos, es posible reenumerar cualquier serie sin alterar su convergencia. Para aumentar en h unidades el valor inicial del índice, se sustituye la n en la fórmula de a_n por $n - h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Para reducir en h unidades el valor inicial del índice, se sustituye la n de a_n en la fórmula por $n + h$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Vimos esto al iniciar una serie geométrica con el índice $n = 0$, en vez del índice $n = 1$, pero podemos usar también cualquier valor del índice inicial. Por lo regular damos preferencia a indizaciones que llevan a expresiones más simples.

EJEMPLO 10 Escribimos la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \qquad \text{o incluso} \qquad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}.$$

Las sumas parciales siguen siendo las mismas, sin importar qué indización elijamos. ■

Ejercicios 10.2

Encontrar las *n*-ésimas sumas parciales

En los ejercicios 1 a 6, determine una fórmula para la n-ésima suma parcial de cada serie y úsela para hallar la suma de la serie, si ésta converge.

1. $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

2. $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

4. $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-1)^{n-1}2^{n-1} + \cdots$

5. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$

6. $\frac{5}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \frac{5}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{5}{n(n+1)} + \cdots$

Series con términos geométricos

En los ejercicios 7 a 14, escriba algunos de los primeros términos de cada serie para mostrar cómo comienza. Después encuentre la suma de la serie.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

En los ejercicios 15 a 18, determine si la serie geométrica converge o diverge. Si una serie converge, determine su suma.

15. $1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \cdots$

16. $1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + \cdots$

17. $\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \cdots$

18. $\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{3}\right)^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^5 + \left(\frac{-2}{3}\right)^6 + \cdots$

Decimales periódicos

En los ejercicios 19 a 26, exprese cada uno de los números como la razón de dos enteros.

19. $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ldots$

20. $0.\overline{234} = 0.234\ 234\ 234\ldots$

21. $0.\overline{7} = 0.7777\ldots$

22. $0.\overline{d} = 0.dddd\ldots$, donde d es un dígito

23. $0.0\overline{6} = 0.06666\ldots$

24. $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ldots$

25. $1.24\overline{123} = 1.24\ 123\ 123\ 123\ldots$

26. $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\ldots$

Aplicación del criterio del *n*-ésimo término

En los ejercicios 27 a 34, utilice el criterio del n-ésimo término para la divergencia con la finalidad de demostrar que la serie es divergente o indique si la prueba no es concluyente.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+10}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$

32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

Series telescópicas

En los ejercicios 35 a 40, determine una fórmula para la n-ésima suma parcial de la serie y utilícela para determinar si la serie converge o diverge. Si una serie converge, determine su suma.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}\right)$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}\right)$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan(n) - \tan(n-1))$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}\right)$

Determine la suma de cada serie en los ejercicios 41 a 48.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1))$

Convergencia o divergencia

En los ejercicios 49 a 68, ¿cuáles series convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas. Si una serie converge, calcule su suma.

49. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$

51. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

53. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

54. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

55. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{3^n}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

58. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1$

59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n + 4^n}$

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

67. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

68. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

Series geométricas con una variable x

En cada una de las series geométricas de los ejercicios 69 a 72, escriba algunos de los primeros términos para determinar a y r, luego calcule la suma de la serie. Exprese después la desigualdad $|r| < 1$ en términos de x y determine los valores de x para los cuales se satisface la desigualdad y la serie converge.

69. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

70. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

71. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

72. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3 + \operatorname{sen} x}\right)^n$

En los ejercicios 73 a 78, halle los valores de x para los cuales converge la serie geométrica dada. También determine la suma de la serie (como función de x) para los valores de x.

73. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

74. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

75. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

77. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$

78. $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

Teoría y ejemplos

79. La serie del ejercicio 5 también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{y} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Escríbala como una suma que empieza con **(a)** $n = -2$, **(b)** $n = 0$, **(c)** $n = 5$.

80. La serie del ejercicio 6 también se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}.$$

Escríbala como una suma que empieza con **(a)** $n = -1$, **(b)** $n = 3$, **(c)** $n = 20$.

81. Construya una serie infinita de términos diferentes de cero cuya suma sea

a. 1 **b.** -3 **c.** 0.

82. (*Continuación del ejercicio 81*). ¿Puede construir una serie infinita de términos diferentes de cero que converja a cualquier número que desee? Explique.

83. Con un ejemplo, muestre que $\sum(a_n/b_n)$ puede ser divergente, a pesar de que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ converjan y ninguna b_n sea igual a 0.

84. Encuentre series geométricas convergentes $A = \sum a_n$ y $B = \sum b_n$ para ilustrar el hecho de que $\sum a_n b_n$ puede converger sin ser igual a AB.

85. Demuestre con un ejemplo que $\sum(a_n/b_n)$ puede converger a un valor diferente de A/B a pesar de que $A = \sum a_n$, $B = \sum b_n \neq 0$, y ninguna b_n sea igual a 0.

86. Si $\sum a_n$ converge y $a_n > 0$ para toda n, ¿qué se puede decir acerca de $\sum(1/a_n)$? Justifique su respuesta.

87. ¿Qué sucede cuando a una serie divergente le agrega o le elimina un número finito de términos? Justifique sus dos respuestas.

88. Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, ¿qué se puede decir acerca de su suma término a término $\sum(a_n + b_n)$? Justifique su respuesta.

89. Construya una serie geométrica $\sum ar^{n-1}$ que converja al número 5, si

a. $a = 2$ **b.** $a = 13/2$.

90. Determine el valor de b para el cual

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9.$$

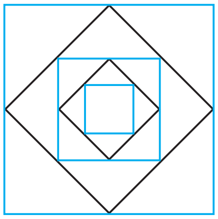
91. ¿Para qué valores de r la serie infinita

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots$$

converge? Calcule la suma cuando la serie converge.

92. Demuestre que el error $(L - s_n)$ resultante al remplazar una serie geométrica convergente por una de sus sumas parciales s_n es $ar^n/(1 - r)$.

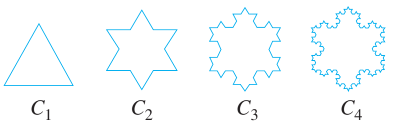
93. La siguiente figura muestra los cinco primeros cuadrados de una sucesión de cuadrados. El cuadrado exterior tiene 4 m^2 de área. Cada uno de los cuadrados interiores se obtiene al unir los puntos medios de todos los lados de los cuadrados anteriores. Calcule la suma de las áreas de todos los cuadrados.



94. Curva copo de nieve de Helga von Koch Esta curva tiene una longitud infinita y delimita una región con área finita. Para saber por qué ocurre esto, supongamos que la curva fue generada a partir de un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud 1.

a. Calcule la longitud L_n de la n-ésima curva C_n y demuestre que $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$.

b. Determine el área A_n de la región delimitada por C_n y calcule $\lim_{n\to\infty} A_n = (8/5)A_1$.



10.3 Criterio de la integral

Dada una serie, necesitamos saber si converge o no. En esta sección, y en las dos siguientes, estudiamos las series con términos no negativos. Tal tipo de series convergen si su sucesión de sumas parciales está acotada. Si establecemos que una serie dada converge, por lo general no tenemos una fórmula disponible para su suma, por lo que estudiamos métodos para aproximar la suma.

Sumas parciales no decrecientes

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie infinita con $a_n \geq 0$ para toda n. Entonces cada suma parcial es mayor o igual que su precedente, ya que $s_{n+1} = s_n + a_n$:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots.$$

Como las sumas parciales forman una sucesión no decreciente, el teorema de la sucesión no decreciente (teorema 6, sección 10.1) nos indica los siguientes resultados.

Corolario del teorema 6 Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos no negativos, converge si y sólo si sus sumas parciales están acotadas por arriba.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

se denomina **serie armónica**. Esta serie es divergente, pero ello no se deduce del teorema del n-ésimo término. El n-ésimo término, $1/n$, tiende a cero, pero aun así la serie diverge. La razón de que diverja es porque no hay cota superior para sus sumas parciales. Para ver por qué, agrupe los términos de la serie de la manera siguiente:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> \frac{2}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots.$$

La suma de los primeros dos términos es 1.5. La suma de los siguientes dos términos es $1/3 + 1/4$, que es mayor que $1/4 + 1/4 = 1/2$. La suma de los siguientes cuatro términos es $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8$, que es mayor que $1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$. La suma de los siguientes ocho términos es $1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16$, que es mayor que $8/16 = 1/2$. La suma de los siguientes 16 términos es mayor que $16/32 = 1/2$ y así sucesivamente. En general, la suma de 2^n términos que finalizan con $1/2^{n+1}$ es mayor que $2n/2^{n+1} = 1/2$. La sucesión de sumas parciales no está acotada por arriba: si $n = 2^k$, la suma parcial s_n es mayor que $k/2$. La serie armónica diverge. ■

Criterio de la integral

Ahora introducimos el criterio de la integral con una serie que está relacionada con la serie armónica, pero cuyo n-ésimo término es $1/n^2$, en vez de $1/n$.

EJEMPLO 2 ¿La siguiente serie converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

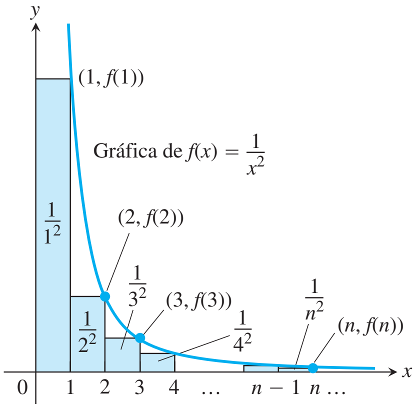


FIGURA 10.10 La suma de las áreas de los rectángulos bajo la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ es menor que el área bajo la gráfica (ejemplo 2).

Solución Determinamos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ comparándola con $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx$. Para realizar la comparación, consideramos los términos de la serie como los valores de la función $f(x) = 1/x^2$ e interpretamos dichos valores como las áreas de los rectángulos bajo la curva $y = 1/x^2$.

Como muestra la figura 10.10,

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx && \text{La suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área bajo la gráfica.} \\
&< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx && \int_1^n(1/x^2)\,dx < \int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx \\
&< 1 + 1 = 2. && \text{Como en el ejemplo 3, de la sección 8.7, } \int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1.
\end{aligned}
$$

Así, las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ están acotadas por arriba (por 2) y la serie converge. Se sabe que la suma de la serie es $\pi^2/6 \approx 1.64493$. ■

¡Precaución!
La serie y la integral no necesitan tener el mismo valor en el caso de que converjan. Como se hace notar en el ejemplo 2, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2) = \pi^2/6$ mientras que $\int_1^{\infty}(1/x^2)\,dx = 1$.

TEOREMA 9: Criterio de la integral Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función decreciente, positiva y continua de x para toda $x \geq N$ (N es un entero positivo). Entonces, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ convergen o divergen ambas.

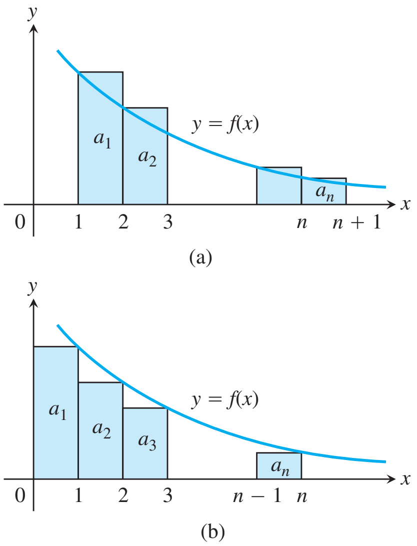


FIGURA 10.11 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral $\int_1^{\infty}(x)\,dx$ sujetas a las condiciones del criterio de la integral, convergen o divergen ambas.

Demostración Establecemos el criterio para el caso $N = 1$. La prueba para una N general es similar.

Iniciamos con la suposición de que f es una función decreciente con $f(n) = a_n$ para toda n. Lo anterior nos lleva a observar que los rectángulos de la figura 10.11a, que tienen áreas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, colectivamente, encierran más área que la que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde $x = 1$ a $x = n + 1$. Esto es,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

En la figura 10.11b los rectángulos se han colocado a la izquierda en vez de a la derecha. Si por el momento no consideramos el primer rectángulo, de área a_1, veremos que

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx.$$

Si incluimos a_1, tenemos

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Al combinar estos resultados, se obtiene

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Tales desigualdades se cumplen para cada n y se continúan cumpliendo cuando $n \to \infty$.

Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es finita, la desigualdad del lado derecho indica que $\sum a_n$ es finita. Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es infinita, la desigualdad del lado izquierdo indica que $\sum a_n$ es infinita. De aquí que la serie y la integral son finitas o infinitas ambas. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que la **serie *p***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

(p, un real constante), converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Solución Si $p > 1$, entonces $f(x) = 1/x^p$ es una función positiva decreciente de x. Ya que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx &= \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\
&= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1},
\end{aligned}$$

$b^{p-1} \to \infty$ cuando $b \to \infty$ ya que $p - 1 > 0$.

por el criterio de la integral, la serie converge. Enfatizamos que la suma de la serie p *no* es $1/(p-1)$. La serie converge, pero no sabemos a qué valor converge.

La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$.

Si $p < 1$, entonces $1 - p > 0$ y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p} - 1) = \infty.$$

Por el criterio de la integral, la serie diverge.

Si $p = 1$, tenemos la serie armónica (divergente)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Tenemos la convergencia para $p > 1$, pero divergencia para cualquier otro valor de p. ■

La serie p, con $p = 1$, es la **serie armónica** (ejemplo 1). El criterio de la serie p indica que la serie armónica es divergente sólo *por poco*; si por ejemplo aumentamos p a 1.000000001, ¡la serie es convergente!

La lentitud con la que las sumas parciales de la serie armónica se aproximan a infinito es impresionante. Por ejemplo, para que las sumas parciales sean mayores que 20, se deben tomar alrededor de 178 millones de términos. (También véase el ejercicio 43b).

EJEMPLO 4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/(n^2+1))$ no es una serie p, pero converge por el criterio de la integral. La función $f(x) = 1/(x^2+1)$ es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan x\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}[\arctan b - \arctan 1] \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Nuevamente enfatizamos que $\pi/4$ *no* es la suma de la serie. La serie converge, pero no conocemos el valor de su suma. ■

Estimación del error

Si, por el criterio de la integral, se demuestra que una serie Σa_n es convergente, podríamos necesitar estimar el tamaño del **residuo** R_n entre la suma total S de la serie y su n-ésima suma parcial s_n. Esto es, deseamos estimar

$$R_n = S - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots.$$

Para obtener una cota inferior para el residuo, comparamos la suma de las áreas de los rectángulos con el área bajo la curva $y = f(x)$ para $x \geq n$ (véase la figura 10.11a). Vemos que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx.$$

De forma análoga, con base en la figura 10.11b, encontramos una cota superior con

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Tales comparaciones demuestran el siguiente resultado, que proporciona cotas del tamaño del residuo.

Cotas para el residuo en el criterio de la integral

Suponga que $\{a_k\}$ es una sucesión de términos positivos con $a_k = f(k)$, donde f es una función positiva, decreciente y continua de x para toda $x \geq n$ y que Σa_n converge a S. Entonces el residuo $R_n = S - s_n$ satisface las desigualdades

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Si sumamos las sumas parciales, s_n, a cada lado de las desigualdades en (1), obtendremos

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq S \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx \tag{2}$$

ya que $s_n + R_n = S$. Las desigualdades en (2) son útiles para la estimación del error al aproximar la suma de una serie convergente. El error no puede ser mayor que la longitud del intervalo que contiene a S, como se da en (2).

EJEMPLO 5 Estime la suma de la serie $\Sigma(1/n^2)$ para ello, use las desigualdades en (2) y $n = 10$.

Solución Tenemos que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_n^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Utilizando este resultado con las desigualdades en (2), obtendremos

$$s_{10} + \frac{1}{11} \leq S \leq s_{10} + \frac{1}{10}.$$

Si tomamos $s_{10} = 1 + (1/4) + (1/9) + (1/16) + \cdots + (1/100) \approx 1.54977$, esta última desigualdad da

$$1.64068 \leq S \leq 1.64997.$$

Si aproximamos la suma S mediante el punto medio de este intervalo, encontraremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1.6453.$$

El error en dicha aproximación es menor que la mitad del intervalo, por lo que el error es menor que 0.005. ■

Ejercicios 10.3

Aplicación del criterio de la integral

Utilice el criterio de la integral para determinar si las series en los ejercicios 1 a 10 convergen o divergen. Asegúrese de verificar que se cumplen las condiciones del criterio de la integral.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.2}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 11 a 40, ¿cuáles series convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas. (Cuando verifique una respuesta, recuerde que existe más de una forma de determinar la convergencia y la divergencia de las series).

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)}$

27. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1/n)}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n - 1}}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\tan^{-1} n}{1+n^2}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

Teoría y ejemplos

¿Para qué valores de a, si los hay, las series de los ejercicios 41 y 42 convergen?

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$

42. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right)$

43. **a.** Haga un dibujo como el de las figuras 10.7 y 10.8 para mostrar que las sumas parciales de la serie armónica satisfacen las desigualdades

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$\le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln n.$$

T **b.** No hay evidencia absolutamente empírica de la divergencia de la serie armónica, aunque sabemos que diverge. Las sumas parciales crecen muy lentamente. Para ver lo que queremos decir, suponga que el proceso de suma inició en $s_1 = 1$ hace 13 mil millones de años, el día en que se creó el Universo, y que se suma un nuevo término cada segundo. ¿Qué tan grande sería el valor de la suma parcial s_n el día de hoy, suponiendo años de 365 días?

44. ¿Existen valores de x para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(nx))$ converja? Justifique su respuesta.

45. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de números positivos, entonces también existe una serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de números positivos con $b_n < a_n$ para toda n? ¿Existe una serie divergente de números positivos que sea "la más pequeña"? Justifique sus respuestas.

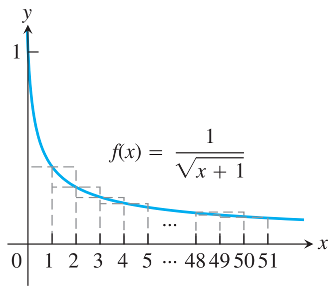
46. (*Continuación del ejercicio 45*). Existe una serie convergente de números positivos que sea "la más grande"? Explique.

47. **La serie $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/\left(\sqrt{n+1}\right)\right)}$ diverge**

a. Utilice la siguiente gráfica para demostrar que la suma parcial $s_{50} = \sum_{n=1}^{50}\left(1/\left(\sqrt{n+1}\right)\right)$ satisface

$$\int_1^{51} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx < s_{50} < \int_0^{50} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

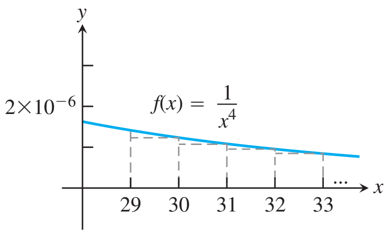
Concluya que $11.5 < s_{50} < 12.3$.



b. ¿Cuál debería ser el valor de n para que la suma parcial $s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(1/\left(\sqrt{i+1}\right)\right)$ satisfaga $s_n > 1000$?

48. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$ converge

a. Utilice la siguiente gráfica para determinar el error si $s_{30} = \sum_{n=1}^{30} (1/n^4)$ se usa para estimar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$.



b. Determine n de manera que la suma parcial $s_n = \sum_{i=1}^{n} (1/i^4)$ estime el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4)$ con un error a lo sumo de 0.000001.

49. Estime el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3)$ a no más de 0.01 de su valor exacto.

50. Estime el valor de $\sum_{n=2}^{\infty} (1/(n^2 + 4))$ a no más de 0.1 de su valor exacto.

51. ¿Cuántos términos de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{1.1})$ deben utilizarse para estimar su valor con un error a lo sumo de 0.00001?

52. ¿Cuántos términos de la serie convergente $\sum_{n=4}^{\infty} (1/n(\ln n)^3)$ deben utilizarse para estimar su valor con un error a lo sumo de 0.01?

53. El criterio de condensación de Cauchy El criterio de condensación de Cauchy dice: Sea $\{a_n\}$ una sucesión no creciente ($a_n \geq a_{n+1}$ para toda n) de términos positivos que converge a 0. Entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum 2^n a_{2^n}$. Por ejemplo, $\sum(1/n)$ diverge, ya que $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = \sum 1$ diverge. Demuestre por qué este criterio funciona.

54. Utilice el criterio de condensación de Cauchy, del ejercicio 53, para demostrar que

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge;

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

55. Serie *p* logarítmica

a. Demuestre que la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad (p \text{ una constante positiva})$$

converge si y sólo si $p > 1$.

b. ¿Qué implicaciones tiene el hecho en el inciso (a) con respecto a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \,?$$

Justifique su respuesta.

56. (*Continuación del ejercicio 55.*) Utilice el resultado del ejercicio 55 para determinar cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen. En cada caso, justifique su respuesta.

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$ **d.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

57. Constante de Euler Gráficas como las de la figura 10.11 sugieren que cuando n aumenta hay poco cambio en la diferencia entre la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

y la integral

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx.$$

Para explorar tal idea, realice los siguientes pasos.

a. Tomando $f(x) = 1/x$ en la demostración del teorema 9, demuestre que

$$\ln(n + 1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$$

o

$$0 < \ln(n + 1) - \ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leq 1.$$

Por lo tanto, la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

está acotada por abajo y por arriba.

b. Demuestre que

$$\frac{1}{n + 1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n + 1) - \ln n,$$

y utilice el resultado para demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ del inciso (a) es decreciente.

Como una sucesión decreciente que está acotada por abajo converge, los números a_n definidos en el inciso a) convergen:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma.$$

El número γ, cuyo valor es 0.5772…, se conoce como la *constante de Euler*.

58. Utilice el criterio de la integral para demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$$

converge.

59. a. Para la serie $\sum(1/n^3)$, utilice las desigualdades en la ecuación (2) con $n = 10$ para determinar un intervalo que contenga a la suma S.

b. Como en el ejemplo 5, utilice el punto medio del intervalo determinado en el inciso (a) para aproximar la suma de la serie. ¿Cuál es el máximo error de su aproximación?

60. Repita el ejercicio 59 usando la serie $\sum(1/n^4)$.

10.4 Criterios de comparación

Hemos visto cómo determinar la convergencia de series geométricas, series p y algunas otras. Podemos demostrar la convergencia de muchas series más si comparamos sus términos con los de una serie cuya convergencia sea conocida.

TEOREMA 10: Criterio de comparación Sea Σa_n, Σc_n y Σd_n series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N

$$d_n \leq a_n \leq c_n \qquad \text{para toda} \qquad n > N.$$

(a) Si Σc_n converge, entonces Σa_n también converge.

(b) Si Σd_n diverge, entonces Σa_n también diverge.

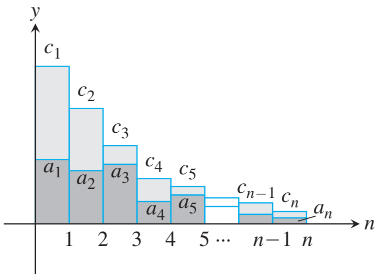


FIGURA 10.12 Si el área total Σc_n de los rectángulos más altos, c_n, es finita, entonces también lo será el área total Σa_n de los rectángulos más cortos a_n.

Demostración En el inciso (a), las sumas parciales de Σa_n están acotadas por abajo por

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

Por lo tanto, forman una sucesión no decreciente con un límite $L \leq M$. Esto es, si Σc_n converge, entonces también Σa_n. La figura 10.12 describe dicho resultado, donde cada término de cada serie se interpreta como el área de un rectángulo (al igual que lo hicimos para el criterio de la integral en la figura 10.11).

En el inciso (b), las sumas parciales de Σa_n no están acotadas por arriba. Si lo fueran, las sumas parciales para Σd_n estarían acotadas por

$$M^* = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

y Σd_n tendría que converger en vez de divergir. ■

EJEMPLO 1 Aplicamos el teorema 10 a varias series.

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n - 1}$$

diverge, ya que su n-ésimo término

$$\frac{5}{5n - 1} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

es mayor que el n-ésimo término de la serie armónica que es divergente.

(b) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

converge, ya que todos sus términos son positivos y menores o iguales a los correspondientes términos de

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots.$$

La serie geométrica del lado izquierdo converge, por lo que tenemos

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3.$$

El hecho de que 3 sea una cota superior para las sumas parciales de $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)$ no significa que la serie converja a 3. Como veremos en la sección 10.9, la serie converge a e.

(c) La serie

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} + \cdots$$

converge. Para ver esto, ignoramos los primeros tres términos y comparamos el resto de los términos con los de la serie geométrica convergente $\sum_{n=0}^{\infty} (1/2^n)$. El término

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Albert of Saxony
(ca. 1316–1390)

$1/(2^n + \sqrt{n})$ de la sucesión truncada es menor que el término correspondiente, $1/2^n$, de la serie geométrica. Vemos que término a término tenemos la comparación,

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

Así, por una aplicación del criterio de comparación, la serie truncada y la serie original convergen. ■

Criterio de comparación del límite

Ahora introducimos un criterio de comparación que es particularmente útil en series en las que a_n es una función racional.

TEOREMA 11: Criterio de comparación del límite Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para toda $n \geq N$ (N, un entero).

1. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces Σa_n y Σb_n convergen o divergen ambas.
2. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y Σb_n converge, entonces Σa_n converge.
3. Si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y Σb_n diverge, entonces Σa_n diverge.

Demostración Demostraremos la parte 1. Las partes 2 y 3 se dejan como ejercicios 55a y b.
Como $c/2 > 0$, existe un entero N tal que para toda n

$$n > N \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}.$$

La definición de límite con $\epsilon = c/2$, $L = c$ y a_n remplazado por a_n/b_n

Así, para $n > N$,

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n.$$

Si Σb_n converge, entonces $\Sigma(3c/2)b_n$ converge y Σa_n converge por el criterio de comparación directa. Si Σb_n diverge, entonces, por el criterio de comparación directa, $\Sigma(c/2)b_n$ y Σa_n divergen. ■

EJEMPLO 2 ¿Cuáles de las siguientes series convergen y cuáles divergen?

(a) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{25} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$

(b) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{15} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

(c) $\dfrac{1 + 2\ln 2}{9} + \dfrac{1 + 3\ln 3}{14} + \dfrac{1 + 4\ln 4}{21} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$

Solución Aplicamos el criterio de comparación del límite a cada serie.

(a) Sea $a_n = (2n + 1)/(n^2 + 2n + 1)$. Para n grande, como los términos principales dominan, esperamos que a_n se comporte como $2n/n^2 = 2/n$, así que $b_n = 1/n$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2,$$

Por la parte 1 del criterio de comparación del límite, Σa_n diverge. También podríamos haber utilizado $b_n = 2/n$, pero $1/n$ es más sencillo.

(b) Sea $a_n = 1/(2^n - 1)$. Para n grande, esperamos que a_n se comporte como $1/2^n$, así que tomamos $b_n = 1/2^n$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{converge}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (1/2^n)} \\ &= 1,\end{aligned}$$

Por la parte 1 del criterio de comparación del límite, Σa_n converge.

(c) Sea $a_n = (1 + n \ln n)/(n^2 + 5)$. Para n grande, esperamos que a_n se comporte como $(n \ln n)/n^2 = (\ln n)/n$, que es mayor a $1/n$ para $n \geq 3$, así que tomamos $b_n = 1/n$. Ya que

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5} \\ &= \infty,\end{aligned}$$

por la parte 3 del criterio de comparación del límite, Σa_n diverge. ■

EJEMPLO 3 ¿La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ converge?

Solución Puesto que $\ln n$ crece más lentamente que n^c para cualquier constante positiva c (ejercicio 105, sección 10.1), es posible comparar la serie con una serie p convergente. Para obtener la serie p, vemos que

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

para n suficientemente grande. Entonces, tomando $a_n = (\ln n)/n^{3/2}$ y $b_n = 1/n^{5/4}$, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} \qquad \text{Regla de L'Hôpital} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0.\end{aligned}$$

Como $\Sigma b_n = \Sigma(1/n^{5/4})$ es una serie p con $p > 1$, converge, por lo que Σa_n converge por la parte 2 del criterio de comparación del límite. ■

Ejercicios 10.4

Criterio de comparación

En los ejercicios 1 a 8, utilice el criterio de comparación para determinar si cada serie converge o diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+30}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+2}$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+4}{n^4+4}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^2+3}}$

Criterio de comparación del límite

En los ejercicios 9 a 16, utilice el criterio de comparación del límite para determinar si cada serie converge o diverge.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^3-n^2+3}$

   (*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$)

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

    (*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/\sqrt{n}\right)$)

11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n^2+1)(n-1)}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3+4^n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}\,4^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{5n+4}\right)^n$
15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

    (*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=2}^{\infty}(1/n)$)

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

    (*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$)

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 17 a 54, ¿cuáles de las series convergen y cuáles divergen? Emplee cualquier método y justifique sus respuestas.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{2^n}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$
24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$
27. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$
29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$
32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$
33. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}\cdot\frac{1}{5n}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-n}{n2^n}$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$
43. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$

    (*Sugerencia:* Primero demuestre que $(1/n!) \le (1/n(n-1))$ para $n \ge 2$).

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$
46. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$
48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$
49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$
50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$
51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$
53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$
54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

Teoría y ejemplos

55. Demuestre (a) la parte 2 y (b) la parte 3 del criterio de comparación del límite.
56. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de números no negativos, ¿qué puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/n)$? Explique.
57. Suponga que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para $n \ge N$ (N, un entero). Si $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = \infty$ y $\sum a_n$ converge, ¿qué puede decir con respecto a $\sum b_n$? Justifique su respuesta.
58. Demuestre que si $\sum a_n$ es una serie convergente de términos no negativos, entonces $\sum a_n^2$ converge.
59. Suponga que $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Demuestre que $\sum a_n$ diverge.
60. Suponga que $a_n > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$. Demuestre que $\sum a_n$ converge.
61. Demuestre que $\sum_{n=2}^{\infty}((\ln n)^q/n^p)$ converge para $-\infty < q < \infty$ y $p > 1$.

    (*Sugerencia:* Comparación del límite con $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^r$ para $1 < r < p$.)

62. (*Continuación del ejercicio 61*). Demuestre que $\sum_{n=2}^{\infty}((\ln n)^q/n^p)$ diverge para $-\infty < q < \infty$ y $0 < p \le 1$.

    (*Sugerencia:* Comparación del límite con una serie p adecuada).

En los ejercicios 63 a 68, utilice los resultados de los ejercicios 61 y 62 para determinar si cada serie converge o diverge.

63. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^4}$
64. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$
65. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1000}}{n^{1.001}}$
66. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{1/5}}{n^{0.99}}$
67. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}(\ln n)^3}$
68. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\cdot\ln n}}$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

69. Aún no se sabe si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}$$

converge o diverge. Utilice un SAC para explorar el comportamiento de la serie y realice los siguientes pasos.

a. Defina la sucesión de sumas parciales

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2 n}.$$

¿Qué sucede al tratar de determinar el límite de s_k cuando $k \to \infty$? ¿Su SAC puede determinar una respuesta en forma cerrada para este límite?

b. Trace los primeros 100 puntos (k, s_k) para la sucesión de sumas parciales. ¿Parece que converge? ¿Cuál cree que es el límite?

c. Ahora trace los primeros 200 puntos (k, s_k). Analice el comportamiento y explíquelo con sus palabras.

d. Trace los primeros 400 puntos (k, s_k). ¿Qué sucede cuando $k = 355$? Calcule el número $355/113$. Con base en sus cálculos, explique qué sucedió en $k = 355$. ¿Para qué valores de k pronosticaría que este comportamiento ocurra nuevamente?

70. a. Utilice el teorema 8 para demostrar que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

donde $S = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$, la suma de una serie p convergente.

b. Con base en el ejemplo 5 de la sección 10.2, demuestre que

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

c. Explique por qué al tomar M términos en la serie del inciso (b), se obtiene una mejor aproximación para S que al tomar los primeros M en la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$.

d. Se sabe que el valor exacto de S es $\pi^2/6$. ¿Cuál de las sumas

$$\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n^2} \quad \text{o} \quad 1 + \sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

da una mejor aproximación para S?

10.5 Criterios de la raíz y de la razón

El criterio de la razón mide la tasa de crecimiento (o disminución) de una serie examinando la razón a_{n+1}/a_n. Para una serie geométrica $\sum ar^n$, esta razón es una constante $((ar^{n+1})/(ar^n) = r)$, y la serie converge si y sólo si su razón, en valor absoluto, es menor que 1. El criterio de la razón es una regla poderosa para ampliar ese resultado.

TEOREMA 12: Criterio de la razón Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Entonces **(a)** la serie *converge* si $\rho < 1$, **(b)** la serie *diverge* si $\rho > 1$ o ρ es infinito, **(c)** el criterio no es *concluyente* si $\rho = 1$.

Demostración

(a) $\boldsymbol{\rho < 1}$. Sea r un número entre ρ y 1. Entonces, el número $\epsilon = r - \rho$ es positivo. Como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho,$$

entonces a^{n+1}/a_n debe estar entre ϵ y ρ cuando n es suficientemente grande, digamos, para toda $n \geq N$. En particular,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r, \qquad \text{cuando } n \geq N.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N, \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_N. \end{aligned}$$

Tales desigualdades indican que los términos de nuestras series, a partir del n-ésimo término, se aproximan a cero más rápidamente que los términos en una serie geométrica con razón $r < 1$. Con mayor precisión, considere la serie Σc_n, donde $c_n = a_n$ para $n = 1, 2, \ldots, n$ y $c_{N+1} = ra_N$, $c_{N+2} = r^2 a_N, \ldots, c_{N+m} = r^m a_N, \ldots$ Ahora, $a_n \leq c_n$ para toda n y

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots). \end{aligned}$$

La serie geométrica $1 + r + r^2 + \cdots$ converge, ya que $|r| < 1$, así que Σc_n converge. Como $a_n \leq c_n$, Σa_n también converge.

(b) $\boldsymbol{1 < \rho \leq \infty}$**.** A partir de cierto índice M,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \qquad \text{y} \qquad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots.$$

Los términos de la serie no tienden a cero cuando n tiende a infinito, de manera que por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

(c) $\boldsymbol{\rho = 1}$**.** Las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

demuestran que debe utilizarse algún otro criterio para convergencia cuando $\rho = 1$.

$$\text{Para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}: \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

$$\text{Para } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}: \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1^2 = 1.$$

En ambos casos, $\rho = 1$, pero la primera serie diverge, mientras que la segunda converge. ■

Con frecuencia, el criterio de la razón es efectivo cuando los términos de una serie contienen factoriales de expresiones que incluyen a n o expresiones elevadas a un exponente que incluye a n.

EJEMPLO 1 Investigue la convergencia de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

Solución A cada serie le aplicamos el criterio de la razón.

(a) Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5)/3^n$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2 + 5 \cdot 2^{-n}}{1 + 5 \cdot 2^{-n}}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

La serie converge, ya que $\rho = 2/3$ es menor que 1. Eso *no* significa que $2/3$ es la suma de la serie. De hecho,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1 - (2/3)} + \frac{5}{1 - (1/3)} = \frac{21}{2}.$$

(b) Si $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ y

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \longrightarrow 4.\end{aligned}$$

La serie diverge, ya que $\rho = 4$ es mayor que 1.

(c) Si $a_n = 4^n n!n!/(2n)!$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n n!n!}\\ &= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \longrightarrow 1.\end{aligned}$$

Puesto que el límite es $\rho = 1$, con base en el criterio de la razón no es posible decidir si la serie converge. Cuando observamos que $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$, concluimos que a_{n+1} siempre es mayor que a_n, ya que $(2n+2)/(2n+1)$ siempre es mayor que 1. Por lo tanto, todos los términos son mayores o iguales a $a_1 = 2$, mientras el n-ésimo término no se aproxima a cero $n \to \infty$. La serie diverge. ■

Criterio de la raíz

Los criterios de convergencia que tenemos hasta ahora para Σa_n funcionan mejor cuando la fórmula para a_n es relativamente sencilla. Considere la serie con los términos.

$$a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ impar}\\ 1/2^n, & n \text{ par.}\end{cases}$$

Para investigar la convergencia, escribimos varios términos de la serie:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots.\end{aligned}$$

Claramente, no es una serie geométrica. El n-ésimo término se aproxima a cero cuando $n \to \infty$, así que el criterio del n-ésimo término no nos indica si la serie diverge. El criterio de la integral no parece prometedor. El criterio de la razón produce

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}, & n \text{ impar}\\[2ex] \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ par.}\end{cases}$$

Cuando $n \to \infty$, la razón es grande y pequeña en forma alternada, por lo que no tiene límite. Sin embargo, veremos que el siguiente criterio establece que la serie converge,

TEOREMA 13: Criterio de la raíz Sea Σa_n una serie con $a_n \geq 0$ para $n \geq N$, y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Entonces **(a)** la serie *converge* si $\rho < 1$, **(b)** la serie *diverge* si $\rho > 1$ o ρ es infinita, **(c)** el criterio no es *concluyente* si $\rho = 1$.

Demostración

(a) $\boldsymbol{\rho < 1}$**.** Elijamos una $\epsilon > 0$ tan pequeña que $\rho + \epsilon < 1$. Como $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, los términos $\sqrt[n]{a_n}$ finalmente se aproximan más a ϵ que a ρ. En otras palabras, existe un índice $M \geq N$, tal que

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon \qquad \text{cuando} \quad n \geq M.$$

Entonces, también es cierto que

$$a_n < (\rho + \epsilon)^n \qquad \text{para } n \geq M.$$

Ahora, $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$, una serie geométrica con razón $(\rho + \epsilon) < 1$, converge. Por comparación, $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ converge, de lo cual se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

converge.

(b) $\boldsymbol{1 < \rho \leq \infty}$**.** Para todos los índices posteriores a algún entero M, tenemos $\sqrt[n]{a_n} > 1$, de manera que $a_n > 1$ para $n > M$. Los términos de la serie no convergen a cero. Por el criterio del n-ésimo término, la serie diverge.

(c) $\boldsymbol{\rho = 1}$**.** Las series $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ indican que el criterio no es concluyente cuando $\rho = 1$. La primera serie diverge y la segunda converge, pero en ambos casos $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. ■

EJEMPLO 2 Nuevamente considere la serie con términos $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ impar} \\ 1/2^n, & n \text{ par.} \end{cases}$

¿La serie Σa_n converge?

Solución Al aplicar el criterio de la raíz, encontramos que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ impar} \\ 1/2, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

Como $\sqrt[n]{n} \to 1$ (sección 10.1, teorema 5), tenemos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ por el teorema de compresión. El límite es menor que 1, así que, por el criterio de la raíz, la serie converge. ■

EJEMPLO 3 ¿Cuál de las siguientes series convergen y cuáles divergen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

Solución A cada serie le aplicamos el criterio de la raíz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge, ya que $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1^2}{2} < 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ diverge, porque $\displaystyle\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to \frac{2}{1^3} > 1.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ converge, puesto que $\displaystyle\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$ ■

Ejercicios 10.5

Aplicación del criterio de la razón

En los ejercicios 1 a 8, utilice el criterio de la razón para determinar si cada serie converge o diverge.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+2)!}{n!\,3^{2n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

Aplicación del criterio de la raíz

En los ejercicios 9 a 16, utilice el criterio de la raíz para determinar si cada serie converge o diverge.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(e^2+\frac{1}{n}\right)\right)^{n+1}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(3+(1/n))^{2n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(*Sugerencia:* $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n = e^x$)

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+n}}$

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 17 a 44, utilice cualquier método para determinar si la serie converge o diverge. Justifique su respuesta.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln n}{2^n}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^nn!}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ln n}{n(n+2)!}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^32^n}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)(2^n+3)}{3^n+2}$

Términos definidos de manera recursiva ¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas mediante las fórmulas en los ejercicios 45 a 54 convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

45. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\operatorname{sen} n}{n}a_n$

46. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n}a_n$

47. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5}a_n$

48. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$

49. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n}a_n$

50. $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}a_n$

51. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n}a_n$

52. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10}a_n$

53. $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

54. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

Convergencia o divergencia

¿Cuáles de las series en los ejercicios 55 a 62 convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^nn!n!}{(2n)!}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n2^nn!}$

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$

Teoría y ejemplos

63. Ni el criterio de la razón ni el criterio de la raíz ayudan con las series p. Inténtelo con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

y demuestre que ambos criterios fallan al dar información acerca de la convergencia.

64. Demuestre que ni el criterio de la razón ni el de la raíz dan información acerca de la convergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad (p \text{ constante}).$$

65. Sea $a_n = \begin{cases} n/2^n, & \text{si } n \text{ es un número primo} \\ 1/2^n, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

¿La serie Σa_n converge? Justifique su respuesta.

66. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(n^2)}/n!$ diverge. Recuerde que de la ley de los exponentes se tiene $2^{(n^2)} = (2^n)^n$.

10.6 Series alternantes, convergencia absoluta y convergencia condicional

Una serie en la que los términos son positivos y negativos en forma alternante es una **serie alternante**. A continuación se presentan tres ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots \tag{1}$$

$$-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n 4}{2^n} + \cdots \tag{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1} n + \cdots \tag{3}$$

Con base en tales ejemplos, vemos que el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n+1} u_n \qquad \text{o} \qquad a_n = (-1)^n u_n$$

donde $u_n = |a_n|$ es un número positivo.

La serie (1), llamada **serie armónica alternante**, converge, como lo veremos en un momento. La serie (2), una serie geométrica con razón $r = -1/2$, converge a $-2/[1 + (1/2)] = -4/3$. La serie (3) diverge, ya que el n-ésimo término no se aproxima a cero.

Probamos la convergencia de la serie armónica alternante por medio de una aplicación del criterio de la serie alternante. El criterio es para la convergencia de una serie alternante, por lo que no puede utilizarse para concluir que tal serie diverge.

TEOREMA 14: Criterio de la serie alternante (criterio de Leibniz) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

converge si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. Todas las u_n son positivas.
2. Las u_n positivas (en algún momento) son no crecientes: $u_n \geq u_{n+1}$ para toda $n \geq N$, para algún entero N.
3. $u_n \to 0$.

Demostración Suponga que $N = 1$. Si n es un entero par, digamos $n = 2m$, entonces la suma de los primeros n términos es

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}. \end{aligned}$$

La primera igualdad muestra que s_{2m} es la suma de m términos no negativos, ya que cada término entre paréntesis es positivo o cero. De aquí que $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ y la sucesión $\{s_{2m}\}$ es no decreciente. La segunda igualdad muestra que $s_{2m} \leq u_1$. Como $\{s_{2m}\}$ es no decreciente y está acotada por arriba, tiene un límite, digamos,

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = L. \tag{4}$$

Si n es un entero impar, digamos, $n = 2m + 1$, entonces la suma de los primeros n términos es $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. Ya que $u_n \to 0$,

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

y, cuando $m \to \infty$,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L. \tag{5}$$

Al combinar los resultados de las ecuaciones (4) y (5), se obtiene $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ (sección 10.1, ejercicio 131). ■

EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

satisface los tres requisitos del teorema 14 con $N = 1$; por lo tanto, converge. ■

En vez de verificar directamente la definición $u_n \geq u_{n+1}$, una segunda forma de demostrar que la sucesión $\{u_n\}$ es no creciente consiste en definir una función derivable $f(x)$ que satisfaga $f(n) = u_n$. Esto es, los valores de f coinciden con los valores de la sucesión en todo entero positivo n. Si $f'(x) \leq 0$ para toda x mayor o igual que algún entero positivo N, entonces $f(x)$ es no creciente para $x \geq N$. Se deduce que $f(n) \geq f(n + 1)$ o $u_n \geq u_{n+1}$ para $n \geq N$.

EJEMPLO 2 Considere la sucesión donde $u_n = 10n/(n^2 + 16)$. Defina $f(x) = 10x/(x^2 + 16)$. Entonces, con base en la regla de la derivada del cociente

$$f'(x) = \frac{10(16 - x^2)}{(x^2 + 16)^2} \leq 0 \qquad \text{siempre que } x \geq 4.$$

Se sigue que $u_n \geq u_{n+1}$ para $n \geq 4$. Esto es, la sucesión $\{u_n\}$ es no creciente para $n \geq 4$. ■

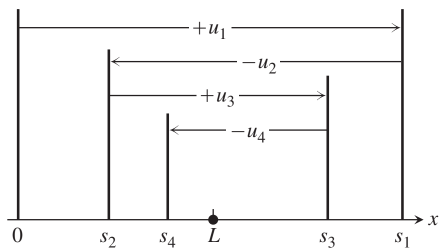


FIGURA 10.13 Las sumas parciales de una serie alternante, que satisface las hipótesis del teorema 14 para $N = 1$, oscilan alrededor del límite desde el principio.

Una interpretación gráfica de las sumas parciales (figura 10.13) muestra cómo una serie alternante converge a su límite L cuando se satisfacen las tres condiciones del teorema 14 con $N = 1$. A partir del origen del eje x, establecemos la distancia positiva $s_1 = u_1$. Para determinar el punto correspondiente a $s_2 = u_1 - u_2$, regresamos una distancia igual a u_2. Ya que $u_2 \leq u_1$, no nos regresamos más allá del origen. Continuamos de esta manera el vaivén, regresando y avanzando conforme los signos de la serie lo demanden. Pero para $n \geq N$, cada paso de avance o de regreso es más pequeño (o a lo sumo del mismo tamaño) que el que le precede, ya que $u_{n+1} \leq u_n$. Como el n-ésimo término tiende a cero cuando n aumenta, el tamaño de paso hacia adelante o de regreso se hace cada vez más pequeño. Oscilamos al cruzar el límite L y la amplitud de la oscilación tiende a cero. El límite L está entre cualesquiera dos sumas sucesivas s_n y s_{n+1}; por lo tanto, difieren de s_n una cantidad menor que u_{n+1}.

Puesto que

$$|L - s_n| < u_{n+1} \qquad \text{para } n \geq N,$$

hacemos estimaciones útiles de las sumas de series alternantes convergentes.

TEOREMA 15: Teorema de estimación para series alternantes Si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ satisface las tres condiciones del teorema 14, entonces para $n \geq N$,

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

se aproxima a la suma L de la serie con un error cuyo valor absoluto es menor que u_{n+1}, el valor numérico del primer término que no se utiliza. Además, la suma L está entre cualesquiera dos sumas parciales s_n y s_{n+1}, mientras que el residuo, $L - s_n$, tiene el mismo signo que el primer término que no se utiliza.

Dejamos para el ejercicio 61 la verificación del signo del residuo.

EJEMPLO 3 Aplicamos el teorema 15 con una serie cuya suma conocemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \;\vdots\; + \frac{1}{256} - \cdots.$$

El teorema indica que si truncamos la serie después del octavo término, prescindiremos de un total que es positivo y menor que $1/256$. La suma de los primeros ocho términos es $s_8 = 0.6640625$ y la suma de los primeros nueve términos es $s_9 = 0.66796875$. La suma de la serie geométrica es

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3},$$

y observamos que $0.6640625 < (2/3) < 0.66796875$. La diferencia $(2/3) - 0.6640625 = 0.0026041666\ldots$ es positiva y menor que $(1/256) = 0.00390625$. ■

Convergencia absoluta y convergencia condicional

Es posible aplicar los criterios de convergencia estudiados a la serie de valores absolutos de una serie con términos tanto positivos como negativos.

DEFINICIÓN Una serie Σa_n **converge absolutamente** (es **absolutamente convergente**) si la serie correspondiente de valores absolutos, $\Sigma|a_n|$, converge.

La serie geométrica del ejemplo 3 converge absolutamente, ya que la serie correspondiente de valores absolutos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

converge. La serie armónica alternante no converge absolutamente, ya que la serie correspondiente de valores absolutos es la serie armónica (divergente).

DEFINICIÓN Una serie que converge, pero no converge absolutamente, **converge condicionalmente**.

La serie armónica alternante converge condicionalmente.

La convergencia absoluta es importante por dos razones. Primera, tenemos buenos criterios para la convergencia de series de términos positivos. Segunda, si una serie converge absolutamente, entonces converge, como demostraremos a continuación.

TEOREMA 16: Criterio de la convergencia absoluta Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración Para cada n,

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n|, \qquad \text{de manera que} \qquad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge y, por el criterio de comparación directa, la serie no negativa $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge. La igualdad $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ nos permite expresar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como la diferencia de dos series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

¡Cuidado! Podemos replantear el teorema 16 diciendo que toda serie absolutamente convergente converge. Sin embargo, el recíproco es falso: muchas series convergentes no son absolutamente convergentes (como la serie armónica alternante del ejemplo 1).

EJEMPLO 4 Este ejemplo proporciona dos series que convergen absolutamente

(a) Para $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$, la serie de valores absolutos correspondiente es la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

La serie original converge, ya que es absolutamente convergente.

(b) Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} = \frac{\operatorname{sen} 1}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2}{4} + \frac{\operatorname{sen} 3}{9} + \cdots$, que tiene términos positivos y negativos, la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right| = \frac{|\operatorname{sen} 1|}{1} + \frac{|\operatorname{sen} 2|}{4} + \cdots,$$

que converge por el criterio de comparación con $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ ya que $|\operatorname{sen} n| \le 1$ para toda n. La serie original converge absolutamente; por lo tanto, converge. ■

EJEMPLO 5 Si p es una constante positiva, la sucesión $\{1/n^p\}$ es una sucesión decreciente con límite cero. Por lo tanto, la serie p alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \qquad p > 0$$

converge.

Si $p > 1$, la serie converge absolutamente. Si $0 < p \le 1$, la serie converge condicionalmente.

$$\text{Convergencia condicional:} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$\text{Convergencia absoluta:} \quad 1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots$$ ■

Rearreglo de la serie

Siempre es posible reordenar los términos de una suma *finita* y la suma no cambia. Lo mismo es cierto para una serie infinita que es absolutamente convergente (véase el ejercicio 68 para un bosquejo de la demostración).

TEOREMA 17: El teorema de rearreglo para una serie absolutamente convergente
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, mientras $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, es cualquier rearreglo de la sucesión $\{a_n\}$, entonces Σb_n converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si rearreglamos los términos de una serie condicionalmente convergente, obtendremos resultados diferentes. En efecto, puede demostrarse que para cualquier número real r, una serie condicionalmente convergente se reacomoda para que su suma sea igual a r. (Omitimos la demostración de este hecho). A continuación se presenta un ejemplo de cómo sumar los términos de una serie condicionalmente convergente con diferentes órdenes, en tanto cada orden dé un valor diferente para la suma.

EJEMPLO 6 Sabemos que la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ converge a algún número L. Además, por el teorema 15, L está entre las sumas parciales sucesivas $s_2 = 1/2$ y $s_3 = 5/6$, por lo que $L \neq 0$. Si multiplicamos la serie por 2, obtendremos

$$\begin{aligned} 2L = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots\right) \\ &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \cdots. \end{aligned}$$

Ahora cambiamos el orden de esta última suma agrupando cada par de términos con el mismo denominador impar, pero hay que dejar los términos negativos con denominadores pares como están colocados (de manera que sean los enteros positivos en su orden natural). Este reacomodo da

$$\begin{aligned} &(2 - 1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = L. \end{aligned}$$

Así que mediante un rearreglo de los términos de la serie condicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}/n$, la serie se transforma en $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$, que es la serie armónica alternante. Si las dos series son iguales, implicaría que $2L = L$, lo cual es falso, ya que $L \geq 0$. ■

El ejemplo 6 indica que no es posible rearreglar los términos de una serie condicionalmente convergente y esperar que la nueva serie tenga el mismo valor que la original. Cuando utilizamos una serie condicionalmente convergente, los términos habrán de sumarse en el orden en que se dan para obtener un resultado correcto. Por otra parte, el teorema 17 garantiza que los términos de una serie absolutamente convergente pueden sumarse en cualquier orden sin afectar el resultado.

Resumen de criterios

Hemos desarrollado varios criterios para determinar la convergencia o divergencia de series infinitas de constantes. Existen otros criterios que no hemos presentado y que en ocasiones se estudian en cursos más avanzados. A continuación se presenta un resumen de los criterios que hemos considerado.

1. **Criterio del n-ésimo término** A menos que $a_n \to 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** La serie $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma, diverge.
3. **Serie p:** La serie $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma, diverge.
4. **Series con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Compare con una serie conocida con el criterio de la comparación.
5. **Series con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si la respuesta es sí, $\sum a_n$ también lo hace, ya que convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Series alternantes:** $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.

Ejercicios 10.6

Determinación de convergencia o divergencia

En los ejercicios 1 a 14, ¿cuáles de las series alternantes convergen y cuáles divergen? Algunas de las series no satisfacen las condiciones de la prueba de series alternantes.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{3/2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n3^n}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{4}{(\ln n)^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+5}{n^2+4}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{10^n}{(n+1)!}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln n}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

Convergencia absoluta y convergencia condicional

¿Cuáles de las series en los ejercicios 15 a 48 convergen absolutamente, cuáles convergen y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(0.1)^n$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.1)^n}{n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{2^n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{n+3}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3+n}{5+n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{10}\right)$
27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} n^2 (2/3)^n$
28. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln n}{n - \ln n}$
31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(2n)^n}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(2n)!}{2^n n! n}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$
43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \operatorname{sech} n$
46. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \operatorname{csch} n$
47. $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \cdots$
48. $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \cdots$

Estimación del error

En los ejercicios 49 a 52, estime la magnitud del error en el que se incurre al utilizar la suma de los primeros cuatro términos para aproximar la suma de toda la serie.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
50. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n}$ Como verá en la sección 10.7, la suma es $\ln(1.01)$

52. $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

En los ejercicios 53 a 56, determine cuántos términos deben utilizarse para estimar la suma de toda la serie con un error menor a 0.001.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+3}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left(n+3\sqrt{n}\right)^3}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(\ln(n+2))}$

T Aproxime las sumas de los ejercicios 57 y 58 con un error de magnitud menor que 5×10^{-6}.

57. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ Como verá en la sección 10.9, la suma es cos 1, el coseno de 1 radián.

58. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ Como verá en la sección 10.9, la suma es e^{-1}.

Teoría y ejemplos

59. a. La serie

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$$

no cumple una de las condiciones del teorema 14. ¿Cuál?

b. Determine la suma de la serie del inciso (a) mediante el teorema 17.

T **60.** El límite L de una serie alternante que satisface las condiciones del teorema 14 se encuentra entre los valores de cualesquiera dos sumas parciales consecutivas. Lo anterior sugiere utilizar el promedio

$$\frac{s_n + s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$$

para estimar L. Calcule

$$s_{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}$$

como una aproximación a la suma de la serie armónica alternante. La suma exacta es $\ln 2 = 0.69314718\ldots$

61. El signo del residuo de una serie alternante que satisface las condiciones del teorema 14 Demuestre la afirmación del teorema 15, en el sentido de que siempre que una serie alternante satisface las condiciones del teorema 14 y se aproxima mediante una de sus sumas parciales, el residuo (la suma de los términos sin utilizar) tiene el mismo signo que el primer término no utilizado. (*Sugerencia*: Agrupe los términos del residuo en pares consecutivos).

62. Demuestre que la suma de los primeros $2n$ términos de la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

es igual a la suma de los primeros n términos de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

¿Convergen estas series? ¿Cuál es la suma de los primeros $2n+1$ términos de la primera serie? Si la serie converge, ¿cuál es su suma?

63. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge.

64. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

65. Demuestre que si las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente, entonces lo mismo sucede con:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (cualquier número k)

66. Demuestre por medio de un ejemplo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ puede divergir incluso si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen.

T **67.** En la serie armónica alternante, suponga que el objetivo es rearreglar los términos para obtener una serie que converja a $-1/2$. Inicie el nuevo arreglo con el primer término negativo, que es $-1/2$. Siempre que obtenga una suma que sea menor o igual que $-1/2$, inicie la introducción de términos positivos, tomados en orden, hasta que la nueva suma sea mayor que $-1/2$. Después sume términos negativos hasta que, de nuevo, el total sea menor o igual que $-1/2$. Continúe con este proceso hasta que sus sumas parciales hayan estado por arriba del valor objetivo al menos tres veces y termine en o debajo de él. Si s_n es la suma de los n primeros términos de su nueva serie, trace los puntos (n, s_n) para ilustrar el comportamiento de las sumas.

68. Bosquejo de la demostración del teorema del rearreglo (teorema 17)

a. Sea ϵ un número real positivo, sea $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y sea $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Demuestre que para algún índice N_1 y para algún índice $N_2 \ge N_1$,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty}|a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como todos los términos $a_1, a_2, \ldots, a_{N_2}$ aparecen en algún lugar de la sucesión $\{b_n\}$, existe un índice $N_3 \ge N_2$, tal que si $n \ge N_3$, entonces $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - s_{N_2}$ es, cuando mucho, una suma de términos a_m con $m \ge N_1$. Por lo tanto, si $n \ge N_3$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| &\le \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + |s_{N_2} - L| \\ &\le \sum_{k=N_1}^{\infty}|a_k| + |s_{N_2} - L| < \epsilon.\end{aligned}$$

b. El argumento en el inciso (a) demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ahora demuestre que como $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ converge a $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

10.7 Series de potencias

Ahora que sabemos analizar la convergencia de series infinitas de números, es posible estudiar sumas que parecen "polinomios infinitos". A estos polinomios les llamamos *series de potencias*, porque están definidos como series infinitas de potencias de alguna variable, en nuestro caso, x. Al igual que los polinomios, las series de potencias pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas, derivadas e integradas, para producir nuevas series de potencias.

Series de potencias y convergencia

Comenzaremos con la definición formal, que especifica la notación y los términos que se utilizarán para las series de potencias.

DEFINICIONES Una **serie de potencias alrededor de $x = 0$** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots. \tag{1}$$

Una **serie de potencias alrededor de $x = a$** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{2}$$

en la cual el **centro** a y los **coeficientes** $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ son constantes.

La ecuación (1) es el caso especial que se obtiene al hacer $a = 0$ en la ecuación (2). Veremos que una serie de potencias define una función $f(x)$ en cierto intervalo donde ésta converge. Además, esta función demostrará que es continua y derivable en el interior de ese intervalo.

EJEMPLO 1 Al hacer que todos los coeficientes sean 1 en la ecuación (1), resulta la serie geométrica de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Ésta es la serie geométrica, con su primer término 1 y razón x. Converge a $1/(1-x)$ para $|x| < 1$. Expresamos este hecho escribiendo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1. \tag{3}$$

■

Serie de potencias para el recíproco

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

Hasta aquí hemos usado la ecuación (3) como una fórmula para la suma de la serie de la derecha. Ahora cambiaremos de enfoque: pensaremos en las sumas parciales de la serie del lado derecho como polinomios $P_n(x)$ que se aproximan a la función de la izquierda. Para valores de x cercanos a cero, sólo necesitamos tomar unos cuantos términos de la serie para obtener una buena aproximación. Al avanzar hacia $x = 1$ o -1, se requieren más términos. La figura 10.14 muestra las gráficas de $f(x) = 1/(1-x)$ y los polinomios de aproximación $y_n = P_n(x)$ para $n = 0, 1, 2$ y 8. La función $f(x) = 1/(1-x)$ no es continua en los intervalos que contengan a $x = 1$, donde tiene una asíntota vertical. Las aproximaciones no se aplican cuando $x \geq 1$.

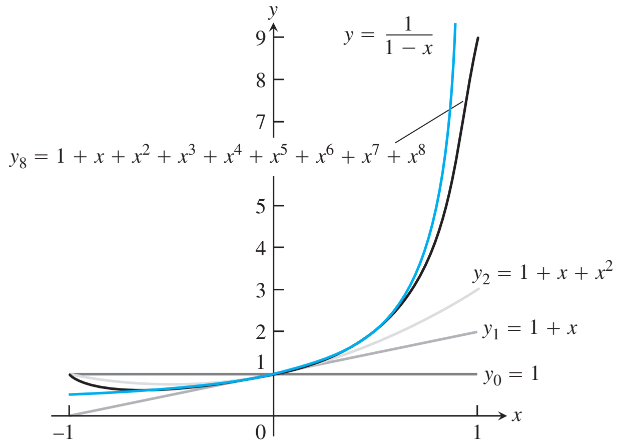


FIGURA 10.14 Las gráficas de $f(x) = 1/(1 - x)$ en el ejemplo 1 y cuatro de sus polinomios de aproximación.

EJEMPLO 2 La serie de potencias

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{4}$$

concuerda con la ecuación (2), con $a = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4$, …, $c_n = (-1/2)^n$. Ésta es una serie geométrica cuyo primer término es 1 y la razón es $r = -\dfrac{x-2}{2}$. La serie converge para $\left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1$ o $0 < x < 4$. La suma es

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x},$$

así,

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \qquad 0 < x < 4.$$

La serie (4) genera aproximaciones polinomiales útiles de $f(x) = 2/x$ para valores de x próximos a 2:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

y así sucesivamente (figura 10.15). ■

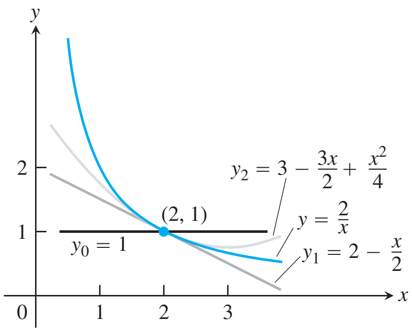


FIGURA 10.15 Las gráficas de $f(x) = 2/x$ y sus primeros tres polinomios de aproximación (ejemplo 2).

El siguiente ejemplo ilustra cómo determinar la convergencia o divergencia de una serie de potencias mediante el criterio de la razón.

EJEMPLO 3 ¿Para qué valores de x convergen las siguientes series de potencias?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

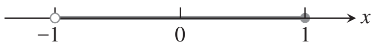
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$

Solución Aplique el criterio de la razón a la serie $\sum|u_n|$, donde u_n es el n-ésimo término de la serie de potencias en cuestión. (Recuerde que el criterio de la razón se aplica a series con términos no negativos).

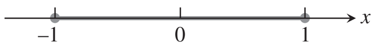
(a) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \rightarrow |x|.$

La serie converge absolutamente para $|x| < 1$. Diverge si $|x| > 1$ porque el n-ésimo término no converge a cero. En $x = 1$, obtenemos la serie armónica alternante $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$, que es convergente. En $x = -1$, tenemos $-1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 - \cdots$, la negativa de la serie armónica, que es divergente. La serie (a) converge para $-1 < x \le 1$ y diverge para cualquier otro valor.



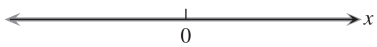
(b) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \rightarrow x^2.$ $\quad 2(n+1) - 1 = 2n + 1$

La serie converge absolutamente para $x^2 < 1$. Diverge para $x^2 > 1$ porque el n-ésimo término no converge a cero. En $x = 1$, la serie se vuelve $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$, que converge como lo indica el teorema de la serie alternante. También converge en $x = -1$ porque vuelve a ser una serie alternante que satisface las condiciones de la convergencia. El valor en $x = -1$ es el negativo del valor en $x = 1$. La serie (b) converge para $-1 \le x \le 1$ y diverge con cualquier otro valor.



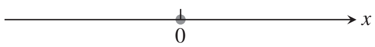
(c) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$ para toda x. $\quad \displaystyle\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)}$

La serie tiene convergencia absoluta para toda x.



(d) $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \rightarrow \infty$ excepto cuando $x = 0$.

La serie diverge para todos los valores de x, excepto para $x = 0$.



El ejemplo anterior ilustra cómo podría converger una serie de potencias. El siguiente resultado muestra que si una serie de potencias converge para más de un valor, entonces converge sobre un intervalo de valores. El intervalo podría ser finito o infinito y contener uno, ambos o ninguno de los extremos del intervalo. Veremos que cada extremo de un intervalo finito se debe probar de forma independiente acerca de la convergencia o la divergencia.

TEOREMA 18: Teorema de convergencia para series de potencias Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ converge para $x = c \neq 0$, entonces tiene convergencia absoluta para toda x, con $|x| < |c|$. Si la serie diverge para $x = d$, entonces diverge para toda x con $|x| > |d|$.

Demostración La demostración utiliza el criterio de comparación, con la serie dada comparada con una serie geométrica convergente.

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ por el criterio del n-ésimo término. Por lo tanto, existe un entero N tal que $|a_n c^n| < 1$ para toda $n > N$. Es decir,

$$|a_n| < \frac{1}{|c|^n} \qquad \text{para } n > N. \tag{5}$$

Tomemos ahora cualquier x, tal que $|x| < |c|$, por lo que $|x|/|c| < 1$. Si se multiplican ambos lados de la ecuación (5) por $|x|^n$, se obtiene

$$|a_n||x|^n < \frac{|x|^n}{|c|^n} \qquad \text{para } n > N.$$

Como $|x/c| < 1$, se sigue que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |x/c|^n$ converge. Por el criterio de comparación (teorema 10), la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x^n|$ converge, por lo que la serie original $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene convergencia absoluta para $-|c| < x < |c|$ como asegura el teorema. (Véase la figura 10.16).

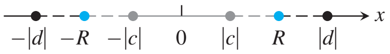


FIGURA 10.16 La convergencia de $\sum a_n x^n$ en $x = c$, implica convergencia absoluta en el intervalo $-|c| < x < |c|$; la divergencia en $x = d$ implica divergencia para $|x| > d$. El corolario del teorema 18 asegura la existencia de un radio de convergencia $R \geq 0$.

Ahora suponga que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge en $x = d$. Si x es un número con $|x^0| > |d|$ y la serie converge en x, entonces la primera mitad del teorema demuestra que la serie también converge en d, en contradicción con nuestra suposición. Así que la serie diverge para toda x con $|x| > |d|$. ■

Para simplificar la notación, el teorema 18 se ocupa de la convergencia de series de la forma $\sum a_n x^n$. Para series de la forma $\sum a_n (x - a)^n$ sustituyendo $x - a$ por x' y aplicamos luego los resultados a la serie $\sum a_n (x')^n$.

Radio de convergencia de una serie de potencias

El teorema que acabamos de demostrar y los ejemplos que hemos examinado nos llevan a la conclusión de que una serie de potencias $\sum c_n (x - a)^n$ se comporta en alguna de las siguientes tres formas. Puede converger sólo en $x = a$, converger en todas partes o converger en algún intervalo de radio R centrado en a. Lo anterior lo demostramos como un corolario del teorema 18.

COROLARIO DEL TEOREMA 18 La convergencia de la serie $\sum c_n (x - a)^n$ se describe por medio de una de las siguientes tres posibilidades:

1. Existe un número positivo R tal que la serie diverge para x, con $|x - a| > R$, pero converge absolutamente para x con $|x - a| < R$. La serie puede converger o no en cualquiera de los extremos $x = a - R$ y $x = a + R.x = a + R$.
2. La serie tiene convergencia absoluta para toda x $(R = \infty)$.
3. La serie converge en $x = a$ y diverge en cualquier otro lugar $(R = 0)$.

Demostración Primero consideramos el caso donde $a = 0$, por lo que tenemos una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ centrada en 0. Si la serie converge en todas partes, estamos en el caso 2. Si converge sólo en $x = 0$, estamos en el caso 3. De otra forma, existe un número distinto de cero, d, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ diverge. Sea S el conjunto de valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge. El conjunto S no incluye a x con $|x| > |d|$, ya que el teorema 18 implica que la serie diverge en todos esos valores. Así que el conjunto S está acotado. Por la propiedad de completez de los números reales (apéndice 7), el conjunto S tiene una mínima cota superior R. (Éste es el menor número con la propiedad de que todos los elementos de S son menores o iguales a R). Como no estamos en el caso 3, la serie converge en algún número $b \neq 0$ y por el teorema 18 también en el intervalo abierto $(-|b|, |b|)$. Por lo tanto, $R > 0$.

Si $|x| < R$, entonces existe un número c en S con $|x| < c < R$, ya que de otra forma R no sería la mínima cota superior para S. La serie converge en c, ya que $c \in S$, así que por el teorema 18 la serie converge absolutamente en x.

Ahora suponga que $|x| > R$. Si la serie converge en x, por el teorema 18, se implica que converge absolutamente en el intervalo abierto $(-|x|, |x|)$, por lo que S contiene dicho intervalo. Ya que R es una cota superior para S, se sigue que $|x| \leq R$, lo cual es una contradicción. Por lo que si $|x| > R$, entonces la serie diverge. Lo anterior demuestra el corolario para series de potencias con centro en $a = 0$.

Para una serie de potencias centrada en $x = a$, hacemos $x' = x - a$ y repetimos el argumento cambiando x con x'. Como $x' = 0$, cuando $x = a$, la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x')|^n$ en un intervalo abierto de radio R con centro en $x' = 0$ corresponde a la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x - a)|^n$ en un intervalo abierto de radio R con centro en $x = a$. ■

Se dice que R es el **radio de convergencia** de la serie de potencias, mientras el intervalo de radio R con centro en $x = a$ se denomina **intervalo de convergencia**. El intervalo de convergencia puede ser abierto, cerrado o semiabierto, lo que depende de la serie que se trate. En puntos x con $|x - a| < R$, la serie converge absolutamente. Si la serie converge para todos los valores de x, decimos que su radio de convergencia es infinito. Si converge sólo en $x = a$, aseguramos que su radio de convergencia es cero.

Cómo demostrar si una serie de potencias converge

1. *Utilice el criterio de la razón* (*o el criterio de la raíz*) *para determinar el intervalo donde la serie converge absolutamente*. Por lo común es un intervalo abierto.

$$|x - a| < R \qquad \text{o} \qquad a - R < x < a + R.$$

2. *Si el intervalo de convergencia absoluta es finito*, *pruebe la convergencia o la divergencia en cada punto extremo*, como en los ejemplos 3a y b. Utilice un criterio de comparación, el criterio de la integral o el criterio de la serie alternante.
3. *Si el intervalo de convergencia absoluta es $a - R < x < a + R$, la serie diverge para $|x - a| > R$* (incluso no tiene convergencia condicional), ya que el n-ésimo término no se aproxima a cero para esos valores de x.

Pruebe cada punto extremo del intervalo (finito) de convergencia.

Operaciones sobre series de potencias

En la intersección de sus intervalos de convergencia, dos series de potencias pueden sumarse y restarse término a término al igual que las series numéricas (teorema 8). Se multiplican igual que los polinomios, aunque con frecuencia nos limitamos al cálculo del producto de los primeros términos, que son los más importantes. El siguiente resultado proporciona una fórmula para los coeficientes en el producto, pero omitimos la demostración.

TEOREMA 19: Teorema de la multiplicación de series para series de potencias
Si $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tienen convergencia absoluta para $|x| < R$ y

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

entonces $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente a $A(x)B(x)$ para $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

La determinación del coeficiente general c_n en el producto de dos series de potencias puede ser muy tediosa y el término ser muy poco manejable. El siguiente cálculo ofrece una ilustración de un producto en el cual determinamos los primeros términos al multiplicar los términos de la segunda serie por cada término de la primera serie:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= (1 + x + x^2 + \cdots)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) \qquad \text{Multiplicar la segunda serie . . .}$$

$$= \underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } 1} + \underbrace{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } x} + \underbrace{\left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} - \cdots\right)}_{\text{por } x^2} + \cdots$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{6} \cdots. \qquad \text{y agrupar los términos de las primeras cuatro potencias.}$$

También es posible sustituir una función $f(x)$ por x en una serie de potencias convergente.

TEOREMA 20 Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < R$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ converge absolutamente para cualquier función continua f en $|f(x)| < R$.

Como $1/(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente para $|x| < 1$, del teorema 20 se sigue que $1/(1 - 4x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (4x^2)^n$ converge absolutamente para $|4x^2| < 1$ o $|x| < 1/2$.

Un teorema de cálculo avanzado dice que una serie de potencias pueden derivarse término a término en cada punto interior de su intervalo de convergencia.

TEOREMA 21: Teorema de la derivación término a término Si $\sum c_n (x - a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, defina una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \qquad \text{en el intervalo} \qquad a - R < x < a + R.$$

Esta función f tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo, por lo que es posible obtener las derivadas si derivamos la serie original término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) c_n (x - a)^{n-2},$$

y así sucesivamente. Cada una de estas series derivadas converge en todos los puntos interiores del intervalo $a - R < x < a + R$.

EJEMPLO 4 Determine la serie para $f'(x)$ y $f''(x)$ si

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1$$

Solución Derivamos, término a término, la serie de potencias en el lado derecho:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad -1 < x < 1;$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \qquad -1 < x < 1$$

¡Precaución! La derivación término a término puede no funcionar con series de otro tipo. Por ejemplo, la serie trigonométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!x)}{n^2}$$

converge para toda x. Pero si derivamos término a término, obtenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2},$$

que diverge para toda x. Ésta no es una serie de potencias, ya que no es una suma de potencias enteras positivas de x.

También se cumple que una serie de potencias pueden integrarse término a término en todo su intervalo de convergencia. Este resultado se demuestra en un curso más avanzado.

TEOREMA 22: Teorema de integración término a término Suponga que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

converge para $a - R < x < a + R \ (R > 0)$. De esta forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

converge para $a - R < x < a + R$ y

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

para $a - R < x < a + R$.

EJEMPLO 5 Identifique la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Solución Derivamos la serie original término a término y obtenemos

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \qquad -1 < x < 1. \qquad \text{Teorema 21}$$

Ésta es una serie geométrica cuyo primer término es 1 y su razón es $-x^2$, así,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ahora integramos $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para obtener

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C.$$

La serie para $f(x)$ es cero cuando $x = 0$, así que $C = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x, \qquad -1 < x < 1. \tag{6}$$

Puede demostrarse que la serie también converge a $\tan^{-1} x$ en los extremos $x = \pm 1$, pero omitimos la prueba. ■

Observe que la serie original del ejemplo 5 converge en ambos extremos del intervalo original de convergencia, pero el teorema 22 sólo puede garantizar la convergencia de la serie derivada dentro del intervalo.

EJEMPLO 6 La serie

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

converge en el intervalo abierto $-1 < t < 1$. Por lo tanto,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \bigg]_0^x \qquad \text{Teorema 22}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

o

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x < 1.$$

Se puede demostrar también que en $x = 1$, la serie converge al número ln 2, aunque eso no lo garantizaba el teorema. ■

Ejercicios 10.7

Intervalos de convergencia

En los ejercicios 1 a 36, **(a)** halle el radio y el intervalo de convergencia de la serie. ¿Para qué valores de x converge la serie **(b)** absolutamente, **(c)** condicionalmente?

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n+3}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)\cdot(x+1)^{n-1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}(x-2)^n}{3n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)x^n$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

26. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ Obtenga la información que necesite acerca de $\sum 1/(n(\ln n)^2)$ del ejercicio 55 de la sección 10.3

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln n}$ Obtenga la información que necesite acerca de $\sum 1/(n\ln n)$ del ejercicio 54 de la sección 10.3

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot4\cdot8\cdots(2n)} x^n$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{n^2\cdot2^n} x^{n+1}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} x^n$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)(x-3)^n$

En los ejercicios 37 a 40, determine el radio de convergencia.

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot6\cdot9\cdots3n} x^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}\right)^2 x^n$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^n(2n)!} x^n$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$

(*Sugerencia:* Aplique el criterio de la raíz).

En los ejercicios 41 a 48, utilice el teorema 20 para determinar el intervalo de convergencia de cada una de las series y, dentro de este intervalo, la suma de las series como una función de x.

41. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

42. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (e^x-4)^n$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

44. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

46. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

47. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

48. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

Teoría y ejemplos

49. ¿Para qué valores de x la serie

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n+\cdots$$

converge? ¿Cuál es su suma? ¿Qué serie se obtiene al derivar término a término la serie dada? ¿Para qué valores de x converge la nueva serie? ¿Cuál es su suma?

50. Si integra la serie del ejercicio 49, ¿qué nueva serie obtiene? ¿Para qué valores de x converge la nueva serie y qué otro nombre recibe su suma?

51. La serie

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

converge a sen x para toda x.

a. Halle los seis primeros términos de una serie para cos x. ¿Para qué valores de x debería ser convergente la serie?

b. Al sustituir x por $2x$ en la serie para sen x, determine una serie que converja a sen $2x$ para toda x.

c. Con el resultado de (a) y la multiplicación de series, calcule los seis primeros términos de una serie para 2 sen x cos x. Compare su respuesta con la respuesta del inciso (b).

52. La serie

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

converge a e^x para toda x.

a. Halle una serie para $(d/dx)e^x$. ¿Obtiene la serie para e^x? Justifique su respuesta.

b. Halle una serie para $\int e^x\,dx$. ¿Obtiene la serie para e^x? Justifique su respuesta.

c. Sustituya x por $-x$ en la serie para e^x y determine una serie que converja a e^{-x} para toda x. Multiplique después la serie por e^x y e^{-x}, luego halle los seis primeros términos de una serie para $e^{-x}\cdot e^x$.

53. La serie

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots$$

converge a tan x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

a. Determine los cinco primeros términos de la serie para ln $|\sec x|$. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

b. Halle los cinco primeros términos de la serie para $\sec^2 x$. ¿Para qué valores x debería converger esta serie?

c. Compruebe su resultado del inciso (b) elevando al cuadrado la serie propuesta para sec x en el ejercicio 54.

54. La serie

$$\sec x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\cdots$$

converge a sec x para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

a. Determine los cinco primeros términos de una serie de potencias para la función ln $|\sec x+\tan x|$. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

b. Halle los cuatro primeros términos de una serie para sec x tan x. ¿Para qué valores de x debería converger la serie?

c. Compruebe su resultado del inciso (b) multiplicando la serie para sec x por la serie propuesta para tan x en el ejercicio 43.

55. Unicidad de las series de potencias convergentes

a. Demuestre que si dos series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ son convergentes e iguales para todos los valores de x en un intervalo abierto $(-c, c)$, entonces $a_n = b_n$ para toda n. (*Sugerencia:* Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Derive término a término para demostrar que a_n y b_n son ambas iguales a $f^{(n)}(0)/(n!)$.)

b. Demuestre que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ para toda x en un intervalo abierto $(-c, c)$, entonces $a_n = 0$ para toda n.

56. La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2/2^n)$ Para determinar la suma de esta serie, exprese $1/(1-x)$ como una serie geométrica, derive ambos lados de la ecuación resultante con respecto a x, multiplique ambos lados del resultado por x, nuevamente derive, otra vez multiplique por x e iguale x a $1/2$. ¿Qué obtiene?

10.8 Series de Taylor y de Maclaurin

En esta sección veremos cómo ciertas funciones infinitamente derivables generan las series de potencias conocidas como series de Taylor. En muchos casos, tales series pueden brindar útiles aproximaciones polinomiales de las funciones que las generaron. Las series de Taylor, al ser utilizadas rutinariamente por científicos y matemáticos, constituyen uno de los temas más importantes de este capítulo.

Representaciones en series

A partir del teorema 21, sabemos que la suma de una serie de potencias es una función continua con derivadas de todos los órdenes, dentro de su intervalo de convergencia. Pero, ¿qué se diría de lo contrario? Si una función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo I, ¿se puede expresar como una serie de potencias en I? Si esto es posible, ¿cuáles serán sus coeficientes?

Es posible responder fácilmente a la última pregunta si suponemos que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

con un radio de convergencia positivo. Mediante derivación repetida término a término, dentro del intervalo de convergencia I, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots, \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots, \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

que es la n-ésima derivada, para toda n,

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{una suma de términos con } (x-a) \text{ como factor}.$$

Puesto que todas estas ecuaciones son válidas cuando $x = a$, tenemos

$$f'(a) = a_1, \qquad f''(a) = 1\cdot 2a_2, \qquad f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3a_3,$$

y, en general,

$$f^{(n)}(a) = n!a_n.$$

Dichas fórmulas revelan un patrón en los coeficientes de cualquier serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ que converge a los valores de f en I ("que representa a f en I"). Si esa serie existe (aún está en duda), entonces sólo hay una de tales series y su n-ésimo coeficiente es

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Si f tiene una representación como serie, ésta debe ser

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \tag{1}$$

Pero si empezamos con una función arbitraria f, infinitamente derivable en un intervalo I centrado en $x = a$ y la usamos para generar la serie de la ecuación (1), entonces, ¿la serie convergerá a $f(x)$ en cada x en el interior de I? La respuesta es quizá: para algunas funciones sí, pero para otras no será así, como veremos.

Series de Taylor y Maclaurin

La serie en el lado derecho de la ecuación (1) es la más importante y útil que estudiaremos en este capítulo.

BIOGRAFÍAS HISTÓRICAS

Brook Taylor
(1685–1731)

Colin Maclaurin
(1698–1746)

DEFINICIONES Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. Entonces la **serie de Taylor generada por f en $x = a$** es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

La **serie de Maclaurin generada por f** es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

que es la serie de Taylor generada por f en $x = 0$.

Con frecuencia, la serie de Maclaurin generada por f sólo se llama serie de Taylor de f.

EJEMPLO 1 Halle la serie de Taylor generada por $f(x) = 1/x$ en $a = 2$. ¿Converge la serie a $1/x$? ¿Dónde?

Solución Necesitamos determinar $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$ Al derivar, tenemos

$$f(x) = x^{-1}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f''(x) = 2!x^{-3}, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)},$$

por lo que

$$f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}, \quad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}, \quad \cdots, \quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

La serie de Taylor es

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots.$$

Ésta es una serie geométrica con 1/2 como primer término y razón $r = -(x - 2)/2$. Converge absolutamente para $|x - 2| < 2$ y su suma es

$$\frac{1/2}{1 + (x - 2)/2} = \frac{1}{2 + (x - 2)} = \frac{1}{x}.$$

En este ejemplo, la serie de Taylor generada por $f(x) = 1/x$ en $a = 2$ converge a $1/x$ para $|x - 2| < 2$ o $0 < x < 4$. ■

Polinomios de Taylor

La linealización de una función derivable f en un punto a es el polinomio de grado uno dado por

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

En la sección 3.9 usamos dicha linealización para aproximar $f(x)$ en valores de x cercanos a a. Si f tiene derivadas de orden mayor en a, entonces también tiene aproximaciones polinomiales de orden mayor, una para cada derivada disponible. Estos polinomios se conocen como polinomios de Taylor de f.

DEFINICIÓN Sea f una función con derivadas de orden k para $k = 1, 2, \ldots, n$ en algún intervalo que contenga a a como un punto interior. Entonces, para cualquier entero n, desde 0 hasta N, el **polinomio de Taylor de orden n** generado por f en $x = a$ es el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

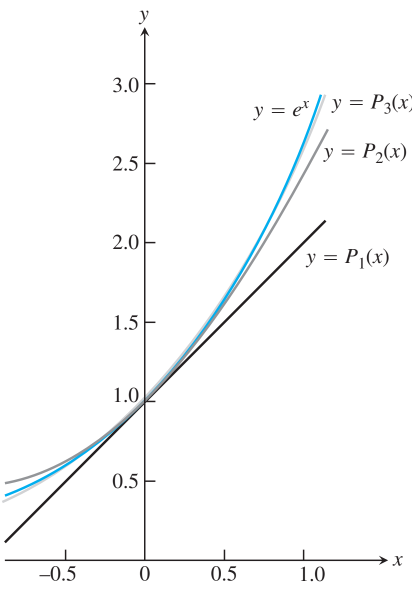


FIGURA 10.17 La gráfica de $f(x) = e^x$ y sus polinomios de Taylor

$P_1(x) = 1 + x$
$P_2(x) = 1 + x + (x^2/2!)$
$P_3(x) = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!)$.

Observe la muy cercana aproximación cerca del centro $x = 0$ (ejemplo 2).

Decimos que un polinomio de Taylor es de *orden n* y no de *grado n*, porque $f^{(n)}(a)$ puede ser cero. Por ejemplo, los dos primeros polinomios de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $x = 0$, son $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = 1$. El polinomio de primer orden tiene grado cero, no uno.

Del mismo modo que la linealización de f en $x = a$ ofrece la mejor aproximación lineal de f en la vecindad de a, los polinomios de Taylor de orden mayor brindan "las mejores" aproximaciones polinomiales de sus respectivos grados. (Véase el ejercicio 40).

EJEMPLO 2 Determine la serie de Taylor y los polinomios de Taylor generados por $f(x) = e^x$ en $x = 0$.

Solución Dado que $f^{(n)}(x) = e^x$ y $f^{(n)}(0) = 1$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, la serie de Taylor generada por f en $x = 0$ (figura 10.17) es

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ésta es también la serie de Maclaurin para e^x. En la siguiente sección veremos que la serie converge a e^x en toda x.

El polinomio de Taylor de orden n en $x = 0$ es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor y los polinomios de Taylor generados por $f(x) = \cos x$ en $x = 0$.

Solución El coseno y sus derivadas son

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\operatorname{sen} x,\\
f''(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x, & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

En $x = 0$, los cosenos son 1 y los senos son 0, por lo cual

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

La serie de Taylor generada por f en 0 es

$$\begin{aligned}
f(0) &+ f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots\\
&= 1 + 0\cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0\cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.
\end{aligned}$$

Ésta también es la serie de Maclaurin para $\cos x$. Observe que sólo las potencias pares de x aparecen en la serie de Taylor generada por la función coseno, lo cual es congruente con el hecho de que sea una función par. En la sección 10.9, veremos que la serie converge a $\cos x$ para toda x.

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, los polinomios de Taylor de órdenes $2n$ y $2n + 1$ son idénticos:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

La figura 10.18 revela qué tan bien estos polinomios aproximan a $f(x) = \cos x$, cerca de $x = 0$. Sólo se muestra la parte del lado derecho de las gráficas, ya que las gráficas son simétricas con respecto al eje y.

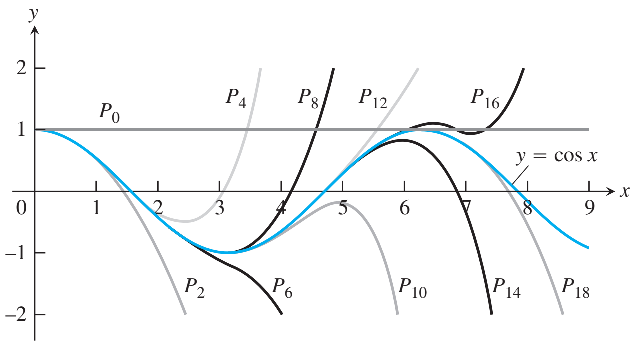


FIGURA 10.18 Los polinomios

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

convergen a $\cos x$ cuando $n \to \infty$. Podemos deducir el comportamiento de $\cos x$, a una distancia arbitrariamente grande, si se conocen sólo los valores del coseno y sus derivadas en $x = 0$ (ejemplo 3).

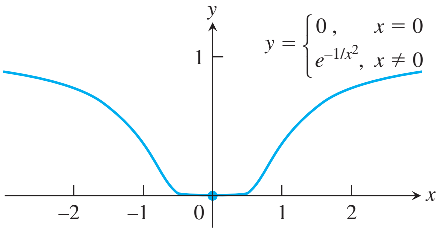


FIGURA 10.19 La gráfica de la extensión continua de $y = e^{-1/x^2}$ es tan plana en el origen que todas sus derivadas allí son cero (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Puede demostrarse (aunque no con facilidad) que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

(figura 10.19) tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ y que $f^{(n)}(0) = 0$ para toda n. Esto significa que la serie de Taylor generada por f en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots. \end{aligned}$$

La serie converge para toda x (su suma es 0), pero converge a $f(x)$ sólo en $x = 0$. Esto es, la serie de Taylor generada por $f(x)$ en este ejemplo *no* es igual a la función $f(x)$. ■

Aún quedan pendientes dos preguntas.

1. ¿Para qué valores de x puede esperarse que una serie de Taylor converja a su función que la genera?
2. ¿Cuál es la precisión con la que los polinomios de Taylor de una función aproximan a la función en un intervalo dado?

Las respuestas se dan en la siguiente sección por medio del teorema de Taylor.

Ejercicios 10.8

Determinación de polinomios de Taylor

En los ejercicios 1 a 10, determine los polinomios de Taylor de órdenes 0, 1, 2 y 3 generados por f en a.

1. $f(x) = e^{2x}, \quad a = 0$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0$
3. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
4. $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$
5. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
6. $f(x) = 1/(x + 2), \quad a = 0$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/4$
8. $f(x) = \tan x, \quad a = \pi/4$
9. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$
10. $f(x) = \sqrt{1 - x}, \quad a = 0$

Determinación de series de Taylor en $x = 0$ (series de Maclaurin)

Determine las series de Maclaurin para las funciones de los ejercicios 11 a 22.

11. e^{-x}
12. xe^x
13. $\dfrac{1}{1 + x}$
14. $\dfrac{2 + x}{1 - x}$
15. $\operatorname{sen} 3x$
16. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$
17. $7 \cos(-x)$
18. $5 \cos \pi x$
19. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
20. $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
21. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
22. $\dfrac{x^2}{x + 1}$

Determinación de las series de Taylor y de Maclaurin

En los ejercicios 23 a 32, determine la serie de Taylor generada por f en $x = a$.

23. $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$
24. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$
25. $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$
26. $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$
27. $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$
28. $f(x) = 1/(1 - x)^3, \quad a = 0$
29. $f(x) = e^x, \quad a = 2$
30. $f(x) = 2^x, \quad a = 1$
31. $f(x) = \cos(2x + (\pi/2)), \quad a = \pi/4$
32. $f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad a = 0$

En los ejercicios 33 a 36, determine los primeros tres términos distintos de cero de la serie de Maclaurin para cada función y los valores de x para los cuales la serie converge absolutamente.

33. $f(x) = \cos x - (2/(1 - x))$
34. $f(x) = (1 - x + x^2)\, e^x$
35. $f(x) = (\operatorname{sen} x) \ln(1 + x)$
36. $f(x) = x \operatorname{sen}^2 x$

Teoría y ejemplos

37. Utilice la serie de Taylor generada por e^x en $x = a$ para demostrar que

$$e^x = e^a\left[1 + (x - a) + \frac{(x - a)^2}{2!} + \cdots\right].$$

38. (*Continuación del ejercicio 37*). Determine la serie de Taylor generada por e^x en $x = 1$. Compare su respuesta con la fórmula del ejercicio 37.

39. Suponga que $f(x)$ tiene derivadas hasta de orden n en $x = a$. Demuestre que el polinomio de Taylor de orden n y sus primeras derivadas tienen los mismos valores que f y que sus primeras n derivadas en $x = a$.

40. Propiedades de aproximación de los polinomios de Taylor Suponga que $f(x)$ es derivable en un intervalo centrado en $x = a$ y que $g(x) = b_0 + b_1(x - a) + \cdots + b_n(x - a)^n$ es un polinomio de grado n con coeficientes constantes $b_0, \ldots, b_n$. Sea $E(x) = f(x) - g(x)$. Demuestre que si imponemos a g las condiciones

i) $E(a) = 0$ El error de la aproximación es cero en $x = a$.

ii) $\lim_{x \to a} \dfrac{E(x)}{(x - a)^n} = 0$, El error es despreciable si se compara con $(x - a)^n$.

entonces

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Así, el polinomio de Taylor $P_n(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que produce un error que es cero en $x = a$ y además resulta despreciable cuando se compara con $(x - a)^n$.

Aproximaciones cuadráticas El polinomio de Taylor de orden 2 generado por una función $f(x)$, dos veces derivable en $x = a$, se denomina *aproximación cuadrática* de f en $x = a$. En los ejercicios 41 a 46, determine **(a)** la linealización (polinomio de Taylor de orden 1) y **(b)** la aproximación cuadrática de f en $x = 0$.

41. $f(x) = \ln(\cos x)$

42. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

43. $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$

44. $f(x) = \cosh x$

45. $f(x) = \operatorname{sen} x$

46. $f(x) = \tan x$

10.9 Convergencia de series de Taylor

En la última sección preguntamos cuándo puede esperarse que una serie de Taylor para una función converja a la función (que la generó). Respondemos la pregunta en esta sección con el siguiente teorema.

TEOREMA 23: Teorema de Taylor Si f y sus primeras n derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ son continuas en el intervalo cerrado entre a y b, y si $f^{(n)}$ es derivable en el intervalo abierto entre a y b, entonces existe un número c, entre a y b, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

El teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio (ejercicio 45). Al final de esta sección se presenta una demostración del teorema de Taylor.

Cuando aplicamos el teorema de Taylor, generalmente queremos mantener fija a y usar a b como variable independiente. La fórmula de Taylor es más fácil de usar en esas circunstancias si cambiamos b por x. He aquí una versión del teorema con este cambio.

Fórmula de Taylor

Si f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I que contiene a a, entonces, para cada entero positivo n y para cada x de I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \tag{1}$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \quad \text{para alguna } c \text{ entre } a \text{ y } x. \tag{2}$$

Cuando lo expresamos en esta forma, el teorema de Taylor nos dice que para cada $x \in I$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

La función $R_n(x)$ está determinada por el valor de la $(n + 1)$-ésima derivada, $f^{(n+1)}$ en un punto c, el cual depende de a y de x, y se encuentra entre ellos. Para cualquier valor de n que elijamos, la ecuación nos da una aproximación polinomial de f de ese orden y también una fórmula para el error cometido al usar esa aproximación sobre el intervalo I.

La ecuación (1) se conoce como **fórmula de Taylor**. La función $R_n(x)$ se llama **residuo de orden n** o **término de error** para la aproximación de f por medio de $P_n(x)$ sobre I.

> Si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para toda $x \in I$, decimos que la serie de Taylor generada por f en $x = a$ **converge** a f en I, y escribimos
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Con frecuencia podemos estimar R_n sin conocer el valor de c, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 Demuestre que la serie de Taylor generada por $f(x) = e^x$ en $x = 0$ converge a $f(x)$ para todo valor real de x.

Solución La función tiene derivadas de todos los órdenes en todo el intervalo $I = (-\infty, \infty)$. Las ecuaciones (1) y (2) con $f(x) = e^x$ y $a = 0$ dan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

El polinomio del ejemplo 2, de la sección 10.8.

y

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{para alguna } c \text{ entre } 0 \text{ y } x.$$

Ya que e^x es una función creciente de x, e^c está entre $e^0 = 1$ y e^x. Cuando x es negativa, c también lo es, y $e^c < 1$. Cuando x es cero, $e^x = 1$ y $R_n(x) = 0$. Cuando x es positiva, c también lo es, y $e^c < e^x$. Por lo tanto, para $R_n(x)$ dado como antes,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{cuando } x \le 0, \qquad e^c < 1$$

y

$$|R_n(x)| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{cuando } x > 0. \qquad e^c < e^x$$

Por último, puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{para toda } x,$$

Teorema 5, sección 10.1

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, y la serie converge a e^x para toda x. Por lo tanto,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots. \tag{3}$$

■

El número e como una serie

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Podemos utilizar el resultado del ejemplo 1 con $x = 1$ para escribir

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1),$$

donde para alguna c entre 0 y 1

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \qquad e^c < e^1 < 3$$

Estimación del residuo

Con frecuencia es posible estimar $R_n(x)$ como lo hicimos en el ejemplo 1. Este método de estimación es tan conveniente que lo enunciaremos como teorema para referencias futuras.

TEOREMA 24: Teorema de estimación del residuo Si existe una constante positiva M tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para toda t entre x y a, inclusive, entonces el término residual $R_n(x)$ del teorema de Taylor satisface la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si esta desigualdad se cumple para toda n y f satisface todas las demás condiciones del teorema de Taylor, entonces la serie converge a $f(x)$.

Los siguientes dos ejemplos utilizan el teorema 24 para demostrar que la serie de Taylor generada por las funciones seno y coseno converge a esas funciones.

EJEMPLO 2 Demuestre que la serie de Taylor para sen x en $x = 0$ converge para toda x.

Solución La función y sus derivadas son

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x, & f'(x) &= \cos x, \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'''(x) &= -\cos x, \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \operatorname{sen} x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x,
\end{aligned}$$

de manera que

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

La serie sólo tiene términos de potencia impar y, para $n = 2k + 1$, el teorema de Taylor nos da

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

Todas las derivadas de sen x tienen valores absolutos menores o iguales que 1, así que podemos aplicar el teorema de estimación del residuo con $M = 1$ para obtener

$$|R_{2k+1}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Del teorema 5, regla 6, tenemos $(|x|^{2k+2}/(2k+2)!) \to 0$ cuando $k \to \infty$, cualquiera que sea el valor de x, por lo que $R_{2k+1}(x) \to 0$ y la serie de Maclaurin para sen x converge a sen x para toda x. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{4}$$

■

EJEMPLO 3 Demuestre que la serie de Taylor para $\cos x$ en $x = 0$ converge a $\cos x$ para todos los valores de x.

Solución Sumamos el término residual al polinomio de Taylor para $\cos x$ (ejemplo 3, sección 10.8) para obtener la fórmula de Taylor para $\cos x$, con $n = 2k$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

Puesto que las derivadas del coseno tienen un valor absoluto menor o igual que 1, el teorema de estimación del residuo con $M = 1$ produce

$$|R_{2k}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Para todo valor de x, $R_{2k}(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, la serie converge a $\cos x$ para todo valor de x. Así que

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots. \tag{5}$$

■

Uso de la serie de Taylor

Como toda serie de Taylor es una serie de potencias, las operaciones de suma, resta y multiplicación de series de Taylor son válidas en la intersección de sus intervalos de convergencia.

EJEMPLO 4 Mediante series conocidas y utilizando operaciones con series de potencias, determine los primeros términos de la serie de Taylor para la función dada.

(a) $\frac{1}{3}(2x + x\cos x)$ **(b)** $e^x \cos x$

Solución

(a) $$\frac{1}{3}(2x + x\cos x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{3 \cdot 4!} - \cdots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{72} - \cdots$$

(b) $$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

Multiplicar la primera serie por cada término de la segunda serie.

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{2!4!} + \cdots\right) + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots$$

■

Por el teorema 20, podemos utilizar la serie de Taylor de la función f para determinar la serie de Taylor de $f(u(x))$, donde $u(x)$ es cualquier función continua. La serie de Taylor resultante de dicha sustitución convergerá para toda c tal que $u(x)$ esté dentro del intervalo de convergencia de la serie de Taylor de f.

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Ecuación (5) con $2x$ en vez de x

EJEMPLO 5 ¿Para qué valores de x podemos sustituir sen x por $x - (x^3/3!)$ si introducimos un error de magnitud no mayor que 3×10^{-4}?

Solución Aquí es posible aprovechar el hecho de que la serie de Taylor para sen x es una serie alternante para todo valor de x diferente de cero. Según el teorema de estimación de series alternantes (sección 10.6), el error al truncar

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} \;\vdots\; + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

después de $(x^3/3!)$ no es mayor que

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}.$$

Por lo tanto, el error será menor o igual que 3×10^{-4} si

$$\frac{|x|^5}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \text{o} \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514.$$

Redondeado hacia abajo, por seguridad

El teorema de estimación de series alternantes nos dice algo que el teorema de estimación del residuo no dice: que la estimación $x - (x^3/3!)$ para sen x es una subestimación cuando x es positiva, porque entonces $x^5/120$ es positiva.

La figura 10.20 muestra la gráfica de sen x, junto a las de algunos de sus polinomios de aproximación de Taylor. La gráfica de $P_3(x) = x - (x^3/3!)$ es casi indistinguible de la curva seno cuando $-1 \le x \le 1$. ■

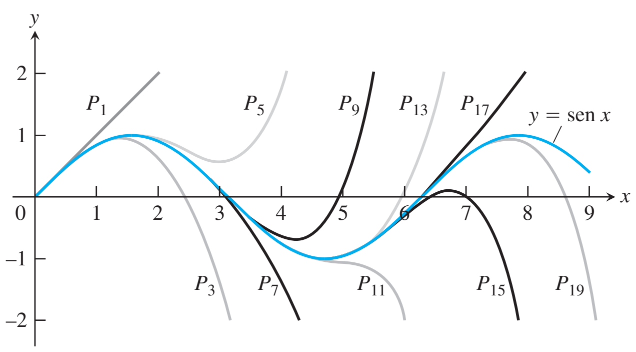


FIGURA 10.20 Los polinomios

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

convergen a sen x cuando $n \to \infty$. Observe cómo $P_3(x)$ aproxima muy bien a la curva del seno para $x \le 1$ (ejemplo 5).

Una demostración del teorema de Taylor

Demostramos el teorema de Taylor suponiendo que $a < b$. La demostración para $a > b$ es casi la misma.

El polinomio de Taylor

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

y sus primeras n derivadas coinciden con la función f y sus primeras n derivadas en $x = a$. No alteramos esa coincidencia si sumamos otro término de la forma $K(x - a)^{n+1}$, donde K es cualquier constante, ya que tal término y sus primeras n derivadas son todas iguales a cero en $x = a$. La nueva función

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x - a)^{n+1}$$

y sus primeras n derivadas aún coinciden con f y sus primeras n derivadas en $x = a$.

Ahora elegimos el valor particular de K que hace que la curva $y = \phi_n(x)$ coincida con la curva original $y = f(x)$ en $x = b$. En símbolos,

$$f(b) = P_n(b) + K(b - a)^{n+1}, \qquad \text{o} \qquad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}}. \tag{7}$$

Con K definida por la ecuación (7), la función

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

mide la diferencia entre la función original f y la función aproximante ϕ_n para cada x en $[a, b]$.

Ahora utilizamos el teorema de Rolle (sección 4.2). Primero, ya que $F(a) = F(b) = 0$, y F y F' son continuas en $[a, b]$, sabemos que

$$F'(c_1) = 0 \qquad \text{para alguna } c_1 \text{ en } (a, b).$$

Ahora, como $F'(a) = F'(c_1) = 0$, y F' y F'' son continuas en $[a, c_1]$, sabemos que

$$F''(c_2) = 0 \qquad \text{para alguna } c_2 \text{ en } (a, c_1).$$

El teorema de Rolle, aplicado de manera sucesiva a F'', F''', ..., $F^{(n-1)}$ implica la existencia de

$$\begin{aligned}
&c_3 \quad \text{en } (a, c_2) && \text{tal que } F'''(c_3) = 0,\\
&c_4 \quad \text{en } (a, c_3) && \text{tal que } F^{(4)}(c_4) = 0,\\
&\vdots\\
&c_n \quad \text{en } (a, c_{n-1}) && \text{tal que } F^{(n)}(c_n) = 0.
\end{aligned}$$

Por último, como $F^{(n)}$ es continua en $[a, c_n]$ y derivable en (a, c_n), y $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, el teorema de Rolle implica que existe un número c_{n+1} en (a, c_n) tal que

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0. \tag{8}$$

Si derivamos $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x - a)^{n+1}$ un total de $n + 1$ veces, obtenemos

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n + 1)!K. \tag{9}$$

Juntas, las ecuaciones (8) y (9) producen

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} \qquad \text{para algún número } c = c_{n+1} \text{ en } (a, b). \tag{10}$$

Las ecuaciones (7) y (10) dan

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Esto concluye la demostración. ■

Ejercicios 10.9

Serie de Taylor por sustitución

Utilice sustitución (como en el ejemplo 4) para determinar la serie de Taylor en $x = 0$ de las funciones en los ejercicios 1 a 10.

1. e^{-5x} **2.** $e^{-x/2}$ **3.** $5 \operatorname{sen}(-x)$

4. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ **5.** $\cos 5x^2$ **6.** $\cos\left(x^{2/3}/\sqrt{2}\right)$

7. $\ln(1 + x^2)$ **8.** $\tan^{-1}(3x^4)$ **9.** $\frac{1}{1 + \frac{3}{4}x^3}$

10. $\frac{1}{2 - x}$

Utilice operaciones con series de potencias para determinar la serie de Taylor en $x = 0$ para las funciones en los ejercicios 11 a 28.

11. xe^x **12.** $x^2 \operatorname{sen} x$ **13.** $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

14. $\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!}$ **15.** $x \cos \pi x$ **16.** $x^2 \cos(x^2)$

17. $\cos^2 x$ (*Sugerencia:* $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

18. $\operatorname{sen}^2 x$ **19.** $\frac{x^2}{1 - 2x}$ **20.** $x \ln(1 + 2x)$

21. $\frac{1}{(1-x)^2}$ **22.** $\frac{2}{(1-x)^3}$ **23.** $x \tan^{-1} x^2$

24. $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ **25.** $e^x + \frac{1}{1+x}$ **26.** $\cos x - \operatorname{sen} x$

27. $\frac{x}{3} \ln(1 + x^2)$ **28.** $\ln(1 + x) - \ln(1 - x)$

Determine los primeros cuatro términos distintos de cero en la serie de Maclaurin para las funciones en los ejercicios 29 a 34.

29. $e^x \operatorname{sen} x$ **30.** $\frac{\ln(1 + x)}{1 - x}$ **31.** $(\tan^{-1} x)^2$

32. $\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x$ **33.** $e^{\operatorname{sen} x}$ **34.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

Estimación del error

35. Estime el error si $P_3(x) = x - (x^3/6)$ se utiliza para aproximar el valor de sen x en $x = 0.1$.

36. Estime el error si $P_4(x) = 1 + x + (x^2/2) + (x^3/6) + (x^4/24)$ se utiliza para aproximar el valor de e^x en $x = 1/2$.

37. ¿Para qué valores aproximados de x puede remplazar sen x por $x - (x^3/6)$, con un error de magnitud no mayor que 5×10^{-4}? Justifique su respuesta.

38. Si cos x se sustituye por $1 - (x^2/2)$ y $|x| < 0.5$, ¿cuál es el error estimado? ¿$1 - (x^2/2)$ tiende a ser demasiado grande o demasiado pequeño? Justifique su respuesta.

39. ¿Qué tan cercana es la aproximación sen $x = x$ cuando $|x| < 10^{-3}$? ¿Para cuáles de estos valores de x resulta que $x <$ sen x?

40. La estimación $\sqrt{1 + x} = 1 + (x/2)$ se usa cuando x es pequeña. Estime el error cuando $|x| < 0.01$.

41. La aproximación $e^x = 1 + x + (x^2/2)$ se usa cuando x es pequeña. Aplique el teorema de estimación del residuo para estimar el error cuando $|x| < 0.1$.

42. (*Continuación del ejercicio 41*). Cuando $x < 0$, la serie para e^x es una serie alternante. Utilice el teorema de estimación de series alternantes para calcular el error resultante al sustituir e^x por $1 + x + (x^2/2)$ cuando $-0.1 < x < 0$. Compare esta nueva estimación con la que obtuvo en el ejercicio 41.

Teoría y ejemplos

43. Utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ para obtener la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^2 x$. A continuación, derive esta serie y determine la serie de Maclaurin para 2 sen x cos x. Compruebe que esta última es la serie correspondiente a sen $2x$.

44. (*Continuación del ejercicio 43*) Aplique la identidad $\cos^2 x = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 x$ para determinar una serie de potencias para $\cos^2 x$.

45. El teorema de Taylor y el teorema del valor medio. Explique por qué el teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2) es un caso especial del teorema de Taylor.

46. Linealizaciones en puntos de inflexión Demuestre que si la gráfica de una función dos veces derivable $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = a$, entonces la linealización de f en $x = a$ también es la aproximación cuadrática de f en $x = a$. Esto explica por qué se ajustan tan bien las rectas tangentes en los puntos de inflexión.

47. El (segundo) criterio de la segunda derivada Utilice la ecuación

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x - a)^2$$

para demostrar lo siguiente.

Suponga que f tiene primera y segunda derivadas continuas, y que $f'(a) = 0$. Entonces,

a. f tiene un máximo local en a si $f'' \leq 0$ en todo un intervalo, en cuyo interior está a;

b. f tiene un mínimo local en a si $f'' \geq 0$ en todo un intervalo, en cuyo interior está a.

48. Una aproximación cúbica Utilice la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $n = 3$ para determinar la aproximación cúbica estándar de $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 0$. Halle una cota superior para la magnitud del error introducido en la aproximación cuando $|x| \leq 0.1$.

49. a. Use la fórmula de Taylor con $n = 2$ para determinar la aproximación cuadrática de $f(x) = (1 + x)^k$ en $x = 0$ (k es una constante).

b. Si $k = 3$, ¿aproximadamente para qué valores de x en el intervalo $[0, 1]$ el error de la aproximación cuadrática será menor que $1/100$?

50. Mejores aproximaciones de π

a. Sea P una aproximación de π con precisión de n decimales. Demuestre que P + sen P produce una aproximación correcta hasta $3n$ decimales. (*Sugerencia:* Sea $P = \pi + x$).

T **b.** Inténtelo con una calculadora.

51. La serie de Taylor generada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Una función definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $R > 0$ tienen una serie de Taylor que converge a la función en todos los puntos de $(-R, R)$. Demuestre que así es; para ello, demuestre que la serie de Taylor generada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es la misma serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Una consecuencia inmediata de esto es que series como

$$x \operatorname{sen} x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

y

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots,$$

obtenidas al multiplicar la serie de Taylor por potencias de x, así como las series resultantes de la integración y la derivación de series de potencias convergentes son, en sí mismas, las series de Taylor generadas por las funciones que ellas representan.

52. Series de Taylor para funciones pares y funciones impares (*Continuación del ejercicio 55, sección 10.7*). Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para toda x en un intervalo abierto $(-R, R)$. Demuestre que

a. Si f es par, entonces $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$, es decir, la serie de Taylor para f en $x = 0$ contiene solamente potencias pares de x.

b. Si f es impar, entonces $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$, es decir, la serie de Taylor para f en $x = 0$ sólo contiene potencias impares de x.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

La fórmula de Taylor con $n = 1$ y $a = 0$ proporciona la linealización de una función en $x = 0$. Con $n = 2$ y $n = 3$ obtenemos las aproximaciones cuadráticas y cúbicas estándar. En estos ejercicios exploramos los errores asociados con estas aproximaciones. Aquí trataremos de responder dos preguntas:

a. ¿Para qué valores de x la función puede sustituirse por cada aproximación con un error menor que 10^{-2}?

b. ¿Cuál es el máximo error que podemos esperar si sustituimos la función por cada aproximación en el intervalo especificado?

Con un SAC, realice los siguientes pasos que le ayudarán a responder las preguntas (a) y (b) para las funciones e intervalos de los ejercicios 53 a 58.

Paso 1: Trace la función sobre el intervalo que se especifica.

Paso 2: Determine los polinomios de Taylor $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ en $x = 0$.

Paso 3: Calcule la $(n + 1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}(c)$ asociada con el término residual para cada polinomio de Taylor. Trace la gráfica de la derivada como una función de c sobre el intervalo especificado y calcule su máximo valor absoluto, M.

Paso 4: Calcule el residuo $R_n(x)$ para cada polinomio. Use la M estimada en el paso 3 en vez de $f^{(n+1)}(c)$; trace $R_n(x)$ sobre el intervalo especificado. Estime después los valores de x que responden la pregunta (a).

Paso 5: Compare su error estimado con el error real $E_n(x) = |f(x) - P_n(x)|$ para ello, trace la gráfica de $E_n(x)$ en el intervalo especificado. Esto le ayudará a responder la pregunta (b).

Paso 6: Trace juntas la función y sus tres aproximaciones de Taylor. Analice las gráficas en relación como la información obtenida en los pasos 4 y 5.

53. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}}, \quad |x| \leq \dfrac{3}{4}$

54. $f(x) = (1 + x)^{3/2}, \quad -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2$

55. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad |x| \leq 2$

56. $f(x) = (\cos x)(\operatorname{sen} 2x), \quad |x| \leq 2$

57. $f(x) = e^{-x} \cos 2x, \quad |x| \leq 1$

58. $f(x) = e^{x/3} \operatorname{sen} 2x, \quad |x| \leq 2$

10.10 La serie binomial y aplicaciones de las series de Taylor

En esta sección introducimos la serie binomial para la estimación de potencias y raíces de expresiones binomiales $(1 + x)^m$. También mostramos cómo pueden utilizarse las series para evaluar integrales no elementales y para evaluar límites que conducen a formas indeterminadas; además, presentamos una deducción de la serie de Taylor para $\tan^{-1} x$. Esta sección concluye con una tabla de referencia de series utilizadas con frecuencia.

La serie binomial para potencias y raíces

La serie de Taylor generada por $f(x) = (1 + x)^m$, cuando m es constante es

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots. \tag{1}$$

Esta serie, llamada **serie binomial**, converge absolutamente para $|x| < 1$. Para deducir la serie, primero listamos la función y sus derivadas:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m \\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \\
&\ \vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.
\end{aligned}$$

Luego las evaluamos en $x = 0$ y las sustituimos en la fórmula de la serie de Taylor para obtener la serie (1).

Si m es un entero mayor o igual a cero, la serie termina después de $(m + 1)$ términos, ya que los coeficientes a partir de $k = m + 1$ son iguales a cero.

Si m no es un entero positivo o cero, la serie es infinita y converge para $|x| < 1$. Para ver por qué, sea u_k el término que incluye a x_k. Luego aplique el criterio de la razón para convergencia absoluta para ver que

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \qquad \text{cuando } k \to \infty.$$

Nuestra deducción de la serie binomial sólo muestra que es generada por $(1 + x)^m$ y converge para $|x| < 1$. La deducción no muestra que la serie converge a $(1 + x)^m$. Sí converge, pero omitimos la demostración. (Véase el ejercicio 64).

Serie binomial

Para $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k,$$

donde definimos

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!},$$

y

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad \text{para } k \geq 3.$$

EJEMPLO 1 Si $m = -1$,

$$\binom{-1}{1} = -1, \qquad \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1,$$

y

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k\left(\frac{k!}{k!}\right) = (-1)^k.$$

Con estos valores para los coeficientes y con x remplazada por $-x$, la fórmula de la serie binomial produce la conocida serie geométrica

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Del ejemplo 1, sección 3.9, sabemos que $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ para $|x|$ pequeña. Con $m = 1/2$, la serie binomial da aproximaciones cuadráticas y de orden superior, junto con una estimación del error que proviene del teorema de estimación de la serie alternante:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots.\end{aligned}$$

Al sustituir la x se obtienen otras aproximaciones. Por ejemplo,

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \qquad \text{para } |x^2| \text{ pequeña}$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \qquad \text{para } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ pequeña, esto es, } |x| \text{ grande}. \quad \blacksquare$$

En ocasiones utilizamos la serie binomial para determinar la suma de una serie de potencias dada en términos de una función conocida. Por ejemplo,

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = (x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sen} x^2.$$

En los ejercicios 59 a 62 se presentan más ejemplos.

Evaluación de integrales no elementales

Las series de Taylor pueden usarse para expresar integrales no elementales en términos de series. Las integrales como $\int \operatorname{sen} x^2\,dx$ surgen en el estudio de la difracción de la luz.

EJEMPLO 3 Exprese $\int \operatorname{sen} x^2\,dx$ como una serie de potencias.

Solución De la serie para sen x, sustituimos x^2 por x para obtener:

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots.$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen} x^2\,dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{10}}{19\cdot 9!} - \cdots. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Estime $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ con un error menor que 0.001.

Solución De la integral indefinida del ejemplo 3,

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 5!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{19\cdot 9!} - \cdots.$$

La serie es alternante, y experimentando encontramos que

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.00076$$

es el primer término numéricamente menor que 0.001. La suma de los dos términos precedentes da

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310.$$

Con dos términos más, podríamos estimar

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx 0.310268$$

con un error menor que 10^{-6}. Con un solo término más, tenemos

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310268303,$$

con un error de aproximadamente 1.08×10^{-9}. Para garantizar esta precisión con la fórmula de error para la regla de trapecio se requeriría el uso de unos 8000 subintervalos. ■

Arco tangente

En el ejemplo 5 de la sección 10.7, encontramos una serie para $\tan^{-1} x$ derivando para obtener

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

e integrando para llegar a

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Sin embargo, no demostramos el teorema de integración término a término en el cual se basa esta conclusión. Ahora deduciremos de nuevo la serie, integrando ambos lados de la fórmula finita

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}, \tag{2}$$

cuyo último término se obtiene sumando los términos residuales como una serie geométrica con primer término $a = (-1)^{n+1}t^{2n+2}$ y razón $r = -t^2$. Si se integran ambos lados de la ecuación (2) desde $t = 0$ hasta $t = x$, resulta

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

El denominador del integrando es mayor o igual que 1, por lo cual

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Si $|x| \leq 1$, el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ si $|x| \leq 1$ y

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1. \\ \tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \leq 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Tomamos este camino, en vez de determinar de manera directa la serie de Taylor, ya que las fórmulas para las derivadas de orden superior de $\tan^{-1} x$ son inmanejables. Cuando hacemos $x = 1$ en la ecuación (3), obtenemos la **fórmula de Leibniz**:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots.$$

Como esta serie converge con demasiada lentitud, no es útil para aproximar π a muchos decimales. La serie para $\tan^{-1} x$ converge más rápidamente cuando x es cercana a cero. Por esa razón, quienes utilizan series para $\tan^{-1} x$ para calcular π utilizan varias identidades trigonométricas.

Por ejemplo, si

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{1}{3},$$

entonces

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

y

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

Ahora la ecuación (3) podría usarse con $x = 1/2$ para evaluar $\tan^{-1}(1/2)$ y con $x = 1/3$ para obtener $\tan^{-1}(1/3)$. La suma de estos resultados, multiplicada por 4, da π.

Evaluación de formas indeterminadas

A veces valuamos formas indeterminadas si expresamos las funciones en cuestión como series de Taylor.

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Solución Representamos $\ln x$ como una serie de Taylor en potencias de $x - 1$. Esto se consigue calculando la serie de Taylor generada por $\ln x$ en $x = 1$, ya sea directamente o sustituyendo x por $x - 1$ en la serie que vimos para $\ln x$ en el ejemplo 6 de la sección 10.7. En cualquiera de las dos formas, obtenemos

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots,$$

de donde encontramos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{2}(x-1) + \cdots\right) = 1.$$

EJEMPLO 6 Evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3}.$$

Solución Las series de Taylor para sen x y tan x, hasta los términos en x^5, son

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

Por lo cual,

$$\operatorname{sen} x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Si usamos series para calcular $\lim_{x\to 0}((1/\operatorname{sen} x) - (1/x))$, no sólo determinamos dicho límite, también descubrimos una fórmula de aproximaciones para csc x.

EJEMPLO 7 Determine $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} &= \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}\\ &= \frac{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = x\,\frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\,\frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}\right) = 0.$$

Por el cociente de la derecha, podemos ver que si $|x|$ es pequeño, entonces

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \approx x \cdot \frac{1}{3!} = \frac{x}{6} \qquad \text{o} \qquad \csc x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}.$$

Identidad de Euler

Como recordará, un número complejo es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. Si sustituimos $x = i\theta$ (θ es real) en la serie de Taylor para e^x y aplicamos las relaciones

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = i^2 i^2 = 1, \qquad i^5 = i^4 i = i,$$

y así sucesivamente, para simplificar el resultado, obtenemos

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta .
\end{aligned}
$$

Esto no *demuestra* que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ ya que aún no hemos definido lo que significa elevar e a una potencia imaginaria. Más bien, indica cómo definir $e^{i\theta}$ para ser coherentes con el resto de nuestros conocimientos.

DEFINICIÓN

Para cualquier número real θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. (4)

La ecuación (4), denominada **identidad de Euler**, nos permite definir e^{a+bi} como $e^a \cdot e^{bi}$ para cualquier número complejo $a + bi$. Una consecuencia de la identidad es la ecuación

$$e^{i\pi} = -1 .$$

Cuando se escribe en la forma $e^{i\pi} + 1 = 0$, esta ecuación combina cinco de las constantes más importantes en matemáticas.

TABLA 10.1 Series de Taylor utilizadas con frecuencia

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Ejercicios 10.10

Series binomiales

Determine los cuatro primeros términos de la serie binomial para las funciones de los ejercicios 1 a 10.

1. $(1 + x)^{1/2}$

2. $(1 + x)^{1/3}$

3. $(1 - x)^{-1/2}$

4. $(1 - 2x)^{1/2}$

5. $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2}$

6. $\left(1 - \frac{x}{3}\right)^{4}$

7. $(1 + x^3)^{-1/2}$

8. $(1 + x^2)^{-1/3}$

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ **10.** $\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

Determine la serie binomial para las funciones de los ejercicios 11 a 14.

11. $(1+x)^4$ **12.** $(1+x^2)^3$

13. $(1-2x)^3$ **14.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^4$

Aproximaciones e integrales no elementales

T En los ejercicios 15 a 18, estime por medio de series los valores de las integrales con un error de magnitud menor que 10^{-3}. (La sección de respuestas presenta los valores de las integrales redondeados a 5 decimales).

15. $\int_0^{0.2} \operatorname{sen} x^2\, dx$ **16.** $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x}-1}{x}\, dx$

17. $\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$ **18.** $\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2}\, dx$

T Por medio de series, aproxime los valores de las integrales de los ejercicios 19 a 22 con un error de magnitud menor de 10^{-8}.

19. $\int_0^{0.1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ **20.** $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\, dx$

21. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4}\, dx$ **22.** $\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$

23. Estime el error si $\cos t^2$ se aproxima mediante $1-\frac{t^4}{2}+\frac{t^8}{4!}$ en la integral $\int_0^1 \cos t^2\, dt$.

24. Estime el error si $\cos\sqrt{t}$ se calcula en forma aproximada mediante $1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4!}-\frac{t^3}{6!}$ en la integral $\int_0^1 \cos\sqrt{t}\, dt$.

En los ejercicios 25 a 28, determine un polinomio que aproxime $F(x)$ en todo el intervalo dado con un error de magnitud menor que 10^{-3}.

25. $F(x)=\int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt,\quad [0,1]$

26. $F(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\, dt,\quad [0,1]$

27. $F(x)=\int_0^x \tan^{-1} t\, dt,$ **(a)** $[0, 0.5]$ **(b)** $[0,1]$

28. $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt,$ **(a)** $[0, 0.5]$ **(b)** $[0,1]$

Formas indeterminadas

En los ejercicios 29 a 40, evalúe los límites por medio de series.

29. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$ **30.** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

31. $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t-(t^2/2)}{t^4}$ **32.** $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta-\theta+(\theta^3/6)}{\theta^5}$

33. $\lim_{y\to 0} \frac{y-\tan^{-1} y}{y^3}$ **34.** $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y-\operatorname{sen} y}{y^3\cos y}$

35. $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2}-1)$ **36.** $\lim_{x\to\infty} (x+1)\operatorname{sen}\frac{1}{x+1}$

37. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ **38.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

39. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{1-\cos 2x}$ **40.** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{x\cdot\operatorname{sen} x^2}$

Uso de la tabla 10.1

En los ejercicios 41 a 52, utilice la tabla 10.1 para determinar la suma de cada serie.

41. $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$

42. $\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\left(\frac{1}{4}\right)^6+\cdots$

43. $1-\frac{3^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{3^4}{4^4\cdot 4!}-\frac{3^6}{4^6\cdot 6!}+\cdots$

44. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

45. $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{3^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{3^5\cdot 5!}-\frac{\pi^7}{3^7\cdot 7!}+\cdots$

46. $\frac{2}{3}-\frac{2^3}{3^3\cdot 3}+\frac{2^5}{3^5\cdot 5}-\frac{2^7}{3^7\cdot 7}+\cdots$

47. $x^3+x^4+x^5+x^6+\cdots$

48. $1-\frac{3^2x^2}{2!}+\frac{3^4x^4}{4!}-\frac{3^6x^6}{6!}+\cdots$

49. $x^3-x^5+x^7-x^9+x^{11}-\cdots$

50. $x^2-2x^3+\frac{2^2x^4}{2!}-\frac{2^3x^5}{3!}+\frac{2^4x^6}{4!}-\cdots$

51. $-1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+\cdots$

52. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}+\cdots$

Teoría y ejemplos

53. Sustituya x por $-x$ en la serie de Taylor para $\ln(1+x)$ con la finalidad de obtener una serie para $\ln(1-x)$. Después, reste esto de la serie de Taylor para $\ln(1+x)$ para demostrar que para $|x|<1$,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

54. ¿Cuántos términos de la serie de Taylor para $\ln(1+x)$ es necesario sumar para tener la seguridad de calcular $\ln(1.1)$ con un error de magnitud menor que 10^{-8}? Justifique su respuesta.

55. De acuerdo con el teorema de estimación de series alternantes, ¿cuántos términos de la serie de Taylor para $\tan^{-1} 1$ es necesario sumar para tener la seguridad de calcular $\pi/4$ con un error de magnitud menor que 10^{-3}? Justifique su respuesta.

56. Demuestre que la serie de Taylor para $f(x)=\tan^{-1} x$ diverge para $|x|>1$.

T **57. Estimación de pi** ¿Aproximadamente cuántos términos de la serie de Taylor para $\tan^{-1} x$ tendría usted que usar para evaluar cada término del lado derecho de la ecuación

$$\pi=48\tan^{-1}\frac{1}{18}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}-20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

con un error de magnitud menor que 10^{-6}? En contraste, la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ a $\pi^2/6$ es tan lenta que ni siquiera con 50 términos se obtiene una precisión de dos decimales.

58. Integre los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\tan t$, desde 0 hasta x, para obtener los tres primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\ln \sec x$.

59. a. Utilice la serie binomial y el hecho de que

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

para generar los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

b. Serie para $\cos^{-1} x$ Utilice el resultado del inciso (a) para determinar los cinco primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para $\cos^{-1} x$.

60. a. Serie para $\operatorname{senh}^{-1} x$ Determine los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor para

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

T **b.** Use los *tres* primeros términos de la serie en el inciso (a) para estimar $\operatorname{senh}^{-1} 0.25$. Dé una cota superior para la magnitud del error introducido en la estimación.

61. Obtenga la serie de Taylor para $1/(1 + x)^2$ a partir de la serie para $-1/(1 + x)$.

62. Use la serie de Taylor para $1/(1 - x^2)$ para obtener una serie para $2x/(1 - x^2)^2$.

T **63. Estimación de Pi** El matemático inglés Wallis descubrió la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}.$$

Aplicando esta fórmula, calcule π hasta la segunda cifra decimal.

64. Utilice los siguientes pasos para demostrar la ecuación (1).

a. Obtenga la derivada de la serie

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

para demostrar que

$$f'(x) = \frac{m f(x)}{1 + x}, \quad -1 < x < 1.$$

b. Defina $g(x) = (1 + x)^{-m} f(x)$ y demuestre que $g'(x) = 0$.

c. Con base en el inciso (b), demuestre que

$$f(x) = (1 + x)^m.$$

65. Serie para $\operatorname{sen}^{-1} x$ Integre la serie binomial para $(1 - x^2)^{-1/2}$ y demuestre que para $|x| < 1$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

66. Serie para $\tan^{-1} x$ con $|x| > 1$ Deduzca las series

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x > 1$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots, \quad x < -1,$$

integrando la serie,

$$\frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + (1/t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

en el primer caso desde x hasta ∞ y en el segundo, desde $-\infty$ hasta x.

Identidad de Euler

67. Utilice la ecuación (4) para escribir las siguientes potencias de e en la forma $a + bi$.

a. $e^{-i\pi}$ **b.** $e^{i\pi/4}$ **c.** $e^{-i\pi/2}$

68. Utilice la ecuación (4) para demostrar que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

69. Establezca las ecuaciones en el ejercicio 68 mediante la combinación de las series formales para $e^{i\theta}$ y $e^{-i\theta}$.

70. Demuestre que

a. $\cosh i\theta = \cos\theta$, **b.** $\operatorname{senh} i\theta = i \operatorname{sen}\theta$.

71. Multiplicando las series de Taylor para e^x y $\operatorname{sen} x$, determine los términos, hasta x^5, de la serie de Taylor para $e^x \operatorname{sen} x$. Esta serie es la parte imaginaria de la serie para

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}.$$

Con base en este hecho, verifique su respuesta. ¿Para qué valores de x la serie para $e^x \operatorname{sen} x$ debe converger?

72. Cuando a y b son reales, definimos $e^{(a+ib)x}$ con la ecuación

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx).$$

Mediante la derivación del lado derecho de esta ecuación demuestre que

$$\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a + ib)e^{(a+ib)x}.$$

Así que la regla conocida $(d/dx)e^{kx} = ke^{kx}$ se cumple para k complejo y para los reales.

73. Utilice la definición de $e^{i\theta}$ para demostrar que para cualesquiera números reales θ, θ_1 y θ_2,

a. $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, **b.** $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$.

74. Dos números complejos $a + bi$ y $c + id$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Con base en este hecho, evalúe

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \text{y} \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$$

a partir de

$$\int e^{(a+ib)x} \, dx = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{(a+ib)x} + C,$$

donde $C = C_1 + iC_2$ es una constante compleja de integración.

Capítulo 10 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una sucesión infinita? ¿Qué significa que una sucesión converja? ¿Qué significa que una sucesión diverja? Dé ejemplos.
2. ¿Qué es una sucesión monótona? ¿En qué circunstancias tienen límite tales sucesiones? Dé ejemplos.
3. ¿De qué teoremas disponemos para calcular límites de sucesiones? Dé ejemplos.
4. ¿Qué teorema nos permite usar, algunas veces, la regla de L´Hôpital para calcular el límite de una sucesión? Dé un ejemplo.
5. ¿Cuáles son los seis límites de sucesiones que se presentan comúnmente en el teorema 5 cuando trabajamos con sucesiones y series?
6. ¿Qué es una serie infinita? ¿Qué significa el hecho de que una serie de este tipo converja? ¿Y que diverja? Dé algunos ejemplos.
7. ¿Qué es una serie geométrica? ¿Cuándo converge una serie de ese tipo? ¿Cuándo diverge? Si converge, ¿cuál es su suma? Cite ejemplos.
8. Además de las series geométricas, ¿qué otras series convergentes y divergentes conoce?
9. ¿Cuál es el criterio del n-ésimo término para la divergencia? ¿En qué idea se basa?
10. ¿Qué se puede decir acerca de las sumas y las restas, término a término, de series convergentes? ¿Y acerca de los múltiplos constantes de series convergentes y divergentes?
11. ¿Qué pasa si usted suma un número finito de términos a una serie convergente? ¿Y a una divergente? ¿Qué ocurre si elimina un número finito de términos de una serie convergente? ¿Y de una divergente?
12. ¿Cómo se renumeran los índices de una serie? ¿Con qué propósito querría hacerlo?
13. ¿En qué circunstancias converge una serie infinita de términos no negativos? ¿En cuáles diverge? ¿Por qué estudiamos series de términos no negativos?
14. ¿Cuál es el criterio de la integral? ¿En qué razonamiento se basa? Dé un ejemplo de su uso.
15. ¿Cuándo convergen las series p? ¿Cuándo divergen? ¿Cómo lo determina? Dé ejemplos de series p convergentes y series p divergentes.
16. ¿Cuáles son el criterio de comparación directa y el criterio de comparación del límite? ¿En qué razonamientos se basan? Dé ejemplos de su uso.
17. ¿Cuáles son los criterios de la razón y de la raíz? ¿Le brindan siempre la información que necesita para determinar la convergencia o la divergencia? Dé algunos ejemplos.
18. ¿Qué es una serie alternante? ¿Qué teorema nos permite determinar la convergencia de esas series?
19. ¿Cómo se estima el error introducido al aproximar el valor de la suma de una serie alternante con una de las sumas parciales de la serie? ¿En qué razonamiento se basa esa estimación?
20. ¿Qué es la convergencia absoluta? ¿Y la convergencia condicional? ¿Cómo se relacionan entre sí?
21. ¿Qué sabe acerca del rearreglo de los términos de una serie absolutamente convergente? ¿Y de una serie con convergencia condicional? Dé ejemplos.
22. ¿Qué es una serie de potencias? ¿Cómo se ponen a prueba la convergencia de una serie de potencias? ¿Cuáles son los resultados posibles?
23. ¿Cuáles son los hechos básicos con respecto a
    - **a.** sumas, diferencias y productos de series de potencias?
    - **b.** la sustitución de una función por x en una serie de potencias?
    - **c.** la derivación término a término de series de potencias?
    - **d.** la integración término a término de series de potencias?

    Dé ejemplos.
24. ¿Qué es la serie de Taylor generada por una función $f(x)$ en un punto $x = a$? ¿Qué información necesita acerca de f para construir la serie? Dé un ejemplo.
25. ¿Qué es una serie de Maclaurin?
26. ¿Una serie de Taylor siempre converge a su función generadora? Explique.
27. ¿Qué son los polinomios de Taylor? ¿Cuáles son sus aplicaciones?
28. ¿Qué es una fórmula de Taylor? ¿Qué nos dice acerca de los errores introducidos al usar polinomios de Taylor para aproximar funciones? En particular, ¿qué dice la fórmula de Taylor acerca del error en la linealización? ¿Sobre la aproximación cuadrática?
29. ¿Qué es una serie binomial? ¿En qué intervalo converge? ¿Cómo se usa?
30. ¿Cómo se usan a veces las series de potencias para estimar los valores de integrales definidas no elementales?
31. ¿Cuáles son las series de Taylor para $1/(1 - x)$, $1/(1 + x)$, e^x, sen x, cos x, $\ln(1 + x)$ y $\tan^{-1} x$? ¿Cómo estima usted los errores resultantes al sustituir estas series por sus sumas parciales?

Capítulo 10 Ejercicios de práctica

Determinación de convergencia de sucesiones

¿Cuáles de las sucesiones, cuyos n-ésimos términos aparecen en los ejercicios 1 a 18, convergen y cuáles divergen? Determine el límite de todas las sucesiones convergentes.

1. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$
2. $a_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{\sqrt{n}}$
3. $a_n = \dfrac{1 - 2^n}{2^n}$
4. $a_n = 1 + (0.9)^n$
5. $a_n = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2}$
6. $a_n = \operatorname{sen} n\pi$
7. $a_n = \dfrac{\ln(n^2)}{n}$
8. $a_n = \dfrac{\ln(2n + 1)}{n}$
9. $a_n = \dfrac{n + \ln n}{n}$
10. $a_n = \dfrac{\ln(2n^3 + 1)}{n}$
11. $a_n = \left(\dfrac{n - 5}{n}\right)^n$
12. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

13. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

14. $a_n = \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/n}$

15. $a_n = n(2^{1/n} - 1)$

16. $a_n = \sqrt[n]{2n + 1}$

17. $a_n = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

18. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

Series convergentes

Determine las sumas de las series de los ejercicios 19 a 24.

19. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{-2}{n(n+1)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{(3n-1)(3n+2)}$

22. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3}{4^n}$

Determinación de la convergencia de series

¿Cuáles de las series de los ejercicios 25 a 40 convergen absolutamente, cuáles convergen condicionalmente y cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{-5}{n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^3}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$

32. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\ln(\ln n)}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3n^2}{n^3+1}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n!}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+n-1}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{n!}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n 3^n}{n^n}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

Series de potencias

En los ejercicios 41 a 50, **(a)** determine el radio y el intervalo de convergencia de las series. Después identifique los valores de x para los cuales la serie converge **(b)** absolutamente y **(c)** condicionalmente.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+4)^n}{n3^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(3x-1)^n}{n^2}$

44. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)(2x+1)^n}{(2n+1)2^n}$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

47. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)x^{2n-1}}{3^n}$

48. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-1)^{2n+1}}{2n+1}$

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{csch} n)x^n$

50. $\sum_{n=1}^{\infty} (\coth n)x^n$

Series de Maclaurin

Cada una de las series de los ejercicios 51 a 56 es el valor de la serie de Taylor en $x = 0$ de una función $f(x)$ en un punto específico. ¿Cuál es la función y cuál es el punto? ¿Cuál es la suma de la serie?

51. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{4^n} + \cdots$

52. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{18} + \dfrac{8}{81} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{2^n}{n3^n} + \cdots$

53. $\pi - \dfrac{\pi^3}{3!} + \dfrac{\pi^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

54. $1 - \dfrac{\pi^2}{9 \cdot 2!} + \dfrac{\pi^4}{81 \cdot 4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\pi^{2n}}{3^{2n}(2n)!} + \cdots$

55. $1 + \ln 2 + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(\ln 2)^n}{n!} + \cdots$

56. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{9\sqrt{3}} + \dfrac{1}{45\sqrt{3}} - \cdots$
$+ (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1}} + \cdots$

Determine la serie de Taylor en $x = 0$ para las funciones en los ejercicios 57 a 64.

57. $\dfrac{1}{1-2x}$

58. $\dfrac{1}{1+x^3}$

59. $\operatorname{sen} \pi x$

60. $\operatorname{sen} \dfrac{2x}{3}$

61. $\cos(x^{5/3})$

62. $\cos \dfrac{x^3}{\sqrt{5}}$

63. $e^{(\pi x/2)}$

64. e^{-x^2}

Series de Taylor

En los ejercicios 65 a 68, determine los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Taylor generada por f en $x = a$.

65. $f(x) = \sqrt{3 + x^2}$ en $x = -1$

66. $f(x) = 1/(1-x)$ en $x = 2$

67. $f(x) = 1/(x+1)$ en $x = 3$

68. $f(x) = 1/x$ en $x = a > 0$

Integrales no elementales

Por medio de series, aproxime los valores de las integrales de los ejercicios 69 a 72 con un error de magnitud menor que 10^{-8}. (En la sección de respuestas están los valores de las integrales redondeados a 10 decimales).

69. $\int_0^{1/2} e^{-x^3}\, dx$

70. $\int_0^{1} x \operatorname{sen}(x^3)\, dx$

71. $\int_0^{1/2} \dfrac{\tan^{-1} x}{x}\, dx$

72. $\int_0^{1/64} \dfrac{\tan^{-1} x}{\sqrt{x}}\, dx$

Uso de series para determinar límites

En los ejercicios 73 a 78:

a. Utilice series de potencias para evaluar el límite.

T **b.** Use después una graficadora para respaldar sus cálculos.

73. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7 \operatorname{sen} x}{e^{2x} - 1}$

74. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta} - 2\theta}{\theta - \operatorname{sen} \theta}$

75. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{2 - 2\cos t} - \dfrac{1}{t^2}\right)$

76. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} h)/h - \cos h}{h^2}$

77. $\lim_{z\to 0} \dfrac{1-\cos^2 z}{\ln(1-z)+\operatorname{sen} z}$ **78.** $\lim_{y\to 0} \dfrac{y^2}{\cos y - \cosh y}$

Teoría y ejemplos

79. Represente a sen $3x$ por medio de una serie y halle valores de r y s para los cuales

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x^3}+\frac{r}{x^2}+s\right)=0.$$

T **80.** Evalúe la precisión de las aproximaciones sen $x \approx x$ y sen $x \approx 6x/(6+x^2)$ comparando las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x - (6x/(6+x^2))$. Describa lo que encuentre.

81. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)} x^n.$$

82. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)}{4\cdot 9\cdot 14\cdot \cdots \cdot (5n-1)} (x-1)^n.$$

83. Determine una fórmula, de forma cerrada, para calcular la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-(1/n^2))$ y utilícela para determinar la convergencia o la divergencia de esa serie.

84. Evalúe $\sum_{k=2}^{\infty}(1/(k^2-1))$ calculando el límite de la n-ésima suma parcial de la serie cuando $n \to \infty$.

85. **a.** Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \cdots.$$

b. Demuestre que la función definida por la serie satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^a y + b$$

y encuentre los valores de las constantes a y b.

86. **a.** Determine la serie de Maclaurin para la función $x^2/(1+x)$.

b. ¿Converge la serie en $x = 1$? Explique.

87. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes de números no negativos, ¿qué se puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Justifique su respuesta.

88. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series divergentes de números no negativos, ¿qué se puede decir acerca de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? Justifique su respuesta.

89. Demuestre que la sucesión $\{x_n\}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ convergen o divergen ambas.

90. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n/(1+a_n))$ converge si $a_n > 0$ para toda n y si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

91. Suponga que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números positivos que satisfacen las siguientes condiciones:

i) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$;

ii) la serie $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \cdots$ diverge.

Demuestre que la serie

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots$$

diverge.

92. Utilice el resultado del ejercicio 91 para demostrar que

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

diverge.

Capítulo 10 Ejercicios adicionales y avanzados

Convergencia o divergencia

¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas por las fórmulas en los ejercicios 1 a 4 convergen? ¿Cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\tan^{-1} n)^2}{n^2+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tanh n$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log_n(n!)}{n^3}$

¿Cuáles de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definidas por las fórmulas en los ejercicios 5 a 8 convergen? ¿Cuáles divergen? Justifique sus respuestas.

5. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}a_n$

(*Sugerencia:* Escriba varios términos, vea cuáles factores se cancelan y luego generalice).

6. $a_1 = a_2 = 7, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{(n-1)(n+1)}a_n$ si $n \ge 2$

7. $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ si $n \ge 2$

8. $a_n = 1/3^n$ si n es impar, $a_n = n/3^n$ si n es par

Elección de centros para las series de Taylor

La fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

expresa el valor de f en x en términos de los valores de f y sus derivadas en $x = a$. Por lo tanto, en cálculos numéricos necesitamos que a sea un punto donde conozcamos los valores de f y sus derivadas. También requerimos que a sea suficientemente cercano a los valores de f que nos interesen, de manera que $(x-a)^{n+1}$ sea tan pequeño que podamos despreciar el residuo.

En los ejercicios 9 a 14, ¿qué serie de Taylor elegiría para representar la función cerca del valor dado de x? (Hay más de una respuesta correcta). Escriba los primeros cuatro términos distintos de cero de la serie que elija.

9. $\cos x$ cerca de $x = 1$ **10.** sen x cerca de $x = 6.3$

11. e^x cerca de $x = 0.4$ **12.** $\ln x$ cerca de $x = 1.3$

13. $\cos x$ cerca de $x = 69$ **14.** $\tan^{-1} x$ cerca de $x = 2$

Teoría y ejemplos

15. Suponga que a y b son constantes con $0 < a < b$. ¿La sucesión $\{(a^n + b^n)^{1/n}\}$ converge? Si converge, ¿cuál es el límite?

16. Determine la suma de la serie infinita

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \frac{3}{10^8} + \frac{7}{10^9} + \cdots.$$

17. Evalúe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

18. Determine todos los valores de x para los cuales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

tiene convergencia absoluta.

T **19.** **a.** ¿Cree que el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{n}\right)^n, \quad a \text{ una constante},$$

depende del valor de a? Si es así, ¿cómo?

b. ¿Cree que el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\cos(a/n)}{bn}\right)^n, \quad a \text{ y } b \text{ constantes}, b \neq 0,$$

depende del valor de b? Si es así, ¿cómo?

c. Para confirmar sus suposiciones de los incisos (a) y (b) utilice cálculo.

20. Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(a_n)}{2}\right)^n$$

converge.

21. Determine un valor para la constante b que hará que el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{\ln n}$$

sea igual a 5.

22. ¿Cómo sabe que las funciones sen x, $\ln x$ y e^x no son polinomios? Justifique su respuesta.

23. Determine el valor de a para el cual el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

es finito, y evalúe el límite.

24. Determine los valores de a y b para los cuales

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax) - b}{2x^2} = -1.$$

25. Criterio de Raabe (o de Gauss) El siguiente criterio, que enunciamos sin demostración, es una extensión del criterio de la razón.

Criterio de Raabe: Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es una serie de constantes positivas y existen constantes C, K y N tales que

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2},$$

donde $|f(n)| < K$ para $n \geq N$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si $C > 1$ y diverge si $C \leq 1$.

Demuestre que los resultados del criterio de Raabe coinciden con los que conoce con respecto a las series $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$.

26. (*Continuación del ejercicio 25*). Suponga que los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se definen de manera recursiva por medio de las fórmulas

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{(2n-1)^2}{(2n)(2n+1)} u_n.$$

Aplique el criterio de Raabe para determinar si la serie converge.

27. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y si $a_n \neq 1$ y $a_n > 0$ para toda n,

a. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

b. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/(1 - a_n)$ converge? Explique.

28. (*Continuación del ejercicio 27*). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y si $1 > a_n > 0$ para toda n, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - a_n)$ converge. (*Sugerencia:* Primero demuestre que $|\ln(1 - a_n)| \leq a_n/(1 - a_n)$.)

29. Teorema de Nicole Oresme Demuestre el teorema de Nicole Oresme, el cual afirma que

$$1 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} + \cdots = 4.$$

(*Sugerencia:* Derive ambos lados de la ecuación $1/(1-x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.)

30. **a.** Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n} = \frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

para $|x| > 1$ derivando dos veces la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

multiplique el resultado por x y luego reemplace x por $1/x$.

b. Utilice el inciso a) para determinar la solución real mayor que 1 de la ecuación

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{x^n}.$$

31. Control de calidad

a. Derive la serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

para obtener una serie para $1/(1-x)^2$.

b. En un tiro de dos dados, la probabilidad de obtener un resultado de 7 es $p = 1/6$. Si tira los dados de manera repetida, la probabilidad de que 7 aparezca por primera vez en el n-ésimo tiro es $q^{n-1}p$, donde $q = 1 - p = 5/6$. El número esperado de tiros hasta que aparezca el 7 por primera vez es $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$. Determine la suma de esta serie.

c. Como ingeniero que aplica control estadístico de calidad a una operación industrial, usted inspecciona artículos que toma al azar de la línea de ensamble. Clasifique cada artículo muestreado como “bueno” o “malo”. Si la probabilidad de que un artículo sea bueno es p y de que sea malo es $q = 1 - p$, la probabilidad de que el primer artículo malo sea encontrado en el n-ésimo artículo inspeccionado es $p^{n-1}q$. El número promedio de inspeccionados hasta (e incluyendo) el primer artículo malo encontrado es $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Evalúe esta suma; para ello, suponga que $0 < p < 1$.

32. Valor esperado Suponga que una variable aleatoria X puede tomar los valores 1, 2, 3, …, con probabilidades $p_1, p_2, p_3, \ldots$, donde p_k es la probabilidad de que X sea igual a k ($k = 1, 2, 3, \ldots$). También suponga que $p_k \geq 0$ y que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. El **valor esperado** de X, denotado por $E(X)$, es el número $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k$, siempre que la serie converja. En cada uno de los siguientes casos, demuestre que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ y determine $E(X)$, si existe. (*Sugerencia*: Véase el ejercicio 31).

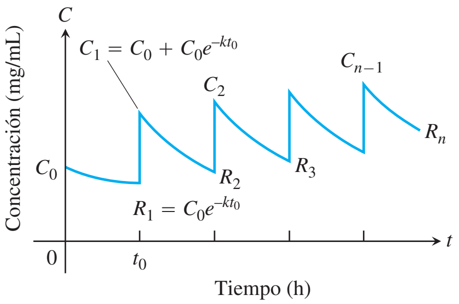
a. $p_k = 2^{-k}$ **b.** $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

c. $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

T **33. Dosis segura y eficaz** La concentración en la sangre que resulta de una sola dosis de un medicamento, normalmente disminuye con el tiempo, conforme el fármaco se elimina del cuerpo. Por lo tanto, las dosis necesitan repetirse de manera periódica para evitar que la concentración descienda más allá de algún nivel particular. Un modelo del efecto de las dosis repetidas indica que la concentración residual justamente antes de la $(n + 1)$-ésima dosis es

$$R_n = C_0e^{-kt_0} + C_0e^{-2kt_0} + \cdots + C_0e^{-nkt_0},$$

donde C_0 = al cambio en la concentración ocasionado por una sola dosis (mg/mL), k = *constante de eliminación* (h^{-1}), y t_0 = tiempo entre las dosis (h). Observe la siguiente figura.



a. Escriba R_n en forma cerrada como una sola fracción y determine $R = \lim_{n\to\infty} R_n$.

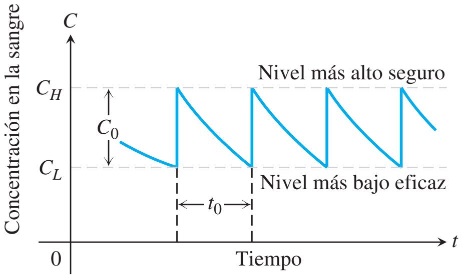
b. Calcule R_1 y R_{10} para $C_0 = 1$ mg/mL, $k = 0.1\ \mathrm{h}^{-1}$ y $t_0 = 10$ h. ¿Qué tan buena estimación de R es R_{10}?

c. Si $k = 0.01\ \mathrm{h}^{-1}$ y $t_0 = 10$ h, determine la n más pequeña tal que $R_n > (1/2)R$.

(*Fuente: Prescribing Safe and Effective Dosage*, B. Horelick y S. Koont, COMAP, Inc., Lexington, MA.)

34. Tiempo entre dosis de medicamentos (*Continuación del ejercicio 33*). Si se sabe que un medicamento será ineficaz por debajo de una concentración C_L y resulta nocivo por arriba de una concentración más alta C_H, uno necesita determinar los valores de C_0 y t_0 que producirán una concentración que sea segura (no superior a C_H), pero eficaz (no inferior a C_L). Observe la siguiente figura. Por lo tanto, necesita determinar los valores para C_0 y t_0 para los cuales

$$R = C_L \quad \text{y} \quad C_0 + R = C_H.$$



Por lo tanto, $C_0 = C_H - C_L$. Cuando estos valores se sustituyen en la ecuación para R, obtenida en el inciso (a) del ejercicio 33, la ecuación resultante se simplifica a

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{C_H}{C_L}.$$

Para alcanzar con rapidez un nivel eficaz, uno podría administrar una dosis “cargada” que produjera una concentración de C_H mg/mL. Esto podría seguirse cada t_0 horas mediante una dosis que eleve la concentración en $C_0 = C_H - C_L$ mg/mL.

a. Verifique la ecuación precedente para t_0.

b. Si $k = 0.05\ \mathrm{h}^{-1}$ y la concentración más alta segura es e veces la concentración eficaz más baja, determine el intervalo de tiempo entre las dosis que asegurarán concentraciones seguras y eficaces.

c. Dados $C_H = 2$ mg/mL, $C_L = 0.5$ mg/mL y $k = 0.02\ \mathrm{h}^{-1}$, determine un esquema para la administración del medicamento.

d. Suponga que $k = 0.2\ \mathrm{h}^{-1}$ y que la menor concentración eficaz es 0.03 mg/mL. Se administra una sola dosis que produce una concentración de 0.1 mg/mL. ¿Cuánto tiempo seguirá siendo eficaz el medicamento?

Capítulo 10 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo de Mathematica/Maple

Pelota que rebota

El modelo predice la altura de una pelota que rebota y el tiempo hasta que deja de rebotar.

Aproximaciones del polinomio de Taylor para una función

Una animación gráfica muestra la convergencia de los polinomios de Taylor para funciones que tienen derivadas de todos los órdenes en un intervalo de sus dominios.

11

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiaremos nuevas formas para definir curvas en el plano. En vez de visualizar una curva como la gráfica de una función o de una ecuación, consideraremos un modo más general para representar a una curva como la trayectoria de una partícula en movimiento, cuya posición cambia con el tiempo. Así, cada una de las coordenadas x y y de la posición de la partícula se convierte en una función de una tercera variable t. También podemos cambiar la forma en que se describen los puntos en el plano usando *coordenadas polares*, en vez del sistema rectangular o cartesiano. Ambas herramientas son útiles para describir movimiento, como el de los planetas y satélites, o los proyectiles que se mueven en un plano o en el espacio. Además, revisaremos las definiciones geométricas y las ecuaciones estándar de parábolas, elipses e hipérbolas. Estas curvas reciben el nombre de *secciones cónica* o *cónicas* y describen las trayectorias seguidas por proyectiles, planetas o cualquier otro objeto que se mueva bajo la sola influencia de una fuerza gravitacional o electromagnética.

11.1 Parametrización de curvas planas

En capítulos previos estudiamos las curvas como gráficas de funciones o de ecuaciones que incluyen a las dos variables x y y. Ahora presentaremos otra manera de describir una curva, al expresar ambas coordenadas como funciones de una tercera variable t.

Ecuaciones paramétricas

La figura 11.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy. Observe que la trayectoria no pasa la prueba de la recta vertical, de manera que no se puede describir como la gráfica de la función de una variable x. Sin embargo, algunas veces la trayectoria se describe con un par de ecuaciones, $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son funciones continuas. Para estudiar el movimiento, t generalmente representa el tiempo. Ecuaciones como éstas describen curvas más generales que las ecuaciones $y = f(x)$ y, además de la gráfica de la trayectoria recorrida, indican la posición de $(x, y) = (f(t), g(t))$ de la partícula en cualquier tiempo t.

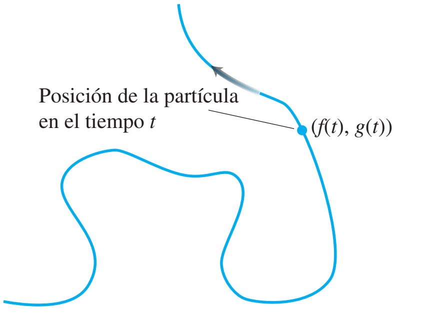


FIGURA 11.1 La curva o trayectoria trazada por una partícula que se mueve en el plano xy no siempre es la gráfica de una función o de una ecuación.

DEFINICIÓN Si x y y están dadas como funciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

en un intervalo I de valores t, entonces el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una **curva paramétrica**. Las ecuaciones son **ecuaciones paramétricas** de la curva.

La variable t es un **parámetro** de la curva y su dominio I es el **intervalo del parámetro**. Si I es un intervalo cerrado, $a \le t \le b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva, y $(f(b), g(b))$ es el **punto final**. Cuando tenemos ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro de la curva, se dice que hemos **parametrizado** la curva. Ambos, las ecuaciones y el intervalo constituyen la **parametrización** de la curva. Una curva dada puede representarse mediante conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas. (Véase los ejercicios 19 y 20).

EJEMPLO 1 Dibuje la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Solución Hacemos una pequeña tabla de valores (tabla 11.1), graficamos los puntos (x, y) y dibujamos una curva suave a través de ellos (figura 11.2). A cada valor de t corresponde un punto (x, y) sobre la curva, por ejemplo, a $t = 1$ corresponde el punto (1, 2) registrado en la tabla 11.1. Si pensamos que la curva es la trayectoria de una partícula que se mueve, entonces la partícula se desplaza a lo largo de la curva en la dirección de las flechas que se muestran en la figura 11.2. Si bien los intervalos de tiempo son iguales en la tabla, los puntos consecutivos dibujados a lo largo de la curva no están a las mismas distancias sobre el arco de la curva. La razón es que la partícula reduce su velocidad mientras se aproxima al eje y a lo largo de la rama inferior de la curva conforme t aumenta, y luego acelera después de alcanzar el eje y en (0, 1) y moverse a lo largo de la rama superior. Como el intervalo de valores para t está compuesto por números reales, no existe un punto inicial ni uno final de la curva. ■

TABLA 11.1 Valores de $x = t^2$ y $y = t + 1$ para algunos valores seleccionados de t.

t	x	y
−3	9	−2
−2	4	−1
−1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

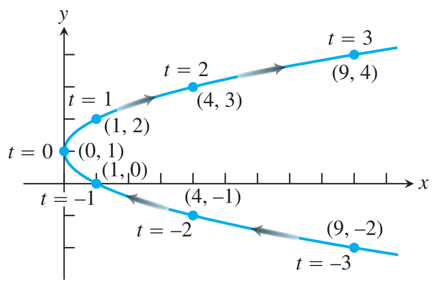


FIGURA 11.2 La curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t + 1$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 2 Identifique geométricamente la curva del ejemplo 1 (figura 11.2) eliminando el parámetro t y obteniendo una ecuación algebraica en x y y.

Solución Resolvemos la ecuación $y = t + 1$ despejando el parámetro t y sustituyendo el resultado en la ecuación paramétrica de x. Esto da como resultado $t = y - 1$ y

$$x = t^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

La ecuación $x = y^2 - 2y + 1$ representa una parábola, como la mostrada en la figura 11.2. Algunas veces es muy difícil, o incluso imposible, eliminar el parámetro de un par de ecuaciones paramétricas como lo hicimos aquí. ■

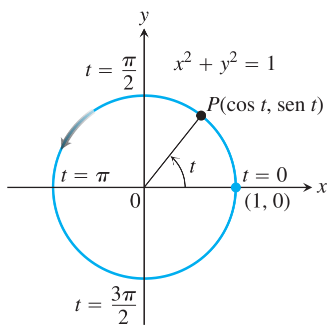


FIGURA 11.3 Las ecuaciones $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ describen el movimiento sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La flecha indica la dirección en la que crece t (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Grafique las curvas paramétricas

(a) $x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

(b) $x = a\cos t, \qquad y = a\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

Solución

(a) Puesto que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva paramétrica se encuentra en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Conforme t crece de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ inicia su recorrido en (1, 0) y traza la circunferencia completa una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj (figura 11.3).

(b) Para $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenemos que $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2$. La parametrización describe un movimiento que inicia en el punto $(a, 0)$, recorre una vez la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y regresa a $(a, 0)$ en $t = 2\pi$. La gráfica es una circunferencia de radio $r = a$ con centro en el origen y cuyos puntos tienen coordenadas $(a \cos t, a \operatorname{sen} t)$. ■

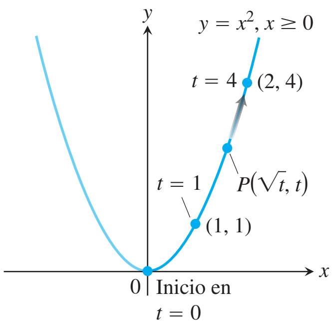


FIGURA 11.4 Las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$ y el intervalo $t \geq 0$ describen el movimiento de una partícula que traza la mitad derecha de la parábola $y = x^2$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones y el intervalo del parámetro siguientes:

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0.$$

Identifique la trayectoria trazada por la partícula y describa el movimiento.

Solución Intentamos identificar la trayectoria eliminando t de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$. Con algo de suerte, obtendremos una relación algebraica reconocible entre x y y. Encontramos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2.$$

De manera que las coordenadas de la posición de la partícula satisfacen la ecuación $y = x^2$; por lo tanto, la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$.

Sin embargo, sería un error concluir que la partícula recorre toda la parábola $y = x^2$ en su trayectoria, sólo recorre la mitad de la parábola. La coordenada x de la partícula nunca es negativa. La partícula inicia en $(0, 0)$ cuando $t = 0$ y sube en el primer cuadrante conforme t crece (figura 11.4). El intervalo del parámetro es $[0, \infty)$ y no hay punto final. ■

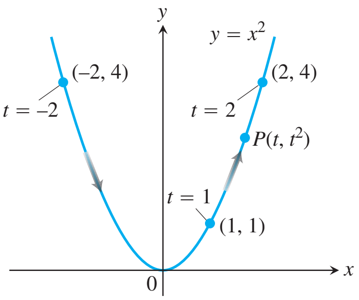


FIGURA 11.5 La trayectoria definida por $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$ es la parábola completa $y = x^2$ (ejemplo 5).

La gráfica de cualquier función $y = f(x)$ se obtiene siempre mediante una parametrización natural $x = t$ y $y = f(t)$. El dominio del parámetro es, en este caso, el mismo que el dominio de la función f.

EJEMPLO 5 La parametrización de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ está dada por

$$x = t, \qquad y = f(t) = t^2, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Cuando $t \geq 0$, esta parametrización da como resultado la misma trayectoria en el plano xy que teníamos en el ejemplo 4. Sin embargo, como el parámetro t también puede ser negativo, obtenemos además la porción izquierda de la parábola; es decir, tenemos la curva parabólica completa. Para esta parametrización no hay un punto inicial ni un punto final (figura 11.5). ■

Observe que una parametrización también especifica *cuándo* (el valor del parámetro) la partícula que se mueve a lo largo de la curva *se ubica* en un punto específico de ésta. En el ejemplo 4, se llega al punto $(2, 4)$ cuando $t = 4$; en el ejemplo 5, el punto se alcanza “antes”, cuando t es igual a 2. Usted observará las implicaciones de este aspecto de la parametrización cuando se considera la posibilidad de que dos objetos colisionen: deben estar exactamente en la misma posición $P(x, y)$ para algunos valores (posiblemente diferentes) de sus respectivos parámetros. Explicaremos más acerca de este aspecto de las parametrizaciones cuando estudiemos la noción de movimiento en el capítulo 13.

EJEMPLO 6 Obtenga la parametrización de la recta que pasa por el punto (a, b) y que tiene una pendiente m.

Solución La ecuación cartesiana de la recta es $y - b = m(x - a)$. Si hacemos el parámetro $t = x - a$, entonces $x = a + t$ y $y - b = mt$. Es decir,

$$x = a + t, \qquad y = b + mt, \qquad -\infty < t < \infty$$

parametrizan la recta. Esta parametrización difiere de aquella que se obtendría usando la técnica del ejemplo 5, cuando $t = x$. Sin embargo, ambas dan como resultado la misma recta. ■

TABLA 11.2 Valores de $x = t + (1/t)$ y $y = t - (1/t)$ para algunos valores seleccionados de t.

t	$1/t$	x	y
0.1	10.0	10.1	−9.9
0.2	5.0	5.2	−4.8
0.4	2.5	2.9	−2.1
1.0	1.0	2.0	0.0
2.0	0.5	2.5	1.5
5.0	0.2	5.2	4.8
10.0	0.1	10.1	9.9

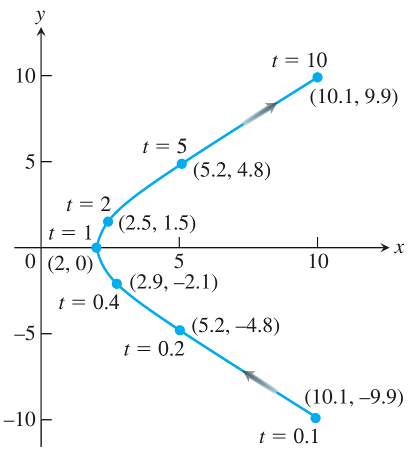


FIGURA 11.6 La curva de $x = t + (1/t)$, $y = t - (1/t)$, $t > 0$ del ejemplo 7. (La parte que se muestra es para $0.1 \leq t \leq 10$).

EJEMPLO 7 Dibuje e identifique la trayectoria trazada por el punto $P(x, y)$ si

$$x = t + \frac{1}{t}, \qquad y = t - \frac{1}{t}, \qquad t > 0.$$

Solución Hacemos una tabla de valores (tabla 11.2), graficamos los puntos y trazamos una curva suave que pase a través de ellos, como en el ejemplo 1. En seguida eliminamos el parámetro t de las ecuaciones. El procedimiento es más complicado que el del ejemplo 2. Tomando las diferencias entre x y y dadas por las ecuaciones paramétricas, tenemos

$$x - y = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}.$$

Si sumamos las dos ecuaciones paramétricas, entonces

$$x + y = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(t - \frac{1}{t}\right) = 2t.$$

Eliminamos el parámetro t multiplicando estas dos últimas ecuaciones:

$$(x - y)(x + y) = \left(\frac{2}{t}\right)(2t) = 4,$$

o, si multiplicamos los términos del lado izquierdo, obtenemos la ecuación estándar de una hipérbola (se estudia en la sección 11.6):

$$x^2 - y^2 = 4. \tag{1}$$

Por lo tanto, las coordenadas de todos los puntos $P(x, y)$ descritas por las ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación (1). Sin embargo, la ecuación (1) no requiere que la coordenada x sea positiva. Así que hay puntos (x, y) sobre la hipérbola que no satisfacen la ecuación paramétrica $x = t + (1/t)$, $t > 0$, para la cual x siempre es positiva. Es decir, las ecuaciones paramétricas no generan puntos sobre la rama izquierda de la hipérbola representada por la ecuación (1), puntos donde la coordenada x sería negativa. Para valores positivos pequeños de t, la trayectoria permanece en el cuarto cuadrante y sube hacia el primer cuadrante conforme t crece, cruzando el eje x cuando $t = 1$ (véase la figura 11.6). El dominio del parámetro es $(0, \infty)$ y no hay punto inicial ni punto final de la trayectoria. ■

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran que una curva dada, o una parte de ella, se representan usando diferentes parametrizaciones. En el caso del ejemplo 7, la rama derecha de la hipérbola también se representa con la parametrización

$$x = \sqrt{4 + t^2}, \qquad y = t, \qquad -\infty < t < \infty,$$

la cual se obtiene al resolver la ecuación (1) para $x \geq 0$ y dejando que y sea el parámetro. Otra parametrización de la rama derecha de la hipérbola dada por la ecuación 1 es

$$x = 2 \sec t, \qquad y = 2 \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Esta parametrización se obtiene de la identidad trigonométrica $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, de manera que

$$x^2 - y^2 = 4 \sec^2 t - 4 \tan^2 t = 4(\sec^2 t - \tan^2 t) = 4.$$

Conforme t varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, $x = \sec t$ se mantiene positiva y $y = \tan t$ varía entre $-\infty$ e ∞, así que P recorre la rama derecha de la hipérbola. Viene de la mitad inferior de la rama cuando t tiende a cero por la izquierda, llega a $(2, 0)$ cuando $t = 0$, y entra al primer cuadrante conforme t sigue creciendo hacia $\pi/2$. Ésta es la misma rama de la hipérbola de la cual se muestra una parte en la figura 11.6.

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Christian Huygens
(1629–1695)

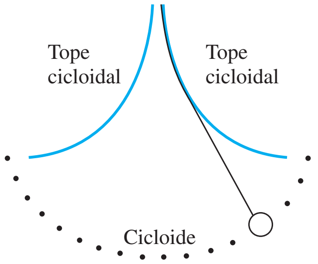


FIGURA 11.7 En el reloj de péndulo de Huygens, la lenteja del péndulo oscila en una cicloide, de manera que la frecuencia es independiente de la amplitud.

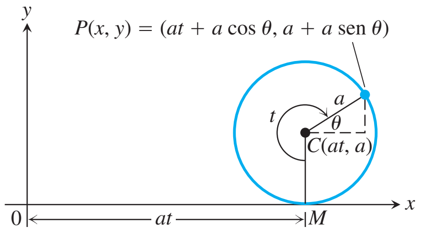


FIGURA 11.8 La posición de $P(x, y)$ en la rueda que gira un ángulo t (ejemplo 8).

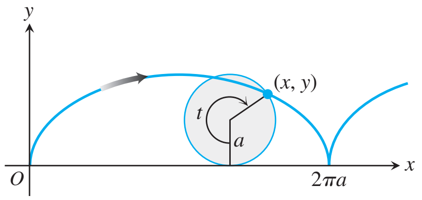


FIGURA 11.9 La curva cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, para $t \geq 0$.

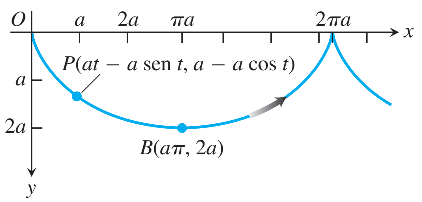


FIGURA 11.10 Para estudiar el movimiento a lo largo de una cicloide invertida bajo la influencia de la gravedad, volteamos de cabeza la figura 11.9. Esto hace que el eje y apunte en la dirección de la fuerza gravitacional y así, las coordenadas de y hacia abajo son positivas. Las ecuaciones y el intervalo del parámetro para la cicloide siguen siendo

$$x = a(t - \operatorname{sen} t),$$
$$y = a(1 - \cos t), \quad t \geq 0.$$

La flecha indica la dirección de aumento de t.

Cicloides

El problema con un reloj de péndulo cuya lenteja oscila en un arco circular es que la frecuencia de la oscilación depende de la amplitud de ésta. Cuanto más amplia sea la oscilación, más tardará la lenteja del péndulo en regresar al centro (su posición más baja).

Esto no sucede si la lenteja oscila siguiendo la trayectoria de una *cicloide*. En 1673 Christian Huygens diseñó un reloj de péndulo cuya lenteja oscilaba en una cicloide, curva que definiremos en el ejemplo 8. Huygens colgó la lenteja de un fino alambre restringido por topes que ocasionaban que ésta se "jalara" hacia arriba cuando oscilaba alejándose del centro (figura 11.7).

EJEMPLO 8 Un rueda de radio a se mueve a lo largo de una recta horizontal. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre un punto P en la circunferencia de la rueda. La trayectoria se llama **cicloide**.

Solución Tomamos el eje x como la recta horizontal, marcamos un punto P en la rueda, empezamos a mover la rueda con P en el origen y la rodamos hacia la derecha. Como parámetro, utilizamos el ángulo t que gira la rueda, medido en radianes. La figura 11.8 muestra la rueda un poco después, cuando su base se encuentra a at unidades del origen. El centro de la rueda C se encuentra en (at, a) y las coordenadas de P son

$$x = at + a\cos\theta, \qquad y = a + a\operatorname{sen}\theta.$$

Para expresar θ en términos de t, observamos en la figura que $t + \theta = 3\pi/2$, de manera que

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t.$$

Con esto se tiene

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\operatorname{sen} t, \qquad \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t.$$

Las ecuaciones que buscamos son

$$x = at - a\operatorname{sen} t, \qquad y = a - a\cos t.$$

Por lo general, éstas se escriben factorizando a a:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t). \tag{2}$$

La figura 11.9 muestra el primer arco de la cicloide y parte del siguiente. ■

Braquistocronas y tautocronas

Si volteamos de cabeza la figura 11.9, las ecuaciones (2) siguen siendo válidas y la curva resultante (figura 11.10) tiene dos propiedades físicas interesantes. La primera se relaciona con el origen O y el punto B en el fondo del primer arco. De todas las curvas suaves que unen estos puntos, la cicloide es la curva a lo largo de la cual una cuenta (como en un collar) sujeta sólo a la fuerza de la gravedad (sin fricción), se deslizará de O a B en el menor tiempo posible. Esto convierte a la cicloide en una **braquistocrona** o curva de tiempo más corto para estos puntos. La segunda propiedad es que, aunque la cuenta inicie su trayectoria hacia B desde un punto intermedio de la curva, necesitará la misma cantidad de tiempo para llegar a B. Esto hace a la cicloide una **tautocrona**, es decir, la curva con el mismo tiempo para O y B.

¿Existen otras curvas braquistocronas que unan O y B, o la cicloide es la única? Podemos formular esta pregunta desde el punto de vista matemático de la siguiente manera. Al principio, la energía cinética de la cuenta es cero, puesto que su velocidad es cero. El trabajo que hace la gravedad cuando la cuenta se mueve de (0, 0) a cualquier otro punto (x, y) en el plano, es mgy, y éste debe ser igual al cambio en la energía cinética. Es decir,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2.$$

Por lo tanto, cuando la cuenta llega a (x, y), su velocidad tiene que ser

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Es decir,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

ds es la diferencial de longitud del arco a lo largo de la trayectoria de la cuenta.

o

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

El tiempo T_f que tarda la cuenta en deslizarse a lo largo de una trayectoria particular $y = f(x)$ de O a $B(a\pi, 2a)$ es

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx. \tag{3}$$

¿Qué curvas $y = f(x)$, si las hay, minimizan el valor de esta integral?

A primera vista, podríamos suponer que la línea recta que une O y B daría el tiempo más breve, pero quizá no. Podría ser ventajoso que la cuenta cayera verticalmente al principio para incrementar su velocidad más rápido. Con una velocidad mayor, la cuenta podría recorrer una trayectoria más larga y aun así llegar primero a B. En realidad, esta idea es correcta. De acuerdo con una rama de las matemáticas conocida como *cálculo de variaciones*, la respuesta es que la cicloide original de O a B es la única braquistocrona para O y B.

Aun cuando la solución del problema de la braquistocrona está más allá del alcance de este libro, podemos demostrar por qué la cicloide es una tautocrona. En la siguiente sección mostraremos que la derivada dy/dx es simplemente la derivada dy/dt dividida entre la derivada dx/dt. Haciendo los cálculos de las derivadas y sustituyendo en la ecuación 3 (omitimos aquí los detalles de los cálculos), tenemos

$$\begin{aligned} T_{\text{cicloide}} &= \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx \\ &= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}}\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}. \end{aligned}$$

De acuerdo con las ecuaciones (2), $dx/dt = a(1 - \cos t)$, $dy/dt = a \operatorname{sen} t$ y $y = a(1 - \cos t)$

Así, el tiempo que tarda una cuenta en deslizarse sin fricción por la cicloide hasta B, después de que se suelta desde el reposo en O, es $\pi\sqrt{a/g}$.

Suponga que en lugar de iniciar en O, el movimiento de la cuenta inicia en algún punto inferior en la cicloide, un punto (x_0, y_0) correspondiente a un valor $t_0 > 0$ del parámetro. La velocidad de la cuenta en cualquier punto posterior (x, y) en la cicloide es

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)}.$$

$y = a(1 - \cos t)$

De igual forma, el tiempo que requiere la cuenta para deslizarse de (x_0, y_0) hacia abajo, hasta B, es

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\, dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\, dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\,\mathrm{sen}^2(t/2)}{(2\cos^2(t_0/2) - 1) - (2\cos^2(t/2) - 1)}}\, dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\,(t/2)\, dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\, du}{\sqrt{c^2 - u^2}} \qquad \begin{aligned} u &= \cos(t/2) \\ -2\,du &= \mathrm{sen}\,(t/2)\,dt \\ c &= \cos(t_0/2) \end{aligned} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\mathrm{sen}^{-1} \frac{u}{c} \right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\mathrm{sen}^{-1} \frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)} \right]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} (-\mathrm{sen}^{-1} 0 + \mathrm{sen}^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.
\end{aligned}
$$

Éste es precisamente el tiempo que tarda la cuenta en deslizarse de O a B. La cuenta tarda el mismo tiempo para llegar a B, sin importar desde dónde inicie su desplazamiento. Las cuentas que inician simultáneamente desde O, A y C en la figura 11.11, por ejemplo, llegarán a B al mismo tiempo. Ésta es la razón por la que el movimiento del péndulo del reloj de Huygens es independiente de la amplitud de la oscilación.

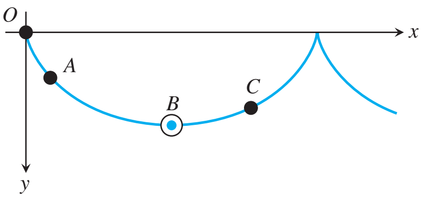


FIGURA 11.11 Las cuentas liberadas de manera simultánea en la cicloide en O, A y C llegarán a B al mismo tiempo.

Ejercicios 11.1

Obtención de ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas

Los ejercicios 1 a 18 dan ecuaciones paramétricas e intervalos de parámetros del movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula determinando una ecuación cartesiana para ello. Grafique la ecuación cartesiana. (La gráfica variará con la ecuación empleada). Indique la porción de la gráfica seguida por la partícula y la dirección del movimiento.

1. $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$
2. $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$
3. $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$
4. $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$
5. $x = \cos 2t, \quad y = \mathrm{sen}\, 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
6. $x = \cos(\pi - t), \quad y = \mathrm{sen}(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi$
7. $x = 4\cos t, \quad y = 2\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
8. $x = 4\,\mathrm{sen}\, t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
9. $x = \mathrm{sen}\, t, \quad y = \cos 2t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
10. $x = 1 + \mathrm{sen}\, t, \quad y = \cos t - 2, \quad 0 \leq t \leq \pi$
11. $x = t^2, \quad y = t^6 - 2t^4, \quad -\infty < t < \infty$
12. $x = \frac{t}{t - 1}, \quad y = \frac{t - 2}{t + 1}, \quad -1 < t < 1$
13. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 0$
14. $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$
15. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
16. $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
17. $x = -\cosh t, \quad y = \mathrm{senh}\, t, \quad -\infty < t < \infty$
18. $x = 2\,\mathrm{senh}\, t, \quad y = 2\cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

Obtención de ecuaciones paramétricas

19. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y sigue la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$
    - **a.** una vez en el sentido de las manecillas del reloj.
    - **b.** una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj.
    - **c.** dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.
    - **d.** dos veces en sentido contrario a las manecillas del reloj.

    (Hay muchas maneras de hacerlo, de manera que sus respuestas pueden ser diferentes de las presentadas al final del libro).
20. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y que traza la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$
    - **a.** una vez en el sentido de las manecillas del reloj.
    - **b.** una vez en sentido contrario a las manecillas del reloj.
    - **c.** dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.
    - **d.** dos veces en sentido contrario a las manecillas del reloj.

    (Al igual que en el ejercicio 19, hay muchas respuestas correctas).

En los ejercicios 21 a 26, determine la parametrización de la curva.

21. el segmento de recta con extremos en $(-1, -3)$ y $(4, 1)$
22. el segmento de recta con extremos en $(-1, 3)$ y $(3, -2)$

23. la mitad inferior de la parábola $x - 1 = y^2$

24. la mitad izquierda de la parábola $y = x^2 + 2x$

25. el rayo ("la mitad de la recta") que inicia en el punto (2, 3) y que pasa por el punto $(-1, -1)$

26. el rayo ("la mitad de la recta") que inicia en el punto $(-1, 2)$ y que pasa por el punto (0, 0)

27. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en (2, 0) y que traza la mitad de arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ cuatro veces.

28. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de la gráfica $y = x^2$ del siguiente modo: inicia en (0, 0), se mueve hacia (3, 9) y luego viaja de ida y vuelta de (3, 9) a $(-3, 9)$ una infinidad de veces.

29. Obtenga las ecuaciones paramétricas del semicírculo

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0,$$

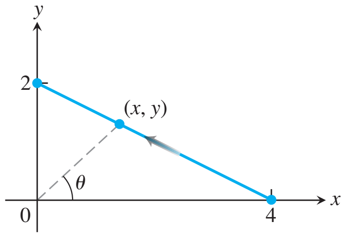
usando como parámetro la pendiente $t = dy/dx$ de la tangente a la curva en (x, y).

30. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

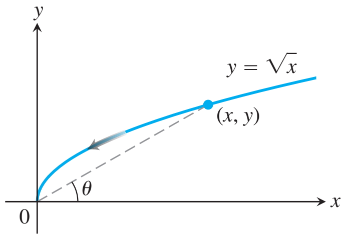
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

usando como parámetro la longitud del arco s medida en sentido contrario a las manecillas del reloj del punto $(a, 0)$ al punto (x, y).

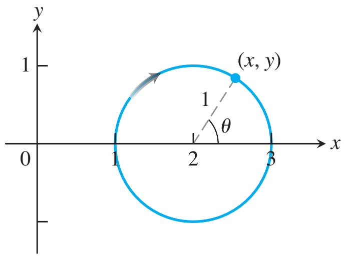
31. Obtenga la parametrización del segmento lineal que une los puntos (0, 2) y (4, 0) usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



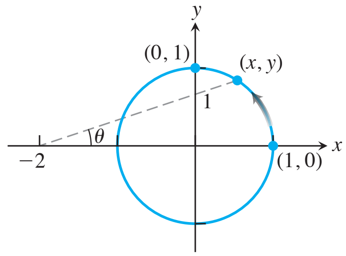
32. Obtenga la parametrización de la curva $y = \sqrt{x}$ con punto final en (0, 0) usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



33. Obtenga la parametrización de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ que inicia en (1, 0) y se mueve una vez en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia, usando como parámetro el ángulo central θ de la siguiente figura.



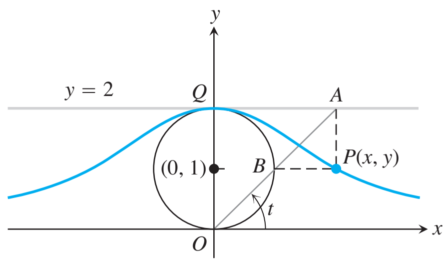
34. Obtenga la parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ iniciando en (1, 0) y moviéndose en sentido contrario al de las manecillas del reloj al punto final (0, 1), usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



35. La bruja de María Agnesi La forma de campana de la bruja de María Agnesi se puede construir del siguiente modo. Inicie con una circunferencia de radio 1, con centro en el punto (0, 1), como se muestra en la figura. Seleccione un punto A sobre la recta $y = 2$ y conéctela con el origen con un segmento de recta. Llame B al punto donde el segmento cruza a la circunferencia. Haga que P sea el punto donde la recta vertical que pasa por A cruce la recta horizontal que pasa por B. La bruja es la curva trazada por P conforme A se mueve a lo largo de la recta $y = 2$. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro de la bruja, expresando las coordenadas de P en términos de t, el ángulo, medido en radianes, que hace al segmento OA con la parte positiva del eje x. Las siguientes igualdades (que usted debe usar) servirán de ayuda.

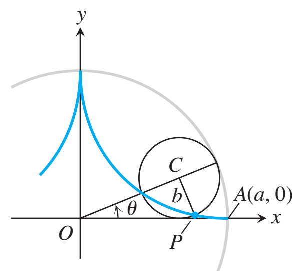
a. $x = AQ$ **b.** $y = 2 - AB \operatorname{sen} t$

c. $AB \cdot OA = (AQ)^2$

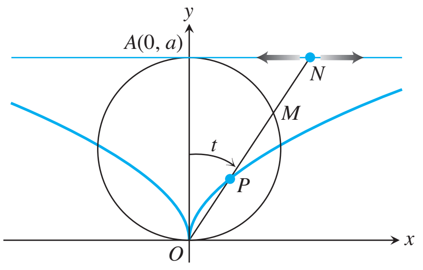


36. Hipocicloide Cuando un círculo rueda dentro de una circunferencia fija, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *hipocicloide*. Sea $x^2 + y^2 = a^2$, la circunferencia fija, b el radio del círculo que rueda, y $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que trazará la curva. Obtenga ecuaciones paramétricas para la hipocicloide, usando como parámetro el ángulo θ formado por la parte positiva del eje x y la recta que une los centros de las circunferencias. En particular, si $b = a/4$, como se ve en la figura, demuestre que la hipocicloide es la astroide

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta.$$



37. A medida que el punto N se mueve a lo largo de la recta $y = a$ en la siguiente figura, P se mueve de tal manera que $OP = MN$. Obtenga las ecuaciones paramétricas para las coordenadas de P como funciones del ángulo t que forma la recta ON con la parte positiva del eje y.



38. Trocoides Una rueda de radio a gira sin patinarse a lo largo de una recta horizontal. Determine ecuaciones paramétricas para la curva que describe el punto P ubicado sobre un rayo de la rueda a b unidades del centro. Como parámetro utilice el ángulo θ que gira la rueda. La curva se denomina *trocoide* y es una cicloide cuando $b = a$.

Distancia usando ecuaciones paramétricas

39. Determine el punto en la parábola $x = t, y = t^2, -\infty < t < \infty$, más cercano al punto $(2, 1/2)$. (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

40. Encuentre el punto sobre la elipse $x = 2\cos t, y = \operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi$ más cercano al punto $(3/4, 0)$. (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

T EXPLORACIONES GRÁFICAS

Si tiene un graficador de ecuaciones paramétricas, en los ejercicios 41 a 48, grafique las siguientes ecuaciones en los intervalos dados.

41. Elipse $x = 4\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t,$ en

a. $0 \le t \le 2\pi$ **b.** $0 \le t \le \pi$

c. $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

42. Rama de una hipérbola $x = \sec t$ (introdúzcala como $1/\cos(t)$), $y = \tan t$ (introdúzcala como $\operatorname{sen}(t)/\cos(t)$), en

a. $-1.5 \le t \le 1.5$ **b.** $-0.5 \le t \le 0.5$

c. $-0.1 \le t \le 0.1$.

43. Parábola $x = 2t + 3, \quad y = t^2 - 1, \quad -2 \le t \le 2$

44. Cicloide $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t,$ en

a. $0 \le t \le 2\pi$ **b.** $0 \le t \le 4\pi$

c. $\pi \le t \le 3\pi$.

45. Deltoide

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

¿Qué pasa si sustituye 2 por -2 en las ecuaciones para x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

46. Una curva bonita

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

¿Qué pasa si sustituye 3 por -3 en las ecuaciones para x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

47. a. Epicicloide

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 9t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

b. Hipocicloide

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

c. Hipotrocoide

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\operatorname{sen} 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

48. a. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\operatorname{sen} t - 5\operatorname{sen} 3t;$ $0 \le t \le 2\pi$

b. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\operatorname{sen} 2t - 5\operatorname{sen} 6t;$ $0 \le t \le \pi$

c. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\operatorname{sen} 2t - 5\operatorname{sen} 3t;$ $0 \le t \le 2\pi$

d. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\operatorname{sen} 4t - 5\operatorname{sen} 6t;$ $0 \le t \le \pi$

11.2 Cálculo con curvas paramétricas

En esta sección aplicaremos el cálculo a curvas paramétricas. Específicamente, obtendremos pendientes, longitudes y áreas asociadas con curvas parametrizadas.

Tangentes y áreas

La curva parametrizada $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es **derivable** en t si f y g son derivables en t. En un punto de una curva parametrizada donde y también es una función derivable de x, las derivadas dy/dt, dx/dt, y dy/dx están relacionadas por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos dividir ambos lados de esta ecuación entre dx/dt y despejar dy/dx.

Fórmula paramétrica de dy/dt

Si existen las tres derivadas y $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{1}$$

Si las ecuaciones paramétricas definen a y como una función dos veces derivable de x, podemos aplicar la ecuación (1) para la función $dy/dx = y'$ para calcular d^2y/dx^2 como una función de t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad \text{Ecuación (1) con } y' \text{ en vez de } y$$

Fórmula paramétrica de d^2y/dx^2

Si las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ definen a y como una función dos veces derivable de x, entonces en cualquier punto donde $dx/dt \neq 0$ y $y' = dy/dx$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

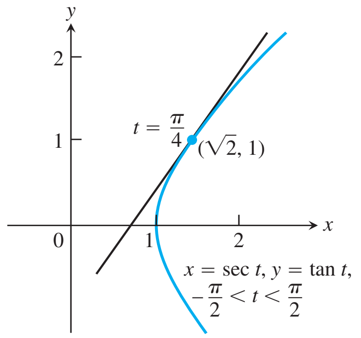


FIGURA 11.12 La curva del ejemplo 1 es la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

EJEMPLO 1 Obtenga la tangente a la curva

$$x = \sec t, \qquad y = \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

en el punto $(\sqrt{2}, 1)$, donde $t = \pi/4$ (figura 11.12).

Solución La pendiente de la curva en t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Al igualar t a $\pi/4$ tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec(\pi/4)}{\tan(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

La recta tangente es

$$\begin{aligned} y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}\,x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}\,x - 1. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Obtenga d^2y/dx^2 como una función de t si $x = t - t^2$, $y = t - t^3$.

Solución

1. Expresando $y' = dy/dx$ en términos de t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

Obtención de d^2y/dx^2 en términos de t

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.
2. Obtenga dy'/dt.
3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

2. Derive y' con respecto a t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \qquad \text{Regla de derivación de cocientes}$$

3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \qquad \text{Ecuación (2)}$$ ■

EJEMPLO 3 Obtenga el área encerrada por la astroide (figura 11.13)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

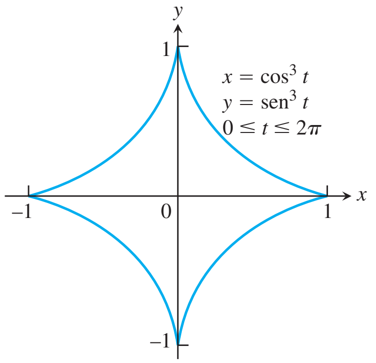


FIGURA 11.13 La astroide del ejemplo 3.

Solución Por simetría, el área interior es 4 veces el área bajo la curva en el primer cuadrante, donde $0 \le t \le \pi/2$. Podemos aplicar la fórmula de la integral definida para área del capítulo 5, usando sustitución para expresar la curva y la diferencial dx en términos del parámetro t. Entonces,

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^1 y\,dx \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,dt && \text{Sustituir } y \text{ y } dx \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt && \operatorname{sen}^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1 + \cos 2t)\,dt && \text{Desarrollar el término al cuadrado.} \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt && \text{Multiplicar los términos.} \\
&= \frac{3}{2}\left[\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos^3 2t\,dt\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t\right)\right]_0^{\pi/2} && \text{Sección 8.2, ejemplo 3} \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) + \frac{1}{2}(0 - 0 - 0 + 0)\right] && \text{Evaluar.} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$ ■

Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva definida en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$

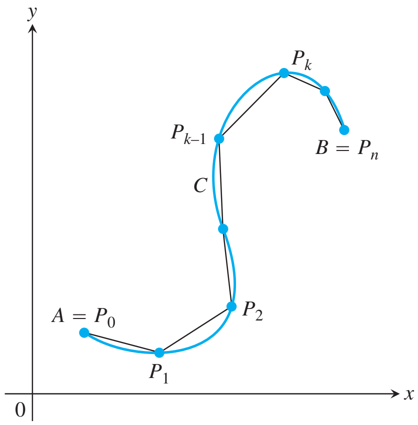


FIGURA 11.14 La curva suave C definida paramétricamente por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$. La longitud de la curva de A a B es aproximada por la suma de las longitudes de la trayectoria poligonal (segmentos de línea recta) que inicia en $A = P_0$, sigue a P_1 y así sucesivamente, hasta finalizar en $B = P_n$.

Suponemos que las funciones f y g son **continuamente derivables** (es decir, que tienen primeras derivadas continuas) en el intervalo $[a, b]$. También suponemos que las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultáneamente iguales a cero, lo cual evita que la curva C tenga esquinas o picos. Una curva como ésta se denomina **curva suave**. Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ (figura 11.14). Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ en $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, donde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$.

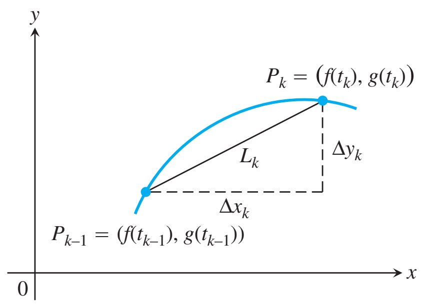


FIGURA 11.15 El arco $P_{k-1}P_k$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, con una longitud de $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

Se unen los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (figura 11.14). Un segmento representativo tiene longitud

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \end{aligned}$$

(véase la figura 11.15). Si Δt_k es pequeña, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud del arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, sabemos que existen números t_k^* y t_k^{**} en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\,\Delta t_k, \\ \Delta y_k &= g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\,\Delta t_k. \end{aligned}$$

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, sin invertir la dirección del movimiento ni pasar dos veces por el mismo punto, una aproximación a la "longitud" de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k. \end{aligned}$$

Aunque la última suma de la derecha no es exactamente una suma de Riemann (ya que f' y g' se evalúan en diferentes puntos), puede demostrarse que su límite, conforme la norma de la partición tiende a cero y el número de segmentos $n \to \infty$, es la integral definida

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\,\Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral.

DEFINICIÓN Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f' y g' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C se recorre sólo una vez conforme t se aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces **la longitud de C** es la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt.$$

Una curva suave C no pasa dos veces por el mismo lugar ni invierte la dirección del movimiento durante el intervalo de tiempo $[a, b]$, puesto que $(f')^2 + (g')^2 > 0$ en todo el intervalo. En un punto donde una curva regresa sobre sí misma, la curva no es derivable, o ambas derivadas deben ser simultáneamente igual a cero. Examinaremos este fenómeno en el capítulo 13, donde estudiaremos vectores tangentes a las curvas.

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y utilizamos la notación de Leibniz, obtenemos el siguiente resultado para la longitud del arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{3}$$

¿Qué pasa si existen dos parametrizaciones diferentes para una curva C cuya longitud queremos determinar? ¿Tiene importancia cuál utilicemos? La respuesta es que no, siempre y cuando la parametrización que seleccionemos cumpla las condiciones establecidas en la definición de la longitud de C (véase el ejercicio 41 como ejemplo).

EJEMPLO 4 Usando la definición, determine la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r\cos t \quad \text{y} \quad y = r\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución A medida que t varía de 0 a 2π, la circunferencia se recorre exactamente una vez; así, el perímetro es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Encontramos que

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\text{sen}\,t, \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos t$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\text{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

Entonces

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\Big[t\Big]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$ ■

EJEMPLO 5 Obtenga la longitud de la astroide (figura 11.13)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \text{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución En virtud de la simetría de la curva en relación con los ejes coordenados, su longitud es cuatro veces la longitud de la parte en el primer cuadrante. Tenemos

$$\begin{aligned}
x &= \cos^3 t, \qquad y = \text{sen}^3 t \\
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= [3\cos^2 t(-\text{sen}\,t)]^2 = 9\cos^4 t\,\text{sen}^2 t \\
\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= [3\,\text{sen}^2 t(\cos t)]^2 = 9\,\text{sen}^4 t\cos^2 t \\
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t\,\text{sen}^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{1}} \\
&= \sqrt{9\cos^2 t\,\text{sen}^2 t} \\
&= 3\,|\cos t\,\text{sen}\,t| \\
&= 3\cos t\,\text{sen}\,t. \qquad \begin{array}{l}\cos t\,\text{sen}\,t \ge 0 \text{ para} \\ 0 \le t \le \pi/2\end{array}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Longitud de la parte en el primer cuadrante} &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t\,\text{sen}\,t\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \text{sen}\,2t\,dt \qquad \begin{array}{l}\cos t\,\text{sen}\,t = \\ (1/2)\,\text{sen}\,2t\end{array} \\
&= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

La longitud de la astroide es cuatro veces esto: $4(3/2) = 6$ ■

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Gregory St. Vincent
(1584–1667)

Longitud de una curva $y = f(x)$

La fórmula de la longitud en la sección 6.3 es un caso especial de la ecuación 3. Dada una función continuamente derivable $y = f(x)$, $a \le x \le b$, podemos asignar $x = t$ como un parámetro. Entonces, la gráfica de la función f es la curva C definida paramétricamente por

$$x = t \qquad \text{y} \qquad y = f(t), \qquad a \le t \le b,$$

un caso especial de lo que consideramos antes. Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

De la ecuación (1), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t),$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2. \qquad t = x\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (3), obtenemos la fórmula de la longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$, lo cual es congruente con la ecuación (3) de la sección 6.3.

La diferencial de longitud de arco

De acuerdo con la sección 6.3, podemos definir la función de la longitud del arco de una curva definida paramétricamente $x = f(t)$ y $g(t)$, $a \le t \le b$, como

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(z)]^2 + [g'(z)]^2}\, dz.$$

Así, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

La diferencial de la longitud del arco es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

La ecuación (4) a menudo se abrevia como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Justo como en la sección 6.3, podemos integrar la diferencial ds entre los límites apropiados para obtener la longitud total de una curva.

He aquí un ejemplo donde usamos la fórmula de la longitud del arco para obtener el centroide de un arco.

EJEMPLO 6 Obtenga el centroide del arco en el primer cuadrante de la astroide del ejemplo 5.

Solución Suponemos que la densidad de la curva es $\delta = 1$ y calculamos la masa y los momentos de la curva alrededor de los ejes coordinados como lo hicimos en la sección 6.6.

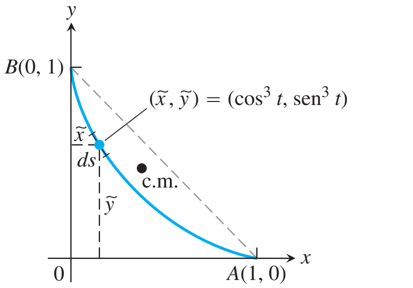


FIGURA 11.16 El centroide (c.m.) del arco de astroide del ejemplo 6.

La distribución de masa es simétrica con respecto a la recta $y = x$, de manera que $\bar{x} = \bar{y}$. Un segmento típico de la curva (figura 11.16) tiene masa

$$dm = 1 \cdot ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt. \qquad \text{Del ejemplo 5}$$

La masa de la curva es

$$M = \int_0^{\pi/2} dm = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{3}{2}. \qquad \text{Otra vez del ejemplo 5}$$

El momento de la curva alrededor del eje x es

$$\begin{aligned} M_x &= \int \tilde{y}\, dm = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}^5 t}{5} \Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}.$$

El centroide es el punto $(2/5, 2/5)$. ■

Áreas de superficies de revolución

En la sección 6.4 obtuvimos fórmulas integrales para el área de una superficie cuando una curva gira alrededor de un eje coordenado. Específicamente, encontramos que el área de la superficie es $S = \int 2\pi y\, ds$ cuando se gira alrededor del eje x, y $S = \int 2\pi x\, ds$ cuando se gira alrededor del eje y. Si la curva está parametrizada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f y g son derivables continuamente $(f')^2 + (g')^2 > 0$ para $[a, b]$, entonces la diferencial de longitud de arco ds está dada por la ecuación (4). Esta observación lleva a las siguientes fórmulas para el área de superficies de revolución de curvas parametrizadas suaves.

Áreas de superficies por revolución de curvas parametrizadas

Si una curva suave $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, se recorre una sola vez a medida que t aumenta de a a b, entonces las áreas de las superficies generadas al hacer girar la curva alrededor de los ejes coordenados son las siguientes.

1. Rotación alrededor del eje x ($y \geq 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

2. Rotación alrededor del eje y ($x \geq 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{6}$$

Al igual que con la longitud, podemos calcular el área de superficie a partir de cualquier parametrización que cumpla con los criterios establecidos.

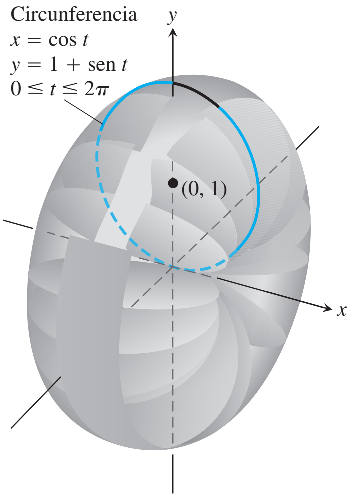


FIGURA 11.17 En el ejemplo 7 se calcula el área de la superficie de revolución barrida por esta curva parametrizada.

EJEMPLO 7 La parametrización estándar de la circunferencia de radio 1 con centro en el punto (0,1) en el plano xy es

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Utilice esta parametrización para obtener el área de la superficie barrida al hacer girar la circunferencia alrededor del eje x (figura 11.17).

Solución Evaluamos la fórmula

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\underbrace{\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt \\ &= 2\pi\Big[t - \cos t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2. \end{aligned}$$

La ecuación (5) para rotación alrededor del eje x; $y = 1 + \operatorname{sen} t \ge 0$

Ejercicios 11.2

Tangentes a curvas parametrizadas

En los ejercicios 1 a 14, determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto definido por el valor dado a t. Además, determine el valor de d^2y/dx^2 en este punto.

1. $x = 2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad t = \pi/4$
2. $x = \operatorname{sen} 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -1/6$
3. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \pi/4$
4. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$
5. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$
6. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$
7. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \pi/6$
8. $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$
9. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$
10. $x = 1/t, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$
11. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$
12. $x = \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad t = \pi/2$
13. $x = \dfrac{1}{t+1}, \quad y = \dfrac{t}{t-1}, \quad t = 2$
14. $x = t + e^t, \quad y = 1 - e^t, \quad t = 0$

Parametrizaciones definidas implícitamente

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 15 a 20 definen a x y y implícitamente como funciones derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$, determine la pendiente de la curva $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para el valor dado de t.

15. $x^3 + 2t^2 = 9, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$
16. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$
17. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$
18. $x\operatorname{sen} t + 2x = t, \quad t\operatorname{sen} t - 2t = y, \quad t = \pi$
19. $x = t^3 + t, \quad y + 2t^3 = 2x + t^2, \quad t = 1$
20. $t = \ln(x - t), \quad y = te^t, \quad t = 0$

Área

21. Obtenga el área bajo un arco de la cicloide
$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$
22. Obtenga el área acotada por el eje y y la curva
$$x = t - t^2, \quad y = 1 + e^{-t}.$$
23. Obtenga el área encerrada por la elipse
$$x = a\cos t, \quad y = b\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$
24. Obtenga el área debajo de $y = x^3$ sobre [0, 1] usando las siguientes parametrizaciones.
   a. $x = t^2, \quad y = t^6$ **b.** $x = t^3, \quad y = t^9$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 25 a 30.

25. $x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
26. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
27. $x = t^2/2, \quad y = (2t+1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
28. $x = (2t+3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
29. $x = 8\cos t + 8t\operatorname{sen} t$
    $y = 8\operatorname{sen} t - 8t\cos t,$
    $0 \le t \le \pi/2$
30. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t$
    $y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3$

Área de superficies

En los ejercicios 31 a 34, encuentre las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas alrededor de los ejes indicados.

31. $x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi; \quad$ eje x

32. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$; eje y

33. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \; -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$; eje y

34. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t, \; y = \cos t, \; 0 \le t \le \pi/3$; eje x

35. Tronco de un cono El segmento de recta que une los puntos (0, 1) y (2, 2) se hace girar alrededor del eje x para generar el tronco de un cono. Determine el área de la superficie del tronco por medio de parametrización $x = 2t, y = t + 1, 0 \le t \le 1$. Verifique su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi(r_1 + r_2)$ (altura inclinada).

36. Un cono El segmento de recta que une el origen con el punto (h, r) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono de altura h y y radio de la base r. Encuentre la superficie del cono con las ecuaciones paramétricas $x = ht, y = rt, 0 \le t \le 1$. Compruebe su respuesta con la fórmula de geometría: Área $= \pi r$ (longitud de generatriz).

Centroides

37. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

38. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

39. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

T **40.** La mayoría de los cálculos de centroides para curvas se hacen con calculadora o una computadora que permita calcular integrales. Como ejemplo, determine, con precisión de centésimas, las coordenadas del centroide de la curva

$$x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

Teoría y ejemplos

41. La longitud es independiente de la parametrización Para ilustrar el hecho de que los números que obtenemos para la longitud son independientes de la manera en que parametrizamos las curvas (excepto por pequeñas restricciones que previenen el regreso hacia atrás mencionado anteriormente), calcule la longitud del semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ con estas dos parametrizaciones diferentes:

a. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

b. $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t, \quad -1/2 \le t \le 1/2$

42. a. Demuestre que la fórmula cartesiana

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

para la longitud de la curva $x = g(y), c \le y \le d$ (sección 6.3, ecuación 4), es un caso especial de la fórmula paramétrica de longitud

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Use este resultado para obtener la longitud de cada curva.

b. $x = y^{3/2}, \quad 0 \le y \le 4/3$

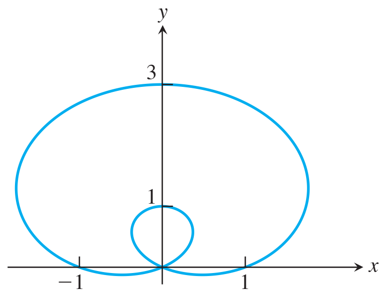
c. $x = \frac{3}{2}y^{2/3}, \quad 0 \le y \le 1$

43. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (1 + 2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta, \quad y = (1 + 2 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta$$

se llama *limaçon* (caracol) y se muestra en la siguiente figura. Determine los puntos (x, y) y las pendientes de las rectas tangentes a estos puntos para

a. $\theta = 0$. **b.** $\theta = \pi/2$. **c.** $\theta = 4\pi/3$.

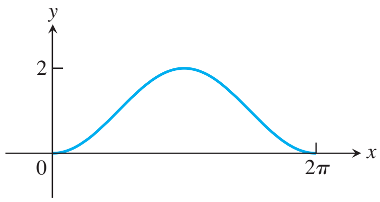


44. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

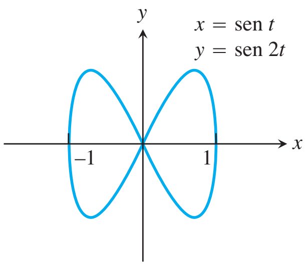
se llama *sinusoide* y se muestra en la siguiente figura. Obtenga el punto (x, y) donde la pendiente de la recta tangente es

a. la más grande **b.** la más pequeña.

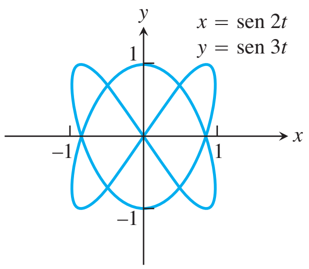


T Las curvas de los ejercicios 45 y 46 se llaman *curvas de Bowditch* o *figuras de Lissajous*. En cada caso, determine el punto en el interior del primer cuadrante donde la tangente a la curva es horizontal, así como la ecuación para las dos tangentes en el origen.

45.



46.



47. Cicloide

a. Obtenga la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

b. Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar un arco de la cicloide del inciso (a) alrededor del eje x para $a = 1$.

48. Volumen Obtenga el volumen generado al hacer girar la región acotada por el eje x y un arco de la cicloide

$$x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t$$

alrededor del eje x.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52 utilice un SAC y realice los siguientes pasos para la curva y el intervalo cerrado dados.

a. Grafique la curva junto con las poligonales que la aproximan cuando se consideran particiones con $n = 2, 4, 8$ puntos del intervalo. (Véase la figura 11.14).

b. Obtenga la aproximación correspondiente a la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de la poligonal.

c. Calcule la longitud de la curva usando una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con el valor real de la longitud dado por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real contra las aproximaciones cuando n aumenta? Explique su respuesta.

49. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1$

50. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3,$
$0 \le t \le 6$

51. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \le t \le \pi$

52. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$

11.3 Coordenadas polares

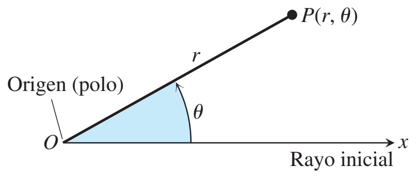


FIGURA 11.18 Para definir las coordenadas polares en el plano, iniciamos con un origen, llamado polo, y un rayo inicial.

En esta sección estudiaremos las coordenadas polares y su relación con las coordenadas cartesianas. Usted verá que las coordenadas polares son muy útiles cuando se calculan muchas de las integrales múltiples estudiadas en el capítulo 15.

Definición de las coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares, primero fijamos un **origen** O (llamado **polo**) y un **rayo inicial** desde O (figura 11.18). Luego se puede localizar cada punto P asignándole una **pareja de coordenadas polares** (r, θ) donde r es la distancia dirigida de O a P y θ es el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo OP.

Coordenadas polares

$P(r, \theta)$

Distancia dirigida de O a P — Ángulo dirigido del rayo inicial a OP

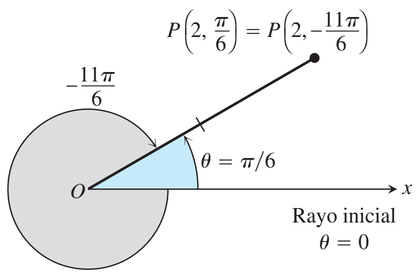


FIGURA 11.19 Las coordenadas polares no son únicas.

Como en trigonometría, θ es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo cuando se mide en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo asociado con un punto dado no es único. Mientras que un punto en el plano tiene solamente un par de coordenadas cartesianas, tiene, por otro lado, un número infinito de parejas de coordenadas polares. Por ejemplo, el punto a 2 unidades del origen a lo largo del rayo $\theta = \pi/6$ tiene coordenadas polares $r = 2$, $\theta = \pi/6$, pero tiene también coordenadas $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ (figura 11.19). En algunas situaciones permitimos que r sea negativa. Por esta razón, usamos la distancia dirigida en la definición de $P(r, \theta)$. El punto $P(2, 7\pi/6)$ puede obtenerse girando $7\pi/6$ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia delante (figura 11.20). También puede alcanzarse girando $\pi/6$ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia atrás. Así, el punto también tiene coordenadas polares $r = -2$, $\theta = \pi/6$.

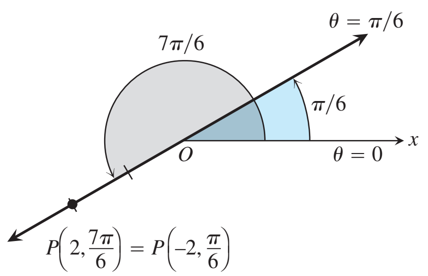


FIGURA 11.20 Las coordenadas polares pueden tener valores de r negativos.

EJEMPLO 1 Obtenga todas las coordenadas polares del punto $P(2, \pi/6)$.

Solución Trazamos el rayo inicial del sistema coordenado, dibujamos el rayo desde el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el rayo inicial, y marcamos el punto $(2, \pi/6)$ (figura 11.21). Después, encontramos los ángulos para los otros pares coordenados de P en los cuales $r = 2$ y $r = -2$.

Para $r = 2$, la lista completa de los ángulos es

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots .$$

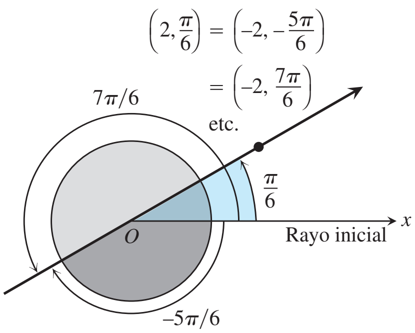


FIGURA 11.21 El punto $P(2, \pi/6)$ tiene un número infinito de pares de coordenadas polares (ejemplo 1).

Para $r = -2$, la lista de ángulos es

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots.$$

Las correspondientes parejas de coordenadas de P son

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Cuando $n = 0$, las fórmulas dan $(2, \pi/6)$ y $(-2, 5\pi/6)$. Cuando $n = 1$, dan $(2, 13\pi/6)$ y $(-2, 7\pi/6)$, y así sucesivamente. ■

Ecuaciones polares y gráficas

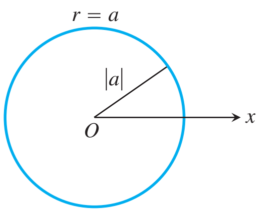


FIGURA 11.22 La ecuación polar de una circunferencia es $r = a$.

Si se mantiene r fija en un valor constante $r = a \neq 0$, el punto $P(r, \theta)$ permanecerá a $|a|$ unidades del origen O. Como θ varía sobre cualquier intervalo de longitud 2π, P describe una circunferencia de radio $|a|$ con centro en O (figura 11.22).

Si mantenemos θ fija en un valor constante $\theta = \theta_0$ y hacemos que r varíe entre $-\infty$ y ∞, el punto $P(r, \theta)$ describe una recta que pasa por O y que forma un ángulo de magnitud θ_0 con el rayo inicial.

Ecuación	Gráfica
$r = a$	Circunferencia con radio $\lvert a \rvert$ y centro en el origen O
$\theta = \theta_0$	Recta que pasa por O formando un ángulo θ_0 con el rayo inicial

EJEMPLO 2

(a) $r = 1$ y $r = -1$ son las ecuaciones para la circunferencia de radio 1 centrada en O.

(b) $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$, y $\theta = -5\pi/6$ son ecuaciones para la recta de la figura 11.21. ■

Las ecuaciones de la forma $r = a$ y $\theta = \theta_0$ pueden combinarse para definir regiones, segmentos y rayos.

EJEMPLO 3 Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $1 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(b) $-3 \leq r \leq 2$ y $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\dfrac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}$ (no hay restricción sobre r)

Solución Las gráficas se presentan en la figura 11.23. ■

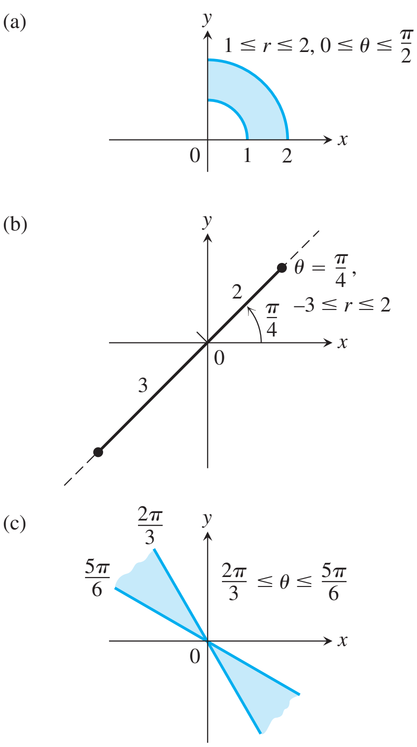


FIGURA 11.23 Las gráficas de desigualdades típicas en r y θ (ejemplo 3).

Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

Cuando usamos tanto el sistema de coordenadas polares como el cartesiano en un plano, colocamos los dos orígenes juntos y tomamos el rayo polar inicial como el eje x positivo. El rayo

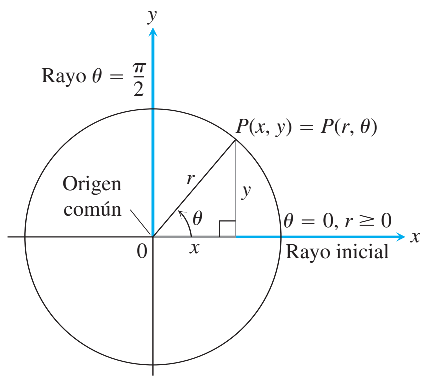


FIGURA 11.24 La manera usual para relacionar coordenadas polares y cartesianas.

$\theta = \pi/2$, $r > 0$, se convierte en la parte positiva del eje y (figura 11.24). Entonces, los dos sistemas de coordenadas están relacionados por las siguientes ecuaciones.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Las primeras dos ecuaciones determinan unívocamente las coordenadas cartesianas x y y dadas las coordenadas polares r y θ. Por otro lado, si x y y son conocidas, la tercera ecuación da dos posibles elecciones de r (una positiva y otra negativa). Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi]$ que satisface las dos primeras ecuaciones, cada una de las cuales da una representación en coordenadas polares del punto cartesiano (x, y). Las otras representaciones en coordenadas polares para el punto pueden determinarse a partir de estas dos, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 4 He aquí algunas ecuaciones equivalentes expresadas en términos tanto de coordenadas polares como cartesianas.

Ecuación polar	Equivalente cartesiano
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Algunas curvas se expresan mejor en coordenadas polares; otras no. ■

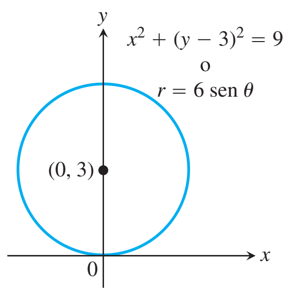


FIGURA 11.25 La circunferencia del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determine la ecuación polar para la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 11.25).

Solución Aplicamos las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares con las cartesianas:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-3)^2 &= 9 && \text{Desarrollar } (y-3)^2. \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 && \text{Cancelación} \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 && x^2 + y^2 = r^2 \\ r^2 - 6r\,\mathrm{sen}\,\theta &= 0 && \\ r = 0 \quad \text{o} \quad r - 6\,\mathrm{sen}\,\theta &= 0 && \text{Incluye ambas posibilidades} \\ r &= 6\,\mathrm{sen}\,\theta && \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Sustituya las siguientes ecuaciones polares por ecuaciones cartesianas equivalentes e identifique sus gráficas.

(a) $r\cos\theta = -4$

(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta}$

Solución Usamos las sustituciones $r\cos\theta = x$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) $r\cos\theta = -4$

La ecuación cartesiana es: $r\cos\theta = -4$

$x = -4$

La gráfica es: Recta vertical que pasa por $x = 4$ en el eje x

(b) $r^2 = 4r\cos\theta$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 \qquad \text{Completando el cuadrado} \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

La gráfica es: Circunferencia, radio 2, centro $(h, k) = (2, 0)$

(c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

La gráfica es: Recta, pendiente $m = 2$, intersección en y, $b = -4$ ■

Ejercicios 11.3

Coordenadas polares

1. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a. $(3, 0)$ **b.** $(-3, 0)$ **c.** $(2, 2\pi/3)$
d. $(2, 7\pi/3)$ **e.** $(-3, \pi)$ **f.** $(2, \pi/3)$
g. $(-3, 2\pi)$ **h.** $(-2, -\pi/3)$

2. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a. $(-2, \pi/3)$ **b.** $(2, -\pi/3)$ **c.** (r, θ)
d. $(r, \theta + \pi)$ **e.** $(-r, \theta)$ **f.** $(2, -2\pi/3)$
g. $(-r, \theta + \pi)$ **h.** $(-2, 2\pi/3)$

3. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a. $(2, \pi/2)$ **b.** $(2, 0)$
c. $(-2, \pi/2)$ **d.** $(-2, 0)$

4. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a. $(3, \pi/4)$ **b.** $(-3, \pi/4)$
c. $(3, -\pi/4)$ **d.** $(-3, -\pi/4)$

Coordenadas polares a coordenadas cartesianas

5. Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos del ejercicio 1.

6. Obtenga las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos (dados en coordenadas polares).

a. $(\sqrt{2}, \pi/4)$ **b.** $(1, 0)$
c. $(0, \pi/2)$ **d.** $(-\sqrt{2}, \pi/4)$
e. $(-3, 5\pi/6)$ **f.** $(5, \tan^{-1}(4/3))$
g. $(-1, 7\pi)$ **h.** $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$

Coordenadas cartesianas a coordenadas polares

7. Obtenga las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \ge 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a. $(1, 1)$ **b.** $(-3, 0)$
c. $(\sqrt{3}, -1)$ **d.** $(-3, 4)$

8. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < \pi$ y $r - 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a. $(-2, -2)$ **b.** $(0, 3)$
c. $(-\sqrt{3}, 1)$ **d.** $(5, -12)$

9. Determine las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a. $(3, 3)$ **b.** $(-1, 0)$
c. $(-1, \sqrt{3})$ **d.** $(4, -3)$

10. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a. $(-2, 0)$ **b.** $(1, 0)$
c. $(0, -3)$ **d.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Gráficas en coordenadas polares

Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los ejercicios 11 a 26.

11. $r = 2$ **12.** $0 \le r \le 2$
13. $r \ge 1$ **14.** $1 \le r \le 2$

15. $0 \leq \theta \leq \pi/6, \quad r \geq 0$

16. $\theta = 2\pi/3, \quad r \leq -2$

17. $\theta = \pi/3, \quad -1 \leq r \leq 3$

18. $\theta = 11\pi/4, \quad r \geq -1$

19. $\theta = \pi/2, \quad r \geq 0$

20. $\theta = \pi/2, \quad r \leq 0$

21. $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = 1$

22. $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = -1$

23. $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, \quad 0 \leq r \leq 1$

24. $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, \quad -1 \leq r \leq 1$

25. $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 1 \leq r \leq 2$

26. $0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 1 \leq |r| \leq 2$

Ecuaciones polares a cartesianas

Sustituya las ecuaciones polares de los ejercicios 27 a 52 por las ecuaciones cartesianas equivalentes. Luego, describa o identifique la gráfica.

27. $r \cos \theta = 2$

28. $r \operatorname{sen} \theta = -1$

29. $r \operatorname{sen} \theta = 0$

30. $r \cos \theta = 0$

31. $r = 4 \csc \theta$

32. $r = -3 \sec \theta$

33. $r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta = 1$

34. $r \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta$

35. $r^2 = 1$

36. $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$

37. $r = \dfrac{5}{\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta}$

38. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2$

39. $r = \cot \theta \csc \theta$

40. $r = 4 \tan \theta \sec \theta$

41. $r = \csc \theta \, e^{r \cos \theta}$

42. $r \operatorname{sen} \theta = \ln r + \ln \cos \theta$

43. $r^2 + 2r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 1$

44. $\cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$

45. $r^2 = -4r \cos \theta$

46. $r^2 = -6r \operatorname{sen} \theta$

47. $r = 8 \operatorname{sen} \theta$

48. $r = 3 \cos \theta$

49. $r = 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$

50. $r = 2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta$

51. $r \operatorname{sen} \left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

52. $r \operatorname{sen} \left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = 5$

Ecuaciones cartesianas a polares

Sustituya las ecuaciones cartesianas de los ejercicios 53 a 66 por las ecuaciones polares equivalentes.

53. $x = 7$

54. $y = 1$

55. $x = y$

56. $x - y = 3$

57. $x^2 + y^2 = 4$

58. $x^2 - y^2 = 1$

59. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

60. $xy = 2$

61. $y^2 = 4x$

62. $x^2 + xy + y^2 = 1$

63. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

64. $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

65. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

66. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

67. Obtenga todas las coordenadas polares del origen.

68. Rectas verticales y horizontales

a. Demuestre que toda recta vertical en el plano xy tiene una ecuación polar de la forma $r = a \sec \theta$.

b. Determine la ecuación polar análoga de las rectas horizontales en el plano xy.

11.4 Gráficas en coordenadas polares

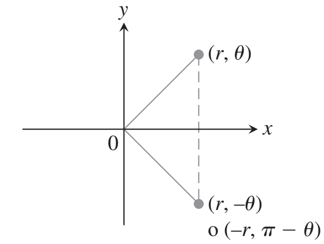
Con frecuencia es útil tener la gráfica de una ecuación en coordenadas polares. Esta sección describe las técnicas para graficar estas ecuaciones usando simetrías y tangentes a la gráfica.

Simetría

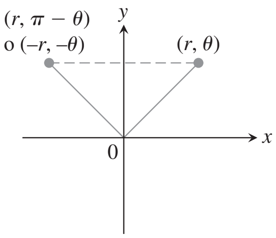
La figura 11.26 ilustra las pruebas estándar para simetría en coordenadas polares. El siguiente resumen señala cómo se relacionan los puntos simétricos.

Pruebas de simetría para gráficas polares

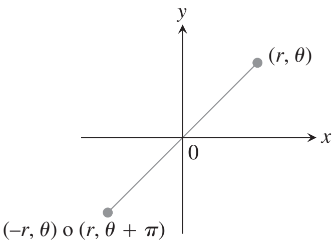
1. *Simetría con respecto al eje x:* Si el punto (r, θ) está en la gráfica, el punto $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.26a).
2. *Simetría con respecto al eje y:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, el punto $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.26b).
3. *Simetría con respecto al origen:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces el punto $(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.26c).



(a) Con respecto al eje x



(b) Con respecto al eje y



(c) Con respecto al origen

FIGURA 11.26 Tres pruebas para la simetría en coordenadas polares.

Pendiente

La pendiente de una curva polar $r = f(\theta)$ en el plano xy está dada por dy/dx, que no es $r' = df/d\theta$. Para entender por qué, consideremos f como la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Si f es una función derivable de θ, entonces también lo son x y y, y cuando $dx/d\theta \neq 0$, podemos calcular dy/dx con la fórmula paramétrica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

Sección 11.2, ecuación (1) con $t = \theta$

$$= \frac{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\,\cos\theta)}$$

$$= \frac{\dfrac{df}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{\dfrac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Regla de productos para derivadas

Por lo tanto, vemos que dy/dx no es lo mismo que $df/d\theta$.

Pendiente de la curva $r = f(\theta)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta},$$

siempre y cuando $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ).

Si la curva $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, entonces $f(\theta_0) = 0$, y la ecuación para la pendiente da

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

Si la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, la pendiente de la curva ahí es $\tan\theta_0$. La razón por la que decimos "pendiente en $(0, \theta_0)$" y no sólo "pendiente en el origen" es que una curva polar puede pasar por el origen (o cualquier punto) más de una vez, con pendientes diferentes para distintos valores de θ. Sin embargo, éste no es el caso de nuestro primer ejemplo.

EJEMPLO 1 Grafique la curva $r = 1 - \cos\theta$.

Solución La curva es simétrica con respecto al eje x porque

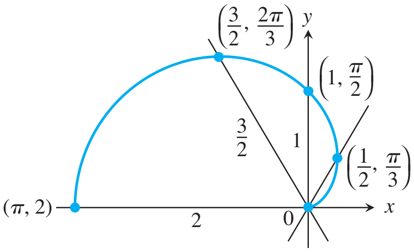
$$(r, \theta) \text{ en la gráfica} \Rightarrow r = 1 - \cos\theta$$

$$\Rightarrow r = 1 - \cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta)$$

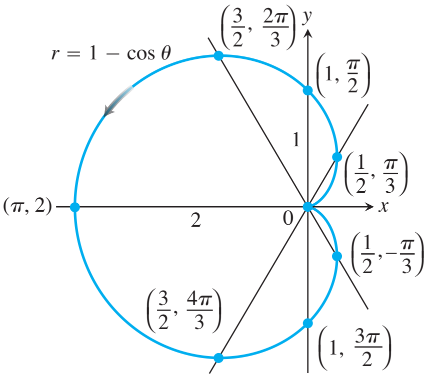
$$\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica}.$$

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

(a)



(b)



(c)

FIGURA 11.27 Los pasos al graficar la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ (ejemplo 1). La flecha señala la dirección de aumento de θ.

A medida que θ crece de 0 a π, $\cos\theta$ disminuye de 1 a -1, y $r = 1 - \cos\theta$ aumenta de un valor mínimo de 0 a un valor máximo de 2. Conforme θ crece de π a 2π, $\cos\theta$ crece de -1 a 1 y r decrece de 2 a 0. La curva empieza a repetirse cuando $\theta = 2\pi$ porque el coseno tiene un periodo de 2π.

La curva deja el origen con pendiente $\tan(0) = 0$ y regresa al origen con pendiente $\tan(2\pi) = 0$.

Hacemos una tabla de valores de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, graficamos los puntos, dibujamos una curva suave a través de ellos con una tangente horizontal en el origen y reflejamos la curva con respecto al eje x para completar la gráfica (figura 11.27). La curva se llama *cardioide* debido a su forma de corazón. ■

EJEMPLO 2 Grafique la curva $r^2 = 4\cos\theta$.

Solución La ecuación $r^2 = 4\cos\theta$ requiere que $\cos\theta \geq 0$, de manera que obtenemos toda la gráfica completa variando θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. La curva es simétrica con respecto al eje x porque

$$\begin{aligned}
(r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\
&\Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica.}
\end{aligned}$$

La curva también es simétrica con respecto al origen porque

$$\begin{aligned}
(r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\
&\Rightarrow (-r)^2 = 4\cos\theta \\
&\Rightarrow (-r, \theta) \text{ en la gráfica.}
\end{aligned}$$

Estas dos simetrías juntas implican simetría con respecto al eje y.

La curva pasa por el origen cuando $\theta = -\pi/2$ y $\theta = \pi/2$. Tiene una tangente vertical en ambos casos porque $\tan\theta$ es infinita.

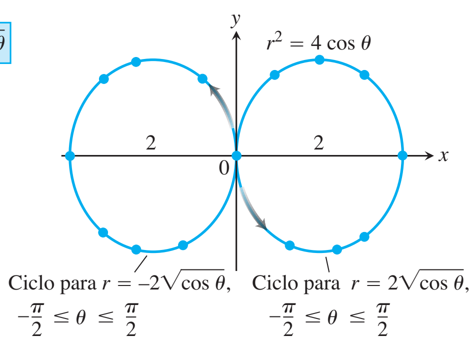
Para cada valor de θ en el intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, la fórmula $r^2 = 4\cos\theta$ da dos valores para r:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}.$$

Hacemos una pequeña tabla de valores, graficamos los puntos correspondientes y usamos como guía la información acerca de la simetría y las tangentes para conectar los puntos con una curva suave (figura 11.28).

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

(a)



(b)

FIGURA 11.28 La gráfica de $r^2 = 4\cos\theta$. Las flechas indican la dirección de aumento de θ. Los valores de r en la tabla están redondeados (ejemplo 2). ■

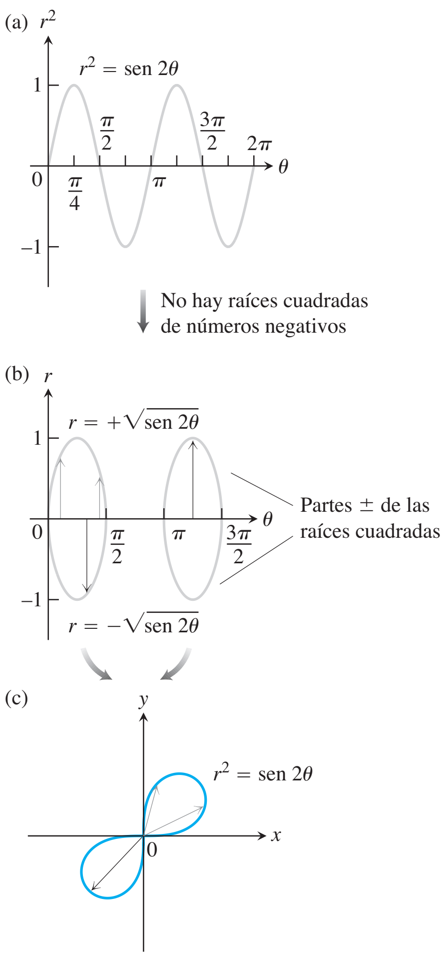


FIGURA 11.29 Para trazar $r = f(\theta)$ en el plano cartesiano $r\theta$ en (b), primero trazamos $r^2 = \text{sen}\, 2\theta$ en el plano $r^2\theta$ en (a) y luego ignoramos los valores de θ para los cuales sen 2θ es negativo. Los radios del dibujo en (b) cubren la gráfica polar de la lemniscata en (c) dos veces (ejemplo 3).

Una técnica para graficar

Una manera de graficar una ecuación polar $r = f(\theta)$ es hacer una tabla de valores (r, θ), graficar los puntos correspondientes y conectarlos en orden creciente de θ. Esto puede funcionar bien si hay suficientes puntos para revelar todos los lazos y las depresiones en la gráfica. Otro método de graficación que normalmente es más rápido y más confiable es

1. primero graficar $r = f(\theta)$ en el plano *cartesiano* $r\theta$,
2. luego, usar la gráfica cartesiana como una "tabla" y guía para bosquejar la gráfica en coordenadas *polares*.

Este método es mejor que graficar primero los puntos, porque la gráfica cartesiana, aunque se dibuje de prisa, revela de inmediato dónde r es positiva, negativa y dónde no existe, así como dónde es creciente o decreciente. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO 3 Grafique la curva *lemniscata*

$$r^2 = \text{sen}\, 2\theta.$$

Solución Empezamos por graficar r^2 (no r) como una función de θ en el plano cartesiano $r^2\theta$. Observe la figura 11.29a. Pasamos de allí a la gráfica de $r = \pm\sqrt{\text{sen}\, 2\theta}$. en el plano $r\theta$ (figura 11.29b), y luego dibujamos la gráfica polar (figura 11.29c). La gráfica en la figura 11.29b "cubre" dos veces la gráfica polar final de la figura 11.29c. Podríamos entonces haber usado cualquier ciclo, o bien, las dos mitades superiores o las dos mitades inferiores de la gráfica. Sin embargo, la cobertura doble no está de más al graficar, y de este modo aprendimos un poco más acerca del comportamiento de la función. ■

USO DE LA TECNOLOGÍA **Graficación de curvas polares en forma paramétrica**

En el caso de curvas polares complicadas, sería recomendable utilizar una calculadora gráfica o una computadora para graficar la curva. Si el dispositivo no dibuja gráficas polares directamente, podemos convertir $r = f(\theta)$ a la forma paramétrica usando las ecuaciones

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Luego usamos el dispositivo para dibujar una curva parametrizada en el plano cartesiano xy. Puede ser necesario usar el parámetro t en vez de θ para el dispositivo de graficación.

Ejercicios 11.4

Simetrías y gráficas polares

Identifique las simetrías de las curvas en los ejercicios 1 a 12. Luego trace las curvas.

1. $r = 1 + \cos\theta$
2. $r = 2 - 2\cos\theta$
3. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$
4. $r = 1 + \text{sen}\,\theta$
5. $r = 2 + \text{sen}\,\theta$
6. $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$
7. $r = \text{sen}\,(\theta/2)$
8. $r = \cos(\theta/2)$
9. $r^2 = \cos\theta$
10. $r^2 = \text{sen}\,\theta$
11. $r^2 = -\text{sen}\,\theta$
12. $r^2 = -\cos\theta$

Grafique las lemniscatas de los ejercicios 13 a 16. ¿Qué simetrías tienen estas curvas?

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$
14. $r^2 = 4\,\text{sen}\, 2\theta$
15. $r^2 = -\text{sen}\, 2\theta$
16. $r^2 = -\cos 2\theta$

Pendientes de curvas polares

Obtenga las pendientes de las curvas de los ejercicios 17 a 20 en los puntos dados. Trace las curvas con sus tangentes en estos puntos.

17. **Cardioide** $r = -1 + \cos\theta$; $\theta = \pm\pi/2$
18. **Cardioide** $r = -1 + \text{sen}\,\theta$; $\theta = 0, \pi$
19. **Rosa de cuatro pétalos** $r = \text{sen}\, 2\theta$; $\theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$
20. **Rosa de cuatro pétalos** $r = \cos 2\theta$; $\theta = 0, \pm\pi/2, \pi$

Gráficas de limaçones

Grafique los limaçones de los ejercicios 21-24. Limaçon ("*Lee*-ma-sahn") es un arcaísmo francés que significa "caracol". Usted entenderá el nombre cuando grafique los limaçones del ejercicio 21. Las ecuaciones para los "limaçones tienen la forma $r = a \pm b \cos\theta$ o $r = a \pm b \operatorname{sen}\theta$. Hay cuatro formas básicas.

21. Limaçones con un lazo interior

a. $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$ **b.** $r = \frac{1}{2} + \operatorname{sen}\theta$

22. Cardioides

a. $r = 1 - \cos\theta$ **b.** $r = -1 + \operatorname{sen}\theta$

23. Limaçones con concavidades

a. $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$ **b.** $r = \frac{3}{2} - \operatorname{sen}\theta$

24. Limaçones ovalados

a. $r = 2 + \cos\theta$ **b.** $r = -2 + \operatorname{sen}\theta$

Gráficas de curvas y regiones polares

25. Trace la región definida por las desigualdades $-1 \le r \le 2$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

26. Trace la región definida por las desigualdades $0 \le r \le 2 \sec\theta$ y $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$.

En los ejercicios 27 y 28, bosqueje la región definida por la desigualdad.

27. $0 \le r \le 2 - 2\cos\theta$ **28.** $0 \le r^2 \le \cos\theta$

T **29.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = 1 - \cos\theta$?

a. $r = -1 - \cos\theta$

b. $r = 1 + \cos\theta$

Confirme su respuesta con el álgebra.

T **30.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = \cos 2\theta$?

a. $r = -\operatorname{sen}(2\theta + \pi/2)$

b. $r = -\cos(\theta/2)$

Confirme su respuesta con el álgebra.

T **31. Una rosa dentro de una rosa** Grafique la ecuación $r = 1 - 2\operatorname{sen} 3\theta$.

T **32. La nefroide de Freeth** Grafique la nefroide de Freeth:

$$r = 1 + 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$$

T **33. Rosas** Grafique las rosas $r = \cos m\theta$ para $m = 1/3, 2, 3$ y 7.

T **34. Espirales** Las coordenadas polares son ideales para definir las espirales. Grafique las siguientes espirales.

a. $r = \theta$

b. $r = -\theta$

c. *Una espiral logarítmica:* $r = e^{\theta/10}$

d. *Una espiral hiperbólica:* $r = 8/\theta$

e. *Una hipérbola equilátera:* $r = \pm 10/\sqrt{\theta}$

(Use diferentes colores para las dos ramas).

11.5 Áreas y longitudes en coordenadas polares

Esta sección muestra cómo calcular el área de regiones planas y longitudes de curvas en coordenadas polares. Las ideas detrás de las definiciones son las mismas que antes, pero las fórmulas son diferentes para coordenadas polares y para coordenadas cartesianas.

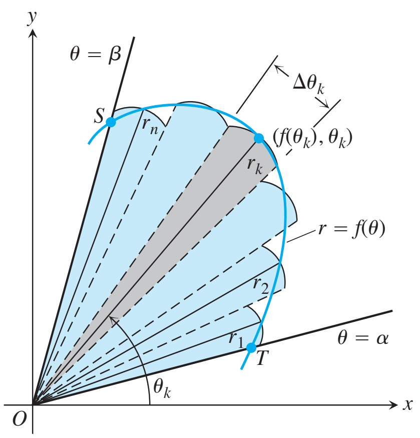


FIGURA 11.30 Para deducir una fórmula para el área de la región *OTS*, aproximamos la región con sectores circulares en forma de abanico.

Área en el plano

La región *OTS* de la figura 11.30 está acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, y la curva $r = f(\theta)$. Aproximamos la región con n sectores circulares en forma de abanico y que no se traslapan, con base en una división P del ángulo *TOS*. El sector típico tiene un radio $r_k = f(\theta_k)$ y un ángulo central de $\Delta\theta_k$ radianes. Su área es $\Delta\theta k/2\pi$ veces el área de un círculo de radio r_k, o

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2\, \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k .$$

El área de la región *OTS* es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k .$$

Si f es continua, esperamos que las aproximaciones mejoren conforme la norma de la partición P tiende a cero, donde la norma de P es el valor más grande de $\Delta\theta_k$. Esto nos lleva a la siguiente fórmula que define el área de la región:

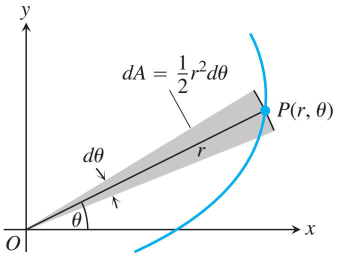


FIGURA 11.31 La diferencial del área dA para la curva $r = f(\theta)$.

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta.$$

Área de la región en forma de abanico entre el origen y la curva $r = f(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

Ésta es la integral de la **diferencial del área** (figura 11.31)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta.$$

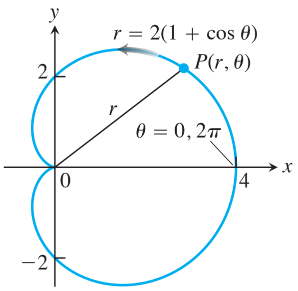


FIGURA 11.32 La cardioide del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Encuentre el área de la región en el plano, acotada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Solución Graficamos la cardioide (figura 11.32) y determinamos que el radio OP barre la región exactamente una vez cuando θ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, el área es

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\,\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta) \, d\theta$$
$$= \left[3\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi. \quad \blacksquare$$

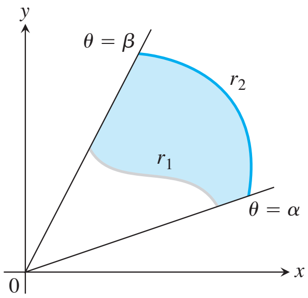


FIGURA 11.33 El área de la región sombreada se calcula restando el área de la región entre r_1 y el origen del área de la región entre r_2 y el origen.

Para hallar el área de la región como la de la figura 11.33, la cual se encuentra entre dos curvas polares $r_1 = r_1(\theta)$ y $r_2 = r_2(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, restamos la integral de $(1/2){r_1}^2 \, d\theta$ de la integral $(1/2){r_2}^2 \, d\theta$. Esto trae consigo la siguiente fórmula.

Área de la región $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}{r_2}^2 \, d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}{r_1}^2 \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right) d\theta \qquad (1)$$

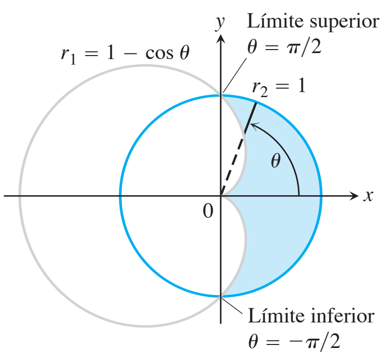


FIGURA 11.34 La región y los límites de integración del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$ y fuera de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Trazamos la región para determinar sus fronteras y obtener los límites de integración (figura 11.34). La curva exterior es $r_2 = 1$, la curva interior es $r_1 = 1 - \cos\theta$, y θ varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$. El área, a partir de la ecuación 1, es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta && \text{Simetría} \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta))\, d\theta && \text{Cuadrado de } r_1. \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \left[2\,\text{sen}\,\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

El hecho de que podamos representar un punto de diferentes maneras en coordenadas polares demanda mayor cuidado para identificar cuando un punto está en la gráfica de una ecuación polar y para determinar los puntos en los cuales las gráficas polares se intersecan. (En el ejemplo 2 necesitamos los puntos de intersección). En coordenadas cartesianas, siempre podemos obtener los puntos donde dos curvas se cruzan resolviendo simultáneamente sus ecuaciones. En coordenadas polares es diferente. Las soluciones simultáneas pueden revelar algunos puntos de intersección y otros no, de manera que algunas veces es difícil obtener todos los puntos de intersección de las dos curvas polares. Una manera de identificarlos es graficar las ecuaciones.

Longitud de una curva polar

Podemos obtener una fórmula en coordenadas polares para la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, parametrizando la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \alpha \le \theta \le \beta. \tag{2}$$

La fórmula paramétrica de longitud, la ecuación (3) de la sección 11.2, da entonces la longitud como

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Esta ecuación se convierte en

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

cuando las ecuaciones (2) se sustituyen por x y y (ejercicio 29).

Longitud de una curva polar
Si $r = f(\theta)$ tiene derivada continua para $\alpha \le \theta \le \beta$ y si el punto $P(r, \theta)$ traza la curva $r = f(\theta)$ exactamente una sola vez al variar θ de α a β, entonces la longitud de la curva es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{3}$$

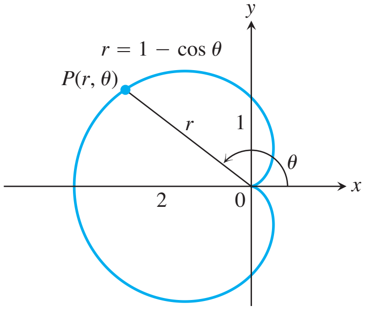


FIGURA 11.35 Cálculo de la longitud de una cardioide (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga la longitud de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Dibujamos la cardioide para determinar los límites de integración (figura 11.35). El punto $P(r, \theta)$ traza la curva una sola vez, en sentido contrario a las manecillas del reloj, conforme θ va de 0 a 2π, de manera que éstos son los valores que tomamos para α y β.

Con

$$r = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta,$$

tenemos

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1 - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 \\ &= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) \\ &= \int_0^{2\pi} 2\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \operatorname{sen}(\theta/2) \ge 0 \quad \text{para} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ &= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

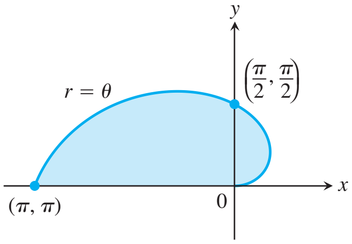
■

Ejercicios 11.5

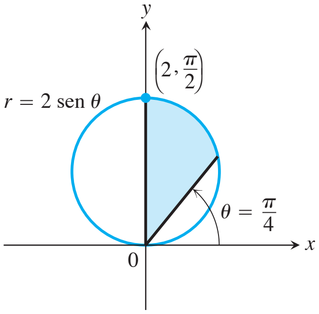
Obtención de áreas polares

Obtenga las áreas de las regiones de los ejercicios 1 a 8.

1. Limitada por la espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le \pi$



2. Limitada por la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}\theta$ para $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

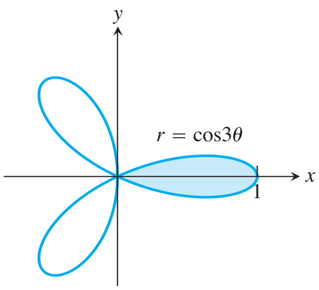


3. Dentro del óvalo del limaçon $r = 4 + 2\cos\theta$

4. Dentro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

5. Dentro de un pétalo de una rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$

6. Dentro de un pétalo de una rosa de tres pétalos $r = \cos 3\theta$



7. Dentro de un lazo de la lemniscata $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$

8. Dentro de una rosa de seis pétalos $r^2 = 2\operatorname{sen}3\theta$

Obtenga las áreas de las regiones en los ejercicios 9 a 16.

9. Compartida por las circunferencias $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

10. Compartida por las circunferencias $r = 1$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

11. Compartida por la circunferencia $r = 2$ y la cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$

12. Compartida por las cardioides $r = 2(1 + \cos\theta)$ y $r = 2(1 - \cos\theta)$

13. Dentro de la lemniscata $r^2 = 6\cos 2\theta$ y fuera de la circunferencia $r = \sqrt{3}$.

14. Dentro de la circunferencia $r = 3a \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$

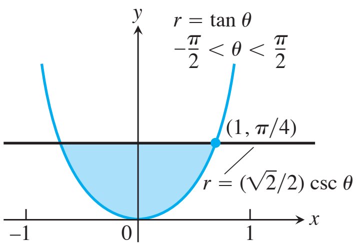
15. Dentro de la circunferencia $r = -2 \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$

16. Dentro de la circunferencia $r = 6$ y sobre la recta $r = 3 \csc \theta$

17. Dentro de la circunferencia $r = 4 \cos \theta$ y a la derecha de la recta vertical $r = \sec \theta$

18. Dentro de la circunferencia $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ y debajo de la recta horizontal $r = 3 \csc \theta$

19. **a.** Obtenga el área de la región sombreada en la siguiente figura.



b. Parece que la gráfica de $r = \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ es asintótica a las rectas $x = 1$ y $x = -1$. ¿Es así? Explique las razones de su respuesta.

20. El área de la región que se encuentra dentro de la curva cardioide $r = \cos \theta + 1$ y fuera de la circunferencia $r = \cos \theta$ no es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta]\, d\theta = \pi .$$

¿Por qué no? ¿Cuál es el área? Fundamente su respuesta.

Obtención de longitudes de curvas polares

Determine las longitudes de las curvas de los ejercicios 21 a 28.

21. La espiral $r = \theta^2$, $\quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$

22. La espiral $r = e^\theta/\sqrt{2}$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$

23. La cardioide $r = 1 + \cos \theta$

24. La curva $r = a \operatorname{sen}^2 (\theta/2)$, $0 \le \theta \le \pi$, $a > 0$

25. El segmento parabólico $r = 6/(1 + \cos \theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$

26. El segmento parabólico $r = 2/(1 - \cos \theta)$, $\quad \pi/2 \le \theta \le \pi$

27. La curva $r = \cos^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le \pi/4$

28. La curva $r = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$, $\quad 0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$

29. **La longitud de la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$** Suponiendo que las derivadas que sean necesarias son continuas, demuestre cómo las sustituciones

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

(ecuaciones 2 en el texto) transforman

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

en

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta .$$

30. **Perímetros de circunferencias** Como es usual, cuando vemos una nueva fórmula, es buena idea aplicarla sobre objetos familiares para asegurarnos de que produce resultados consistentes con la experiencia pasada. Use la fórmula de la longitud de la ecuación (3) para calcular el perímetro de las siguientes circunferencias ($a > 0$).

a. $r = a$ **b.** $r = a \cos \theta$ **c.** $r = a \operatorname{sen} \theta$

Teoría y ejemplos

31. **Valor promedio** Si f es continua, el valor promedio de la coordenada polar r sobre la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, respecto a θ está dado por la fórmula

$$r_{\text{prom}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta .$$

Use esta fórmula para encontrar el valor promedio de r con respecto a θ sobre las siguientes curvas ($a > 0$).

a. La cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$

b. La circunferencia $r = a$

c. La circunferencia $r = a \cos \theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

32. **$r = f(\theta)$ versus $r = 2f(\theta)$** ¿Se puede establecer alguna relación entre las longitudes de las curvas $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, y $r = 2f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$? Argumente su respuesta.

11.6 Secciones cónicas

En esta sección revisaremos y definiremos geométricamente las parábolas, las elipses y las hipérboles, y derivaremos sus ecuaciones cartesianas estándar. Estas curvas se llaman *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*, porque se forman cortando un cono doble con un plano (figura 11.36). Este método geométrico era la única manera que tenían los matemáticos griegos para describirlas, pues no contaban nuestras herramientas de coordenadas cartesianas o polares. En la siguiente sección expresaremos las cónicas en coordenadas polares.

Parábolas

DEFINICIONES El conjunto formado por todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo dado y una recta fija dada en el plano es una **parábola**. El punto fijo es el **foco** de la parábola. La recta fija es la **directriz**.

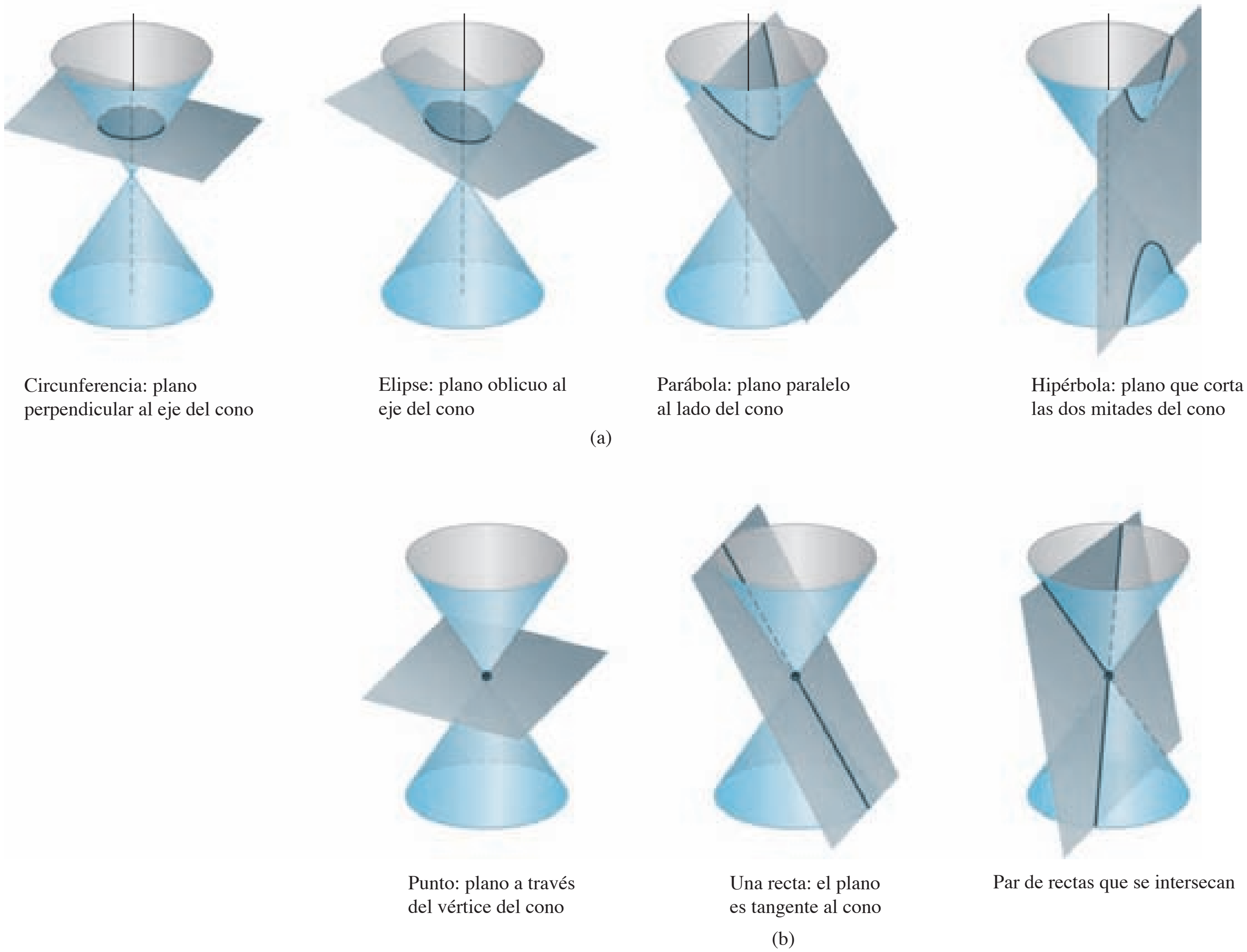


FIGURA 11.36 Las secciones cónicas estándar (a) son las curvas en las cuales un plano corta a un cono *doble*. Las hipérbolas constan de dos partes, llamadas ramas. El punto y las rectas que se obtienen al hacer pasar el plano por el vértice del cono (b) son secciones cónicas *degeneradas*.

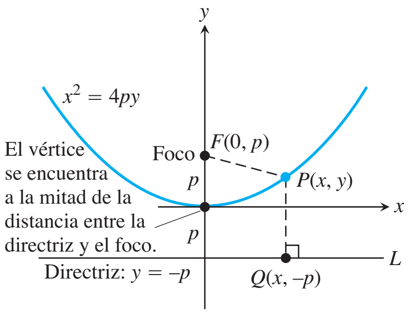


FIGURA 11.37 Forma canónica de la parábola $x^2 = 4py$, $p > 0$.

Si el foco f está en la directriz L, la parábola es la recta que pasa por f y es perpendicular a L. Esto se considera un caso degenerado y, de aquí en adelante, se supondrá que f no está en L.

La ecuación más simple para una parábola se obtiene cuando su foco se encuentra en uno de los ejes y su directriz es perpendicular a éste. Por ejemplo, suponga que el foco está en el punto $f(0, p)$ en la parte positiva del eje y, y que la directriz es la recta $y = -p$ (figura 11.37). En la notación de la figura, un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si $PF = PQ$. A partir de la fórmula de la distancia

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Cuando igualamos estas expresiones, elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad \text{o} \quad x^2 = 4py. \qquad \text{Forma canónica} \tag{1}$$

Estas ecuaciones revelan la simetría de la parábola con respecto al eje y. Al eje y lo llamamos **eje** de la parábola (una forma abreviada de "eje de simetría").

El punto donde una parábola cruza su eje es el **vértice**. El vértice de la parábola $x^2 = 4py$ está en el origen (figura 11.37). El número positivo p es la **distancia focal** de la parábola.

Si la parábola abre hacia abajo, con su foco en $(0, -p)$ y con directriz en la recta $y = p$, entonces las ecuaciones (1) se convierten en

$$y = -\frac{x^2}{4p} \qquad \text{y} \qquad x^2 = -4py.$$

Intercambiando las variables x y y, obtenemos ecuaciones similares para parábolas que se abren a la derecha o a la izquierda (figura 11.38).

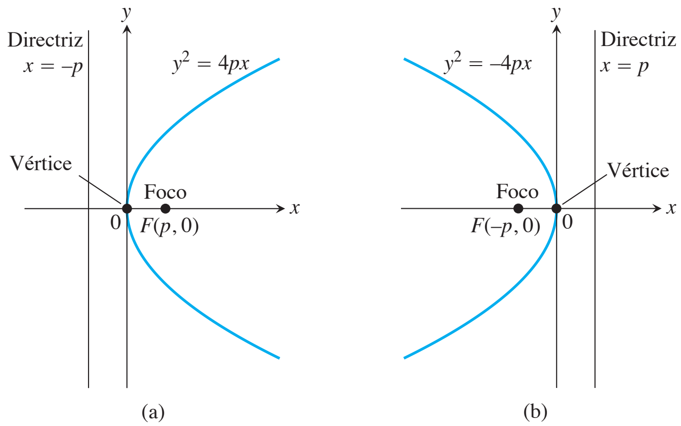


FIGURA 11.38 (a) La parábola $y^2 = 4px$. (b) La parábola $y^2 = -4px$.

EJEMPLO 1 Obtenga el foco y la directriz de la parábola $y^2 = 10x$.

Solución Determinamos el valor de p en la ecuación estándar de la parábola $y^2 = 4px$:

$$4p = 10, \qquad \text{de manera que} \qquad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Luego, determinamos el foco y la directriz para este valor de p:

$$\text{Foco:} \qquad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Directriz:} \qquad x = -p \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{5}{2}. \qquad \blacksquare$$

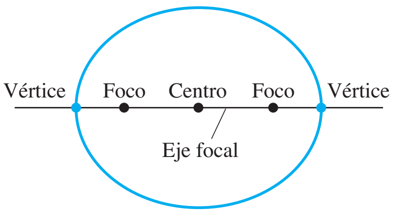


FIGURA 11.39 Puntos en el eje focal de una elipse.

Elipses

> **DEFINICIONES** Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuyas distancias a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.
>
> La recta que pasa por los focos de una elipse es el **eje focal**. El punto que está en el eje a la mitad de la distancia de los focos es el **centro**. Los puntos donde el eje focal y la elipse se cruzan son los **vértices** de la elipse (figura 11.39).

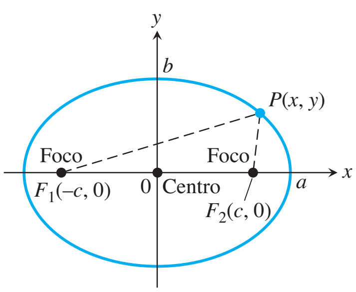


FIGURA 11.40 La elipse definida por la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$ es la gráfica de la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Si los focos están en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.40), y $PF_1 + PF_2$ se denota por $2a$, entonces las coordenadas de un punto P sobre la elipse satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Puesto que $PF_1 + PF_2$ es mayor que la longitud F_1F_2 (la desigualdad del triángulo para el triángulo PF_1F_2), el número $2a$ es mayor que $2c$. De acuerdo con esto, $a > c$ y el número $a^2 - c^2$ en la ecuación (2) es positivo.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (2) se pueden revertir para demostrar que todos los puntos P cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de esta forma con $0 < c < a$ también satisfacen la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$. Por lo tanto, un punto está en la elipse si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (2).

Si

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{3}$$

entonces $a^2 - c^2 = b^2$ y la ecuación (2) toma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) indica que esta elipse es simétrica con respecto al origen y a ambos ejes coordenados. Además, permanece dentro del rectángulo acotado por las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$. La elipse cruza los ejes en los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$. Las tangentes en estos puntos son perpendiculares a los ejes porque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$ Obtenida de la ecuación (4) por medio de la derivación implícita

es cero si $x = 0$ e infinita si $y = 0$.

El **eje mayor** de la elipse en la ecuación (4) es el segmento de recta de longitud $2a$ que une los puntos $(\pm a, 0)$. El **eje menor** es el segmento de recta de longitud $2b$ que une los puntos $(0, \pm b)$. El mismo número a es el **semieje mayor**, el número b el **semieje menor**. El número c, obtenido de la ecuación (3) como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

es la **distancia del centro al foco** de la elipse. Si $a = b$, la elipse es una circunferencia.

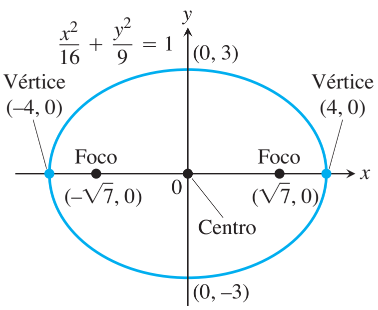


FIGURA 11.41 Una elipse con su eje mayor horizontal (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 La elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{5}$$

(figura 11.41) tiene

El semieje mayor: $a = \sqrt{16} = 4$, semieje menor: $b = \sqrt{9} = 3$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Focos: $(\pm c, 0) = \left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$

Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

Centro: $(0, 0)$. ■

Si intercambiamos x y y en la ecuación (5), tenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{6}$$

El eje mayor de esta elipse es ahora vertical en vez de horizontal, con los focos y vértices en el eje y. No hay confusión en el análisis de las ecuaciones (5) y (6). Si encontramos las intersecciones en los ejes coordenados, sabremos cuál es el eje mayor porque es el más grande de los dos.

Ecuaciones en forma canónica para las elipses con centro en el origen

Focos sobre el eje x: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Focos sobre el eje y: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

En cada caso, a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

Hipérbolas

DEFINICIONES La **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del plano tienen diferencia constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos de una hipérbola es el **eje focal**. El punto que está en el eje focal a la mitad de la distancia entre los focos es el **centro** de la hipérbola. Los puntos donde el eje focal y la hipérbola se cruzan son los **vértices** (figura 11.42).

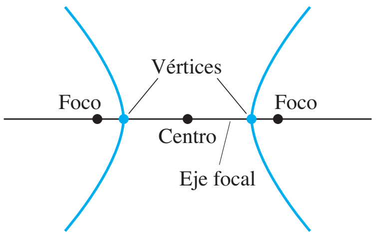


FIGURA 11.42 Puntos en el eje focal de una hipérbola.

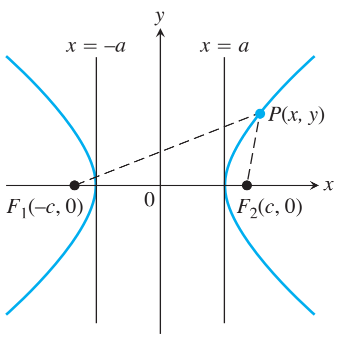


FIGURA 11.43 Las hipérbolas tienen dos ramas. Para puntos en la rama derecha de la hipérbola mostrada aquí, $PF_1 - PF_2 = 2a$. Para los puntos en la rama izquierda de la hipérbola mostrada aquí, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Entonces hacemos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Si los focos están en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.43) y la diferencia constante es $2a$, entonces el punto (x, y) está en la hipérbola si y sólo si

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{7}$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado, para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{8}$$

Hasta el momento, esta ecuación se parece a la de la elipse. Pero ahora $a^2 - c^2$ es negativo porque $2a$, al ser la diferencia de dos lados del triángulo PF_1F_2, es menor que $2c$, el tercer lado.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (8) se pueden revertir para demostrar que todo punto P cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de esta forma con $0 < a < c$ también satisfacen la ecuación (7). Por lo tanto, un punto está en la hipérbola si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (8).

Si denotamos por b a la raíz cuadrada positiva de $c^2 - a^2$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \tag{9}$$

entonces, $a^2 - c^2 = -b^2$ y la ecuación (8) se escribiría en forma compacta así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Las diferencias entre la ecuación (10) y la ecuación para una elipse (ecuación 4) son el signo menos y la nueva relación

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{De la ecuación (9)}$$

Como en la elipse, la hipérbola es simétrica con respecto al origen y a los ejes coordenados. Cruza el eje x en los puntos $(\pm a, 0)$. Las tangentes en estos puntos son verticales porque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{Obtenida de la ecuación (10) por medio de derivación implícita}$$

es infinita cuando $y = 0$. La hipérbola no tiene intersecciones con el eje y; de hecho, ninguna parte de la curva está entre las rectas $x = -a$ y $x = a$.

Las rectas

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

son las dos **asíntotas** de la hipérbola definida por la ecuación (10). La manera más rápida de determinar las ecuaciones para las asíntotas es sustituir el 1 en la ecuación (10) por 0 y despejar y en la nueva ecuación:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hipérbola}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 por 1}} \rightarrow \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{asíntotas}}.$$

EJEMPLO 3 La ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \tag{11}$$

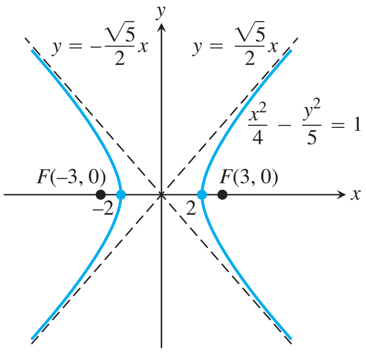


FIGURA 11.44 La hipérbola del ejemplo 3 y sus asíntotas.

es la ecuación (10) con $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$ (figura 11.44). Tenemos

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Focos: $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$, Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

Centro: $(0, 0)$

Asíntotas: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0$ o $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x.$ ■

Si intercambiamos x y y en la ecuación (11), los focos y los vértices de la hipérbola resultante estarán en el eje y. Encontraremos las asíntotas del mismo modo que antes, pero ahora sus ecuaciones serán $y = \pm 2x/\sqrt{5}$.

Ecuaciones en forma canónica para las hipérbolas con centro en el origen

Focos en el eje x: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Foco: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Asíntotas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ o $y = \pm\frac{b}{a}x$

Focos en el eje y: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

Asíntotas: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ o $y = \pm\frac{a}{b}x$

Observe la diferencia en las ecuaciones para las asíntotas (en la primera b/a, en la segunda a/b).

Cambiamos las cónicas usando los principios revisados en la sección 1.2, sustituyendo x por $x + h$ y y por $y + k$.

EJEMPLO 4 Demuestre que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ representa una hipérbola. Encuentre su centro, asíntotas y focos.

Solución Reducimos la ecuación a la forma canónica completando el cuadrado en x y y como sigue:

$$(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) = 7$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1.$$

Ésta es la forma canónica de la ecuación (10) de una hipérbola con x sustituida por $x + 1$ y y reemplazada por $y - 1$. La hipérbola se desplaza una unidad a la izquierda y una unidad hacia arriba, y tiene su centro en $x + 1 = 0$ y $y - 1 = 0$, o $x = -1$ y $y = 1$. Aún más,

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 5,$$

de manera que las asíntotas son las dos rectas

$$\frac{x+1}{2} - (y-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x+1}{2} + (y-1) = 0.$$

Los focos trasladados tienen coordenadas $\left(-1 \pm \sqrt{5}, 1\right)$. ■

Ejercicios 11.6

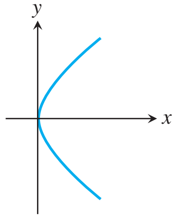
Identificación de gráficas

Relacione las parábolas de los ejercicios 1 a 4 con las siguientes ecuaciones:

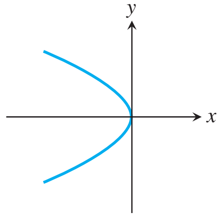
$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

Luego determine el foco y la directriz de cada parábola.

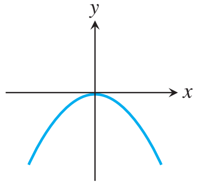
1.



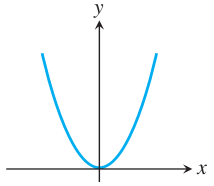
2.



3.



4.



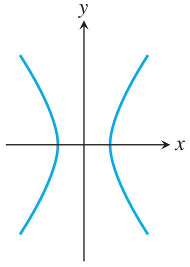
Haga corresponder cada sección cónica de los ejercicios 5 a 8 con una de estas ecuaciones:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

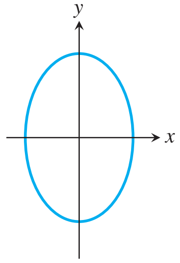
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Luego, determine los focos y vértices de las secciones cónicas. Si la sección cónica es una hipérbola, determine también sus asíntotas.

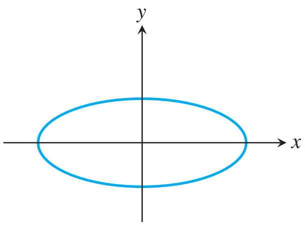
5.



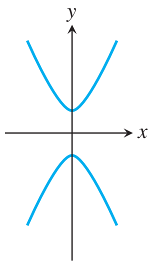
6.



7.



8.



Parábolas

En los ejercicios 9 a 16 se dan ecuaciones de parábolas. Obtenga el foco y la directriz de cada parábola. Luego dibuje la parábola. Incluya el foco y la directriz en su dibujo.

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Elipses

Los ejercicios 17 a 24 presentan ecuaciones de elipses. Exprese cada ecuación en su forma canónica. Luego dibuje la elipse. Incluya los focos en su dibujo.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

Los ejercicios 25 y 26 tienen información acerca de los focos y vértices de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación en la forma canónica a partir de la información dada.

25. Focos: $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$ Vértices: $(\pm 2, 0)$

26. Focos: $(0, \pm 4)$ Vértices: $(0, \pm 5)$

Hipérbolas

Los ejercicios 27 a 34 tienen ecuaciones para hipérbolas. Exprese cada ecuación en su forma canónica y determine las asíntotas de las hipérbolas. Luego dibuje la hipérbola, incluyendo sus asíntotas y focos.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

Los ejercicios 35 a 38 tienen información acerca de los focos, los vértices y las asíntotas de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En todos los casos determine la ecuación en forma canónica de la hipérbola a partir de la información dada.

35. Focos: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$

Asíntotas: $y = \pm x$

36. Focos: $(\pm 2, 0)$

Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$

37. Vértices: $(\pm 3, 0)$

Asíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}x$

38. Vértices: $(0, \pm 2)$

Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}x$

Desplazamiento de secciones cónicas

Sería útil que revisara la sección 1.2 antes de resolver los ejercicios 39 a 56.

39. La parábola $y^2 = 8x$ se desplaza 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para generar la parábola $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$.

a. Obtenga el vértice, el foco y la directriz de la nueva parábola.

b. Grafique el nuevo vértice, foco y directriz y bosqueje la parábola.

40. La parábola $x^2 = -4y$ se desplaza 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba para generar la parábola $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$.

a. Determine el vértice, foco y directriz de la nueva parábola.

b. Trace el nuevo vértice, foco y directriz y bosqueje la parábola.

41. La elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba para generar la elipse

$$\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1.$$

a. Obtenga los focos, los vértices y el centro de la nueva elipse.

b. Trace los nuevos focos y vértices, y bosqueje la elipse.

42. La elipse $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ se desplaza 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo para generar la elipse

$$\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1.$$

a. Obtenga los focos, vértices y centro de la nueva elipse.

b. Trace los nuevos focos, vértices y centro, y bosqueje la elipse.

43. La hipérbola $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha para generar la hipérbola

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a. Determine el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b. Grafique el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos y bosqueje la hipérbola.

44. La hipérbola $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia abajo para generar la hipérbola

$$\frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

a. Obtenga el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b. Trace el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos y bosqueje la hipérbola.

Los ejercicios 45 a 48 incluyen ecuaciones para parábolas y definen cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se va a desplazar cada parábola. Determine la ecuación para la parábola nueva y encuentre el vértice, el foco y la directriz nuevos.

45. $y^2 = 4x$, izquierda 2, abajo 3 **46.** $y^2 = -12x$, derecha 4, arriba 3

47. $x^2 = 8y$, derecha 1, abajo 7 **48.** $x^2 = 6y$, izquierda 3, abajo 2

Los ejercicios 49 a 52 presentan ecuaciones para elipses e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada elipse. Determine una ecuación para la nueva elipse y encuentre los focos, los vértices y el centro nuevos.

49. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1,$ izquierda 2, abajo 1

50. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$ derecha 3, arriba 4

51. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1,$ derecha 2, arriba 3

52. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,$ izquierda 4, abajo 5

Los ejercicios 53 a 56 presentan ecuaciones para hipérbolas e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada hipérbola. Determine una ecuación para la hipérbola nueva y encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos.

53. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1,$ derecha 2, arriba 2

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$ izquierda 2, abajo 1

55. $y^2 - x^2 = 1,$ izquierda 1, abajo 1

56. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1,$ derecha 1, arriba 3

Obtenga el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y el radio, como proceda, de las secciones cónicas de los ejercicios 57 a 68.

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

60. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

62. $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

66. $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

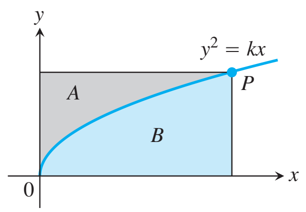
68. $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Teoría y ejemplos

69. Si se dibujan rectas paralelas a los ejes coordenados que pasen por un punto P sobre la parábola $y^2 = kx$, $k > 0$, la parábola divide la región rectangular acotada por estas rectas y los ejes en dos pequeñas regiones, A y B.

a. Si las dos regiones más pequeñas giran alrededor del eje y, demuestre que generan sólidos cuyos volúmenes tienen una proporción de 4:1.

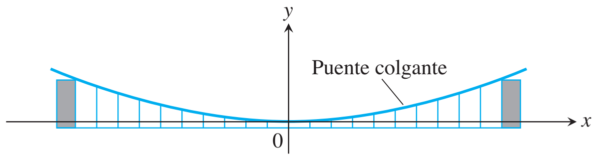
b. ¿Cuál es la razón de los volúmenes generados cuando las regiones giran alrededor del eje x?



70. Los cables de los puentes colgantes describen parábolas El cable del puente colgante ilustrado en la figura soporta una carga uniforme de w libras por ft horizontal. Puede demostrarse que si H es la tensión horizontal del cable en el origen, entonces la curva del cable satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x.$$

Demuestre que el cable cuelga en forma de parábola resolviendo esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$.



71. Anchura de una parábola en el foco Demuestre que el número $4p$ es el *ancho* de la parábola $x^2 = 4py$ $(p > 0)$ en el foco, comprobando que la recta $y = p$ corta la parábola en los puntos que están separados $4p$ unidades.

72. Las asíntotas de $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ Demuestre que la distancia vertical entre la recta $y = (b/a)x$ y la mitad superior de la rama derecha $y = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$ de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ tiende a cero, comprobando que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0.$$

Resultados análogos se obtienen para las partes restantes de la hipérbola y las rectas $y = \pm(b/a)x$.

73. Área Obtenga las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ con lados paralelos a los ejes coordenados. ¿Cuál es el área del rectángulo?

74. Volumen Obtenga el volumen del sólido generado al girar la región interior de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor de **(a)** el eje x, **(b)** el eje y.

75. Volumen La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen de ese sólido.

76. Tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y^2 = 4px$ desde cualquier punto de la recta $x = -p$ son perpendiculares.

77. Tangentes Determine las ecuaciones para las tangentes a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ en los puntos donde la circunferencia cruza los ejes coordenados.

78. Volumen La región acotada a la izquierda por el eje y, a la derecha por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, y arriba y abajo por las rectas $y = \pm 3$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

79. Centroide Determine el centroide de la región acotada por abajo por el eje x y por arriba por la elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

80. Área de superficies La curva $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, que es parte de la rama superior de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$, gira alrededor del eje x para generar una superficie. Obtenga el área de la superficie.

81. Propiedad reflectora de las parábolas En la figura se muestra un punto típico $P(x_0, y_0)$ en la parábola $y^2 = 4px$. La recta L es tangente a la parábola en P. El foco de la parábola está en $f(p, 0)$. El rayo L' que se extiende de P hacia la derecha es paralelo al eje x. Para comprobar que la luz que va de f a P se reflejará a lo largo de L', demostramos que β es igual a α. Establezca esta igualdad realizando los siguientes pasos.

a. Demuestre que $\tan \beta = 2p/y_0$.

b. Demuestre que $\tan \phi = y_0/(x_0 - p)$.

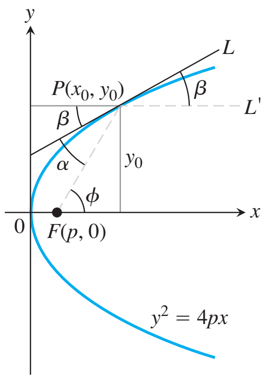
c. Use la identidad

$$\tan \alpha = \frac{\tan \phi - \tan \beta}{1 + \tan \phi \tan \beta}$$

para demostrar que $\tan \alpha = 2p/y_0$.

Puesto que α y β son agudos, $\tan \beta = \tan \alpha$ implica que $\beta = \alpha$

Esta propiedad de reflexión de las parábolas se usa en aplicaciones como faros para automóviles, radiotelescopios y antenas satelitales de televisión.



11.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

Las coordenadas polares son importantes en astronomía e ingeniería astronáutica porque las elipses, parábolas e hipérbolas que se obtienen como trayectorias del movimiento de satélites, lunas, planetas y cometas pueden describirse con una sola ecuación coordenada polar relativamente sencilla. Desarrollaremos aquí esa ecuación después de presentar el concepto de la *excentricidad* de una sección cónica. La excentricidad revela el tipo de sección cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) y el grado al cual es "aplastada" o aplanada.

Excentricidad

Aun cuando la distancia c entre el centro y el foco no aparece en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

de una elipse, podemos determinar c a partir de la ecuación $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si fijamos a y variamos c sobre el intervalo $0 \leq c \leq a$, las elipses resultantes variarán de forma. Si $c = 0$, son circunferencias (pues $a = b$) y se aplanan cuando c aumenta. Si $c = a$, los focos y vértices se traslapan y la elipse degenera en un segmento de recta. Ahora vamos a considerar la razón $e = c/a$. Esta razón también la usamos en las hipérbolas; sólo que en este caso, c es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$ en vez de $\sqrt{a^2 - b^2}$, y definimos estas razones con el término, un poco familiar, de *excentricidad*.

DEFINICIÓN

La **excentricidad** de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ $(a > 1)$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de una parábola es $e = 1$.

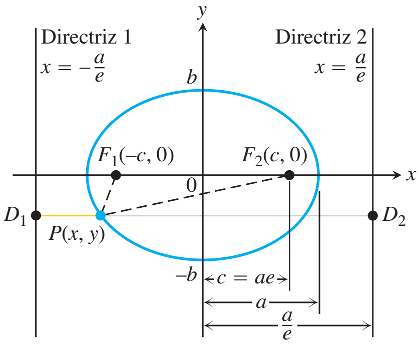


FIGURA 11.45 Focos y directrices de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. La directriz 1 corresponde al foco F_1 y la directriz 2 al foco F_2.

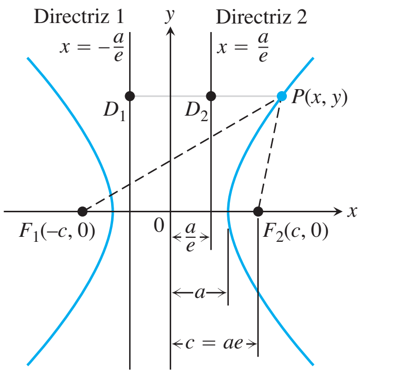


FIGURA 11.46 Focos y directrices de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. No importa donde esté P en la hipérbola, $PF_1 = e \cdot PD_1$ y $PF_2 = e \cdot PD_2$.

Mientras que una parábola tiene un foco y una directriz, cada **elipse** tiene dos focos y dos **directrices**. Éstas son las rectas perpendiculares al eje mayor a distancias $\pm a/e$ del centro. La parábola tiene la propiedad de que

$$PF = 1 \cdot PD \tag{1}$$

para cualquier punto P en ella, donde F es el foco y D es el punto más cercano a P en la directriz. Para una elipse, puede demostrarse que las ecuaciones que sustituyen a la ecuación (1) son

$$PF_1 = e \cdot PD_1, \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{2}$$

Aquí, e es la excentricidad, P es cualquier punto en la elipse, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos en las directrices más próximos a P (figura 11.45).

En ambas ecuaciones (2) la directriz y el foco deben corresponder; es decir, si usamos la distancia de P a F_1, también debemos usar la distancia de P a la directriz del mismo extremo de la elipse. La directriz $x = -a/e$ corresponde a $F_1(-c, 0)$, y la directriz $x = a/e$ corresponde a $F_2(c, 0)$.

Como en la elipse, es posible demostrar que las rectas $x = \pm a/e$ actúan como **directrices** de la **hipérbola** y que

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \qquad \text{y} \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{3}$$

Aquí, P es cualquier punto en la hipérbola, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos más próximos a P en las directrices (figura 11.46).

Tanto en la elipse como en la hipérbola, la excentricidad es la razón de la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices (porque $c/a = 2c/2a$).

$$\text{Excentricidad} = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{distancia entre los vértices}}$$

En una elipse, los focos están más cerca entre sí que los vértices, y la razón es menor que 1. En una hipérbola, los focos están más lejos entre sí que los vértices, y la razón es mayor que 1.

La ecuación "foco-directriz" $PF = e \cdot PD$ unifica la parábola, la elipse y la hipérbola de la siguiente manera: suponga que la distancia PF entre un punto P y un punto fijo F (el foco) es un múltiplo constante de su distancia a una recta fija (la directriz). Es decir, suponga que

$$\boxed{PF = e \cdot PD,} \tag{4}$$

donde e es la constante de proporcionalidad. Así, la trayectoria seguida por P es

(a) una *parábola* si $e = 1$,

(b) una *elipse* de excentricidad e si $e < 1$, y

(c) una *hipérbola* de excentricidad e si $e > 1$.

No hay coordenadas en la ecuación (4) y, cuando tratamos de expresarla con coordenadas, el resultado varía dependiendo del tamaño de e. Por lo menos eso es lo que pasa en las coordenadas cartesianas. Sin embargo, como veremos, en coordenadas polares la ecuación $PF = e \cdot PD$ se traduce en una sola ecuación sin importar el valor de e.

Dados el foco y la directriz correspondiente de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x, podemos usar las dimensiones que se especifican en la figura 11.46 para determinar e. Al conocer e podemos deducir la ecuación cartesiana para la hipérbola a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$, como en el siguiente ejemplo. Podemos encontrar las ecuaciones para elipses con centro en el origen y los focos en el eje x de un modo similar, por medio de las dimensiones que se muestran en la figura 11.45.

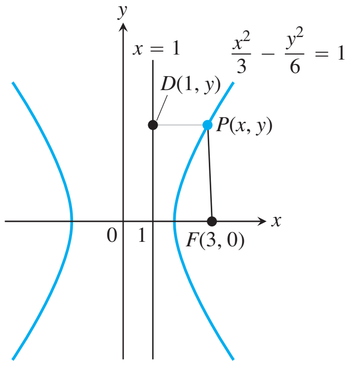


FIGURA 11.47 La hipérbola y directriz del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Determine la ecuación cartesiana para la hipérbola con centro en el origen que tiene un foco en $(3, 0)$ y la recta $x = 1$ como la directriz correspondiente.

Solución Primero usamos las dimensiones mostradas en la figura 11.46 para determinar la excentricidad de la hipérbola. El foco es

$$(c, 0) = (3, 0), \qquad \text{así que} \qquad c = 3.$$

La directriz es la recta

$$x = \frac{a}{e} = 1, \qquad \text{por lo tanto} \qquad a = e.$$

Cuando se combina con la ecuación $e = c/a$, que define la excentricidad, resulta

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \qquad \text{de manera que} \qquad e^2 = 3 \quad \text{y} \quad e = \sqrt{3}.$$

Conociendo e podemos deducir la ecuación que necesitamos a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$. En la notación de la figura 11.47, tenemos

$$\begin{aligned} PF &= e \cdot PD && \text{Ecuación (4)} \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}\,|x-1| && e = \sqrt{3} \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ 2x^2 - y^2 &= 6 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1. \end{aligned}$$

■

Ecuaciones polares

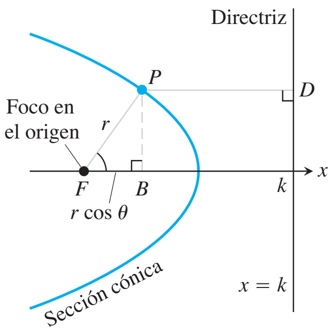


FIGURA 11.48 Si se coloca una sección cónica con su foco en el origen y la directriz perpendicular al rayo inicial y a la derecha del origen, podemos obtener su ecuación polar a partir de la ecuación foco-directriz de la cónica.

Para obtener ecuaciones polares para elipses, parábolas e hipérbolas, colocamos un foco en el origen y la directriz correspondiente a la derecha del origen a lo largo de la recta vertical $x = k$ (figura 11.48). En coordenadas polares, esto hace que

$$PF = r$$

y

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

La ecuación foco-directriz de la cónica $PF = e \cdot PD$ se convierte entonces en

$$r = e(k - r\cos\theta),$$

de la cual se puede despejar r para obtener la siguiente expresión.

Ecuación polar de una cónica con excentricidad e

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}, \qquad (5)$$

donde $x = k > 0$ es la directriz vertical.

EJEMPLO 2 Tenemos aquí ecuaciones polares de tres cónicas. Los valores de la excentricidad que identifican a la cónica son los mismos tanto para las coordenadas polares como para las coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}: && \text{elipse} && r = \frac{k}{2 + \cos\theta} \\ e &= 1: && \text{parábola} && r = \frac{k}{1 + \cos\theta} \\ e &= 2: && \text{hipérbola} && r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta} \end{aligned}$$

■

Usted puede ver variaciones de la ecuación (5), dependiendo de la ubicación de la directriz. Si la directriz es la recta $x = -k$ a la izquierda del origen (el origen es un foco), sustituimos la ecuación (5) por

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

Ahora, el denominador tiene un $(-)$ en vez de un $(+)$. Si la directriz es una de las rectas $y = k$ o $y = -k$, las ecuaciones tendrán funciones senos en vez de cosenos, como se muestra en la figura 11.49.

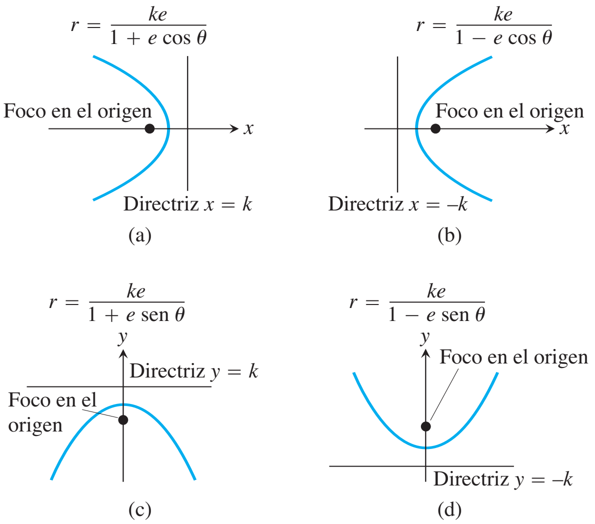


FIGURA 11.49 Ecuaciones para secciones cónicas con excentricidad $e > 0$, pero diferentes posiciones de la directriz. Las gráficas muestran una parábola, de manera que $e = 1$.

EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación para la hipérbola con excentricidad $3/2$ y directriz $x = 2$.

Solución Usamos la ecuación (5) con $k = 2$ y $e = 3/2$:

$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$

■

EJEMPLO 4 Obtenga la directriz de la parábola

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}.$$

Solución Dividimos el numerador y el denominador entre 10 para dar a la ecuación la forma estándar:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Ésta es la ecuación

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

donde $k = 5/2$ y $e = 1$. La ecuación para la directriz es $x = 5/2$. ■

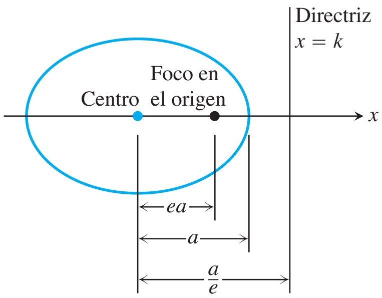


FIGURA 11.50 En una elipse con semieje mayor a, la distancia del foco a la directriz es $k = (a/e) - ea$, de manera que $ke = a(1 - e^2)$.

A partir del diagrama de la elipse de la figura 11.50, vemos que k está relacionada con la excentricidad e y el semieje mayor a por la ecuación

$$k = \frac{a}{e} - ea.$$

A partir de ésta podemos obtener $ke = a(1 - e^2)$. Sustituyendo ke en la ecuación (5) por $a(1 - e^2)$, encontramos la ecuación polar estándar de una elipse.

Ecuación polar de una elipse con excentricidad e y semieje mayor a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{6}$$

Observe que cuando $e = 0$, la ecuación (6) se convierte en $r = a$, lo cual representa una circunferencia.

Rectas

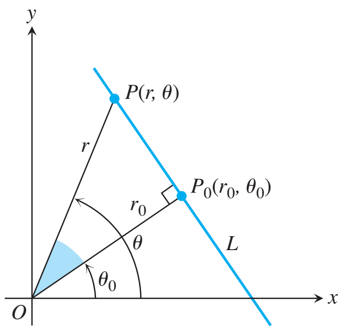


FIGURA 11.51 Podemos obtener una ecuación polar de la recta L interpretando la relación $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ en el triángulo rectángulo OP_0P.

Supongamos que la perpendicular del origen a la recta L encuentra a L en el punto $P_0(r_0, \theta_0)$, con $r_0 \geq 0$ (figura 11.51). Entonces, si $P(r, \theta)$ es otro punto cualquiera sobre L, los puntos P, P_0 y O son los vértices de un triángulo rectángulo del cual podemos obtener la relación

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0).$$

La ecuación polar estándar para rectas

Si el punto $P_0(r_0, \theta_0)$ es el pie de la perpendicular del origen a la recta L y $r_0 \geq 0$, entonces una ecuación para L es

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $\theta_0 = \pi/3$ y $r_0 = 2$, encontramos que

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\operatorname{sen}\theta = 2, \qquad \text{o} \qquad x + \sqrt{3}\,y = 4.$$

Circunferencias

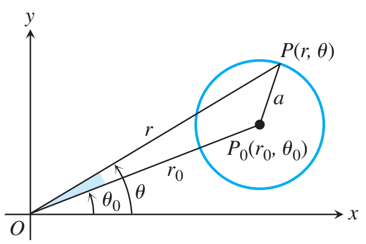


FIGURA 11.52 Podemos obtener la ecuación polar para esta circunferencia aplicando la ley de los cosenos al triángulo OP_0P.

Para obtener la ecuación polar para una circunferencia de radio a con centro en $P_0(r_0, \theta_0)$, hacemos que $P(r, \theta)$ sea un punto sobre la circunferencia y aplicamos la ley de los cosenos para el triángulo OP_0P (figura 11.52). Esto da

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0).$$

Si la circunferencia pasa por el origen, entonces $r_0 = a$ y esta ecuación se simplifica a

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r^2 = 2ar\cos(\theta - \theta_0)$$
$$r = 2a\cos(\theta - \theta_0).$$

Si el centro de la circunferencia se encuentra sobre la parte positiva del eje x, $\theta_0 = 0$ y obtenemos una mayor simplificación

$$r = 2a\cos\theta. \tag{8}$$

Si el centro de la circunferencia está en el eje y positivo, $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$, y la ecuación $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ se convierte en

$$r = 2a \operatorname{sen}\theta. \tag{9}$$

Las ecuaciones para circunferencias que pasen por el origen con centros sobre la parte negativa de los ejes x y y se pueden obtener sustituyendo r por $-r$ en las ecuaciones anteriores.

EJEMPLO 5 Aquí hay varias ecuaciones polares dadas por las ecuaciones (8) y (9) para circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros sobre los ejes x o y.

Radio	Centro (coordenadas polares)	Ecuación polar
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\operatorname{sen}\theta$
1/2	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\operatorname{sen}\theta$

Ejercicios 11.7

Elipses y excentricidad

En los ejercicios 1 a 8, determine la excentricidad de la elipse. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la elipse.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $7x^2 + 16y^2 = 112$
3. $2x^2 + y^2 = 2$
4. $2x^2 + y^2 = 4$
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$
6. $9x^2 + 10y^2 = 90$
7. $6x^2 + 9y^2 = 54$
8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

En los ejercicios 9 a 12 se indican los focos o vértices y las excentricidades de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

9. Focos: $(0, \pm 3)$
   Excentricidad: 0.5
10. Focos: $(\pm 8, 0)$
    Excentricidad: 0.2
11. Vértices: $(0, \pm 70)$
    Excentricidad: 0.1
12. Vértices: $(\pm 10, 0)$
    Excentricidad: 0.24

En los ejercicios 13 a 16 se indican los focos y las directrices correspondientes de elipses centradas en el origen del plano xy. En cada caso, use las dimensiones de la figura 11.45 para encontrar la excentricidad de la elipse. Luego determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

13. Foco: $\left(\sqrt{5}, 0\right)$
    Directriz: $x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$
14. Foco: $(4, 0)$
    Directriz: $x = \dfrac{16}{3}$
15. Foco: $(-4, 0)$
    Directriz: $x = -16$
16. Foco: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
    Directriz: $x = -2\sqrt{2}$

Hipérbolas y excentricidad

En los ejercicios 17 a 24, determine la excentricidad de la hipérbola. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la hipérbola.

17. $x^2 - y^2 = 1$
18. $9x^2 - 16y^2 = 144$
19. $y^2 - x^2 = 8$
20. $y^2 - x^2 = 4$
21. $8x^2 - 2y^2 = 16$
22. $y^2 - 3x^2 = 3$
23. $8y^2 - 2x^2 = 16$
24. $64x^2 - 36y^2 = 2304$

En los ejercicios 25 a 28 se indican las excentricidades y los vértices o focos de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación canónica de la hipérbola en coordenadas cartesianas.

25. Excentricidad: 3
    Vértices: $(0, \pm 1)$
26. Excentricidad: 2
    Vértices: $(\pm 2, 0)$
27. Excentricidad: 3
    Focos: $(\pm 3, 0)$
28. Excentricidad: 1.25
    Focos: $(0, \pm 5)$

Excentricidad y directrices

En los ejercicios 29 a 36 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen junto con la directriz correspondiente a ese foco. Obtenga la ecuación polar de cada sección cónica.

29. $e = 1$, $x = 2$
30. $e = 1$, $y = 2$
31. $e = 5$, $y = -6$
32. $e = 2$, $x = 4$
33. $e = 1/2$, $x = 1$
34. $e = 1/4$, $x = -2$
35. $e = 1/5$, $y = -10$
36. $e = 1/3$, $y = 6$

Parábolas y elipses

Trace las parábolas y las elipses de los ejercicios 37 a 44. Incluya la directriz que corresponde al foco en el origen. Marque los vértices con las coordenadas polares apropiadas y marque también los centros de las elipses.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
38. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$
39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$
40. $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$
41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\operatorname{sen}\theta}$
42. $r = \dfrac{12}{3 + 3\operatorname{sen}\theta}$
43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$
44. $r = \dfrac{4}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

Rectas

Dibuje las rectas de los ejercicios 45 a 48 y encuentre las ecuaciones cartesianas correspondientes.

45. $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

46. $r \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$

47. $r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 3$

48. $r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2$

Obtenga la ecuación polar de la forma $r \cos(\theta - \theta_0) = r_0$ para cada una de las rectas de los ejercicios 49 a 52.

49. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$

50. $\sqrt{3}x - y = 1$

51. $y = -5$

52. $x = -4$

Circunferencias

Trace las circunferencias de los ejercicios 53 a 56. Obtenga las coordenadas polares de sus centros e identifique sus radios.

53. $r = 4 \cos\theta$

54. $r = 6 \operatorname{sen}\theta$

55. $r = -2 \cos\theta$

56. $r = -8 \operatorname{sen}\theta$

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias en los ejercicios 57 a 64. Trace todas las circunferencias en el plano de coordenadas y marque sus ecuaciones cartesianas y sus coordenadas polares.

57. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$

58. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

59. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$

60. $x^2 + (y + 7)^2 = 49$

61. $x^2 + 2x + y^2 = 0$

62. $x^2 - 16x + y^2 = 0$

63. $x^2 + y^2 + y = 0$

64. $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$

Ejemplos de ecuaciones polares

T Grafique las rectas y secciones cónicas de los ejercicios 65 a 74.

65. $r = 3 \sec(\theta - \pi/3)$

66. $r = 4 \sec(\theta + \pi/6)$

67. $r = 4 \operatorname{sen}\theta$

68. $r = -2 \cos\theta$

69. $r = 8/(4 + \cos\theta)$

70. $r = 8/(4 + \operatorname{sen}\theta)$

71. $r = 1/(1 - \operatorname{sen}\theta)$

72. $r = 1/(1 + \cos\theta)$

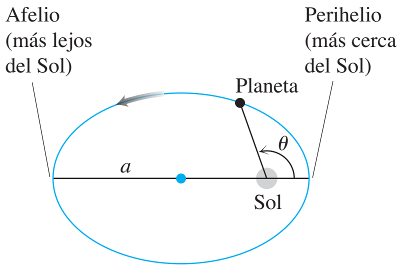
73. $r = 1/(1 + 2\operatorname{sen}\theta)$

74. $r = 1/(1 + 2\cos\theta)$

75. Perihelio y afelio Un planeta viaja alrededor de su sol en una trayectoria elíptica cuyo semieje mayor tiene una longitud a. (Véase la figura más adelante).

a. Demuestre que $r = a(1 - e)$ cuando el planeta está más cerca al sol y que $r = a(1 + e)$ cuando está más lejos del sol.

b. Use los datos de la tabla del ejercicio 76 para encontrar qué tan cerca y qué tan lejos pasa cada planeta de nuestro Sistema Solar del Sol y qué tanto se aleja de él.



76. Órbitas planetarias Use los datos de la siguiente tabla y la ecuación (6) para obtener las ecuaciones polares de las órbitas de los planetas.

Planeta	Semieje mayor (unidades astronómicas)	Excentricidad
Mercurio	0.3871	0.2056
Venus	0.7233	0.0068
Tierra	1.000	0.0167
Marte	1.524	0.0934
Júpiter	5.203	0.0484
Saturno	9.539	0.0543
Urano	19.18	0.0460
Neptuno	30.06	0.0082

Capítulo 11 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una parametrización de una curva en el plano xy? ¿Una función $y = f(x)$ siempre tiene parametrización? ¿Son únicas las parametrizaciones de una curva? Dé ejemplos.
2. Indique algunas parametrizaciones típicas de rectas, circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas. ¿Cómo podría diferir la curva parametrizada de la gráfica de su ecuación cartesiana?
3. ¿Qué es una cicloide? ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas típicas para las cicloides? ¿Qué propiedades físicas hacen importantes a las cicloides?
4. ¿Cuál es la fórmula de la pendiente dy/dx de una curva parametrizada $x = f(t), y = g(t)$? ¿Cuándo se aplica la fórmula? ¿Cuándo puede uno esperar encontrar d^2y/dx^2 también? Dé ejemplos.
5. ¿Cómo puede encontrar el área acotada por una curva parametrizada y uno de los ejes coordenados?
6. ¿Cómo se obtiene la longitud de una curva parametrizada suave $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$? ¿Qué tiene que ver suavidad con la longitud? ¿Qué más necesita saber acerca de la parametrización para obtener la longitud de la curva? Dé ejemplos.
7. ¿Cuál es la función de longitud de arco para una curva parametrizada suave? ¿Cuál es su diferencial de longitud de arco?
8. ¿En qué condiciones puede encontrar el área de la superficie generada por la rotación de una curva $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$, alrededor del eje x? ¿Y alrededor del eje y? Dé ejemplos.
9. ¿Cómo obtiene el centroide de una curva suave parametrizada $x = f(t), y = g(t), a \le t \le b$? Dé ejemplos.
10. ¿Qué son las coordenadas polares? ¿Cuáles ecuaciones relacionan las coordenadas polares con las coordenadas cartesianas? ¿Por qué desearía cambiar de un sistema coordenado al otro?
11. ¿Qué consecuencias tiene la falta de unicidad de las coordenadas polares para graficar? Dé un ejemplo.
12. ¿Cómo grafica las ecuaciones en coordenadas polares? Incluya en su discusión la simetría, la pendiente, el comportamiento en el origen y el uso de gráficas cartesianas. Dé ejemplos.
13. ¿Cómo obtiene el área de una región $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé ejemplos.

14. ¿En qué condiciones puede encontrar la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé el ejemplo de un cálculo típico.

15. ¿Qué es una parábola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas para las parábolas cuyos vértices están en el origen y sus focos están en los ejes coordenados? ¿Puede encontrar el foco y la directriz de tal parábola a partir de su ecuación?

16. ¿Qué es una elipse? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas para las elipses con centro en el origen y focos en uno de los ejes coordenados? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales elipses a partir de su ecuación?

17. ¿Qué es una hipérbola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas para las hipérbolas con centro en el origen y focos en uno de los ejes coordenados? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales hipérbolas a partir de su ecuación?

18. ¿Qué es la excentricidad de una sección cónica? ¿Cómo clasificaría las cónicas de acuerdo con su excentricidad? ¿Cómo están relacionadas la forma de una elipse y su excentricidad?

19. Explique la ecuación $PF = e \cdot PD$.

20. ¿Cuáles son las ecuaciones estándar para rectas y secciones cónicas en coordenadas polares? Dé ejemplos.

Capítulo 11 Ejercicios de práctica

Identificación de ecuaciones paramétricas en el plano

En los ejercicios 1 a 6 se incluyen las ecuaciones paramétricas y los intervalos del parámetro para el movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula, obteniendo para ello una ecuación cartesiana. Grafique la ecuación cartesiana e indique la dirección del movimiento y la parte de la trayectoria trazada por la partícula.

1. $x = t/2, \quad y = t + 1; \quad -\infty < t < \infty$
2. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - \sqrt{t}; \quad t \geq 0$
3. $x = (1/2)\tan t, \quad y = (1/2)\sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
4. $x = -2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\, t; \quad 0 \leq t \leq \pi$
5. $x = -\cos t, \quad y = \cos^2 t; \quad 0 \leq t \leq \pi$
6. $x = 4\cos t, \quad y = 9\,\text{sen}\, t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Obtención de ecuaciones paramétricas y rectas tangentes

7. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula en el plano xy que traza la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ una sola vez en sentido contrario a las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de hacerlo).
8. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del desplazamiento de una partícula que inicia en el punto $(-2, 0)$ en el plano xy y traza la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tres veces en el sentido de las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de hacerlo).

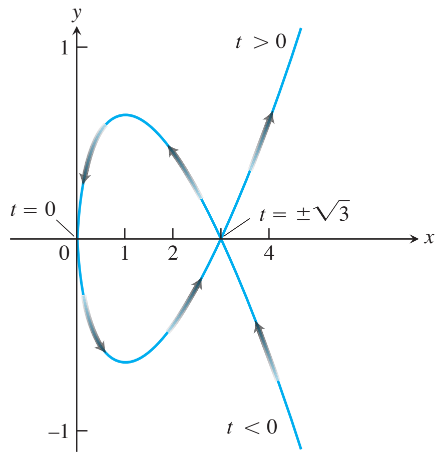
En los ejercicios 9 y 10, determine la ecuación para la recta en el plano xy que es tangente a una curva en el punto correspondiente al valor dado de t. También determine el valor de d^2y/dx^2 en ese punto.

9. $x = (1/2)\tan t, \quad y = (1/2)\sec t; \quad t = \pi/3$
10. $x = 1 + 1/t^2, \quad y = 1 - 3/t; \quad t = 2$
11. Elimine el parámetro para expresar la curva en la forma $y = f(x)$.
   a. $x = 4t^2, \quad y = t^3 - 1$ **b.** $x = \cos t, \quad y = \tan t$
12. Obtenga las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas.
   a. Recta que pasa por $(1, -2)$ con pendiente 3
   b. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
   c. $y = 4x^2 - x$
   d. $9x^2 + 4y^2 = 36$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 13 a 19.

13. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \leq x \leq 4$
14. $x = y^{2/3}, \quad 1 \leq y \leq 8$
15. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \leq x \leq 32$
16. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \leq y \leq 2$
17. $x = 5\cos t - \cos 5t, \quad y = 5\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 5t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$
18. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$
19. $x = 3\cos\theta, \quad y = 3\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$
20. Obtenga la longitud del lazo acotado por $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ que se muestra en la figura. El lazo inicia en $t = -\sqrt{3}$ y termina en $t = \sqrt{3}$.



Áreas de superficies

Obtenga las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas de los ejemplos 21 y 22 alrededor de los ejes indicados.

21. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{5}; \quad$ eje x
22. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \leq t \leq 1; \quad$ eje y

Ecuaciones polares a cartesianas

Trace las rectas de los ejercicios 23 a 28. También determine la ecuación cartesiana para cada recta.

23. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$
24. $r\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
25. $r = 2\sec\theta$
26. $r = -\sqrt{2}\sec\theta$
27. $r = -(3/2)\csc\theta$
28. $r = \left(3\sqrt{3}\right)\csc\theta$

Determine las ecuaciones cartesianas para las circunferencias de los ejercicios 29 a 32. Trace cada circunferencia en el plano coordenado y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

29. $r = -4 \operatorname{sen} \theta$ **30.** $r = 3\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta$

31. $r = 2\sqrt{2} \cos \theta$ **32.** $r = -6 \cos \theta$

Ecuaciones cartesianas a polares

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias de los ejercicios 33 a 36. Trace cada circunferencia en el plano coordenado y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

33. $x^2 + y^2 + 5y = 0$ **34.** $x^2 + y^2 - 2y = 0$

35. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ **36.** $x^2 + y^2 + 4x = 0$

Gráficas en coordenadas polares

Grafique las regiones definidas por las desigualdades en coordenadas polares de los ejercicios 37 y 38.

37. $0 \le r \le 6 \cos \theta$ **38.** $-4 \operatorname{sen} \theta \le r \le 0$

Relacione cada gráfica de los ejercicios 39 a 46 con la ecuación apropiada eligiendo entre los incisos (a) a l). Hay más ecuaciones que gráficas, de manera que algunas ecuaciones no serán emparejadas.

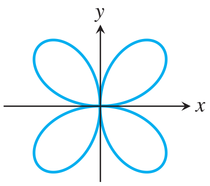
a. $r = \cos 2\theta$ **b.** $r \cos \theta = 1$ **c.** $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

d. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **e.** $r = \theta$ **f.** $r^2 = \cos 2\theta$

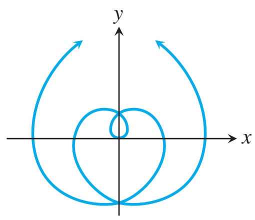
g. $r = 1 + \cos \theta$ **h.** $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$ **i.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

j. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ **k.** $r = -\operatorname{sen} \theta$ **l.** $r = 2\cos\theta + 1$

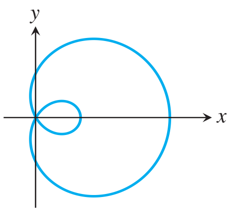
39. Rosa de cuatro pétalos



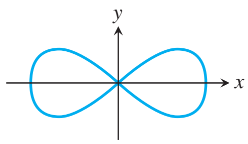
40. Espiral



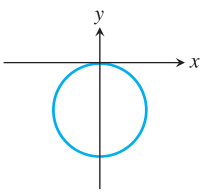
41. Limaçon



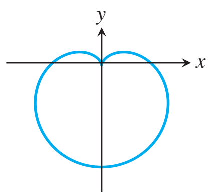
42. Lemniscata



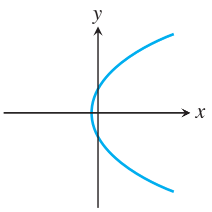
43. Circunferencia



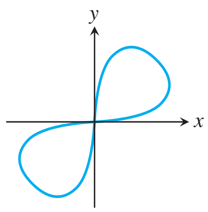
44. Cardioide



45. Parábola



46. Lemniscata



Área en coordenadas polares

Determine las áreas de las regiones en el plano de coordenadas polares descritas en los ejercicios 47 a 50.

47. Acotada por el limaçon $r = 2 - \cos \theta$

48. Acotada por un pétalo de la rosa de tres pétalos $r = \operatorname{sen} 3\theta$

49. Adentro de la "figura de un ocho" $r = 1 + \cos 2\theta$ y afuera de la circunferencia $r = 1$

50. Adentro de la cardioide $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$ y afuera de la circunferencia $r = 2 \operatorname{sen} \theta$

Longitud en coordenadas polares

Obtenga las longitudes de las curvas dadas por las ecuaciones en coordenadas polares de los ejercicios 51 a 54.

51. $r = -1 + \cos \theta$

52. $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

53. $r = 8 \operatorname{sen}^3 (\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$

54. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

Gráficas de secciones cónicas

Trace las parábolas de los ejercicios 55 a 58. Incluya el foco y la directriz en todos los dibujos.

55. $x^2 = -4y$ **56.** $x^2 = 2y$

57. $y^2 = 3x$ **58.** $y^2 = -(8/3)x$

Determine las excentricidades de las elipses e hipérbolas de los ejercicios 59 a 62. Incluya los focos, los vértices y las asíntotas (cuando sea adecuado) en su dibujo.

59. $16x^2 + 7y^2 = 112$ **60.** $x^2 + 2y^2 = 4$

61. $3x^2 - y^2 = 3$ **62.** $5y^2 - 4x^2 = 20$

En los ejercicios 63 a 68 se presentan ecuaciones para secciones cónicas y se indican las unidades que se desplaza la curva hacia arriba o hacia abajo y hacia la izquierda o hacia la derecha. Determine la ecuación para la nueva sección cónica y determine los focos, los vértices, los centros y las asíntotas nuevos, cuando sea apropiado. Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

63. $x^2 = -12y$, derecha 2, arriba 3

64. $y^2 = 10x$, izquierda 1/2, abajo 1

65. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, izquierda 3, abajo 5

66. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$, derecha 5, arriba 12

67. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, derecha 2, arriba $2\sqrt{2}$

68. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, izquierda 10, abajo 3

Identificación de secciones cónicas

Complete los cuadrados para identificar las secciones cónicas en los ejercicios 69 a 76. Obtenga los focos, los vértices, los centros y las asíntotas (cuando sea apropiado). Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

69. $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$ **70.** $4x^2 - y^2 + 4y = 8$

71. $y^2 - 2y + 16x = -49$ **72.** $x^2 - 2x + 8y = -17$

73. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y = -1$

74. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

75. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **76.** $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 1$

Cónicas en coordenadas polares

Grafique las secciones cónicas cuyas ecuaciones en coordenadas polares se indican en los ejercicios 77 a 80. Dé las coordenadas polares de los vértices y, en el caso de las elipses, también para los centros.

77. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ **78.** $r = \dfrac{8}{2 + \cos\theta}$

79. $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$ **80.** $r = \dfrac{12}{3 + \operatorname{sen}\theta}$

En los ejercicios 81 a 84 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz para ese foco. Obtenga una ecuación polar para cada sección cónica.

81. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$ **82.** $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

83. $e = 1/2, \quad r\operatorname{sen}\theta = 2$ **84.** $e = 1/3, \quad r\operatorname{sen}\theta = -6$

Teoría y ejemplos

85. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor de **(a)** el eje x, **(b)** el eje y.

86. La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

87. La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

en la ecuación cartesiana

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2kex - k^2 = 0.$$

88. Espirales de Arquímedes La gráfica de una ecuación de la forma $r = a\theta$, donde a es una constante diferente de cero, se denomina *espiral de Arquímedes*. ¿Existe algo especial acerca del ancho de las vueltas sucesivas de una espiral?

Capítulo 11 Ejercicios adicionales y avanzados

Determinación de secciones cónicas

1. Determine la ecuación para la parábola con foco en (4, 0) y directriz $x = 3$. Trace la parábola junto con su vértice, foco y directriz.

2. Obtenga el foco, el vértice y la directriz de la parábola

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$$

3. Determine la ecuación para la curva que traza el punto $P(x, y)$ si la distancia de P al vértice de la parábola $x^2 = 4y$ es el doble de la distancia de P al foco. Identifique la curva.

4. Un segmento de recta de longitud $a + b$ va del eje x al eje y. El punto P en el segmento está a a unidades de uno de los extremos y a b unidades del otro extremo. Demuestre que P traza una elipse cuando los extremos del segmento se deslizan a lo largo de los ejes.

5. Los vértices de una elipse de excentricidad 0.5 están en los puntos $(0, \pm 2)$. ¿Dónde se encuentran los focos?

6. Obtenga la ecuación para la elipse de excentricidad $2/3$ que tiene a la recta $x = 2$ como una directriz y el punto (4, 0) como el foco correspondiente.

7. El foco de una hipérbola está en el punto $(0, -7)$ y la directriz correspondiente es la recta $y = -1$. Determine la ecuación para la hipérbola si su excentricidad es **(a)** 2, **(b)** 5.

8. Obtenga una ecuación para la hipérbola con focos en $(0, -2)$ y $(0, 2)$ que pasa por el punto (12, 7).

9. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la elipse.

10. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la hipérbola.

Ecuaciones y desigualdades

¿Qué puntos en el plano xy satisfacen las ecuaciones y desigualdades en los ejercicios 11 a 16? Dibuje una figura para cada ejercicio.

11. $(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$

12. $(x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

13. $(x^2/9) + (y^2/16) \le 1$

14. $(x^2/9) - (y^2/16) \le 1$

15. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) \le 0$

16. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) > 0$

Coordenadas polares

17. **a.** Obtenga la ecuación en coordenadas polares para la curva

$$x = e^{2t}\cos t, \quad y = e^{2t}\operatorname{sen} t; \quad -\infty < t < \infty.$$

b. Determine la longitud de la curva de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

18. Obtenga la longitud de la curva $r = 2\operatorname{sen}^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le 3\pi$, en el plano de coordenadas polares.

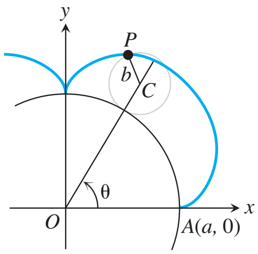
En los ejercicios 19 a 22 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz de ese foco. Obtenga la ecuación polar para cada sección cónica.

19. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$ **20.** $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

21. $e = 1/2, \quad r\operatorname{sen}\theta = 2$ **22.** $e = 1/3, \quad r\operatorname{sen}\theta = -6$

Teoría y ejemplos

23. Epicicloides Cuando un círculo rueda por fuera, a lo largo de una circunferencia de otro círculo fijo, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *epicicloide*, como se muestra en la figura. Suponga que el centro del círculo fijo es el origen O y que tiene radio a.



Sea b el radio del círculo rodante y sea $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que traza la curva. Determine las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, usando como parámetro el ángulo θ que forma el eje x positivo con la recta que pasa por los centros de los círculos.

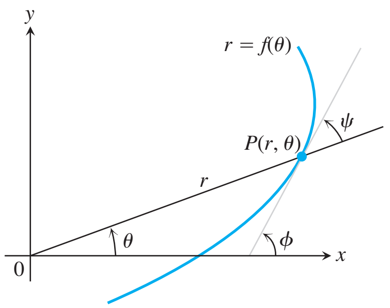
24. Obtenga el centroide de la región acotada por el eje x y el arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

El ángulo entre el radio vector y la recta tangente a una curva de coordenadas polares En coordenadas cartesianas, cuando queremos analizar la dirección de una curva en un punto, usamos el ángulo ϕ medido en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x hasta la recta tangente. En coordenadas polares, es más conveniente calcular el ángulo ψ del *radio vector* a la recta tangente (véase la siguiente figura). El ángulo ϕ se puede calcular entonces a partir de la relación

$$\phi = \theta + \psi, \tag{1}$$

la cual obtenemos de la aplicación del teorema del ángulo exterior al triángulo de la figura



Suponga que la ecuación para la curva está dada en la forma $r = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función derivable de θ. Entonces

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

son funciones derivables de θ con

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}. \tag{3}$$

Puesto que $\psi = \phi - \theta$ de la ecuación (1),

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}.$$

Además,

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

debido a que $\tan\phi$ es la pendiente de la curva en P. También,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

De aquí que

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}}. \tag{4}$$

El numerador de la última expresión en la ecuación (4) se obtiene de las ecuaciones (2) y (3)

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

De manera similar, el denominador es

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}.$$

Cuando sustituimos estas ecuaciones en (4), obtenemos

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \tag{5}$$

Ésta es la ecuación que usamos para obtener ψ como una función de θ.

25. Tomando como referencia la figura, demuestre que el ángulo β entre las tangentes de dos curvas en el punto de intersección se puede obtener de la fórmula

$$\tan\beta = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2\tan\psi_1}. \tag{6}$$

¿Cuándo se intersecarán las dos curvas en ángulos rectos?

26. Obtenga el valor de la tangente de ψ para la curva $r = \operatorname{sen}^4(\theta/4)$.

27. Obtenga el ángulo entre el radio vector a la curva $r = 2a\operatorname{sen} 3\theta$ y su tangente cuando $\theta = \pi/6$.

T **28. a.** Grafique la espiral hiperbólica $r\theta = 1$. ¿Qué parece ocurrirle a ψ cuando la espiral da vuelta alrededor del origen?

b. Confirme su descubrimiento del inciso (a) de manera analítica.

29. Las circunferencias $r = \sqrt{3}\cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$ se intersecan en el punto $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$. Demuestre que sus tangentes son perpendiculares en este punto.

30. Obtenga el ángulo en el cual la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$ cruza el rayo $\theta = \pi/2$.

Capítulo 11 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulo Mathematica/Maple:

Rastreo por radar de un objeto en movimiento
Parte I: Convierta coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuaciones paramétricas y polares de un patinador artístico
Parte I: Visualice posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento definido por medio de ecuaciones paramétricas.
Parte II: Determine y analice las ecuaciones de movimiento de un patinador artístico que traza una curva polar.

Apéndices

A.1 Los números reales y las rectas reales

Esta sección revisa los números reales, las desigualdades, los intervalos y los valores absolutos.

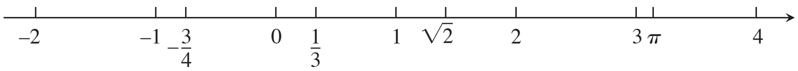
Números reales

La mayor parte del cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** son números que pueden expresarse como decimales, tales como

$$-\frac{3}{4} = -0.75000\ldots$$
$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Los puntos suspensivos … en cada caso indican que la sucesión de dígitos decimales continúa indefinidamente. Toda expansión decimal concebible representa un número real, aunque algunos números tienen dos representaciones. Por ejemplo, los decimales infinitos .999… y 1.000… representan el mismo número real 1. Un enunciado similar se cumple para cualquier número con una sucesión infinita de nueves.

Los números reales pueden representarse de manera geométrica como puntos en una recta numérica denominada **recta real**.



Reglas para desigualdades

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ a $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Caso especial: $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6. Si a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

El símbolo $\mathbb{R}$ denota el sistema de los números reales o, de manera equivalente, la recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales caen en tres categorías: propiedades algebraicas, propiedades de orden y completez. Las **propiedades algebraicas** indican que los números reales pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse (excepto entre 0) para producir más números reales bajo las reglas usuales de la aritmética. *Nunca se puede dividir entre* 0.

Las **propiedades de orden** de los números reales se presentan en el apéndice 6. Las reglas útiles de la izquierda pueden deducirse a partir de ellas; el símbolo $\Rightarrow$ significa "implica".

Observe las reglas para la multiplicación de una desigualdad por un número. Al multiplicar por un número positivo se conserva la desigualdad; al multiplicar por un número negativo la desigualdad se invierte. Además, para números con el mismo signo, los recíprocos invierten el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, $2 < 5$, pero $-2 > -5$ y $1/2 > 1/5$.

La **propiedad de completez** del sistema de los números reales es más profunda y difícil de definir de manera precisa. Sin embargo, la propiedad es esencial para la idea de límite (capítulo 2). De manera informal, eso dice que existen suficientes números reales para "completar" la recta real, en el sentido de que no existen "agujeros" o "huecos" en ella. Muchos teoremas del cálculo no se cumplirían si el sistema de los números reales no fuera completo. El tema se resuelve mejor en un curso más avanzado, pero el apéndice 6 sugiere lo que está incluido y cómo se construyen los números reales.

Distinguimos tres subconjuntos especiales de números reales.

1. Los **números naturales**, a saber, 1, 2, 3, 4, …
2. Los **enteros**, a saber, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
3. Los **números racionales**, aquellos números que pueden expresarse en la forma de una fracción m/n, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Algunos ejemplos son

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \qquad \text{y} \qquad 57 = \frac{57}{1}.$$

Los números racionales son precisamente los números reales con desarrollo decimal que

(a) terminan (es decir, finalizan con una cadena infinita de ceros); por ejemplo,

$$\frac{3}{4} = 0.75000\ldots = 0.75 \qquad \text{o bien}$$

(b) se repiten (terminan con un bloque de dígitos que se repiten una y otra vez); por ejemplo,

$$\frac{23}{11} = 2.090909\ldots = 2.\overline{09}$$

La barra indica el bloque de dígitos que se repiten.

Un desarrollo decimal que termina es un tipo especial de un decimal que se repite, ya que termina con ceros que se repiten.

El conjunto de los números racionales tienen todas las propiedades algebraicas y de orden, pero carecen de la propiedad de completez. Por ejemplo, no existe número racional cuyo cuadrado sea 2; existe un "agujero" en la recta racional donde debería estar $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se denominan **números irracionales**. Se caracterizan por desarrollos decimales que no terminan y no se repiten. Algunos ejemplos son π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\log_{10} 3$. Como cada desarrollo decimal representa un número real, es evidente que existe una cantidad infinita de números irracionales. Tanto los números racionales como los irracionales se encuentran arbitrariamente cerca de algún punto en la recta real.

La notación de conjuntos es muy útil para especificar un subconjunto particular de números reales. Un conjunto es una colección de objetos, y éstos son los **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, mientras que $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si S y T son conjuntos, entonces $S \cup T$ es su **unión**, la cual consiste en todos los elementos que pertenecen a S o a T (o a los dos, S y T). La **intersección** $S \cap T$ consiste en todos los elementos que pertenecen tanto a S como a T. El **conjunto vacío** Ø es el conjunto que no contiene elementos. Por ejemplo, la intersección de los números racionales y los números irracionales es el conjunto vacío.

Algunos conjuntos pueden describirse *listando* a s elementos entre llaves "{}". Por ejemplo, el conjunto A, que consiste de los números naturales (o enteros positivos) menores que 6, puede expresarse como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El conjunto de todos los enteros se escribe como

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Otra forma de describir un conjunto es escribir entre llaves una regla que genere a todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 6\}$$

es el conjunto de enteros positivos menores que 6.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina un **intervalo** si contiene al menos dos números y a todos los números reales que están entre cualesquiera dos de estos elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, al igual que el conjunto de todas las x, tales que $-2 \leq x \leq 5$. El conjunto de todos los números reales diferentes de cero no es un intervalo; ya que 0 no está allí, el conjunto no contiene a todo número real entre -1 y 1 (por ejemplo).

De manera geométrica, los intervalos corresponden a rayos y segmentos de recta de la recta real, junto con la recta real misma. Los intervalos de números corresponden a segmentos de recta que son **intervalos finitos**; los intervalos que corresponden a rayos y la recta real son **intervalos infinitos**.

Se dice que un intervalo finito es **cerrado** si contiene a los dos puntos extremos, **semiabierto** si contiene un punto extremo, pero no el otro, y **abierto** si no contiene a los puntos extremos. Los puntos extremos también se denominan **puntos frontera**; éstos constituyen la **frontera** del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son **puntos interiores** y juntos constituyen el **interior** del intervalo. Los intervalos infinitos son cerrados si contienen un extremo finito; de otra forma, se denominan abiertos. La recta real $\mathbb{R}$ es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado. La tabla A.1 resume los diferentes tipos de intervalos.

TABLA A.1 Tipos de intervalos

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Dibujo
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Abierto	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Cerrado	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Semiabierto	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Semiabierto	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Abierto	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Cerrado	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Abierto	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Cerrado	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (el conjunto de todos los números reales)	Abierto y cerrado a la vez.	

Resolución de desigualdades

El proceso de determinar el intervalo o los intervalos de números que satisfacen una desigualdad en x se denomina **resolución** de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes desigualdades y muestre sus conjuntos solución en la recta real.

(a) $2x - 1 < x + 3$ **(b)** $-\dfrac{x}{3} < 2x + 1$ **(c)** $\dfrac{6}{x - 1} \geq 5$

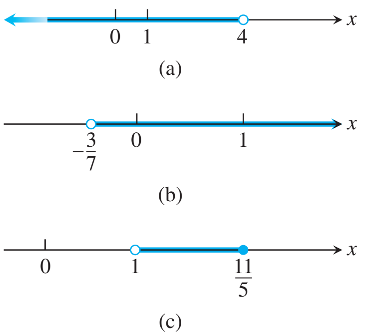


FIGURA A.1 Conjuntos solución para las desigualdades del ejemplo 1.

Solución

(a)

$$
\begin{aligned}
2x - 1 &< x + 3 \\
2x &< x + 4 && \text{Sumar 1 a ambos lados} \\
x &< 4 && \text{Restar } x \text{ de ambos lados.}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$ (figura A.1a).

(b)

$$
\begin{aligned}
-\frac{x}{3} &< 2x + 1 \\
-x &< 6x + 3 && \text{Multiplicar ambos lados por 3.} \\
0 &< 7x + 3 && \text{Sumar } x \text{ a ambos lados.} \\
-3 &< 7x && \text{Restar 3 de ambos lados.} \\
-\frac{3}{7} &< x && \text{Dividir entre 7.}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-3/7, \infty)$ (figura A.1b).

(c) La desigualdad $6/(x - 1) \geq 5$ se cumple sólo si $x > 1$, ya que de otra forma $6/(x - 1)$ sería negativo o estaría indefinido. Por lo tanto, $(x - 1)$ es positivo y la desigualdad se preservará si multiplicamos ambos lados por $(x - 1)$; de esta forma, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{x - 1} &\geq 5 \\
6 &\geq 5x - 5 && \text{Multiplicar ambos lados por } (x - 1). \\
11 &\geq 5x && \text{Sumar 5 a ambos lados.} \\
\frac{11}{5} &\geq x. && \text{O bien } x \leq \frac{11}{5}.
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(1, 11/5]$ (figura A.1c). ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, denotado por $|x|$, se define mediante la fórmula

$$
|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}
$$

EJEMPLO 2 $|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$ ■

De forma geométrica, el valor absoluto de x es la distancia de x a 0 en la recta de los números reales. Puesto que las distancias siempre son positivas o cero, vemos que $|x| \geq 0$ para todo número real x, y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Además,

$$
|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ y } y
$$

en la recta real (figura A.2).

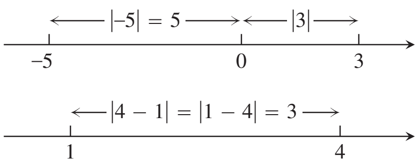


FIGURA A.2 Los valores absolutos dan las distancias entre puntos en la recta numérica.

Como el símbolo $\sqrt{a}$ siempre denota a la raíz cuadrada *no negativa* de a, una definición alternativa de $|x|$ es

$$
|x| = \sqrt{x^2}.
$$

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No escriba $\sqrt{a^2} = a$ a menos que sepa que $a \geq 0$.

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades. (En los ejercicios se le pedirá que demuestre tales propiedades).

Propiedades del valor absoluto

1. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Un número y su inverso aditivo o negativo tienen el mismo valor absoluto.
2. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3. $\left\lvert \dfrac{a}{b}\right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4. $\lvert a + b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	La **desigualdad del triángulo**. El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual a la suma de sus valores absolutos.

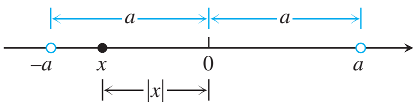


FIGURA A.3 $\lvert x\rvert < a$ significa que x está entre $-a$ y a.

Valores absolutos e intervalos

Si a es cualquier número positivo, entonces

5. $\lvert x\rvert = a \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm a$

6. $\lvert x\rvert < a \quad\Leftrightarrow\quad -a < x < a$

7. $\lvert x\rvert > a \quad\Leftrightarrow\quad x > a$ o $x < -a$

8. $\lvert x\rvert \le a \quad\Leftrightarrow\quad -a \le x \le a$

9. $\lvert x\rvert \ge a \quad\Leftrightarrow\quad x \ge a$ o $x \le -a$

Observe que $\lvert -a\rvert \ne -\lvert a\rvert$. Por ejemplo, $\lvert -3\rvert = 3$, mientras que $-\lvert 3\rvert = -3$. Si a y b difieren en el signo, entonces $\lvert a + b\rvert$ es menor que $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$. En los demás casos, $\lvert a + b\rvert$ es igual a $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$. Las barras de valor absoluto en expresiones como $\lvert -3 + 5\rvert$ funcionan como paréntesis. Hacemos la aritmética dentro *antes* de tomar el valor absoluto.

EJEMPLO 3

$$\begin{aligned}
\lvert -3 + 5\rvert &= \lvert 2\rvert = 2 < \lvert -3\rvert + \lvert 5\rvert = 8\\
\lvert 3 + 5\rvert &= \lvert 8\rvert = \lvert 3\rvert + \lvert 5\rvert\\
\lvert -3 - 5\rvert &= \lvert -8\rvert = 8 = \lvert -3\rvert + \lvert -5\rvert
\end{aligned}$$

■

La desigualdad $\lvert x\rvert < a$ dice que la distancia de x a 0 es menor que el número positivo a. Esto significa que x debe estar entre $-a$ y a, como se observa en la figura A.3.

Todas las proposiciones en la tabla son consecuencia de la definición del valor absoluto y con frecuencia son útiles cuando se resuelven ecuaciones o desigualdades que incluyen valores absolutos.

Los matemáticos comúnmente utilizan el símbolo $\Leftrightarrow$ para denotar la relación lógica "si y sólo si". También significa "implica y es implicado por".

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $\lvert 2x - 3\rvert = 7$.

Solución Por la propiedad 5, $2x - 3 = \pm 7$, por lo que hay dos posibilidades:

$$\begin{array}{lll}
2x - 3 = 7 & 2x - 3 = -7 & \text{Ecuaciones equivalentes sin valor absoluto}\\
2x = 10 & 2x = -4 & \text{Resolver de la forma usual.}\\
x = 5 & x = -2 &
\end{array}$$

Las soluciones de $\lvert 2x - 3\rvert = 7$ son $x = 5$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $\left\lvert 5 - \dfrac{2}{x}\right\rvert < 1$.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\lvert 5 - \frac{2}{x}\right\rvert < 1 &\Leftrightarrow -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 && \text{Propiedad 6.}\\
&\Leftrightarrow -6 < -\frac{2}{x} < -4 && \text{Restar 5.}\\
&\Leftrightarrow 3 > \frac{1}{x} > 2 && \text{Multiplicar por } -\tfrac{1}{2}.\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. && \text{Tomar recíprocos.}
\end{aligned}$$

Observe cómo se utilizaron aquí las diferentes reglas para las desigualdades. Al multiplicar por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Así también ocurre al tomar recíprocos de una desigualdad en la que ambos lados son positivos. La desigualdad original se cumple si y sólo si $(1/3) < x < (1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

Ejercicios A.1

1. Exprese $1/9$ como un decimal que se repite; para ello, utilice una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las representaciones decimales de $2/9$, $3/9$, $8/9$, $9/9$?

2. Si $2 < x < 6$, ¿cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente verdaderas? ¿Cuáles no necesariamente son verdaderas?

   a. $0 < x < 4$ **b.** $0 < x - 2 < 4$

   c. $1 < \frac{x}{2} < 3$ **d.** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

   e. $1 < \frac{6}{x} < 3$ **f.** $|x - 4| < 2$

   g. $-6 < -x < 2$ **h.** $-6 < -x < -2$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva las desigualdades y muestre los conjuntos solución en la recta real.

3. $-2x > 4$
4. $5x - 3 \leq 7 - 3x$
5. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
6. $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

Resuelva las ecuaciones en los ejercicios 7 a 9.

7. $|y| = 3$
8. $|2t + 5| = 4$
9. $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

En los ejercicios 10 a 17, resuelva las desigualdades expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Además, muestre cada conjunto en la recta real.

10. $|x| < 2$
11. $|t - 1| \leq 3$
12. $|3y - 7| < 4$
13. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$
14. $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$
15. $|2s| \geq 4$
16. $|1 - x| > 1$
17. $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \geq 1$

En los ejercicios 18 a 21, resuelva las desigualdades. Exprese los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos y muéstrelos en la recta real. Utilice el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ cuando sea apropiado.

18. $x^2 < 2$
19. $4 < x^2 < 9$
20. $(x - 1)^2 < 4$
21. $x^2 - x < 0$
22. No caiga en el error de pensar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales a es verdadera esta ecuación? ¿Para cuáles números reales es falsa?
23. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.
24. **Una demostración de la desigualdad del triángulo** Dé la razón que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad del triángulo.

$$
\begin{aligned}
|a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a + b| &\leq |a| + |b| && (4)
\end{aligned}
$$

25. Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para cualquier número a y b.
26. Si $|x| \leq 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decir acerca de x?
27. Grafique la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$.
28. Demuestre que para cualquier número a, se cumple $|-a| = |a|$.
29. Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.
30. **a.** Si b es un número real distinto de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.

    b. Demuestre que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para cualesquiera números reales a y $b \neq 0$.

A.2 Inducción matemática

Es posible demostrar que muchas fórmulas como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2},$$

se cumplen para todo entero positivo n aplicando un axioma denominado *principio de inducción matemática*. Una demostración que utilice tal axioma se denomina *demostración mediante inducción matemática* o *demostración por inducción*.

Los pasos para demostrar una fórmula por inducción son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se cumple para $n = 1$.
2. Demuestre que si la fórmula se cumple para cualquier entero positivo $n = k$, entonces también se cumple para el entero que sigue, $n = k + 1$.

El axioma de inducción dice que una vez que los pasos se han completado, la fórmula se cumple para todos los enteros positivos n. Por el paso 1 se cumple para $n = 1$. Por el paso 2 se cumple para $n = 2$; por lo tanto, por el paso 2 también para $n = 3$ y nuevamente, por el paso 2, para $n = 4$ y así sucesivamente. Si la primera ficha de dominó cae y la k-ésima ficha golpea a la $(k + 1)$-ésima para que caiga, entonces todas las fichas de dominó caerán.

Desde otro punto de vista, suponga que tiene una sucesión de proposiciones $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, una para cada entero positivo. Piense en que es posible demostrar que al suponer que es verdadera cualquiera de las proposiciones se implica que la siguiente proposición en la línea es verdadera. Suponga que también podemos demostrar que S_1 es verdadera. Entonces concluiríamos que las proposiciones son verdaderas a partir de S_1.

EJEMPLO 1 Utilice inducción matemática para probar que para todo entero positivo n,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solución Realizamos la demostración llevando a cabo los dos pasos anteriores.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

2. Si la fórmula se cumple para $n = k$, ¿también se cumple para $n = k + 1$? La respuesta es sí, como demostramos ahora. Si

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

La última expresión en esta cadena de igualdades es la expresión $n(n+1)/2$ para $n = (k + 1)$.

Ahora, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula original para todos los enteros positivos n. ■

En el ejemplo 4 de la sección 5.2 dimos otra demostración para la fórmula que da la suma de los primeros n enteros. Sin embargo, la prueba mediante inducción matemática es más general. Puede utilizarse para determinar las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros (ejercicios 9 y 10). A continuación se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO 2 Demuestre mediante inducción matemática que para todos los enteros positivos n,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Solución Hacemos la demostración llevando a cabo los dos pasos de la inducción matemática.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$, ya que

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}.$$

2. Si

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k},$$

entonces

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por lo tanto, la fórmula original se cumple para $n = (k + 1)$ siempre que se satisfaga para $n = k$.

Ahora, con estos pasos verificados, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula para todo entero positivo n. ■

Otros enteros iniciales

En vez de iniciar en $n = 1$, algunos argumentos de inducción empiezan en otro entero. Los pasos para ello son los siguientes.

1. Verifique que la fórmula se cumpla para $n = n_1$ (el primer entero apropiado).
2. Demuestre que si la fórmula se cumple para cualquier entero $n = k \geq n_1$, también se cumple para $n = (k + 1)$.

Una vez que se completan dichos pasos, el principio de inducción matemática garantiza la fórmula para toda $n \geq n_1$.

EJEMPLO 3 Demuestre que $n! > 3n$ si n es suficientemente grande.

Solución ¿Qué tan grande es suficientemente grande? Experimentamos:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Parece como si $n! > 3n$ para $n \geq 7$. Para asegurarnos, aplicamos inducción matemática. Tomamos $n_1 = 7$ en el paso 1 y completamos el paso 2.

Suponga que $k! > 3k$ para algún $k \geq 7$. Entonces

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}.$$

Entonces, para $k \geq 7$,

$$k! > 3^k \quad \text{implica} \quad (k + 1)! > 3^{k+1}.$$

El principio de inducción matemática ahora garantiza que $n! \geq 3^n$ para toda $n \geq 7$. ■

Demostración de la regla de la derivada de una suma para sumas de un número finito de funciones

Demostramos la proposición

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

mediante inducción matemática. La proposición es verdadera para $n = 2$, como demostramos en la sección 3.3. Éste es el paso 1 de la demostración por inducción.

El paso 2 consiste en demostrar que si la proposición es verdadera para cualquier entero positivo $n = k$, donde $k \geq n_0 = 2$, entonces también es verdadera para $n = k + 1$. Así que suponga que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}. \tag{1}$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\substack{\text{Llame } u \text{ a la función} \\ \text{definida por esta suma.}}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\substack{\text{Llame } v \text{ a} \\ \text{esta función.}}})$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Regla de la suma para } \frac{d}{dx}(u + v)$$

$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Con estos pasos verificados, ahora el principio de inducción matemática garantiza la regla de la suma para todo entero $n \geq 2$.

Ejercicios A.2

1. Suponiendo que la desigualdad del triángulo $|a + b| \leq |a| + |b|$ se cumple para cualesquiera dos números a y b, demuestre que
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
para cualesquiera n números.

2. Demuestre que si $r \neq 1$, entonces
$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
para todo entero positivo n.

3. Utilice la regla del producto, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, y el hecho de que $\frac{d}{dx}(x) = 1$, para demostrar que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para todo entero positivo n.

4. Suponga que una función $f(x)$ tiene la propiedad que $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para cualesquiera dos números positivos x_1 y x_2. Demuestre que
$$f(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$
para el producto de cualesquiera n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Demuestre que
$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$
para todos los enteros positivos n.

6. Demuestre que $n! > n^3$ si n es suficientemente grande.

7. Demuestre que $2^n > n^2$ si n es suficientemente grande.

8. Demuestre que $2^n \geq 1/8$ para $n \geq -3$.

9. **Suma de cuadrados** Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es
$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}.$$

10. **Suma de cubos** Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es $(n(n + 1)/2)^2$.

11. **Reglas para sumas finitas** Demuestre que las siguientes reglas para sumas finitas se cumplen para todos los enteros positivos. (Véase la sección 5.2).

    a. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

    b. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

    c. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (cualquier número c)

    d. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (si a_k tiene el valor constante c)

12. Demuestre que $|x^n| = |x|^n$ para todo entero positivo n y todo número real x.

A.3 Rectas, circunferencias y parábolas

Esta sección revisa coordenadas, rectas, distancia, circunferencias y parábolas en el plano. También se analiza la noción de incremento.

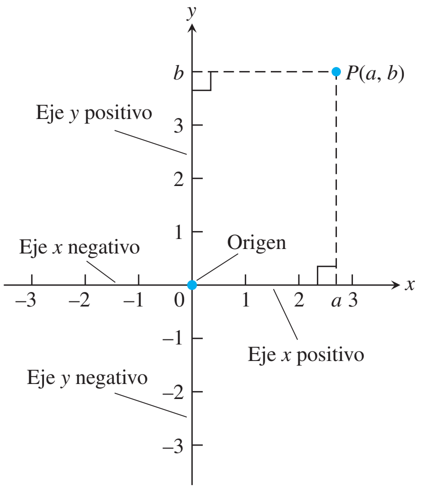


FIGURA A.4 Las coordenadas cartesianas en el plano tienen como base dos ejes perpendiculares que se cortan en el origen.

Coordenadas cartesianas en el plano

En el apéndice 1 identificamos puntos en la recta con números reales, a los que asignamos coordenadas. Los puntos en el plano pueden identificarse con parejas ordenadas de números reales. Para iniciar, dibujamos dos rectas coordenadas perpendiculares que se intersecan en el punto 0 de cada una de ellas. Tales rectas se denominan **ejes coordenados** en el plano. En el eje x horizontal, los números se denotan con x y aumentan hacia la derecha. En el eje y vertical, los números se denotan con y y aumentan hacia arriba (figura A.4). Por lo tanto, "hacia arriba" y "hacia la derecha" son direcciones positivas, mientras que "hacia abajo" y "hacia la izquierda" se consideran direcciones negativas. El **origen** O, también marcado con 0, del sistema de coordenadas es el punto en el plano donde x y y son ambos cero.

Si P es cualquier punto en el plano, puede localizarse en forma exacta por un par ordenado de números reales de la siguiente manera. Dibuje rectas que pasen por P y que sean perpendiculares a los dos ejes de coordenadas. Estas rectas intersecan a los ejes en los puntos con coordenadas a y b (figura A.4). El par ordenado (a, b) se asigna al punto P y se denomina su **pareja ordenada** (o par ordenado). El primer número a es la **coordenada** $\boldsymbol{x}$ (o **abscisa**) de P; el segundo número b es la **coordenada** $\boldsymbol{y}$ (u ordenada) de P. La abscisa x de cada punto en el eje y es 0. La coordenada y de cada punto en el eje x es 0. El origen es el punto $(0, 0)$.

Iniciando con un par ordenado (a, b), es posible revertir el proceso y llegar al punto P correspondiente en el plano. Con frecuencia identificamos a P con la pareja ordenada y escribimos $P(a, b)$. En ocasiones también nos referimos al "punto (a, b)" y será claro a partir del contexto cuando (a, b) se refiera al punto en el plano, no al intervalo abierto en la recta real. En la figura A.5 se muestran varios puntos indicados mediante sus coordenadas.

El sistema de coordenadas se denomina **sistema de coordenadas rectangulares** o **sistema de coordenadas cartesianas** (en honor del matemático del siglo XVII René Descartes). Los ejes de coordenadas de este plano coordenado o plano cartesiano lo dividen en cuatro regiones denominadas **cuadrantes**, numerados en contra de las manecillas del reloj, como se indica en la figura A.5.

La **gráfica** de una ecuación o desigualdad en las variables x y y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o desigualdad. Cuando trazamos datos en el plano de coordenadas o graficamos fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medición, no necesitamos utilizar la misma escala en los dos ejes. Por ejemplo, si graficamos tiempo contra empuje para el motor de un cohete, no hay razón para colocar la marca que muestra 1 seg en el eje del tiempo a la misma distancia del origen que la marca que muestra 1 lb en el eje del empuje.

Por lo común, cuando graficamos funciones cuyas variables no representan medidas físicas y cuando dibujamos figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría y su trigonometría, tratamos de hacer idénticas las escalas en los ejes. Entonces una unidad de distancia vertical se ve igual que una unidad horizontal. Como en el mapa de un agrimensor o en una escala de dibujo, los segmentos de recta que se supone tienen la misma longitud se ven como si fueran iguales, lo que también sucede con los ángulos que se suponen congruentes.

Las pantallas de las computadoras y de las calculadoras son otra cosa. Por lo regular, la escala horizontal y la vertical difieren en las gráficas generadas por una máquina; por lo tanto, hay una distorsión en las distancias, las pendientes y los ángulos. Las circunferencias parecen elipses, los rectángulos podrían verse como cuadrados, los ángulos rectos tal vez parezcan agudos u obtusos, etcétera. Analizamos dichas pantallas y sus distorsiones con mayor profundidad en la sección 1.4.

Biografía histórica

René Descartes
(1596–1650)

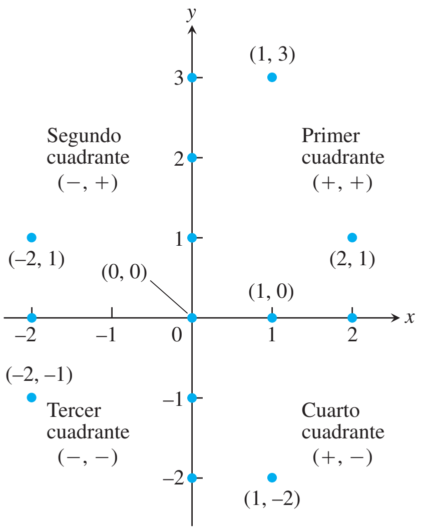


FIGURA A.5 Puntos etiquetados en el plano de coordenadas xy o plano cartesiano. Todos los puntos en los ejes tienen un par de coordenadas, pero por lo regular se marcan con un solo número real [por ejemplo, (1,0) en el eje x se marca con 1]. Observe los patrones de signos de las coordenadas de los cuadrantes.

Incrementos y rectas

Cuando una partícula se mueve desde un punto en el plano a otro, el cambio neto en sus coordenadas se denomina *incremento*. Éste se calcula restando las coordenadas del punto inicial de

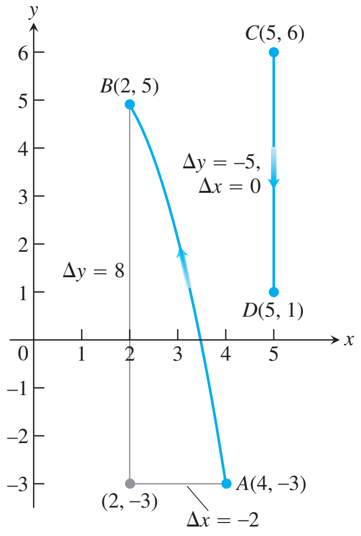


FIGURA A.6 Los incrementos en las coordenadas pueden ser positivos, negativos o cero (ejemplo 1).

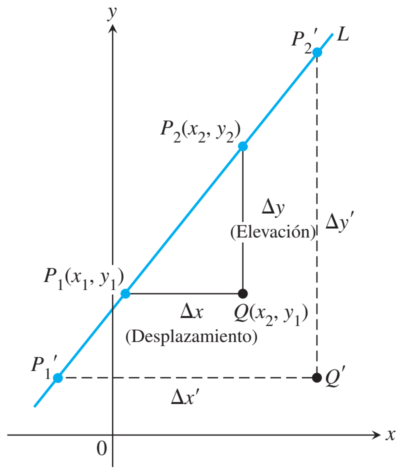


FIGURA A.7 Los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes, por lo que la razón de sus lados tiene el mismo valor para cualesquiera dos puntos en la recta. Este valor común es la pendiente de la recta.

las coordenadas del punto final. Si x cambia de x_1 a x_2, el **incremento** en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

EJEMPLO 1 Al ir del punto $A(4, -3)$ al punto $B(2, 5)$, los incrementos en las coordenadas x y y son

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

De $C(5, 6)$ a $D(5, 1)$, los incrementos en las coordenadas son

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Véase la figura A.6. ■

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano, llamamos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$, el **desplazamiento** y la **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2. Dos de tales puntos siempre determinan una única línea recta (generalmente, denominada sólo recta) que pasa por ambos puntos. Decimos la recta P_1P_2.

Cualquier recta no vertical en el plano tiene la propiedad de que la razón

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tiene el mismo valor para toda elección de los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la recta (figura A.7). Esto es porque las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales.

DEFINICIÓN La razón constante

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la pendiente de la recta no vertical P_1P_2.

La pendiente nos indica la dirección (hacia arriba o hacia abajo) y la inclinación de una recta. Una recta con pendiente positiva asciende hacia la derecha, una con pendiente negativa desciende cuando nos movemos hacia la derecha (figura A.8). Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más rápido asciende o desciende. La pendiente de una recta vertical *no está definida*. Como el desplazamiento Δx es cero para una recta vertical, no podemos formar la razón de la pendiente m.

La dirección y la inclinación de una recta también pueden medirse con un ángulo. El **ángulo de inclinación** de una recta que cruza el eje x es el menor ángulo medido en contra de las manecillas del reloj, a partir del eje x a la recta (figura A.9). La inclinación horizontal es 0º. La inclinación de una recta vertical es 90º. Si ϕ (letra griega fi) es la inclinación de una recta, entonces $0 \le \phi < 180°$.

La relación entre la pendiente m de una recta no vertical y su ángulo de inclinación ϕ se muestra en la figura A.10:

$$m = \tan \phi.$$

Las rectas tienen ecuaciones relativamente sencillas. Todos los puntos en la *recta vertical* que pasan por el punto a en el eje x tienen coordenadas x iguales a a. Por lo tanto, $x = a$ es una ecuación para la recta vertical. De forma análoga, $y = b$ es una ecuación para la *recta horizontal* que corta al eje y en b. (Véase la figura A.11).

Es posible escribir una ecuación para una recta vertical L si conocemos su pendiente y las coordenadas de un punto $P_1(x_1, y_1)$ en ella. Si $P(x, y)$ es *cualquier* otro punto en L, entonces

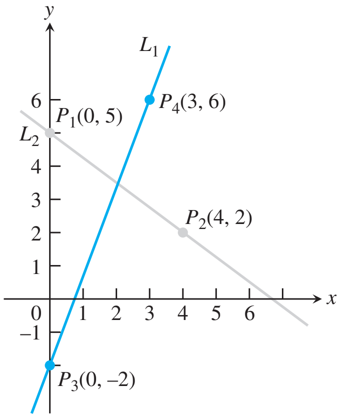


FIGURA A.8 La pendiente de L_1 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{3 - 0} = \frac{8}{3}.$$

Esto es, y aumenta 8 unidades cada vez que x aumenta 3 unidades. La pendiente de L_2 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}.$$

Esto es, y disminuye 3 unidades cada vez que x aumenta 4 unidades.

podemos utilizar los dos puntos P_1 y P para calcular la pendiente,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de manera que

$$y - y_1 = m(x - x_1), \qquad \text{o} \qquad y = y_1 + m(x - x_1).$$

> La ecuación
>
> $$y = y_1 + m(x - x_1)$$
>
> es la **ecuación punto pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

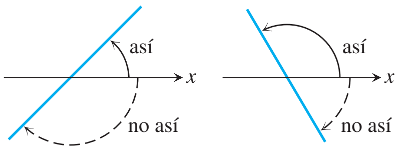


FIGURA A.9 Los ángulos de inclinación se miden en contra de las manecillas del reloj, a partir del eje x.

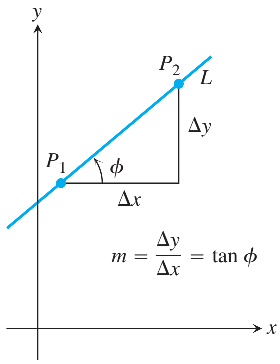


FIGURA A.10 La pendiente de una recta no vertical es la tangente de su ángulo de inclinación.

EJEMPLO 2 Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto (2, 3) con pendiente $-3/2$.

Solución Sustituimos $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ y $m = -3/2$ en la ecuación punto pendiente y obtenemos

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2), \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Cuando $x = 0$, $y = 6$, por lo que la recta interseca al eje y en $y = 6$. ■

EJEMPLO 3 Escriba una ecuación para la recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(3, 4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Es posible utilizar tal pendiente con cualquiera de los dos puntos dados en la ecuación punto pendiente:

Con $(x_1, y_1) = (-2, -1)$	**Con $(x_1, y_1) = (3, 4)$**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

Mismo resultado

De cualquier manera, $y = x + 1$ es una ecuación para la recta (figura A.12). ■

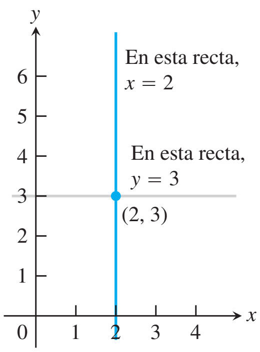


FIGURA A.11 Las ecuaciones estándar para las rectas vertical y horizontal que pasan por el punto (2, 3), son $x = 2$ y $y = 3$.

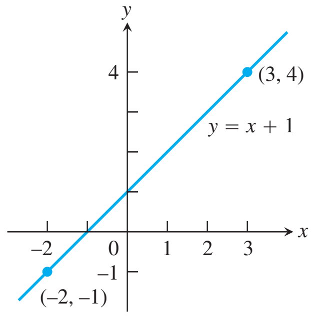


FIGURA A.12 La recta del ejemplo 3.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical interseca al eje y se denomina **intersección con el eje** (u ordenada al origen) de la recta. De forma análoga, la **intersección con el eje x** (o abscisa al origen) de una recta no horizontal es la coordenada x del punto donde la recta corta al eje x (figura A.13). Una recta con pendiente m e intersección con el eje y igual a b pasa por el punto $(0, b)$, por lo que tiene ecuación

$$y = b + m(x - 0), \qquad \text{o, de manera más sencilla,} \qquad y = mx + b.$$

> La ecuación
>
> $$y = mx + b$$
>
> se denomina **ecuación pendiente ordenada** al origen (o pendiente intersección) de la recta con pendiente m e intersección con el eje y en b.

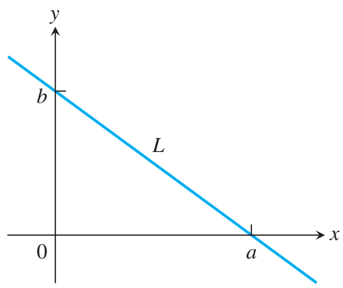


FIGURA A.13 La recta L tiene intersección con el eje x en a e intersección con el eje y en b.

Las rectas con ecuaciones de la forma $y = mx$ tienen intersección con el eje y igual a 0, por lo que pasan por el origen. Las ecuaciones de las rectas se denominan ecuaciones **lineales**.

La ecuación

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ y } B \text{ no son iguales a cero})$$

se denomina **ecuación lineal general** en x y y, ya que su gráfica siempre representa una línea recta, y toda recta tiene una ecuación de esta forma (incluyendo rectas con pendiente no definida).

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Las rectas que son paralelas tienen ángulos de inclinación iguales, así que cuentan con la misma pendiente (si no son verticales). De manera recíproca, rectas con pendientes iguales tienen ángulos de inclinación iguales y, por lo tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen $m_1 m_2 = -1$, por lo que cada pendiente es el *recíproco negativo* de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Para ver esto, observe mediante una inspección de triángulos semejantes de la figura A.14 que $m_1 = a/h$ y $m_2 = -h/a$. Por consiguiente, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

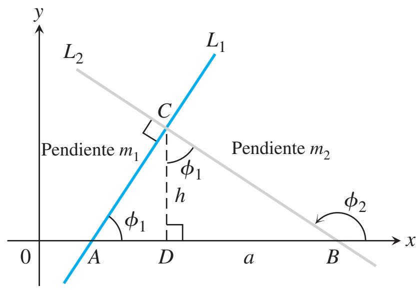


FIGURA A.14 ADC es semejante al ΔCDB. Por lo que ϕ_1 también es el ángulo superior en el ΔCDB. Con base en los lados del ΔCDB, leemos $\tan \phi_1 = a/h$.

Distancia y circunferencias en el plano

La distancia entre los puntos en el plano se calcula con una fórmula que proviene del teorema de Pitágoras (figura A.15).

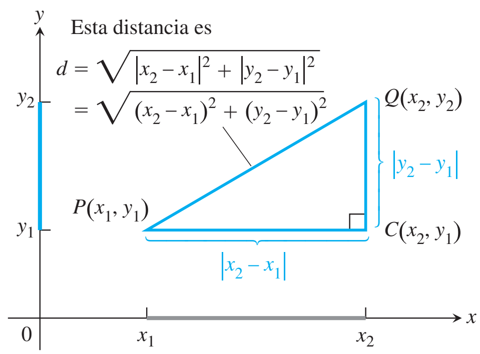


FIGURA A.15 Para calcular la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo PCQ.

Fórmula de distancia para puntos en el plano
La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

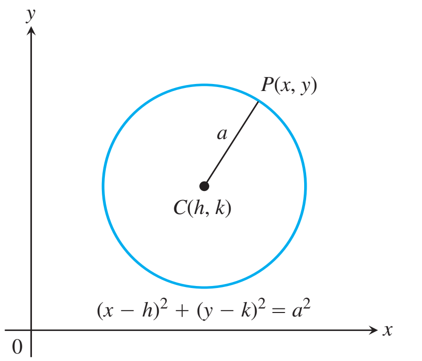


FIGURA A.16 Una circunferencia de radio a en el plano xy, con centro en (h, k).

EJEMPLO 4

(a) La distancia entre $P(-1, 2)$ y $Q(3, 4)$ es

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

(b) La distancia del origen a $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por definición, una **circunferencia** de radio a es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al centro $C(h, k)$ es igual a a (figura A.16). Con base en la fórmula de la distancia, P está en la circunferencia si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a,$$

por lo que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2. \qquad (1)$$

La ecuación (1) es la **ecuación estándar** de una circunferencia con centro (h, k) y radio a. La circunferencia de radio $a = 1$, con centro en el origen, es la **circunferencia unitaria** con ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

EJEMPLO 5

(a) La ecuación estándar para la circunferencia de radio 2 con centro en (3, 4) es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4.$$

(b) La circunferencia

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tiene $h = 1$, $k = -5$ y $a = \sqrt{3}$. El centro es el punto $(h, k) = (1, -5)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$.

Si una ecuación para una circunferencia no está en la forma estándar, podemos determinar el centro y el radio de la circunferencia transformando la ecuación a la forma estándar. La técnica algebraica para hacerlo es la de *completar cuadrados*.

EJEMPLO 6 Determine el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

Solución Transformamos la ecuación a la forma estándar completando los cuadrados en x y y:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$ Iniciar con la ecuación dada.

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$ Agrupar términos. Pasar la constante al lado derecho.

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$ Sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x a cada lado de la ecuación. Hacer lo mismo para y. Ahora, las expresiones entre paréntesis en el lado izquierdo son cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$ Escribir cada cuadrática como una expresión lineal al cuadrado.

El centro es $(-2, 3)$ y el radio es $a = 4$. ■

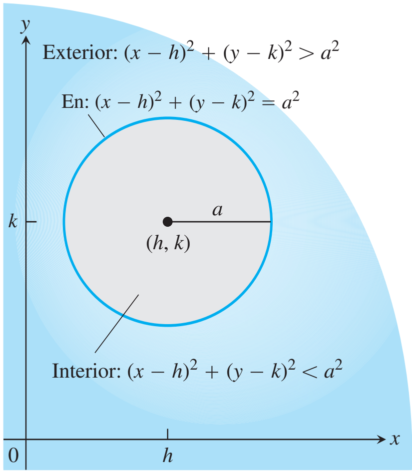


FIGURA A.17 El interior y el exterior de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$.

Los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

constituyen la región **interior** de la circunferencia con centro (h, k) y radio a (figura A.17). El **exterior** de la circunferencia consiste en los puntos (x, y) que satisfacen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2.$$

Parábolas

La definición geométrica y las propiedades de parábolas generales se revisaron en la sección 11.6. Aquí ponemos nuestra atención en parábolas que surgen como gráficas de ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

EJEMPLO 7 Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen dicha ecuación son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$, y $(-2, 4)$. Estos puntos (todos los demás que satisfacen la ecuación) configuran una curva suave denominada parábola (figura A.18). ■

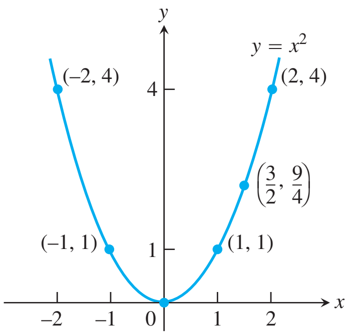


FIGURA A.18 La parábola $y = x^2$ (ejemplo 7).

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2$$

es una **parábola** cuyo **eje** (de simetría) es el eje y. El **vértice** de la parábola (punto donde la parábola cruza a su eje) está en el origen. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. Cuanto mayor sea el valor de $|a|$, más angosta será la parábola (figura A.19).

Por lo general, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una versión desplazada y cambiada de tamaño de la parábola $y = x^2$. Analizamos los desplazamientos y el cambio de tamaño de gráficas con mayor profundidad en la sección 1.2.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El **eje** es la recta

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{2}$$

El vértice de la parábola es el punto donde el eje y la parábola se intersecan. Su coordenada x es $x = -b/2a$; su coordenada y se determina sustituyendo $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola.

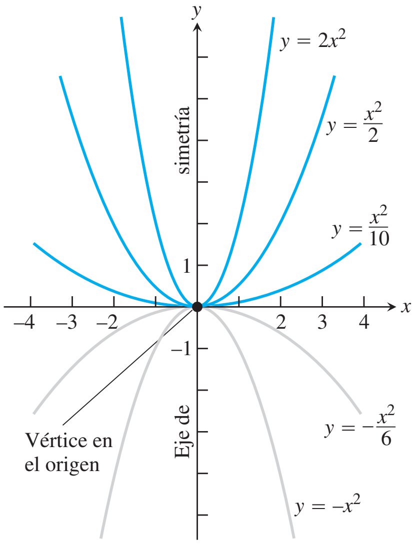


FIGURA A.19 Además de determinar la dirección en la que abre la parábola $y = ax^2$, el número a es un factor de escala. La parábola es más ancha cuando a tiende a cero y más angosta cuando $|a|$ se hace grande.

Observe que si $a = 0$, entonces tenemos $y = bx + c$, que es una ecuación para una recta. El eje dado por la ecuación (2) puede determinarse completando el cuadrado.

EJEMPLO 8 Grafique la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

Solución Al comparar la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$ vemos que

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = 4.$$

Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Con base en la ecuación (2), el eje es la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1.$$

Cuando $x = -1$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

El vértice es $(-1, 9/2)$.

Las intersecciones con el eje x son donde $y = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x = 2, \qquad x &= -4 \end{aligned}$$

Graficamos algunos puntos, hacemos un bosquejo del eje y utilizamos la dirección de apertura para completar la gráfica en la figura A.20. ■

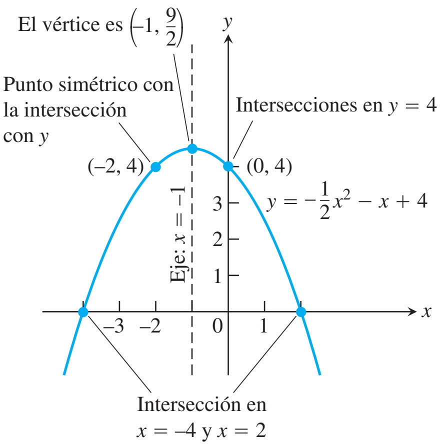


FIGURA A.20 La parábola del ejemplo 8.

Ejercicios A.3

Distancia, pendientes y rectas

En los ejercicios 1 y 2, una partícula se mueve en el plano coordenado de A a B. Determine los incrementos Δx y Δy en las coordenadas de la partícula. Además determine la distancia de A a B.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$ **2.** $A(-3.2, -2)$, $B(-8.1, -2)$

Describa las gráficas de las ecuaciones en los ejercicios 3 y 4.

3. $x^2 + y^2 = 1$ **4.** $x^2 + y^2 \le 3$

Trace los puntos en los ejercicios 5 y 6, y determine la pendiente (si ésta existe) de la recta que éstos determinan. También determine la pendiente común (si existe) de las rectas perpendiculares a AB.

5. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$ **6.** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$

En los ejercicios 7 y 8, determine una ecuación para (a) la recta vertical y (b) la recta horizontal que pasa por el punto dado.

7. $(-1, 4/3)$ **8.** $\left(0, -\sqrt{2}\right)$

En los ejercicios 9 a 15, escriba una ecuación para cada recta que se describe.

9. Pasa por $(-1, 1)$ con pendiente -1.
10. Pasa por $(3, 4)$ y $(-2, 5)$.
11. Tiene pendiente $-5/4$ e intercepción con el eje y igual a 6.
12. Pasa por $(-12, -9)$ y tiene pendiente 0.
13. Tiene intersección con el eje y en 4 y con el eje x en -1.
14. Pasa por $(5, -1)$ y es paralela a la recta $2x + 5y = 15$.
15. Pasa por $(4, 10)$ y es perpendicular a la recta $6x - 3y = 5$

En los ejercicios 16 y 17, determine las intersecciones con el eje x y el eje y de la recta y utilice esta información para graficar la recta.

16. $3x + 4y = 12$
17. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
18. ¿Existe alguna relación especial entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Bx - Ay = C_2$ $(A \neq 0, B \neq 0)$? Justifique su respuesta.
19. Una partícula inicia en $A(-2, 3)$ y sus coordenadas cambian en incrementos $\Delta x = 5$, $\Delta y = -6$. Determine su nueva posición.
20. Las coordenadas de una partícula cambian en $\Delta x = 5$ y $\Delta y = 6$, cuando se mueve de $A(x, y)$ hacia $B(3, -3)$. Determine x y y.

Circunferencias

En los ejercicios 21 a 23, determine una ecuación para la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio a dados. Luego elabore un bosquejo en el plano xy. En su bosquejo, incluya el centro de la circunferencia. Además, si existen, indique las intersecciones con los ejes x y y, con sus pares de coordenadas.

21. $C(0, 2)$, $a = 2$
22. $C(-1, 5)$, $a = \sqrt{10}$
23. $C\left(-\sqrt{3}, -2\right)$, $a = 2$

Grafique las circunferencias cuyas ecuaciones se dan en los ejercicios 24 a 26. Indique, con sus pares de coordenadas, el centro de la circunferencia y, si las hay, las intersecciones con los ejes.

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$
25. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$
26. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

Parábolas

En los ejercicios 27 a 30, grafique las parábolas. En cada caso, marque el vértice, el eje y las intersecciones.

27. $y = x^2 - 2x - 3$
28. $y = -x^2 + 4x$
29. $y = -x^2 - 6x - 5$
30. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Desigualdades

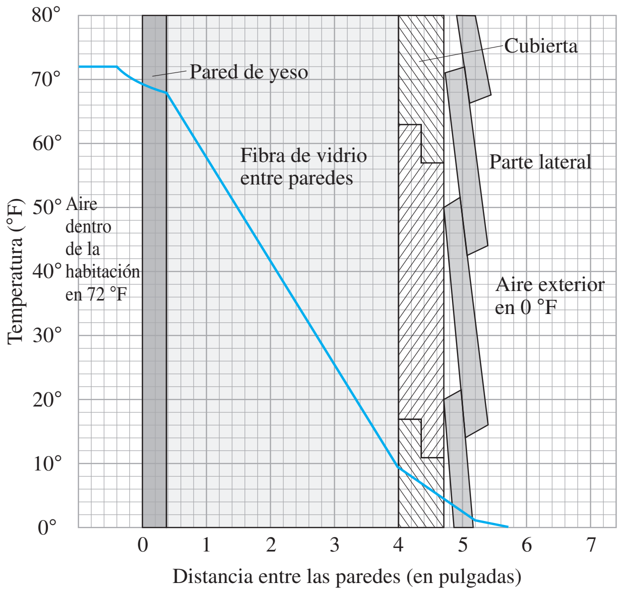
En los ejercicios 31 a 34, describa las regiones definidas por las desigualdades y las parejas de desigualdades.

31. $x^2 + y^2 > 7$
32. $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$
33. $x^2 + y^2 > 1$, $x^2 + y^2 < 4$
34. $x^2 + y^2 + 6y < 0$, $y > -3$
35. Escriba una desigualdad que describa los puntos que están dentro de la circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $\sqrt{6}$.
36. Escriba un par de desigualdades que describan los puntos que están dentro o en la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$, y en la recta vertical que pasa por $(1, 0)$ o a la derecha de ésta.

Teoría y ejemplos

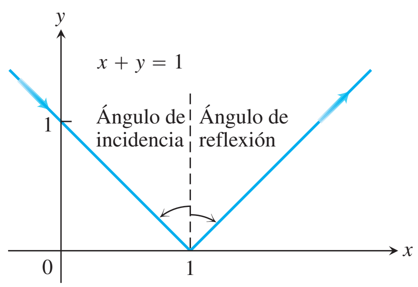
En los ejercicios 37 a 40, grafique las dos ecuaciones y determine los puntos en los que se intersecan las gráficas.

37. $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 1$
38. $y - x = 1$, $y = x^2$
39. $y = -x^2$, $y = 2x^2 - 1$
40. $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
41. **Aislante** Por medio de la medición de las pendientes en la siguiente figura, estime el cambio de temperatura en grados por pulgada para **(a)** la pared de yeso; **(b)** el aislante de fibra de vidrio, **(c)** la cubierta de madera.



La temperatura cambia en la pared en los ejercicios 41 y 42.

42. **Aislante** De acuerdo con la figura del ejercicio 41, ¿cuál de los materiales es el mejor aislante? Explique.
43. **Presión bajo el agua** La presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d del buzo mediante una ecuación de la forma $p = kd + 1$ (k es una constante). En la superficie, la presión es de 1 atmósfera. La presión en 100 metros es de alrededor de 10.94 atmósferas. Determine la presión en 50 metros.
44. **Luz que se refleja** Un haz de luz llega a lo largo de la recta $x + y = 1$, desde el segundo cuadrante y se refleja en el eje x (véase la figura). El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Escriba una ecuación para la recta a lo largo de la cual sale el haz de luz.



Trayectoria del haz de luz en el ejercicio 44. Los ángulos de incidencia y reflexión se miden con respecto a la perpendicular.

45. Fahrenheit versus Celsius En el plano FC, elabore un bosquejo de la gráfica de la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

la cual relaciona las temperaturas medidas en grados Fahrenheit y en grados Celsius. En la misma gráfica trace un bosquejo de la recta $C = F$. ¿Existe una temperatura en la que un termómetro en grados Celsius dé la misma lectura numérica que un termómetro en grados Fahrenheit? Si es así, determínela.

46. Vía férrea en el Monte Washington Los ingenieros civiles calculan la pendiente de una vía de tren como la razón entre la distancia que se eleva o desciende y la distancia que recorre horizontalmente. Esta razón se conoce como nivel de la vía, y por lo regular es menor al 2 por ciento. En las montañas, puede aumentar hasta al 4 por ciento. Comúnmente los niveles en las autopistas son menores del 5 por ciento.

La parte más inclinada de la vía férrea en el Monte Washington en Nueva Hampshire, tiene un nivel excepcional del 37.1 por ciento. A lo largo de este tramo, los asientos en el frente del vagón están 14 ft por arriba de los asientos de atrás. ¿Aproximadamente qué tan alejados están entre sí las filas de adelante y de atrás?

47. Por medio del cálculo de sus lados, demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -2)$ es isósceles pero no equilátero.

48. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 0)$, $B\left(1, \sqrt{3}\right)$, y $C(2, 0)$ es equilátero.

49. Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son vértices de un cuadrado y determine el cuarto vértice.

50. Tres paralelogramos diferentes tienen vértices en $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(2, 3)$. Elabore un bosquejo y determine las coordenadas del cuarto vértice de cada uno de ellos.

51. ¿Para cuáles valores de k, la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para cuáles valores de k las rectas son paralelas?

52. Punto medio de un segmento de recta Demuestre que el punto con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta que une a $P(x_1, y_1)$ con $Q(x_2, y_2)$.

A.4 Demostraciones de los teoremas de límites

Este apéndice demuestra el teorema 1, partes 2 a 5, y el teorema 4 de la sección 2.2.

TEOREMA 1: Leyes de límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma*: $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. *Regla de la diferencia*: $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. *Regla del múltiplo constante*: $\lim_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
4. *Regla del producto*: $\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
5. *Regla del cociente*: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia*: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$, n es un entero positivo
7. *Regla de la raíz*: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo

(Si n es par, suponemos que $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$.)

Demostramos la regla de la suma en la sección 2.3, mientras que las reglas de la potencia y de la raíz se demuestran en cursos más avanzados. Obtenemos la regla de la diferencia remplazando $g(x)$ por $-g(x)$ y M por $-M$ en la regla de la suma. La regla del múltiplo constante es el caso especial $g(x) = k$ de la regla del producto. Lo anterior deja sólo las reglas del producto y de la diferencia.

Demostración de la regla del límite de un producto Demostramos que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para toda x en la intersección D, del dominio de f y del de g,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon.$$

Entonces suponga que ϵ es un número positivo, luego escribimos $f(x)$ y $g(x)$ como

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Al multiplicar estas expresiones y restar LM:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \tag{1}$$

Como f y g tienen límites L y M cuando $x \to c$, hay números positivos δ_1, δ_2, δ_3 y δ_4 tales que para toda x en D

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)). \end{aligned} \tag{2}$$

Si tomamos δ como el menor de los números δ_1 a δ_4, las desigualdades del lado derecho de las implicaciones (2) se cumplen de forma simultánea para $0 < |x - c| < \delta$. Por lo tanto, para toda x en D, $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} &|f(x)\cdot g(x) - LM| && \text{La desigualdad del triángulo aplicada a la ecuación (1).} \\ &\quad \le |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\quad \le (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\quad < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. && \text{Valores de (2)} \end{aligned}$$

Lo anterior completa la demostración de la regla del límite de un producto. ■

Demostración de la regla del límite de un cociente Demostraremos que $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$. Entonces es posible concluir que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = L\cdot\frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

por la regla del límite de un producto.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Para mostrar que $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$, necesitamos demostrar que hay una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Como $|M| > 0$, existe un número positivo δ_1 tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M}{2}. \tag{3}$$

Para cualesquiera números A y B, puede demostrarse que $|A| - |B| \le |A - B|$ y $|B| - |A| \le |A - B|$, de lo que se deduce que $\big||A| - |B|\big| \le |A - B|$. Con $A = g(x)$ y $B = M$, esto se transforma en

$$\big||g(x)| - |M|\big| \le |g(x) - M|,$$

lo que se puede combinar con la desigualdad de la derecha de la implicación (3) para obtener, a la vez,

$$\big|\,|g(x)| - |M|\,\big| < \frac{|M|}{2}$$

$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}$$

$$|M| < 2|g(x)| < 3|M|$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} < \frac{3}{|g(x)|}. \tag{4}$$

Por lo tanto, $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \leq \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|M - g(x)| \\ &< \frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}\cdot|M - g(x)|. \qquad \text{Desigualdad (4)}\end{aligned} \tag{5}$$

Como $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Si tomamos δ como el menor de δ_1 y δ_2, la conclusión en (5) y (6) se cumple para toda x, tal que $0 < |x - c| < \delta$. Al combinar estas conclusiones, se obtiene

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Así termina la demostración de la regla del límite de un cociente. ■

TEOREMA 4: El teorema de la compresión (o del sándwich) Suponga que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$ mismo. También suponga que $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Entonces $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Demostración para límites por la derecha Suponga que $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Así, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c < x < c + \delta$ está contenido en I y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{y} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Tales desigualdades, combinadas con la desigualdad $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ dan

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon,\\ L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon,\\ -\epsilon < f(x) - L < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda x, la desigualdad $c < x < c + \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración para límites por la izquierda
Suponga que $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Así, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c - \delta < x < c$ está contenido en I y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{y} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Demostración para límites por la izquierda x, $c - \delta < x < c$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración para el límite por los dos lados Si $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces $g(x)$ y $h(x)$ se aproximan a L cuando $x \to c^+$ y cuando $x \to c^-$; así que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Por lo tanto, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L. ■

Ejercicios A.4

1. Suponga que las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, y $f_3(x)$ tienen límites L_1, L_2, y L_3, respectivamente, cuando $x \to c$. Demuestre que su suma tiene límite $L_1 + L_2 + L_3$. Utilice inducción matemática (apéndice 2) para generalizar este resultado a la suma de cualquier número finito de funciones.
2. Utilice inducción matemática y la regla del límite de un producto, en el teorema 1, para demostrar que si las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tienen límites $L_1, L_2, \ldots, L_n$ cuando $x \to c$, entonces
$$\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$
3. Utilice el hecho de que $\lim_{x\to c} x = c$ y el resultado del ejercicio 2 para demostrar que $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ para cualquier entero $n > 1$.
4. **Límites de polinomios** Utilice el hecho de que $\lim_{x\to c}(k) = k$ para cualquier número k, junto con los resultados de los ejercicios 1 y 3, para demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ para cualquier función polinomial.
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$
5. **Límites de funciones racionales** Utilice el teorema 1 y el resultado del ejercicio 4 para demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales y $g(c) \neq 0$, entonces
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$
6. **Composición de funciones continuas** La figura A.21 presenta un diagrama para una demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua. Con base en el diagrama, reconstruya la demostración. La proposición que debe demostrarse es ésta: si f es continua en $x = c$ y g es continua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en c.

   Suponga que c es un punto interior del dominio de f y que $f(c)$ es un punto interior del dominio de g. Esto hará que los límites que se incluyan sean por los dos lados. (Los argumentos son similares para los casos que incluyen límites laterales).

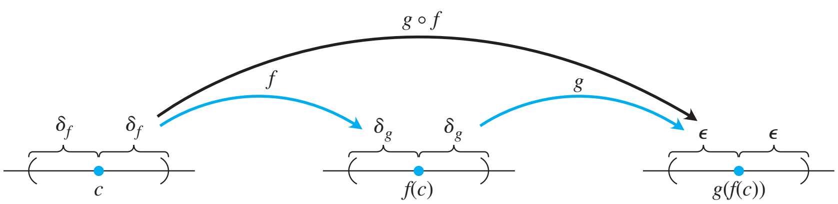


FIGURA A.21 Diagrama para una demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua.

A.5 Límites que aparecen con frecuencia

Este apéndice verifica los límites (4) a (6) en el teorema 5 de la sección 10.1.

Límite 4: Si $|x| < 1$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ Necesitamos demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tan grande que $|x^n| < \epsilon$ para todo entero n mayor que N. Como $\epsilon^{1/n} \to 1$, mientras $|x| < 1$, existe un entero N para el cual $\epsilon^{1/N} > |x|$. En otras palabras,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon. \tag{1}$$

Éste es el entero que buscamos, ya que si $|x| < 1$, entonces

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{para toda } n > N. \tag{2}$$

Al combinar (1) y (2), se produce $|x^n| < \epsilon$ para toda $n > N$, con lo que se concluye la demostración. ■

Límite 5: Para cualquier número x, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Sea

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Entonces

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \to x,$$

como vemos por la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital, en la que derivamos con respecto a n:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+x/n}\right)\cdot\left(-\dfrac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x/n} = x.\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema 3, sección 9.1, con $f(x) = e^x$ para concluir que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x.$$

■

Límite 6: Para cualquier número x, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ Como

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!},$$

todo lo que necesitamos demostrar es que $|x|^n/n! \to 0$. Luego podemos aplicar el teorema de la compresión para sucesiones (sección 10.1, teorema 2) para concluir que $x^n/n! \to 0$.

El primer paso en la demostración de que $|x|^n/n! \to 0$ es elegir un entero $M > |x|$, de manera que $(|x|/M) < 1$. Por el límite 4, que se acaba de demostrar, tenemos $(|x|/M)^n \to 0$. Luego restringimos nuestra atención a los valores de $n > M$. Para tales valores de n, es posible escribir

$$\begin{aligned}\frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot M\cdot\underbrace{(M+1)\cdot(M+2)\cdot\cdots\cdot n}_{(n-M)\text{ factores}}}\\ &\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.\end{aligned}$$

Así que,

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Ahora, la constante $M^M/M!$ no cambia cuando n aumenta. Por lo tanto, el teorema de la compresión nos indica que $|x|^n/n! \to 0$ ya que $(|x|/M)^n \to 0$. ■

A.6 Teoría de los números reales

Un desarrollo riguroso del cálculo tiene como base las propiedades de los números reales. Muchos resultados acerca de funciones, derivadas e integrales serían falsos si los establecemos para funciones definidas solamente en los números racionales. En este apéndice examinamos, de manera breve, algunos conceptos básicos de la teoría de los números reales que sugieren lo que se podría aprender en un estudio más profundo y teórico del cálculo.

Tres tipos de propiedades hacen de los números reales lo que son. Éstas son las propiedades **algebraicas**, de **orden** y de **completez**. Las propiedades algebraicas incluyen la suma y la multiplicación, la resta y la división. Se aplican a los números racionales y a los complejos, así como a los números reales.

La estructura de los números se construye en torno a un conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Para la suma y la multiplicación se requieren las siguientes propiedades.

A1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todas a, b, c.

A2 $a + b = b + a$ para todas a, b.

A3 Existe un número denominado "0", tal que $a + 0 = a$ para toda a.

A4 Para cada número a, existe un b, tal que $a + b = 0$.

M1 $a(bc) = (ab)c$ para todas a, b, c.

M2 $ab = ba$ para todas a, b.

M3 Existe un número denominado "1", tal que $a \cdot 1 = a$ para toda a.

M4 Para cada a distinta de cero existe una b, tal que $ab = 1$.

D $a(b + c) = ab + bc$ para todas a, b, c.

A1 y M1 son las *leyes asociativas*, A2 y M2 son *leyes conmutativas*, A3 y M3 son las *leyes de la identidad* y D es la *ley distributiva*. Los conjuntos con tales propiedades algebraicas son ejemplos de **campos** y se estudian con profundidad en el área de las matemáticas teóricas denominada álgebra abstracta.

Las propiedades de **orden** nos permiten comparar el tamaño de cualesquiera dos números. Éstas son:

O1 Para cualesquiera a y b, se cumple $a \leq b$ o $b \leq a$ o ambas.

O2 Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

O3 Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

O4 Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.

O5 Si $a \leq b$ y $0 \leq c$ entonces $ac \leq bc$.

O3 es la *ley de transitividad*, mientras que O4 y O5 se relacionan con la suma y la multiplicación.

Es posible ordenar los números reales, los enteros y los racionales, pero no los números complejos. No hay una manera razonable de decidir si un número como $i = \sqrt{-1}$ es mayor o menor que cero. Un campo donde se puede comparar el tamaño de cualesquiera dos elementos se denomina **campo ordenado**. Tanto los números racionales como los números reales forman un campo ordenado, pero hay muchos otros.

Podemos pensar en los números reales desde un punto de vista geométrico, alineándolos como puntos en la recta. La **propiedad de completez** dice que los números reales corresponden a todos los puntos en la recta, sin "agujeros" ni "espacios" entre ellos. En contraste, los racionales omiten puntos como $\sqrt{2}$ y π, mientras que los enteros dejan fuera fracciones como $1/2$. Los reales, al tener la propiedad de completez, no omiten puntos.

¿Qué queremos decir exactamente con esta idea de los "espacios"? Para responder esto debemos dar una descripción más precisa de la completez. Un número M es un **cota superior** de un conjunto de números si todos los números en el conjunto son menores o iguales a M. M es una **mínima cota superior** si es la cota superior más pequeña. Por ejemplo, $M = 2$ es una cota superior para los números negativos. También lo es $M = 1$, lo que demuestra que 2 no es una mínima cota superior. La mínima cota superior para el conjunto de números negativos es $M = 0$. Definimos un campo ordenado **completo** como aquél donde todo conjunto no vacío, acotado por arriba, tiene una mínima cota superior.

Si trabajamos sólo con los números racionales, el conjunto de números menores que $\sqrt{2}$ está acotado, pero no tiene una mínima cota superior racional, ya que cualquier cota superior racional M puede remplazarse con un número racional ligeramente menor que siga siendo mayor que $\sqrt{2}$. Así, los racionales no son completos. En los números reales, un conjunto que está acotado por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Los reales son un campo ordenado completo.

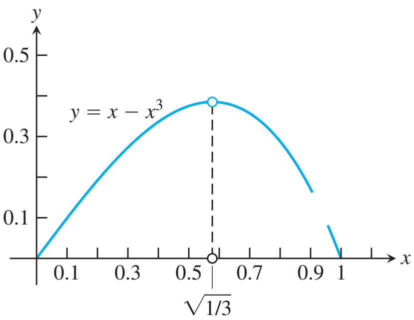


FIGURA A.22 El valor máximo de $y = x - x^3$ en [0, 1] ocurre en el número irracional $x = \sqrt{1/3}$.

La propiedad de completez es la base de muchos resultados obtenidos en cálculo. Un ejemplo se da al buscar un valor máximo de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$, como se hizo en la sección 4.1. La función $y = x - x^3$ tiene un valor máximo en [0, 1] en el punto x que satisface $1 - 3x^2 = 0$, o $x = \sqrt{1/3}$. Si limitáramos nuestra atención a las funciones continuas definidas sólo en los racionales, habríamos concluido que la función no tiene máximo, ya que $\sqrt{1/3}$ es irracional (figura A.22). El teorema del valor extremo (sección 4.1) implica que funciones continuas en intervalos cerrados $[a, b]$ tienen un valor máximo, no válido para funciones definidas sólo en las racionales.

El teorema del valor intermedio implica que una función continua f en un intervalo $[a, b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ debe anularse en algún punto de $[a, b]$. Los valores de la función no pueden pasar de negativos a positivos sin que haya alguna x en $[a, b]$, donde $f(x) = 0$. El teorema del valor intermedio también se basa en la completez de los números reales, y es falso para funciones continuas definidas sólo en los racionales. La función $f(x) = 0$. $f(x) = 3x^2 - 1$ cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, pero si consideramos f sólo en los números racionales, su valor nunca se anula. El único valor de x para el que $f(x) = 0$ es $x = \sqrt{1/3}$, un número irracional.

Hemos numerado las propiedades que se requieren de los números reales al decir que éstos constituyen un campo ordenado completo. Pero aún no hemos terminado. Los matemáticos griegos de la escuela de Pitágoras trataron de imponer otra propiedad a los números de la recta real: la condición de que todos los números fueran cocientes de enteros. También se percataron de que su esfuerzo estaba destinado al fracaso cuando descubrieron números irracionales como $\sqrt{2}$. ¿Cómo saber que nuestros esfuerzos por especificar los números reales serán infructuosos por alguna razón imprevista? Escher, el artista, dibujó ilusiones ópticas con escaleras elípticas que subían y subían hasta encontrarse consigo mismas en la parte inferior. Si un ingeniero tratara de construir tal escalera, se daría cuenta de la imposibilidad de concretar en una estructura los planos basados en tales ilusiones ópticas. ¿Podría ocurrir que nuestro diseño de los números reales tuviera una contradicción sutil que nos impidiera construir tal sistema numérico?

Resolveremos este punto dando una descripción específica de los números reales y verificando que las propiedades algebraicas, de orden y de completez se satisfacen en este modelo. A lo anterior se le llama **construcción** de los números reales; tal como las escaleras se construyen con madera, piedra o acero, existen muchas formas de construir los números reales. Una de ellas considera los números reales como todos los decimales infinitos

$$a.d_1d_2d_3d_4\ldots$$

Desde este punto de vista, un número real es un entero a seguido por una sucesión de dígitos decimales $d_1, d_2, d_3, \ldots$, cada uno entre 0 y 9. Esta sucesión puede detenerse, repetirse de manera periódica o continuar sin patrón. De esta forma, 2.00, 0.3333333… y 3.1415926535898… representan números reales conocidos. Explicar el verdadero significado de los puntos "…" después de dichos dígitos requiere un desarrollo de la teoría de sucesiones y series, como en el capítulo 10. Cada número real se construye como límite de una sucesión de números racionales dados por sus aproximaciones decimales finitas. Un decimal infinito es entonces lo mismo que una serie

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots.$$

Esta construcción decimal de los números reales no es tan directa. Es bastante fácil comprobar que da números que satisfacen las propiedades de completez y orden, pero la verificación de las propiedades algebraicas es más compleja. Incluso la suma o la multiplicación de dos números necesitan de una cantidad infinita de operaciones. Dar sentido a la división requiere un cuidadoso argumento, el cual implica límites de aproximaciones racionales a los decimales infinitos.

El matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) adoptó un enfoque distinto y logró la primera construcción rigurosa de los números reales en 1872. Dado cualquier número real x, es posible separar los números racionales en dos conjuntos: los menores que o iguales a x, y los mayores que x. Ingeniosamente, Dedekind invirtió este razonamiento y definió un número real como una separación en dos conjuntos de este tipo. Lo anterior parecería un enfoque extraño, pero tales métodos indirectos de construcción de nuevas estructuras, a partir de otras anteriores, son comunes en las matemáticas teóricas.

Éste y otros enfoques pueden utilizarse para construir un sistema de números con propiedades algebraicas, de orden y de completez deseadas. Un último aspecto que vale la pena analizar es si todas estas construcciones dan el mismo resultado. ¿Es posible que las distintas construcciones produzcan diferentes sistemas numéricos que satisfagan todas las propiedades requeridas? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿cuál de tales sistemas es el de los números reales? Por fortuna, la respuesta es no. Los números reales constituyen el único sistema numérico que satisface las propiedades algebraicas, de orden y de completez.

La confusión en torno a la naturaleza de los números reales y los límites causó una gran controversia durante las primeras etapas de desarrollo del cálculo. Los pioneros del cálculo, como Newton, Leibniz y sus sucesores, al tratar de averiguar qué ocurría con el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando tanto Δy como Δx tendían a cero, hablaban de la derivada resultante como si fuera un cociente entre dos cantidades infinitamente pequeñas. Estos "infinitésimos", que se escriben dx y dy, se consideraban como números de nuevo tipo, menores que cualquier número fijo, pero distintos de cero. De manera similar, se imaginaba que una integral definida era la suma de una cantidad infinita de infinitésimos

$$f(x) \cdot dx$$

conforme x varía en un intervalo cerrado. Aunque los cocientes de diferencias aproximantes $\Delta y/\Delta x$ se entendían de manera similar a la actual, era un cociente de cantidades infinitesimales, y no un límite, donde se creía que radicaba el significado de la derivada. Dicha forma de pensar condujo a dificultades lógicas, cuando los intentos de definición y el manejo de los infinitésimos dieron lugar a contradicciones e inconsistencias. El cociente de diferencias, más concreto y manejable, no provocó tales problemas; sólo se le consideraba una herramienta útil para realizar los cálculos. Los cocientes de diferencias se utilizaron para encontrar el valor numérico de la derivada y para deducir fórmulas generales para los cálculos, pero no fueron considerados fundamentales para responder qué es realmente la derivada. Hoy nos damos cuenta de que los problemas lógicos asociados a los infinitésimos se evitan *definiendo* la derivada como el límite de los cocientes de diferencias aproximantes. Las ambigüedades del antiguo enfoque ya no existen y en la teoría estándar del cálculo los infinitésimos no se necesitan ni se usan.

A.7 Números complejos

Los números complejos son expresiones de la forma $a + ib$, donde a y b son números reales e i es un símbolo para $\sqrt{-1}$. Por desgracia, las palabras "real" e "imaginario" tienen connotaciones que suelen colocar a $\sqrt{-1}$ en una posición menos favorable en nuestra mente que $\sqrt{2}$. De hecho, se requirió de una gran imaginación, en el sentido de *inventiva*, para construir el sistema de números *reales*, que es la base del cálculo (véase el apéndice A.6). En este apéndice revisaremos las diversas etapas de dicha invención, para luego presentar el desarrollo posterior de un sistema de números complejos.

El desarrollo de los números reales

La primera etapa de desarrollo de los números fue el reconocimiento de los **números para contar**, 1, 2, 3, …, que ahora llamamos **números naturales** o **enteros positivos**. Es posible realizar algunas operaciones aritméticas sencillas con este número sin salir del sistema; es decir, el sistema de enteros positivos es **cerrado** si se trata de las operaciones de suma y multiplicación. En otras palabras, si m y n son cualesquiera enteros positivos, entonces

$$m + n = p \qquad \text{y} \qquad mn = q \tag{1}$$

son también enteros positivos. Dados los dos enteros positivos del lado izquierdo de cualquiera de las ecuaciones en (1), podemos especificar los enteros positivos correspondientes del lado derecho. Más que esto, es posible especificar m y p, así como encontrar un entero positivo n tal que $m + n = p$. Por ejemplo, $3 + n = 7$ se puede resolver cuando los únicos números que conocemos son los enteros positivos. Pero la ecuación $7 + n = 3$ no se resuelve a menos que se amplíe el sistema numérico.

El cero y los números negativos se inventaron para resolver ecuaciones como $7 + n = 3$. En una civilización que reconoce todos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

las personas educadas siempre serán capaces de encontrar el entero faltante que resuelva la ecuación $m + n = p$ cuando se les den los otros dos enteros de la ecuación.

Suponga que tales personas también saben cómo multiplicar cualesquiera dos enteros de la lista (2). Si en las ecuaciones (1) se les dan m y q, verán que a veces pueden encontrar n. Si usan la imaginación, se inspirarían para idear más números e introducir las fracciones, que son justamente pares ordenados m/n de enteros m y n. El número cero tiene propiedades especiales que molestarían un poco, pero en última instancia los individuos en cuestión descubrirán que es bueno tener todos los cocientes de enteros m/n, excluyendo aquellos con cero en el denominador. Este sistema, llamado conjunto de **números racionales**, será lo suficientemente rico como para realizar las **operaciones racionales** de la aritmética:

1. **(a)** suma
(b) resta

2. **(a)** multiplicación
(b) división

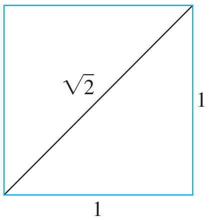


FIGURA A.23 Con una regla y un compás es posible construir un segmento de longitud irracional.

con cualesquiera dos números del sistema, *excepto que no es posible dividir entre cero*, pues esto carece de sentido.

La geometría del cuadrado unitario (figura A.23) y el teorema de Pitágoras demostraron que es posible construir un segmento de recta que, en términos de alguna unidad de longitud básica, tiene longitud igual a $\sqrt{2}$. En consecuencia, las personas resolvieron la ecuación

$$x^2 = 2$$

mediante una construcción geométrica. Pero también descubrieron que el segmento de recta que representa a $\sqrt{2}$ es una cantidad inconmesurable. Lo anterior significa que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como la razón entre dos múltiplos *enteros* de cierta unidad de longitud. Es decir, la gente era incapaz de encontrar una solución numérica racional de la ecuación $x^2 = 2$.

No existe un número racional cuyo cuadrado sea 2. Para comprender por qué, supongamos que sí hay tal número racional. Entonces, podríamos encontrar enteros p y q, sin factores comunes distintos de 1, tales que

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Como p y q son enteros, p debe ser par, pues en caso contrario, al multiplicarlo por sí mismo, el producto sería impar. En símbolos, $p = 2p_1$, donde p_1 es un entero. Esto nos lleva a $2p_1{}^2 = q_2$, lo que significa que q debe ser par; digamos, $q = 2q_1$, donde q_1 es un entero. Lo anterior hace que 2 sea un factor de p y q, lo que contradice nuestra elección de p y q como enteros sin factores comunes distintos de 1. Por lo tanto, no hay un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Aunque las personas de que hemos hablado no podrían hallar una solución racional para la ecuación $x^2 = 2$, sí serían capaces de obtener una sucesión de cocientes racionales

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \ldots, \tag{4}$$

cuyos cuadrados forman una sucesión

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{49}{25}, \quad \frac{1681}{841}, \quad \frac{57{,}121}{28{,}561}, \quad \ldots, \tag{5}$$

que converge a 2. Esta vez la imaginación sugería la necesidad del concepto de límite de una sucesión de números racionales. Si aceptamos el hecho de que una sucesión creciente acotada por arriba siempre tiene un límite (teorema 6, sección 10.1) y observamos que la sucesión (4) tiene tales propiedades, querríamos que tuviera un límite L. Esto también nos indica, de acuerdo con (5) que $L^2 = 2$ y, por lo tanto, que L *no* es uno de nuestros números racionales. Si agregamos a los números racionales los límites de todas las sucesiones de números racionales crecientes y acotadas por arriba, llegaremos al sistema de todos los números "reales". Escribimos la palabra *real* entre comillas porque ninguna característica de este sistema lo hace "más real" o "menos real" que a cualquier otro sistema matemático.

Los números complejos

Durante el desarrollo del sistema de números reales se recurrió muchas veces a la imaginación. De hecho, fue necesario hacer alarde de inventiva por lo menos en tres momentos durante la construcción del sistema que hemos analizado hasta el momento:

1. En la *invención del primer sistema*: el conjunto de *todos los enteros*, construido a partir de los números para contar.

2. En la *invención del segundo sistema*: el conjunto de los *números racionales* m/n, construido a partir de los enteros.

3. En la *invención del tercer sistema*: el conjunto de todos los *números reales* x, construido a partir de los números racionales.

Tales sistemas, producto de la inventiva, forman una jerarquía en la que cada sistema contiene al anterior. Cada sistema es también más rico que su predecesor, en el sentido de que permite realizar operaciones adicionales sin necesidad de recurrir a otros:

1. En el sistema de todos los enteros, es posible resolver todas las ecuaciones de la forma

$$x + a = 0, \tag{6}$$

donde a puede ser cualquier entero.

2. En el sistema de todos los números racionales, podemos resolver todas las ecuaciones de la forma

$$ax + b = 0, \tag{7}$$

siempre y cuando a y b sean números racionales $a \neq 0$.

3. En el sistema de todos los números reales, es posible resolver todas las ecuaciones de los tipos (6) y (7), además de todas las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad b^2 - 4ac \geq 0. \tag{8}$$

Es probable que usted conozca la fórmula que da las soluciones a la ecuación (8); a saber,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

y que también esté familiarizado con el hecho de que cuando el discriminante, $b^2 - 4ac$, es negativo, las soluciones de la ecuación (9) no pertenecen a los sistemas que hemos analizado. De hecho, la sencilla ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0$$

es imposible de resolver si los únicos sistemas numéricos que pueden utilizarse son los tres mencionados.

En consecuencia, llegamos al *cuarto sistema inventado*, el conjunto de *todos los números complejos* $a + ib$. Podríamos omitir el símbolo i y usar la notación de pares ordenados (a, b). Puesto que desde el punto de vista de las operaciones algebraicas los números a y b se tratan de manera ligeramente distinta, es esencial mantener el *orden*. Por lo tanto, decimos que el **sistema de números complejos** consta del conjunto de todos los pares ordenados de números reales (a, b), junto con las reglas que indican su igualdad, su suma, su multiplicación, etcétera, y que se presentan a continuación. Usaremos las notaciones (a, b) y $a + ib$ en el siguiente análisis. Llamaremos a a la **parte real** y b a la **parte imaginaria** del número complejo (a, b).

Tenemos las siguientes definiciones.

Igualdad

$a + ib = c + id$ si y si sólo $a = c$ y $b = d$.	Dos números complejos (a, b) y (c, d) son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Suma

$(a + ib) + (c + id)$ $= (a + c) + i(b + d)$	La *suma* de los dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(a + c, b + d)$.

Multiplicación

$(a + ib)(c + id)$ $= (ac - bd) + i(ad + bc)$	El *producto* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(ac - bd, ad + bc)$.
$c(a + ib) = ac + i(bc)$	El producto de un número real c por el número complejo (a, b) es el número complejo (ac, bc).

El conjunto de todos los números complejos (a, b), donde el segundo número b es igual a cero, tiene todas las propiedades del conjunto de números reales a. Por ejemplo, la suma y la multiplicación de $(a, 0)$ y $(c, 0)$ da

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0),$$

que son números del mismo tipo, con su parte imaginaria igual a cero. Además, si multiplicamos un "número real" $(a, 0)$ y el número complejo (c, d), obtendremos

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

En particular, el número complejo $(0, 0)$ desempeña el papel del cero en el sistema de números complejos, y el número complejo $(1, 0)$, el de la *unidad* o el *uno*.

El par ordenado $(0, 1)$, con parte real igual a cero y parte imaginaria igual a uno, tiene la propiedad de que su cuadrado,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

tiene parte real igual a menos uno y parte imaginaria igual a cero. Por lo tanto, en el sistema de números complejos (a, b) existe un número $x = (0, 1)$ cuyo cuadrado puede sumarse a la unidad $(1, 0)$ para producir el cero $(0, 0)$, es decir,

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

En consecuencia, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

tiene una solución $x = (0, 1)$ en este nuevo sistema numérico.

Tal vez usted esté más familiarizado con la notación $a + ib$ que con la notación (a, b). Como las leyes algebraicas para los pares ordenados nos permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

mientras (1, 0) se comporte como la unidad y (0, 1) como una raíz cuadrada de menos uno, no debemos dudar en escribir $a + ib$ en vez de (a, b). Asociada a b, la i es como un elemento que marca la parte imaginaria de $a + ib$. Es posible pasar del ámbito de los pares ordenados (a, b) al de las expresiones $a + ib$ y viceversa. Pero, una vez que se han aprendido las leyes algebraicas para el sistema de números complejos como pares ordenados (a, b), el símbolo $(0, 1) = i$ no es menos "real" que el símbolo $(1, 0) = 1$, una vez que hemos aprendido las leyes del álgebra en el sistema complejo de número de pares ordenados (a, b).

Para reducir cualquier combinación racional de números complejos a un único número complejo, aplicamos las leyes del álgebra elemental, remplazando i^2 por -1 siempre que aparezca. Por supuesto, no podemos dividir entre el número complejo $(0, 0) = 0 + i0$. Pero si $a + ib \neq 0$, es posible efectuar una división como sigue:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

El resultado es un número complejo $x + iy$ con

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2},$$

y $a^2 + b^2 \neq 0$, pues $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$.

El número $a - ib$, que se utiliza como factor para eliminar i del denominador, es el **conjugado complejo** de $a + ib$. Se acostumbra usar $\bar{z}$, (que se lee "z barra o z conjugado") para denotar el conjugado complejo de z; así,

$$z = a + ib, \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $(c + id)/(a + ib)$ por el conjugado complejo del denominador, éste se remplaza siempre por un número real.

EJEMPLO 1 Damos algunos ejemplos de operaciones aritméticas con números complejos.

(a) $(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$

(b) $(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$

(c) $(2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)$

$$= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$$

(d)
$$\frac{2 + 3i}{6 - 2i} = \frac{2 + 3i}{6 - 2i}\frac{6 + 2i}{6 + 2i}$$
$$= \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2}$$
$$= \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i$$

■

Diagramas de Argand

El número complejo $z = x + iy$ tiene dos representaciones geométricas:

1. como el punto $P(x, y)$ en el plano xy
2. como el vector $\overrightarrow{OP}$ que va del origen a P.

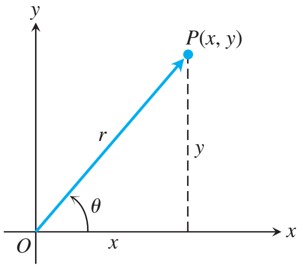


FIGURA A.24 Este diagrama de Argand representa a $z = x + iy$ como un punto $P(x, y)$ y como un vector $\overrightarrow{OP}$.

En cada representación, el eje x se conoce como **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. Ambas representaciones son **diagramas de Argand** para $x + iy$ (figura A.24).

En términos de las coordenadas polares x y y, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta,$$

y

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{10}$$

Definimos el **valor absoluto** de un número complejo $x + iy$ como la longitud r de un vector $\overrightarrow{OP}$ que va del origen a $P(x, y)$. Denotamos el valor absoluto mediante barras verticales; en consecuencia,

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si elegimos siempre las coordenadas polares r y θ de manera que r sea no negativo, entonces

$$r = |x + iy|.$$

El ángulo polar θ es el **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg z$. Desde luego, se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π para producir otro ángulo adecuado.

La siguiente ecuación presenta una fórmula útil que relaciona un número complejo z, su conjugado $\bar{z}$, y su valor absoluto $|z|$, a saber,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Fórmula de Euler

La identidad

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta,$$

llamada **fórmula de Euler** nos permite escribir la ecuación (10) como

$$z = re^{i\theta}.$$

Esta fórmula, a la vez, nos lleva a las siguientes reglas para el cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces de números complejos, así como a diagramas de Argand para $e^{i\theta}$. Como $\cos\theta + i$ sen θ es lo que obtenemos de la ecuación (10) al considerar $r = 1$, es posible decir que $e^{i\theta}$ se representa mediante un vector unitario que forma un ángulo θ con la parte positiva del eje x, como muestra en la figura A.25.

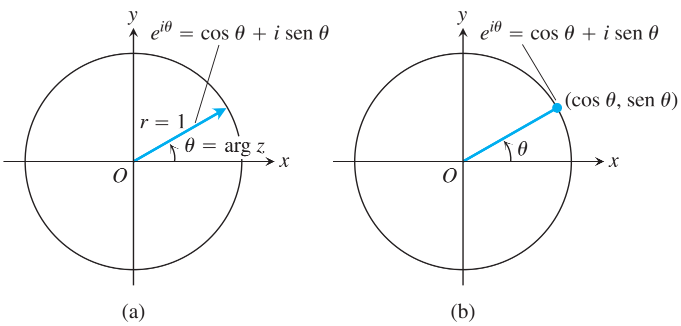


FIGURA A.25 Diagramas de Argand para $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, (a) como un vector y (b) como un punto.

Productos

Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus ángulos. Sean

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \tag{11}$$

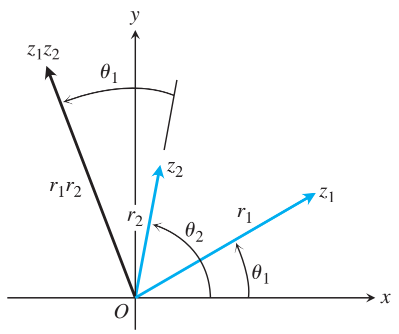


FIGURA A.26 Cuando se multiplican z_1 y z_2, $|z_1z_2| = r_1 \cdot r_2$ y $\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

de manera que

$$|z_1| = r_1, \qquad \arg z_1 = \theta_1; \qquad |z_2| = r_2, \qquad \arg z_2 = \theta_2.$$

Entonces,

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} |z_1z_2| &= r_1r_2 = |z_1|\cdot|z_2| \\ \arg(z_1z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Por lo tanto, el producto de dos números complejos se representa mediante un vector cuya longitud es el producto de las longitudes de los factores y cuyo argumento es la suma de sus argumentos (figura A.26). En particular, a partir de la ecuación (12) vemos que un vector puede girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ multiplicándolo por $e^{i\theta}$. La multiplicación por i provoca un giro de 90°, por -1 un giro de 180°, por $-i$ un giro de 270°, etcétera.

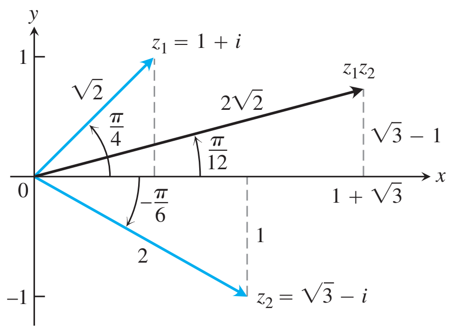


FIGURA A.27 Para multiplicar dos números complejos, multiplique sus valores absolutos y sume sus argumentos.

EJEMPLO 2 Sean $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Trazamos estos números complejos en un diagrama de Argand (figura A.27), donde obtenemos las representaciones polares

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i. \end{aligned}$$

La notación $\exp(A)$ representa e^A. ■

Cocientes

Supongamos que $r_2 \neq 0$ en la ecuación (11). Así,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Es decir, dividimos las longitudes y restamos los ángulos para obtener el cociente de números complejos.

EJEMPLO 3 Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$, como en el ejemplo 2. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1 + i}{\sqrt{3} - i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right) \\ &\approx 0.183 + 0.683i. \end{aligned}$$

■

Potencias

Si n es un entero positivo, es posible aplicar las fórmulas de producto en la ecuación (12) para obtener

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z. \qquad n \text{ factores}$$

Con $z = re^{i\theta}$, obtenemos

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} \qquad n \text{ sumandos} \\ &= r^n e^{in\theta}. \end{aligned} \tag{13}$$

La longitud $r = |z|$ se eleva a la n-ésima potencia y el ángulo $\theta = \arg z$ se multiplica por n.

Si consideramos $r = 1$ en la ecuación (13), obtendremos el teorema de De Moivre.

Teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \tag{14}$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación de De Moivre mediante el teorema del binomio y la reducimos a la forma $a + ib$, obtendremos fórmulas para $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$ como polinomios de grados n en $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

EJEMPLO 4 Si $n = 3$ en la ecuación (14), tenemos

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

El lado izquierdo de esta ecuación se desarrolla como

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta - i \operatorname{sen}^3\theta.$$

La parte real de la expresión anterior debe ser igual a $\cos 3\theta$ y la parte imaginaria debe ser igual a $\operatorname{sen} 3\theta$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta, \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta. \end{aligned}$$

■

Raíces

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo distinto de cero y n es un entero positivo, entonces hay precisamente n números complejos distintos $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, que son raíces n-ésimas de z. Para comprender por qué, sea $w = \rho e^{i\alpha}$ una n-ésima raíz de $z = \rho e^{i\theta}$, por lo que

$$w^n = z$$

o

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Entonces,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

es la n-ésima raíz real positiva de r. En cuanto al argumento, aunque no podemos decir que $n\alpha$ y θ deben ser iguales, sí es posible afirmar que difieren en un múltiplo entero de 2π. Esto es,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Por lo tanto, todas las n-ésimas raíces de $z = re^{i\theta}$ están dadas por

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{15}$$

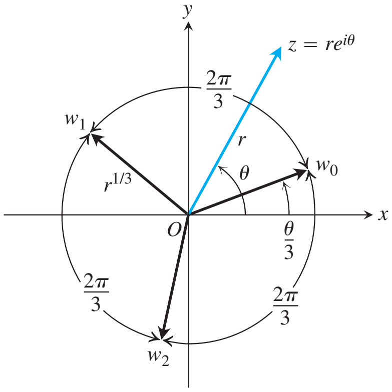


FIGURA A.28 Las tres raíces cúbicas de $z = re^{i\theta}$.

Parecería que hay una infinidad de respuestas distintas correspondientes a la infinidad de valores posibles de k, pero $k = n + m$ da la misma respuesta que $k = m$ en la ecuación (15). Así, sólo necesitamos considerar n valores consecutivos de k para obtener todas las n-ésimas raíces distintas de z. Por conveniencia, tomamos

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Todas las raíces n-ésimas de $re^{i\theta}$ están en una circunferencia con centro en el origen y con radio igual a la n-ésima raíz positiva de r. Una de ellas tiene argumento $\alpha = \theta/n$. Las demás se distribuyen de manera uniforme en la circunferencia, cada una separada de sus vecinas por un ángulo igual a $2\pi/n$. La figura A.28 ilustra la distribución de las tres raíces cúbicas w_0, w_1, w_2 del número complejo $z = re^{i\theta}$.

EJEMPLO 5 Determine las cuatro raíces cuartas de -16.

Solución Como primer paso, ubicamos el número -16 en un diagrama de Argand (figura A.29) y determinamos su representación polar $re^{i\theta}$. En este caso, $z = -16$ y $r = +16$ y $\theta = \pi$. Una de las raíces cuartas de $16e^{i\pi}$ es $2e^{i\pi/4}$. Obtenemos las demás mediante sumas sucesivas de $2\pi/4 = \pi/2$ al argumento de esta primera raíz. Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{16 \exp i\pi} = 2 \exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

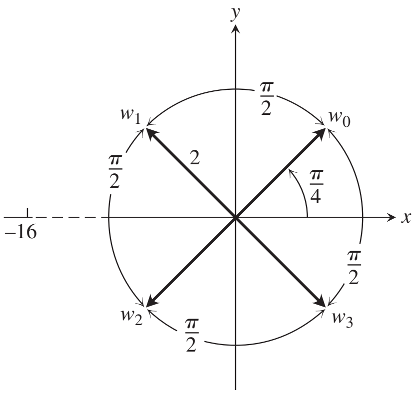


FIGURA A.29 Las cuatro raíces cuartas de -16.

y las cuatro raíces son

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 - i).$$

■

El teorema fundamental del álgebra

Alguien podría decir que la invención de $\sqrt{-1}$ está muy bien y que conduce a un sistema numérico más rico que el de los números reales, pero ¿en qué momento se detendrá este proceso? ¿Tendremos que inventar más sistemas para obtener $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, y así sucesivamente? Resulta que esto no es necesario. Tales números pueden expresarse ya en términos del sistema de números complejos $a + ib$. De hecho, el teorema fundamental del álgebra dice que con la introducción de los números complejos se cuenta con los números suficientes para factorizar cualquier polinomio como un producto de factores lineales y, por lo tanto, los números suficientes para resolver cualquier ecuación polinomial posible.

El teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son cualesquiera números complejos, cuyo grado n es mayor que o igual a uno, y cuyo coeficiente principal a_n no es cero, tiene exactamente n raíces en el sistema de números complejos siempre y cuando cada raíz múltiple con multiplicidad m se cuente como m raíces.

En casi todos los textos sobre la teoría de funciones de una variable compleja aparece una demostración de este teorema.

Ejercicios A.7

Operaciones con números complejos

1. **Cómo multiplican números complejos las computadoras** Calcule $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
   a. $(2, 3) \cdot (4, -2)$ **b.** $(2, -1) \cdot (-2, 3)$
   c. $(-1, -2) \cdot (2, 1)$
   (Ésta es la forma en la que las computadoras multiplican números complejos)
2. Resuelva las siguientes ecuaciones en términos de los números reales x y y.
   a. $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$
   b. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dfrac{1}{x + iy} = 1 + i$
   c. $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Graficación y geometría

3. ¿Cuántos de los siguientes números complejos pueden obtenerse geométricamente a partir de $z + iy$? Elabore un bosquejo de los números.
   a. $\bar{z}$ **b.** $\overline{(-z)}$
   c. $-z$ **d.** $1/z$
4. Demuestre que la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en un diagrama de Argand es $|z_1 - z_2|$.

En los ejercicios 5 a 10, grafique los puntos $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones dadas.

5. **a.** $|z| = 2$ **b.** $|z| < 2$ **c.** $|z| > 2$
6. $|z - 1| = 2$
7. $|z + 1| = 1$
8. $|z + 1| = |z - 1|$
9. $|z + i| = |z - 1|$
10. $|z + 1| \geq |z|$

En los ejercicios 11 a 14, exprese los números complejos en la forma $re^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Trace un diagrama de Argand para cada cálculo.

11. $\left(1 + \sqrt{-3}\right)^2$
12. $\dfrac{1+i}{1-i}$
13. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$
14. $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Potencias y raíces

Utilice el teorema de De Moivre para expresar las funciones trigonométricas en los ejercicios 15 y 16 en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

15. $\cos 4\theta$
16. $\operatorname{sen} 4\theta$
17. Determine las tres raíces cúbicas de 1.
18. Determine las dos raíces cuadradas de i.
19. Determine las tres raíces cúbicas de $-8i$.
20. Determine las seis raíces sextas de 64.
21. Determine las cuatro soluciones de la ecuación $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.
22. Determine las seis soluciones de la ecuación $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.
23. Determine todas las soluciones de la ecuación $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$.
24. Resuelva la ecuación $x^4 + 1 = 0$.

Teoría y ejemplos

25. **Números complejos y vectores en el plano** Demuestre con un diagrama de Argand que la ley para sumar números complejos es la misma que la ley del paralelogramo para la suma de vectores.
26. **Aritmética compleja con conjugados** Demuestre que el conjugado de la suma (producto o cociente) de dos números complejos, z_1 y z_2, es la misma que la suma (producto o cociente) de sus conjugados.
27. **Raíces complejas de polinomios con coeficientes reales en parejas conjugadas complejas**
    a. Amplíe los resultados del ejercicio 26 para demostrar que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, si
    $$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$
    es un polinomio con coeficientes reales, $a_0, \ldots, a_n$.
    b. Si z es una raíz de la ecuación $f(z) = 0$, donde $f(z)$ es un polinomio con coeficientes reales, como en el inciso (a), demuestre que el conjugado $\bar{z}$ también es raíz de la ecuación. (*Sugerencia:* Sea $f(z) = u + iv = 0$; entonces, u y v son iguales a cero. Utilice el hecho de que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$.)
28. **Valor absoluto de un conjugado** Demuestre que $|\bar{z}| = |z|$.
29. **Cuando $\mathbf{z = \bar{z}}$** Si z y $\bar{z}$ son iguales, ¿qué puede decir acerca de la ubicación del punto z en el plano complejo?

30. Partes real e imaginaria Sean Re(z) la parte real de z e Im(z) la parte imaginaria. Demuestre que se cumplen las siguientes relaciones para cualesquiera números complejos z, z_1 y z_2.

a. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

b. $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

c. $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$

d. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

A.8 La ley distributiva para el producto vectorial cruz

En este apéndice demostraremos la ley distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

que es la propiedad 2 en la sección 12.4.

Demostración Para deducir la ley distributiva, construimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de una forma nueva. Dibujamos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ desde el punto común O y construimos un plano M perpendicular a $\mathbf{u}$ en O (figura A.30). Luego proyectamos $\mathbf{v}$ ortogonalmente sobre M, lo que da un vector $\mathbf{v}'$ con longitud $|\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$. El vector $\mathbf{v}'$ se hace girar 90° con respecto a $\mathbf{u}$ en el sentido positivo para producir un vector $\mathbf{v}''$. Por último, multiplicamos $\mathbf{v}''$ por la longitud de $\mathbf{u}$. El vector resultante $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, ya que $\mathbf{v}''$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ por su construcción (figura A.30) y

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

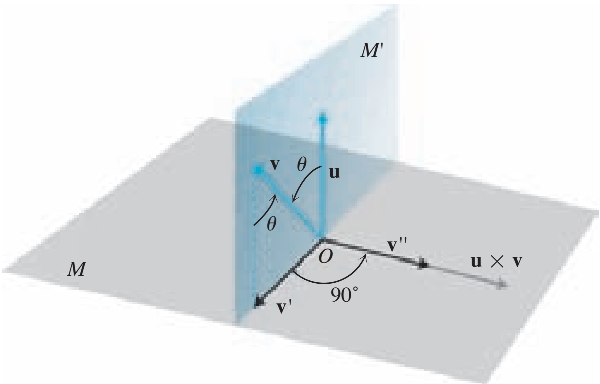


FIGURA A.30 Como se explicó en el texto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$.

Ahora, cada una de estas tres operaciones, a saber,

1. la proyección sobre M.
2. la rotación de 90° con respecto a $\mathbf{u}$
3. la multiplicación por el escalar $|\mathbf{u}|$

cuando se aplica a un triángulo cuyo plano no es paralelo a $\mathbf{u}$, producirá otro triángulo. Si iniciamos con el triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (figura A.31) y aplicamos los tres pasos, de manera sucesiva, obtendremos lo siguiente:

1. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ y $(\mathbf{v} + \mathbf{w})'$, que satisfacen la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$

2. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ y $(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial

$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$

(La notación de doble prima en cada vector tiene el mismo significado que en la figura A.30).

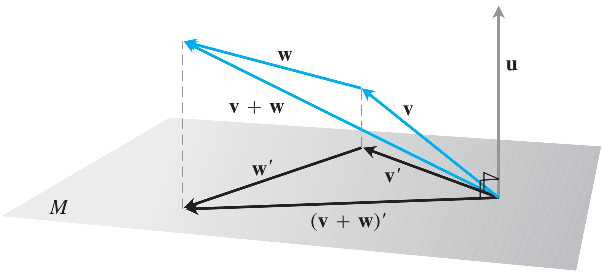


FIGURA A.31 Los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, y sus proyecciones sobre un plano perpendicular a $\mathbf{u}$.

3. Un triángulo cuyos lados son $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$, y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''$ que satisfacen la ecuación vectorial

$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

Al sustituir $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ a partir de nuestro análisis anterior, en la última ecuación da

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

que es la ley que queríamos establecer. ■

A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento

Este apéndice deduce el teorema de la derivada mixta (teorema 2, sección 14.3) y el teorema del incremento para funciones de dos variables (teorema 3, sección 14.3). En 1734 Euler publicó el teorema de la derivada mixta en una serie de artículos que escribió sobre hidrodinámica.

TEOREMA 2: El teorema de derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene un punto (a, b) y son todas continuas en (a, b), entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Demostración La igualdad de $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ se puede establecer mediante cuatro aplicaciones del teorema del valor medio (teorema 4 de la sección 4.2). Por hipótesis, el punto (a, b) está en el interior de un rectángulo R en el plano xy, donde f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas. Sean h y k números tales que el punto $(a + h, b + k)$ también está en R y consideremos la diferencia

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \tag{1}$$

donde

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \tag{2}$$

Aplicamos el teorema del valor medio a F, que es continua por ser derivable. Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\Delta = hF'(c_1), \tag{3}$$

donde c_1 está entre a y $a + h$. De acuerdo con la ecuación (2),

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

de manera que la ecuación (3) se convierte en

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \tag{4}$$

Si aplicamos el teorema del valor medio de la función $g(y) = f_x(c_1, y)$ tenemos

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

o bien

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

para alguna d_1 entre b y $b + k$. Al sustituir esto en la ecuación (4), obtendremos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

para cierto punto (c_1, d_1) en el rectángulo R', cuyos vértices son los cuatro puntos (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ y $(a, b + k)$. (Véase la figura A.32).

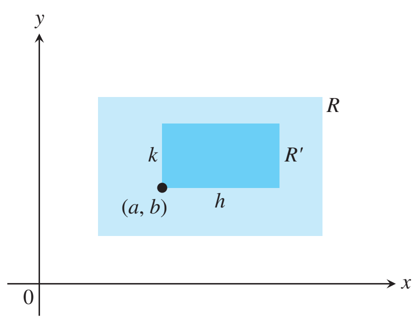


FIGURA A.32 La clave para demostrar que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ es que no importa qué tan pequeño sea R', f_{xy} y f_{yx} toman valores iguales dentro de R' (aunque no necesariamente en el mismo punto).

Al sustituir la ecuación (2) en la ecuación (1), también podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b),\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \tag{7}$$

Si aplicamos el teorema del valor medio a la ecuación (6), ahora nos da

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

para algún d_2 entre b y $b + k$. De acuerdo con la ecuación (7),

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \tag{9}$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (8), se obtiene

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Por último, aplicamos el teorema del valor medio a la expresión en corchetes para obtener

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

para algún c_2 entre a y $a + h$.

Juntas, las ecuaciones (5) y (10) demuestran que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \tag{11}$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) están en el rectángulo R' (figura A.32). La ecuación (11) no es precisamente el resultado que buscamos, pues sólo nos dice que f_{xy} tiene el mismo valor en (c_1, d_1) que f_{yx} en (c_2, d_2). Sin embargo, los números h y k pueden hacerse tan pequeños como se quiera. La hipótesis de que f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ y $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, donde cada una de $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $h, k \to 0$. Por lo tanto, si h y $k \to 0$, tenemos que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

La igualdad entre $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ puede demostrarse con hipótesis más débiles que las planteadas. Por ejemplo, basta que f, f_x y f_y existan en R y que f_{xy} sea continua en (a, b). Entonces, f_{yx} existe en (a, b) y es igual a f_{xy} en ese punto.

TEOREMA 3: El teorema del incremento para funciones de dos variables
Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene al punto (x_0, y_0) y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

en el valor de f que resulta de moverse de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface una ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde cada $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

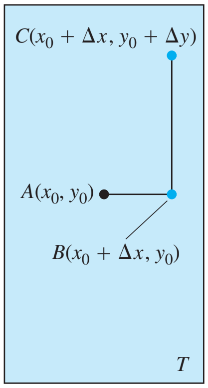


FIGURA A.33 La región rectangular T en la demostración del teorema del incremento. La figura se dibujó para Δx y Δy positivos, pero cualquiera de ellos podría ser cero o negativo.

Demostración Trabajamos dentro de un rectángulo T con centro en $A(x_0, y_0)$, que está dentro de R, y suponemos que Δx y Δy ya son lo bastante pequeños como para que el segmento de recta que une A con $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ y el segmento de recta que une B con $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ estén en el interior de T (figura A.33).

Es posible pensar en Δz como la suma $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ de dos incrementos, donde

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de A a B y

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de B a C (figura A.34).

En el intervalo cerrado de valores de x, que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, la función $F(x) = f(x, y_0)$ es una función derivable (y por lo tanto continua) de x, con derivada

$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

Según el teorema del valor medio (teorema 4 de la sección 4.2), existe un valor c de x entre x_0, $x_0 + \Delta x$ donde

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\,\Delta x$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\,\Delta x$$

o

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\,\Delta x. \tag{12}$$

De manera similar, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ es una función derivable (y por lo tanto continua) de y en el intervalo cerrado en y que va de y_0 a $y_0 + \Delta y$, con derivada

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

En consecuencia, existe un valor d de y entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ donde

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\,\Delta y$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y$$

o

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y. \tag{13}$$

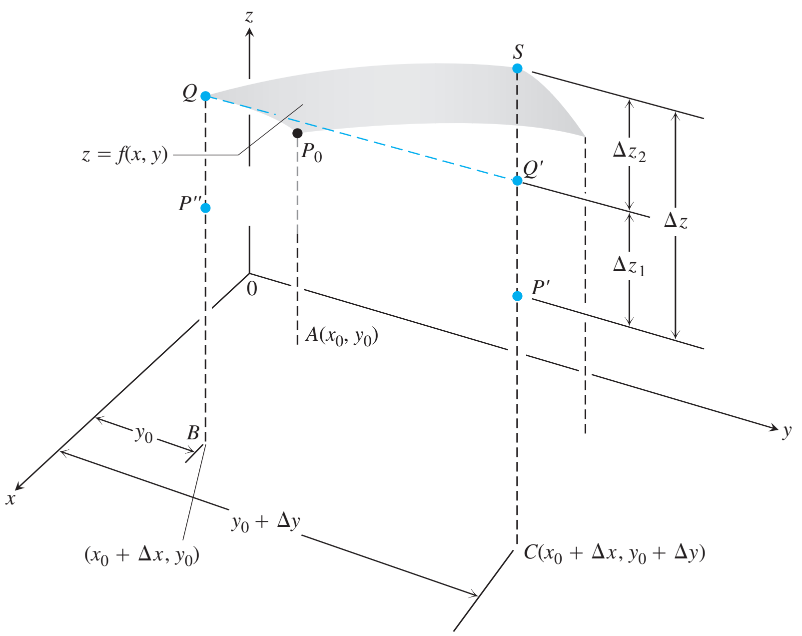


FIGURA A.34 Parte de la superficie $z = f(x, y)$ cerca de $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Los puntos P_0, P', y P'' tienen la misma altura $z_0 = f(x_0, y_0)$ por arriba del plano xy. El cambio en z es $\Delta z = P'S$. El cambio

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

mostrado como $P''Q = P'Q'$, es consecuencia del cambio de x, desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$ mientras y se mantiene igual a y_0. Luego, cuando x se mantiene igual a $x_0 + \Delta x$,

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en z causado por el cambio de y_0 a $y_0 + \Delta y$, que está representado por $Q'S$. El cambio total en z es la suma de Δz_1 a Δz_2.

Ahora bien, cuando Δx y $\Delta y \to 0$, sabemos que $c \to x_0$ y $d \to y_0$. Por lo tanto, como f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0), las cantidades

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \to 0$.

Por último,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{A partir de las ecuaciones (12) y (13).} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y && \text{A partir de la ecuación (14).} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$, que era lo que teníamos que demostrar. ■

Resultados análogos son válidos para funciones con cualquier número finito de variables independientes. Suponga que las primeras derivadas parciales de $w = f(x, y, z)$ se definen en toda una región abierta que contiene al punto (x_0, y_0, z_0), y que f_x, f_y y f_z son continuas en (x_0, y_0, z_0). Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \epsilon_3\Delta z, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ cuando Δx, Δy, y $\Delta z \to 0$.

Las derivadas parciales f_x, f_y y f_z de la ecuación (15) deben evaluarse en el punto (x_0, y_0, z_0).

La ecuación (15) puede demostrarse considerando Δw como la suma de tres incrementos.

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \tag{18}$$

y aplicando el teorema del valor medio a cada uno por separado. Dos coordenadas permanecen constantes y sólo una varía en cada uno de estos incrementos parciales Δw_1, Δw_2, Δw_3. En la ecuación (17), por ejemplo, sólo varía y, pues x se mantiene constante igual a $x_0 + \Delta x$, y z se mantiene igual a z_0. Como $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ es una función continua de y con una derivada f_y, se sujeta al teorema del valor medio; así, tenemos

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\, \Delta y$$

para cierta y_1 entre y_0 y $y_0 + \Delta y$.

Respuestas a los ejercicios con número impar

CAPÍTULO 1

Sección 1.1, pp. 11–13

1. $D: (-\infty, \infty)$, $R: [1, \infty)$ **3.** $D: [-2, \infty)$, $R: [0, \infty)$

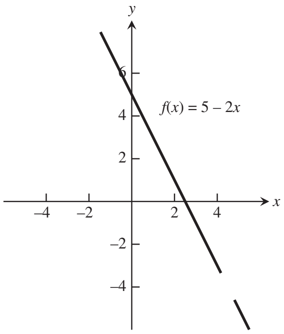
5. $D: (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, $R: (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. **(a)** No es una función de x, ya que algunos valores de x tienen dos valores de y.
(b) Una función de x, ya que para cada x existe una sola y posible.

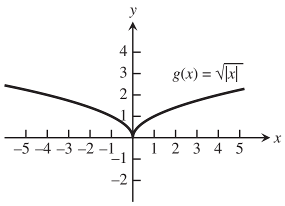
9. $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $p = 3x$ **11.** $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $A = 2d^2$, $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

13. $L = \dfrac{\sqrt{20x^2 - 20x + 25}}{4}$

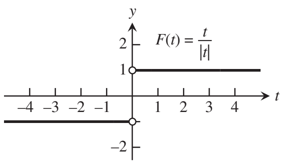
15. $(-\infty, \infty)$



17. $(-\infty, \infty)$

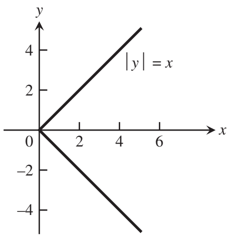


19. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

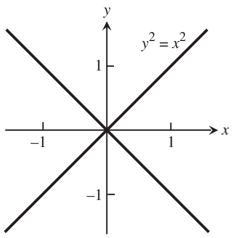


21. $(-\infty, -5) \cup (-5, -3] \cup [3, 5) \cup (5, \infty)$

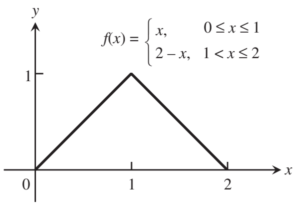
23. **(a)** Para cada valor positivo de x, existen dos valores de y.



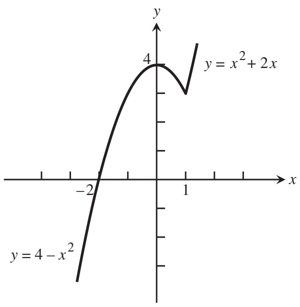
(b) Para cada valor de $x \neq 0$, existen dos valores de y.



25.



27.



29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x + 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

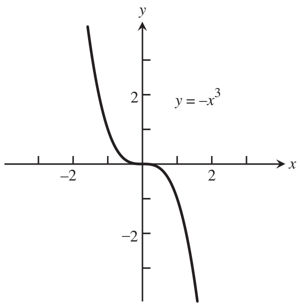
(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

31. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x + 2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

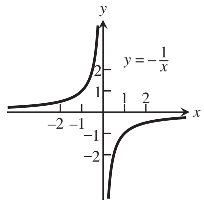
33. **(a)** $0 \le x < 1$ **(b)** $-1 < x \le 0$ **35.** Sí

37. Simétrica con respecto al origen



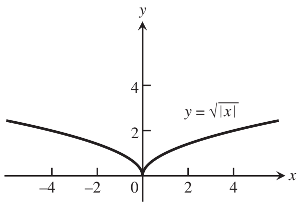
Dec. $-\infty < x < \infty$

39. Simétrica con respecto al origen



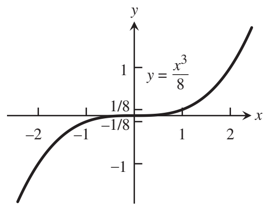
Crec. $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$

41. Simétrica con respecto al eje y



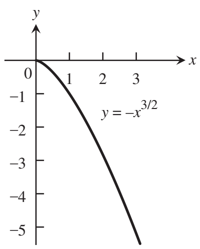
Dec. $-\infty < x \le 0$; crec. $0 \le x < \infty$

43. Simétrica con respecto al origen



Crec. $-\infty < x < \infty$

45. No tiene simetría



Dec. $0 \le x < \infty$

47. Par **49.** Par **51.** Impar **53.** Par

55. Ninguno **57.** Ninguno **59.** $t = 180$ **61.** $s = 2.4$

63. $V = x(14 - 2x)(22 - 2x)$

65. **(a)** h **(b)** f **(c)** g **67.** **(a)** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

71. $C = 5(2 + \sqrt{2})h$

Sección 1.2, pp. 19–22

1. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: x \geq 1$, $R_f: -\infty < y < \infty$, $R_g: y \geq 0$, $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_g$, $R_{f+g}: y \geq 1$, $R_{f\cdot g}: y \geq 0$

3. $D_f: -\infty < x < \infty$, $D_g: -\infty < x < \infty$, $R_f: y = 2$, $R_g: y \geq 1$, $D_{f/g}: -\infty < x < \infty$, $R_{f/g}: 0 < y \leq 2$, $D_{g/f}: -\infty < x < \infty$, $R_{g/f}: y \geq 1/2$

5. **(a)** 2 **(b)** 22 **(c)** $x^2 + 2$ **(d)** $x^2 + 10x + 22$ **(e)** 5 **(f)** -2 **(g)** $x + 10$ **(h)** $x^4 - 6x^2 + 6$

7. $13 - 3x$ **9.** $\sqrt{\dfrac{5x+1}{4x+1}}$

11. **(a)** $f(g(x))$ **(b)** $j(g(x))$ **(c)** $g(g(x))$ **(d)** $j(j(x))$ **(e)** $g(h(f(x)))$ **(f)** $h(j(f(x)))$

13.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(a)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(b)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$	x
(e)	$\dfrac{1}{x-1}$	$1 + \dfrac{1}{x}$	x
(f)	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	x

15. **(a)** 1 **(b)** 2 **(c)** -2 **(d)** 0 **(e)** -1 **(f)** 0

17. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x} + 1}$, $g(f(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(b) $D_{f\circ g} = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $D_{g\circ f} = (-1, \infty)$

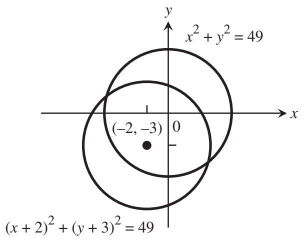
(c) $R_{f\circ g} = [0, 1) \cup (1, \infty)$, $R_{g\circ f} = (0, \infty)$

19. $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

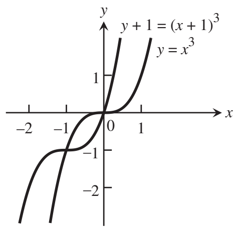
21. **(a)** $y = -(x+7)^2$ **(b)** $y = -(x-4)^2$

23. **(a)** Posición 4 **(b)** Posición 1 **(c)** Posición 2 **(d)** Posición 3

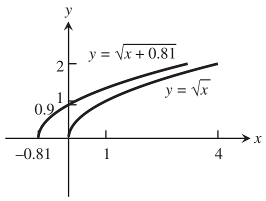
25. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$



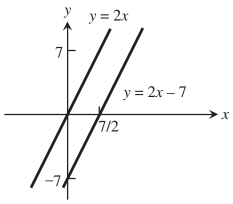
27. $y + 1 = (x+1)^3$



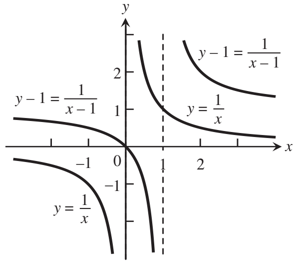
29. $y = \sqrt{x + 0.81}$



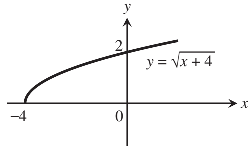
31. $y = 2x$



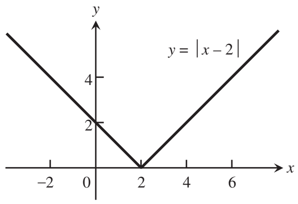
33. $y - 1 = \dfrac{1}{x-1}$



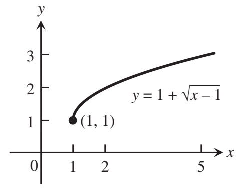
35.



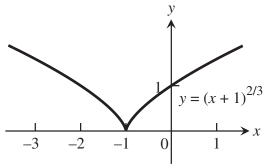
37.



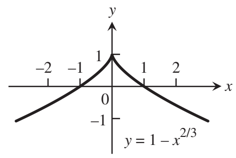
39.



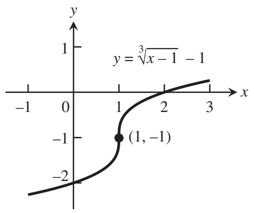
41.



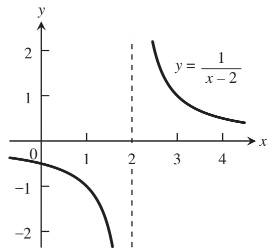
43.



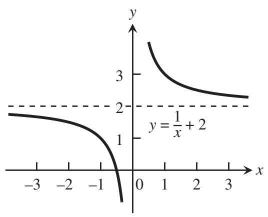
45.



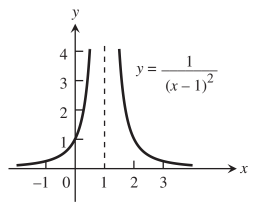
47.



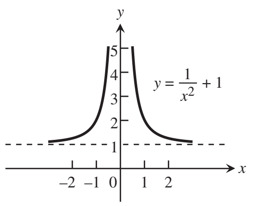
49.



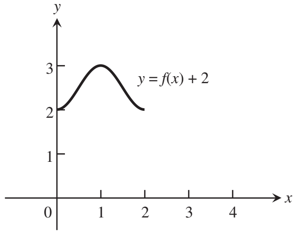
51.

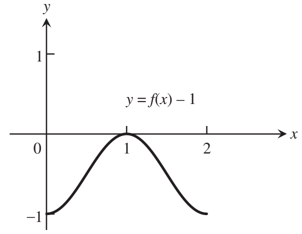


53.

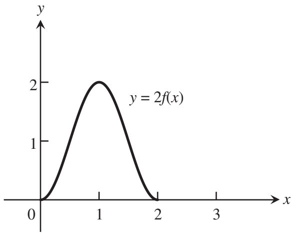


55. **(a)** $D: [0, 2]$, $R: [2, 3]$ **(b)** $D: [0, 2]$, $R: [-1, 0]$

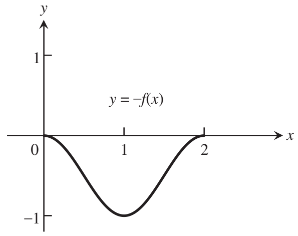




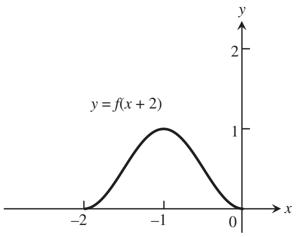
(c) $D: [0, 2], \quad R: [0, 2]$



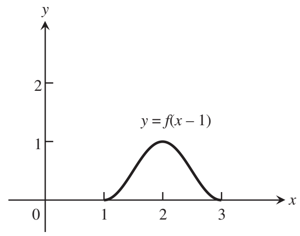
(d) $D: [0, 2], \quad R: [-1, 0]$



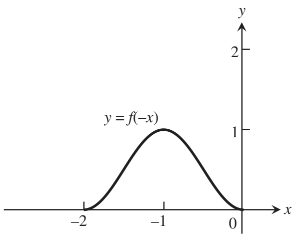
(e) $D: [-2, 0], \quad R: [0, 1]$



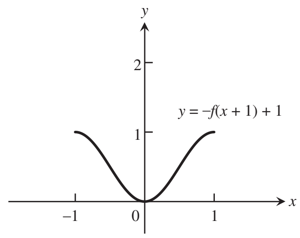
(f) $D: [1, 3], \quad R: [0, 1]$



(g) $D: [-2, 0], \quad R: [0, 1]$



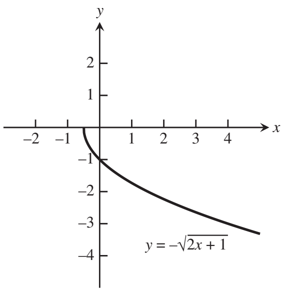
(h) $D: [-1, 1], \quad R: [0, 1]$



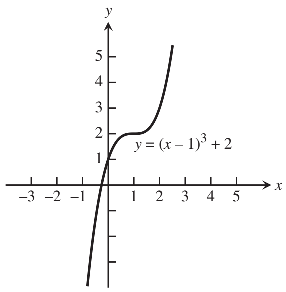
57. $y = 3x^2 - 3$ **59.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ **61.** $y = \sqrt{4x + 1}$

63. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ **65.** $y = 1 - 27x^3$

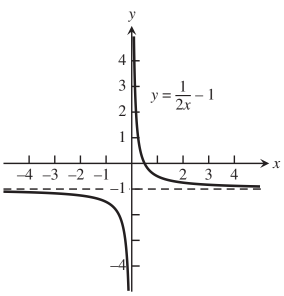
67.



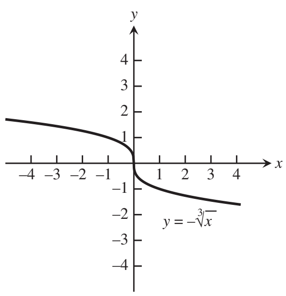
69.



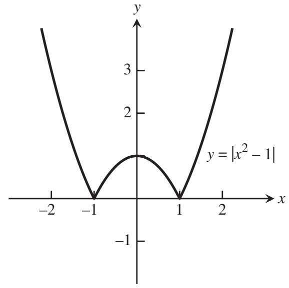
71.



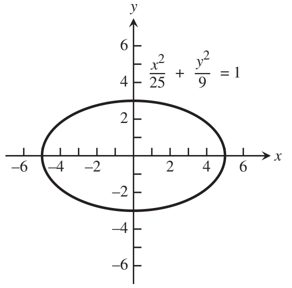
73.



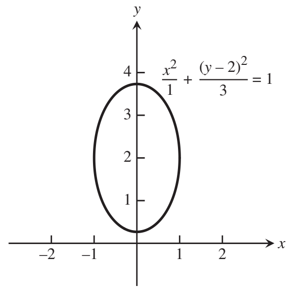
75.



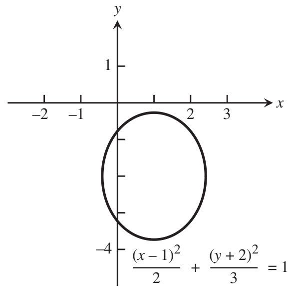
77.



79.

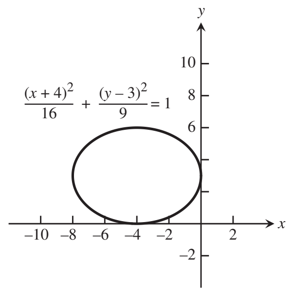


81.



83. $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$ Centro: $(-4, 3)$

El eje mayor (principal) es el segmento de recta entre $(-8, 3)$ y $(0, 3)$.



85. **(a)** Impar **(b)** Impar **(c)** Impar **(d)** Par **(e)** Par **(f)** Par **(g)** Par **(h)** Par **(i)** Impar

Sección 1.3, pp. 28–30

1. **(a)** 8π m **(b)** $\frac{55\pi}{9}$ m **3.** 8.4 in

5.

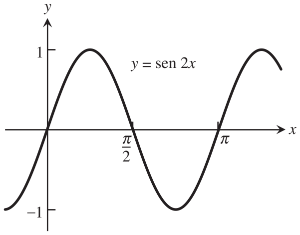
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
sen θ	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos θ	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
tan θ	0	$\sqrt{3}$	0	IND	-1
cot θ	IND	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	IND	0	-1
sec θ	-1	-2	1	IND	$-\sqrt{2}$
csc θ	IND	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IND	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5, \tan x = -3/4$

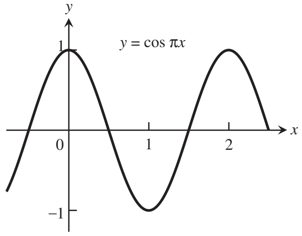
9. $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \tan x = -\sqrt{8}$

11. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

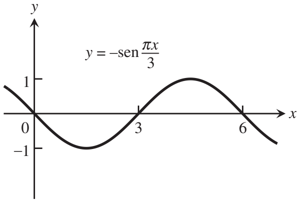
13. Periodo π



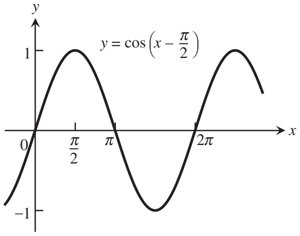
15. Periodo 2



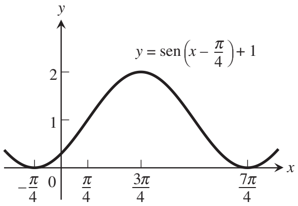
17. Periodo 6



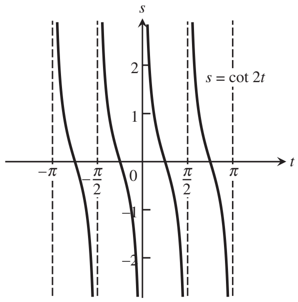
19. Periodo 2π



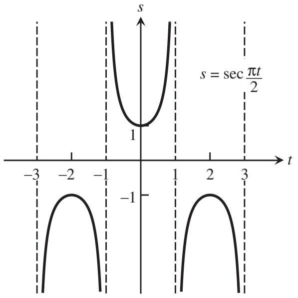
21. Periodo 2π



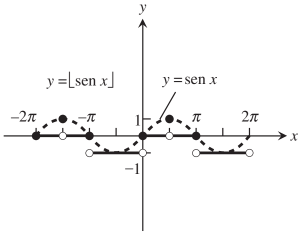
23. Periodo $\pi/2$, simétrica con respecto al origen



25. Periodo 4, simétrica con respecto al eje y



29. $D: (-\infty, \infty)$, $R: y = -1, 0, 1$

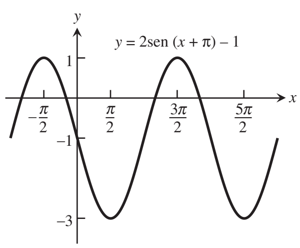


39. $-\cos x$ **41.** $-\cos x$ **43.** $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **45.** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

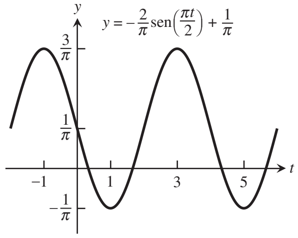
47. $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ **49.** $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$ **51.** $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

53. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **59.** $\sqrt{7} \approx 2.65$ **63.** $a = 1.464$

65. $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$



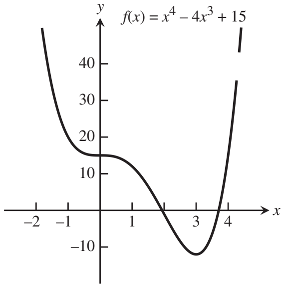
67. $A = -\dfrac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \dfrac{1}{\pi}$



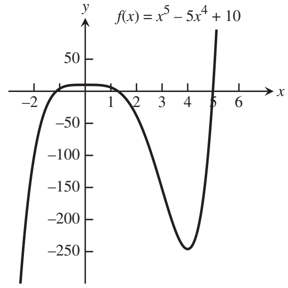
Sección 1.4, p. 34

1. d **3.** d

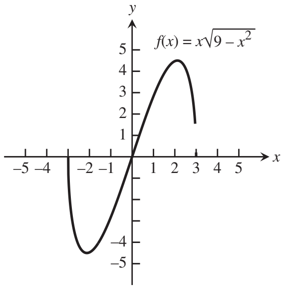
5. $[-3, 5]$ por $[-15, 40]$



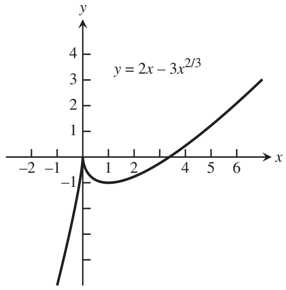
7. $[-3, 6]$ por $[-250, 50]$



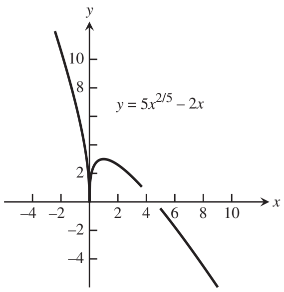
9. $[-3, 3]$ por $[-6, 6]$



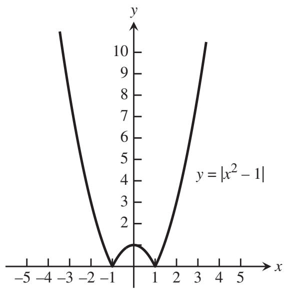
11. $[-2, 6]$ por $[-5, 4]$



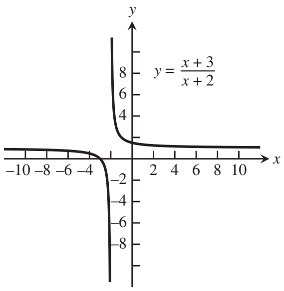
13. $[-2, 8]$ por $[-5, 10]$



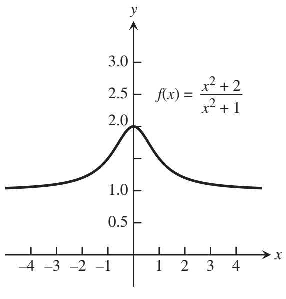
15. $[-3, 3]$ por $[0, 10]$



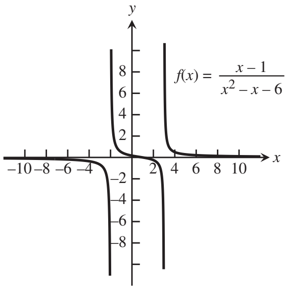
17. $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$



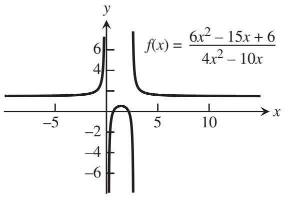
19. $[-4, 4]$ por $[0, 3]$



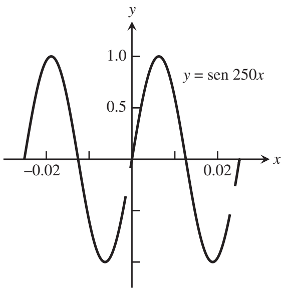
21. $[-10, 10]$ por $[-6, 6]$



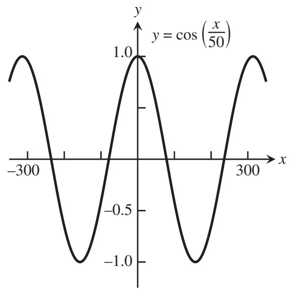
23. $[-6, 10]$ por $[-6, 6]$



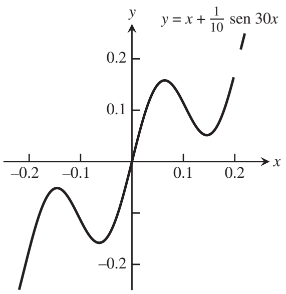
25. $\left[-\dfrac{\pi}{125}, \dfrac{\pi}{125}\right]$ por $[-1.25, 1.25]$



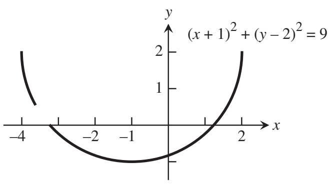
27. $[-100\pi, 100\pi]$ por $[-1.25, 1.25]$



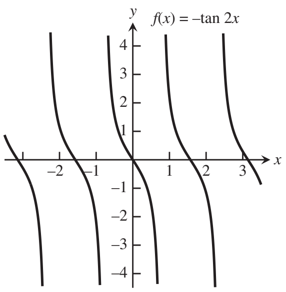
29. $\left[-\dfrac{\pi}{15}, \dfrac{\pi}{15}\right]$ por $[-0.25, 0.25]$



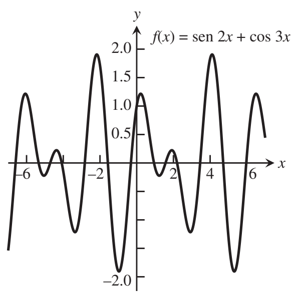
31.



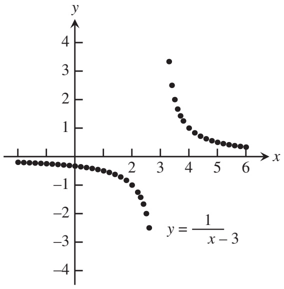
33.



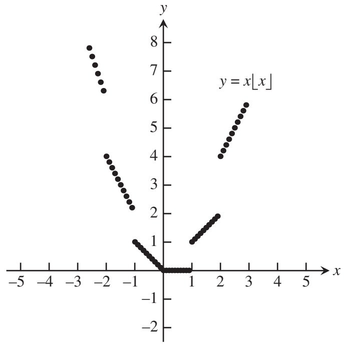
35.



37.



39.



Ejercicios de práctica, pp. 35–36

1. $A = \pi r^2, C = 2\pi r, A = \dfrac{C^2}{4\pi}$ **3.** $x = \tan\theta, y = \tan^2\theta$

5. Origen **7.** Ninguna **9.** Par **11.** Par

13. Impar **15.** Ninguna

17. **(a)** Par **(b)** Impar **(c)** Impar **(d)** Par **(e)** Par

19. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $[-2, \infty)$

21. **(a)** Dominio: $[-4, 4]$ **(b)** Rango: $[0, 4]$

23. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $(-3, \infty)$

25. **(a)** Dominio: todos los reales **(b)** Rango: $[-3, 1]$

27. **(a)** Dominio: $(3, \infty)$ **(b)** Rango: todos los reales

29. **(a)** Creciente **(b)** Ninguna **(c)** Decreciente **(d)** Creciente

31. **(a)** Dominio: $[-4, 4]$ **(b)** Rango: $[0, 2]$

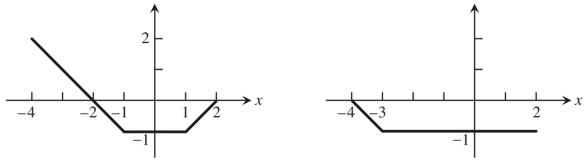
33. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

35. **(a)** 1 **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt{2.5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ **(c)** $x, x \ne 0$

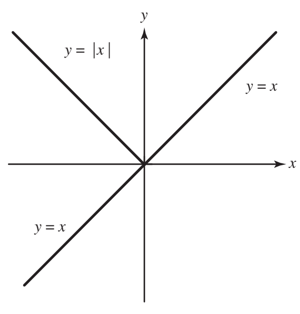
(d) $\dfrac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2}+2}}$

37. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x, x \ge -2, (g \circ f)(x) = \sqrt{4-x^2}$
(b) Dominio $(f \circ g)$: $[-2, \infty)$, dominio $(g \circ f)$: $[-2, 2]$
(c) Rango $(f \circ g)$: $(-\infty, 2]$, rango $(g \circ f)$: $[0, 2]$

39.



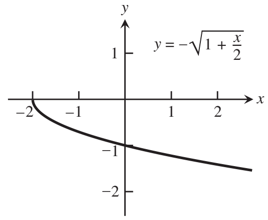
41. Remplace la parte para $x < 0$ con imágenes de espejo de la parte para $x > 0$ con la finalidad de formar la nueva gráfica simétrica con respecto al eje y.



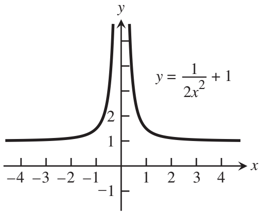
43. Refleja la parte para $y < 0$ con respecto al eje x
45. Refleja la parte para $y < 0$ con respecto al eje x
47. Agrega la imagen de espejo de la parte para $x > 0$ con la finalidad de formar la nueva gráfica simétrica con respecto al eje y

49. **(a)** $y = g(x-3) + \frac{1}{2}$ **(b)** $y = g\left(x + \frac{2}{3}\right) - 2$
(c) $y = g(-x)$ **(d)** $y = -g(x)$ **(e)** $y = 5g(x)$
(f) $y = g(5x)$

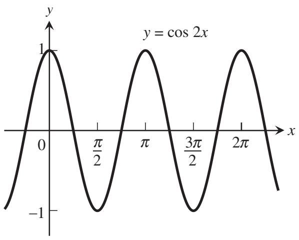
51.



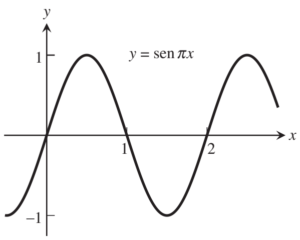
53.



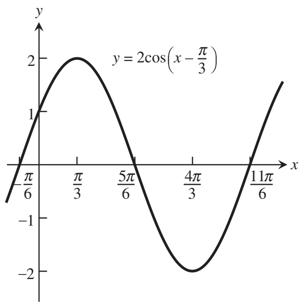
55. Periodo π



57. Periodo 2



59.



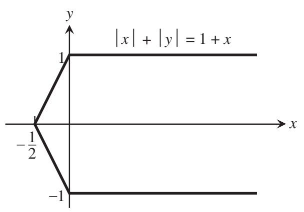
61. **(a)** $a = 1 \quad b = \sqrt{3}$ **(b)** $a = 2\sqrt{3}/3 \quad c = 4\sqrt{3}/3$

63. **(a)** $a = \dfrac{b}{\tan B}$ **(b)** $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$

65. ≈ 16.98 m **67.** **(b)** 4π

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 37–38

1. Sí. Por ejemplo: $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x$ o $f(x) = 2x$ y $g(x) = x/2$ o $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$.
3. Si $f(x)$ es impar, entonces $g(x) = f(x) - 2$ no es impar. $g(x)$ no es par a menos que $f(x) = 0$ para toda x. Si f es par, entonces $g(x) = f(x) - 2$ también es par.
5.



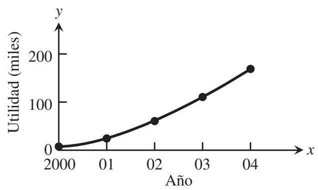
CAPÍTULO 2

Sección 2.1, pp. 44–46

1. **(a)** 19 **(b)** 1
3. **(a)** $-\dfrac{4}{\pi}$ **(b)** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ **5.** 1
7. **(a)** 4 **(b)** $y = 4x - 7$
9. **(a)** 2 **(b)** $y = 2x - 7$
11. **(a)** 12 **(b)** $y = 12x - 16$
13. **(a)** -9 **(b)** $y = -9x - 2$
15. Sus estimaciones podrían no coincidir completamente con éstas.
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

Las unidades apropiadas son m/seg.
(b) $\approx$ 50 m/sec o 180 km/h
17. **(a)**



(b) $\approx$ \$56,000/año
(c) $\approx$ \$42,000/año
19. **(a)** 0.414213, 0.449489, $(\sqrt{1+h} - 1)/h$ **(b)** $g(x) = \sqrt{x}$

$1 + h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.0000005
$(\sqrt{1+h} - 1)/h$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(c) 0.5 **(d)** 0.5
21. **(a)** 15 mph, 3.3 mph, 10 mph **(b)** 10 mph, 0 mph, 4 mph
(c) 20 mph cuando $t = 3.5$ hrs.

Sección 2.2, pp. 54–57

1. **(a)** No existe. Cuando x tiende a 1 por la derecha, $g(x)$ tiende a 0. Cuando x tiende a 1 por la izquierda, $g(x)$ se aproxima a 1. No existe un único número L con el que todos los valores de $g(x)$ se hagan arbitrariamente cercanos a L cuando $x \to 1$.
(b) 1 **(c)** 0 **(d)** 1/2
3. **(a)** Verdadero **(b)** Verdadero **(c)** Falso **(d)** Falso
(e) Falso **(f)** Verdadero **(g)** Verdadero
5. Cuando x tiende a 0 por la izquierda, $x/|x|$ tiende a -1. Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $x/|x|$ tiende a 1. No existe un único número L para el que todos los valores de la función se hagan arbitrariamente cercanos a él cuando $x \to 0$.
7. Nada se puede decir. **9.** No; no; no **11.** -9 **13.** -8
15. 5/8 **17.** 27 **19.** 16 **21.** 3/2 **23.** 1/10 **25.** -7
27. 3/2 **29.** $-1/2$ **31.** -1 **33.** 4/3 **35.** 1/6 **37.** 4
39. 1/2 **41.** 3/2 **43.** -1 **45.** 1 **47.** 1/3 **49.** $\sqrt{4 - \pi}$

51. **(a)** Regla del cociente
(b) Reglas de la diferencia y de la potencia
(c) Reglas de la suma y del múltiplo constante
53. **(a)** -10 **(b)** -20 **(c)** -1 **(d)** $5/7$
55. **(a)** 4 **(b)** -21 **(c)** -12 **(d)** $-7/3$
57. 2 **59.** 3 **61.** $1/(2\sqrt{7})$ **63.** $\sqrt{5}$
65. **(a)** El límite es 1.
67. **(a)** $f(x) = (x^2 - 9)/(x + 3)$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -6$
69. **(a)** $G(x) = (x + 6)/(x^2 + 4x - 12)$

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	$-.126582$	$-.1251564$	$-.1250156$	$-.1250015$	$-.1250001$	$-.1250000$

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	$-.123456$	$-.124843$	$-.124984$	$-.124998$	$-.124999$	$-.124999$

(c) $\lim\limits_{x \to -6} G(x) = -1/8 = -0.125$
71. **(a)** $f(x) = (x^2 - 1)/(|x| - 1)$

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	$-.9$	$-.99$	$-.999$	$-.9999$	$-.99999$	$-.999999$
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$
73. **(a)** $g(\theta) = (\text{sen}\,\theta)/\theta$

θ	.1	.01	.001	.0001	.00001	.000001
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

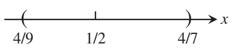
θ	$-.1$	$-.01$	$-.001$	$-.0001$	$-.00001$	$-.000001$
$g(\theta)$	.998334	.999983	.999999	.999999	.999999	.999999

$\lim\limits_{\theta \to 0} g(\theta) = 1$
75. $c = 0, 1, -1$; el límite es 0 en $c = 0$ y 1 en $c = 1, -1$.
77. 7 **79.** **(a)** 5 **(b)** 5

Sección 2.3, pp. 63–66

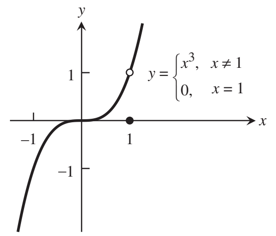
1. $\delta = 2$

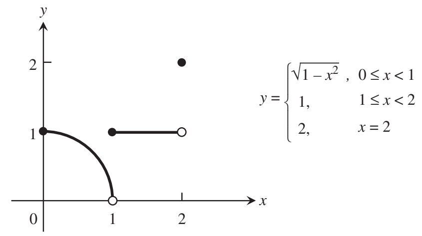

3. $\delta = 1/2$


5. $\delta = 1/18$


7. $\delta = 0.1$ **9.** $\delta = 7/16$ **11.** $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0.36$
15. $(3.99, 4.01)$, $\delta = 0.01$ **17.** $(-0.19, 0.21)$, $\delta = 0.19$
19. $(3, 15)$, $\delta = 5$ **21.** $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$
23. $(-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$, $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12$
25. $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12$
27. $\left(2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m}\right)$, $\delta = \frac{0.03}{m}$
29. $\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{c}{m} + \frac{1}{2}\right)$, $\delta = \frac{c}{m}$ **31.** $L = -3$, $\delta = 0.01$
33. $L = 4$, $\delta = 0.05$ **35.** $L = 4$, $\delta = 0.75$
55. $[3.384, 3.387]$. Para asegurar, el extremo izquierdo se redondeó hacia arriba y el extremo derecho hacia abajo.
59. El límite no existe cuando x se aproxima a 3.

Sección 2.4, pp. 71–73

1. **(a)** Verdadero **(b)** Verdadero **(c)** Falso **(d)** Verdadero
(e) Verdadero **(f)** Verdadero **(g)** Falso **(h)** Falso
(i) Falso **(j)** Falso **(k)** Verdadero **(l)** Falso
3. **(a)** 2, 1 **(b)** No, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$
(c) 3, 3 **(d)** Sí, 3
5. **(a)** No **(b)** Sí, 0 **(c)** No
7. **(a)**


(b) 1, 1 **(c)** Sí, 1
9. **(a)** $D: 0 \leq x \leq 2, R: 0 < y \leq 1$ y $y = 2$
(b) $(0, 1) \cup (1, 2)$ **(c)** $x = 2$ **(d)** $x = 0$


11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** **(a)** 1 **(b)** -1
19. **(a)** 1 **(b)** $2/3$ **21.** 1 **23.** $3/4$ **25.** 2 **27.** $1/2$
29. 2 **31.** 0 **33.** 1 **35.** $1/2$ **37.** 0 **39.** $3/8$
41. 3 **47.** $\delta = \epsilon^2$, $\lim\limits_{x \to 5^+} \sqrt{x - 5} = 0$
51. **(a)** 400 **(b)** 399 **(c)** El límite no existe.

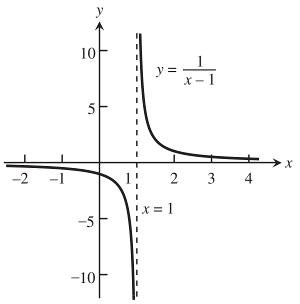
Sección 2.5, pp. 82–84

1. No; discontinua en $x = 2$; no está definida en $x = 2$
3. Continua **5.** **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** Sí **(d)** Sí
7. **(a)** No **(b)** No **9.** 0 **11.** 1, removible; 0, no removible
13. Toda x excepto $x = 2$ **15.** Toda x excepto $x = 3, x = 1$
17. Toda x **19.** Toda x excepto $x = 0$
21. Toda x excepto $x = n\pi/2$, donde n es cualquier entero
23. Toda x excepto $n\pi/2$, donde n es un entero impar
25. Toda $x \geq -3/2$ **27.** Toda x **29.** Toda x
31. 0; continua en $x = \pi$ **33.** 1; continua en $y = 1$
35. $\sqrt{2}/2$; continua en $t = 0$ **37.** $g(3) = 6$
39. $f(1) = 3/2$ **41.** $a = 4/3$ **43.** $a = -2, 3$
45. $a = 5/2, b = -1/2$ **69.** $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$
71. $x \approx 1.7549$ **73.** $x \approx 3.5156$ **75.** $x \approx 0.7391$

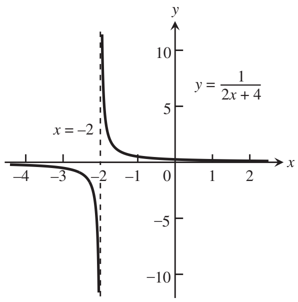
Sección 2.6, pp. 94–96

1. **(a)** 0 **(b)** -2 **(c)** 2 **(d)** No existe **(e)** -1
(f) ∞ **(g)** No existe **(h)** 1 **(i)** 0
3. **(a)** -3 **(b)** -3 **5.** **(a)** $1/2$ **(b)** $1/2$ **7.** **(a)** $-5/3$
(b) $-5/3$ **9.** 0 **11.** -1 **13.** **(a)** $2/5$ **(b)** $2/5$
15. **(a)** 0 **(b)** 0 **17.** **(a)** 7 **(b)** 7 **19.** **(a)** 0 **(b)** 0
21. **(a)** $-2/3$ **(b)** $-2/3$ **23.** 2 **25.** ∞ **27.** 0 **29.** 1
31. ∞ **33.** 1 **35.** $1/2$ **37.** ∞ **39.** $-\infty$ **41.** $-\infty$
43. ∞ **45.** **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$ **47.** ∞ **49.** ∞ **51.** $-\infty$
53. **(a)** ∞ **(b)** $-\infty$ **(c)** $-\infty$ **(d)** ∞
55. **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞ **(c)** 0 **(d)** $3/2$
57. **(a)** $-\infty$ **(b)** $1/4$ **(c)** $1/4$ **(d)** $1/4$ **(e)** Será $-\infty$.
59. **(a)** $-\infty$ **(b)** ∞
61. **(a)** ∞ **(b)** ∞ **(c)** ∞ **(d)** ∞

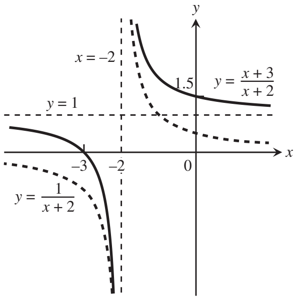
63.



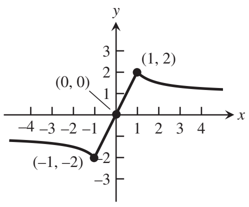
65.



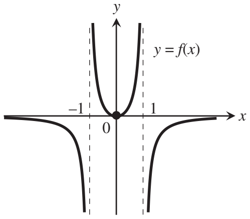
67.



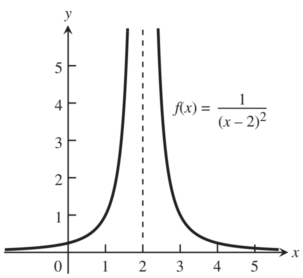
69. Aquí está una posibilidad.



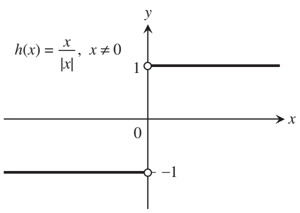
71. Aquí está una posibilidad.



73. Aquí está una posibilidad.



75. Aquí está una posibilidad.



79. A lo suma una

81. 0 **83.** $-3/4$ **85.** $5/2$

93. **(a)** Para todo número real positivo B existe un correspondiente número $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > B.$$

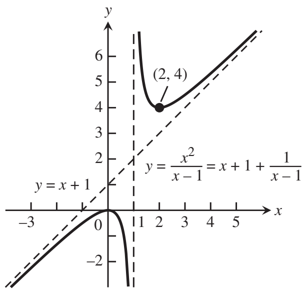
(b) Para todo número real negativo $-B$ existe un correspondiente número $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < -B.$$

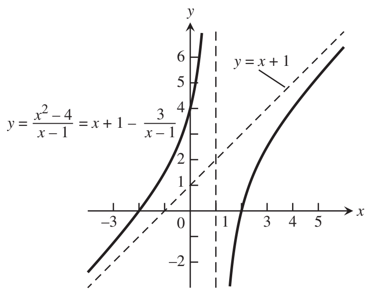
(c) Para todo número real negativo $-B$ existe un correspondiente número $\delta > 0$ tal que para toda x

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < -B.$$

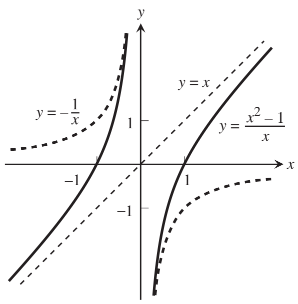
99.



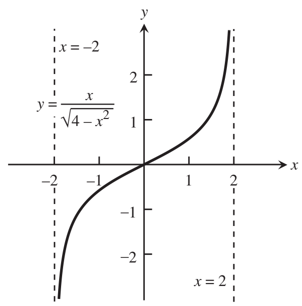
101.



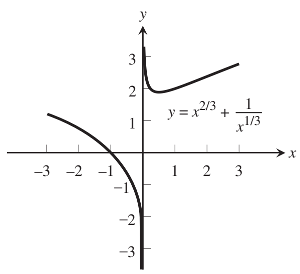
103.



105.



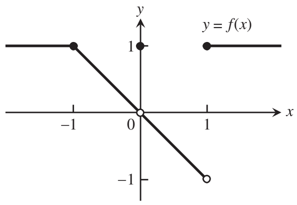
107.



109. En ∞: ∞, en $-\infty$: 0

Ejercicios de práctica, pp. 97–98

1. En $x = -1$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$, por lo que $\lim_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$; continua en $x = -1$.
En $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, así que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Sin embargo, $f(0) \neq 0$, por lo que es discontinua en $x = 0$. La discontinuidad puede eliminarse redefiniendo $f(0)$ como 0.
En $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$, por lo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. La función es discontinua en $x = 1$, y la discontinuidad no se puede eliminar.



3. **(a)** -21 **(b)** 49 **(c)** 0 **(d)** 1 **(e)** 1 **(f)** 7
(g) -7 **(h)** $-\frac{1}{7}$ **5.** 4

7. **(a)** $(-\infty, +\infty)$ **(b)** $[0, \infty)$ **(c)** $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
(d) $(0, \infty)$

9. **(a)** No existe **(b)** 0

11. $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** $2/3$ **19.** $2/\pi$ **21.** 1 **23.** 4

25. 2 **27.** 0 **29.** No en ambos casos, ya que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe y $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe.

31. Sí, f tiene una extensión continua, para $a = 1$ con $f(1) = 4/3$.

33. No **37.** $2/5$ **39.** 0 **41.** $-\infty$ **43.** 0 **45.** 1

47. **(a)** $x = 3$ **(b)** $x = 1$ **(c)** $x = -4$

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 98–100

3. 0; el límite por la izquierda fue necesario, ya que la función no está definida para $v > c$. **5.** $65 < t < 75$; dentro de 5 °F

13. **(a)** B **(b)** A **(c)** A **(d)** A

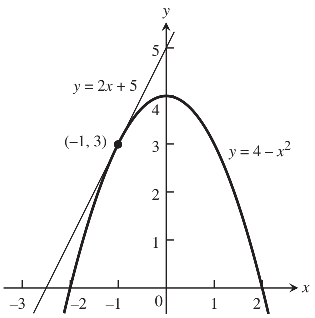
21. **(a)** $\lim_{a\to 0} r_+(a) = 0.5$, $\lim_{a\to -1^+} r_+(a) = 1$
(b) $\lim_{a\to 0} r_-(a)$ no existe, $\lim_{a\to -1^+} r_-(a) = 1$

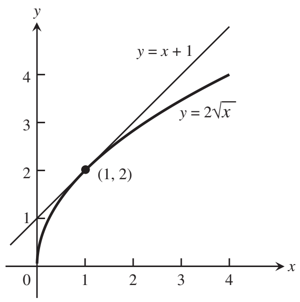
25. 0 **27.** 1 **29.** 4 **31.** $y = 2x$ **33.** $y = x$, $y = -x$

CAPÍTULO 3

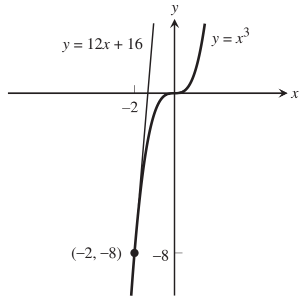
Sección 3.1, pp. 105–106

1. P_1: $m_1 = 1$, P_2: $m_2 = 5$ **3.** P_1: $m_1 = 5/2$, P_2: $m_2 = -1/2$
5. $y = 2x + 5$ **7.** $y = x + 1$





9. $y = 12x + 16$



11. $m = 4$, $y - 5 = 4(x - 2)$
13. $m = -2$, $y - 3 = -2(x - 3)$
15. $m = 12$, $y - 8 = 12(t - 2)$
17. $m = \frac{1}{4}$, $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$
19. $m = -10$ **21.** $m = -1/4$ **23.** $(-2, -5)$
25. $y = -(x + 1)$, $y = -(x - 3)$ **27.** 19.6 m/seg
29. 6π **33.** Sí **35.** Sí **37.** **(a)** En ninguna parte
39. **(a)** En $x = 0$ **41.** **(a)** En ninguna parte
43. **(a)** En $x = 1$ **45.** **(a)** En $x = 0$

Sección 3.2, pp. 112–115

1. $-2x, 6, 0, -2$ **3.** $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

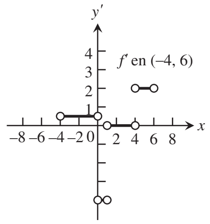
5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$ **7.** $6x^2$ **9.** $\frac{1}{(2t + 1)^2}$

11. $\frac{-1}{2(q + 1)\sqrt{q + 1}}$ **13.** $1 - \frac{9}{x^2}, 0$ **15.** $3t^2 - 2t, 5$

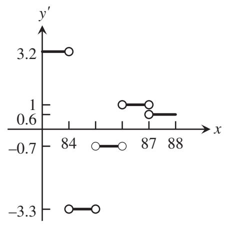
17. $\frac{-4}{(x - 2)\sqrt{x - 2}}$, $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$ **19.** 6

21. $1/8$ **23.** $\frac{-1}{(x + 2)^2}$ **25.** $\frac{-1}{(x - 1)^2}$ **27.** b **29.** d

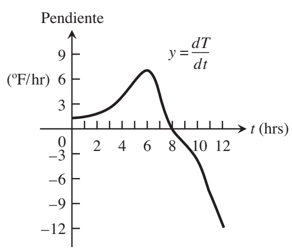
31. **(a)** $x = 0, 1, 4$
(b)



33.



35. **(a)** **i)** 1.5 °F/hr **ii)** 2.9 °F/hr
iii) 0 °F/hr **iv)** -3.7 °F/hr
(b) 7.3 °F/hr a las 12 P.M., -11 °F/hr a las 6 P.M.
(c)



37. Ya que $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$

mientras que $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$,

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ no existe y $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

39. Como $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ mientras que

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1}{2}$, $\quad f'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

no existe y $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

41. Como $f(x)$ no es continua en $x = 0$, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

43. **(a)** $-3 \le x \le 2$ **(b)** Ninguna **(c)** Ninguna

45. **(a)** $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ **(b)** Ninguna **(c)** $x = 0$

47. **(a)** $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ **(b)** $x = 0$ **(c)** Ninguna

Sección 3.3, pp. 122–124

1. $\dfrac{dy}{dx} = -2x, \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$

3. $\dfrac{ds}{dt} = 15t^2 - 15t^4, \dfrac{d^2s}{dt^2} = 30t - 60t^3$

5. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 - 1, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 8x$

7. $\dfrac{dw}{dz} = -\dfrac{6}{z^3} + \dfrac{1}{z^2}, \dfrac{d^2w}{dz^2} = \dfrac{18}{z^4} - \dfrac{2}{z^3}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = 12x - 10 + 10x^{-3}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12 - 30x^{-4}$

11. $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{-2}{3s^3} + \dfrac{5}{2s^2}, \dfrac{d^2r}{ds^2} = \dfrac{2}{s^4} - \dfrac{5}{s^3}$

13. $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

15. $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \dfrac{1}{x^2}$ **17.** $y' = \dfrac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{(x + 0.5)^2}$ **21.** $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{t^2 - 2t - 1}{(1 + t^2)^2}$

23. $f'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 1)^2}$ **25.** $v' = -\dfrac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

27. $y' = \dfrac{-4x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2(x^2 + x + 1)^2}$

29. $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12,$ $y^{(n)} = 0$ para $n \ge 5$

31. $y' = 3x^2 + 4x - 8, y'' = 6x + 4, y''' = 6,$ $y^{(n)} = 0$ para $n \ge 4$

33. $y' = 2x - 7x^{-2}, y'' = 2 + 14x^{-3}$

35. $\dfrac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \dfrac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

37. $\dfrac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \dfrac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

39. $\dfrac{dp}{dq} = \dfrac{1}{6}q + \dfrac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \dfrac{d^2p}{dq^2} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

41. **(a)** 13 **(b)** -7 **(c)** $7/25$ **(d)** 20

43. **(a)** $y = -\dfrac{x}{8} + \dfrac{5}{4}$ **(b)** $m = -4$ en $(0, 1)$

(c) $y = 8x - 15, y = 8x + 17$

45. $y = 4x, y = 2$ **47.** $a = 1, b = 1, c = 0$

49. $(2, 4)$ **51.** $(0, 0), (4, 2)$ **53.** **(a)** $y = 2x + 2$ **(c)** $(2, 6)$

55. 50 **57.** $a = -3$

59. $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$

61. La regla del producto entonces es la regla del múltiplo constante, por lo que la última es un caso especial de la regla del producto.

63. **(a)** $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uvw' + uv'w + u'vw$

(b) $\dfrac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4) = u_1u_2u_3u_4' + u_1u_2u_3'u_4 + u_1u_2'u_3u_4 + u_1'u_2u_3u_4$

(c) $\dfrac{d}{dx}(u_1 \cdots u_n) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}u_n' + u_1u_2 \cdots u_{n-2}u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2 \cdots u_n$

65. $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{nRT}{(V - nb)^2} + \dfrac{2an^2}{V^3}$

Sección 3.4, pp. 132–135

1. **(a)** -2 m, -1 m/seg

(b) 3 m/seg, 1 m/seg; 2 m/seg^2, 2 m/seg^2

(c) Cambia de dirección en $t = 3/2$ seg

3. **(a)** -9 m, -3 m/seg

(b) 3 m/seg, 12 m/seg; 6 m/seg^2, -12 m/seg^2

(c) No cambia de dirección

5. **(a)** -20 m, -5 m/seg

(b) 45 m/seg, $(1/5)$ m/seg; 140 m/seg^2, $(4/25)$ m/seg^2

(c) No cambia de dirección

7. **(a)** $a(1) = -6$ m/seg^2, $a(3) = 6$ m/seg^2

(b) $v(2) = 3$ m/seg **(c)** 6 m

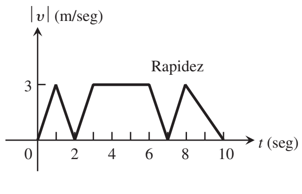
9. Marte: ≈ 7.5 seg, Júpiter: ≈ 1.2 seg **11.** $g_s = 0.75$ m/seg^2

13. **(a)** $v = -32t, |v| = 32t$ ft/seg, $a = -32$ ft/seg^2

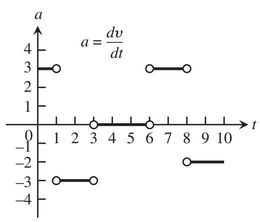
(b) $t \approx 3.3$ seg **(c)** $v \approx -107.0$ ft/seg

15. **(a)** $t = 2, t = 7$ **(b)** $3 \le t \le 6$

(c)



(d)



17. **(a)** 190 ft/seg **(b)** 2 seg **(c)** 8 seg, 0 ft/seg

(d) 10.8 seg, 90 ft/seg **(e)** 2.8 seg

(f) La máxima aceleración se alcanza 2 segundos después del lanzamiento.

(g) La aceleración es constante entre 2 y 10.8 seg, -32 ft/seg^2

19. **(a)** $\dfrac{4}{7}$ sec, 280 cm/seg **(b)** 560 cm/seg, 980 cm/seg^2

(c) 29.75 flashes/seg

21. $C =$ posición, $A =$ velocidad, $B =$ aceleración

23. **(a)** \$110/máquina **(b)** \$80 **(c)** \$79.90

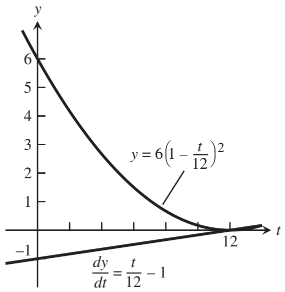
25. **(a)** $b'(0) = 10^4$ bacterias/h **(b)** $b'(5) = 0$ bacterias/h

(c) $b'(10) = -10^4$ bacterias/h

27. **(a)** $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{12} - 1$

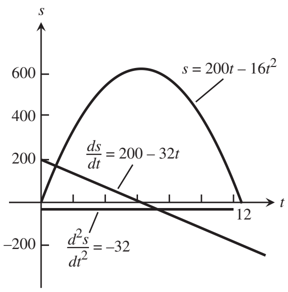
(b) El mayor valor de $\dfrac{dy}{dt}$ es 0 m/h cuando $t = 12$ y el menor valor de $\dfrac{dy}{dt}$ es -1 m/h cuando $t = 0$.

(c)



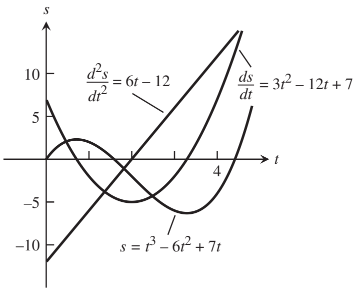
29. $t = 25$ seg $\quad D = \dfrac{6250}{9}$ m

31.



(a) $v = 0$ cuando $t = 6.25$ seg.
(b) $v > 0$ cuando $0 \le t < 6.25 \Rightarrow$ el objeto se mueve hacia arriba; $v < 0$ cuando $6.25 < t \le 12.5 \Rightarrow$ el objeto se mueve hacia abajo.
(c) El objeto cambia de dirección en $t = 6.25$ seg.
(d) La rapidez del objeto aumenta en (6.25, 12.5] y disminuye en [0, 6.25).
(e) El objeto se mueve más rápido en los extremos $t = 0$ y $t = 12.5$ cuando está viajando a 200 ft/seg. Su movimiento es más lento en $t = 6.25$ cuando la rapidez es 0.
(f) Cuando $t = 6.25$ el objeto está a $s = 625$ m del origen y alejándose de él.

33.



(a) $v = 0$ cuando $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg

(b) $v < 0$ cuando $\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3} < t < \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} \Rightarrow$ el objeto se mueve hacia la izquierda; $v > 0$ cuando $0 \le t < \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}$ o $\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3} < t \le 4 \Rightarrow$ el objeto se mueve hacia la derecha.

(c) El objeto cambia de dirección en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg.

(d) El objeto aumenta su rapidez en $\left(\dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}, 4\right]$ y la disminuye en $\left[0, \dfrac{6 - \sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}\right)$.

(e) El objeto se mueve más rápidamente en $t = 0$ y $t = 4$ cuando se mueve a 7 unidades/seg y se mueve más lento en $t = \dfrac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ seg.

(f) Cuando $t = \dfrac{6 + \sqrt{15}}{3}$ el objeto está en la posición $s \approx -6.303$ unidades y se aleja del origen.

Sección 3.5, pp. 139–142

1. $-10 - 3 \operatorname{sen} x$ **3.** $2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

5. $-\csc x \cot x - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **7.** $\operatorname{sen} x \sec^2 x + \operatorname{sen} x$ **9.** 0

11. $\dfrac{-\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$ **13.** $4 \tan x \sec x - \csc^2 x$ **15.** $x^2 \cos x$

17. $3x^2 \operatorname{sen} x \cos x + x^3 \cos^2 x - x^3 \operatorname{sen}^2 x$

19. $\sec^2 t - 1$ **21.** $\dfrac{-2 \csc t \cot t}{(1 - \csc t)^2}$ **23.** $-\theta\,(\theta \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta)$

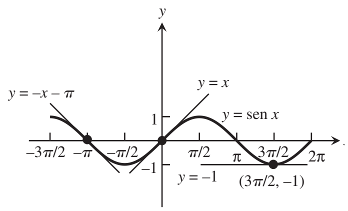
25. $\sec \theta \csc \theta\,(\tan \theta - \cot \theta) = \sec^2 \theta - \csc^2 \theta$

27. $\sec^2 q$ **29.** $\sec^2 q$

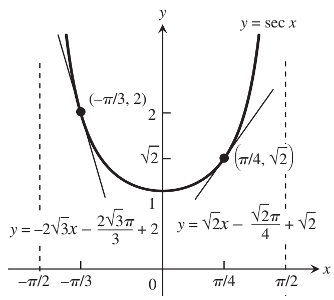
31. $\dfrac{q^3 \cos q - q^2 \operatorname{sen} q - q \cos q - \operatorname{sen} q}{(q^2 - 1)^2}$

33. **(a)** $2 \csc^3 x - \csc x$ **(b)** $2 \sec^3 x - \sec x$

35.

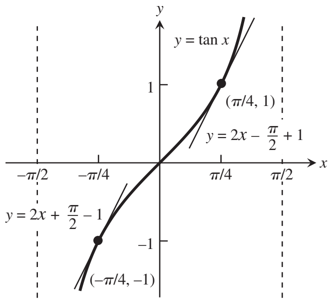


37.



39. Sí, en $x = \pi$ **41.** No

43. $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$



45. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$ **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$

47. 0 **49.** $\sqrt{3}/2$ **51.** -1 **53.** 0

55. $-\sqrt{2}$ m/seg, $\sqrt{2}$ m/seg, $\sqrt{2}$ m/seg^2, $\sqrt{2}$ m/seg^3

57. $c = 9$ **59.** sen x

61. **(a)** **i)** 10 cm **ii)** 5 cm **iii)** $-5\sqrt{2} \approx -7.1$ cm
(b) **i)** 0 cm/seg **ii)** $-5\sqrt{3} \approx -8.7$ cm/seg
iii) $-5\sqrt{2} \approx -7.1$ cm/seg

Sección 3.6, pp. 147–149

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x + 1)$ **5.** $-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x$

7. $10\sec^2(10x - 5)$

9. Con $u = (2x + 1), y = u^5 : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x + 1)^4$

11. Con $u = (1 - (x/7)), y = u^{-7} : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-8}$

13. Con $u = ((x^2/8) + x - (1/x)), y = u^4 : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

15. Con $u = \tan x, y = \sec u : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

17. Con $u = \operatorname{sen} x, y = u^3 : \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\cos x = 3\operatorname{sen}^2 x(\cos x)$

19. $-\frac{1}{2\sqrt{3 - t}}$ **21.** $\frac{4}{\pi}(\cos 3t - \operatorname{sen} 5t)$ **23.** $\frac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

25. $2x\operatorname{sen}^4 x + 4x^2\operatorname{sen}^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\operatorname{sen} x$

27. $(3x - 2)^6 - \frac{1}{x^3\left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}$ **29.** $\frac{(4x + 3)^3(4x + 7)}{(x + 1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$ **33.** $\frac{x\sec x\tan x + \sec x}{2\sqrt{7 + x\sec x}}$

35. $\frac{2\operatorname{sen}\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$ **37.** $-2\operatorname{sen}(\theta^2)\operatorname{sen} 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

39. $\left(\frac{t + 2}{2(t + 1)^{3/2}}\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{t + 1}}\right)$

41. $2\pi\operatorname{sen}(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$ **43.** $\frac{8\operatorname{sen}(2t)}{(1 + \cos 2t)^5}$

45. $10t^{10}\tan^9 t\sec^2 t + 10t^9\tan^{10} t$ **47.** $\frac{-3t^6(t^2 + 4)}{(t^3 - 4t)^4}$

49. $-2\cos(\cos(2t - 5))(\operatorname{sen}(2t - 5))$

51. $\left(1 + \tan^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2\left(\tan^3\left(\frac{t}{12}\right)\sec^2\left(\frac{t}{12}\right)\right)$

53. $-\frac{t\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{1 + \cos(t^2)}}$ **55.** $6\tan(\operatorname{sen}^3 t)\sec^2(\operatorname{sen}^3 t)\operatorname{sen}^2 t\cos t$

57. $3(2t^2 - 5)^3(18t^2 - 5)$ **59.** $\frac{6}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

61. $2\csc^2(3x - 1)\cot(3x - 1)$ **63.** $16(2x + 1)^2(5x + 1)$

65. $5/2$ **67.** $-\pi/4$ **69.** 0 **71.** -5

73. **(a)** $2/3$ **(b)** $2\pi + 5$ **(c)** $15 - 8\pi$ **(d)** $37/6$ **(e)** -1
(f) $\sqrt{2}/24$ **(g)** $5/32$ **(h)** $-5/(3\sqrt{17})$ **75.** 5

77. **(a)** 1 **(b)** 1 **79.** $y = 1 - 4x$

81. **(a)** $y = \pi x + 2 - \pi$ **(b)** $\pi/2$

83. Se multiplica la velocidad, la aceleración y la sacudida por 2, 4 y 8, respectivamente.

85. $v(6) = \frac{2}{5}$ m/seg, $a(6) = -\frac{4}{125}$ m/seg^2

Sección 3.7, pp. 153–155

1. $\frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$ **3.** $\frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$

5. $\frac{-2x^3 + 3x^2y - xy^2 + x}{x^2y - x^3 + y}$ **7.** $\frac{1}{y(x + 1)^2}$ **9.** $\cos^2 y$

11. $\frac{-\cos^2(xy) - y}{x}$ **13.** $\frac{-y^2}{y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right) + xy}$

15. $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$ **17.** $\frac{-r}{\theta}$ **19.** $y' = -\frac{x}{y}, y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$

21. $y' = \frac{x + 1}{y}, y'' = \frac{y^2 - (x + 1)^2}{y^3}$

23. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y} + 1}, y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y} + 1)^3}$

25. -2 **27.** $(-2, 1) : m = -1, (-2, -1) : m = 1$

29. **(a)** $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$ **(b)** $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

31. **(a)** $y = 3x + 6$ **(b)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

33. **(a)** $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$ **(b)** $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

35. **(a)** $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ **(b)** $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

37. **(a)** $y = 2\pi x - 2\pi$ **(b)** $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

39. Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$ y $(\sqrt{7}, 0)$, Pendiente: -2

41. $m = -1$ en $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $m = \sqrt{3}$ en $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$

43. $(-3, 2): m = -\frac{27}{8}$; $(-3, -2): m = \frac{27}{8}$; $(3, 2): m = \frac{27}{8}$; $(3, -2): m = -\frac{27}{8}$

45. $(3, -1)$

51. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 2xy}{x^2 + 3xy^2}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + 3xy^2}{y^3 + 2xy}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$

Sección 3.8, pp. 160–163

1. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ **3.** 10 **5.** -6 **7.** $-3/2$

9. $31/13$ **11.** **(a)** $-180 \text{ m}^2/\text{min}$ **(b)** $-135 \text{ m}^3/\text{min}$

13. **(a)** $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$ **(b)** $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr \frac{dr}{dt}$
(c) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi hr \frac{dr}{dt}$

15. **(a)** 1 volt/seg **(b)** $-\frac{1}{3}$ amp/seg
(c) $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$
(d) 3/2 ohms/seg, R aumenta.

17. **(a)** $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dx}{dt}$
(b) $\frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dy}{dt}$ **(c)** $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

19. **(a)** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$
(b) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\frac{da}{dt}$
(c) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\operatorname{sen}\theta\frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a\operatorname{sen}\theta\frac{db}{dt}$

21. **(a)** $14 \text{ cm}^2/\text{seg}$, creciente **(b)** 0 cm/seg, constante
(c) $-14/13$ cm/seg, decreciente

23. **(a)** -12 ft/seg **(b)** $-59.5 \text{ ft}^2/\text{seg}$ **(c)** -1 rad/seg

25. 20 ft/seg

27. **(a)** $\frac{dh}{dt} = 11.19$ cm/min **(b)** $\frac{dr}{dt} = 14.92$ cm/min

29. **(a)** $\frac{-1}{24\pi}$ m/min **(b)** $r = \sqrt{26y - y^2}$ m
(c) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}$ m/min

31. 1 ft/min, $40\pi \text{ ft}^2/\text{min}$ **33.** 11 ft/seg

35. Creciente en $466/1681 \text{ L/min}^2$

37. -5 m/seg **39.** -1500 ft/seg

41. $\frac{5}{72\pi}$ in/min, $\frac{10}{3} \text{ in}^2/\text{min}$

43. **(a)** $-32/\sqrt{13} \approx -8.875$ ft/seg
(b) $d\theta_1/dt = 8/65$ rad/seg, $d\theta_2/dt = -8/65$ rad/seg
(c) $d\theta_1/dt = 1/6$ rad/seg, $d\theta_2/dt = -1/6$ rad/seg

Sección 3.9, pp. 173–175

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$ **5.** $L(x) = x - \pi$

7. $2x$ **9.** -5 **11.** $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

13. $f(0) = 1$. Además, $f'(x) = k(1 + x)^{k-1}$, por lo que $f'(0) = k$. Esto significa que la linealización en $x = 0$ es $L(x) = 1 + kx$.

15. **(a)** 1.01 **(b)** 1.003

17. $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)dx$ **19.** $\frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}dx$

21. $\frac{1 - y}{3\sqrt{y} + x}dx$ **23.** $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,dx$

25. $(4x^2)\sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right)dx$

27. $\frac{3}{\sqrt{x}}(\csc(1 - 2\sqrt{x})\cot(1 - 2\sqrt{x}))\,dx$

29. **(a)** .41 **(b)** .4 **(c)** .01

31. **(a)** .231 **(b)** .2 **(c)** .031

33. **(a)** $-1/3$ **(b)** $-2/5$ **(c)** $1/15$ **35.** $dV = 4\pi r_0^2\,dr$

37. $dS = 12x_0\,dx$ **39.** $dV = 2\pi r_0 h\,dr$

41. **(a)** $0.08\pi \text{ m}^2$ **(b)** 2% **43.** $dV \approx 565.5 \text{ in}^3$

45. **(a)** 2% **(b)** 4% **47.** $\frac{1}{3}$% **49.** 3%

51. La razón es igual a 37.87, por lo que un cambio en la aceleración debida a la gravedad en la Luna tiene alrededor de 39 veces el efecto de un cambio de la misma magnitud en la Tierra.

Ejercicios de práctica, pp. 176–180

1. $5x^4 - 0.25x + 0.25$ **3.** $3x(x - 2)$

5. $2(x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$

7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\tan\theta)$

9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x\tan x$

13. $8\cos^3(1 - 2t)\operatorname{sen}(1 - 2t)$

15. $5(\sec t)(\sec t + \tan t)^5$

17. $\frac{\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2\theta\operatorname{sen}\theta}}$ **19.** $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\cot\left(\frac{2}{x}\right)$

23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\tan(2x)^2 - x^{-2}\right]$

25. $-10x\csc^2(x^2)$ **27.** $8x^3\operatorname{sen}(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\operatorname{sen}^2(2x^2)$

29. $\frac{-(t + 1)}{8t^3}$ **31.** $\frac{1 - x}{(x + 1)^3}$ **33.** $\frac{-1}{2x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/2}}$

35. $\frac{-2\operatorname{sen}\theta}{(\cos\theta - 1)^2}$ **37.** $3\sqrt{2x + 1}$ **39.** $-9\left[\frac{5x + \cos 2x}{(5x^2 + \operatorname{sen} 2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\frac{y + 2}{x + 3}$ **43.** $\frac{-3x^2 - 4y + 2}{4x - 4y^{1/3}}$ **45.** $-\frac{y}{x}$

47. $\frac{1}{2y(x + 1)^2}$ **49.** $\frac{dp}{dq} = \frac{6q - 4p}{3p^2 + 4q}$

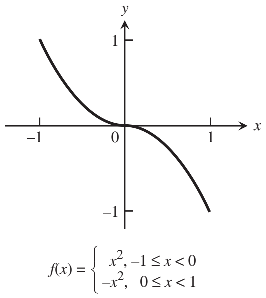
51. $\frac{dr}{ds} = (2r - 1)(\tan 2s)$

53. **(a)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}$ **(b)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2 - 1}{x^4y^3}$

55. **(a)** 7 **(b)** -2 **(c)** $5/12$ **(d)** $1/4$ **(e)** 12 **(f)** $9/2$ **(g)** $3/4$

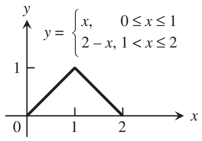
57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{-2}{(2t + 1)^2}$

65. **(a)**



(b) Sí **(c)** Sí

67. **(a)**

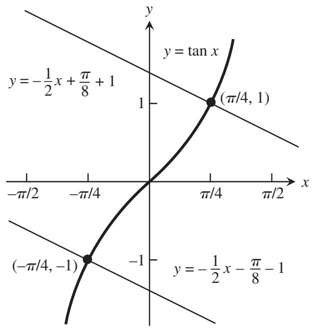


(b) Sí **(c)** No

69. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ **71.** $(-1, 27)$ y $(2, 0)$

73. **(a)** $(-2, 16)$, $(3, 11)$ **(b)** $(0, 20)$, $(1, 7)$

75.



77. $\frac{1}{4}$ **79.** 4

81. Tangente: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, normal: $y = 4x - 2$

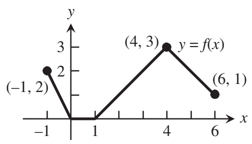
83. Tangente: $y = 2x - 4$, normal: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

85. Tangente: $y = -\frac{5}{4}x + 6$, normal: $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$

87. $(1, 1)$: $m = -\frac{1}{2}$; $(1, -1)$: m no está definida

89. $B =$ gráfica de f, $A =$ gráfica de f'

91.



93. **(a)** 0, 0 **(b)** 1700 conejos, ≈1400 conejos

95. -1 **97.** $1/2$ **99.** 4 **101.** 1

103. Para hacer que g sea continua en el origen, defina $g(0) = 1$.

105. **(a)** $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$ **(b)** $\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dh}{dt}$

(c) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt} + 2\pi r \frac{dh}{dt}$

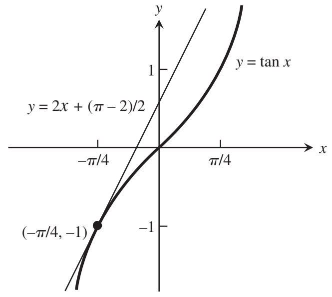
(d) $\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2r + h}\frac{dh}{dt}$

107. $-40\ \text{m}^2/\text{seg}$ **109.** 0.02 ohm/seg **111.** 22 m/seg

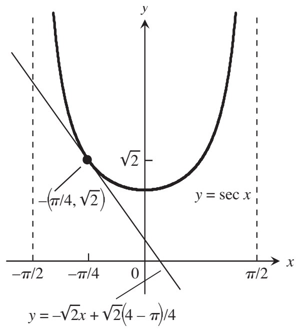
113. **(a)** $r = \frac{2}{5}h$ **(b)** $-\frac{125}{144\pi}$ ft/min

115. **(a)** $\frac{3}{5}$ km/seg o 600 m/seg **(b)** $\frac{18}{\pi}$ rpm

117. **(a)** $L(x) = 2x + \frac{\pi - 2}{2}$



(b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{4}$



119. $L(x) = 1.5x + 0.5$ **121.** $dS = \frac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2 + h_0^2}}\,dh$

123. **(a)** 4% **(b)** 8% **(c)** 12%

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 180–182

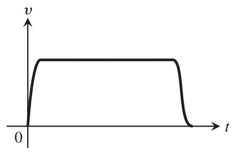
1. **(a)** $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$; $2\cos 2\theta = -2\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$; $-2\operatorname{sen} 2\theta = 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta) - 2\operatorname{sen}\theta(\cos\theta)$; $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

3. **(a)** $a = 1, b = 0, c = -\frac{1}{2}$ **(b)** $b = \cos a, c = \operatorname{sen} a$

5. $h = -4, k = \frac{9}{2}, a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

7. **(a)** $0.09y$ **(b)** Crece al 1% por año

9. Las respuestas pueden variar. Aquí está una posibilidad.



11. **(a)** 2 seg, 64 ft/seg **(b)** 12.31 seg, 393.85 ft

15. **(a)** $m = -\frac{b}{\pi}$ **(b)** $m = -1, b = \pi$

17. **(a)** $a = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$ **19.** f impar $\Rightarrow f'$ par

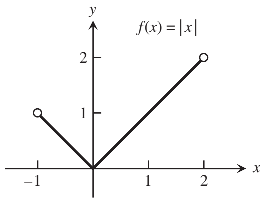
23. h' está definida, pero no es continua en $x = 0$; k' está definida y es continua en $x = 0$.

27. **(a)** 0.8156 ft **(b)** 0.00613 seg
(c) Se perderán alrededor de 8.83 min/día.

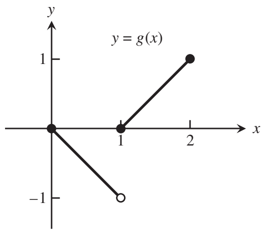
CAPÍTULO 4

Sección 4.1, pp. 189–191

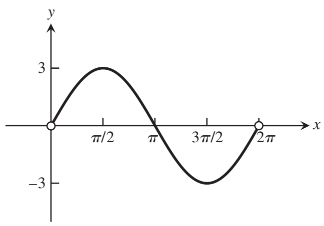
1. Mínimo absoluto en $x = c_2$; máximo absoluto en $x = b$.
3. Máximo absoluto en $x = c$; no tiene mínimo absoluto.
5. Mínimo absoluto en $x = a$; máximo absoluto en $x = c$.
7. No tiene mínimo absoluto ni máximo absoluto.
9. Máximo absoluto en (0, 5) **11.** (c) **13.** (d)
15. Mínimo absoluto en $x = 0$; no tiene máximo absoluto



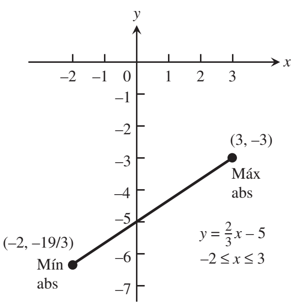
17. Máximo absoluto en $x = 2$; no tiene mínimo absoluto



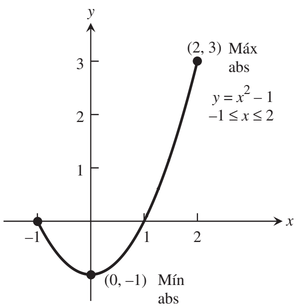
19. Máximo absoluto en $x = \pi/2$; mínimo absoluto en $x = 3\pi/2$



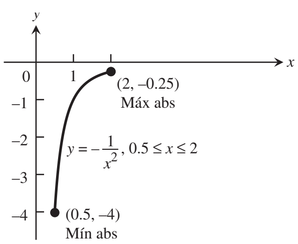
21. Máximo absoluto: -3; mínimo absoluto: $-19/3$



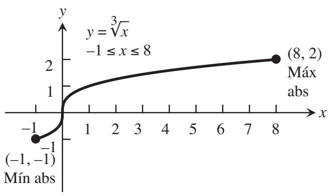
23. Máximo absoluto: 3; mínimo absoluto: -1



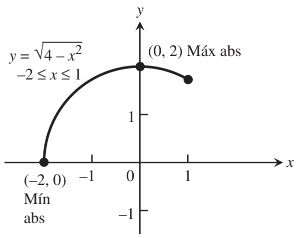
25. Máximo absoluto: -0.25; mínimo absoluto: -4



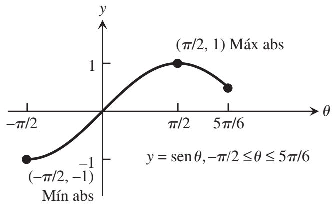
27. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



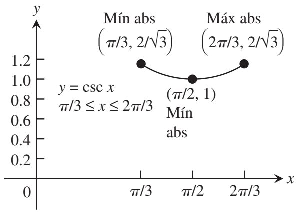
29. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: 0



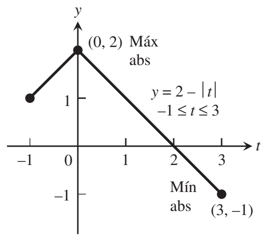
31. Máximo absoluto: 1; mínimo absoluto: -1



33. Máximo absoluto: $2/\sqrt{3}$; mínimo absoluto: 1



35. Máximo absoluto: 2; mínimo absoluto: -1



37. Creciente en (0, 8), decreciente en $(-1, 0)$; máximo absoluto 16 en $x = 8$; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$
39. Creciente en $(-32, 1)$; máximo absoluto: 1 en $\theta = 1$; mínimo absoluto: -8 en $\theta = -32$
41. $x = 3$
43. $x = 1, x = 4$
45. $x = 1$
47. $x = 0$ y $x = 4$
49. El valor mínimo es 1 en $x = 2$.
51. Máximo local en $(-2, 17)$; mínimo local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{41}{27}\right)$
53. El valor mínimo es 0 en $x = -1$ y $x = 1$.
55. Existe un mínimo local en (0, 1).
57. Valor máximo es $\frac{1}{2}$ en $x = 1$; el valor mínimo es $-\frac{1}{2}$ en $x = -1$.

59.

Punto crítico o extremo del intervalo	Derivada	Extremo	Valor
$x = -\frac{4}{5}$	0	Máx. local	$\frac{12}{25}10^{1/3} \approx 1.034$
$x = 0$	No definida	Mín. local	0

61.

Punto crítico o extremo del intervalo	Derivada	Extremo	Valor
$x = -2$	No definida	Máx. local	0
$x = -\sqrt{2}$	0	Mínimo	-2
$x = \sqrt{2}$	0	Máximo	2
$x = 2$	No definida	Mín. local	0

63.

Punto crítico o extremo del intervalo	Derivada	Extremo	Valor
$x = 1$	No definida	Mínimo	2

65.

Punto crítico o extremo del intervalo	Derivada	Extremo	Valor
$x = -1$	0	Máximo	5
$x = 1$	No definida	Mín. local	1
$x = 3$	0	Máximo	5

67. **(a)** No
(b) La derivada está definida y no es cero para $x \neq 2$. Además, $f(2) = 0$ y $f(x) > 0$ para toda $x \neq 2$.
(c) No, ya que $(-\infty, \infty)$ no es un intervalo cerrado.
(d) Las respuestas son las mismas que las de los incisos (a) y (b) con 2 remplazado por a.

69. Sí **71.** g toma un máximo local en $-c$.

73. **(a)** El valor máximo es 144 en $x = 2$.
(b) El volumen máximo de la caja es de 144 unidades cúbicas y se alcanza cuando $x = 2$.

75. $\dfrac{{v_0}^2}{2g} + s_0$

77. El valor máximo es 11 en $x = 5$; el valor mínimo es 5 en el intervalo $[-3, 2]$; máximo local en $(-5, 9)$.

79. El valor máximo es 5 en el intervalo $[3, \infty)$; el valor mínimo es -5 en el intervalo $(-\infty, -2]$.

Sección 4.2, pp. 196–198

1. $1/2$ **3.** 1

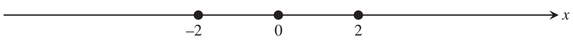
5. $\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{7}\right) \approx 1.22, \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{7}\right) \approx -0.549$

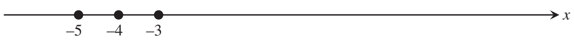
7. No; f no es derivable en el punto interior del dominio $x = 0$.

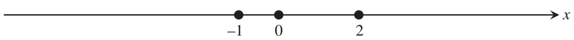
9. Sí las satisface.

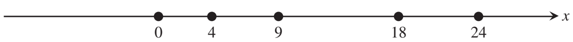
11. No las satisface; f no es derivable en $x = -1$.

15. **(a)**

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

27. Sí **29.** **(a)** 4 **(b)** 3 **(c)** 3

31. **(a)** $\dfrac{x^2}{2} + C$ **(b)** $\dfrac{x^3}{3} + C$ **(c)** $\dfrac{x^4}{4} + C$

33. **(a)** $\dfrac{1}{x} + C$ **(b)** $x + \dfrac{1}{x} + C$ **(c)** $5x - \dfrac{1}{x} + C$

35. **(a)** $-\dfrac{1}{2}\cos 2t + C$ **(b)** $2 \operatorname{sen} \dfrac{t}{2} + C$
(c) $-\dfrac{1}{2}\cos 2t + 2 \operatorname{sen} \dfrac{t}{2} + C$

37. $f(x) = x^2 - x$ **39.** $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

41. $s = 4.9t^2 + 5t + 10$ **43.** $s = \dfrac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

45. $s = 16t^2 + 20t + 5$ **47.** $s = \operatorname{sen}(2t) - 3$

49. Si $T(t)$ es la temperatura del termómetro en el instante t, entonces $T(0) = -19$ °C y $T(14) = 100$ °C. Con base en el teorema del valor medio, existe un $0 < t_0 < 14$ tal que $\dfrac{T(14) - T(0)}{14 - 0} =$ 8.5 °C/seg $= T'(t_0)$, la razón a la que la temperatura estuvo cambiando en $t = t_0$ como se mide mediante la altura del mercurio en el termómetro.

51. Puesto que su rapidez promedio fue aproximadamente de 7.667 nudos, por el teorema del valor medio, debe haber ido a esa rapidez al menos una vez durante el viaje.

55. La conclusión del teorema del valor medio da

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a - b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

59. Por el teorema del valor intermedio, $f(x)$ debe ser cero al menos una vez entre a y b. Ahora suponga que $f(x)$ es cero dos veces entre a y b. Entonces, por el teorema del valor medio, $f'(x)$ tendría que ser cero al menos una vez entre los dos ceros de $f(x)$, pero esto no puede ser cierto, ya que se sabe que $f'(x) \neq 0$ en este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es cero una vez y sólo una vez entre a y b.

69. $1.09999 \leq f(0.1) \leq 1.1$

Sección 4.3, pp. 201–203

1. **(a)** 0, 1
(b) Creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$; decreciente en $(0, 1)$
(c) Máximo local en $x = 0$; mínimo local en $x = 1$

3. **(a)** -2, 1
(b) Creciente en $(-2, 1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$
(c) No tiene máximo local; mínimo local en $x = -2$

5. **(a)** -2, 1, 3
(b) Creciente en $(-2, 1)$ y $(3, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, 3)$
(c) Máximo local en $x = 1$; mínimo local en $x = -2, 3$

7. **(a)** 0, -1
(b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-2, 0)$ y $(0, 1)$
(c) Mínimo local en $x = 1$

9. **(a)** -2, 2
(b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(-2, 0)$ y $(0, 2)$
(c) Máximo local en $x = -2$; mínimo local en $x = 2$

11. **(a)** -2, 0
(b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-2, 0)$
(c) Máximo local en $x = -2$; mínimo local en $x = 0$

13. **(a)** $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$
(b) Creciente en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$; decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, y $\left(\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$
(c) Máximo local en $x = 0$ y $x = \dfrac{4\pi}{3}$; mínimo local en $x = \dfrac{2\pi}{3}$ y $x = 2\pi$

15. **(a)** Creciente en $(-2, 0)$ y $(2, 4)$; decreciente en $(-4, -2)$ y $(0, 2)$
(b) Máximo absoluto en $(-4, 2)$; máximo local en $(0, 1)$ y $(4, -1)$; mínimo absoluto en $(2, -3)$; mínimo local en $(-2, 0)$

17. **(a)** Creciente en $(-4, -1)$, $(1/2, 2)$, y $(2, 4)$; decreciente en $(-1, 1/2)$

(b) Máximo absoluto en (4, 3); máximo local en $(-1, 2)$ y (2, 1); no hay mínimo absoluto; mínimo local en $(-4, -1)$ y $(1/2, -1)$

19. (a) Creciente en $(-\infty, -1.5)$; decreciente en $(-1.5, \infty)$
(b) Máximo local: 5.25 en $t = -1.5$; máximo absoluto: 5.25 en $t = -1.5$

21. (a) Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, 4/3)$; decreciente en $(4/3, \infty)$
(b) Mínimo local en $x = 0$ (0, 0); máximo local en $x = 4/3$ $(4/3, 32/27)$; no tienen extremos absolutos.

23. (a) Decreciente en $(-\infty, 0)$; creciente en $(0, 1/2)$; decreciente en $(1/2, \infty)$
(b) Mínimo local en $\theta = 0$ (0, 0); máximo local en $\theta = 1/2$ $(1/2, 1/4)$; no tiene extremos absolutos.

25. (a) Creciente en $(-\infty, \infty)$; nunca es decreciente
(b) No tiene extremos locales; no tiene extremos absolutos

27. (a) Creciente en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$ y (0, 2)
(b) Máximo local: 16 en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = \pm 2$; no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = \pm 2$

29. (a) Creciente en $(-\infty, -1)$; decreciente en $(-1, 0)$; creciente en (0, 1); decreciente en $(1, \infty)$
(b) Máximo local: 0.5 en $x = \pm 1$; mínimo local: 0 en $x = 0$; máximo absoluto: 1/2 en $x = \pm 1$; no tiene mínimo absoluto

31. (a) Creciente en $(10, \infty)$; decreciente en (1, 10)
(b) Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: -8 en $x = 10$; mínimo absoluto: -8 en $x = 10$

33. (a) Decreciente en $(-2\sqrt{2}, -2)$; creciente en $(-2, 2)$; decreciente en $(2, 2\sqrt{2})$
(b) Mínimos locales: $g(-2) = -4$, $g(2\sqrt{2}) = 0$; máximos locales: $g(-2\sqrt{2}) = 0$, $g(2) = 4$; máximo absoluto: 4 en $x = 2$; mínimo absoluto: -4 en $x = -2$

35. (a) Creciente en $(-\infty, 1)$; decreciente cuando $1 < x < 2$, decreciente cuando $2 < x < 3$; discontinua en $x = 2$; creciente en $(3, \infty)$
(b) Mínimo local en $x = 3$ (3, 6); máximo local en $x = 1$ (1, 2); no tiene extremos absolutos.

37. (a) Creciente en $(-2, 0)$ y $(0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, -2)$
(b) Mínimo local: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$; no tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: $-6\sqrt[3]{2}$ en $x = -2$

39. (a) Creciente en $(-\infty, -2/\sqrt{7})$ y $(2/\sqrt{7}, \infty)$; decreciente en $(-2/\sqrt{7}, 0)$ y $(0, 2/\sqrt{7})$
(b) Máximo local: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3.12$ en $x = -2/\sqrt{7}$; mínimo local: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3.12$ en $x = 2/\sqrt{7}$; no tiene extremos absolutos.

41. (a) Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: 0 en $x = 2$
(b) Máximo absoluto: 1 en $x = 1$; no tiene mínimo absoluto

43. (a) Máximo local: 1 en $x = 1$; mínimo local: 0 en $x = 2$
(b) No hay máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 2$

45. (a) Máximos locales: -9 en $t = -3$ y 16 en $t = 2$; mínimo local: -16 en $t = -2$
(b) Máximo absoluto: 16 en $t = 2$; no tiene mínimo absoluto

47. (a) Mínimo local: 0 en $x = 0$
(b) No tiene máximo absoluto; mínimo absoluto: 0 en $x = 0$

49. (a) Máximo local: 5 en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = -5$ y $x = 5$
(b) Máximo absoluto; 5 en $x = 0$; mínimo absoluto: 0 en $x = -5$ y $x = 5$

51. (a) Máximo local: 2 en $x = 0$; mínimo local: $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} - 6}$ en $x = 2 - \sqrt{3}$
(b) No tiene máximo absoluto; un mínimo absoluto en $x = 2 - \sqrt{3}$

53. (a) Máximo local: 1 en $x = \pi/4$; máximo local: 0 en $x = \pi$; mínimo local: 0 en $x = 0$; mínimo local: -1 en $x = 3\pi/4$

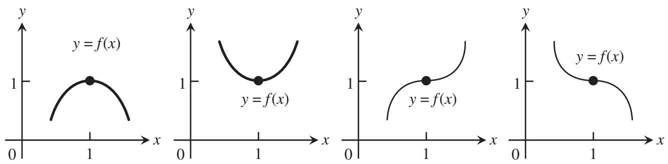
55. Máximo local: 2 en $x = \pi/6$; máximo local: $\sqrt{3}$ en $x = 2\pi$; mínimo local: -2 en $x = 7\pi/6$; mínimo local: $\sqrt{3}$ en $x = 0$

57. (a) Mínimo local: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ en $x = 2\pi/3$; máximo local: 0 en $x = 0$; máximo local: π en $x = 2\pi$

59. (a) Mínimo local: 0 en $x = \pi/4$

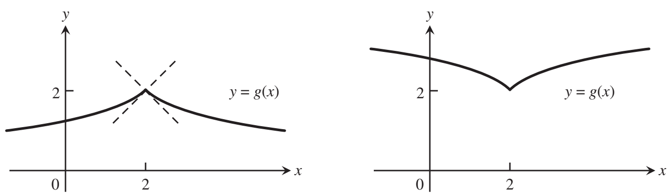
61. Máximo local; 3 en $\theta = 0$; mínimo local: -3 en $\theta = 2\pi$

63.



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

65. (a) **(b)**



69. $a = -2$, $b = 4$

Sección 4.4, pp. 211–213

1. Máximo local: 3/2 en $x = -1$; mínimo local: -3 en $x = 2$; punto de inflexión en $(1/2, -3/4)$; crece en $(-\infty, -1)$ y $(2, \infty)$; desciende en $(-1, 2)$; cóncava hacia arriba en $(1/2, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/2)$

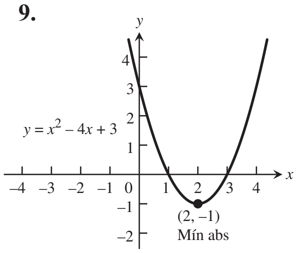
3. Máximo local: 3/4 en $x = 0$; mínimo local: 0 en $x = \pm 1$; puntos de inflexión en $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$; asciende en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; desciende en $(-\infty, -1)$ y (0, 1); cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

5. Máximo local: $\dfrac{-2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = -2\pi/3$, $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = \pi/3$; mínimo local: $-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = -\pi/3$, $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ en $x = 2\pi/3$; puntos de inflexión en $(-\pi/2, -\pi/2)$, (0, 0) y $(\pi/2, \pi/2)$, asciende en $(-\pi/3, \pi/3)$; desciende en $(-2\pi/3,$

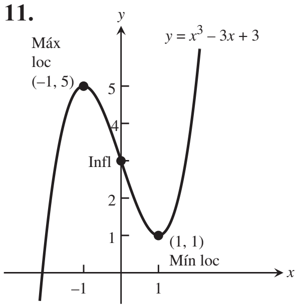
$-\pi/3)$ y $(\pi/3, 2\pi/3)$, cóncava hacia arriba en $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 2\pi/3)$; cóncava hacia abajo en $(-2\pi/3, -\pi/2)$ y $(0, \pi/2)$

7. Máximos locales: 1 en $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, 0 en $x = -2\pi$ y $x = 2\pi$; mínimos locales: -1 en $x = -3\pi/2$ y $x = 3\pi/2$, 0 en $x = 0$; puntos de inflexión en $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$; asciende en $(-3\pi/2, -\pi/2)$, $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$; desciende en $(-2\pi, -3\pi/2)$, $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 3\pi/2)$; cóncava hacia arriba en $(-2\pi, -\pi)$ y $(\pi, 2\pi)$; cóncava hacia abajo en $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$

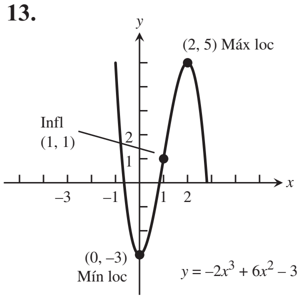
9.



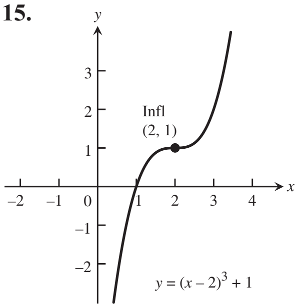
11.



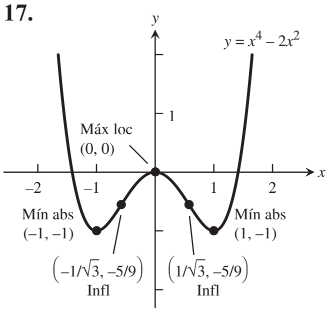
13.



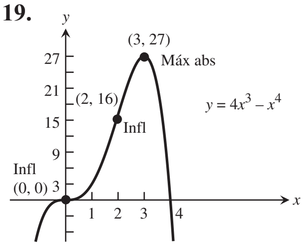
15.



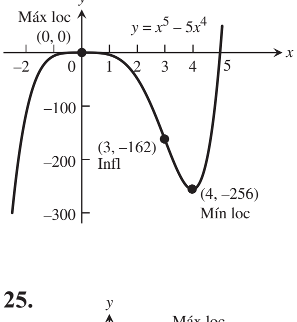
17.



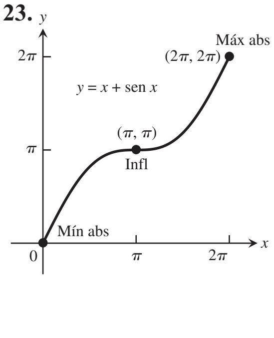
19.



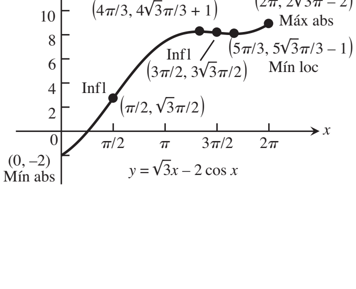
21.



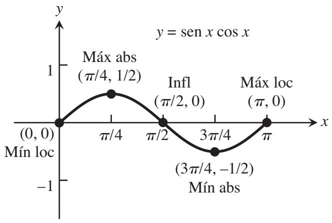
23.



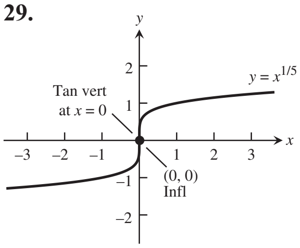
25.



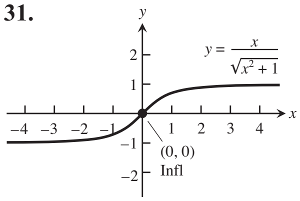
27.



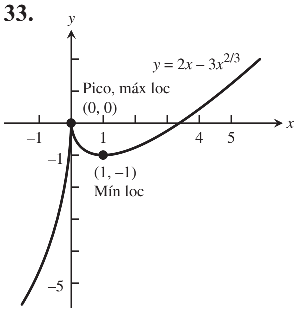
29.



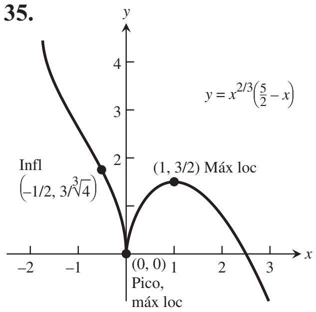
31.



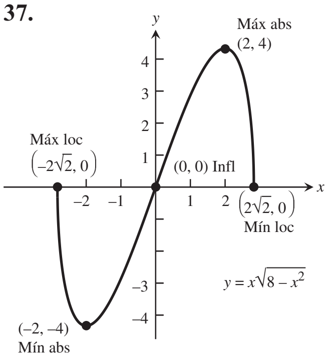
33.



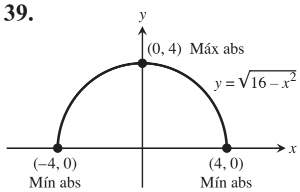
35.



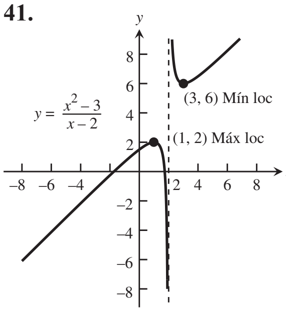
37.



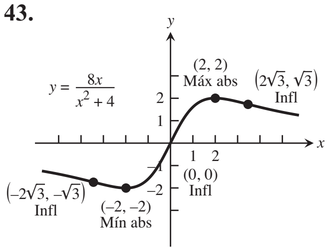
39.



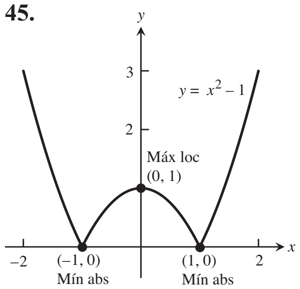
41.



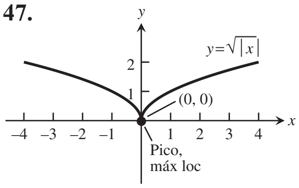
43.



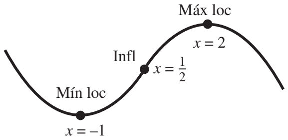
45.



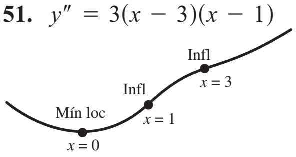
47.



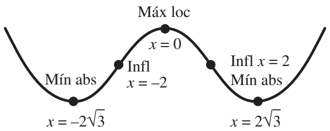
49. $y'' = 1 - 2x$



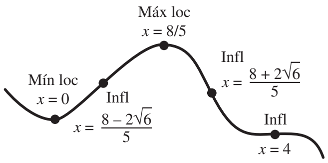
51. $y'' = 3(x - 3)(x - 1)$



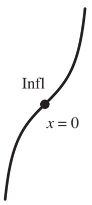
53. $y'' = 3(x - 2)(x + 2)$



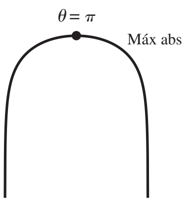
55. $y'' = 4(4 - x)(5x^2 - 16x + 8)$



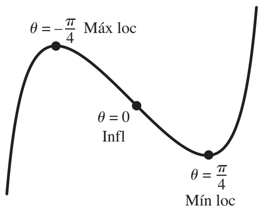
57. $y'' = 2\sec^2 x \tan x$



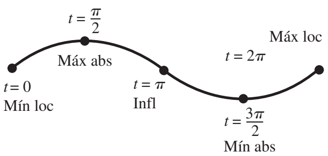
59. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2}$, $0 < \theta < 2\pi$



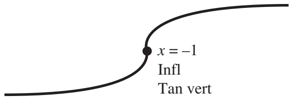
61. $y'' = 2\tan\theta\sec^2\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



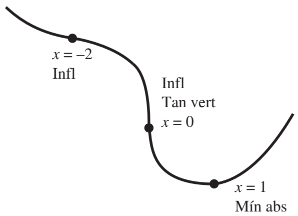
63. $y'' = -\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$



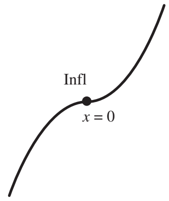
65. $y'' = -\frac{2}{3}(x + 1)^{-5/3}$



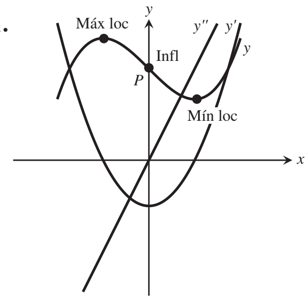
67. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$



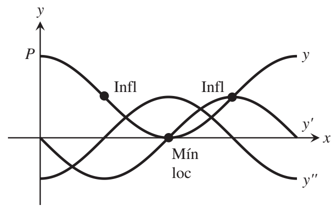
69. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$



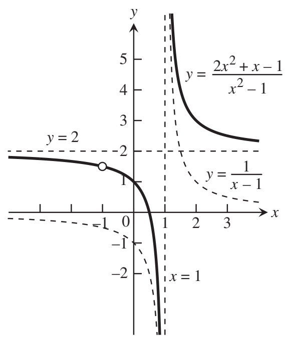
71.



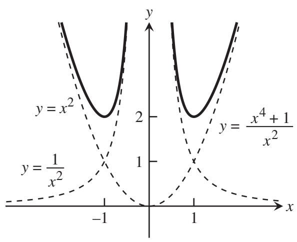
73.



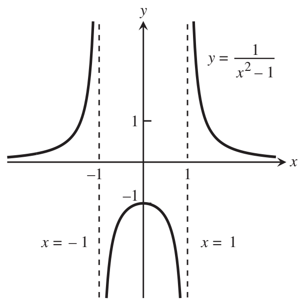
75.



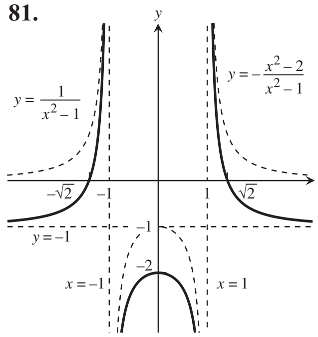
77.



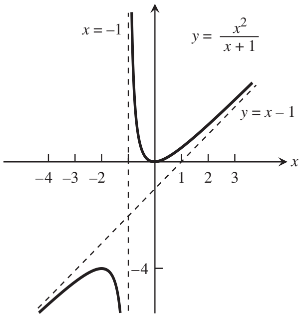
79.



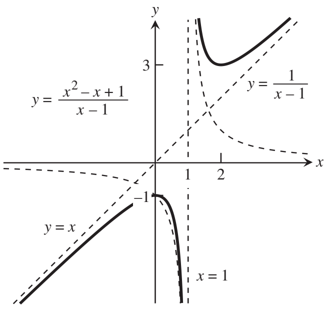
81.



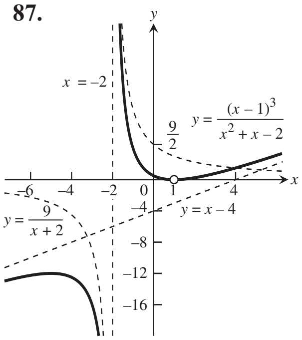
83.



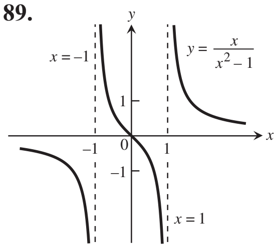
85.



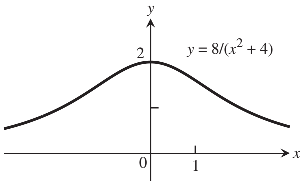
87.



89.



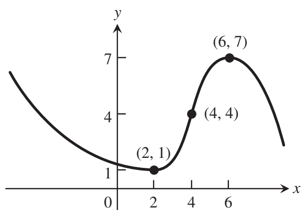
91.



93.

Punto	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

95.



97. **(a)** Hacia el origen: $0 \le t < 2$ y $6 \le t \le 10$; alejándose del origen: $2 \le t \le 6$ y $10 \le t \le 15$
(b) $t = 2, t = 6, t = 10$ **(c)** $t = 5, t = 7, t = 13$
(d) Positiva: $5 \le t \le 7$, $13 \le t \le 15$; negativa: $0 \le t \le 5$, $7 \le t \le 13$

99. ≈ 60 mil unidades

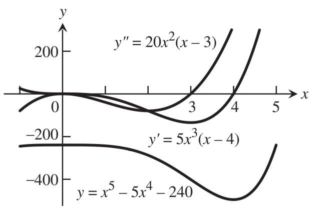
101. Mínimo local en $x = 2$; puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 5/3$

105. $b = -3$

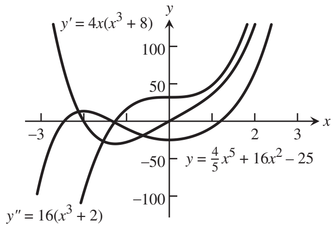
109. $-1, 2$

111. $a = 1, b = 3, c = 9$

113. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = 3$, máximo local en $x = 0$, mínimo local en $x = 4$.



115. Los ceros de $y' = 0$ y $y'' = 0$ son extremos y puntos de inflexión, respectivamente. Inflexión en $x = -\sqrt[3]{2}$; máximo local en $x = -2$; mínimo local en $x = 0$.



Sección 4.5, pp. 219–225

1. 16 in, 4 in por 4 in

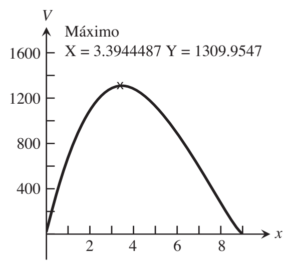
3. **(a)** $(x, 1 - x)$ **(b)** $A(x) = 2x(1 - x)$
(c) $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas, 1 por $\frac{1}{2}$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ in, $\frac{2450}{27}$ in^3 **7.** 80,000 m^2; 400 m por 200 m

9. **(a)** Las dimensiones óptimas del depósito son 10 ft en los lados de la base y 5 ft de profundidad.
(b) Minimizando el área de la superficie del depósito se minimiza su peso para un grosor de la pared dada. El grosor de las paredes de acero probablemente estaría determinado por otras consideraciones tales como requerimientos de la estructura.

11. 9×18 in **13.** $\frac{\pi}{2}$ **15.** $h : r = 8 : \pi$

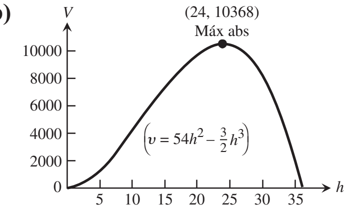
17. **(a)** $V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x)$ **(b)** Dominio: (0, 9)



(c) Volumen máximo ≈ 1309.95 in^3 cuando $x \approx 3.39$ in
(d) $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, por lo que el punto crítico está en $x = 7 - \sqrt{13}$, lo que confirma el resultado del inciso (c).
(e) $x = 2$ in o $x = 5$ in

19. ≈ 2418.40 cm^3

21. **(a)** $h = 24, w = 18$
(b)



23. Si r es el radio de la semiesfera, h la altura del cilindro y V el volumen, entonces $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ y $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. **(b)** $x = \frac{51}{8}$ **(c)** $L \approx 11$ in

27. Radio $= \sqrt{2}$ m, altura $= 1$ m, volumen $= \frac{2\pi}{3}$ m^3

29. 1 **31.** $\dfrac{9b}{9+\sqrt{3}\pi}$ m, triángulo, $\dfrac{b\sqrt{3}\pi}{9+\sqrt{3}\pi}$ m, circunferencia

33. $\dfrac{3}{2}\times 2$ **35. (a)** 16 **(b)** -1

37. (a) $v(0)=96$ ft/seg
(b) 256 ft en $t=3$ seg
(c) La velocidad cuando $s=0$ es $v(7)=-128$ ft/seg.

39. ≈ 46.87 ft **41. (a)** $6\times 6\sqrt{3}$ in

43. (a) $4\sqrt{3}\times 4\sqrt{6}$ in

45. (a) $10\pi\approx 31.42$ cm/seg; cuando $t=0.5$ seg, 1.5 seg, 2.5 seg, 3.5 seg; $s=0$, la aceleración es 0.
(b) 10 cm a partir de la posición de reposo; la rapidez es 0

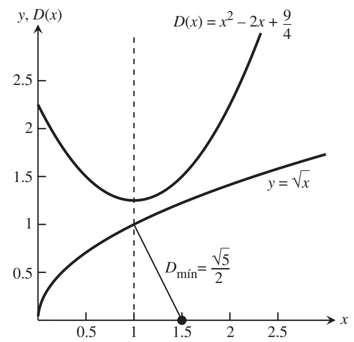
47. (a) $s=((12-12t)^2+64t^2)^{1/2}$
(b) -12 nudos, 8 nudos
(c) No
(e) $4\sqrt{13}$. Este límite es la raíz cuadrada de las sumas de los cuadrados de las velocidades individuales.

49. $x=\dfrac{a}{2}, v=\dfrac{ka^2}{4}$ **51.** $\dfrac{c}{2}+50$

53. (a) $\sqrt{\dfrac{2km}{h}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{2km}{h}}$

57. $4\times 4\times 3$ ft, \$288 **59.** $M=\dfrac{C}{2}$ **65. (a)** $y=-1$

67. (a) La distancia mínima es $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
(b) La distancia mínima es, desde el punto (3/2, 0) al punto (1, 1) en la gráfica de $y=\sqrt{x}$, lo cual ocurre en el valor $x=1$, donde $D(x)$, la distancia al cuadrado, tiene su valor mínimo.

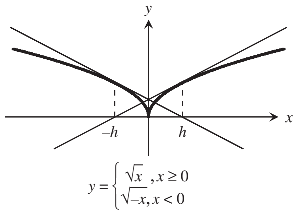


Sección 4.6, pp. 228–230

1. $x_2=-\dfrac{5}{3},\dfrac{13}{21}$ **3.** $x_2=-\dfrac{51}{31},\dfrac{5763}{4945}$ **5.** $x_2=\dfrac{2387}{2000}$

7. x_1 y todas las aproximaciones posteriores serán iguales a x_0.

9.



11. Los puntos de intersección de $y=x^3$ y $y=3x+1$ o $y=x^3-3x$ y $y=1$ tienen los mismos valores x que las raíces de la parte (i) o las soluciones del inciso (iv). **13.** 1.165561185

15. (a) Dos **(b)** 0.35003501505249 y -1.0261731615301

17. $\pm 1.3065629648764, \pm 0.5411961001462$ **19.** $x\approx 0.45$

21. 0.8192 **23.** La raíz es 1.17951.

25. (a) Para $x_0=-2$ o $x_0=-0.8$, $x_i\to -1$ cuando i es grande.
(b) Para $x_0=-0.5$ o $x_0=0.25$, $x_i\to 0$ cuando i es grande.
(c) Para $x_0=0.8$ o $x_0=2$, $x_i\to 1$ cuando i es grande.
(d) Para $x_0=-\sqrt{21}/7$ o $x_0=\sqrt{21}/7$, el método de Newton no converge. Los valores de x_i se alternan entre $-\sqrt{21}/7$ y $\sqrt{21}/7$ cuando i aumenta.

27. Las respuestas pueden variar con la rapidez de la máquina.

Sección 4.7, pp. 236–239

1. (a) x^2 **(b)** $\dfrac{x^3}{3}$ **(c)** $\dfrac{x^3}{3}-x^2+x$

3. (a) x^{-3} **(b)** $-\dfrac{1}{3}x^{-3}$ **(c)** $-\dfrac{1}{3}x^{-3}+x^2+3x$

5. (a) $-\dfrac{1}{x}$ **(b)** $-\dfrac{5}{x}$ **(c)** $2x+\dfrac{5}{x}$

7. (a) $\sqrt{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}$

9. (a) $x^{2/3}$ **(b)** $x^{1/3}$ **(c)** $x^{-1/3}$

11. (a) $\cos(\pi x)$ **(b)** $-3\cos x$ **(c)** $-\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)+\cos(3x)$

13. (a) $\tan x$ **(b)** $2\tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$ **(c)** $-\dfrac{2}{3}\tan\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

15. (a) $-\csc x$ **(b)** $\dfrac{1}{5}\csc(5x)$ **(c)** $2\csc\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

17. $\dfrac{x^2}{2}+x+C$ **19.** $t^3+\dfrac{t^2}{4}+C$ **21.** $\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5x^2}{2}+7x+C$

23. $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x}{3}+C$ **25.** $\dfrac{3}{2}x^{2/3}+C$

27. $\dfrac{2}{3}x^{3/2}+\dfrac{3}{4}x^{4/3}+C$ **29.** $4y^2-\dfrac{8}{3}y^{3/4}+C$

31. $x^2+\dfrac{2}{x}+C$ **33.** $2\sqrt{t}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}+C$ **35.** $-2\,\mathrm{sen}\,t+C$

37. $-21\cos\dfrac{\theta}{3}+C$ **39.** $3\cot x+C$ **41.** $-\dfrac{1}{2}\csc\theta+C$

43. $4\sec x-2\tan x+C$ **45.** $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\cot x+C$

47. $\dfrac{t}{2}+\dfrac{\mathrm{sen}\,4t}{8}+C$ **49.** $\tan\theta+C$ **51.** $-\cot x-x+C$

53. $-\cos\theta+\theta+C$

61. (a) Incorrecta: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{sen}\,x+C\right)=\dfrac{2x}{2}\,\mathrm{sen}\,x+\dfrac{x^2}{2}\cos x=x\,\mathrm{sen}\,x+\dfrac{x^2}{2}\cos x$
(b) Incorrecta: $\dfrac{d}{dx}(-x\cos x+C)=-\cos x+x\,\mathrm{sen}\,x$
(c) Correcta: $\dfrac{d}{dx}(-x\cos x+\mathrm{sen}\,x+C)=-\cos x+x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x=x\,\mathrm{sen}\,x$

63. (a) Incorrecta: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{(2x+1)^3}{3}+C\right)=\dfrac{3(2x+1)^2(2)}{3}=2(2x+1)^2$
(b) Incorrecta: $\dfrac{d}{dx}((2x+1)^3+C)=3(2x+1)^2(2)=6(2x+1)^2$
(c) Correcta: $\dfrac{d}{dx}((2x+1)^3+C)=6(2x+1)^2$

65. Correcto

67. (b) **69.** $y = x^2 - 7x + 10$

71. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$

73. $y = 9x^{1/3} + 4$ **75.** $s = t + \operatorname{sen} t + 4$

77. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **79.** $v = \dfrac{1}{2}\sec t + \dfrac{1}{2}$

81. $y = -x^3 + x^2 + 4x + 1$ **83.** $r = \dfrac{1}{t} + 2t - 2$

85. $y = x^3 - 4x^2 + 5$

87. $y = -\operatorname{sen} t + \cos t + t^3 - 1$

89. $y = 2x^{3/2} - 50$ **91.** $y = x - x^{4/3} + \dfrac{1}{2}$

93. $y = -\operatorname{sen} x - \cos x - 2$

95. **(a)** **(i)** 33.2 unidades, **(ii)** 33.2 unidades, **(iii)** 33.2 unidades **(b)** Verdadero

97. $t = 88/k$, $k = 16$

99. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

Ejercicios de práctica, pp. 240–242

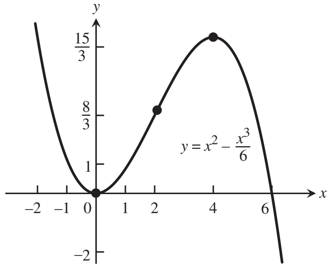
1. No **3.** No hay mínimo; máximo absoluto: $f(1) = 16$; puntos críticos: $x = 1$ y $11/3$ **5.** Sí, excepto en $x = 0$

7. No **11.** **(b)** Uno

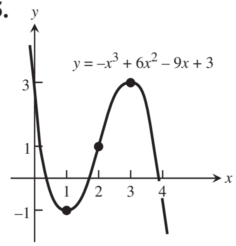
13. **(b)** 0.8555996772 **19.** Valor mínimo global de $\dfrac{1}{2}$ en $x = 2$

21. **(a)** $t = 0, 6, 12$ **(b)** $t = 3, 9$ **(c)** $6 < t < 12$ **(d)** $0 < t < 6$, $12 < t < 14$

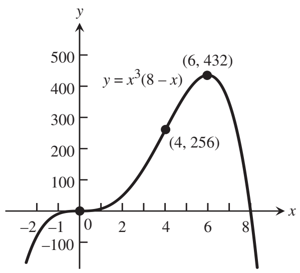
23.



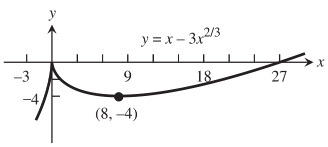
25.



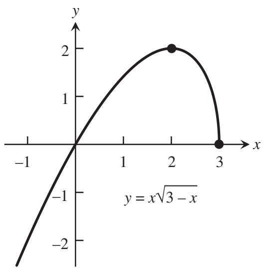
27.



29.

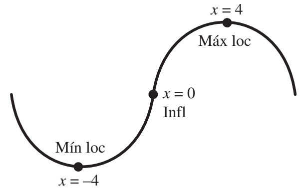


31.



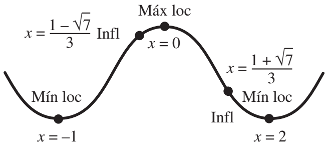
33. **(a)** Máximo local en $x = 4$; mínimo local en $x = -4$; punto de inflexión en $x = 0$

(b)



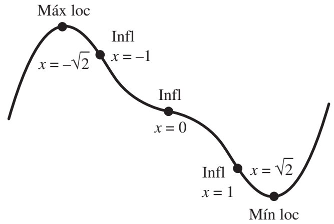
35. **(a)** Máximo local en $x = 0$; mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$; puntos de inflexión en $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$

(b)

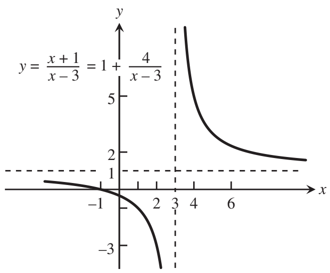


37. **(a)** Máximo local en $x = -\sqrt{2}$; mínimo local en $x = \sqrt{2}$; puntos de inflexión en $x = \pm 1$ y 0

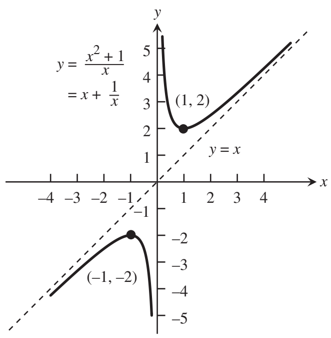
(b)



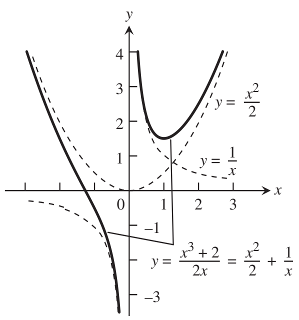
43.



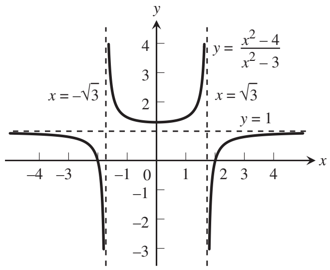
45.



47.



49.



51. **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18 **53.** 54 unidades cuadradas

55. Altura $= 2$, radio $= \sqrt{2}$

57. $x = 5 - \sqrt{5}$ cientos ≈ 276 neumáticos, $y = 2(5 - \sqrt{5})$ cientos ≈ 553 neumáticos

59. Dimensiones: la base es 6 in por 12 in, altura $= 2$ in; volumen máximo $= 144$ in^3

61. $x_5 = 2.195823345$ **63.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

65. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **67.** $-\frac{1}{r+5} + C$ **69.** $(\theta^2 + 1)^{3/2} + C$

71. $\frac{1}{3}(1 + x^4)^{3/4} + C$ **73.** $10 \tan \frac{s}{10} + C$

75. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \csc \sqrt{2}\,\theta + C$ **77.** $\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C$

79. $y = x - \frac{1}{x} - 1$ **81.** $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 243–245

1. La función es constante en el intervalo.
3. Los puntos extremos no estarán en el final de un intervalo abierto.
5. **(a)** Un mínimo local en $x = -1$; puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 2$ **(b)** Un máximo local en $x = 0$ y mínimos locales en $x = -1$ y $x = 2$; puntos de inflexión en $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$
9. No **11.** $a = 1, b = 0, c = 1$ **13.** Sí
15. Perforar el agujero en $y = h/2$.
17. $r = \frac{RH}{2(H - R)}$ para $H > 2R$, $r = R$ si $H \le 2R$
19. **(a)** $\frac{c - b}{2e}$ **(b)** $\frac{c + b}{2}$ **(c)** $\frac{b^2 - 2bc + c^2 + 4ae}{4e}$
(d) $\frac{c + b + t}{2}$
21. $m_0 = 1 - \frac{1}{q}$, $m_1 = \frac{1}{q}$
23. **(a)** $k = -38.72$ **(b)** 25 ft
25. Sí, $y = x$ **27.** $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} b^{3/4}$

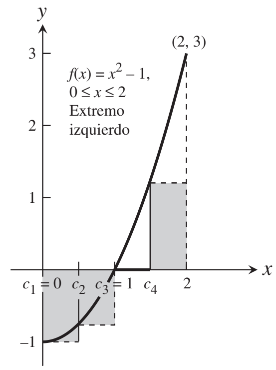
CAPÍTULO 5

Sección 5.1, pp. 253–255

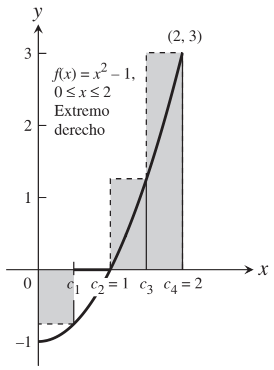
1. **(a)** 0.125 **(b)** 0.21875 **(c)** 0.625 **(d)** 0.46875
3. **(a)** 1.066667 **(b)** 1.283333 **(c)** 2.666667 **(d)** 2.083333
5. 0.3125, 0.328125 **7.** 1.5, 1.574603
9. **(a)** 87 in **(b)** 87 in **11.** **(a)** 3490 ft **(b)** 3840 ft
13. **(a)** 74.65 ft/seg **(b)** 45.28 ft/seg **(c)** 146.59 ft
15. $\frac{31}{16}$ **17.** 1
19. **(a)** Superior $=$ 758 gal, inferior $=$ 543 gal
(b) Superior $=$ 2363 gal, inferior $=$ 1693 gal
(c) $\approx$ 31.4 h, $\approx$ 32.4 h
21. **(a)** 2 **(b)** $2\sqrt{2} \approx 2.828$
(c) $8 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3.061$
(d) Cada área es menor que el área del círculo, π. Cuando n aumenta, el área del polígono se aproxima a π.

Sección 5.2, pp. 261–262

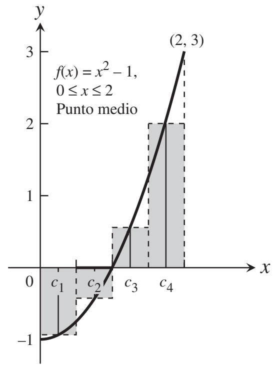
1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$
3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$
5. $\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$ **7.** Todas ellas **9.** b
11. $\sum_{k=1}^{6} k$ **13.** $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$ **15.** $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$
17. **(a)** -15 **(b)** 1 **(c)** 1 **(d)** -11 **(e)** 16
19. **(a)** 55 **(b)** 385 **(c)** 3025
21. -56 **23.** -73 **25.** 240 **27.** 3376
29. **(a)** 21 **(b)** 3500 **(c)** 2620
31. **(a)** $4n$ **(b)** cn **(c)** $(n^2 - n)/2$
33. **(a)**



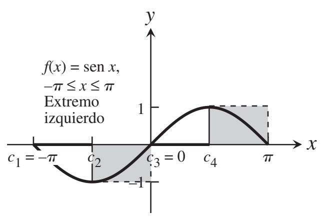
(b)



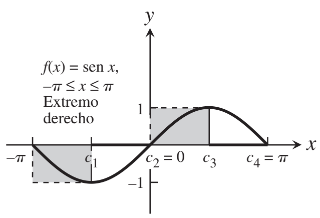
(c)



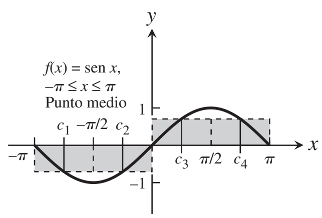
35. **(a)**



(b)



(c)



37. 1.2 **39.** $\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$, $\frac{2}{3}$ **41.** $12 + \frac{27n + 9}{2n^2}$, 12
43. $\frac{5}{6} + \frac{6n + 1}{6n^2}$, $\frac{5}{6}$ **45.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$, $\frac{1}{2}$

Sección 5.3, pp. 270–274

1. $\int_0^2 x^2\,dx$ **3.** $\int_{-7}^{5}(x^2-3x)\,dx$ **5.** $\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

7. $\int_{-\pi/4}^{0}\sec x\,dx$

9. **(a)** 0 **(b)** -8 **(c)** -12 **(d)** 10 **(e)** -2 **(f)** 16

11. **(a)** 5 **(b)** $5\sqrt{3}$ **(c)** -5 **(d)** -5

13. **(a)** 4 **(b)** -4 **15.** Área $=21$ unidades cuadradas

17. Área $=9\pi/2$ unidades cuadradas

19. Área $=2.5$ unidades cuadradas

21. Área $=3$ unidades cuadradas **23.** $b^2/4$ **25.** b^2-a^2

27. **(a)** 2π **(b)** π **29.** $1/2$ **31.** $3\pi^2/2$ **33.** $7/3$

35. $1/24$ **37.** $3a^2/2$ **39.** $b/3$ **41.** -14 **43.** -2

45. $-7/4$ **47.** 7 **49.** 0

51. Utilizando n subintervalos de longitud $\Delta x=b/n$ y los valores del extremo derecho:

$$\text{Área}=\int_0^b 3x^2\,dx=b^3$$

53. Utilizando n subintervalos de longitud $\Delta x=b/n$ y los valores del extremo derecho:

$$\text{Área}=\int_0^b 2x\,dx=b^2$$

55. $\text{prom}(f)=0$ **57.** $\text{prom}(f)=-2$ **59.** $\text{prom}(f)=1$

61. **(a)** $\text{prom}(g)=-1/2$ **(b)** $\text{prom}(g)=1$ **(c)** $\text{prom}(g)=1/4$

63. $c(b-a)$ **65.** $b^3/3-a^3/3$ **67.** 9 **69.** $b^4/4-a^4/4$

71. $a=0$ y $b=1$ maximizan la integral.

73. Cota superior $=1$, cota inferior $=1/2$

75. Por ejemplo, $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx\le\int_0^1 dx=1$

77. $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b 0\,dx=0$ **79.** Cota superior $=1/2$

Sección 5.4, pp. 282–284

1. 6 **3.** $-10/3$ **5.** 8 **7.** 1 **9.** $2\sqrt{3}$ **11.** 0

13. $-\pi/4$ **15.** $1-\frac{\pi}{4}$ **17.** $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ **19.** $-8/3$

21. $-3/4$ **23.** $\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}+1$ **25.** -1 **27.** 16

29. $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ **31.** $4t^5$ **33.** $\sqrt{1+x^2}$

35. $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\operatorname{sen}x$ **37.** 0 **39.** 1 **41.** $28/3$

43. $1/2$ **45.** π **47.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

49. d, ya que $y'=\frac{1}{x}$ y $y(\pi)=\int_\pi^\pi \frac{1}{t}\,dt-3=-3$

51. b, ya que $y'=\sec x$ y $y(0)=\int_0^0 \sec t\,dt+4=4$

53. $y=\int_2^x \sec t\,dt+3$ **55.** $\frac{2}{3}bh$ **57.** \$9.00

59. **a.** $T(0)=70$ °F, $T(16)=76$ °F
$T(25)=85$ °F
b. $\text{prom}(T)=75$ °F

61. $2x-2$ **63.** $-3x+5$

65. **(a)** Verdadero, ya que f es continua, g es derivable por la parte 1 del teorema fundamental del cálculo.
(b) Verdadero: g es continua, ya que es derivable.
(c) Verdadero: ya que $g'(1)=f(1)=0$.
(d) Falso: ya que $g''(1)=f'(1)>0$.
(e) Verdadero, ya que $g'(1)=0$ y $g''(1)=f'(1)>0$.
(f) Falso: $g''(x)=f'(x)>0$, por lo que g'' nunca cambia de signo.
(g) Verdadero, ya que $g'(1)=f(1)=0$ y $g'(x)=f(x)$ es una función creciente de x (ya que $f'(x)>0$).

Sección 5.5, pp. 290–291

1. $\frac{1}{6}(2x+4)^6+C$ **3.** $-\frac{1}{3}(x^2+5)^{-3}+C$

5. $\frac{1}{10}(3x^2+4x)^5+C$ **7.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

9. $\frac{1}{2}\sec 2t+C$ **11.** $-6(1-r^3)^{1/2}+C$

13. $\frac{1}{3}(x^{3/2}-1)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^{3/2}-2)+C$

15. **(a)** $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta)+C$ **(b)** $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta)+C$

17. $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2}+C$ **19.** $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4}+C$

21. $(-2/(1+\sqrt{x}))+C$ **23.** $\frac{1}{3}\tan(3x+2)+C$

25. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^6\left(\frac{x}{3}\right)+C$ **27.** $\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^6+C$

29. $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2}+1)+C$ **31.** $\frac{1}{2\cos(2t+1)}+C$

33. $-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}-1\right)+C$ **35.** $-\frac{\operatorname{sen}^2(1/\theta)}{2}+C$

37. $\frac{1}{16}(1+t^4)^4+C$ **39.** $\frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{x}\right)^{3/2}+C$

41. $\frac{2}{27}\left(1-\frac{3}{x^3}\right)^{3/2}+C$

43. $\frac{1}{12}(x-1)^{12}+\frac{1}{11}(x-1)^{11}+C$

45. $-\frac{1}{8}(1-x)^8+\frac{4}{7}(1-x)^7-\frac{2}{3}(1-x)^6+C$

47. $\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$ **49.** $\frac{-1}{4(x^2-4)^2}+C$

51. **(a)** $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$ **(b)** $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$
(c) $-\frac{6}{2+\tan^3 x}+C$

53. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}\sqrt{3(2r-1)^2+6}+C$ **55.** $s=\frac{1}{2}(3t^2-1)^4-5$

57. $s=4t-2\operatorname{sen}\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+9$

59. $s=\operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)+100t+1$ **61.** 6 m

Sección 5.6, pp. 297–300

1. **(a)** $14/3$ **(b)** $2/3$ **3.** **(a)** $1/2$ **(b)** $-1/2$

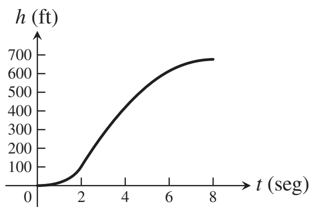
5. **(a)** $15/16$ **(b)** 0 **7.** **(a)** 0 **(b)** $1/8$ **9.** **(a)** 4 **(b)** 0

11. **(a)** $1/6$ **(b)** $1/2$ **13.** **(a)** 0 **(b)** 0 **15.** $2\sqrt{3}$

17. $3/4$ **19.** $3^{5/2} - 1$ **21.** 3 **23.** $\pi/3$ **25.** $16/3$
27. $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$ **31.** $128/15$ **33.** $4/3$
35. $5/6$ **37.** $38/3$ **39.** $49/6$ **41.** $32/3$ **43.** $48/5$
45. $8/3$ **47.** 8 **49.** $5/3$ (Hay otros tres puntos de intersección)
51. 18 **53.** $243/8$ **55.** $125/6$ **57.** 2 **59.** $104/15$
61. $56/15$ **63.** 4 **65.** $\dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{\pi}$ **67.** $\pi/2$
69. 2 **71.** $1/2$ **73.** 1
75. (a) $(\pm\sqrt{c}, c)$ **(b)** $c = 4^{2/3}$ **(c)** $c = 4^{2/3}$
77. $11/3$ **79.** $3/4$

Ejercicios de práctica, pp. 301–303

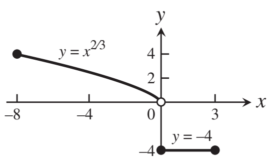
1. (a) Alrededor de 680 ft **(b)**

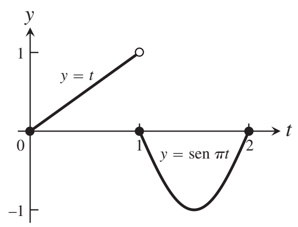


3. (a) $-1/2$ **(b)** 31 **(c)** 13 **(d)** 0
5. $\displaystyle\int_1^5 (2x - 1)^{-1/2}\,dx = 2$ **7.** $\displaystyle\int_{-\pi}^0 \cos\frac{x}{2}\,dx = 2$
9. (a) 4 **(b)** 2 **(c)** -2 **(d)** -2π **(e)** $8/5$
11. $8/3$ **13.** 62 **15.** 1 **17.** $1/6$ **19.** 18 **21.** $9/8$
23. $\dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$ **25.** 4 **27.** $\dfrac{8\sqrt{2} - 7}{6}$
29. Mín: -4, máx: 0, área: $27/4$ **31.** $6/5$
35. $y = \displaystyle\int_5^x \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) dt - 3$ **37.** $-4(\cos x)^{1/2} + C$
39. $\theta^2 + \theta + \operatorname{sen}(2\theta + 1) + C$ **41.** $\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{4}{t} + C$
43. $-\dfrac{1}{3}\cos(2t^{3/2}) + C$ **45.** 16 **47.** 2 **49.** 1 **51.** 8
53. $27\sqrt{3}/160$ **55.** $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3} - 2\pi$
61. -1 **63.** 2 **65.** -2 **67.** 1 **69.** $\sqrt{2} - 1$
71. (a) b **(b)** b
75. 25 °F **77.** $\sqrt{2 + \cos^3 x}$ **79.** $\dfrac{-6}{3 + x^4}$ **81.** Sí
83. $-\sqrt{1 + x^2}$
85. Costo $\approx$ \$10,899 utilizando una estimación por sumas inferiores.

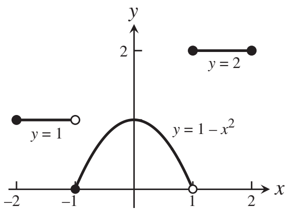
Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 304–307

1. (a) Sí **(b)** No **5. (a)** $1/4$ **(b)** $\sqrt[3]{12}$
7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **9.** $y = x^3 + 2x - 4$
11. $36/5$ **13.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}$





15. $13/3$



17. $1/2$ **19.** $1/6$ **21.** $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ **23. (b)** πr^2
25. (a) 0 **(b)** -1 **(c)** $-\pi$ **(d)** $x = 1$
(e) $y = 2x + 2 - \pi$ **(f)** $x = -1, x = 2$ **(g)** $[-2\pi, 0]$
27. $2/x$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4y}{\sqrt{y}} - \dfrac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{y}}$

CAPÍTULO 6

Sección 6.1, pp. 316–319

1. 16 **3.** $\dfrac{16}{3}$ **5. (a)** $2\sqrt{3}$ **(b)** 8 **7. (a)** 60 **(b)** 36
9. 8π **11.** 10 **13. (a)** s^2h **(b)** s^2h **15.** $\dfrac{2\pi}{3}$
17. $4 - \pi$ **19.** $\dfrac{32\pi}{5}$ **21.** 36π **23.** π
25. $\pi\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \dfrac{11}{3}\right)$ **27.** 2π **29.** 2π **31.** 3π
33. $\pi^2 - 2\pi$ **35.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **37.** $\dfrac{117\pi}{5}$ **39.** $\pi(\pi - 2)$ **41.** $\dfrac{4\pi}{3}$
43. 8π **45.** $\dfrac{7\pi}{6}$ **47. (a)** 8π **(b)** $\dfrac{32\pi}{5}$ **(c)** $\dfrac{8\pi}{3}$ **(d)** $\dfrac{224\pi}{15}$
49. (a) $\dfrac{16\pi}{15}$ **(b)** $\dfrac{56\pi}{15}$ **(c)** $\dfrac{64\pi}{15}$ **51.** $V = 2a^2b\pi^2$
53. (a) $V = \dfrac{\pi h^2(3a - h)}{3}$ **(b)** $\dfrac{1}{120\pi}$ m/seg
57. $V = 3308\text{ cm}^3$ **59.** $\dfrac{4 - b + a}{2}$

Sección 6.2, pp. 324–326

1. 6π **3.** 2π **5.** $\dfrac{14\pi}{3}$ **7.** 8π **9.** $\dfrac{5\pi}{6}$
11. $\dfrac{7\pi}{15}$ **13. (b)** 4π **15.** $\dfrac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$
17. $\dfrac{8\pi}{3}$ **19.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **21.** $\dfrac{16\pi}{3}$
23. (a) 16π **(b)** 32π **(c)** 28π
(d) 24π **(e)** 60π **(f)** 48π
25. (a) $\dfrac{27\pi}{2}$ **(b)** $\dfrac{27\pi}{2}$ **(c)** $\dfrac{72\pi}{5}$ **(d)** $\dfrac{108\pi}{5}$
27. (a) $\dfrac{6\pi}{5}$ **(b)** $\dfrac{4\pi}{5}$ **(c)** 2π **(d)** 2π
29. (a) Alrededor del eje x: $V = \dfrac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \dfrac{\pi}{6}$
(b) Alrededor del eje x: $V = \dfrac{2\pi}{15}$; alrededor del eje y: $V = \dfrac{\pi}{6}$

31. **(a)** $\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\frac{4\pi}{3}$ **(c)** 2π **(d)** $\frac{2\pi}{3}$

33. **(a)** $\frac{4\pi}{15}$ **(b)** $\frac{7\pi}{30}$

35. **(a)** $\frac{24\pi}{5}$ **(b)** $\frac{48\pi}{5}$

37. **(a)** $\frac{9\pi}{16}$ **(b)** $\frac{9\pi}{16}$

39. Discos: dos integrales; arandelas: dos integrales; cascarones: 1 integral.

41. **(a)** $\frac{256\pi}{3}$ **(b)** $\frac{244\pi}{3}$

Sección 6.3, pp. 330–332

1. 12 **3.** $\frac{53}{6}$ **5.** $\frac{123}{32}$ **7.** $\frac{99}{8}$ **9.** 2

11. **(a)** $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$ **(c)** ≈ 6.13

13. **(a)** $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 y}\, dy$ **(c)** ≈ 3.82

15. **(a)** $\int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (y + 1)^2}\, dy$ **(c)** ≈ 9.29

17. **(a)** $\int_{0}^{\pi/6} \sec x\, dx$ **(c)** ≈ 0.55

19. **(a)** $y = \sqrt{x}$ desde (1, 1) hasta (4, 2)
(b) Sólo una. Conocemos la derivada de la función y el valor de la función en un valor de x.

21. 1

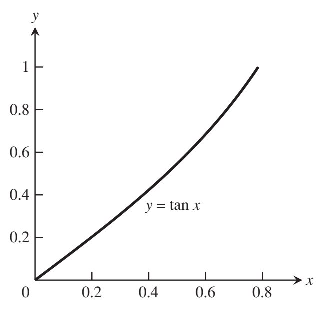
27. Sí, $f(x) = \pm x + C$ donde C es cualquier número real.

31. $\frac{2}{27}(10^{3/2} - 1)$

Sección 6.4, pp. 335–337

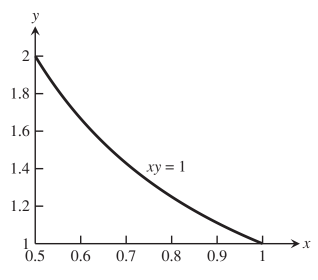
1. **(a)** $2\pi \int_{0}^{\pi/4} (\tan x) \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$ **(c)** $S \approx 3.84$

(b)



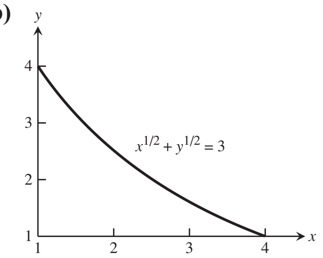
3. **(a)** $2\pi \int_{1}^{2} \frac{1}{y} \sqrt{1 + y^{-4}}\, dy$ **(c)** $S \approx 5.02$

(b)



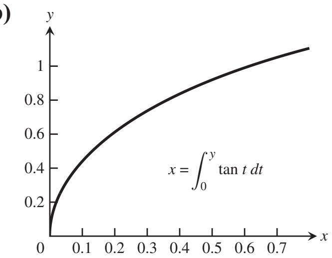
5. **(a)** $2\pi \int_{1}^{4} (3 - x^{1/2})^2 \sqrt{1 + (1 - 3x^{-1/2})^2}\, dx$ **(c)** $S \approx 63.37$

(b)



7. **(a)** $2\pi \int_{0}^{\pi/3} \left(\int_{0}^{y} \tan t\, dt \right) \sec y\, dy$ **(c)** $S \approx 2.08$

(b)



9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$ **13.** $98\pi/81$ **15.** 2π
17. $\pi(\sqrt{8} - 1)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$ **21.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$
23. $253\pi/20$ **27.** Pedir 226.2 litros de cada color.

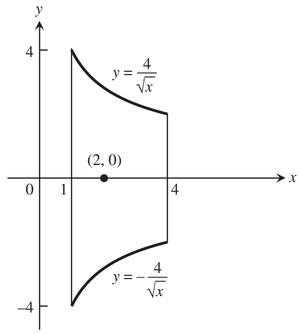
Sección 6.5, pp. 342–346

1. 400 N/m **3.** 4 cm, 0.08 J
5. **(a)** 7238 lb/in **(b)** 905 in-lb, 2714 in-lb
7. 780 J **9.** 72,900 ft-lb **13.** 160 ft-lb
15. **(a)** 1,497,600 ft-lb **(b)** 1 hr, 40 min
(d) At 62.26 lb/ft^3: a) 1,494,240 ft-lb b) 1 hr, 40 min
At 62.59 lb/ft^3: a) 1,502,160 ft-lb b) 1 hr, 40.1 min
17. 37,306 ft-lb **19.** $\frac{2336\pi}{3}$ ft-lb **21.** 7,238,229.47 ft-lb
25. 85.1 ft-lb **27.** 98.35 ft-lb **29.** 91.32 in-oz
31. 1684.8 lb **33.** **(a)** 6364.8 lb **(b)** 5990.4 lb
35. 1164.8 lb **37.** 1309 lb
39. **(a)** 12,480 lb **(b)** 8580 lb **(c)** 9722.3 lb
41. **(a)** 93.33 lb **(b)** 3 ft **43.** $\frac{wb}{2}$
45. No. El depósito se desbordará, ya que el extremo móvil sólo se desplazará $3\frac{1}{3}$ ft en el tiempo que el depósito se llene.

Sección 6.6, pp. 355–357

1. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 12/5$ **3.** $\bar{x} = 1, \bar{y} = -3/5$
5. $\bar{x} = 16/105, \bar{y} = 8/15$ **7.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \pi/8$
9. $\bar{x} = 1, \bar{y} = -2/5$ **11.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4 - \pi}$
13. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 1/2$
15. **(a)** $\frac{224\pi}{3}$ **(b)** $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

(c)



19. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$ **21.** $\bar{x} = a/3, \bar{y} = b/3$ **23.** $13\delta/6$

25. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{a\pi}{4}$

27. $\bar{x} = 1/2, \bar{y} = 4$ **29.** $\bar{x} = 6/5, \bar{y} = 8/7$

33. $V = 32\pi, S = 32\sqrt{2}\pi$

35. $4\pi^2$ **37.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{2a}{\pi}$ **39.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$

41. $\sqrt{2}\pi a^3(4 + 3\pi)/6$ **43.** $\bar{x} = \dfrac{a}{3}, \bar{y} = \dfrac{b}{3}$

Ejercicios de práctica, pp. 357–359

1. $\dfrac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\dfrac{72\pi}{35}$

7. **(a)** 2π **(b)** π **(c)** $12\pi/5$ **(d)** $26\pi/5$

9. **(a)** 8π **(b)** $1088\pi/15$ **(c)** $512\pi/15$

11. $\pi(3\sqrt{3} - \pi)/3$

13. **(a)** $16\pi/15$ **(b)** $8\pi/5$ **(c)** $8\pi/3$ **(d)** $32\pi/5$

15. $\dfrac{28\pi}{3}$ ft^3 **17.** $\dfrac{10}{3}$ **19.** $\dfrac{285}{8}$

21. $28\pi\sqrt{2}/3$ **23.** 4π **25.** 4640 J

27. 10 ft-lb, 30 ft-lb **29.** 418,208.81 ft-lb

31. $22{,}500\pi$ ft-lb, 257 seg **33.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = 8/5$

35. $\bar{x} = 3/2, \bar{y} = 12/5$ **37.** $\bar{x} = 9/5, \bar{y} = 11/10$

39. 332.8 lb **41.** 2196.48 lb

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 359–360

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - a}{\pi}}$ **3.** $f(x) = \sqrt{C^2 - 1}\, x + a$, donde $C \geq 1$

5. $\dfrac{\pi}{30\sqrt{2}}$ **7.** $28/3$ **9.** $\dfrac{4h\sqrt{3mh}}{3}$

11. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \dfrac{n}{2n + 1}, (0, 1/2)$

15. **(a)** $\bar{x} = \bar{y} = 4(a^2 + ab + b^2)/(3\pi(a + b))$
(b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$

17. ≈ 2329.6 lb

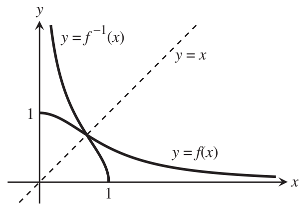
CAPÍTULO 7

Sección 7.1, pp. 367–369

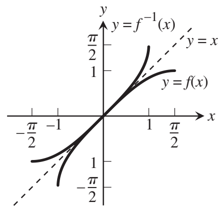
1. Inyectiva **3.** No es inyectiva **5.** Inyectiva

7. No es inyectiva **9.** Inyectiva

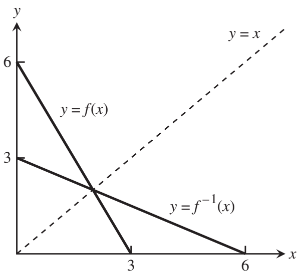
11. D: (0, 1] R: $[0, \infty)$



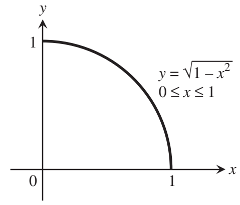
13. D: $[-1, 1]$ R: $[-\pi/2, \pi/2]$



15. D: [0, 6] R: [0, 3]



17. **(a)** Simétrica con respecto a la recta $y = x$



19. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ **21.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

23. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

25. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

27. $f^{-1}(x) = 5\sqrt{x - 1}$; dominio: $-\infty < x < \infty$; rango: $-\infty < y < \infty$

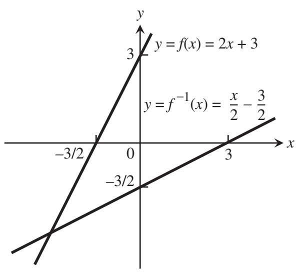
29. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; dominio: $x > 0$; rango: $y > 0$

31. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$; dominio: $-\infty < x < \infty, x \neq 1$; rango: $-\infty < y < \infty, y \neq 2$

33. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$; dominio: $-1 \leq x < \infty$; rango: $-\infty < y \leq 1$

35. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

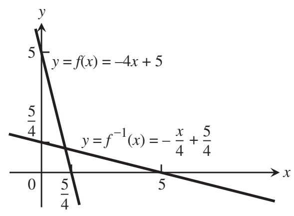
(b)



(c) 2, 1/2

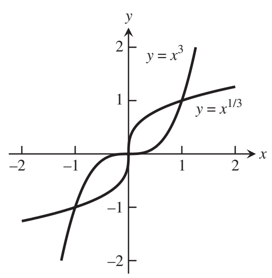
37. **(a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$

(b)



(c) $-4, -1/4$

39. **(b)**



(c) Pendiente de f en $(1, 1)$: 3; pendiente de g en $(1, 1)$: $1/3$; pendiente de f en $(-1, -1)$: 3; pendiente de g en $(-1, -1)$: $1/3$

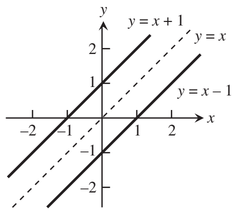
(d) $y = 0$ es tangente a $y = x^3$ en $x = 0$; $x = 0$ es tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$.

41. $1/9$ **43.** 3

45. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$

(b) La gráfica de f^{-1} es la recta que pasa por el origen con pendiente $1/m$.

47. **(a)** $f^{-1}(x) = x - 1$



(b) $f^{-1}(x) = x - b$. La gráfica de f^{-1} es una recta paralela a la gráfica de f. Las gráficas de f y f^{-1} están en lados opuestos de la recta $y = x$ y son equidistantes de esa recta.

(c) Sus gráficas serán paralelas entre sí y están en lados opuestos de la recta $y = x$ equidistantes de esa recta.

51. Creciente; por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = \dfrac{1}{9}x^{-2/3}$

53. Decreciente; por lo tanto, inyectiva; $df^{-1}/dx = -\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

Sección 7.2, pp. 375–377

1. **(a)** $\ln 3 - 2\ln 2$ **(b)** $2(\ln 2 - \ln 3)$ **(c)** $-\ln 2$

(d) $\dfrac{2}{3}\ln 3$ **(e)** $\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$ **(f)** $\dfrac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln(x - 3)$ **(c)** $\ln(t^2)$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$ **11.** $\dfrac{1}{\theta + 1}$ **13.** $3/x$

15. $2(\ln t) + (\ln t)^2$ **17.** $x^3 \ln x$ **19.** $\dfrac{1 - \ln t}{t^2}$

21. $\dfrac{1}{x(1 + \ln x)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{x\ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$

27. $-\dfrac{3x + 2}{2x(x + 1)}$ **29.** $\dfrac{2}{t(1 - \ln t)^2}$ **31.** $\dfrac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

33. $\dfrac{10x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{2(1 - x)}$ **35.** $2x\ln|x| - x\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{2}}$

37. $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **39.** $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$

43. $(\ln 2)^2$ **45.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\ln|6 + 3\tan t| + C$

49. $\ln 2$ **51.** $\ln 27$ **53.** $\ln(1 + \sqrt{x}) + C$

55. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x(x + 1)}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}\right) = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}$

57. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t + 1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}\,(t + 1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta + 3}\,(\operatorname{sen}\theta)\left(\dfrac{1}{2(\theta + 3)} + \cot\theta\right)$

61. $t(t + 1)(t + 2)\left[\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t + 1} + \dfrac{1}{t + 2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\dfrac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}\left[\dfrac{1}{\theta + 5} - \dfrac{1}{\theta} + \tan\theta\right]$

65. $\dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{2}{3(x + 1)}\right]$

67. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)$

69. **(a)** Máx $= 0$ en $x = 0$, mín $= -\ln 2$ en $x = \pi/3$

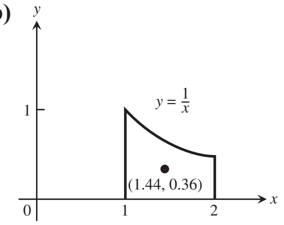
(b) Máx $= 1$ en $x = 1$, mín $= \cos(\ln 2)$ en $x = 1/2$ y $x = 2$

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi\ln 4$ **75.** $\pi\ln 16$

77. **(a)** $6 + \ln 2$ **(b)** $8 + \ln 9$

79. **(a)** $\bar{x} \approx 1.44$, $\bar{y} \approx 0.36$

(b)



83. $y = x + \ln|x| + 2$ **85.** **(b)** 0.00469

Sección 7.3, pp. 385–387

1. **(a)** $t = -10\ln 3$ **(b)** $t = -\dfrac{\ln 2}{k}$ **(c)** $t = \dfrac{\ln .4}{\ln .2}$

3. $4(\ln x)^2$ **5.** $-5e^{-5x}$ **7.** $-7e^{(5-7x)}$ **9.** xe^x

11. x^2e^x **13.** $2e^\theta\cos\theta$ **15.** $2\theta e^{-\theta^2}\operatorname{sen}(e^{-\theta^2})$

17. $\dfrac{1 - t}{t}$ **19.** $1/(1 + e^\theta)$ **21.** $e^{\cos t}(1 - t\operatorname{sen} t)$

23. $(\operatorname{sen} x)/x$ **25.** $\dfrac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\operatorname{sen} x}$ **27.** $\dfrac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$

29. $\dfrac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$ **31.** 1 **33.** $8e^{(x+1)} + C$ **35.** 2

37. $2e^{\sqrt{r}} + C$ **39.** $-e^{-t^2} + C$ **41.** $-e^{1/x} + C$ **43.** e

45. $\dfrac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + C$ **47.** 1 **49.** $\ln(1 + e^r) + C$

51. $y = 1 - \cos(e^t - 2)$ **53.** $y = 2(e^{-x} + x) - 1$ **55.** $2^x\ln 2$

57. $\left(\dfrac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$ **59.** $\pi x^{(\pi-1)}$ **61.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\operatorname{sen}\theta$

63. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$ **65.** $(3\cos 3t)(2^{\operatorname{sen} 3t})\ln 2$

67. $\dfrac{1}{\theta\ln 2}$ **69.** $\dfrac{3}{x\ln 4}$ **71.** $\dfrac{x^2}{\ln 10} + 3x^2\log_{10}x$

73. $\dfrac{-2}{(x + 1)(x - 1)}$ **75.** $\operatorname{sen}(\log_7\theta) + \dfrac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

77. $\dfrac{1}{\ln 10}$ **79.** $\dfrac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **81.** $\dfrac{1}{t}$

83. $\dfrac{5^x}{\ln 5} + C$ **85.** $\dfrac{1}{2\ln 2}$ **87.** $\dfrac{1}{\ln 2}$ **89.** $\dfrac{6}{\ln 7}$

91. 32760 **93.** $\dfrac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3} + 1} + C$ **95.** $3^{\sqrt{2}+1}$

97. $\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) + C$ **99.** $2(\ln 2)^2$ **101.** $\dfrac{3\ln 2}{2}$

103. $\ln 10$ **105.** $(\ln 10)\ln|\ln x| + C$

107. $\ln(\ln x)$, $x > 1$ **109.** $-\ln x$

111. $(x+1)^x\left(\frac{x}{x+1}+\ln(x+1)\right)$ **113.** $(\sqrt{t})^t\left(\frac{\ln t}{2}+\frac{1}{2}\right)$

115. $(\operatorname{sen} x)^x(\ln \operatorname{sen} x + x\cot x)$ **117.** $\cos x^x \cdot x^x(1+\ln x)$

119. Máximo: 1 en $x = 0$, mínimo: $2 - 2\ln 2$ en $x = \ln 2$

121. **(a)** Máx abs: $\frac{1}{e}$ en $x = 1$ **(b)** $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

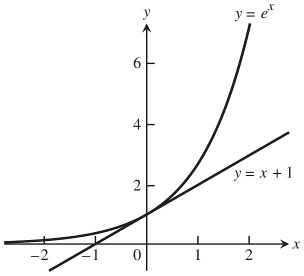
123. Máx abs de $1/(2e)$ que se toma en $x = 1/\sqrt{e}$

125. 2 **127.** $y = e^{x/2} - 1$

129. $\frac{e^2-1}{2e}$ **131.** $\ln(\sqrt{2}+1)$

133. **(a)** $\frac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = x\cdot\frac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$
(b) $\frac{1}{e-1}$

135. **(b)** $|\text{error}| \approx 0.02140$
(c) $L(x) = x + 1$ nunca sobreestima a e^x.



137. $2\ln 5$ **139.** $x \approx -0.76666$

141. **(a)** $L(x) = 1 + (\ln 2)x \approx 0.69x + 1$

Sección 7.4, pp. 394–396

9. $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$ **11.** $e^y - e^x = C$

13. $-x + 2\tan\sqrt{y} = C$ **15.** $e^{-y} + 2e^{\sqrt{x}} = C$

17. $y = \operatorname{sen}(x^2 + C)$ **19.** $\frac{1}{3}\ln|y^3 - 2| = x^3 + C$

21. $4\ln(\sqrt{y}+2) = e^{x^2} + C$

23. **(a)** -0.00001 **(b)** 10,536 años **(c)** 82%

25. 54.88 g **27.** 59.8 ft **29.** 2.8147498×10^{14}

31. **(a)** 8 años **(b)** 32.02 años

33. 15.28 años **35.** 56,562 años

39. **(a)** 17.5 min **(b)** 13.26 min

41. -3 °C **43.** Alrededor de 6658 años **45.** 54.44%

Sección 7.5, pp. 402–404

1. 1/4 **3.** 5/7 **5.** 1/2 **7.** 1/4 **9.** $-23/7$ **11.** 5/7 **13.** 0

15. -16 **17.** -2 **19.** 1/4 **21.** 2 **23.** 3 **25.** -1

27. ln 3 **29.** $\frac{1}{\ln 2}$ **31.** ln 2 **33.** 1 **35.** 1/2 **37.** ln 2

39. $-\infty$ **41.** $-1/2$ **43.** -1 **45.** 1 **47.** 0 **49.** 2

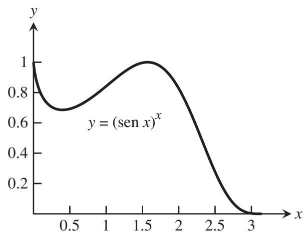
51. $1/e$ **53.** 1 **55.** $1/e$ **57.** $e^{1/2}$ **59.** 1 **61.** e^3

63. 0 **65.** $+1$ **67.** 3 **69.** 1 **71.** 0 **73.** ∞

75. (b) es correcto. **77.** (d) es correcto. **79.** $c = \frac{27}{10}$ **81.** **(b)** $\frac{-1}{2}$

83. -1 **87.** **(a)** $y = 1$ **(b)** $y = 0, y = \frac{3}{2}$

89. **(a)** Debemos asignar el valor 1 a $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$ para hacerla continua en $x = 0$.



(c) El valor máximo de $f(x)$ es casi igual a 1 cerca del punto $x \approx 1.55$ (véase la gráfica en el inciso (a)).

Sección 7.6, pp. 413–416

1. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

3. **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$

5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $3\pi/4$ **(c)** $\pi/6$

7. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

9. $1/\sqrt{2}$ **11.** $-1/\sqrt{3}$ **13.** $\pi/2$ **15.** $\pi/2$ **17.** $\pi/2$

19. 0 **21.** $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **23.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

25. $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **27.** $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

29. $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **31.** $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$ **33.** $\frac{1}{(\tan^{-1}x)(1+x^2)}$

35. $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$ **37.** $\frac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **39.** 0

41. $\operatorname{sen}^{-1} x$ **43.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$ **45.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{17}} + C$

47. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right| + C$ **49.** $2\pi/3$ **51.** $\pi/16$

53. $-\pi/12$ **55.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}2(r-1) + C$

57. $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$ **59.** $\frac{1}{4}\sec^{-1}\left|\frac{2x-1}{2}\right| + C$

61. π **63.** $\pi/12$ **65.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}y^2 + C$ **67.** $\operatorname{sen}^{-1}(x-2) + C$

69. π **71.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{2}\right) + C$ **73.** 2π

75. $\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$

77. $x + \ln(x^2+9) - \frac{10}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$

79. $\sec^{-1}|x+1| + C$ **81.** $e^{\operatorname{sen}^{-1}x} + C$

83. $\frac{1}{3}(\operatorname{sen}^{-1}x)^3 + C$ **85.** $\ln|\tan^{-1}y| + C$ **87.** $\sqrt{3} - 1$

89. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{3}\right) + C$ **91.** 5 **93.** 2 **95.** 1

97. 1 **103.** $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ **105.** $y = \sec^{-1}x + \frac{2\pi}{3}, x > 1$

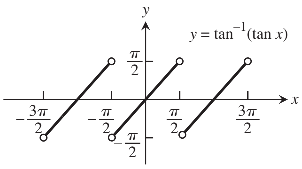
107. (b) $y = 3\sqrt{5}$ **109.** $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$

121. $\pi^2/2$ **123. (a)** $\pi^2/2$ **(b)** 2π

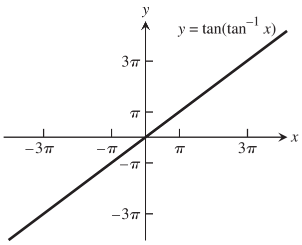
125. (a) 0.84107 **(b)** -0.72973 **(c)** 0.46365

127. (a) Dominio: todos los números reales, excepto aquellos que tengan la forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ donde k es un entero.

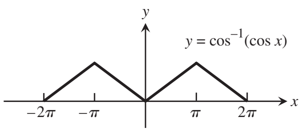
Rango: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



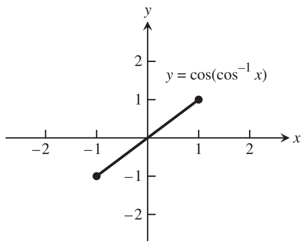
(b) Dominio: $-\infty < x < \infty$; Rango: $-\infty < y < \infty$



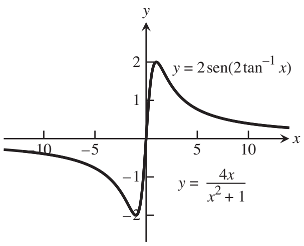
129. (a) Dominio: $-\infty < x < \infty$; Rango: $0 \le y \le \pi$



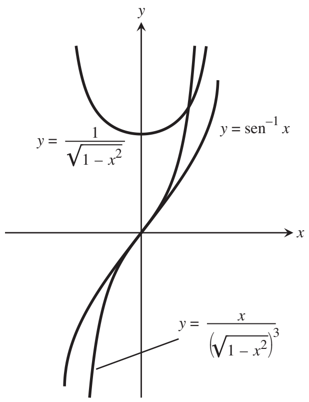
(b) Dominio: $-1 \le x \le 1$; Rango: $-1 \le y \le 1$



131. Las gráficas son idénticas.



133.



Sección 7.7, pp. 421–424

1. $\cosh x = 5/4$, $\tanh x = -3/5$, $\coth x = -5/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, $\operatorname{csch} x = -4/3$

3. $\operatorname{senh} x = 8/15$, $\tanh x = 8/17$, $\coth x = 17/8$, $\operatorname{sech} x = 15/17$, $\operatorname{csch} x = 15/8$

5. $x + \frac{1}{x}$ **7.** e^{5x} **9.** e^{4x} **13.** $2\cosh\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ **17.** $\coth z$

19. $(\ln \operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta \tanh\theta)$ **21.** $\tanh^3 v$ **23.** 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1 + x)}}$ **27.** $\frac{1}{1 + \theta} - \tanh^{-1}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1}\sqrt{t}$ **31.** $-\operatorname{sech}^{-1} x$ **33.** $\frac{\ln 2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$ **41.** $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

43. $12\operatorname{senh}\left(\frac{x}{2} - \ln 3\right) + C$ **45.** $7\ln|e^{x/7} + e^{-x/7}| + C$

47. $\tanh\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ **49.** $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$ **51.** $\ln\frac{5}{2}$

53. $\frac{3}{32} + \ln 2$ **55.** $e - e^{-1}$ **57.** $3/4$ **59.** $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

61. $\ln(2/3)$ **63.** $\frac{-\ln 3}{2}$ **65.** $\ln 3$

67. (a) $\operatorname{senh}^{-1}(\sqrt{3})$ **(b)** $\ln(\sqrt{3} + 2)$

69. (a) $\coth^{-1}(2) - \coth^{-1}(5/4)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

71. (a) $-\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(b) $-\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (12/13)^2}}{(12/13)}\right) + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (4/5)^2}}{(4/5)}\right)$

$= -\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(2) = \ln(4/3)$

73. (a) 0 **(b)** 0

77. (b) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ **(c)** $80\sqrt{5} \approx 178.89$ ft/seg **79.** 2π **81.** $\frac{6}{5}$

Sección 7.8, pp. 428–429

1. (a) Lenta **(b)** Lenta **(c)** Lenta **(d)** Rápida **(e)** Lenta **(f)** Lenta **(g)** Igual **(h)** Lenta

3. (a) Igual **(b)** Rápida **(c)** Igual **(d)** Igual **(e)** Lenta **(f)** Rápida **(g)** Lenta **(h)** Igual

5. (a) Igual **(b)** Igual **(c)** Igual **(d)** Rápida **(e)** Rápida **(f)** Igual **(g)** Lenta **(h)** Rápida

7. d, a, c, b

9. (a) Falso **(b)** Falso **(c)** Cierto **(d)** Cierto **(e)** Cierto **(f)** Cierto **(g)** Falso **(h)** Cierto

13. Cuando el grado de f es menor o igual al grado de g.

15. 1, 1

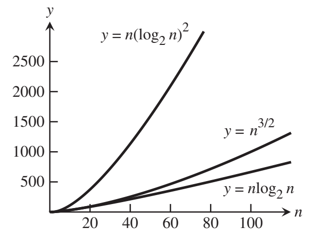
21. (b) $\ln(e^{17000000}) = 17{,}000{,}000 < (e^{17\times 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24{,}154{,}952.75$

(c) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$

(d) Cruzan en $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$.

23. **(a)** El algoritmo tarda $O(n \log_2 n)$ pasos

(b)



25. Podría tardar un millón en una búsqueda secuencial; a lo sumo 20 pasos en una búsqueda binaria.

Ejercicios de práctica, pp. 430–432

1. $-2e^{-x/5}$ **3.** xe^{4x} **5.** $\dfrac{2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = 2\cot\theta$ **7.** $\dfrac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}(\ln 8)$ **11.** $18x^{2.6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$ **15.** $-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\cos^{-1}x}$ **19.** $\tan^{-1}(t) + \dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{1}{2t}$

21. $\dfrac{1-z}{\sqrt{z^2-1}} + \sec^{-1} z$ **23.** -1

25. $\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\dfrac{2x}{x^2+1} + \tan 2x\right]$

27. $5\left[\dfrac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t-2} - \dfrac{1}{t+3}\right]$

29. $\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}(\operatorname{sen}\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\dfrac{\ln\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}{2} + \theta\cot\theta\right)$ **31.** $-\cos e^x + C$

33. $\tan(e^x - 7) + C$ **35.** $e^{\tan x} + C$ **37.** $\dfrac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$ **41.** $\ln(9/25)$ **43.** $-[\ln|\cos(\ln v)|] + C$

45. $-\dfrac{1}{2}(\ln x)^{-2} + C$ **47.** $-\cot(1 + \ln r) + C$

49. $\dfrac{1}{2\ln 3}\left(3^{x^2}\right) + C$ **51.** $3\ln 7$ **53.** $15/16 + \ln 2$

55. $e - 1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\dfrac{1}{3}\left[(\ln 4)^3 - (\ln 2)^3\right]$ o $\dfrac{7}{3}(\ln 2)^3$ **63.** $\dfrac{9\ln 2}{4}$ **65.** π

67. $\pi/\sqrt{3}$ **69.** $\sec^{-1}|2y| + C$ **71.** $\pi/12$

73. $\operatorname{sen}^{-1}(x+1) + C$ **75.** $\pi/2$ **77.** $\dfrac{1}{3}\sec^{-1}\left(\dfrac{t+1}{3}\right) + C$

79. $y = \dfrac{\ln 2}{\ln(3/2)}$ **81.** $y = \ln x - \ln 3$ **83.** $y = \dfrac{1}{1-e^x}$

85. 5 **87.** 0 **89.** 1 **91.** 3/7 **93.** 0 **95.** 1

97. $\ln 10$ **99.** $\ln 2$ **101.** 5 **103.** $-\infty$ **105.** 1 **107.** 1

109. **(a)** Misma tasa **(b)** Misma tasa **(c)** Más rápido **(d)** Más rápido **(e)** Misma tasa **(f)** Misma tasa

111. **(a)** Verdadero **(b)** Falso **(c)** Falso **(d)** Verdadero **(e)** Verdadero **(f)** Verdadero

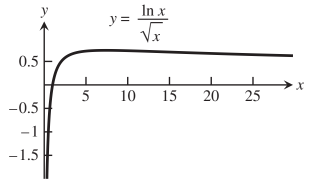
113. $1/3$

115. Máximo absoluto $= 0$ en $x = e/2$, mínimo absoluto $= -0.5$ en $x = 0.5$

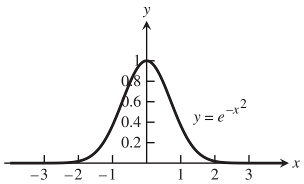
117. 1 **119.** $1/e$ m/seg

121. $1/\sqrt{2}$ unidades de largo por $1/\sqrt{e}$ unidades de altura, $A = 1/\sqrt{2e} \approx 0.43$ unidades^2

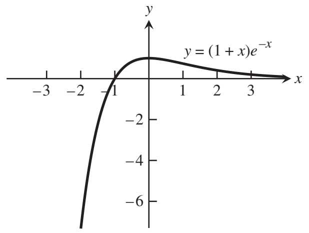
123. **(a)** Máximo absoluto en $2/e$ en $x = e^2$; punto de inflexión $(e^{8/3}, (8/3)e^{-4/3})$; cóncava hacia arriba en $(e^{8/3}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(0, e^{8/3})$



(b) Máximo absoluto de 1 en $x = 0$; puntos de inflexión $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{e})$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$



(c) Máximo absoluto de 1 en $x = 0$; punto de inflexión $(1, 2/e)$; cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$



125. $y = \left(\tan^{-1}\left(\dfrac{x+C}{2}\right)\right)^2$ **127.** $y^2 = \operatorname{sen}^{-1}(2\tan x + C)$

129. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$ **131.** $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

133. 18,935 años **135.** $20(5 - \sqrt{17})$ m

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 433–434

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** $\ln 2$ **7.** **(a)** 1 **(b)** $\pi/2$ **(c)** π

9. $\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{2\ln 2}, 2:1$ **11.** $x = 2$ **13.** $2/17$

17. $\bar{x} = \dfrac{\ln 4}{\pi}, \bar{y} = 0$ **19.** **(b)** $61°$

CAPÍTULO 8

Sección 8.1, pp. 441–443

1. $-2x\cos(x/2) + 4\operatorname{sen}(x/2) + C$

3. $t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t + C$ **5.** $\ln 4 - \dfrac{3}{4}$

7. $xe^x - e^x + C$ **9.** $-(x^2 + 2x - 2)e^{-x} + C$

11. $y \tan^{-1}(y) - \ln\sqrt{1+y^2} + C$
13. $x \tan x + \ln|\cos x| + C$
15. $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$
17. $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$
19. $(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + C$
21. $\frac{1}{2}(-e^\theta \cos\theta + e^\theta \operatorname{sen}\theta) + C$
23. $\frac{e^{2x}}{13}(3 \operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$
25. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3s+9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}}\right) + C$
27. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$
29. $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)] + C$
31. $\frac{1}{2}\ln|\sec x^2 + \tan x^2| + C$
33. $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$
35. $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$ **37.** $\frac{1}{4}e^{x^4} + C$
39. $\frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{2}{15}(x^2+1)^{5/2} + C$
41. $-\frac{2}{5}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{5}\cos 3x \cos 2x + C$
43. $-\cos e^x + C$ **45.** $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$
47. $\frac{\pi^2 - 4}{8}$ **49.** $\frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{9}$
51. **(a)** π **(b)** 3π **(c)** 5π **(d)** $(2n+1)\pi$
53. $2\pi(1 - \ln 2)$ **55.** **(a)** $\pi(\pi - 2)$ **(b)** 2π
57. **(a)** 1 **(b)** $(e-2)\pi$ **(c)** $\frac{\pi}{2}(e^2 + 9)$
(d) $\bar{x} = \frac{1}{4}(e^2 + 1), \bar{y} = \frac{1}{2}(e - 2)$
59. $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$ **61.** $u = x^n, dv = \cos x\, dx$
63. $u = x^n, dv = e^{ax}\, dx$ **67.** $x \operatorname{sen}^{-1} x + \cos(\operatorname{sen}^{-1} x) + C$
69. $x\sec^{-1} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$ **71.** Sí
73. **(a)** $x \operatorname{senh}^{-1} x - \cosh(\operatorname{senh}^{-1} x) + C$
(b) $x \operatorname{senh}^{-1} x - (1 + x^2)^{1/2} + C$

Sección 8.2, pp. 448–449

1. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ **3.** $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$ **5.** $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
7. $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$ **9.** $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$
11. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$ **13.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$
15. $16/35$ **17.** 3π
19. $-4\operatorname{sen} x\cos^3 x + 2\cos x \operatorname{sen} x + 2x + C$
21. $-\cos^4 2\theta + C$ **23.** 4 **25.** 2
27. $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$ **29.** $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{5/2} - \frac{18}{35} - \frac{2}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^{7/2}$ **31.** $\sqrt{2}$
33. $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ **35.** $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **37.** $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$
39. $2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})$ **41.** $\frac{2}{3}\tan\theta + \frac{1}{3}\sec^2\theta\tan\theta + C$
43. $4/3$ **45.** $2\tan^2 x - 2\ln(1 + \tan^2 x) + C$
47. $\frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$
49. $\frac{4}{3} - \ln\sqrt{3}$ **51.** $-\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$ **53.** π
55. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{14}\operatorname{sen} 7x + C$
57. $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 5\theta + C$
59. $-\frac{2}{5}\cos^5\theta + C$ **61.** $\frac{1}{4}\cos\theta - \frac{1}{20}\cos 5\theta + C$
63. $\sec x - \ln|\csc x + \cot x| + C$ **65.** $\cos x + \sec x + C$
67. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$ **69.** $\ln(1 + \sqrt{2})$
71. $\pi^2/2$ **73.** $\bar{x} = \frac{4\pi}{3}, \bar{y} = \frac{8\pi^2 + 3}{12\pi}$

Sección 8.3, pp. 452–453

1. $\ln|\sqrt{9 + x^2} + x| + C$ **3.** $\pi/4$ **5.** $\pi/6$
7. $\frac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25 - t^2}}{2} + C$
9. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2 - 49}}{7}\right| + C$
11. $7\left[\frac{\sqrt{y^2 - 49}}{7} - \sec^{-1}\left(\frac{y}{7}\right)\right] + C$ **13.** $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$
15. $-\sqrt{9 - x^2} + C$ **17.** $\frac{1}{3}(x^2 + 4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2 + 4} + C$
19. $\frac{-2\sqrt{4 - w^2}}{w} + C$ **21.** $\frac{10}{3}\tan^{-1}\frac{5x}{6} + C$
23. $4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$ **25.** $-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$
27. $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)^5 + C$ **29.** $2\tan^{-1} 2x + \frac{4x}{(4x^2 + 1)} + C$
31. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$ **33.** $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\right)^3 + C$
35. $\ln 9 - \ln(1 + \sqrt{10})$ **37.** $\pi/6$ **39.** $\sec^{-1}|x| + C$
41. $\sqrt{x^2 - 1} + C$ **43.** $\frac{1}{2}\ln|\sqrt{1 + x^4} + x^2| + C$
45. $4\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\sqrt{4 - x} + C$
47. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt{x}\sqrt{1 - x}(1 - 2x) + C$
49. $y = 2\left[\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$
51. $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3\pi}{8}$ **53.** $3\pi/4$

55. (a) $\frac{1}{12}(\pi + 6\sqrt{3} - 12)$

(b) $\bar{x} = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{4(\pi + 6\sqrt{3} - 12)}$, $\bar{y} = \dfrac{\pi^2 + 12\sqrt{3}\pi - 72}{12(\pi + 6\sqrt{3} - 12)}$

57. (a) $-\frac{1}{3}x^2(1 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1 - x^2)^{5/2} + C$

(b) $-\frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} + C$

(c) $\frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C$

Sección 8.4, pp. 461–462

1. $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x-2}$ **3.** $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2}$

5. $\dfrac{-2}{z} + \dfrac{-1}{z^2} + \dfrac{2}{z-1}$ **7.** $1 + \dfrac{17}{t-3} + \dfrac{-12}{t-2}$

9. $\frac{1}{2}[\ln|1 + x| - \ln|1 - x|] + C$

11. $\frac{1}{7}\ln|(x + 6)^2(x - 1)^5| + C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t + 2| + \frac{1}{3}\ln|t - 1| + C$ **17.** $3\ln 2 - 2$

19. $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2 - 1)} + C$ **21.** $(\pi + 2\ln 2)/8$

23. $\tan^{-1}y - \dfrac{1}{y^2 + 1} + C$

25. $-(s - 1)^{-2} + (s - 1)^{-1} + \tan^{-1}s + C$

27. $\frac{2}{3}\ln|x - 1| + \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \sqrt{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

29. $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

31. $\dfrac{-1}{\theta^2 + 2\theta + 2} + \ln(\theta^2 + 2\theta + 2) - \tan^{-1}(\theta + 1) + C$

33. $x^2 + \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + C$

35. $9x + 2\ln|x| + \dfrac{1}{x} + 7\ln|x - 1| + C$

37. $\dfrac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + C$ **39.** $\ln\left(\dfrac{e^t + 1}{e^t + 2}\right) + C$

41. $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen} y - 2}{\operatorname{sen} y + 3}\right| + C$

43. $\dfrac{(\tan^{-1}2x)^2}{4} - 3\ln|x - 2| + \dfrac{6}{x-2} + C$

45. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right| + C$ **47.** $2\sqrt{1 + x} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}\right| + C$

49. $\frac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^4}{x^4 + 1}\right| + C$

51. $x = \ln|t - 2| - \ln|t - 1| + \ln 2$ **53.** $x = \dfrac{6t}{t+2} - 1$

55. $3\pi\ln 25$ **57.** 1.10 **59. (a)** $x = \dfrac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ **(b)** 1.55 días

Sección 8.5, pp. 467–468

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-3}{3}}\right) + C$

3. $\sqrt{x - 2}\left(\dfrac{2(x-2)}{3} + 4\right) + C$

5. $\dfrac{(2x - 3)^{3/2}(x + 1)}{5} + C$

7. $\dfrac{-\sqrt{9 - 4x}}{x} - \dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9 - 4x} - 3}{\sqrt{9 - 4x} + 3}\right| + C$

9. $\dfrac{(x + 2)(2x - 6)\sqrt{4x - x^2}}{6} + 4\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x-2}{2}\right) + C$

11. $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{7 + x^2}}{x}\right| + C$

13. $\sqrt{4 - x^2} - 2\ln\left|\dfrac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + C$

15. $\dfrac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t) + C$

17. $\dfrac{x^2}{2}\cos^{-1}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

19. $\dfrac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \dfrac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1 + x^2) + C$

21. $-\dfrac{\cos 5x}{10} - \dfrac{\cos x}{2} + C$ **23.** $8\left[\dfrac{\operatorname{sen}(7t/2)}{7} - \dfrac{\operatorname{sen}(9t/2)}{9}\right] + C$

25. $6\operatorname{sen}(\theta/12) + \frac{6}{7}\operatorname{sen}(7\theta/12) + C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \dfrac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

29. $\left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} + C$

31. $\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + C$

33. $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} - \ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}}{\operatorname{sen} t}\right| + C$

35. $\ln\left|\ln y + \sqrt{3 + (\ln y)^2}\right| + C$

37. $\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right| + C$

39. $\dfrac{x+2}{2}\sqrt{5 - 4x - x^2} + \dfrac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x+2}{3}\right) + C$

41. $-\dfrac{\operatorname{sen}^4 2x\cos 2x}{10} - \dfrac{2\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x}{15} - \dfrac{4\cos 2x}{15} + C$

43. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10} + \dfrac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{15} + C$

45. $\tan^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

47. $\dfrac{(\sec\pi x)(\tan\pi x)}{\pi} + \dfrac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x + \tan\pi x| + C$

49. $\dfrac{-\csc^3 x\cot x}{4} - \dfrac{3\csc x\cot x}{8} - \dfrac{3}{8}\ln|\csc x + \cot x| + C$

51. $\frac{1}{2}[\sec(e^t - 1)\tan(e^t - 1) +$
$\ln|\sec(e^t - 1) + \tan(e^t - 1)|] + C$

53. $\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ **55.** $\pi/3$

57. $2\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{2}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

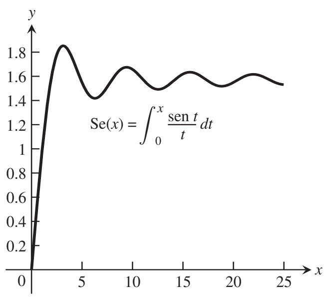
59. $\bar{x} = 4/3$, $\bar{y} = \ln\sqrt{2}$ **61.** 7.62 **63.** $\pi/8$ **67.** $\pi/4$

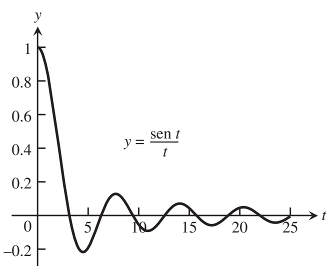
Sección 8.6, pp. 475–477

1. **I:** **(a)** 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** 0%
II: **(a)** 1.5, 0 **(b)** 1.5, 0 **(c)** 0%
3. **I:** **(a)** 2.75, 0.08 **(b)** 2.67, 0.08 **(c)** $0.0312 \approx 3\%$
II: **(a)** 2.67, 0 **(b)** 2.67, 0 **(c)** 0%
5. **I:** **(a)** 6.25, 0.5 **(b)** 6, 0.25 **(c)** $0.0417 \approx 4\%$
II: **(a)** 6, 0 **(b)** 6, 0 **(c)** 0%
7. **I:** **(a)** 0.509, 0.03125 **(b)** 0.5, 0.009 **(c)** $0.018 \approx 2\%$
II: **(a)** 0.5, 0.002604 **(b)** 0.5, 0.0004 **(c)** 0%
9. **I:** **(a)** 1.8961, 0.161 **(b)** 2, 0.1039 **(c)** $0.052 \approx 5\%$
II: **(a)** 2.0045, 0.0066 **(b)** 2, 0.00454 **(c)** 0.2%
11. **(a)** 1 **(b)** 2 **13.** **(a)** 116 **(b)** 2
15. **(a)** 283 **(b)** 2 **17.** **(a)** 71 **(b)** 10
19. **(a)** 76 **(b)** 12 **21.** **(a)** 82 **(b)** 8
23. 15,990 ft^3 **25.** $\approx$10.63 ft
27. **(a)** $\approx$0.00021 **(b)** $\approx$1.37079 **(c)** $\approx$0.015%
31. **(a)** $\approx$5.870 **(b)** $|E_T| \leq 0.0032$
33. 21.07 in. **35.** 14.4

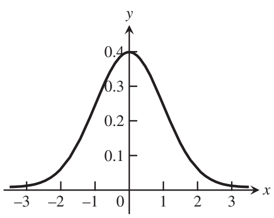
Sección 8.7, pp. 487–489

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$ **9.** ln 3 **11.** ln 4 **13.** 0
15. $\sqrt{3}$ **17.** π **19.** $\ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ **21.** -1 **23.** 1
25. $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6 **33.** ln 2
35. Diverge **37.** Converge **39.** Converge **41.** Converge
43. Diverge **45.** Converge **47.** Converge **49.** Diverge
51. Converge **53.** Converge **55.** Diverge **57.** Converge
59. Diverge **61.** Converge **63.** Converge
65. **(a)** Converge cuando $p < 1$ **(b)** Converge cuando $p > 1$
67. 1 **69.** 2π **71.** ln 2 **73.** **(b)** $\approx$0.88621
75. **(a)**





(b) $\pi/2$
77. **(a)**



(b) $\approx$0.683, $\approx$0.954, $\approx$0.997

Ejercicios de práctica, pp. 489–491

1. $(x + 1)(\ln(x + 1)) - (x + 1) + C$

3. $x \tan^{-1}(3x) - \frac{1}{6}\ln(1 + 9x^2) + C$

5. $(x + 1)^2 e^x - 2(x + 1)e^x + 2e^x + C$

7. $\frac{2e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{5} + C$

9. $2\ln|x - 2| - \ln|x - 1| + C$

11. $\ln|x| - \ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C$

13. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right| + C$

15. $4\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 4\tan^{-1}x + C$

17. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v - 2)^5(v + 2)}{v^6}\right| + C$

19. $\frac{1}{2}\tan^{-1}t - \frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}} + C$

21. $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}\ln|x + 2| + \frac{2}{3}\ln|x - 1| + C$

23. $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln|x + 3| + \frac{3}{2}\ln|x + 1| + C$

25. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right| + C$ **27.** $\ln|1 - e^{-s}| + C$

29. $-\sqrt{16 - y^2} + C$ **31.** $-\frac{1}{2}\ln|4 - x^2| + C$

33. $\ln\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + C$ **35.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x + 3}{x - 3}\right| + C$

37. $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$ **39.** $\frac{\tan^5 x}{5} + C$

41. $\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\cos 11\theta}{22} + C$ **43.** $4\sqrt{1 - \cos(t/2)} + C$

45. Al menos 16 **47.** $T = \pi, S = \pi$ **49.** 25 °F
51. **(a)** $\approx$2.42 gal **(b)** $\approx$24.83 mi/gal
53. $\pi/2$ **55.** 6 **57.** ln 3 **59.** 2 **61.** $\pi/6$
63. Diverge **65.** Diverge **67.** Converge

69. $\frac{2x^{3/2}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x} + 1\right) + C$

71. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)^2 + C$

73. $-2\cot x - \ln|\csc x + \cot x| + \csc x + C$

75. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3 + v}{3 - v}\right| + \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{v}{3} + C$

77. $\frac{\theta\operatorname{sen}(2\theta + 1)}{2} + \frac{\cos(2\theta + 1)}{4} + C$ **79.** $\frac{1}{4}\sec^2\theta + C$

81. $2\left(\frac{\left(\sqrt{2 - x}\right)^3}{3} - 2\sqrt{2 - x}\right) + C$ **83.** $\tan^{-1}(y - 1) + C$

85. $\frac{1}{4}\ln|z| - \frac{1}{4z} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(z^2 + 4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\right] + C$

87. $-\frac{1}{4}\sqrt{9 - 4t^2} + C$ **89.** $\ln\left(\frac{e^t + 1}{e^t + 2}\right) + C$ **91.** 1/4

93. $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ **95.** $-\frac{1}{5}\tan^{-1}\cos(5t) + C$

97. $2\sqrt{r} - 2\ln(1 + \sqrt{r}) + C$

99. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

101. $\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

103. $\frac{4}{7}\left(1+\sqrt{x}\right)^{7/2} - \frac{8}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{5/2} + \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{3/2} + C$

105. $2\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right| + C$

107. $\ln x - \ln|1 + \ln x| + C$

109. $\frac{1}{2}x^{\ln x} + C$ **111.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right| + C$

113. (b) $\frac{\pi}{4}$ **115.** $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan x\right) + C$

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 492–494

1. $x(\operatorname{sen}^{-1}x)^2 + 2(\operatorname{sen}^{-1}x)\sqrt{1-x^2} - 2x + C$

3. $\frac{x^2\operatorname{sen}^{-1}x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2} - \operatorname{sen}^{-1}x}{4} + C$

5. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t - \sqrt{1-t^2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}t\right) + C$

7. 0 **9.** $\ln(4) - 1$ **11.** 1 **13.** $32\pi/35$ **15.** 2π

17. (a) π **(b)** $\pi(2e - 5)$

19. (b) $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3} - \frac{16(\ln 2)}{9} + \frac{16}{27}\right)$ **21.** $\left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right)$

23. $\sqrt{1+e^2} - \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e} + \frac{1}{e}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

25. $\frac{12\pi}{5}$ **27.** $a = \frac{1}{2}, -\frac{\ln 2}{4}$ **29.** $\frac{1}{2} < p \le 1$

33. $\frac{e^{2x}}{13}(3\operatorname{sen}3x + 2\cos 3x) + C$

35. $\frac{\cos x\operatorname{sen}3x - 3\operatorname{sen}x\cos 3x}{8} + C$

37. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen}bx - b\cos bx) + C$ **39.** $x\ln(ax) - x + C$

41. $\frac{2}{1-\tan(x/2)} + C$ **43.** 1 **45.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

47. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(t/2) + 1 - \sqrt{2}}{\tan(t/2) + 1 + \sqrt{2}}\right| + C$

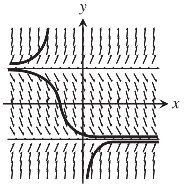
49. $\ln\left|\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right| + C$

CAPÍTULO 9

Sección 9.1, pp. 502–504

1. (d) **3.** (a)

5.



7. $y' = x - y;\ y(1) = -1$ **9.** $y' = -(1+y)\operatorname{sen}x;\ y(0) = 2$

11. $y(\text{exacta}) = \frac{x}{2} - \frac{4}{x},\ y_1 = -0.25,\ y_2 = 0.3,\ y_3 = 0.75$

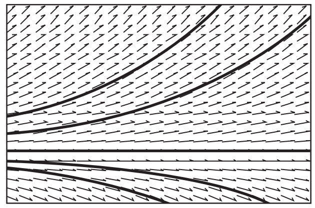
13. $y(\text{exacta}) = 3e^{x(x+2)},\ y_1 = 4.2,\ y_2 = 6.216,\ y_3 = 9.697$

15. $y(\text{exacta}) = e^{x^2} + 1,\ y_1 = 2.0,\ y_2 = 2.0202,\ y_3 = 2.0618$

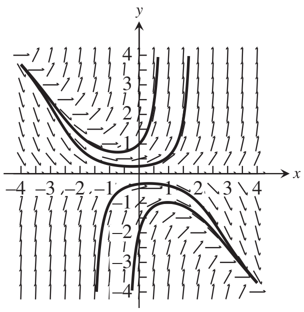
17. $y \approx 2.48832$, el valor exacto es e.

19. $y \approx -0.2272$, el valor exacto es $1/\left(1 - 2\sqrt{5}\right) \approx -0.2880$.

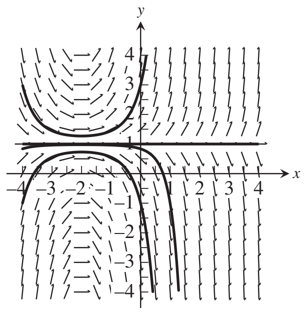
23.



25.



27.



35. El método de Euler da $y \approx 3.45835$; la solución exacta es $y = 1 + e \approx 3.71828$.

37. $y \approx 1.5000$; el valor exacto es 1.5275.

Sección 9.2, pp. 508–510

1. $y = \frac{e^x + C}{x},\quad x > 0$ **3.** $y = \frac{C - \cos x}{x^3},\quad x > 0$

5. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2},\quad x > 0$ **7.** $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

9. $y = x(\ln x)^2 + Cx$

11. $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r = (\csc\theta)(\ln|\sec\theta| + C),\quad 0 < \theta < \pi/2$

15. $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

19. $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y = y_0e^{kt}$

23. (b) es correcto, pero **(a)** no lo es. **25.** $t = \frac{L}{R}\ln 2$ sec

27. (a) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} = \frac{V}{R}(1 - e^{-3}) \approx 0.95\frac{V}{R}$ amp **(b)** 86%

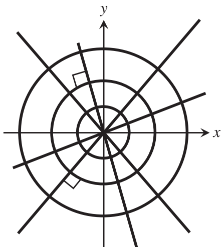
29. $y = \frac{1}{1 + Ce^{-x}}$ **31.** $y^3 = 1 + Cx^{-3}$

Sección 9.3, pp. 515–516

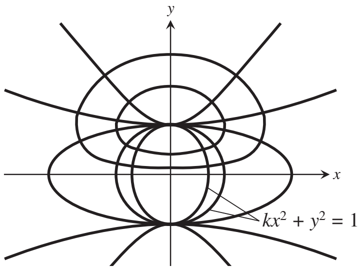
1. (a) 168.5 m **(b)** 41.13 seg

3. $s(t) = 4.91\left(1 - e^{-(22.36/39.92)t}\right)$

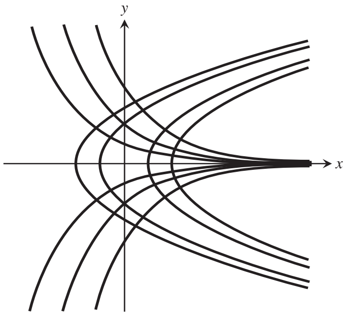
5. $x^2 + y^2 = C$



7. $\ln|y| - \dfrac{1}{2}y^2 = \dfrac{1}{2}x^2 + C$



9. $y = \pm\sqrt{2x + C}$



13. **(a)** 10 lb/min **(b)** $(100 + t)$ gal **(c)** $4\left(\dfrac{y}{100 + t}\right)$ lb/min

(d) $\dfrac{dy}{dt} = 10 - \dfrac{4y}{100 + t}, \quad y(0) = 50,$

$$y = 2(100 + t) - \frac{150}{\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^4}$$

(e) Concentración $= \dfrac{y\,(25)}{\text{cant. salm. en tanque}} = \dfrac{188.6}{125} \approx 1.5$ lb/gal

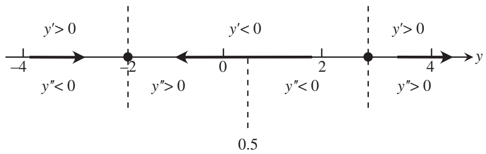
15. $y(27.8) \approx 14.8$ lb, $t \approx 27.8$ min

Sección 9.4, pp. 522–523

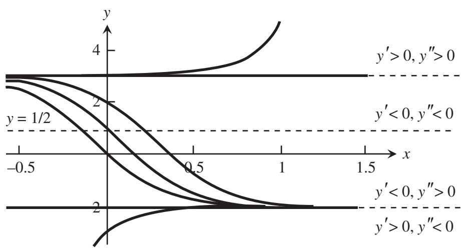
1. $y' = (y + 2)(y - 3)$

(a) $y = -2$ es un valor de equilibrio estable y $y = 3$ es un equilibrio no estable.

(b) $y'' = 2(y + 2)\left(y - \dfrac{1}{2}\right)(y - 3)$



(c)

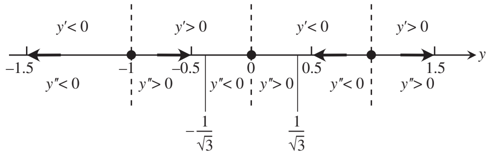


3. $y' = y^3 - y = (y + 1)y(y - 1)$

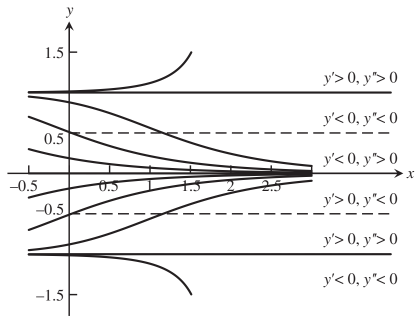
(a) $y = -1$ y $y = 1$ son equilibrios no estables y $y = 0$ es un equilibrio estable.

(b) $y'' = (3y^2 - 1)y'$

$$= 3(y + 1)\left(y + 1/\sqrt{3}\right)y\left(y - 1/\sqrt{3}\right)(y - 1)$$



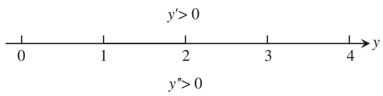
(c)



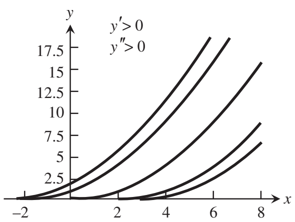
5. $y' = \sqrt{y}, y > 0$

(a) No hay valores de equilibrio estable.

(b) $y'' = \dfrac{1}{2}$



(c)

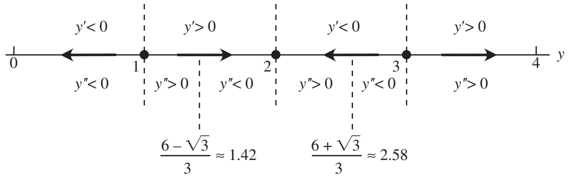


7. $y' = (y - 1)(y - 2)(y - 3)$

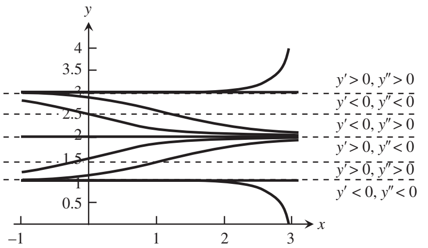
(a) $y = 1$ y $y = 3$ son equilibrios no estables, mientras $y = 2$ es un equilibrio estable.

(b) $y'' = (3y^2 - 12y + 11)(y - 1)(y - 2)(y - 3) =$

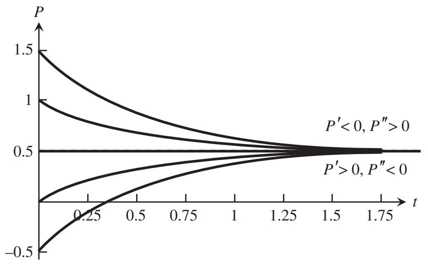
$$3(y - 1)\left(y - \frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)(y - 2)\left(y - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)(y - 3)$$



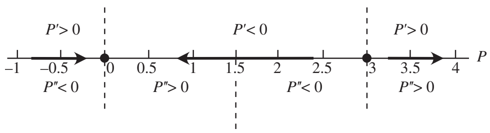
(c)

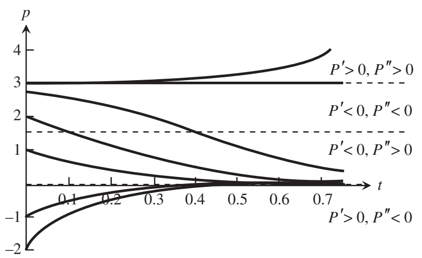


9. $\dfrac{dP}{dt} = 1 - 2P$ tiene un equilibrio estable en $P = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = -2\dfrac{dP}{dt} = -2(1 - 2P)$.

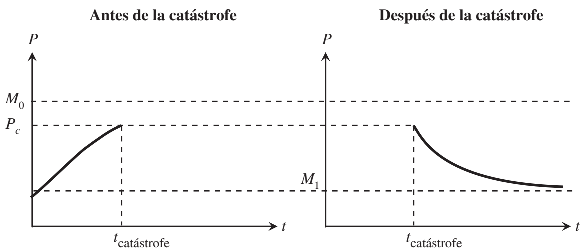


11. $\dfrac{dP}{dt} = 2P(P - 3)$ tiene un equilibrio estable en $P = 0$ y un equilibrio no estable en $P = 3$; $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 2(2P - 3)\dfrac{dP}{dt} = 4P(2P - 3)(P - 3)$.





13. Antes de la catástrofe, la población exhibe crecimiento logístico y $P(t)$ aumenta hacia M_0, el equilibrio estable. Después de la catástrofe, la población disminuye de manera logística y $P(t)$ disminuye hacia M_1, el nuevo equilibrio estable.

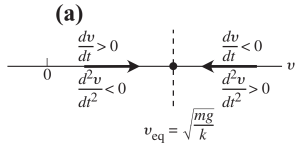


15. $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2, \quad g, k, m > 0$ y $v(t) \geq 0$

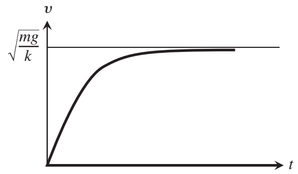
Equilibrio: $\dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{k}{m}v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

Concavidad: $\dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\dfrac{dv}{dt} = -2\left(\dfrac{k}{m}v\right)\left(g - \dfrac{k}{m}v^2\right)$

(a)



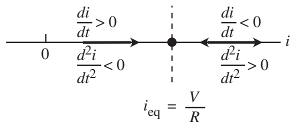
(b)



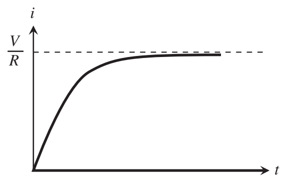
(c) $v_{\text{terminal}} = \sqrt{\dfrac{160}{0.005}} = 178.9$ ft/seg $= 122$ mph

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 50 - 5|v|$; $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m}(50 - 5|v|)$. La velocidad máxima se alcanza cuando $\dfrac{dv}{dt} = 0$ o $v = 10$ ft/seg.

19. Línea de fase:



Si el interruptor se cierra en $t = 0$, entonces $i(0) = 0$; la gráfica de la solución se parece a la siguiente:



Cuando $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{estado estable}} = \dfrac{V}{R}$.

Sección 9.5, pp. 527–529

1. Variaciones estacionales, no conformidad de los ambientes, efectos de otras interacciones, desastres inesperados, etcétera.

3. Este modelo supone que el número de interacciones es proporcional al producto de x y y:

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x, \quad a < 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = m\left(1 - \frac{y}{M}\right)y - nxy = y\left(m - \frac{m}{M}y - nx\right).$$

Los puntos de reposo son $(0, 0)$, inestable, y $(0, M)$, estable.

5. (a) El crecimiento logístico ocurre en ausencia del competidor e incluye una interacción simple entre las especies: el crecimiento domina la competencia cuando cualquiera de las poblaciones es pequeña, por lo que es difícil llevar a las especies a la extinción.

(b) a: tasa de crecimiento per cápita para la trucha
m: tasa de crecimiento para la perca
b: intensidad de competencia para la trucha
n: intensidad de competencia para la perca
k_1: capacidad del ambiente para la trucha
k_2: capacidad del ambiente para la perca
$\dfrac{a}{b}$: crecimiento *versus* competencia o no crecimiento de la trucha
$\dfrac{m}{n}$: supervivencia relativa de la perca

(c) $\dfrac{dx}{dt} = 0$ cuando $x = 0$ o $y = \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{bk_1}x$,

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ cuando $y = 0$ o $y = k_2 - \dfrac{k_2 n}{m}x$.

Al seleccionar $a/b > k_2$ y $m/n > k_1$, aseguramos que exista un punto de equilibrio dentro del primer cuadrante.

Ejercicios de práctica, pp. 529–530

1. $y = -\ln\left(C - \dfrac{2}{5}(x-2)^{5/2} - \dfrac{4}{3}(x-2)^{3/2}\right)$

3. $\tan y = -x \operatorname{sen} x - \cos x + C$ **5.** $(y+1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

7. $y = C\dfrac{x-1}{x}$ **9.** $y = \dfrac{x^2}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

11. $y = \dfrac{x^2 - 2x + C}{2x^2}$ **13.** $y = \dfrac{e^{-x} + C}{1 + e^x}$ **15.** $xy + y^3 = C$

17. $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 6}{6(x+1)^2}$ **19.** $y = \dfrac{1}{3}(1 - 4e^{-x^3})$

21. $y = e^{-x}(3x^3 - 3x^2)$

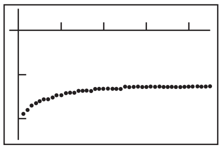
23.

x	y	x	y
0	0	1.1	1.6241
0.1	0.1000	1.2	1.8319
0.2	0.2095	1.3	2.0513
0.3	0.3285	1.4	2.2832
0.4	0.4568	1.5	2.5285
0.5	0.5946	1.6	2.7884
0.6	0.7418	1.7	3.0643
0.7	0.8986	1.8	3.3579
0.8	1.0649	1.9	3.6709
0.9	1.2411	2.0	4.0057
1.0	1.4273		

25. $y(3) \approx 0.8981$

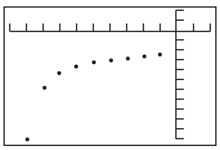
27.

(a)



[–0.2, 4.5] por [–2.5, 0.5]

(b) Observe que elegimos un intervalo pequeño de valores de x, ya que los valores de y disminuyen muy rápidamente y nuestra calculadora no puede manejar los cálculos para $x \le -1$. (Lo anterior ocurre porque la solución analítica es $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, que tiene una asíntota en $x = -\ln 2 \approx -0.69$. Obviamente, las aproximaciones de Euler son engañosas para $x \le -0.7$.)



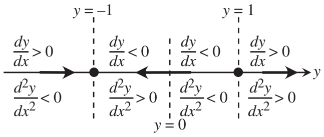
[–1, 0.2] por [–10, 2]

29. $y(\text{exacta}) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}$; $y(2) \approx 0.4$; el valor exacto es $\dfrac{1}{2}$.

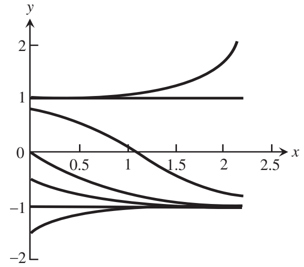
31. $y(\text{exacta}) = -e^{(x^2-1)/2}$; $y(2) \approx -3.4192$; el valor exacto es $-e^{3/2} \approx -4.4817$.

33. (a) $y = -1$ es estable y $y = 1$ es inestable.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2y\dfrac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(c)



Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 530–531

1. (a) $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$

(b) Solución de estado estable: $y_\infty = c$

5. $x^2(x^2 + 2y^2) = C$

7. $\ln|x| + e^{-y/x} = C$

9. $\ln|x| - \ln|\sec(y/x - 1) + \tan(y/x - 1)| = C$

CAPÍTULO 10

Sección 10.1, pp. 541–544

1. $a_1 = 0, a_2 = -1/4, a_3 = -2/9, a_4 = -3/16$

3. $a_1 = 1, a_2 = -1/3, a_3 = 1/5, a_4 = -1/7$

5. $a_1 = 1/2, a_2 = 1/2, a_3 = 1/2, a_4 = 1/2$

7. $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{15}{8}, \dfrac{31}{16}, \dfrac{63}{32}, \dfrac{127}{64}, \dfrac{255}{128}, \dfrac{511}{256}, \dfrac{1023}{512}$

9. $2, 1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}, -\dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{128}, \dfrac{1}{256}$

11. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 **13.** $a_n = (-1)^{n+1}, n \ge 1$

15. $a_n = (-1)^{n+1}(n)^2, n \ge 1$ **17.** $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{3(n+2)}, n \ge 1$

19. $a_n = n^2 - 1, n \ge 1$ **21.** $a_n = 4n - 3, n \ge 1$

23. $a_n = \dfrac{3n+2}{n!}, n \ge 1$ **25.** $a_n = \dfrac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, n \ge 1$

27. Converge, 2 **29.** Converge, -1 **31.** Converge, -5

33. Diverge **35.** Diverge **37.** Converge, $1/2$

39. Converge, 0 **41.** Converge, $\sqrt{2}$ **43.** Converge, 1

45. Converge, 0 **47.** Converge, 0 **49.** Converge, 0

51. Converge, 1 **53.** Converge, e^7 **55.** Converge, 1

57. Converge, 1 **59.** Diverge **61.** Converge, 4

63. Converge, 0 **65.** Diverge **67.** Converge, e^{-1}

69. Converge, $e^{2/3}$ **71.** Converge, x $(x > 0)$

73. Converge, 0 **75.** Converge, 1 **77.** Converge, $1/2$

79. Converge, 1 **81.** Converge, $\pi/2$ **83.** Converge, 0

85. Converge, 0 **87.** Converge, $1/2$ **89.** Converge, 0

91. 8 **93.** 4 **95.** 5 **97.** $1 + \sqrt{2}$ **99.** $x_n = 2^{n-2}$

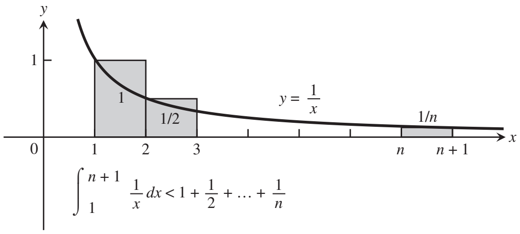
101. **(a)** $f(x) = x^2 - 2$, $1.414213562 \approx \sqrt{2}$
(b) $f(x) = \tan(x) - 1$, $0.7853981635 \approx \pi/4$
(c) $f(x) = e^x$, diverge
103. **(b)** 1 **111.** No decreciente, acotada
113. No decreciente, acotada
115. Converge, teorema de la sucesión no decreciente
117. Converge, teorema de la sucesión no decreciente
119. Diverge, definición de divergencia **121.** Converge
123. Converge **133.** **(b)** $\sqrt{3}$

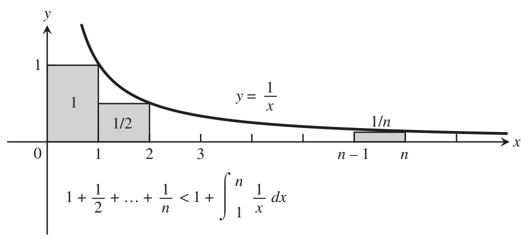
Sección 10.2, pp. 551–552

1. $s_n = \dfrac{2(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}, 3$ **3.** $s_n = \dfrac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)}, 2/3$
5. $s_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{2}$ **7.** $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{64} + \cdots, \dfrac{4}{5}$
9. $\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{7}{64} + \cdots, \dfrac{7}{3}$
11. $(5+1) + \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{27}\right) + \cdots, \dfrac{23}{2}$
13. $(1+1) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{25}\right) + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{125}\right) + \cdots, \dfrac{17}{6}$
15. Converge, $5/3$ **17.** Converge, $1/7$ **19.** $23/99$ **21.** $7/9$
23. $1/15$ **25.** $41333/33300$ **27.** Diverge
29. No es concluyente **31.** Diverge **33.** Diverge
35. $s_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; converge, 1 **37.** $s_n = \ln\sqrt{n+1}$; diverge
39. $s_n = \dfrac{\pi}{3} - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$; converge, $-\dfrac{\pi}{6}$
41. 1 **43.** 5 **45.** 1 **47.** $-\dfrac{1}{\ln 2}$ **49.** Converge, $2 + \sqrt{2}$
51. Converge, 1 **53.** Diverge **55.** Converge, $\dfrac{e^2}{e^2 - 1}$
57. Converge, $2/9$ **59.** Converge, $3/2$ **61.** Diverge
63. Converge, 4 **65.** Diverge **67.** Converge, $\dfrac{\pi}{\pi - e}$
69. $a = 1, r = -x$; converge a $1/(1+x)$ para $|x| < 1$
71. $a = 3, r = (x-1)/2$; converge a $6/(3-x)$ para x en $(-1, 3)$
73. $|x| < \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{1-2x}$ **75.** $-2 < x < 0, \dfrac{1}{2+x}$
77. $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, k un entero; $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$
79. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$
(c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$
89. **(a)** $r = 3/5$ **(b)** $r = -3/10$
91. $|r| < 1, \dfrac{1+2r}{1-r^2}$ **93.** 8 m^2

Sección 10.3, pp. 557–558

1. Converge **3.** Converge **5.** Converge **7.** Diverge
9. Converge **11.** Converge, serie geométrica, $r = \dfrac{1}{10} < 1$
13. Diverge; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$ **15.** Diverge; serie p, $p < 1$
17. Converge; serie geométrica, $r = \dfrac{1}{8} < 1$
19. Diverge; criterio de la integral
21. Converge; serie geométrica, $r = 2/3 < 1$
23. Diverge; criterio de la integral **25.** Diverge; $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$
27. Diverge; $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}/\ln n\right) \neq 0$
29. Diverge; serie geométrica, $r = \dfrac{1}{\ln 2} > 1$
31. Converge; criterio de la integral **33.** Diverge; criterio del n-ésimo término
35. Converge; criterio de la integral **37.** Converge; criterio de la integral
39. Converge; criterio de la integral **41.** $a = 1$
43. **(a)**





(b) ≈ 41.55
45. Verdadero **47.** **(b)** $n \geq 251{,}415$
49. $s_8 = \displaystyle\sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n^3} \approx 1.195$ **51.** 10^{60}
59. **(a)** $1.20166 \leq S \leq 1.20253$ **(b)** $S \approx 1.2021$, error < 0.0005

Sección 10.4, pp. 562–563

1. Converge; compare con $\sum (1/n^2)$
3. Diverge; compare con $\sum \left(1/\sqrt{n}\right)$
5. Converge; compare con $\sum (1/n^{3/2})$
7. Converge; compare con $\displaystyle\sum \sqrt{\frac{n+4n}{n^4+0}} = \sqrt{5}\sum \frac{1}{n^{3/2}}$
9. Converge **11.** Diverge; comparación del límite con $\sum (1/n)$
13. Diverge; comparación del límite con $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$ **15.** Diverge
17. Diverge; comparación del límite con $\sum\left(1/\sqrt{n}\right)$
19. Converge; compare con $\sum(1/2^n)$
21. Diverge; criterio del n-ésimo término
23. Converge; compare con $\sum (1/n^2)$
25. Converge; $\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\dfrac{n}{3n}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
27. Diverge; comparación directa con $\sum(1/n)$
29. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$
31. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$
33. Converge; compare con $\sum(1/n^{3/2})$

35. Converge; $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ **37.** Converge; $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$
39. Converge; comparación con $\sum (1/5n^2)$
41. Diverge; comparación con $\sum (1/n)$
43. Converge; comparación con $\sum \frac{1}{n(n-1)}$
o comparación del límite con $\sum (1/n^2)$
45. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$
47. Converge; $\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \frac{\pi/2}{n^{1.1}}$
49. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$
51. Diverge; comparación del límite con $\sum(1/n)$
53. Converge; comparación del límite con $\sum(1/n^2)$
63. Converge **65.** Converge **67.** Converge

Sección 10.5, pp. 567–568

1. Converge **3.** Diverge **5.** Converge **7.** Converge
9. Converge **11.** Diverge **13.** Converge **15.** Converge
17. Converge; criterio de la razón **19.** Diverge; criterio de la razón
21. Converge; criterio de la razón
23. Converge; compare con $\sum(3/(1.25)^n)$
25. Diverge; $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$
27. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$
29. Diverge; compare con $\sum(1/(2n))$
31. Diverge; compare con $\sum(1/n)$ **33.** Converge; criterio de la razón
35. Converge; criterio de la razón **37.** Converge; criterio de la razón
39. Converge; criterio de la raíz
41. Converge; compare con $\sum(1/n^2)$
43. Converge; criterio de la razón **45.** Converge; criterio de la razón
47. Diverge; criterio de la razón **49.** Converge; criterio de la razón
51. Converge; criterio de la razón **53.** Diverge; $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \to 1$
55. Converge; criterio de la razón **57.** Diverge; criterio de la raíz
59. Converge; criterio de la raíz
61. Converge; criterio de la razón **65.** Sí

Sección 10.6, pp. 573–574

1. Converge por el teorema 16
3. Converge; criterio de la serie alternante
5. Converge; criterio de la serie alternante
7. Diverge; $a_n \not\to 0$ **9.** Diverge; $a_n \not\to 0$
11. Converge; criterio de la serie alternante
13. Converge por el teorema 16
15. Converge absolutamente. La serie de valores absolutos es una serie geométrica convergente.
17. Converge condicionalmente; $1/\sqrt{n} \to 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
19. Converge absolutamente; compare con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$.
21. Converge condicionalmente; $1/(n+3) \to 0$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ diverge (compare con $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$).
23. Diverge; $\frac{3+n}{5+n} \to 1$ **25.** Converge condicionalmente; $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right) \to 0$ pero $(1+n)/n^2 > 1/n$
27. Converge absolutamente; criterio de la razón
29. Converge absolutamente por el criterio de la integral
31. Diverge; $a_n \not\to 0$
33. Converge absolutamente por el criterio de la razón
35. Converge absolutamente, ya que $\left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ (serie p convergente)
37. Converge absolutamente por el criterio de la raíz
39. Diverge; $a_n \to \infty$
41. Converge condicionalmente; $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \to 0$, pero la serie de valores absolutos es divergente (compare con $\sum(1/\sqrt{n})$).
43. Diverge, $a_n \to 1/2 \neq 0$
45. Converge absolutamente; $\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n}+1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$, un término de una serie geométrica convergente.
47. Converge condicionalmente; $\sum (-1)\frac{1}{2(n+1)}$ converge por el criterio de la serie alternante; $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ diverge por comparación del límite con $\sum (1/n)$.
49. $|\text{Error}| < 0.2$ **51.** $|\text{Error}| < 2 \times 10^{-11}$
53. $n \geq 31$ **55.** $n \geq 4$ **57.** 0.54030
59. **(a)** $a_n \geq a_{n+1}$ **(b)** $-1/2$

Sección 10.7, pp. 582–584

1. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** ninguno
3. **(a)** $1/4, -1/2 < x < 0$ **(b)** $-1/2 < x < 0$ **(c)** ninguno
5. **(a)** $10, -8 < x < 12$ **(b)** $-8 < x < 12$ **(c)** ninguno
7. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** ninguno
9. **(a)** $3, -3 \leq x \leq 3$ **(b)** $-3 \leq x \leq 3$ **(c)** ninguno
11. **(a)** ∞, para toda x **(b)** para toda x **(c)** ninguno
13. **(a)** $1/2, -1/2 \leq x < 1/2$ **(b)** $-1/2 < x < 1/2$ **(c)** $-1/2$
15. **(a)** $1, -1 \leq x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** $x = -1$
17. **(a)** $5, -8 < x < 2$ **(b)** $-8 < x < 2$ **(c)** ninguno
19. **(a)** $3, -3 < x < 3$ **(b)** $-3 < x < 3$ **(c)** ninguno
21. **(a)** $1, -2 < x < 0$ **(b)** $-2 < x < 0$ **(c)** ninguno
23. **(a)** $1, -1 < x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** ninguno
25. **(a)** $0, x = 0$ **(b)** $x = 0$ **(c)** ninguno
27. **(a)** $2, -4 < x \leq 0$ **(b)** $-4 < x < 0$ **(c)** $x = 0$
29. **(a)** $1, -1 \leq x \leq 1$ **(b)** $-1 \leq x \leq 1$ **(c)** ninguno
31. **(a)** $1/4, 1 \leq x \leq 3/2$ **(b)** $1 \leq x \leq 3/2$ **(c)** ninguno
33. **(a)** ∞, para toda x **(b)** para toda x **(c)** ninguno
35. **(a)** $1, -1 \leq x < 1$ **(b)** $-1 < x < 1$ **(c)** -1
37. 3 **39.** 8 **41.** $-1/3 < x < 1/3$, $1/(1-3x)$
43. $-1 < x < 3$, $4/(3 + 2x - x^2)$
45. $0 < x < 16$, $2/\left(4 - \sqrt{x}\right)$
47. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, $3/(2 - x^2)$
49. $1 < x < 5$, $2/(x-1)$, $1 < x < 5$, $-2/(x-1)^2$
51. **(a)** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$; converge para toda x
(b) La misma respuesta que el inciso (c)
(c) $2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \frac{2^9x^9}{9!} - \frac{2^{11}x^{11}}{11!} + \cdots$

53. **(a)** $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14175}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(b) $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \cdots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Sección 10.8, pp. 588–589

1. $P_0(x) = 1, P_1(x) = 1 + 2x, P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2,$

$P_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$

3. $P_0(x) = 0, P_1(x) = x - 1, P_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2,$

$P_3(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

5. $P_0(x) = \frac{1}{2}, P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2),$

$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{8}(x - 2)^2,$

$P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{8}(x - 2)^2 - \frac{1}{16}(x - 2)^3$

7. $P_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, P_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

$P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2,$

$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

9. $P_0(x) = 2, P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4),$

$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2,$

$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2 + \frac{1}{512}(x - 4)^3$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$ **17.** $7\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ **19.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

21. $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

23. $8 + 10(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3$

25. $21 - 36(x + 2) + 25(x + 2)^2 - 8(x + 2)^3 + (x + 2)^4$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)(x - 1)^n$ **29.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x - 2)^n$

31. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}$

33. $-1 - 2x - \frac{5}{2}x^2 - \cdots, -1 < x < 1$

35. $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots, -1 < x < 1$

41. $L(x) = 0, Q(x) = -x^2/2$ **43.** $L(x) = 1, Q(x) = 1 + x^2/2$

45. $L(x) = x, Q(x) = x$

Sección 10.9, pp. 595–596

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2x^2}{2!} - \frac{5^3x^3}{3!} + \cdots$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n + 1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$

$= -5x + \frac{5x^3}{3!} - \frac{5x^5}{5!} + \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(5x^2)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{25x^4}{2!} + \frac{625x^8}{4!} - \cdots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n x^{3n} = 1 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3^2}{4^2}x^6 - \frac{3^3}{4^3}x^9 + \cdots$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

15. $x - \frac{\pi^2x^3}{2!} + \frac{\pi^4x^5}{4!} - \frac{\pi^6x^7}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!}$

17. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} =$

$1 - \frac{(2x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2 \cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2 \cdot 6!} + \frac{(2x)^8}{2 \cdot 8!} - \cdots$

19. $x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \cdots$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-1}}{2n - 1} = x^3 - \frac{x^7}{3} + \frac{x^{11}}{5} - \frac{x^{15}}{7} + \cdots$

25. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + (-1)^n\right)x^n = 2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{25}{24}x^4 - \cdots$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{3n} = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{9} - \cdots$

29. $x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

31. $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 - \frac{44}{105}x^8 + \cdots$

33. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$

35. $|\text{Error}| \le \frac{1}{10^4 \cdot 4!} < 4.2 \times 10^{-6}$

37. $|x| < (0.06)^{1/5} < 0.56968$

39. $|\text{Error}| < (10^{-3})^3/6 < 1.67 \times 10^{-10}, \quad -10^{-3} < x < 0$

41. $|\text{Error}| < (3^{0.1})(0.1)^3/6 < 1.87 \times 10^{-4}$

49. **(a)** $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k - 1)}{2}x^2$ **(b)** $0 \le x < 100^{-1/3}$

Sección 10.10, pp. 602–604

1. $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ **3.** $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots$

5. $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$ **7.** $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$

9. $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$

11. $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

13. $(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

15. 0.00267 **17.** 0.10000 **19.** 0.09994 **21.** 0.10000

23. $\frac{1}{13 \cdot 6!} \approx 0.00011$ **25.** $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!}$

27. **(a)** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

(b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \frac{x^8}{7 \cdot 8} + \cdots + (-1)^{15}\frac{x^{32}}{31 \cdot 32}$

29. $1/2$ **31.** $-1/24$ **33.** $1/3$ **35.** -1 **37.** 2

39. $3/2$ **41.** e **43.** $\cos \frac{3}{4}$ **45.** $\sqrt{3}/2$ **47.** $\frac{x^3}{1 - x}$

49. $\frac{x^3}{1 + x^2}$ **51.** $\frac{-1}{(1 + x)^2}$ **55.** 500 términos **57.** 4 términos

59. **(a)** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$, radio de convergencia $= 1$

(b) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

61. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

67. **(a)** -1 **(b)** $(1/\sqrt{2})(1 + i)$ **(c)** $-i$

71. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$, para toda x

Ejercicios de práctica, pp. 605–607

1. Converge para 1 **3.** Converge para -1 **5.** Diverge
7. Converge para 0 **9.** Converge para 1 **11.** Converge para e^{-5}
13. Converge para 3 **15.** Converge para ln 2 **17.** Diverge
19. $1/6$ **21.** $3/2$ **23.** $e/(e - 1)$ **25.** Diverge
27. Converge condicionalmente **29.** Converge condicionalmente
31. Converge absolutamente **33.** Converge absolutamente
35. Converge absolutamente **37.** Converge absolutamente
39. Converge absolutamente
41. **(a)** $3, -7 \le x < -1$ **(b)** $-7 < x < -1$ **(c)** $x = -7$
43. **(a)** $1/3, 0 \le x \le 2/3$ **(b)** $0 \le x \le 2/3$ **(c)** Ninguna
45. **(a)** ∞, para toda x **(b)** Para toda x **(c)** Ninguna
47. **(a)** $\sqrt{3}, -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ **(b)** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ **(c)** Ninguna
49. **(a)** $e, -e < x < e$ **(b)** $-e < x < e$ **(c)** Conjunto vacío
51. $\frac{1}{1 + x}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$ **53.** $\operatorname{sen} x, \pi, 0$ **55.** $e^x, \ln 2, 2$ **57.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$
59. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$ **61.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{10n/3}}{(2n)!}$ **63.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\pi x)/2)^n}{n!}$
65. $2 - \frac{(x + 1)}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x + 1)^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{9(x + 1)^3}{2^5 \cdot 3!} + \cdots$
67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x - 3) + \frac{1}{4^3}(x - 3)^2 - \frac{1}{4^4}(x - 3)^3$
69. 0.4849171431 **71.** 0.4872223583 **73.** $7/2$ **75.** $1/12$
77. -2 **79.** $r = -3, s = 9/2$ **81.** $2/3$
83. $\ln\left(\frac{n + 1}{2n}\right)$; la serie converge a $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
85. **(a)** ∞ **(b)** $a = 1, b = 0$ **87.** Converge.

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 607–609

1. Converge; criterio de comparación **3.** Diverge; criterio del n-ésimo término
5. Converge; criterio de comparación **7.** Diverge; criterio del n-ésimo término

9. Con $a = \pi/3$, $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \pi/3) - \frac{1}{4}(x - \pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \pi/3)^3 + \cdots$

11. Con $a = 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

13. Con $a = 22\pi$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}(x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x - 22\pi)^4 - \frac{1}{6!}(x - 22\pi)^6 + \cdots$

15. Converge, límite $= b$ **17.** $\pi/2$ **21.** $b = \pm\frac{1}{5}$

23. $a = 2, L = -7/6$ **27.** **(b)** Sí

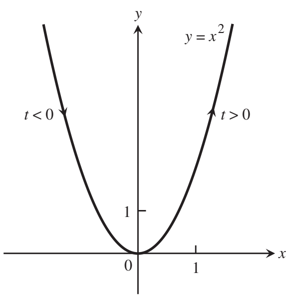
31. **(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ **(b)** 6 **(c)** $1/q$

33. **(a)** $R_n = C_0 e^{-kt_0}(1 - e^{-nkt_0})/(1 - e^{-kt_0})$,
$R = C_0(e^{-kt_0})/(1 - e^{-kt_0}) = C_0/(e^{kt_0} - 1)$
(b) $R_1 = 1/e \approx 0.368$,
$R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R(0.9999546) \approx 0.58195$;
$R \approx 0.58198$; $0 < (R - R_{10})/R < 0.0001$
(c) 7

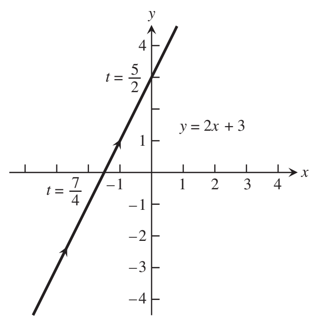
CAPÍTULO 11

Sección 11.1, pp. 616–618

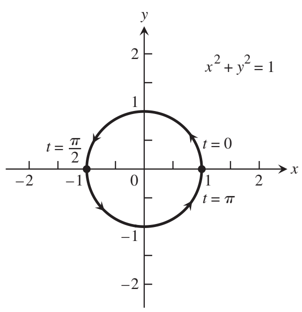
1.



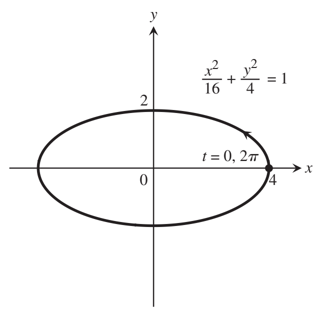
3.



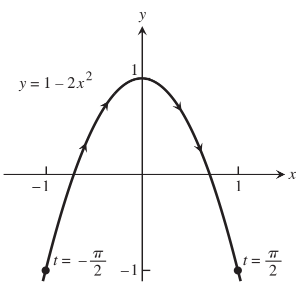
5.



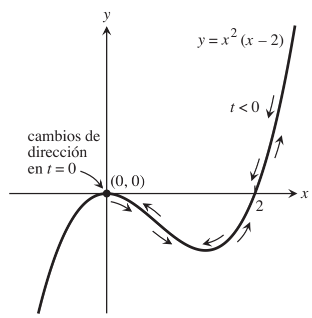
7.



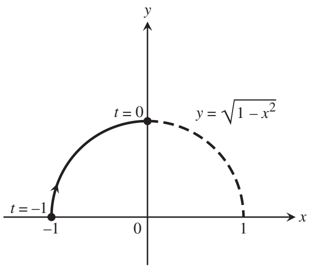
9.



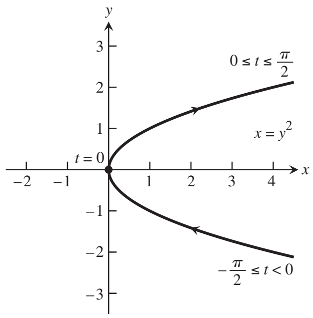
11.



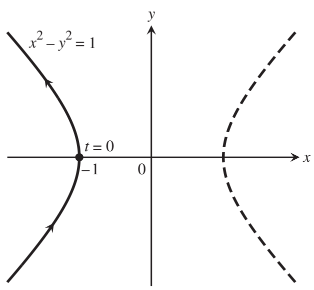
13.



15.



17.



19. **(a)** $x = a\cos t, \quad y = -a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
(b) $x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
(c) $x = a\cos t, \quad y = -a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 4\pi$
(d) $x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 4\pi$

21. Posible respuesta: $x = -1 + 5t, \quad y = -3 + 4t, \quad 0 \le t \le 1$

23. Posible respuesta: $x = t^2 + 1, \quad y = t, \quad t \le 0$

25. Posible respuesta: $x = 2 - 3t, \quad y = 3 - 4t, \quad t \ge 0$

27. Posible respuesta: $x = 2\cos t, \quad y = 2\,|\operatorname{sen} t|, \quad 0 \le t \le 4\pi$

29. Posible respuesta: $x = \dfrac{-at}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad y = \dfrac{a}{\sqrt{1 + t^2}},$
$-\infty < t < \infty$

31. Posible respuesta: $x = \dfrac{4}{1 + 2\tan\theta}, \quad y = \dfrac{4\tan\theta}{1 + 2\tan\theta},$
$0 \le \theta < \pi/2$ y $x = 0, y = 2$ si $\theta = \pi/2$

33. Posible respuesta: $x = 2 - \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

35. $x = 2\cot t, \quad y = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

37. $x = a\operatorname{sen}^2 t \tan t, \quad y = a\operatorname{sen}^2 t, \quad 0 \le t < \pi/2$ **39.** $(1, 1)$

Sección 11.2, pp. 625–627

1. $y = -x + 2\sqrt{2}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{2}$

3. $y = -\dfrac{1}{2}x + 2\sqrt{2}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5. $y = x + \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$ **7.** $y = 2x - \sqrt{3}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -3\sqrt{3}$

9. $y = x - 4, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{2}$

11. $y = \sqrt{3}x - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -4$

13. $y = 9x - 1, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 108$ **15.** $-\dfrac{3}{16}$ **17.** -6

19. 1 **21.** $3a^2\pi$ **23.** $ab\pi$ **25.** 4 **27.** 12

29. π^2 **31.** $8\pi^2$ **33.** $\dfrac{52\pi}{3}$ **35.** $3\pi\sqrt{5}$

37. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{12}{\pi} - \dfrac{24}{\pi^2}, \dfrac{24}{\pi^2} - 2\right)$

39. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{1}{3}, \pi - \dfrac{4}{3}\right)$ **41.** **(a)** π **(b)** π

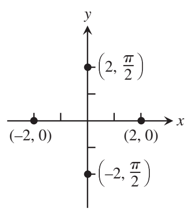
43. **(a)** $x = 1, \quad y = 0, \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$ **(b)** $x = 0, \quad y = 3, \quad \dfrac{dy}{dx} = 0$
(c) $x = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad y = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}, \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2}$

45. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \quad y = 2x$ en $t = 0, \quad y = -2x$ en $t = \pi$

47. **(a)** $8a$ **(b)** $\dfrac{64\pi}{3}$

Sección 11.3, pp. 630–631

1. a, e; b, g; c, h; d, f **3.**



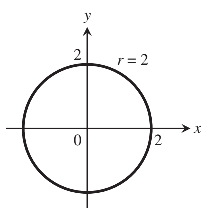
(a) $\left(2, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ y $\left(-2, \dfrac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right)$, donde n es un entero
(b) $(2, 2n\pi)$ y $(-2, (2n + 1)\pi)$, donde n es un entero
(c) $\left(2, \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$ y $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right)$, donde n es un entero
(d) $(2, (2n + 1)\pi)$ y $(-2, 2n\pi)$, donde n es un entero

5. **(a)** $(3, 0)$ **(b)** $(-3, 0)$ **(c)** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ **(d)** $\left(1, \sqrt{3}\right)$
(e) $(3, 0)$ **(f)** $\left(1, \sqrt{3}\right)$ **(g)** $(-3, 0)$ **(h)** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

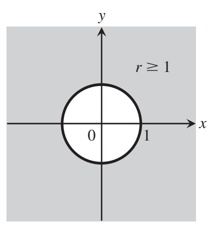
7. **(a)** $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $(3, \pi)$
(c) $\left(2, \dfrac{11\pi}{6}\right)$ **(d)** $\left(5, \pi - \tan^{-1}\dfrac{4}{3}\right)$

9. **(a)** $\left(-3\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ **(b)** $(-1, 0)$
(c) $\left(-2, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ **(d)** $\left(-5, \pi - \tan^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$

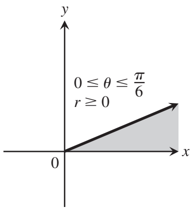
11.



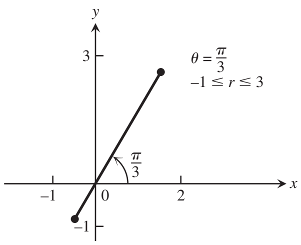
13.



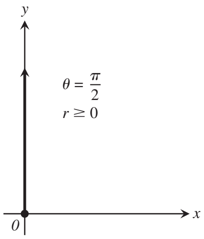
15.



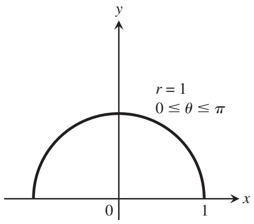
17.



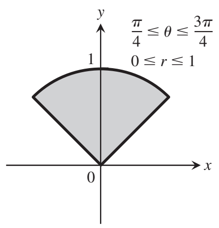
19.



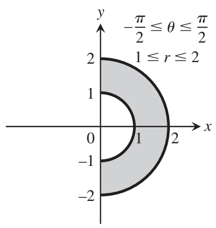
21.



23.



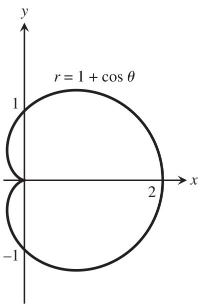
25.



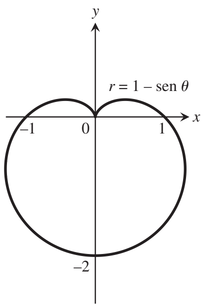
27. $x = 2$, línea vertical a través de (2, 0) **29.** $y = 0$, el eje x
31. $y = 4$, línea horizontal a través de (0, 4)
33. $x + y = 1$, línea, $m = -1$, $b = 1$
35. $x^2 + y^2 = 1$, círculo, $C(0, 0)$, radio 1
37. $y - 2x = 5$, línea, $m = 2$, $b = 5$
39. $y^2 = x$, parábola, vértice (0, 0), abierta a la derecha
41. $y = e^x$, gráfica de una función exponencial natural
43. $x + y = \pm 1$, dos líneas rectas con pendiente -1, intersección en y, $b = \pm 1$
45. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, círculo, $C(-2, 0)$, radio 2
47. $x^2 + (y - 4)^2 = 16$, círculo, $C(0, 4)$, radio 4
49. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, círculo, $C(1, 1)$, radio $\sqrt{2}$
51. $\sqrt{3}y + x = 4$ **53.** $r\cos\theta = 7$ **55.** $\theta = \pi/4$
57. $r = 2$ o $r = -2$ **59.** $4r^2\cos^2\theta + 9r^2\operatorname{sen}^2\theta = 36$
61. $r\operatorname{sen}^2\theta = 4\cos\theta$ **63.** $r = 4\operatorname{sen}\theta$
65. $r^2 = 6r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta - 6$
67. $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo

Sección 11.4, pp. 634–635

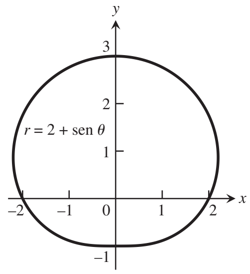
1. Eje x



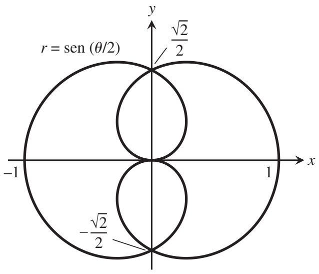
3. Eje y



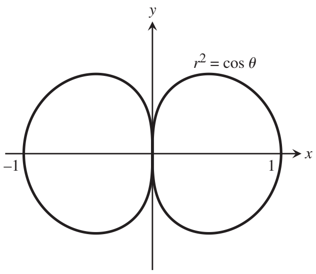
5. Eje y



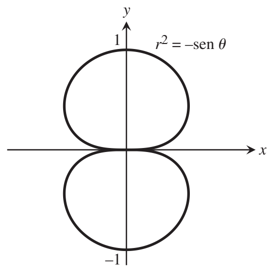
7. Eje x, eje y, origen



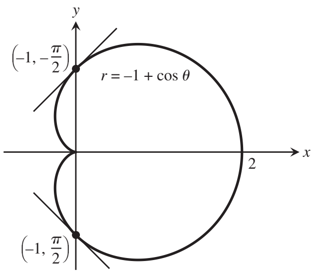
9. Eje x, eje y, origen



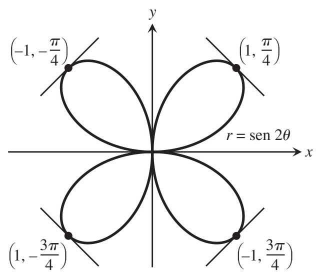
11. Eje y, eje x, origen



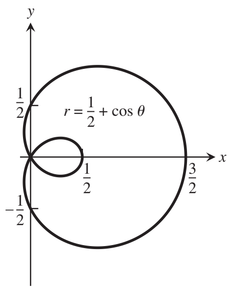
13. Eje x, eje y, origen **15.** Origen
17. La pendiente en $(-1, \pi/2)$ es -1, en $(-1, -\pi/2)$ es 1.



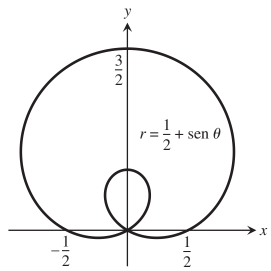
19. La pendiente en $(1, \pi/4)$ es -1, en $(-1, -\pi/4)$ es 1, en $(-1, 3\pi/4)$ es 1, en $(1, -3\pi/4)$ es -1.



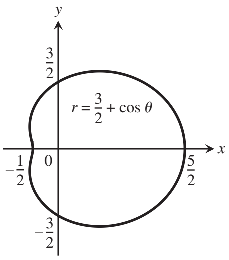
21. **(a)**



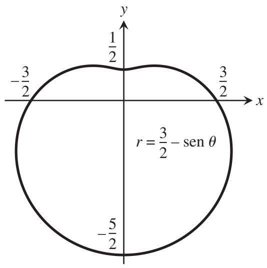
(b)



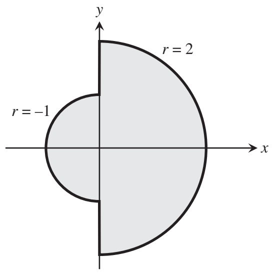
23. **(a)**



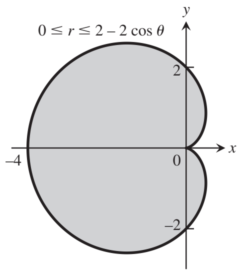
(b)



25.



27.



29. (a)

Sección 11.5, pp. 638–639

1. $\frac{1}{6}\pi^3$ **3.** 18π **5.** $\frac{\pi}{8}$ **7.** 2 **9.** $\frac{\pi}{2} - 1$ **11.** $5\pi - 8$

13. $3\sqrt{3} - \pi$ **15.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ **17.** $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$

19. **(a)** $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$ **21.** $19/3$ **23.** 8

25. $3\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$ **27.** $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

Sección 11.6, pp. 645–648

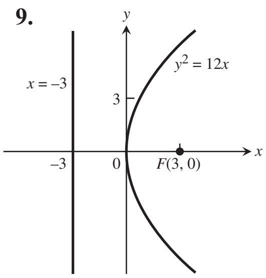
1. $y^2 = 8x$, $F(2, 0)$, directriz: $x = -2$

3. $x^2 = -6y$, $F(0, -3/2)$, directriz: $y = 3/2$

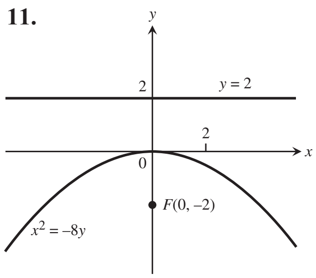
5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$, $V(\pm 2, 0)$, asíntotas: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1, 0)$, $V\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$

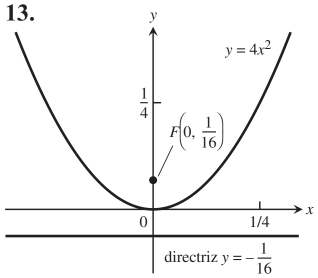
9.



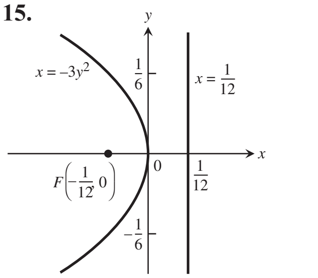
11.



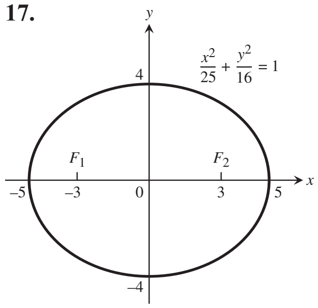
13.



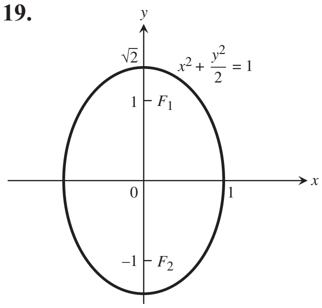
15.



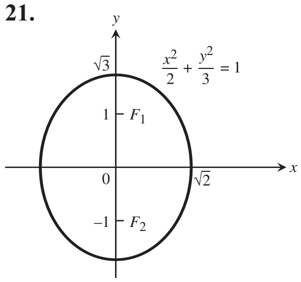
17.



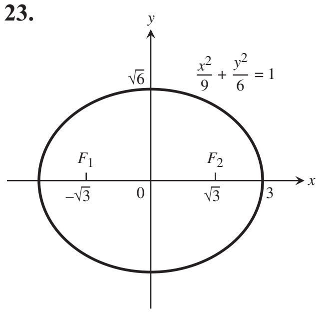
19.



21.

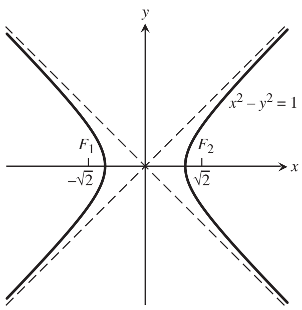


23.

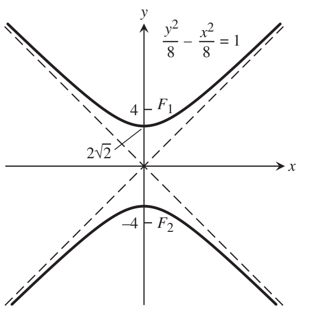


25. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

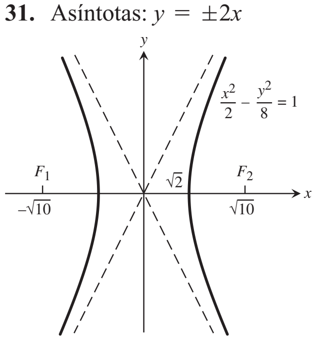
27. Asíntotas: $y = \pm x$



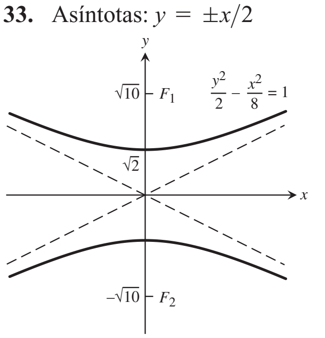
29. Asíntotas: $y = \pm x$



31. Asíntotas: $y = \pm 2x$



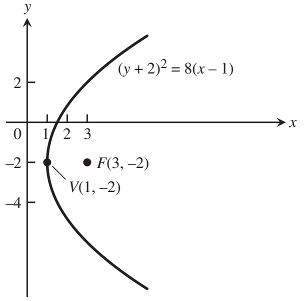
33. Asíntotas: $y = \pm x/2$



35. $y^2 - x^2 = 1$ **37.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

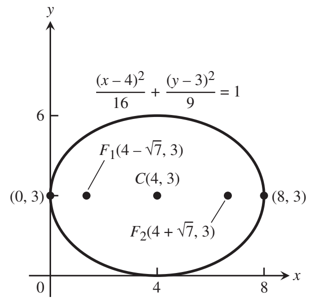
39. **(a)** Vértice: $(1, -2)$; foco: $(3, -2)$; directriz: $x = -1$

(b)



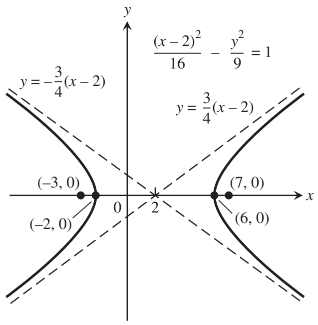
41. **(a)** Foco: $\left(4 \pm \sqrt{7}, 3\right)$; vértices: $(8, 3)$ y $(0, 3)$; centro: $(4, 3)$

(b)



43. **(a)** Centro: $(2, 0)$; foco: $(7, 0)$ y $(-3, 0)$; vértices: $(6, 0)$ y $(-2, 0)$; asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{4}(x - 2)$

(b)



45. $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$, $V(-2, -3)$, $F(-1, -3)$, directriz: $x = -3$

47. $(x - 1)^2 = 8(y + 7)$, $V(1, -7)$, $F(1, -5)$, directriz: $y = -9$

49. $\dfrac{(x + 2)^2}{6} + \dfrac{(y + 1)^2}{9} = 1$, $F\left(-2, \pm\sqrt{3} - 1\right)$, $V(-2, \pm 3 - 1)$, $C(-2, -1)$

51. $\dfrac{(x - 2)^2}{3} + \dfrac{(y - 3)^2}{2} = 1$, $F(3, 3)$ y $F(1, 3)$, $V\left(\pm\sqrt{3} + 2, 3\right)$, $C(2, 3)$

53. $\dfrac{(x - 2)^2}{4} - \dfrac{(y - 2)^2}{5} = 1$, $C(2, 2)$, $F(5, 2)$ y $F(-1, 2)$, $V(4, 2)$ y $V(0, 2)$; asíntotas: $(y - 2) = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$

55. $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 1$, $C(-1, -1)$, $F\left(-1, \sqrt{2} - 1\right)$ y $F\left(-1, -\sqrt{2} - 1\right)$, $V(-1, 0)$ y $V(-1, -2)$; asíntotas $(y + 1) = \pm(x + 1)$

57. $C(-2, 0)$, $a = 4$ **59.** $V(-1, 1)$, $F(-1, 0)$

61. Elipse: $\dfrac{(x + 2)^2}{5} + y^2 = 1$, $C(-2, 0)$, $F(0, 0)$ y $F(-4, 0)$, $V\left(\sqrt{5} - 2, 0\right)$ y $V\left(-\sqrt{5} - 2, 0\right)$

63. Elipse: $\dfrac{(x - 1)^2}{2} + (y - 1)^2 = 1$, $C(1, 1)$, $F(2, 1)$ y $F(0, 1)$, $V\left(\sqrt{2} + 1, 1\right)$ y $V\left(-\sqrt{2} + 1, 1\right)$

65. Hipérbola: $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$, $C(1, 2)$, $F\left(1 + \sqrt{2}, 2\right)$ y $F\left(1 - \sqrt{2}, 2\right)$, $V(2, 2)$ y $V(0, 2)$; asíntotas: $(y - 2) = \pm(x - 1)$

67. Hipérbola: $\dfrac{(y - 3)^2}{6} - \dfrac{x^2}{3} = 1$, $C(0, 3)$, $F(0, 6)$ y $F(0, 0)$, $V\left(0, \sqrt{6} + 3\right)$ y $V\left(0, -\sqrt{6} + 3\right)$; asíntotas: $y = \sqrt{2}x + 3$ o $y = -\sqrt{2}x + 3$

69. **(b)** $1:1$ **73.** Longitud $= 2\sqrt{2}$, ancho $= \sqrt{2}$, área $= 4$

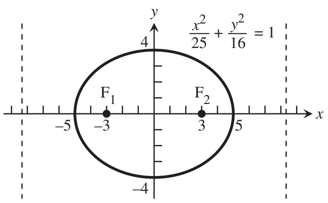
75. 24π

77. $x = 0, y = 0$: $y = -2x$; $x = 0, y = 2$: $y = 2x + 2$; $x = 4, y = 0$: $y = 2x - 8$

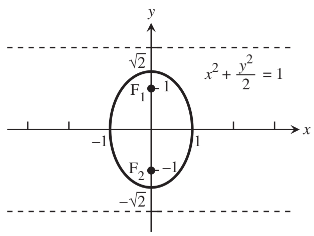
79. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{16}{3\pi}$

Sección 11.7, pp. 653–654

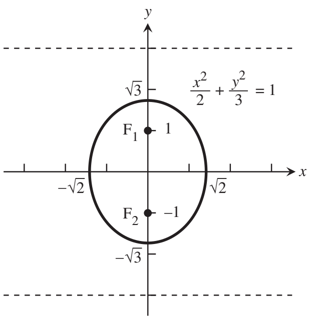
1. $e = \dfrac{3}{5}$, $F(\pm 3, 0)$; las directrices son $x = \pm\dfrac{25}{3}$.



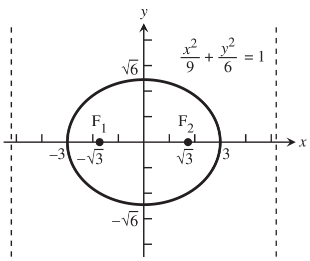
3. $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $F(0, \pm 1)$; las directrices son $y = \pm 2$.



5. $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $F(0, \pm 1)$; las directrices son $y = \pm 3$.



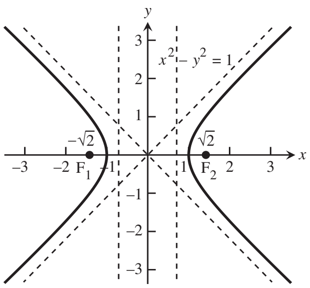
7. $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $F\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$; las directrices son $x = \pm 3\sqrt{3}$.



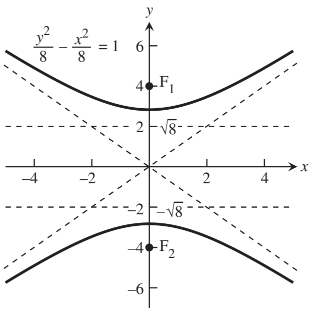
9. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **11.** $\dfrac{x^2}{4851} + \dfrac{y^2}{4900} = 1$

13. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **15.** $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

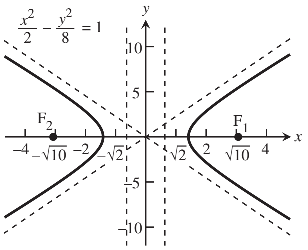
17. $e = \sqrt{2}$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; las directrices son $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



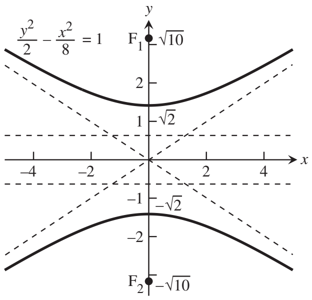
19. $e = \sqrt{2}$; $F(0, \pm 4)$; las directrices son $y = \pm 2$.



21. $e = \sqrt{5}$; $F(\pm\sqrt{10}, 0)$; las directrices son $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



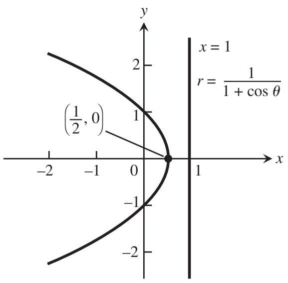
23. $e = \sqrt{5}$; $F(0, \pm\sqrt{10})$; las directrices son $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



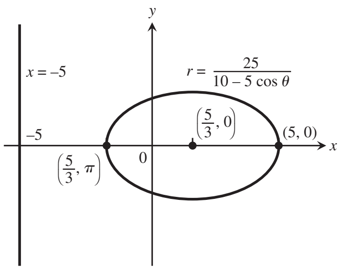
25. $y^2 - \dfrac{x^2}{8} = 1$ **27.** $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$ **29.** $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

31. $r = \dfrac{30}{1 - 5\,\mathrm{sen}\,\theta}$ **33.** $r = \dfrac{1}{2 + \cos\theta}$ **35.** $r = \dfrac{10}{5 - \mathrm{sen}\,\theta}$

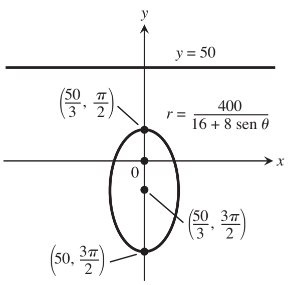
37.



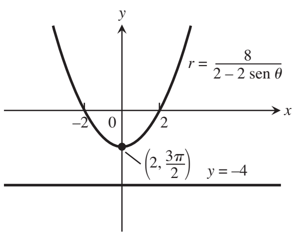
39.



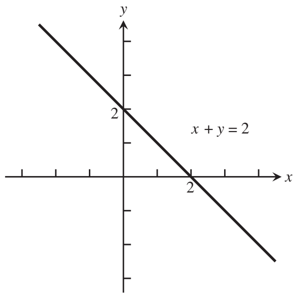
41.



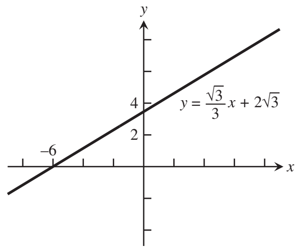
43.



45. $y = 2 - x$

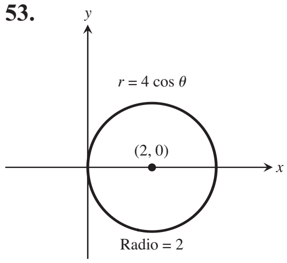


47. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

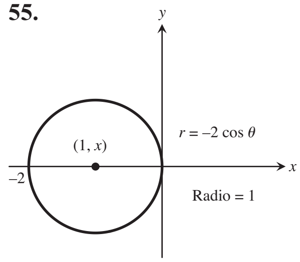


49. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$ **51.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = 5$

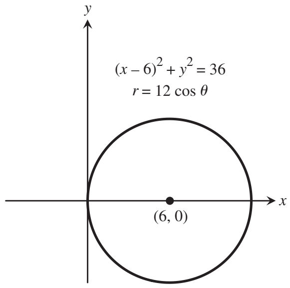
53.



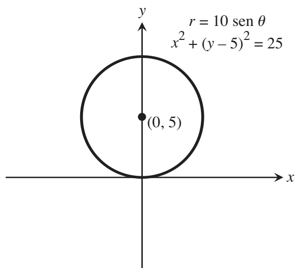
55.



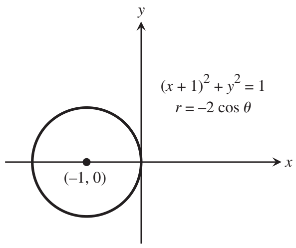
57. $r = 12\cos\theta$



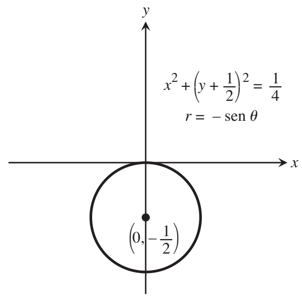
59. $r = 10\,\mathrm{sen}\,\theta$



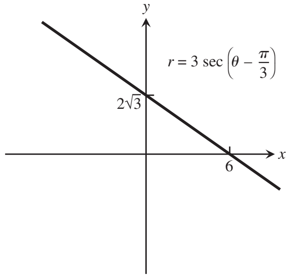
61. $r = -2\cos\theta$



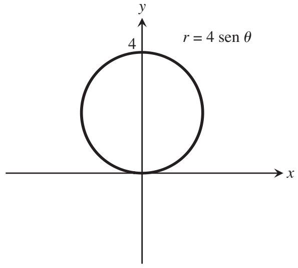
63. $r = -\mathrm{sen}\,\theta$



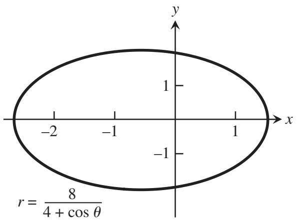
65.



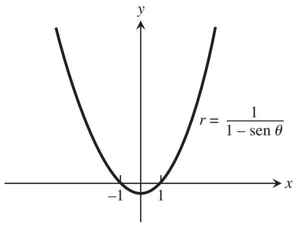
67.



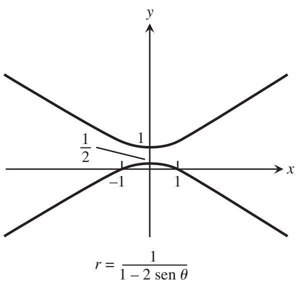
69.



71.



73.

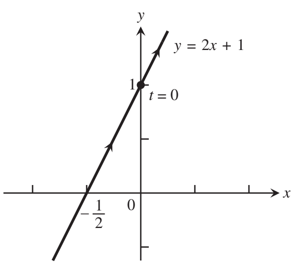


75. (b)

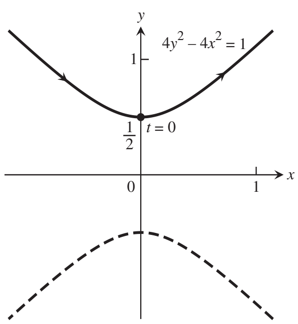
Planeta	**Perihelio**	**Afelio**
Mercurio	0.3075 AU	0.4667 AU
Venus	0.7184 AU	0.7282 AU
Tierra	0.9833 AU	1.0167 AU
Marte	1.3817 AU	1.6663 AU
Júpiter	4.9512 AU	5.4548 AU
Saturno	9.0210 AU	10.0570 AU
Urano	18.2977 AU	20.0623 AU
Neptuno	29.8135 AU	30.3065 AU

Ejercicios de práctica, pp. 655–657

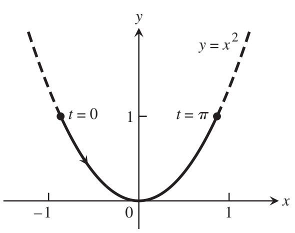
1.



3.



5.



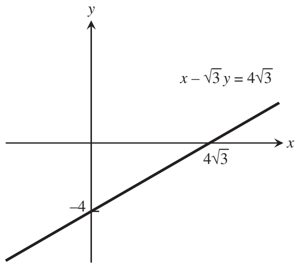
7. $x = 3\cos t, \quad y = 4 \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

9. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$

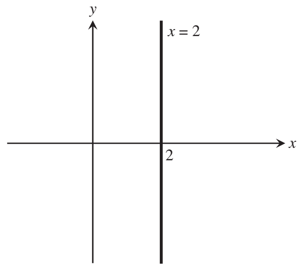
11. **(a)** $y = \dfrac{\pm|x|^{3/2}}{8} - 1$ **(b)** $y = \dfrac{\pm\sqrt{1 - x^2}}{x}$

13. $\dfrac{10}{3}$ **15.** $\dfrac{285}{8}$ **17.** 10 **19.** $\dfrac{9\pi}{2}$ **21.** $\dfrac{76\pi}{3}$

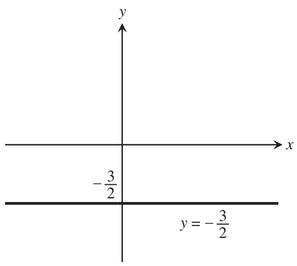
23. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 4$



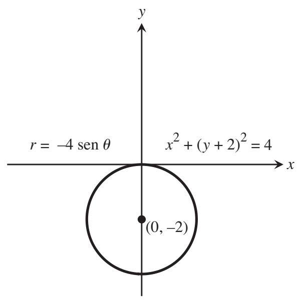
25. $x = 2$



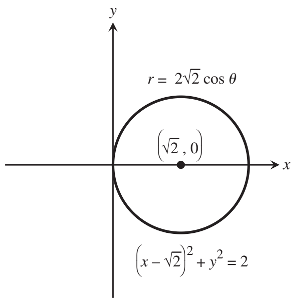
27. $y = -\dfrac{3}{2}$



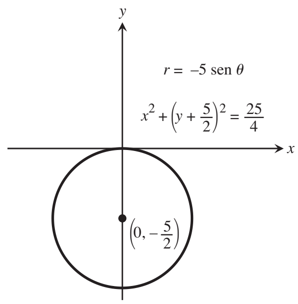
29. $x^2 + (y + 2)^2 = 4$



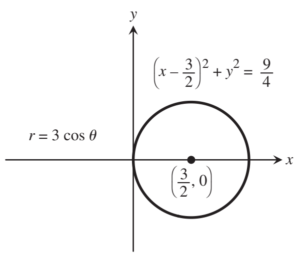
31. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 2$



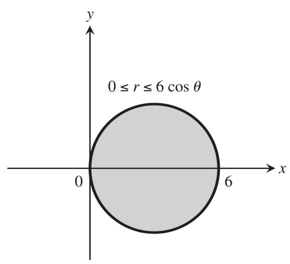
33. $r = -5 \operatorname{sen} \theta$



35. $r = 3\cos\theta$



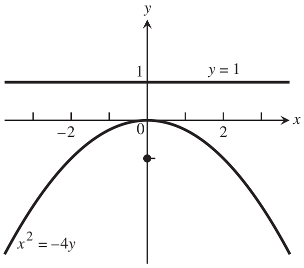
37.



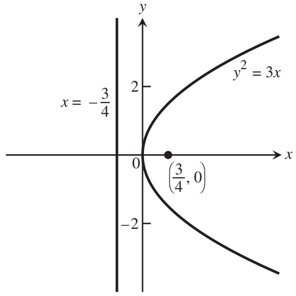
39. d **41.** l **43.** k **45.** i **47.** $\dfrac{9}{2}\pi$ **49.** $2 + \dfrac{\pi}{4}$

51. 8 **53.** $\pi - 3$

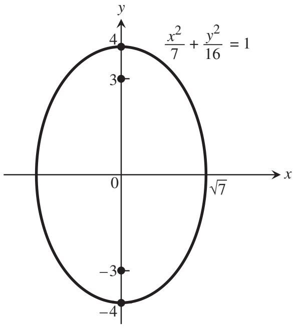
55. El foco es $(0, -1)$, la directriz es $y = 1$.



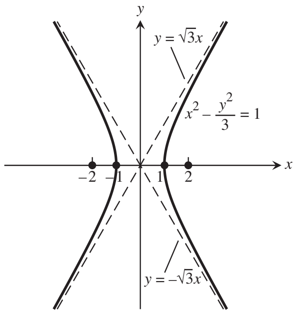
57. El foco es $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, la directriz es $x = -\frac{3}{4}$.



59. $e = \frac{3}{4}$



61. $e = 2$; las asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}\,x$.



63. $(x - 2)^2 = -12(y - 3)$, $V(2, 3)$, $F(2, 0)$, la directriz es $y = 6$.

65. $\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y + 5)^2}{25} = 1$, $C(-3, -5)$, $F(-3, -1)$ y $F(-3, -9)$, $V(-3, -10)$ y $V(-3, 0)$.

67. $\frac{(y - 2\sqrt{2})^2}{8} - \frac{(x - 2)^2}{2} = 1$, $C(2, 2\sqrt{2})$, $F(2, 2\sqrt{2} \pm \sqrt{10})$, $V(2, 4\sqrt{2})$ y $V(2, 0)$, las asíntotas son $y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}$ y $y = -2x + 4 + 2\sqrt{2}$.

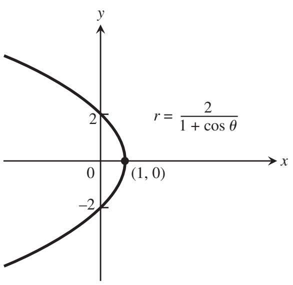
69. Hipérbola: $C(2, 0)$, $V(0, 0)$ y $V(4, 0)$, los focos son $F(2 \pm \sqrt{5}, 0)$ y las asíntotas son $y = \pm\frac{x - 2}{2}$.

71. Parábola: $V(-3, 1)$, $F(-7, 1)$ y la directriz es $x = 1$.

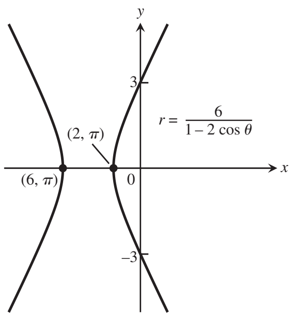
73. Elipse: $C(-3, 2)$, $F(-3 \pm \sqrt{7}, 2)$, $V(1, 2)$ y $V(-7, 2)$

75. Círculo: $C(1, 1)$ y radio $= \sqrt{2}$

77. $V(1, 0)$



79. $V(2, \pi)$ y $V(6, \pi)$

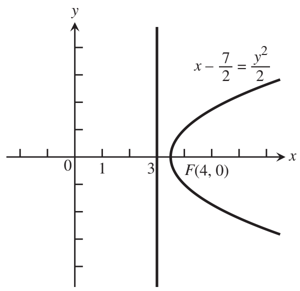


81. $r = \frac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **83.** $r = \frac{2}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

85. **(a)** 24π **(b)** 16π

Ejercicios adicionales y avanzados, pp. 657–658

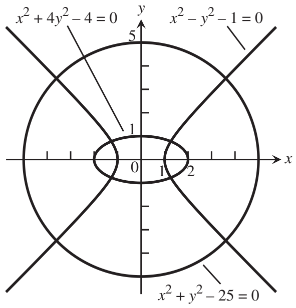
1. $x - \frac{7}{2} = \frac{y^2}{2}$



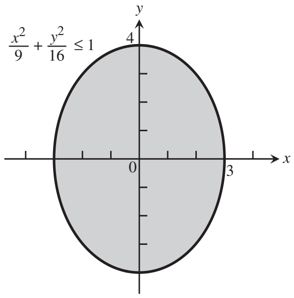
3. $3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$ **5.** $F(0, \pm 1)$

7. **(a)** $\frac{(y - 1)^2}{16} - \frac{x^2}{48} = 1$ **(b)** $\frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{25}{16}\right)} - \frac{x^2}{\left(\frac{75}{2}\right)} = 1$

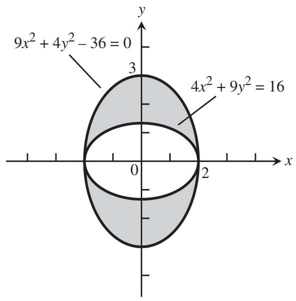
11.



13.



15.



17. **(a)** $r = e^{2\theta}$ **(b)** $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$

19. $r = \frac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **21.** $r = \frac{2}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

23. $x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a + b}{b}\theta\right)$,

$y = (a + b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a + b}{b}\theta\right)$

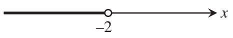
27. $\frac{\pi}{2}$

APÉNDICES

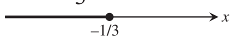
Apéndice 1, p. AP-6

1. $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}, 0.\overline{9}$ o 1

3. $x < -2$



5. $x \leq -\dfrac{1}{3}$

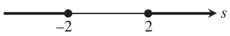


7. 3, −3 9. $7/6,\ 25/6$

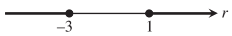
11. $-2 \leq t \leq 4$

13. $0 \leq z \leq 10$

15. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

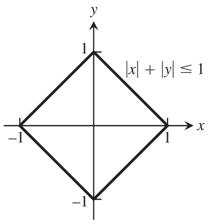


17. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$



19. $(-3, -2) \cup (2, 3)$ 21. $(0, 1)$ 23. $(-\infty\ , 1]$

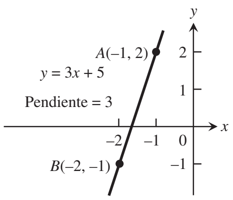
27. La gráfica de $|x| + |y| \leq 1$ es el interior y la frontera de la región "con forma de diamante".



Apéndice 3, pp. AP-16–AP-18

1. $2, -4; 2\sqrt{5}$ 3. Circunferencia unitaria

5. $m_{\perp} = -\dfrac{1}{3}$

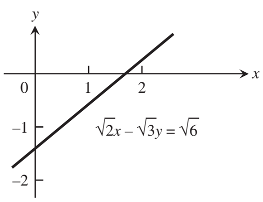


7. **(a)** $x = -1$ **(b)** $y = 4/3$ 9. $y = -x$

11. $y = -\dfrac{5}{4}x + 6$ 13. $y = 4x + 4$ 15. $y = -\dfrac{x}{2} + 12$

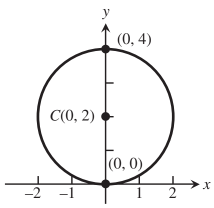
17. intersección con el eje $x = \sqrt{3}$

intersección con el eje $y = -\sqrt{2}$

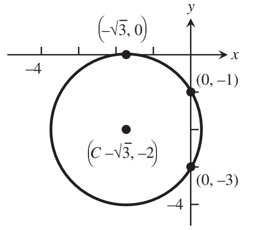


19. $(3, -3)$

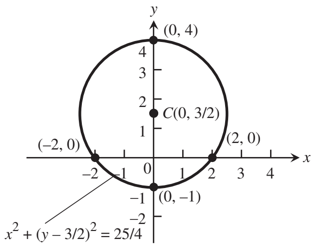
21. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



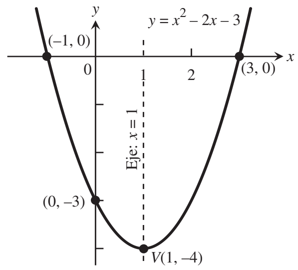
23. $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = 4$



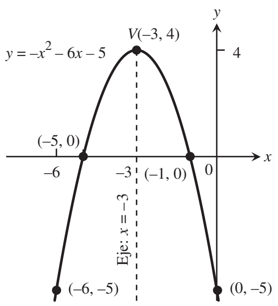
25. $(x +$



27.



29.



31. Puntos exteriores de una circunferencia de radio $\sqrt{7}$, con centro en el origen.

33. Las arandelas entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (puntos con distancia al origen entre 1 y 2)

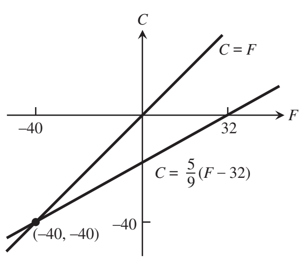
35. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

37. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right),\quad \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

39. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3}\right),\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3}\right)$

41. **(a)** ≈ -2.5 grados/in **(b)** ≈ -16.1 grados/in **(c)** ≈ -8.3 grados/in 43. 5.97 atm

45. Sí: $C = F = -40°$



51. $k = -8,\quad k = 1/2$

Apéndice 7, pp. AP-34–AP-35

1. **(a)** $(14, 8)$ **(b)** $(-1, 8)$ **(c)** $(0, -5)$

3. **(a)** Mediante reflexión de z con respecto al eje real
(b) Mediante reflexión de z con respecto al eje imaginario
(c) Mediante reflexión de z con el eje real y luego multiplicando la longitud del vector por $1/|z|^2$

5. **(a)** Puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
(b) Puntos dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$
(c) Puntos fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

7. Puntos en la circunferencia de radio 1, centro $(-1, 0)$

9. Puntos en la recta $y = -x$ **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^4\theta$ **17.** $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

19. $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ **21.** $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

23. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

ÍNDICE

E

G

W

Y

CRÉDITOS

Página ii, fotografía, Forest Edge, Hokuto, Hokkaido, Japón 2004 © Michael Kenna; **página 1, fotografía,** Getty Images; **página 39, fotografía,** Getty Images; **página 102, fotografía,** Getty Images; **página 133, sección 3.4, fotografía para el ejercicio 19,** *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 178, capítulo 3, Ejercicios de práctica, gráficas para el ejercicio 94,** NCPMF "Differentiation", por W. U. Walton *et al.*, Proyecto CALC, Education Development Center, Inc.; **página 181, capítulo 3 Ejercicios adicionales y avanzados, fotografía para el ejercicio 9,** AP Wide World Photos; **página 184, fotografía,** Getty Images; **página 246, fotografía,** Getty Images; **página 308, fotografía,** Getty Images; **página 347, figura 6.44, fotografía,** *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 361, fotografía,** Getty Images; **página 435, fotografía,** Getty Images; **página 496, fotografía,** Getty Images; **página 532, fotografía,** Getty Images; **página 547, figura 10.9b,** *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 610, fotografía,** Getty Images; **página 660, fotografía,** Getty Images; **página 707, fotografía,** Getty Images; **página 722, sección 13.2 fotografía para el ejercicio 35,** *PSSC Physics*, segunda edición, DC Health & Co., con Education Development Center, Inc.; **página 747, fotografía,** Getty Images; **página 751, figura 14.7,** reproducida con permiso del Club de Montaña Apalache; **página 784, figura 14.25,** Departamento de Historia, Academia Militar de Estados Unidos, West Point, Nueva York; **página 836, fotografía,** Getty Images; **página 901, fotografía,** Getty Images; **página 908, figuras 16.6 y 16.7,** *NCFMF Book of Film Notes*, 1974, MIT Press con Education Development Center, Inc.; **página 909, figura 16.15,** InterNetwork Media, Inc. y NASA/JPL; **página AP-1, fotografía,** Getty Images.

Breve tabla de integrales

Formas básicas

1. $\int k\,dx = kx + C$ (cualquier número k)

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

6. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

13. $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

14. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$

15. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{x}{a}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\dfrac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + C \quad (x > a > 0)$

Formas que incluyen $ax + b$

21. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

22. $\int x(ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\dfrac{ax+b}{n+2} - \dfrac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

23. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

24. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \dfrac{x}{a} - \dfrac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

25. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \dfrac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right] + C$

26. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left|\dfrac{x}{ax+b}\right| + C$

27. $\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \dfrac{2}{a}\dfrac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

28. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

29. **(a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

Formas que incluyen $a^2 + x^2$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

35. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

36. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

Formas que incluyen $a^2 - x^2$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

46. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

49. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

Formas que incluyen $x^2 - a^2$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2} dx, \quad n \neq -1$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}}, \quad n \neq 2$

56. $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

57. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\, dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

60. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

64. $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$

65. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

66. $\displaystyle\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx$

68. $\displaystyle\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax\operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$

69. **(a)** $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos bx\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

(c) $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

70. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

72. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax}\, dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{sen} ax\right| + C$

73. $\displaystyle\int \cos^n ax\operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos ax}\, dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos ax\right| + C$

75. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\cos^m ax\, dx, \quad n \neq -m \quad (\text{reduce } \operatorname{sen}^n ax)$

76. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^n ax\cos^{m-2} ax\, dx, \quad m \neq -n \quad (\text{reduce } \cos^m ax)$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \operatorname{sen} ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c \operatorname{sen} ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\operatorname{sen} ax}{b + c \cos ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

85. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

86. $\displaystyle\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax + C$

87. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

88. $\displaystyle\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\, dx$

89. $\displaystyle\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

90. $\displaystyle\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$

91. $\displaystyle\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

92. $\displaystyle\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

93. $\displaystyle\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

94. $\displaystyle\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

95. $\displaystyle\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

96. $\displaystyle\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

97. $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

98. $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

99. $\displaystyle\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

100. $\displaystyle\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

101. $\displaystyle\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

102. $\displaystyle\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

Formas trigonométricas inversas

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = x \operatorname{sen}^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

104. $\displaystyle\int \cos^{-1} ax\, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

105. $\displaystyle\int \tan^{-1} ax\, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

106. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

107. $\displaystyle\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

108. $\displaystyle\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$

Formas exponenciales y logarítmicas

109. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

110. $\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

111. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

112. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

113. $\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a\ln b} - \frac{n}{a\ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx, \quad b > 0, b \neq 1$

114. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$

115. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C$

116. $\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x + C$

117. $\int x^n(\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n + 1} - \frac{m}{n + 1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,dx, \quad n \neq -1$

118. $\int x^{-1}(\ln ax)^m\,dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m + 1} + C, \quad m \neq -1$

119. $\int \frac{dx}{x\ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

Formas que incluyen $\sqrt{2ax - x^2}$, $a > 0$

120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

121. $\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x - a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

122. $\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n dx = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n}{n + 1} + \frac{na^2}{n + 1}\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2} dx$

123. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n} = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{2-n}}{(n - 2)a^2} + \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2}}$

124. $\int x\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{(x + a)(2x - 3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

125. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

126. $\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a - x}{x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

127. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

128. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - x}{x}} + C$

Formas hiperbólicas

129. $\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

130. $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

131. $\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

132. $\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

133. $\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax\cosh ax}{na} - \frac{n - 1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

134. $\displaystyle\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

135. $\displaystyle\int x \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{senh} ax + C$

136. $\displaystyle\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

137. $\displaystyle\int x^n \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

138. $\displaystyle\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{senh} ax\,dx$

139. $\displaystyle\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

140. $\displaystyle\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{senh} ax| + C$

141. $\displaystyle\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

142. $\displaystyle\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

143. $\displaystyle\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

144. $\displaystyle\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

145. $\displaystyle\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}(\tanh ax) + C$

146. $\displaystyle\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

147. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

148. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

149. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

150. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

151. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

152. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

153. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{senh} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

154. $\displaystyle\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

Algunas integrales definidas

155. $\displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$

156. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

157. $$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un entero par } \geq 2 \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot n}, & \text{si } n \text{ es un entero impar } \geq 3 \end{cases}$$

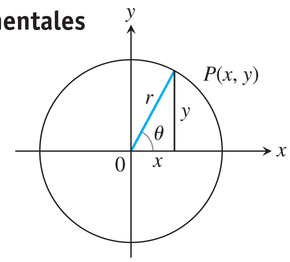
Fórmulas de trigonometría

1. Definiciones e identidades fundamentales

Seno: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{\csc\theta}$

Coseno: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sec\theta}$

Tangente: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\cot\theta}$



2. Identidades

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \quad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A\cos B + \cos A\operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A\cos B - \cos A\operatorname{sen} B$$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

$$\operatorname{sen}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \quad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \quad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A\cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

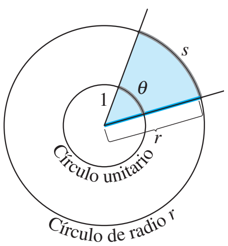
$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$$

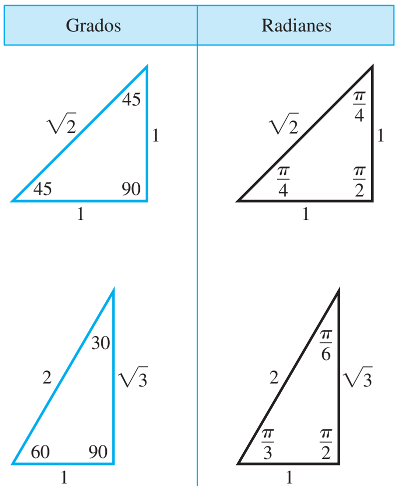
Funciones trigonométricas

Medida en radianes

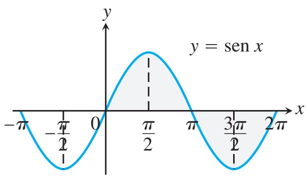


$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{o} \quad \theta = \frac{s}{r},$$

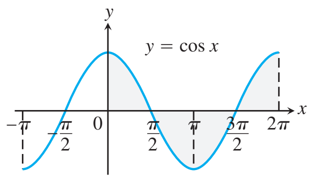
$180° = \pi$ radianes.



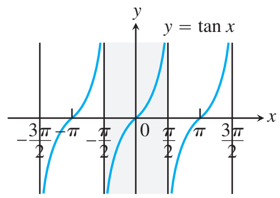
Los ángulos de dos triángulos comunes, en grados y en radianes.



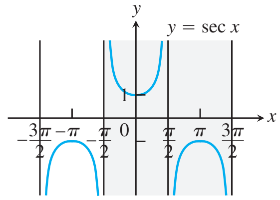
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



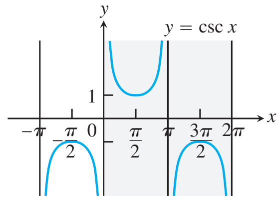
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



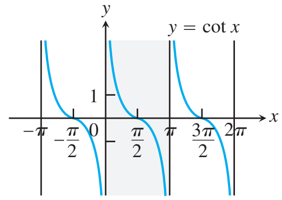
Dominio: Todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de $\pi/2$
Rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: Todos los números reales, excepto múltiplos enteros impares de $\pi/2$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, \infty)$

SERIES

Criterios para la convergencia de series infinitas

1. **El criterio del término *n*-ésimo:** A menos que $a_n \to 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma diverge.
3. **Serie *p*:** $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma diverge.
4. **Serie con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Intente comparar con una serie conocida con el criterio de la comparación o el criterio de comparación del límite.
5. **Serie con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si la respuesta es sí, entonces también lo hace $\sum a_n$ ya que convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Serie alternante:** La serie $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de las series alternantes.

Serie de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Serie binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

donde

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \qquad \text{para } k \ge 3.$$

FÓRMULAS DE OPERADORES VECTORIALES (FORMA CARTESIANA)

Fórmulas para Grad, Div, Rot y el laplaciano

	Cartesianas (x, y, z) **i**, **j**, y **k** son vectores unitarios en las direcciones en que aumentan x, y y z. M, N, y P son los componentes escalares de $\mathbf{F}(x, y, z)$ en estas direcciones.
Gradiente	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
Rotacional	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$
Laplaciano	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

El teorema fundamental de las integrales de línea

1. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyos componentes son continuos en toda una región abierta y conexa D en el espacio. Entonces existe una función derivable f tal que
$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$
si y sólo si para todos los puntos A y B en D el valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une a A con B en D.
2. Si la integral es independiente de la trayectoria de A a B, su valor es
$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones

Forma normal del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$

Teorema de la divergencia: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

Forma tangencial del teorema de Green: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$

Teorema de Stokes: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

Triples productos escalares

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Identidades vectoriales

En las siguientes identidades, f y g son funciones escalares derivables, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$, y $\mathbf{F}_2$ son campos vectoriales derivables, y a y b son constantes reales.

$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$

$\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$

$\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$

$\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$

$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

$\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$

$\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

$(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})$

FÓRMULAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Leyes de los signos

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cero La división entre cero no está definida.

$$\text{Si } a \neq 0\text{: } \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Para cualquier número } a\text{: } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

El teorema del binomio Para cualquier entero positivo n,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Por ejemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Factorización de una diferencia de potencias iguales de enteros, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Por ejemplo,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Cómo completar un cuadrado Si $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \qquad \left(u = x + (b/2a), C = c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

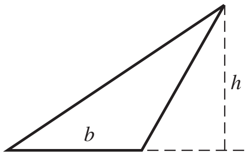
La fórmula cuadrática Si $a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

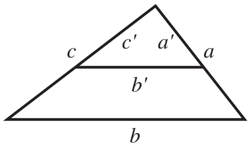
$A =$ área, $B =$ área de la base, $C =$ circunferencia,
$S =$ área lateral o área de la superficie, $V =$ volumen

Triángulo



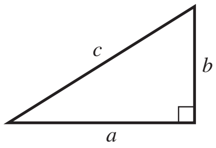
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Triángulos semejantes



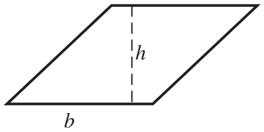
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Teorema de Pitágoras



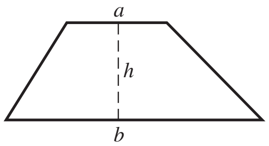
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramo



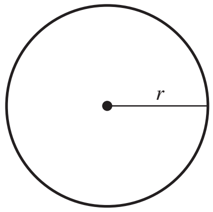
$$A = bh$$

Trapecio



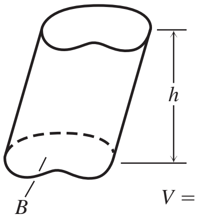
$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

Círculo

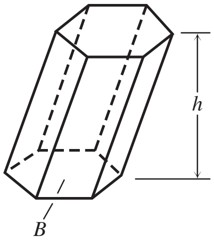


$A = \pi r^2$,
$C = 2\pi r$

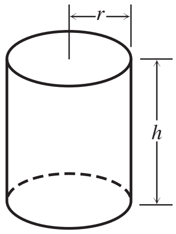
Cualquier cilindro o prisma con bases paralelas



$V = Bh$

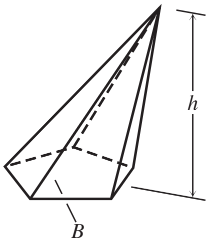


Cilindro circular recto

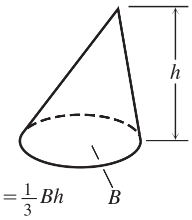


$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi rh =$ Área lateral

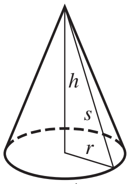
Cualquier cono o pirámide



$V = \frac{1}{3}Bh$

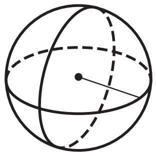


Cono circular recto



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$S = \pi rs =$ Área lateral

Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$

LÍMITES

Leyes generales

Si L, M, c, y k son números reales y

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

Regla de la suma: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

Regla de la diferencia: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

Regla del producto: $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Regla del múltiplo constante: $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

Regla del cociente: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

El teorema de la compresión o del sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y si

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Desigualdades

Si $f(x) \leq g(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y ambos límites existen, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

Continuidad

Si g es continua en L y $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(L).$$

Fórmulas específicas

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Regla de L'Hôpital

Si $f(a) = g(a) = 0$, y existen f' y g' en un intervalo abierto I que contiene a a, y $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite de la derecha.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Fórmulas generales

Suponga que u y v son funciones derivables de x.

Constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Diferencia: $\dfrac{d}{dx}(u - v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

Producto: $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Cociente: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

$\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Funciones trigonométricas inversas

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

$\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Funciones hiperbólicas

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

$\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

$\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Funciones hiperbólicas inversas

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

$\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $\qquad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$

Funciones paramétricas

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables, entonces

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas generales

Cero: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Orden de la integración: $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Múltiplos constantes: $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(cualquier número } k\text{)}$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Sumas y diferencias: $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Aditividad: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Desigualdad máx-mín: Si máx f y mín f son los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$, entonces

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Dominancia: $\quad f(x) \ge g(x) \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$$f(x) \ge 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Parte 2 Si f es continua en cada punto de $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sustitución en integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Leyes de los signos

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cero La división entre cero no está definida.

$$\text{Si } a \neq 0\text{:}\ \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Para cualquier número } a\text{:}\ a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$$

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

El teorema del binomio Para cualquier entero positivo n,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Por ejemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Factorización de una diferencia de potencias iguales de enteros, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Por ejemplo,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Cómo completar un cuadrado Si $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \qquad \left(u = x + (b/2a),\ C = c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

La fórmula cuadrática Si $a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas generales

Cero: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Orden de la integración: $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Múltiplos constantes: $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(cualquier número } k\text{)}$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Sumas y diferencias: $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Aditividad: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Desigualdad máx-mín: Si máx f y mín f son los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$, entonces

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Dominancia: $$f(x) \geq g(x) \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y su derivada es $f(x)$;

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Parte 2 Si f es continua en cada punto de $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sustitución en integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$