# ESTADÍSTICA APLICADA

**Marzo 2023 – CID - Centro de Investigación y Desarrollo**

libros.ciencialatina.org
editorial@ciencialatina.org
Atención por WhatsApp al +52 22 2690 3834
Pilar – Paraguay

| Datos Técnicos de Publicación Internacional |
|---|
| **Título:** Estadística Aplicada |
| **Autores**: Luz Marina Rodríguez Cisneros, Ismenia del Carmen Araujo de Rodríguez, Martha Patricia Navarrete Pilacuán, Rocío Alejandra Duque Granados |
| **Revisión por pares (Interna):** Edison Robinson Rodríguez Yar, Alexis Alcides Pérez Viamontes |
| **Instituto Superior Tecnológico ITCA, Ibarra- Ecuador** |
| **Editor:** CID - Centro de Investigación y Desarrollo |
| **Diseño de tapa:** CID - Centro de Investigación y Desarrollo |
| **Corrección de Estilo:** CID - Centro de Investigación y Desarrollo |
| **Formato:** PDF |
| **Páginas:** 52 Pág. |
| **Tamaño:** A4 |
| **Requisitos de sistema:** Adobe Acrobat Reader |
| **Modo de acceso:** World Wide Web |
| **ISBN:** 978-99925-13-77-4 |
| **DOI:** https://doi.org/10.37811/cli_w832 |

**1ª. Edición. Año 2023. Editorial CID - Centro de Investigación y Desarrollo.**

# ESTADISTICA APLICADA

| Carreras | Período académico |
| --- | --- |
| Administración | II |

**Autores:**

Mgs. Luz Marina Rodríguez-Cisneros

M. Sc. Ismenia del Carmen Araujo-Vílchez

Mgs. Martha Patricia Navarrete-Pilacuán

Mgs. Rocío Alejandra Duque-Granados

# INDICE

# INTRODUCCIÓN

La asignatura de Estadística Aplicada forma parte de la malla curricular de la carrera de Administración y se imparte en segundo nivel. Esta asignatura corresponde a la unidad básica y al campo de formación de fundamentos teóricos con una duración de 120 horas por período académico, que corresponde a 3 horas semanales.

El objetivo de la asignatura es desarrollar competencias matemáticas básicas en los estudiantes mediante el conocimiento y aplicación de conocimientos estadísticos y matemáticos pertinentes para la toma de decisiones en la solución de problemas de la empresa.

La asignatura de Estadística Aplicada contribuye para que el estudiante de la Tecnología Superior en Administración, al término de su formación académica, desarrolle capacidades específicas de su profesión para mejorar los procesos administrativos de la empresa.

En la unidad 1 se revisarán probabilidades de evento simple, espacio muestral, eventos, permutaciones y combinaciones, así como probabilidad condicionada.

En la unidad 2 se iniciará con una revisión de variables continuas y discretas para el estudio de la distribución de probabilidad de ambos tipos de variables. En la distribución de probabilidad discreta se revisará la distribución binomial y de Poisson mientras que en la distribución de probabilidad continua se estudiará la distribución uniforme y distribución normal.

En la unidad 3 se revisará el tema muestreo y sus tipos, estimación de parámetros puntuales y de intervalo, así como distribuciones muestrales de la media muestral y de la proporción poblacional.

En la unidad 4 se iniciará con el planteamiento de hipótesis para realizar la prueba de hipótesis con diferentes niveles de significancia para verificar si se acepta o rechaza la hipótesis de prueba.

Para el desarrollo de la asignatura se realizará el acompañamiento académico al estudiante tanto en clases como en tutorías. Como su docente, les deseo muchos éxitos a todos durante el desarrollo de esta asignatura.

**LINEAMIENTOS GENERALES DEL MODELO EDUCATIVO INSTITUCIONAL**

**Competencias generales**

- Comunicarse eficazmente en un medio social y laboral normalizado,
- Asumir obligaciones morales en la búsqueda del bien común,
- Innovar y producir una transformación en procesos o servicios en el ámbito de su profesión y,
- Habilidad para buscar, comprender, analizar información y utilizarla en situaciones nuevas.

**Competencias específicas**

Capacidad para mejorar los procesos administrativos de la empresa.

**Resultados de aprendizaje desarrollados por la asignatura**

| **LOGRO O RESULTADO DE APRENDIZAJE**<br>(Corresponde a los objetivos específicos, directamente relacionados con lo que el estudiante sea capaz de hacer al término de una unidad académica) | **Tipo de resultado/objetivo** | **UNIDAD ACADÉMICA** |
|---|---|---|
| 1. Aplica el cálculo de probabilidades a problemas prácticos. | Cognitivo | Unidad 1 |
| 2. Aplica el cálculo estadístico a partir de los diferentes tipos de distribuciones en el análisis estadístico | Procedimental | Unidad 2 |
| 3. Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional y la proporción poblacional en un caso práctico empresarial del sector productivo. | Procedimental | Unidad 3 |
| 4. Aplica los principios básicos de la prueba de hipótesis, valores críticos, zona de rechazo y nivel de significancia. | Procedimental | Unidad 4 |
| 5. Aplica los conocimientos y habilidades adquiridos para desarrollarse mejor en los nuevos contenidos. | Actitudinal | Todas las unidades |

**Nota: La Información presentada en esta guía fue tomada de las fuentes referenciadas en la Bibliografía.**

## BIBLIOGRAFÍA

### BÁSICA


- ✓ Levin, R. et al (2004), Estadística para administración y economía. 7ma. edición. México: Pearson Educación.


De este libro que contiene 17 capítulos, se manejarán los capítulos del 4 al 8 que desarrollan temas de probabilidad, distribución de probabilidad, muestreo y distribuciones de muestreo, estimaciones y prueba de hipótesis. En estas secciones se seleccionarán ejercicios y problemas para desarrollar con los estudiantes.


- ✓ Webster, A. (2000), Estadística aplicada a los negocios y la economía. Bogotá: McGraw Hill.


De este libro se trabajará los capítulos iniciales sobre probabilidad y distribución de probabilidad. En estas secciones se seleccionarán ejercicios y problemas para desarrollar con los estudiantes.

### COMPLEMENTARIA


- ✓ Anderson, D. et al (2008), Estadística para administración y economía. México: Cengage Learning.


De este libro que contiene 22 capítulos, se trabajará con los capítulos del 4 al 9 que explican temas de introducción a la probabilidad, distribuciones de probabilidad discreta y continua, muestreo y distribuciones muestrales, estimación por intervalo y prueba de hipótesis.

### REFERENCIAS ELECTRÓNICAS


- ✓ Aula fácil: Curso de estadística, disponible en: http://www.aulafacil.com/cursos/t675/ciencia/estadisticas/estadisticas

**Orientaciones Generales Para El Estudio**

La asignatura de estadística aplicada será impartida por los autores.

Para el desarrollo de la asignatura se utilizará, como material de apoyo, a los libros citados en la bibliografía básica y complementaria. De las secciones que correspondan de estos libros se extraerán ejercicios y problemas para la resolución en clase y en casa.

Como técnicas de estudio se recomienda revisar el contenido de esta guía, así como participar activamente en clases y realizar paso a paso los ejercicios iniciales. Cuando desarrolle destreza en el proceso de resolución, puede abreviar el procedimiento, cuando sea posible. También se recomienda trabajar con problemas seleccionados que permitan desarrollar estrategias para su planteo y resolución.

Como soporte a las clases presenciales, se ha organizado recursos y actividades en el aula virtual institucional. El uso del aula es obligatorio porque las indicaciones y el envío de tareas se registran en ese medio.

Finalmente, como una manera de verificar el aprendizaje, se proponen actividades de autoevaluación al final de cada una de las unidades. Las respuestas también están incluidas para comprobar el resultado obtenido.

**Proceso De Enseñanza – Aprendizaje Para El Logro De Resultados De Aprendizaje**

**Planificación Del Trabajo Para El Alumno**

| RESULTADOS DE APRENDIZAJE | CONTENIDOS | TIEMPO ESTIMADO (Horas) | ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE | RECURSOS | EVALUACIÓN |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Aplica el cálculo de probabilidades a problemas prácticos. | Unidad 1: Probabilidades<br>* Probabilidad de un evento<br>* Espacio muestral y eventos<br>*Permutaciones y combinaciones<br>* Probabilidad condicionada | 12 | Resolución de problemas de probabilidad de evento simple y probabilidad condicionada | Libro base y complementario<br>Cuaderno de apuntes<br>Calculadora<br>Materias de escritorio | Presentación del Taller: Resolución de problemas de probabilidad |
| 2. Aplicar el cálculo estadístico a partir de los diferentes tipos de distribuciones en el análisis estadístico | Unidad 2: Distribuciones de probabilidad y distribuciones de muestreo<br>* Distribución binomial<br>* Distribución de Posison<br>* Distribución hipergeométrica<br>* Distribución exponencial, uniforme y normal<br>*Muestra y población<br>*Error de muestreo<br>*Chi cuadrado<br>* T student | 12 | Resolución de problemas sobre distribución de probabilidad | Libro base y complementario<br>Cuaderno de apuntes<br>Calculadora<br>Materias de escritorio | Prueba: Resolución de problemas de distribución de probabilidad |
| 3. Calcular el intervalo de confianza para la media poblacional y la proporción poblacional en un caso práctico empresarial del sector productivo. | Unidad 3: Estimación de parámetros<br>* Media poblacional<br>* Proporción poblacional<br>* Variancia y desviación estándar.<br>* Intervalos e confianza<br>* Estimación de intervalos para muestras pequeñas<br>Estimación de intervalos para muestras grandes | 12 | Resolución de problemas estimación de parámetros puntuales y de intervalo | Libro base y complementario<br>Cuaderno de apuntes<br>Calculadora<br>Materias de escritorio | Presentación del Deber: Resolución de problemas de estimación de parámetros |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4. Aplica los principios básicos de la prueba de hipótesis, valores críticos, zona de rechazo y nivel de significancia. | Unidad 4: Prueba de hipótesis<br>* Valores críticos de Z y zonas de rechazo<br>* Áreas bajo la curva<br>* Pruebas de una y dos colas<br>* Pruebas cuando se tienen dos poblaciones.<br>* Distribución "t" | 9 | Resolución de problemas sobre prueba de hipótesis | Libro base y complementario<br>Cuaderno de apuntes<br>Calculadora<br>Materias de escritorio | Prueba: Resolución de problemas sobre prueba de hipótesis |

## Sistema De Evaluación

La calificación en cada bimestre resultará del promedio de: tres notas de tareas, la nota de la prueba parcial y la nota de la evaluación bimestral (total 5 notas). La calificación promedio (valor de la parcial) en cada bimestre que contenga décimas de punto serán calculadas por el sistema académico hasta con dos decimales.

Al finalizar el período académico el estudiante deberá rendir un examen de logros de aprendizaje también valorado sobre 10 puntos que se consigna en el sistema académico con no más de dos decimales. Así mismo se registrar en el mismo sistema el porcentaje de asistencia de cada estudiante.

## Orientaciones Específicas Por Unidades

# Unidad 1:

## Probabilidades

*Desarrollo de contenidos*

La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.

Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento. Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento. Por ejemplo, si considera el evento "que llueva mañana", se entiende que si el pronóstico del tiempo dice "la probabilidad de que llueva es cercana a cero", implica que casi no hay posibilidades de que llueva. En cambio, si informan que la probabilidad de que llueva es 0,90, sabe que es muy posible que llueva. La probabilidad de 0,50 indica que es igual de posible que llueva como que no llueva.

**Experimentos**

En el contexto de la probabilidad, un experimento es definido como un proceso que genera resultados definidos. Y en cada una de las repeticiones del experimento, habrá uno y sólo uno de los posibles resultados experimentales. A continuación, se dan varios ejemplos de experimentos con sus correspondientes resultados.

| **Experimento** | **Resultado experimental** |
|---|---|
| Lanzar una moneda | Cara, cruz |
| Tomar una pieza para inspeccionarla | Con defecto, sin defecto |
| Realizar una llamada de ventas | Hay compra, no hay compra |
| Lanzar un dado | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| Jugar un partido de futbol | Ganar, perder, empatar |

Al especificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el espacio muestral de un experimento.

ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los resultados experimentales.

A un resultado experimental también se le llama punto muestral para identificarlo como un elemento del espacio muestral.

**Regla de conteo**

Al asignar probabilidades es necesario saber identificar y contar los resultados experimentales. Una forma es mediante la regla de conteo de experimento de pasos múltiples.

**Experimentos de pasos múltiples**

La primera regla de conteo sirve para experimentos de pasos múltiples. Considere un experimento que consiste en lanzar dos monedas. Defina los resultados experimentales en términos de las caras y cruces que se observan en las dos monedas. ¿Cuántos resultados experimentales tiene este experimento? El experimento de lanzar dos monedas es un experimento de dos pasos: el paso 1 es lanzar la primera moneda y el paso 2 es lanzar la segunda moneda. Si se emplea H para denotar cara y T para denotar cruz, (H, H) será el resultado experimental en el que se tiene cara en la primera moneda y cara en la segunda moneda. Si continúa con esta notación, el espacio muestral (S) en este experimento del lanzamiento de monedas será el siguiente:

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

Por tanto, hay cuatro resultados experimentales. En este caso es fácil enumerar todos los resultados experimentales.

La regla de conteo para experimentos de pasos múltiples permite determinar el número de resultados experimentales sin tener que enumerarlos.

REGLA DE CONTEO PARA EXPERIMENTOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un experimento se describe como una sucesión de $k$ pasos en los que hay $n_1$ resultados posibles en el primer paso, $n_2$ resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es $(n_1)$ $(n_2)$ . . . $(n_k)$.

Si considera el experimento del lanzamiento de dos monedas como la sucesión de lanzar primero una moneda (n1 =2) y después lanzar la otra (n2 =2), siguiendo la regla de conteo (2)(2) = 4, entonces hay cuatro resultados distintos. Como ya se mostró, estos resultados son S = {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}. El número de resultados experimentales de seis monedas es (2)(2)(2)(2)(2)(2) = 64.

**Combinaciones**

Otra regla de conteo útil le permite contar el número de resultados experimentales cuando el experimento consiste en seleccionar n objetos de un conjunto (usualmente mayor) de N objetos. Ésta es la regla de conteo para combinaciones.

REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones de $N$ objetos tomados de $n$ en $n$ es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

donde
$$N! = N(N-1)(N-2)\cdots(2)(1)$$
$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

y por definición,
$$0! = 1$$

¡La notación! significa factorial; ¡por ejemplo, 5 factorial es 5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120. Como ejemplo del uso de la regla de conteo para combinaciones, considere un procedimiento de control de calidad en el que un inspector selecciona al azar dos de cinco piezas para probar que no tengan defectos. En un conjunto de cinco partes, ¿cuántas combinaciones de dos partes pueden seleccionarse?

De acuerdo con la regla de conteo de la ecuación anterior es claro que con N = 5 y n = 2 se tiene

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

De manera que hay 10 resultados posibles en este experimento de la selección aleatoria de dos partes de un conjunto de cinco. Si etiqueta dichas partes como A, B, C, D y E, las 10 combinaciones o resultados experimentales serán AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE y DE.

Para ver otro ejemplo, considere la lotería de Florida en la que se seleccionan seis números de un conjunto de 53 números para determinar al ganador de la semana. Para establecer las distintas variables en la selección de seis enteros de un conjunto de 53, se usa la regla de conteo para combinaciones.

$$\binom{53}{6} = \frac{53!}{6!(53-6)!} = \frac{53!}{6!47!} = \frac{(53)(52)(51)(50)(49)(48)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 22\,957\,480$$

La regla de conteo para combinaciones arroja casi 23 millones de resultados experimentales en esta lotería. Si una persona compra un billete de lotería, tiene una en 22 957 480 posibilidades de ganar la lotería.

**Permutaciones**

La tercera regla de conteo que suele ser útil, es para permutaciones. Dicha regla permite calcular el número de resultados experimentales cuando se seleccionan n objetos de un conjunto de N objetos y el orden de selección es relevante. Los mismos n objetos seleccionados en orden diferente se consideran un resultado experimental diferente.

REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de permutaciones de $N$ objetos tomados de $n$ en $n$ está dado por

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

La regla de conteo para permutaciones tiene relación estrecha con la de combinaciones; sin embargo, con el mismo número de objetos, el número de permutaciones que se obtiene en un experimento es mayor que el número de combinaciones, ¡ya que cada selección de n objetos se ordena de n! maneras diferentes.

Para ver un ejemplo, reconsidere el proceso de control de calidad en el que un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar? En la ecuación anterior se indica que si N = 5 y n = 2, se tiene

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20$$

De manera que el experimento de seleccionar aleatoriamente dos piezas de un conjunto de cinco piezas, teniendo en cuenta el orden en que se seleccionen, tiene 20 resultados. Si las piezas se etiquetan A, B, C, D y E, las 20 permutaciones son AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE y ED.

## Asignación de probabilidades

Ahora verá cómo asignar probabilidades a los resultados experimentales. Los tres métodos comúnmente usados son el método clásico, el método de la frecuencia relativa y el método subjetivo. Sin importar el método que se use, es necesario satisfacer los requerimientos básicos para la asignación de probabilidades.

REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con $E_i$ el $i$-ésimo resultado experimental y con $P(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \text{ para toda } i$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales $n$ escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1$$

El **método clásico** de asignación de probabilidades es apropiado cuando todos los resultados experimentales tienen la misma posibilidad. Si existen n resultados experimentales, la probabilidad asignada a cada resultado experimental es 1/n. Cuando emplee este método, satisfará en automático los dos requerimientos básicos de la asignación de probabilidades.

Por ejemplo, considere el experimento del lanzamiento de una moneda, los dos resultados experimentales —cruz o cara— tienen la misma posibilidad. Como uno de los dos resultados igualmente posibles es cara, la probabilidad de que caiga cara es 1/2 o 0,50. Asimismo, la probabilidad de que caiga cruz también es 1/2 o 0,50.

Otro ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado. Es razonable pensar que los seis resultados que pueden presentarse son igualmente posibles y, por tanto, la probabilidad asignada a cada resultado es 1/6. Si P(1) denota la probabilidad de que la cara del dado que caiga hacia arriba sea la que tiene un punto, entonces P(1) = 1/6. De manera similar P(2) = 1/6, P(3) = 1/6, P(4) = 1/6, P(5) = 1/6 y P(6) = 1/6. Observe que dichas probabilidades satisfacen los dos requerimientos básicos de las ecuaciones anteriores, porque cada una es mayor o igual que cero y juntas suman 1,0.

El **método de frecuencia** relativa para la asignación de probabilidades es el más conveniente cuando existen datos para estimar la proporción de veces que se presentarán los resultados si el experimento se repite muchas veces. Considere, por ejemplo, un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos x de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

| Número de personas que esperan | | Número de días: resultados de ocurrencia |
|---|---|---|
| 0 | | 2 |
| 1 | | 5 |
| 2 | | 6 |
| 3 | | 4 |
| 4 | | 3 |
| | Total | 20 |

En estos datos aparece que 2 de los 20 días, había cero pacientes esperando el servicio, 5 días había un paciente en espera y así sucesivamente. Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes espera el servicio, será 2/20 = 0,10; al resultado experimental un paciente espera el servicio, 5/20 = 0.25; 6/20 = 0,30 a dos pacientes esperan el servicio; 4/20 = 020 a tres pacientes esperan el servicio y 3/20 = 0,15 a cuatro pacientes esperan el servicio. Como sucede con el método clásico, al usar el método de frecuencia relativa se satisfacen en automático los dos requerimientos básicos correspondientes a las ecuaciones iniciales.

El **método subjetivo** de asignación de probabilidades es el más indicado cuando no es factible suponer que todos los resultados de un experimento sean igualmente posibles y, además, cuenta con pocos datos relevantes. El método subjetivo de asignación de probabilidades a los resultados de un experimento, usa toda la información disponible, por ejemplo, la propia experiencia o la intuición. Después de considerar dicha información, se asigna un valor de probabilidad que expresa el grado de confianza (en una escala de 0 a 1) que tiene acerca de que un resultado experimental ocurra. Como la probabilidad subjetiva, el grado de confianza que tiene un individuo es personal. Cuando se usa el método de probabilidad subjetiva, es de esperarse que personas distintas asignen probabilidades diferentes a los mismos resultados de un experimento.

En el método subjetivo hay que tener cuidado de que se satisfagan los dos requerimientos básicos expresados en las ecuaciones iniciales. Sea cual sea el grado de confianza que tenga la persona, el valor de probabilidad asignado a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive, y la suma de las probabilidades de todos los resultados experimentales debe ser 1.0.

Considere el caso en el que Tom y Judy Elsbernd hacen una oferta para la compra de una casa. Hay dos resultados posibles:

$$E_1 = \text{su oferta será aceptada}$$
$$E_2 = \text{su oferta no será aceptada}$$

Judy cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0,8; por tanto, Judy establece que P(E1) = 0,8 y P(E2) = 0,2; Tom, por su parte, cree que la probabilidad de que su oferta sea aceptada es 0,6; por tanto, Tom establecerá P(E1) = 0,6 y P(E2) = 0,4. Observe que la estimación de probabilidad de E1 que hace Tom refleja bastante pesimismo de que su oferta sea aceptada.

Tanto Judy como Tom asignaron probabilidades que satisfacen los dos requerimientos básicos. El hecho de que sus probabilidades sean diferentes subraya la naturaleza personal del método subjetivo.

Incluso, en situaciones de negocios en que es posible emplear el método clásico o el de las probabilidades relativas, los administradores suelen proporcionar estimaciones subjetivas de una probabilidad. En tales casos, la mejor estimación de una probabilidad suele obtenerse combinando las estimaciones del método clásico o del método de las frecuencias relativas con las estimaciones subjetivas de una probabilidad.

**Actividades de la unidad**

1. El muestreo aleatorio simple usa una muestra de tamaño n tomada de una población de tamaño N para obtener datos para hacer inferencias acerca de las características de la población. Suponga que, de una población de 50 cuentas bancarias, desea tomar una muestra de cuatro cuentas con objeto de tener información acerca de la población. ¿Cuántas muestras diferentes de cuatro cuentas pueden obtener?
2. El capital de riesgo es una fuerte ayuda para los fondos disponibles de las empresas. De acuerdo con *Venture Economics (Investor's Business Daily*, 28 de abril de 2000) de 2374 desembolsos en capital de riesgo, 1434 son de empresas en California, 390 de empresas en Massachussets, 217 de empresas en Nueva York y 112 de empresas en Colorado. Veintidós por ciento de las empresas que reciben fondos se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo y 55% en la etapa de expansión. Suponga que desea tomar en forma aleatoria una de estas empresas para saber cómo son usados los fondos de capital de riesgo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa que seleccione sea de California?
b. ¿De qué la empresa no sea de ninguno de los estados citados?
c. ¿De qué la empresa elegida no se encuentre en las etapas iniciales de desarrollo?
d. Si admite que las empresas en las etapas iniciales de desarrollo tuvieran una distribución homogénea en todo el país, ¿cuántas empresas de Massachussets que reciben fondos de capital de riesgo se encuentran en las etapas iniciales de desarrollo?
e. La cantidad total de fondos invertidos es $32,4 mil millones. Estime la cantidad destinada a Colorado.

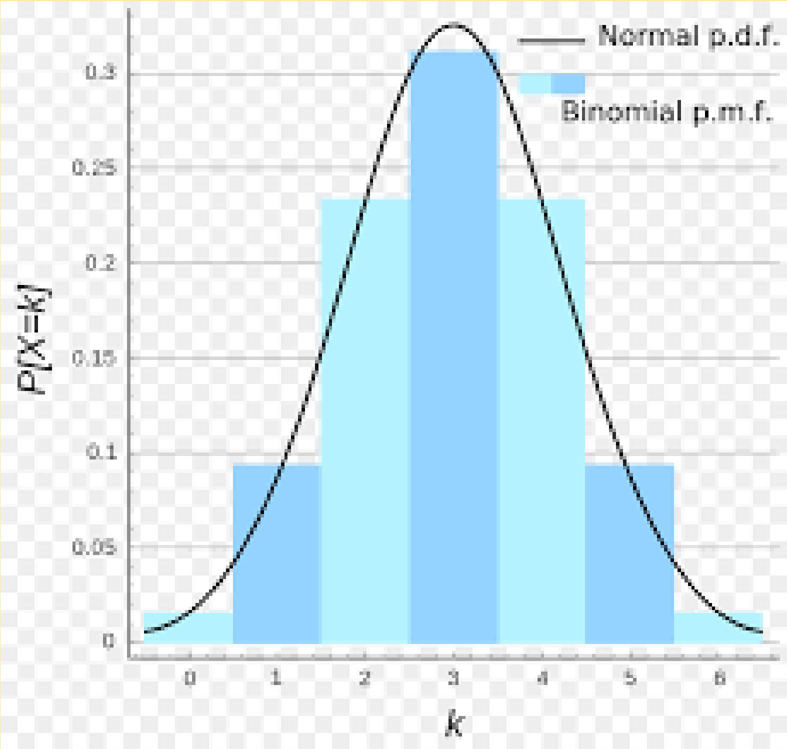
**Autoevaluación**

1. ¿De cuántas maneras es posible seleccionar tres objetos de un conjunto de seis objetos? Use las letras A, B, C, D, E y F para identificar a los objetos y enumere todas las combinaciones diferentes de tres objetos.
2. Un experimento que tiene tres resultados es repetido 50 veces y se ve que E1 aparece 20 veces, E2 13 veces y E3 17 veces. Asigne probabilidades a los resultados. ¿Qué método empleó?

# Unidad 2:

## Distribución De Probabilidad

***Desarrollo de contenidos***



## Variables aleatorias

En la primera unidad, se definió el concepto de experimento con sus correspondientes resultados experimentales. *Una variable aleatoria proporciona un medio para describir los resultados experimentales empleando valores numéricos*. Las variables aleatorias deben tomar valores numéricos. En efecto, una variable aleatoria asocia un valor numérico a cada uno de los resultados experimentales. El valor numérico de la variable aleatoria depende del resultado del experimento. Una variable aleatoria puede ser discreta o continua, depende del tipo de valores numéricos que asuma.

## Variables aleatorias discretas

A una variable aleatoria que asuma ya sea un número finito de valores o una sucesión infinita de valores tales como 0, 1, 2, . . ., se le llama variable aleatoria discreta. Considere, por ejemplo, el siguiente experimento: un contador presenta el examen para certificarse como contador público. El examen tiene cuatro partes. Defina una variable aleatoria x como x número de partes del examen aprobadas. Ésta es una variable aleatoria discreta porque puede tomar el número finito de valores 0, 1, 2, 3 o 4.

Para tener otro ejemplo de una variable aleatoria discreta considere el experimento de observar los automóviles que llegan a una caseta de peaje. La variable aleatoria que interesa es x = número de automóviles que llega a la caseta de peaje en un día. Los valores que puede tomar la variable aleatoria son los de la secuencia 0, 1, 2, etc. Así, x es una variable aleatoria discreta que toma uno de los valores de esta sucesión infinita.

Aunque los resultados de muchos experimentos se describen mediante valores numéricos, los de otros no. Por ejemplo, en una encuesta se le puede preguntar a una persona si recuerda el mensaje de un comercial de televisión. Este experimento tiene dos resultados: que la persona no recuerda el mensaje y que la persona recuerda el mensaje. Sin embargo, estos resultados se describen numéricamente definiendo una variable aleatoria x como sigue: sea x = 0 si la persona no recuerda el mensaje y sea x = 1 si la persona recuerda el mensaje. Los valores numéricos de esta variable son arbitrarios (podría haber usado 5 y 10), pero son aceptables de acuerdo con la definición de una variable aleatoria, es decir, x es una variable aleatoria porque proporciona una descripción numérica de los resultados del experimento.

EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

| Experimento | Variable aleatoria ($x$) | Valores posibles para la variable aleatoria |
|---|---|---|
| Llamar a cinco clientes | Número de clientes que hacen un pedido | 0, 1, 2, 3, 4, 5 |
| Inspeccionar un envío de 50 radios | Número de radios que tienen algún defecto | 0, 1, 2, · · · , 49, 50 |
| Hacerse cargo de un restaurante durante un día | Número de clientes | 0, 1, 2, 3, · · · |
| Vender un automóvil | Sexo del cliente | 0 si es hombre; 1 si es mujer |

**Variables aleatorias continuas**

A una variable que puede tomar cualquier valor numérico dentro de un intervalo o colección de intervalos se le llama variable aleatoria continua. Los resultados experimentales basados en escalas de medición tales como tiempo, peso, distancia y temperatura pueden ser descritos por variables aleatorias continuas. Considere, por ejemplo, el experimento de observar las llamadas telefónicas que llegan a la oficina de atención de una importante empresa de seguros. La variable aleatoria que interesa es x = tiempo en minutos entre dos llamadas consecutivas. Esta variable aleatoria puede tomar cualquier valor en el intervalo x >= 0. En efecto, x puede tomar un número infinito de valores, entre los que se encuentran valores como 1,26 minutos, 2,751 minutos, 4,3333 minutos, etc. Otro ejemplo, considere el tramo de 90 millas de una carretera entre Atlanta y Georgia. Para el servicio de ambulancia de emergencia en Atlanta, la variable aleatoria x es x = número de millas hasta el punto en que se localiza el siguiente accidente de tráfico en este tramo de la carretera. En este caso, x es una variable aleatoria continua que toma cualquier valor en el intervalo 0 <= x <= 90. En la tabla siguiente aparecen otros ejemplos de variables aleatorias continuas. Observe que cada ejemplo describe una variable aleatoria que toma cualquier valor dentro de un intervalo de valores.

EJEMPLOS DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

| Experimento | Variable aleatoria ($x$) | Valores posibles para la variable aleatoria |
|---|---|---|
| Operar un banco | Tiempo en minutos entre la llegada de los clientes | $x \geq 0$ |
| Llenar una lata de refresco (máx. 12.1 onzas) | Cantidad de onzas | $0 \leq x \leq 12.1$ |
| Construir una biblioteca | Porcentaje del proyecto terminado en seis meses | $0 \leq x \leq 100$ |
| Probar un proceso químico nuevo | Temperatura a la que tiene lugar la reacción deseada (mín. 150°F; máx. 212°F) | $150 \leq x \leq 212$ |

**Distribución de probabilidad discreta**

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria describe cómo se distribuyen las probabilidades entre los valores de la variable aleatoria. En el caso de una variable aleatoria discreta x, la distribución de probabilidad está definida por una función de probabilidad, denotada por f(x). La función de probabilidad da la probabilidad de cada valor de la variable aleatoria.

**Distribución de probabilidad binomial**

La distribución de probabilidad binomial es una distribución de probabilidad que tiene muchas aplicaciones. Está relacionada con un experimento de pasos múltiples al que se le llama experimento binomial.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO BINOMIAL

1. El experimento consiste en una serie de $n$ ensayos idénticos.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles. A uno de estos resultados se le llama *éxito* y al otro se le llama *fracaso*.
3. La probabilidad de éxito, que se denota $p$, no cambia de un ensayo a otro. Por ende, la probabilidad de fracaso, que se denota $1 - p$, tampoco cambia de un ensayo a otro.
4. Los ensayos son independientes.

Si se presentan las propiedades 2, 3 y 4, se dice que los ensayos son generados por un proceso de Bernoulli. Si, además, se presenta la propiedad 1, se trata de un experimento binomial. En la se presenta una sucesión de éxitos y fracasos de un experimento binomial con ocho ensayos.

En un experimento binomial lo que interesa es el número de éxitos en n ensayos. Si x denota el número de éxitos en n ensayos, es claro que x tomará los valores 0, 1, 2, 3, ..., n. Dado que el número de estos valores es finito, x es una variable aleatoria discreta. A la distribución de probabilidad correspondiente a esta variable aleatoria se le llama distribución de probabilidad binomial. Por ejemplo, considere el experimento que consiste en lanzar una moneda cinco veces y observar si la cara de la moneda que cae hacia arriba es cara o cruz. Suponga que se desea contar el número de caras que aparecen en los cinco lanzamientos. ¿Presenta este experimento las propiedades de un experimento binomial? ¿Cuál es la variable aleatoria que interesa? Observe que:

1. El experimento consiste en cinco ensayos idénticos; cada ensayo consiste en lanzar una moneda.
2. En cada ensayo hay dos resultados posibles: cara o cruz. Se puede considerar cara como éxito y cruz como fracaso.
3. La probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso son iguales en todos los ensayos, siendo p = 0,5 y 1 - p = 0,5.
4. Los ensayos o lanzamientos son independientes porque al resultado de un ensayo no afecta a lo que pase en los otros ensayos o lanzamientos.

Por tanto, se satisfacen las propiedades de un experimento binomial. La variable aleatoria que interesa es x = número de caras que aparecen en cinco ensayos. En este caso, x puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 o 5.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$$

donde

$f(x)$ = probabilidad de $x$ éxitos en $n$ ensayos

$n$ = número de ensayos

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$p$ = probabilidad de un éxito en cualquiera de los ensayos

$1 - p$ = probabilidad de un fracaso en cualquiera de los ensayos

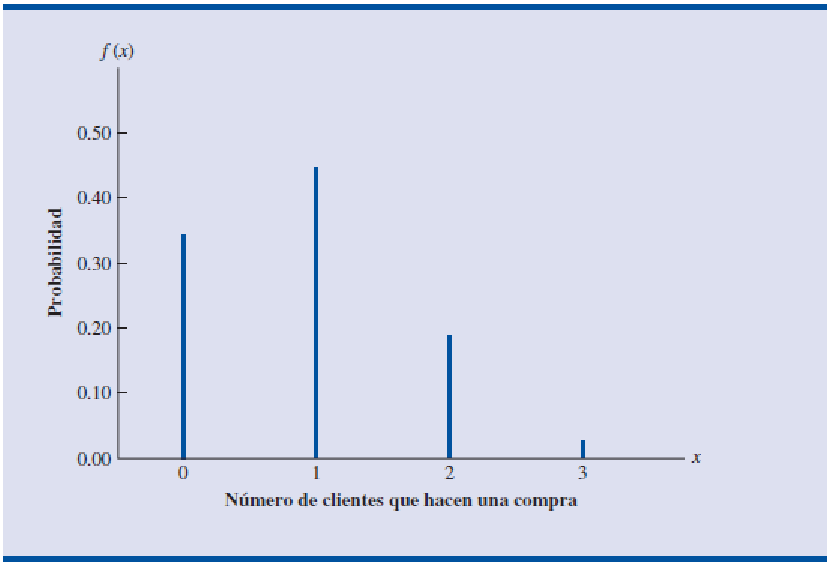
Se plantea por ejemplo una tienda de ropa en que se necesita calcular la probabilidad de que ningún cliente realice una compra, de que exactamente un cliente realice una compra, de que exactamente dos clientes realicen una compra y de que los tres clientes realicen una compra. Los cálculos se presentan en forma resumida en la tabla siguiente, que da la distribución de probabilidad para el número de clientes que hacen una compra

En la figura siguiente está una gráfica de esta distribución de probabilidad.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{3!}{0!3!}(0.30)^0(0.70)^3 = 0.343$ |
| 1 | $\frac{3!}{1!2!}(0.30)^1(0.70)^2 = 0.441$ |
| 2 | $\frac{3!}{2!1!}(0.30)^2(0.70)^1 = 0.189$ |
| 3 | $\frac{3!}{3!0!}(0.30)^3(0.70)^0 = \underline{0.027}$ |
| | $1.000$ |

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL PARA EL NÚMERO DE CLIENTES QUE HACEN UNA COMPRA




La función de probabilidad binomial es aplicable a cualquier experimento binomial. Si encuentra que una situación presenta las propiedades de un experimento binomial y conoce los valores de n y p, use la ecuación de la función de probabilidad binomial para calcular la probabilidad de x éxitos en n ensayos

**Distribución de probabilidad de Poisson**

En esta sección estudiará una variable aleatoria discreta que se suele usar para estimar el número de veces que sucede un hecho determinado (ocurrencias) en un intervalo de tiempo o de espacio. Por ejemplo, la variable de interés va desde el número de automóviles que llegan (llegadas) a un lavado de coches en una hora o el número de reparaciones necesarias en 10 millas de una autopista hasta el número de fugas en 100 millas de tubería. Si se satisfacen las condiciones siguientes, el número de ocurrencias es una variable aleatoria discreta, descrita por la distribución de probabilidad de Poisson.

PROPIEDADES DE UN EXPERIMENTO DE POISSON

1. La probabilidad de ocurrencia es la misma para cualesquiera dos intervalos de la misma magnitud.
2. La ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia o no-ocurrencia en cualquier otro intervalo.

La función de probabilidad de Poisson se define mediante la ecuación

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

$$f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

en donde

$f(x)$ = probabilidad de $x$ ocurrencias en un intervalo
$\mu$ = valor esperado o número medio de ocurrencias en un intervalo
$e$ = 2.71828

Antes de considerar un ejemplo para ver cómo se usa la distribución de Poisson, observe que el número de ocurrencias x, no tiene límite superior. Ésta es una variable aleatoria discreta que toma los valores de una sucesión infinita de números (x = 0, 1, 2,).

**Ejemplo considerando intervalos de tiempo**

Suponga que desea saber el número de llegadas, en un lapso de 15 minutos, a la rampa del cajero automático de un banco. Si se puede suponer que la probabilidad de llegada de los automóviles es la misma en cualesquiera dos lapsos de la misma duración y si la llegada o no–llegada de un automóvil en cualquier lapso es independiente de la llegada o no–llegada de un automóvil en cualquier otro lapso, se puede aplicar la función de probabilidad de Poisson. Dichas condiciones se satisfacen y en un análisis de datos pasados encuentra que el número promedio de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos es 10; en este caso use la función de probabilidad siguiente.

$$f(x) = \frac{10^x e^{-10}}{x!}$$

Aquí la variable aleatoria es x = número de automóviles que llegan en un lapso de 15 minutos. Si la administración desea saber la probabilidad de que lleguen exactamente cinco automóviles en 15 minutos, x = 5, y se obtiene

$$\text{Probabilidad de que lleguen exactamente 5 automóviles en 15 minutos} = f(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = 0.0378$$

En el ejemplo anterior se usó un lapso de 15 minutos, pero también se usan otros lapsos. Suponga que desea calcular la probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos. Como 10 es el número esperado de llegadas en un lapso de 15 minutos: 10/15 = 2/3 es el número esperado de llegadas en un lapso de un minuto y que (2/3)(3 minutos) = 2 es el número esperado de llegadas en un lapso de 3 minutos. Entonces, la probabilidad de x llegadas en un lapso de 3 minutos con $\mu = 2$ está dada por la siguiente función de probabilidad de Poisson.

$$f(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

La probabilidad de una llegada en un lapso de 3 minutos se obtiene como sigue:

$$\text{Probabilidad de exactamente una llegada en 3 minutos} = f(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.2707$$

Antes se calculó la probabilidad de cinco llegadas en un lapso de 15 minutos; se obtuvo 0,0378. Observe que la probabilidad de una llegada en un lapso de tres minutos (0,2707) no es la misma. Para calcular la probabilidad de Poisson en un lapso diferente, primero hay que convertir la llegada media al lapso que interesa y después calcular la probabilidad.

**Distribución de probabilidad continua**

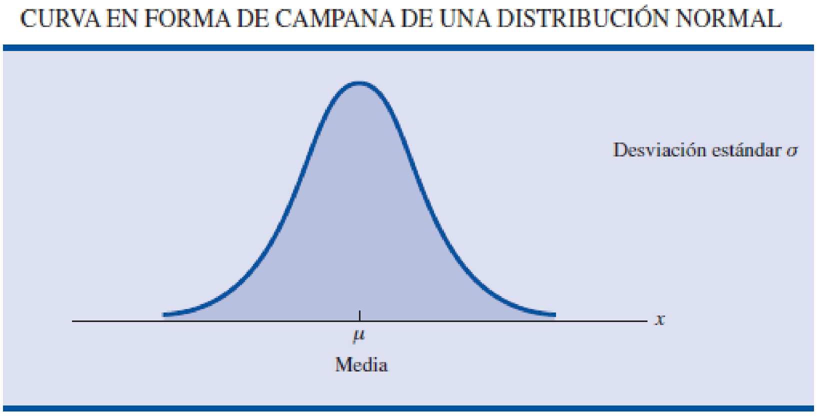
En la sección anterior se revisaron las variables aleatorias discretas y las distribuciones de probabilidad binomial y Poisson. En esta sección se tratan las variables aleatorias continuas. En específico se analizará la distribución de probabilidad normal que es muy importante por tener muchas aplicaciones y un amplio uso en la inferencia estadística.

**Distribución de probabilidad normal**

La distribución de probabilidad más usada para describir variables aleatorias continuas es la distribución de probabilidad normal. La distribución normal tiene gran cantidad de aplicaciones prácticas, en las cuales la variable aleatoria puede ser el peso o la estatura de las personas, puntuaciones de exámenes, resultados de mediciones científicas, precipitación pluvial u otras cantidades similares. La distribución normal también tiene una importante aplicación en inferencia estadística, como es la prueba de hipótesis. En estas aplicaciones, la distribución normal describe qué tan probables son los resultados obtenidos de un muestreo

**Curva normal**

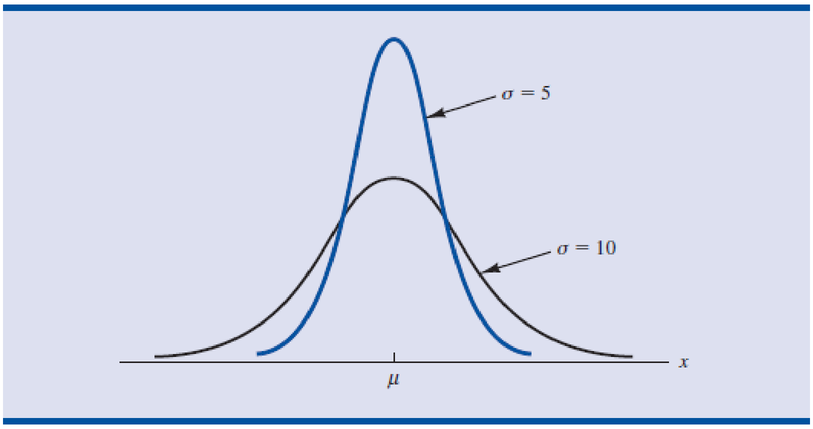
En la figura aparece la forma de la distribución normal, una curva normal en forma de campana.




Las siguientes son observaciones importantes acerca de las características de las distribuciones normales.

1. Toda la familia de distribuciones normales se diferencia por medio de dos parámetros: la media $\mu$ y la desviación estándar $\sigma$.
2. El punto más alto de una curva normal se encuentra sobre la media, la cual coincide con la mediana y la moda.
3. La media de una distribución normal puede tener cualquier valor: negativo, positivo o cero.
4. La distribución normal es simétrica, siendo la forma de la curva normal al lado izquierdo de la media, la imagen especular de la forma al lado derecho de la media. Las colas de la curva normal se extienden al infinito en ambas direcciones y en teoría jamás tocan el eje horizontal. Dado que es simétrica, la distribución normal no es sesgada; su sesgo es cero.
5. La desviación estándar determina qué tan plana y ancha es la curva normal. Desviaciones estándar grandes corresponden a curvas más planas y más anchas, lo cual indica mayor variabilidad en los datos.

A continuación, se muestran dos curvas normales que tienen la misma media, pero distintas desviaciones estándar

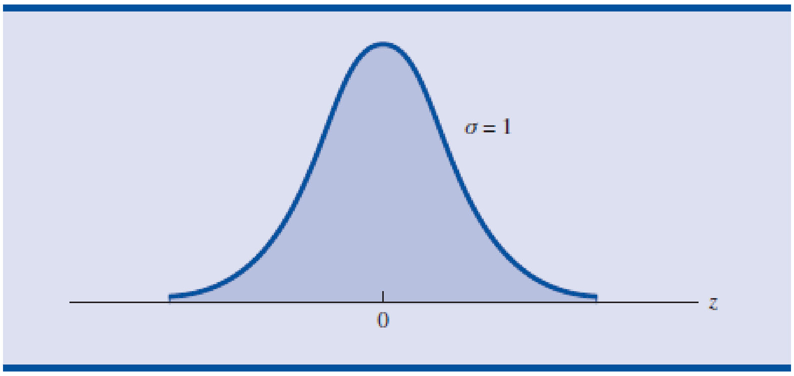



6. Las probabilidades correspondientes a la variable aleatoria normal se dan mediante áreas bajo la curva normal. Toda el área bajo la curva de una distribución normal es 1. Como esta distribución es simétrica, el área bajo la curva y a la izquierda de la media es 0,50 y el área bajo la curva y a la derecha de la media es 0,50.

**Distribución de probabilidad normal estándar**

Una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una media cero y desviación estándar de uno tiene una distribución normal estándar. Para designar esta variable aleatoria normal se suele usar la letra z. La figura siguiente es la gráfica de la distribución normal estándar. Esta distribución tiene el mismo aspecto general que cualquier otra distribución normal, pero tiene las propiedades especiales, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR



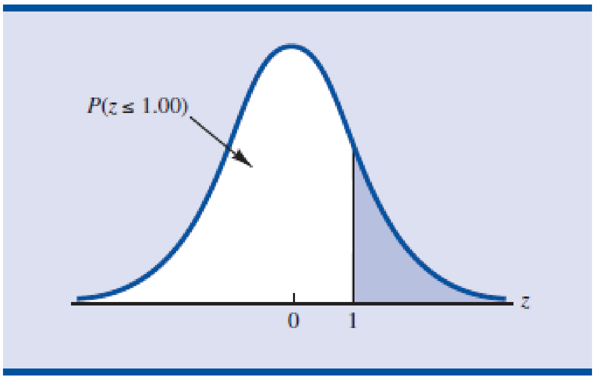

Para la distribución normal estándar ya se encuentran calculadas las áreas bajo la curva normal y se cuenta con tablas que dan estas áreas y que se usan para calcular las probabilidades. Estas tablas se encuentran en el anexo de esta guía.

Los tres tipos de probabilidades que se necesitan calcular son:

1. La probabilidad de que la variable aleatoria normal estándar z sea menor o igual que un valor dado;
2. La probabilidad de que z esté entre dos valores dados,
3. La probabilidad de que z sea mayor o igual que un valor dado.

Para mostrar el uso de las tablas de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar en el cálculo de estos tres tipos de probabilidades, se consideran algunos ejemplos.

Se empieza por mostrar cómo se calcula la probabilidad de que z sea menor o igual a 1,00; es decir P(z <= 1,00). Esta probabilidad acumulada es el área bajo la curva normal a la izquierda de z = 1,00 como se muestra en la gráfica siguiente.



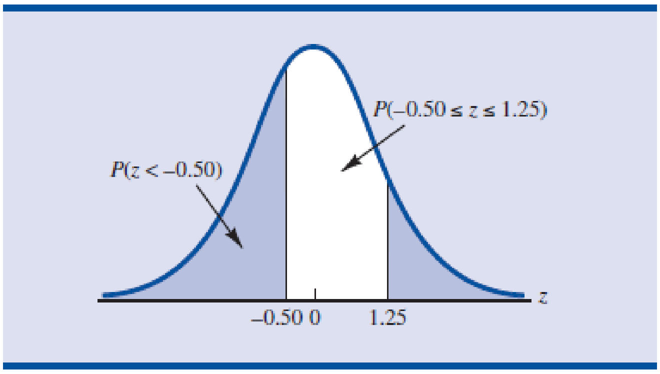

Consulte en el anexo de esta guía los valores de la tabla de la distribución de probabilidad normal estándar. Esta probabilidad acumulada correspondiente a z = 1, es el valor que en la tabla se localiza en la intersección del renglón cuyo encabezado es 1,0 y la columna cuyo encabezado es 0,00. Primero localice 1,0 en la columna del extremo izquierdo de la tabla y después localice 0,00 en el renglón en la parte superior de la tabla. Observe que en el interior de la tabla, el renglón 1,0 y la columna 0,00 se cruzan en el valor 0,8413; por tanto, P(z <= 1,00)= 0,8413.

Estos pasos se muestran en el extracto siguiente de las tablas de probabilidad.

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 |
|---|---|---|---|
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 |
| 1.0 | $\boxed{0.8413}$ | 0.8438 | 0.8461 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 |
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |

$P(z \leq 1.00)$

Para ilustrar el segundo tipo de cálculo de una probabilidad se muestra cómo calcular la probabilidad de que z esté en el intervalo entre -0,50 y 1,25; esto es, P(-,50 <= z <=1,25). En la gráfica siguiente se muestra esta área o probabilidad.

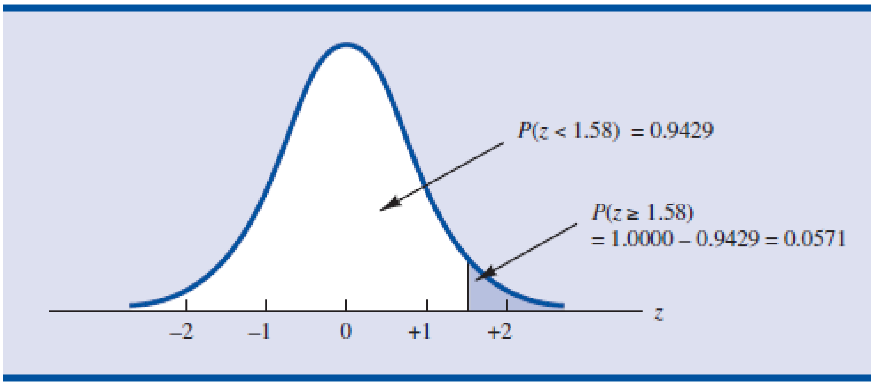



Para calcular esta probabilidad son necesarios tres pasos. Primero, se encuentra el área bajo la curva normal a la izquierda de z = 1,25. Segundo, se encuentra el área bajo la curva normal a la izquierda de z=-0,50. Por último, se resta el área a la izquierda de z=-0.50 del área a la izquierda de z = 1,25 y se encuentra, P(-0,50 <= z <= 1,25).

Para encontrar el área bajo la curva normal a la izquierda de z = 1,25, primero se localiza en la tabla de probabilidad normal estándar el renglón 1,2 y después se avanza por ese renglón hasta la columna 0,05. Como el valor que aparece en el renglón 1,2 columna 0,05 es 0,8944, P(z <=1,25) = 0,8944. De manera similar, para encontrar el área bajo la curva a la izquierda de z = -0.50 se usa la tabla para localizar el valor en el renglón -0,5 columna 0,00; como el valor que se encuentra es 0,3085, P(z<=0,50) = 0,3085. Por tanto, P(-0,50 <= z 1,25) = P(z <= 1,25) - P(z <= 0,50) = 0,8944 – 0,3085 = 0,5859.

Para ilustrar cómo se calcula el tercer tipo de probabilidad, suponga que desea calcular la probabilidad de tener un valor z por lo menos igual a 1,58; es decir, P(z >= 1,58). El valor en el renglón z = 1,5, columna 0,08 de la tabla normal acumulada es 0,9429; por tanto, P(z <

1,58) = 0,9429. Pero, como toda el área bajo la curva normal es 1, P(z >= 1,58) = 1 – 0,9429 = 0,0571. En la figura siguiente se muestra esta probabilidad.




En la mayoría de los casos, hacer un bosquejo de la gráfica de la distribución de probabilidad normal estándar y sombrear el área deseada será una ayuda para visualizar la situación y encontrar la respuesta correcta.

**Cálculo de probabilidades en cualquier distribución de probabilidad normal**

La razón por la cual la distribución normal estándar se ha visto de manera tan amplia es que todas las distribuciones normales son calculadas mediante la distribución normal estándar. Esto es, cuando distribución normal con una media μ cualquiera y una desviación estándar σ cualquiera, las preguntas sobre las probabilidades en esta distribución se responden pasando primero a la distribución normal estándar. Use las tablas de probabilidad normal estándar y los valores apropiados de z para hallar las probabilidades deseadas. A continuación, se da la fórmula que se emplea para convertir cualquier variable aleatoria x con media μ y desviación estándar σ en la variable aleatoria normal estándar z.

CONVERSIÓN A LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL ESTÁNDAR

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Para ver cómo esta distribución permite calcular probabilidades en cualquier distribución normal, admita que tiene una distribución en la que μ = 10 y σ = 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable x esté entre 10 y 14? Empleando la ecuación, se ve que para z = (x - μ)/σ = (10 - 10)/2 = 0 y que para x = 14, z = (14 - 10)/2 = 4/2 = 2. Así, la respuesta a la pregunta acerca de la probabilidad de que x esté entre 10 y 14 está dada por la probabilidad equivalente de que z esté entre 0 y 2 en la distribución normal estándar. En otras palabras, la probabilidad que se está buscando es que la variable aleatoria x esté entre su media y dos desviaciones estándar arriba de la media. Usando z = 2 y la tabla de probabilidad normal estándar del anexo de la guía se ve que P(z <= 2) = 0,9772. Como P(z <= 0) = 0,5000, se tiene que P(0,00 <= z <= 2,00) = P(z <= 2) - P(z <= 0) = 0,9772 – 0,5000 = 0,4772. Por tanto, la probabilidad de que x esté entre 10 y 14 es 0,4772.

**Actividades de la unidad**

1) Una encuesta de *Harris Interactive* para *InterContinental Hotel and Resorts* preguntó: "Cuando viaja al extranjero, ¿suele aventurarse usted solo para conocer la cultura o prefiere permanecer con el grupo de su tour y apegarse al itinerario?" Se encontró que 23% prefiere permanecer con el grupo de su tour (USA Today, 21 de enero de 2004).
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en seis viajeros, dos prefieran permanecer con su grupo?
   b) ¿De que, en seis viajeros, por lo menos dos prefieran permanecer con su grupo?
   c) ¿De que, en una muestra de 10 viajeros, ninguno prefiera permanecer con su grupo?
2) A la oficina de reservaciones de una aerolínea regional llegan 48 llamadas por hora.
   a) Calcule la probabilidad de recibir cinco llamadas en un lapso de 5 minutos.
   b) Estime la probabilidad de recibir exactamente 10 llamadas en un lapso de 15 minutos.
   c) Suponga que no hay ninguna llamada en espera. Si el agente de viajes necesitará 5 minutos para la llamada que está atendiendo, ¿cuántas llamadas habrá en espera para cuando él termine? ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ninguna llamada en espera?
   d) Si en este momento no hay ninguna llamada, ¿cuál es la probabilidad de que el agente de viajes pueda tomar 3 minutos de descanso sin ser interrumpido por una llamada?

**Autoevaluación**

1) Considere un experimento binomial con $n = 10$ y $p = 0.10$.
   a. Calcule $f(0)$.
   b. Calcule $f(2)$.
   c. Calcule $P(x \leq 2)$.
   d. Calcule $P(x \geq 1)$.
   e. Calcule $E(x)$.
   f. Calcule $\mathrm{Var}(x)$ y $\sigma$.

2) Considere una distribución de Poisson con $\mu = 3$.
   a. Dé la adecuada función de probabilidad de Poisson.
   b. Calcule $f(2)$.
   c. Calcule $f(1)$.
   d. Calcule $P(x \geq 2)$.

# Unidad 3:

## Muestreo, Estimaciones y

## Distribuciones muestrales

*Desarrollo de contenidos*

**Muestreo**

Es común que los compradores prueben una porción pequeña de queso antes de comprar alguno; a partir del trocito, determinan el sabor de queso completo. Lo mismo hace un químico cuando toma una muestra de whisky de una barrica, determina que es de grado 90 e infiere que todo el whisky de esa barrica es de ese grado. Si el químico examinara todo el whisky o los compradores probaran todo el queso, no quedaría nada para vender. Probar todo el producto es innecesario y a menudo, destructivo. Para determinar las características del todo, tenemos que muestrear sólo una porción.

Supongamos que, como director de personal de un gran banco, usted necesita escribir un informe que describa a todos aquellos empleados que han dejado voluntariamente la compañía en los últimos 10 años. Sería muy difícil localizar a estas personas. No se les puede localizar fácilmente como grupo, pues muchas han muerto, se han mudado o han adquirido un nuevo nombre al casarse. ¿Cómo podría escribir el informe? La mejor idea es localizar una muestra representativa y entrevistarla con el fin de generalizar con respecto a todo el grupo.

El tiempo también es un factor importante cuando los administradores requieren obtener información rápidamente para ajustar una operación o modificar una política. Imaginemos una máquina automática que clasifica miles de piezas de correo diariamente. ¿Por qué esperar el resultado de todo

un día para verificar que la máquina funcione correctamente (es decir, para comprobar si las características de población son las requeridas por el servicio postal)? En vez de ello, se toman muestras a intervalos específicos y, si es necesario, la máquina puede ajustarse inmediatamente.

Algunas veces es posible y práctico examinar a cada persona o elemento de la población que deseamos describir. Esta acción se conoce como enumeración completa o censo. Se recurre al muestreo cuando no es posible contar o medir todos los elementos de la población.

Los especialistas en estadística usan la palabra **población** para referirse no sólo a personas sino a todos los elementos que han sido escogidos para su estudio. En los casos que acabamos de mencionar, las poblaciones son todo el queso del trozo, todo el whisky de la barrica, todos los empleados del gran banco que por propia voluntad se fueron en los últimos 10 años, y todo el correo clasificado por la máquina automática desde la verificación anterior de la muestra. Los especialistas en estadística emplean la palabra **muestra** para describir una porción escogida de la población.

**Tipos de muestreo**

Existen dos métodos para seleccionar muestras de poblaciones:

- Muestreo no aleatorio o de juicio
- Muestreo aleatorio o de probabilidad

En el muestreo de probabilidad, todos los elementos de la población tienen la oportunidad de ser escogidos para la muestra. En el muestreo de juicio, se emplea el conocimiento y la opinión personal para identificar a los elementos de la población que deben incluirse en la muestra. Una muestra seleccionada por muestreo de juicio se basa en la experiencia de alguien con la población. Un guardabosques, por ejemplo, reuniría una muestra de juicio si decidiera con anticipación las zonas de una gran área arbolada que recorrería para estimar la cantidad de madera que podría obtenerse. Algunas veces, una muestra de juicio se usa como guía o muestra tentativa para decidir cómo tomar una muestra aleatoria más adelante. El riguroso análisis estadístico que puede llevarse a cabo a partir de muestras aleatorias, no puede ser efectuado con muestras de juicio. Son más cómodas y pueden usarse con éxito, aunque no podamos medir su validez. No debe perderse de vista que, si un estudio recurre al muestreo de juicio a costa de perder un grado importante de representatividad, la comodidad habrá costado un precio demasiado alto.

**Estimaciones**

Todo el mundo hace estimaciones. Cuando está por cruzar una calle, hace una estimación de la velocidad del automóvil que se acerca, de la distancia que hay entre usted y el auto y de su propia velocidad. Habiendo hecho rápidamente todas estas estimaciones, usted decide si espera, camina o corre.

Los administradores también deben hacer estimaciones rápidas. El resultado de estas estimaciones puede afectar sus organizaciones de manera tan seria como el resultado de su decisión de cruzar la calle. Los jefes de departamento de una universidad hacen estimaciones acerca de las inscripciones para el semestre siguiente en las materias. Los directores de crédito estiman si un cliente pagará o no sus débitos. Los futuros compradores de casa hacen estimaciones concernientes al comportamiento de las tasas de interés de los préstamos hipotecarios. Todas estas personas hacen estimaciones sin preocuparse de si son científicas o no, pero con la esperanza de que las estimaciones tengan una semejanza razonable con el resultado.

Los administradores utilizan estimaciones porque, hasta en los asuntos más triviales, deben tomar decisiones racionales sin contar con la información pertinente completa y con una gran incertidumbre de lo que el futuro pueda deparar. Como ciudadanos instruidos y profesionales, podremos hacer estimaciones más útiles si aplicamos las técnicas descritas en esta guía.

**Distribuciones muestrales**

Si consideramos que la media muestral x es el estimador puntual de la media poblacional u y que la proporción muestral p es el estimador puntual de la proporción poblacional p y que ambos estimadores son variables aleatorias, entonces se tiene una distribución de probabilidad de variable continua que puede analizarse como una distribución de probabilidad normal, de acuerdo a lo revisado en la unidad anterior de esta guía.

**Distribución muestral de la media muestral**

La distribución muestral de es la distribución de probabilidad de todos los valores de la media muestral x. Para la desviación estándar de la distribución muestral de x, se empleará la notación siguiente:

$\sigma_{\bar{x}}$ = desviación estándar de $\bar{x}$
$\sigma$ = desviación estándar de la población
$n$ = tamaño de la muestra
$N$ = tamaño de la población

Es posible demostrar que usando el muestreo aleatorio simple, la desviación estándar de x depende de si la población es finita o infinita. Las dos fórmulas para la desviación estándar son las siguientes.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE $\bar{x}$

| *Población finita* | *Población infinita* |
|---|---|
| $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ | $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |

**Actividades de la unidad**

1. El costo medio de la colegiatura en una universidad estatal de Estados Unidos es \$4260 anuales. Considere este valor como media poblacional y asuma que la desviación estándar poblacional es σ = \$900. Suponga que selecciona una muestra aleatoria de 50 universidades.

a. Presente la distribución muestral de como media muestral de la colegiatura en las 50 universidades.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra aleatoria simple proporcione una media muestral que no difiera de la media poblacional en más de $250?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra aleatoria simple proporcione una media muestral que no difiera de la media poblacional en más de $100?

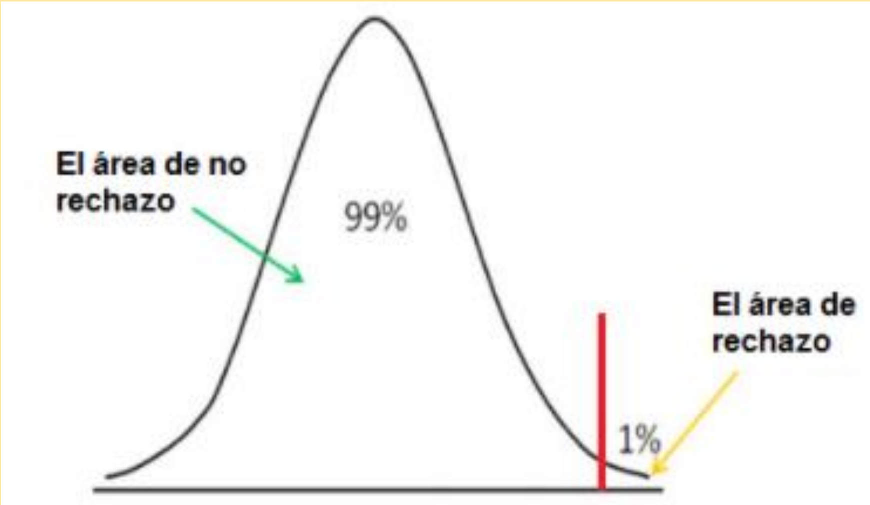
**Autoevaluación**

1. La media de una población es 200 y su desviación estándar es 50. Se va a tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se usará la media muestral para estimar la media poblacional.
   a. ¿Cuál es el valor esperado de x?
   b. ¿Cuál es la desviación estándar de x?
   c. Muestre la distribución muestral de x
   d. ¿Qué muestra la distribución muestral de x?

# Unidad 4:

## Prueba De Hipótesis

*Desarrollo de contenidos*



Cuando se hace una prueba de hipótesis se empieza por hacer una suposición tentativa acerca del parámetro poblacional. A esta suposición tentativa se le llama hipótesis nula y se denota por H0. Después se define otra hipótesis, llamada hipótesis alternativa, que dice lo contrario de lo que establece la hipótesis nula. La hipótesis alternativa se denota Ha.

En el procedimiento de pruebas de hipótesis se usan datos de una muestra para probar dos afirmaciones contrarias indicadas por H0 y Ha.

**Elaboración de las hipótesis nula y alternativa**

En algunas aplicaciones no parece obvio como formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Se debe tener cuidado en estructurar las hipótesis apropiadamente de manera que la conclusión de la prueba de hipótesis proporcione la información que el investigador o la persona encargada de tomar las decisiones desea. Se darán los lineamientos para establecer la hipótesis nula y la hipótesis alternativa en tres tipos de situaciones en las cuales se suele emplear el procedimiento de prueba de hipótesis.

**Prueba de una hipótesis de investigación**

- Como lineamiento general, una hipótesis de investigación se debe plantear como hipótesis alternativa.

**Prueba de la validez de una afirmación**

- Se suele suponer que la afirmación es verdad a menos que las evidencias muestrales indiquen lo contrario

**Prueba en situaciones de toma de decisión**

- En estas situaciones se puede plantear la hipótesis nula como una igualdad

**Resumen de las formas para las hipótesis nula y alternativa**

Las pruebas de hipótesis de este capítulo se refieren a dos parámetros poblacionales: la media poblacional y la proporción poblacional. A partir de la situación, las pruebas de hipótesis para un parámetro poblacional asumen una de estas tres formas: en dos se emplean desigualdades en la hipótesis nula y en la tercera se aplica una igualdad en la hipótesis nula. En las pruebas de hipótesis para la media poblacional, μ0 denota el valor hipotético y para la prueba de hipótesis hay que escoger una de las formas siguientes.

$$\begin{array}{lll} H_0: \mu \geq \mu_0 & H_0: \mu \leq \mu_0 & H_0: \mu = \mu_0 \\ H_a: \mu < \mu_0 & H_a: \mu > \mu_0 & H_a: \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

**Errores tipo I y II**

Las hipótesis nula y alternativa son afirmaciones opuestas acerca de la población. Una de las dos, ya sea la hipótesis nula o la alternativa es verdadera, pero no ambas. Lo ideal es que la prueba de hipótesis lleve a la aceptación de H0 cuando H0 sea verdadera y al rechazo de H0 cuando Ha sea verdadera. Por desgracia, las conclusiones correctas no siempre son posibles. Como la prueba de hipótesis se basa en una información muestral debe tenerse en cuenta que existe la posibilidad de error. La tabla ilustra las dos clases de errores comunes en una prueba de hipótesis.

ERRORES Y CONCLUSIONES CORRECTAS EN LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS

| | | Situación en la población | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ verdadera | $H_a$ verdadera |
| Conclusión | Se acepta $H_0$ | Conclusión correcta | Error tipo II |
| | Se rechaza $H_0$ | Error tipo I | Conclusión correcta |

A la probabilidad de cometer un error tipo I cuando la hipótesis nula es verdadera como igualdad se le conoce como nivel de significancia.

**Nivel de significancia**

El nivel de significancia es la probabilidad de cometer un error tipo I cuando la hipótesis nula es verdadera como igualdad.

Para denotar el nivel de significancia se usa la letra griega α (alfa), y los valores que se suelen usar para α son 0,05 y 0,01.

En la práctica la persona responsable de la prueba de hipótesis especifica el nivel de significancia. Al elegir α se controla la probabilidad de cometer un error tipo I. Si el costo de cometer un error tipo I es elevado, los valores pequeños de α son preferibles. Si el costo de cometer un error tipo I no es demasiado elevado, entonces se usan valores mayores para α. A las aplicaciones de la prueba de hipótesis en que sólo se controla el error tipo I se les llama pruebas de significancia. Muchas aplicaciones de las pruebas de hipótesis son de este tipo.

**Prueba de hipótesis para la media poblacional con σ conocida**

El caso σ conocida se refiere a aplicaciones en las que se cuenta con datos históricos o con alguna información que permita obtener buenas estimaciones de la desviación estándar poblacional antes de tomar la muestra. En tales casos, para propósitos prácticos, se considera que se conoce la desviación estándar poblacional. En esta sección se muestra cómo realizar una prueba de hipótesis para la media poblacional en el caso en que σ es conocida.

Los métodos que se presentan en esta sección dan resultados exactos si la población de la que se selecciona la muestra tiene distribución normal. En los casos en los que no sea razonable suponer que la población tiene una distribución normal, se pueden aplicar estos métodos siempre y cuando el tamaño de la muestra sea suficientemente grande.

**Estadístico de prueba**

En una prueba de hipótesis para la media poblacional en el caso σ conocida, se emplea la variable aleatoria normal estándar z como estadístico de prueba para determinar si se desvía lo suficiente del valor hipotético de μ como para justificar el rechazo de la hipótesis nula.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA EN UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA POBLACIONAL $\sigma$ CONOCIDA

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Con el valor del estadístico de prueba se puede determinar si se rechaza la hipótesis nula utilizando el método del valor-p

**Método del valor-p**

En el método del valor-p se usa el valor del estadístico de prueba z para calcular una probabilidad llamada valor-p.

Un valor-*p* es una probabilidad que aporta una medida de una evidencia suministrada por la muestra contra la hipótesis nula. Valores-*p* pequeños indican una evidencia mayor contra la hipótesis nula.

El valor-p se usa para determinar si la hipótesis nula debe ser rechazada.

REGLA PARA EL RECHAZO USANDO EL VALOR-*p*

Rechazar $H_0$ si el valor-$p \leq \alpha$

**Pasos en las pruebas de hipótesis**

**Paso 1.** Dar la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.
**Paso 2.** Especificar el nivel de significancia.
**Paso 3.** Recabar los datos muestrales y calcular el valor del estadístico de prueba.

*Método del valor-p*

**Paso 4.** Emplear el valor del estadístico de prueba para calcular el valor-*p*.
**Paso 5.** Rechazar $H_0$ si el valor-$p \leq \alpha$.

**Actividades de la unidad**

Considere la prueba de hipótesis siguiente:

$$H_0: \mu = 15$$
$$H_a: \mu \neq 15$$

En una muestra de 50, la media muestral fue 14.15. La desviación estándar poblacional es 3.

a. Calcule el valor del estadístico de prueba.
b. ¿Cuál es el valor-*p*?
c. Use $\alpha = 0.05$, ¿cuál es su conclusión?
d. ¿Cuál es la regla de rechazo si se usa el método del valor crítico? ¿Cuál es su conclusión?

## Autoevaluación

Considere la prueba de hipótesis siguiente:

$$H_0: \mu \leq 25$$
$$H_a: \mu > 25$$

En una muestra de 40, la media muestral fue 26.4. La desviación estándar poblacional es 6.

a. Calcule el valor del estadístico de prueba.
b. ¿Cuál es el valor-$p$?
c. Use $\alpha = 0.01$, ¿cuál es su conclusión?
d. ¿Cuál es la regla de rechazo si se usa el método del valor crítico? ¿Cuál es su conclusión?

**Solucionario**

**Solucionario a las actividades**

**UNIDAD 1**

1. $\binom{50}{4} = \frac{50!}{\;} = \frac{50\ 49\ 48\ 47}{\;} = 230\ 300$

2. **a.** Con el método de la frecuencia relativa

   $P$(California) $= 1\ 434/2\ 374 = 0.60$

   **b.** Cantidad que no es de ninguno de los cuatro estados

   $= 2\ 374 - 1\ 434 - 390 - 217 - 112$

   $= 221$

   $P$(Ninguno de los cuatro estados) $= 221/2\ 374 = 0.09$

   **c.** $P$(No en etapas iniciales) $= 1 - 0.22 = 0.78$

   **d.** Estimación de la cantidad de empresas de Massachusetts en etapas iniciales de desarrollo $= (0.22)390 \approx 86$

   **e.** Si se supone que las cantidades otorgadas no difieren de acuerdo con los estados, se puede multiplicar la probabilidad de que una cantidad sea otorgada a Colorado por el total del capital de riesgo para obtener una estimación.

   Estimación de la cantidad destinada a Colorado $= (112/2\ 374)(\$32.4)$

   $= \$1.53$ miles de millones

   *Nota del autor:* La cantidad real otorgada a Colorado fue $1.74 miles de millones

**UNIDAD 2**

1. **a.** 0.2789
   **b.** 0.4181
   **c.** 0.0733

2. **a.** $\mu = 48(5/60) = 4$

   $$f(3) = \frac{4^3e^{-4}}{3!} = \frac{(64)(0.0183)}{6} = 0.1952$$

   **b.** $\mu = 48(15/60) = 12$

   $$f(10) = \frac{12^{10}e^{-12}}{10!} = 0.1048$$

   **c.** $\mu = 48(5/60) = 4$; después de 5 minutos habrá 4 llamadas en espera

   $$f(0) = \frac{4^0e^{-4}}{0!} = 0.0183$$; la probabilidad de que no haya ninguna llamada en espera después de 5 minutos es 0.0183

   **d.** $\mu = 48(3/60) = 2.4$

   $$f(0) = \frac{2.4^0e^{-2.4}}{0!} = 0.0907$$; la probabilidad de que no haya ninguna interrupción en 3 minutos es 0.0907

**UNIDAD 3**

1. **a.** Normal con $E(\bar{x}) = 4\,260$ y $\sigma_{\bar{x}} = 127.28$
   **b.** 0.95
   **c.** 0.5704

**UNIDAD 4**

1. **a.** $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{14.15 - 15}{3/\sqrt{50}} = -2.00$
   **b.** Valor-$p = 2(0.0228) = 0.0456$
   **c.** Valor-$p \leq 0.05$, rechazar $H_0$
   **d.** Rechazar $H_0$ si $z \leq -1.96$ o $z \geq 1.96$
   $-2.00 \leq -1.96$, rechazar $H_0$

**Solucionario a la autoevaluación.**

**UNIDAD 1**

1. $$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)(3\cdot2\cdot1)} = 20$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ABC | ACE | BCD | BEF |
| ABD | ACF | BCE | CDE |
| ABE | ADE | BCF | CDF |
| ABF | ADF | BDE | CEF |
| ACD | AEF | BDF | DEF |

2. $P(E_1) = 0.40$, $P(E_2) = 0.26$, $P(E_3) = 0.34$
   Se usó el método de la frecuencia relativa

**UNIDAD 2**

1. **a.** $f(0) = 0.3487$
   **b.** $f(2) = 0.1937$
   **c.** 0.9298
   **d.** 0.6513
   **e.** 1
   **f.** $\sigma^2 = 0.9000$, $\sigma = 0.9487$

2. **a.** $f(x) = \dfrac{3^x e^{-3}}{x!}$
   **b.** 0.2241
   **c.** 0.1494
   **d.** 0.8008

**UNIDAD 3**

1. **a.** 200
   **b.** 5
   **c.** Normal con $E(\bar{x}) = 200$ y $\sigma_{\bar{x}} = 5$
   **d.** La distribución de probabilidad de $\bar{x}$

**UNIDAD 4**

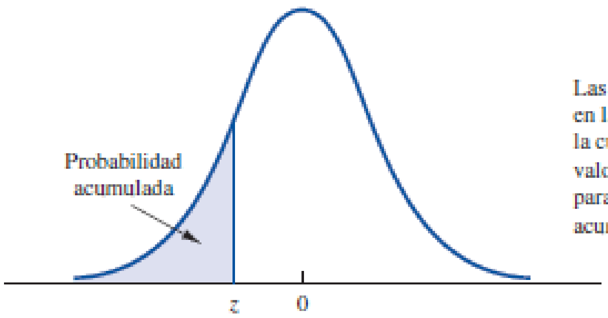
1. **a.** $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{26.4 - 25}{6/\sqrt{40}} = 1.48$
   **b.** Usando la tabla de la distribución normal estándar con $z = 1.48$: valor-$p = 1.0000 - 0.9306 = 0.0694$
   **c.** Valor-$p > 0.01$, no rechazar $H_0$
   **d.** Rechazar $H_0$ si $z \geq 2.33$
   $1.48 < 2.33$, no rechazar $H_0$

## GLOSARIO

- Probabilidad Medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento.
- Experimento Proceso para generar resultados bien definidos.
- Espacio muestral Conjunto de todos los resultados experimentales.
- Punto muestral Un elemento del espacio muestral. Un punto muestral que representa un resultado experimental.
- Variable aleatoria Una descripción numérica del resultado de un experimento.
- Variable aleatoria discreta Una variable aleatoria que puede asumir un número finito de valores o un número infinito de valores de una sucesión.
- Variable aleatoria continua Ésta toma cualquier valor de un intervalo o de una colección de intervalos.
- Distribución de probabilidad Descripción de cómo se distribuyen las probabilidades entre los valores de una variable aleatoria.
- Hipótesis nula Hipótesis que en una prueba de hipótesis se supone tentativamente verdadera.
- Hipótesis alternativa Hipótesis que se concluye verdadera cuando se rechaza la hipótesis nula.
- Error tipo I El error de rechazar H0 cuando es verdadera.
- Error tipo II El error de aceptar H0 cuando es falsa.
- Nivel de significancia Probabilidad de cometer un error tipo I cuando la hipótesis nula es verdadera como igualdad.

# ANEXOS

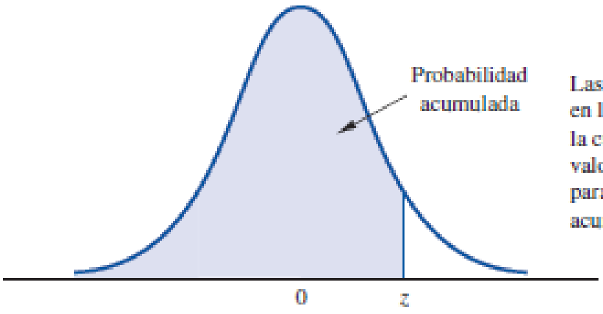
**TABLA 1** PROBABILIDADES ACUMULADAS EN LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR




Las entradas que aparecen en la tabla dan el área bajo la curva y a la izquierda del valor de $z$. Por ejemplo, para $z = -0.85$, la probabilidad acumulada es 0.1977.

| $z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| −2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| −2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| −2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| −2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| −2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| −2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| −2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| −2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| −2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| −2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| −1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| −1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| −1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| −1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| −1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| −1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| −1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| −1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| −1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| −1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| −0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| −0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| −0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| −0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| −0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| −0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| −0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| −0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| −0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| −0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |

**TABLA 1** PROBABILIDADES ACUMULADAS EN LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR (*continuación*)




Las entradas que aparecen en la tabla dan el área bajo la curva y a la izquierda del valor de $z$. Por ejemplo, para $z = 1.25$, la probabilidad acumulada es 0.8944.

| $z$ | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9913 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9986 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |

Marzo 2023 - CID - Centro de Investigación y Desarrollo

Formato: PDF
Tamaño: A4
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acceso: World Wide Web
libros.ciencialatina.org
editorial@ciencialatina.org
Atención por WhatsApp al +52 22 2690 3834

ISBN: 978-99925-13-77-4
9 789992 513774