



Universidad de Oviedo

**Universidad de Oviedo**

FACULTAD DE CIENCIAS

**AGUJEROS NEGROS**

*Trabajo de Fin de Grado*

Autor:  
Álvaro Arboleya Megido

Junio 2022

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>El agujero negro de Schwarzschild</b>	<b>4</b>
2.1	Teorema de Birkhoff y masa del agujero . . . . .	4
2.1.1	La masa del agujero . . . . .	5
2.2	Singularidades físicas y de coordenadas . . . . .	7
2.3	Coordenadas de Kruskal . . . . .	9
2.4	Diagrama de Penrose-Carter . . . . .	11
2.5	Horizontes de sucesos . . . . .	14
2.5.1	Horizontes de Killing . . . . .	14
2.5.2	Gravedad de superficie . . . . .	15
2.6	Colapso gravitacional. Cota de Buchdahl . . . . .	19
<b>3</b>	<b>El agujero negro de Reissner-Nordström</b>	<b>24</b>
3.1	Derivación de la solución de Reissner-Nordström . . . . .	24
3.2	La carga eléctrica . . . . .	26
3.3	La métrica de Reissner-Nordström . . . . .	27
3.3.1	$M^2 < Q^2$ . La hipótesis del censor cósmico . . . . .	27
3.3.2	$M^2 = Q^2$ . Agujeros negros extremos . . . . .	27
3.3.3	$M^2 > Q^2$ . . . . .	28
3.4	Coordenadas de Kruskal . . . . .	28
3.5	Diagrama de Penrose-Carter . . . . .	30
3.6	Gravedad de superficie y agujeros negros extremos . . . . .	33
<b>4</b>	<b>El agujero negro de Kerr</b>	<b>34</b>
4.1	La métrica de Kerr-Newman . . . . .	36
4.2	Singularidades, horizontes y ergosferas . . . . .	37
4.2.1	La singularidad . . . . .	37
4.2.2	Los horizontes de sucesos . . . . .	38
4.2.3	La ergosfera . . . . .	38
4.3	Arrastre de sistemas de referencia inerciales . . . . .	39
4.4	Vectores y horizontes de Killing . . . . .	42
4.5	Coordenadas nulas entrantes y salientes . . . . .	43

4.6	Diagrama de Penrose-Carter . . . . .	45
4.6.1	Horizontes de Cauchy . . . . .	48
4.6.2	Curvas causales cerradas . . . . .	49
4.7	Procesos de Penrose . . . . .	50
4.8	Gravedad de superficie . . . . .	53
4.9	2-esfera de bifurcación . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Los agujeros negros “reales”</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Termodinámica de los agujeros negros</b>	<b>59</b>
6.1	El teorema de no pelo . . . . .	59
6.2	Primera ley . . . . .	60
6.3	Segunda ley . . . . .	62
6.3.1	La masa irreducible y el teorema del área de Hawking . . . . .	62
6.3.2	La segunda ley generalizada . . . . .	64
6.3.3	Radiación Hawking . . . . .	66
6.4	Ley cero . . . . .	67
6.5	Tercera ley . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Resumen</b>	<b>71</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Hipersuperficies</b>	<b>74</b>
A.1	Hipersuperficies nulas . . . . .	74
<b>B</b>	<b>Métrica con simetría esférica</b>	<b>76</b>
<b>C</b>	<b>Geodésicas radiales en la métrica de Schwarzschild</b>	<b>80</b>
<b>D</b>	<b>Espacios-tiempo estáticos y estacionarios</b>	<b>83</b>
<b>E</b>	<b>Demostraciones</b>	<b>85</b>
E.1	Demostración 1 . . . . .	85
E.2	Demostración 2 . . . . .	86
E.3	Demostración 3 . . . . .	86
E.4	Demostración 4 . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción

Quizá una de las más exitosas aplicaciones de la teoría de la relatividad general planteada por Einstein en 1915 sea la existencia de los agujeros negros. Sin embargo, la idea de un cuerpo tan denso que ni tan siquiera la luz sea capaz de escapar de su gravedad es bastante anterior a la relatividad. En 1783, John Michell describió en un artículo enviado a la Royal Society cómo un cuerpo del tamaño del Sol pero 500 veces más masivo tendría una velocidad de escape en su superficie superior a la de la luz, y por lo tanto sería invisible. Con el paso de los años, al ganar peso la visión de la luz como una onda sin masa, la idea fue descartada al no tener cabida en la descripción gravitatoria de Newton. No fue hasta la publicación de la relatividad general que el concepto volvería cobrar sentido. La teoría de Einstein daba al fin un trato no ambiguo a la relación de la luz con la gravedad, permitiendo la existencia de estos objetos .

A lo largo de esta monografía, se pretende describir el comportamiento de los agujeros negros, introduciendo algunos de los conceptos fundamentales asociados a ellos, tales como el horizonte de sucesos, las ergosferas o la gravedad de superficie. Abordaremos la creación de los agujeros negros a partir del colapso gravitacional, buscaremos nuevos sistemas de coordenadas que nos permitan estudiar lo que ocurre más allá del horizonte de sucesos, y discutiremos incluso la posible existencia de universos paralelos accesibles a través de la singularidad. Comenzaremos por el estudio del agujero negro más sencillo, el de Schwarzschild, e iremos generalizando la solución hasta llegar al agujero estacionario más general en el que podemos pensar, el de Kerr-Newman. Por último, abordaremos la descripción termodinámica de los agujeros negros, llegando a cuestiones aún abiertas a día de hoy, como la interpretación de su entropía.

## Capítulo 2

# El agujero negro de Schwarzschild

En el contexto de la relatividad general, el agujero negro de Schwarzschild es la solución en el vacío de las ecuaciones de campo de Einstein cuando se imponen las condiciones de simetría esférica y estaticidad (campo generado por una masa esférica y sin rotación). La métrica de Schwarzschild, dada por la ecuación (2.1), fue una de las primeras soluciones exactas de las ecuaciones de la relatividad general, y constituye el agujero negro más simple en el que podemos pensar.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.1)$$

Un simple vistazo a esta métrica nos hace darnos cuenta de que podemos distinguir dos comportamientos diferenciados de la misma. El límite entre las dos regiones que presentan estos dos comportamientos lo constituye la superficie dada por  $r = 2M$ , valor que se conoce como el radio de Schwarzschild. Cuando  $r > 2M$ ,  $g_{tt}$  es negativo y  $g_{rr}$  es positivo. Es decir, la coordenada temporal  $t$  es de tipo tiempo, y la coordenada  $r$  de tipo espacio. Este es el comportamiento habitual, el que se produciría en un espacio-tiempo plano. Sin embargo, cuando nos desplazamos a la región donde  $r < 2M$ , estos comportamientos se invierten, y es ahora la coordenada radial  $r$  la que actúa como coordenada temporal y viceversa. Cabe preguntarse a partir de aquí qué implicaciones físicas tendrá este cambio de comportamiento. A lo largo de este capítulo, entre otras cosas, trataremos de dar respuesta a esta pregunta, analizaremos la estructura causal del agujero de Schwarzschild y abordaremos su origen a partir del colapso gravitacional de una estrella. Para ello, nos basaremos principalmente en los desarrollos y planteamientos mostrados en [1], [2], [3], [4], [5], [6] y [7].

### 2.1 Teorema de Birkhoff y masa del agujero

El teorema de Birkhoff establece que la de Schwarzschild es la única solución con simetría esférica posible a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. Este resultado es algo sorprendente, ya que la de Schwarzschild es una solución estática por definición. Por lo tanto, el teorema de Birkhoff nos garantiza que aunque tengamos una distribución de

energía dependiente del tiempo, mientras se mantenga la simetría esférica, la métrica del espacio-tiempo en su exterior será estática (y descrita por Schwarzschild). Una consecuencia directa del teorema de Birkhoff es que los cuerpos con simetría esférica no pueden emitir ondas gravitacionales, pues aunque tengamos una estrella con una distribución de masa pulsante, el espacio-tiempo en su exterior se mantendrá invariante y descrito por Schwarzschild.

Para demostrar este teorema, vamos utilizar como punto de partida la forma más general de la métrica de un espacio esféricamente simétrico. Se demuestra a partir de argumentos puramente geométricos (ver apéndice B) que esta métrica puede escribirse siempre del siguiente modo):

$$ds^2 = -e^{2\psi} f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

donde  $\psi(t, r)$  y  $f(t, r)$  son dos funciones sin determinar.

Para nuestro propósito, será conveniente redefinir  $f$  a través de otra función arbitraria  $m(t, r)$ , de la forma:

$$f(t, r) = 1 - \frac{2m(t, r)}{r} \quad (2.3)$$

Ahora, si aplicamos las ecuaciones de Einstein ( $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ ) a esta métrica con simetría esférica, podemos derivar las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 (-T^t_t) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 (-T^r_t) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 4\pi r f^{-1} (-T^t_t + T^r_r) \quad (2.6)$$

Si consideramos las soluciones en el vacío ( $T^{\mu\nu} = 0$ ), vemos que  $m$  es una cantidad constante, independiente de las coordenadas; y  $\psi$  sólo puede depender de la coordenada  $t$ . En consecuencia, podemos fijar  $e^{2\psi} = 1$  a través de una reparametrización de la coordenada temporal. De este modo, recuperamos la forma de la solución de Schwarzschild, que como acabamos de mostrar, es la única posible bajo estas condiciones.

### 2.1.1 La masa del agujero

A partir de las ecuaciones (2.4) y (2.5) podemos obtener una justificación de por qué hasta ahora nos hemos referido al parámetro  $M$  de la solución de Schwarzschild como la masa/energía del agujero negro, planeta o estrella que genera la métrica. La ecuación (2.5) es una ecuación de conservación, que describe que la variación de  $m$  contenida en el volumen de radio  $r$  es igual al flujo de energía a través de su superficie (dado por la componente  $T^r_t$  del tensor de energía-momento). Por su parte, la ecuación (2.4) es una

ecuación diferencial que da la masa/energía contenida en un volumen esférico de radio  $r$ . Esto se aprecia mejor integrando:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi s^2 [-T^t_t(s)] ds \quad (2.7)$$

Esta es la definición de la integral sobre un volumen esférico de una densidad  $(-T^t_t)$  con simetría esférica. Dado que  $-T^t_t$  representa la densidad de energía,  $m(r)$  se corresponderá con la energía/masa contenida en este volumen. Si consideramos que el cuerpo que genera la métrica tiene un radio  $R$ , y para  $r > R$  hay vacío, podemos definir la masa/energía total  $M$ :

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 [-T^t_t(r)] dr \quad (2.8)$$

Entonces, si nos encontramos en el exterior ( $r > R$ ), se cumple que  $M = m(r)$ , y la métrica dada por la ecuación (2.2) toma la forma de Schwarzschild. Hemos por lo tanto mostrado que el parámetro  $M$  que aparece en la métrica de Schwarzschild se corresponde con la energía/masa del objeto que origina la gravedad.

Todo parece cobrar sentido. Sin embargo, hay un problema que surge de esta definición. Y es que esta integral espacial sería correcta en un espacio-tiempo plano, pero este no es el caso en el que nos encontramos. Sabemos que la integral de volumen correcta sobre una variedad curva es la que viene definida a partir del elemento de línea propio. Para la métrica que estamos considerando, la integral propia tomaría la forma:

$$\bar{M} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d^3x \sqrt{|g'|} [-T^t_t(r)] \quad (2.9)$$

donde  $g'$  es el determinante de la métrica inducida sobre el volumen de tiempo constante sobre el que se está realizando la integral. Para el caso de Schwarzschild:

$$g'_{\mu\nu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \longrightarrow g' = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^4 \sin^2 \theta \quad (2.10)$$

De este modo, integrando sobre las direcciones espaciales obtenemos:

$$\bar{M} = \int_0^R \frac{4\pi r^2 [-T^t_t(r)]}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}} dr \quad (2.11)$$

Vemos que el denominador no diverge siempre y cuando nos movamos en valores de densidad que cumplan  $r > 2Gm(r)$ . Esta condición siempre se cumple en agujeros estacionarios, ya que como veremos en la sección 2.6, para  $r < \frac{9}{4}G$  el colapso está garantizado.

Si comparamos los resultados de las dos integrales, vemos que  $\bar{M} > M$ . De acuerdo a las ecuaciones,  $M$  es la masa que produce la interacción gravitacional con otras partículas, la que aparece en la ecuación de Schwarzschild. Es lo que se conoce como

masa/energía gravitacional.  $\bar{M}$ , por el contrario da la integral propia de la densidad de energía. El matiz entre ambas radica en que la integral propia no está teniendo en cuenta la interacción gravitatoria de la distribución.  $\bar{M}$  se corresponde a la energía que tendría toda la materia si se encontrase por separado, pero la energía que tiene al estar en el agujero es menor, ya que al estar unida presenta una menor energía potencial. Así, paradójicamente, la energía total es la que viene dada por  $M$ , y no por  $\bar{M}$ . Podemos decir que:

$$\bar{M} = M + B \quad (2.12)$$

donde  $B$  es la energía de ligadura, la energía que haría falta para desligar toda la materia que conforma la distribución y dispersarla hasta el infinito.

## 2.2 Singularidades físicas y de coordenadas

Una vez hemos visto que la de Schwarzschild es la única solución esférica posible en el vacío, vamos a estudiar más en detalle sus características. Si inspeccionamos la expresión del elemento de línea de Schwarzschild, rápidamente se aprecia que la métrica se comporta mal en  $r = 0$  y en  $r = 2M$ . Sin embargo, sin un análisis más profundo no podemos estar seguros de si estas patologías son intrínsecas del propio espacio-tiempo o si por el contrario se deben a una mala elección de coordenadas. Los coeficientes de la métrica son cantidades que dependen de las coordenadas, por lo que no sería de extrañar que en un sistema más conveniente no se produjera alguna de estas patologías. Por ejemplo, si pensamos en una variedad plana en dos dimensiones, la métrica en coordenadas esféricas toma la forma  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , que da problemas en  $r = 0$ . Sin embargo, en un espacio-tiempo plano todos los puntos son equivalentes. La geometría intrínseca del espacio-tiempo se comporta bien aquí, es el sistema de coordenadas elegido el que nos da el fallo en esta región. Dada esta posible situación, cabe preguntarse si es este el caso de las patologías en  $r = 0$  y  $r = 2M$  que nos ocupan. Pero, ¿qué propiedad del espacio-tiempo debemos tomar como criterio para diferenciar si nos encontramos en un caso u otro?

Vamos a estudiar en primer lugar la singularidad en  $r = 2M$  (que como veremos más adelante se corresponde con el horizonte de sucesos del agujero). En primer lugar, hemos de tener en cuenta que la solución de Schwarzschild es una solución en el vacío, que deja de ser válida cuando hay una distribución de materia. No podemos aplicar esta solución cuando  $r$  es menor que el radio del cuerpo que genera el campo gravitatorio. Cuando el radio de este cuerpo es mayor que el radio de Schwarzschild, esta singularidad desaparece, y la métrica no describe entonces un agujero negro, sino simplemente el campo generado por un cuerpo esférico masivo, tal como una estrella o un planeta. Pero vamos a centrarnos ahora en el caso de un agujero negro, para el que la región  $r = 2M$  sí es alcanzable. Para determinar si el radio de Schwarzschild es una zona problemática del espacio-tiempo, vamos a estudiar la trayectoria de un observador que se deja caer libre y radialmente hacia el interior del agujero desde el infinito. Estudiando la curva

geodésica que sigue el observador, se llega a obtener las siguientes expresiones para el tiempo propio  $\tau$  y la coordenada temporal  $t$  en función de  $r$  (ver apéndice C):

$$\frac{\tau}{2M} = -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} + cte. \quad (2.13)$$

$$\frac{t}{2M} = -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{2M}\right) + 1}}{\sqrt{\left(\frac{r}{2M}\right) - 1}} \right| + cte. \quad (2.14)$$

A partir de estas ecuaciones se hace claro que llegar al radio de Schwarzschild requiere un intervalo de tiempo de coordenadas  $t$  infinito. Es decir, alguien situado fuera del agujero nunca vería al observador cruzar el horizonte. Sin embargo, el intervalo de tiempo propio (el tiempo que mide el observador en caída libre) sí que es finito. Y es este el tiempo relevante. Que el intervalo de tiempo propio sea finito significa que el observador puede alcanzar sin problemas el radio de Schwarzschild. Ninguna elección de sistema de coordenadas puede privarlo de hacerlo.

Hemos visto que no existe ningún problema físico para alcanzar el radio de Schwarzschild. En este sentido, tenemos una buena razón para argumentar que no hay nada singular en la región  $r = 2M$ . Pero antes de poder llegar a esa conclusión, cabe preguntarse si las fuerzas de marea que el observador siente aquí divergen. Es decir, si la curvatura del espacio-tiempo es singular en este punto. Si la curvatura diverge, este es un claro signo de que algo va mal, de que nos encontramos ante una singularidad. La curvatura es medida de forma covariante por el tensor de curvatura de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Sin embargo, al tratarse de un tensor, su definición depende del sistema de coordenadas en que se calcule. Lo que nosotros buscamos es una cantidad escalar (independiente de las coordenadas) que nos de información sobre la curvatura del espacio-tiempo físico, y sobre si éste es o no singular en un punto. En ese sentido, podemos construir varias cantidades escalares a partir del tensor de Riemann:  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ,  $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\lambda\tau} R_{\lambda\tau}{}^{\mu\nu}$ , etc. -(donde  $R_{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci,  $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$ ). Si alguna de estas cantidades escalares diverge cuando nos acercamos a un punto de la variedad, este punto es una singularidad de la curvatura. Ésta no es sin embargo una condición necesaria, es posible que alguno de los escalares sea regular en una región singular. Debido a ello, es difícil en general demostrar que un punto no es singular. Para nuestro propósito, en la métrica de Schwarzschild vamos a estudiar el escalar de Kretschmann, definido a partir del tensor de curvatura como:

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.15)$$

Si calculamos el escalar de curvatura para el agujero negro de Schwarzschild obtenemos el siguiente resultado, que únicamente depende de la coordenada  $r$ :

$$K = \frac{48M^2}{r^6} \quad (2.16)$$

El escalar es manifiestamente regular en  $r = 2M$  y únicamente diverge para  $r = 0$ . Es claro entonces a partir de este resultado que  $r = 0$  es una singularidad intrínseca del propio espacio-tiempo, y que ninguna elección alternativa de coordenadas podrá conseguir librarnos de ella. No podemos asegurar sin embargo que este sea el caso de  $r = 2M$ , donde el escalar de Kretschmann no diverge. Podemos comprobar también que ninguno de los otros escalares que hemos definido a partir del tensor de Riemann presenta problema alguno en esta región, y comenzamos a pensar entonces seriamente que la patología se debe exclusivamente a la elección de coordenadas. Visto esto, la mejor opción será tratar de buscar algún sistema de coordenadas alternativo que nos permita deshacernos del mal comportamiento aquí. Si lo encontramos, habremos demostrado entonces explícitamente que  $r = 2M$  no es singular. Existen varios sistemas de coordenadas que nos permiten conseguir este objetivo, tales como las coordenadas de Eddington-Finkelstein o las de Lemaître por ejemplo. Ya no queda duda alguna por lo tanto de que el radio de Schwarzschild no constituye una singularidad física (aunque, como veremos más adelante, sí presenta un comportamiento interesante).

## 2.3 Coordenadas de Kruskal

Ha quedado patente que la solución de Schwarzschild se comporta bien en  $r = 2M$ , y que lo único que nos hace falta para poder estudiar más allá de esta región es realizar una transformación de coordenadas a un sistema más conveniente. Existen varios sistemas de coordenadas que lo permiten, cada uno más o menos aconsejable dependiendo del objeto de estudio. En nuestro caso, vamos a utilizar las conocidas como coordenadas de Kruskal.

Vamos a considerar un fotón que se mueve radialmente ( $d\theta = d\phi = 0$ ) sobre un espacio-tiempo dado por la métrica de Schwarzschild. Dado que se trata de una partícula sin masa, su movimiento debe cumplir la condición  $ds^2 = 0$ . A partir de aquí, es fácil despejar que para una partícula cayendo hacia el agujero la trayectoria cumple  $dv = 0$ , mientras que para una alejándose la condición es  $du = 0$ , donde  $u$  y  $v$  se definen como:

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^* \quad (2.17)$$

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (2.18)$$

Las nuevas coordenadas  $u$  y  $v$  se conocen como tiempo retardado y tiempo avanzado respectivamente. Haciendo esta transformación, es bastante directo hallar que la métrica de Schwarzschild toma la forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.19)$$

donde  $r$  ya no es una coordenada, sino que es una función definida implícitamente a partir de  $u$  y  $v$  como  $r^*(r) = \frac{1}{2}(v - u)$ .

Sin embargo, en este nuevo sistema de coordenadas la singularidad en  $r = 2M$  aún no ha desaparecido, sino que sólo se ha desplazado a la región en que  $r^* = -\infty$ . Será necesario hacer una transformación más para poder deshacernos de ella. Para buscar este nuevo sistema de coordenadas, vamos a estudiar la vecindad de la singularidad. En un entorno lo suficientemente próximo a  $r = 2M$ , podemos aproximar  $r^*$  como  $r^* \simeq 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$ , y a partir de esta nueva relación, podemos despejar  $\frac{r}{2M} \simeq 1 \pm e^{\frac{v-u}{4M}}$  (donde el signo superior corresponde a la región  $r > 2M$  y el inferior a  $r < 2M$ ). De este modo, es un cálculo directo deducir que en las proximidades de  $r = 2M$  la métrica toma la forma:

$$ds^2 \simeq \mp (e^{-\frac{u}{4M}} du) (e^{\frac{v}{4M}} dv) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.20)$$

donde de nuevo el signo superior se corresponde con  $r > 2M$  y el inferior con  $r < 2M$ .

Esta expresión nos motiva directamente a definir unas nuevas coordenadas  $U$  y  $V$ , que se denominan coordenadas nulas de Kruskal:

$$U = \mp e^{\frac{-u}{4M}} \quad V = e^{\frac{v}{4M}} \quad (2.21)$$

Así, la singularidad de la métrica se absorbe dentro del nuevo sistema de coordenadas, de forma que ésta es manifiestamente regular en  $r = 2M$ . El horizonte de sucesos queda ahora definido por  $UV = 0$ , y no presenta ya ninguna patología. Tras la transformación, la métrica de Schwarzschild está ahora dada por:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\omega^2 \quad (2.22)$$

La patología en  $r = 2M$  desaparece, pero como era de esperar no ocurre así con  $r = 0$ , ya que como habíamos dicho anteriormente, esta es una singularidad intrínseca del propio espacio-tiempo, y no hay sistema de coordenadas alguno que nos permita evitarla.

Algo a tener en cuenta con estas nuevas coordenadas es que al definir  $u$  y  $v$  lo habíamos hecho de forma que fuesen constantes a lo largo de los rayos de luz radiales salientes y entrantes respectivamente. A la vista de la definición de  $U$  y  $V$  dada en la ecuación (2.21), es claro que estas coordenadas también cumplen esta propiedad. Veremos que esto será relevante más adelante.

Además, a partir de las definiciones de las nuevas coordenadas también podemos despejar la relación

$$e^{\frac{r}{2M}} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) = -UV \quad (2.23)$$

que nos muestra que las superficies de  $r$  constante están definidas en las coordenadas nulas de Kruskal por ecuaciones de la forma  $UV = cte$ . Esto da lugar a soluciones hiperbólicas de dos ramas, es decir, para cada superficie de  $r$  constante aparecen dos copias en el espacio de Kruskal. Este hecho nos revela la existencia de una variedad mayor de la que nos permitían describir las coordenadas originales de Schwarzschild. Si observamos la figura 2.1, vemos que la porción de la variedad que nos daban las coordenadas esféricas se corresponde con las regiones I y II, pero además de esas existen

otras dos regiones análogas a ellas, que denominamos III y IV. Las coordenadas iniciales de Schwarzschild describían sólo una parte de la variedad, constituían un parche parcial de todo el espacio-tiempo. Al considerar las coordenadas de Kruskal, hemos extendido analíticamente el límite que nos imponía el sistema de coordenadas anterior, de forma que ahora logramos cubrir la variedad completa. Veremos esto en más detalle en la siguiente sección.

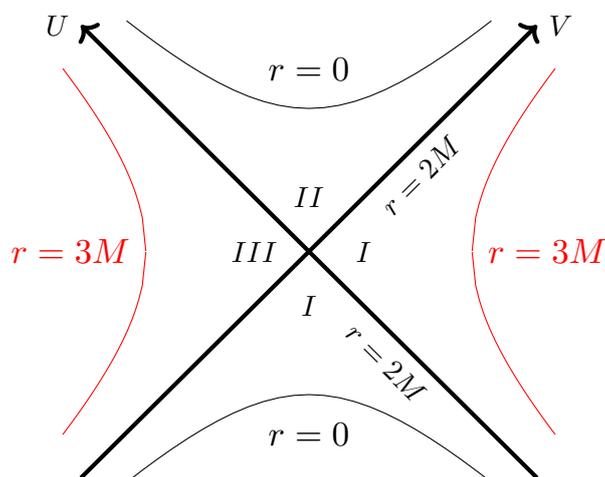


Figura 2.1: Representación del agujero negro de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal.

Al observar la figura 2.1 hay que tener en cuenta que en este diagrama sólo estamos representando las coordenadas radial y temporal, por lo que en realidad cada punto de la figura está representando una 2-esfera. Además, cabe preguntarse acerca de las trayectorias que puede seguir un observador en este espacio-tiempo. Sabemos que estas trayectorias estarán limitadas por la condición  $ds^2 < 0$ , que dada la forma de la métrica de Kruskal (ecuación (2.20)) se reduce a:

$$dUdV > 0 \quad (2.24)$$

Todas las trayectorias temporales (aquellas que puede seguir un observador) deben cumplir esta condición. Recordemos que las trayectorias tipo luz estaban dadas por  $dUdV = 0$ , así que todas las posibles trayectorias de un observador estarán comprendidas en el interior del cono formado por las líneas  $U$  y  $V$  constantes. Es lo que se conoce como cono de luz.

## 2.4 Diagrama de Penrose-Carter

Buscamos ahora estudiar la estructura causal del espacio tiempo de Schwarzschild. Para ello vamos a utilizar lo que se conoce como diagrama de Penrose-Carter. Las coordenadas nulas de Kruskal que hemos visto ya nos permitirían realizar este estudio, pero en este

sistema el espacio-tiempo ocupa un dominio infinito. Nos gustaría poder encontrar una transformación que no afecte a las cualidades de las coordenadas nulas de Kruskal que nos interesan (propagación de rayos de luz a  $U$  o  $V$  constantes), pero que nos permita mapear todo el espacio-tiempo en una región finita del espacio de coordenadas. Esto se consigue a través de la transformación:

$$\tilde{U} = \arctan U, \quad \tilde{V} = \arctan V \quad (2.25)$$

Evidentemente, con este cambio los rayos de luz entrantes y salientes siguen propagándose a  $\tilde{V} = cte.$  y  $\tilde{U} = cte.$  respectivamente, y siguen siendo el límite de las posibles trayectorias que puede seguir un observador. Sin embargo, ahora el dominio se ha compactificado, y  $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Esto nos introduce singularidades de coordenadas en los bordes del diagrama, pero estas no son de ninguna relevancia para nuestro propósito, por lo que podemos ignorarlas durante este análisis.

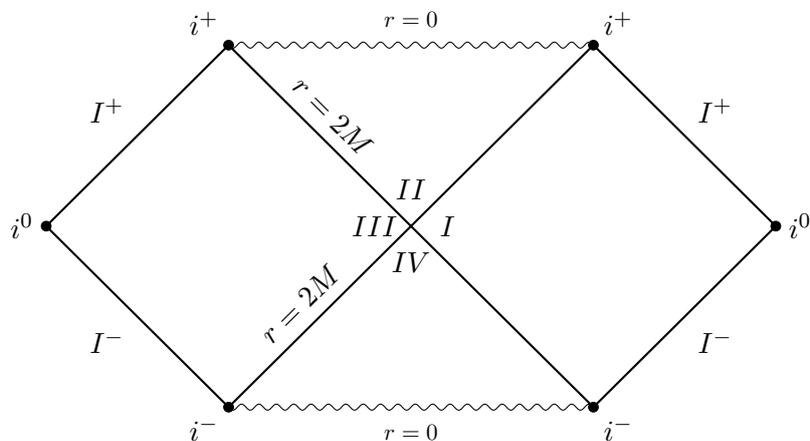


Figura 2.2: Diagrama de Penrose-Carter del agujero negro de Schwarzschild.

Ahora, la singularidad en  $r = 0$  que antes estaba dada por  $UV = 1$ , está situada en las rectas  $\tilde{U} + \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}$ . Además de por la singularidad, el diagrama está limitado por las superficies descritas por las 4 rectas  $\tilde{U} = \pm \frac{\pi}{2}$  y  $\tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}$ , cada una de las cuales representa una región particular del espacio-tiempo:

- Las superficies  $\tilde{U} = \frac{\pi}{2}$  y  $\tilde{V} = \frac{\pi}{2}$  se denominan infinitos futuros nulos, y se denotan como  $I^+$ . A partir del diagrama, podemos ver que contienen los puntos finales de todas las geodésicas nulas salientes del agujero ( $\tilde{U} = cte.$ ). Es de esta propiedad de donde toman su nombre.
- Por la misma razón, llamamos infinitos pasados nulos ( $I^-$ ) a las superficies  $\tilde{U} = -\frac{\pi}{2}$  y  $\tilde{V} = -\frac{\pi}{2}$ , ya que contienen los puntos de origen de todas las geodésicas nulas entrantes.

- Los puntos en los que las superficies  $I^\pm$  intersecan:  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = \pm (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ , se denominan infinitos de tipo espacio, y se denotan  $i^0$ . Estos puntos contienen los puntos finales de todas las geodésicas de tipo espacio.
- Los puntos  $(0, \frac{\pi}{2})$  y  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  son los infinitos futuros de tipo tiempo ( $i^+$ ), ya que en ellos terminan todas las geodésicas de tipo tiempo que no van a dar a la singularidad. Y, de forma análoga,  $(0, -\frac{\pi}{2})$  y  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  son los infinitos pasados de tipo tiempo ( $i^-$ ), que contienen todos los puntos de origen de las geodésicas de tipo tiempo que no provienen de la región IV.

De este modo quedan etiquetados todos los puntos y regiones del espacio-tiempo de Schwarzschild, representados en un diagrama compacto que se conoce como diagrama de Penrose-Carter.

Podemos apreciar en la figura 4.7 las 4 regiones del espacio-tiempo que habíamos identificado anteriormente. Siguiendo este diagrama, el tiempo avanza en el sentido positivo del eje vertical, y los rayos de luz describen trayectorias situadas a  $45^\circ$ . Por lo tanto, cualquier observador deberá desplazarse en trayectorias con una inclinación menor a  $45^\circ$  con respecto al eje vertical (y orientadas en sentido positivo). Este hecho pone de manifiesto una de las características principales de los agujeros negros: el horizonte de sucesos, que en este caso se encuentra en  $r = 2M$ . Mientras el observador se encuentra en la región I, su trayectoria puede llevarle tanto a alcanzar el horizonte de sucesos como el futuro infinito nulo. Es decir, el observador puede elegir escapar del agujero negro. Sin embargo, una vez ha cruzado el horizonte de sucesos hacia la región II, todas sus trayectorias posibles lo llevan inevitablemente hacia la singularidad en  $r = 0$ , y lo mismo ocurre para todas las señales que este pueda tratar de enviar hacia afuera. Una vez se cruza el horizonte, el destino final es siempre la singularidad, sin posibilidad de rehacer los pasos o comunicarse con el exterior de nuevo (si será posible, sin embargo, recibir señales procedentes de la región I). Por el contrario, en las regiones III y IV el comportamiento es el opuesto. Aquí las trayectorias están invertidas: mientras que en la región II el paso del tiempo fuerza al observador a caer en la singularidad, en la IV éste es expulsado inevitablemente de ella hacia la región III y no podrá regresar. Tampoco será posible recibir ningún tipo de señal del exterior en la región IV. Decimos entonces que esta región es un agujero blanco.

Si observamos las superficies  $r = 2M$ , vemos que no tienen el mismo comportamiento. Ambas son superficies atravesables en una sola dirección, pero tienen un comportamiento ligeramente distinto. Mientras que desde la región II no se puede escapar hacia el exterior pero sí recibir información de afuera, lo que ocurre en la IV es exactamente lo contrario: no podemos evitar ser expulsados hacia afuera del agujero, ni tampoco recibir información del exterior. Es por eso que a la superficie situada entre I y II se denomina horizonte futuro y la que separa IV y I horizonte pasado.

## 2.5 Horizontes de sucesos

A lo largo de la descripción del agujero negro de Schwarzschild hemos hablado en repetidas ocasiones del horizonte de sucesos. Sin embargo, hasta ahora no hemos dado una definición rigurosa de este concepto. En general, un horizonte de sucesos es una hipersuperficie que separa aquellos puntos del espacio-tiempo que están conectados con el infinito a través de una trayectoria de tipo tiempo de aquellos que no lo están. En este caso, cuando hablamos del infinito nos referimos a una región infinitamente alejada del agujero, tal que puede ser aproximadamente descrita por Minkowski. Como hemos visto ya para el caso del agujero de Schwarzschild, puede existir más de una región asintóticamente plana del espacio-tiempo, por lo que correspondientemente podrá existir más de un horizonte de sucesos.

A partir de la definición, podemos ver que una vez cruzamos el horizonte de sucesos desde la región de puntos conectados con el infinito hacia aquella de los que no lo están, ya no hay retorno posible a través de una trayectoria de tipo tiempo. Dada esta propiedad, una característica definitoria de un horizonte de sucesos será el hecho de ser una hipersuperficie nula (La definición de una hipersuperficie nula y la derivación de sus consecuentes propiedades se pueden encontrar en el apéndice A). Otra forma de verlo sería imaginar que estamos cerca de la región asintóticamente plana y enviamos un rayo de luz hacia el infinito futuro nulo. Continuamos realizando este proceso acercándonos cada vez más al agujero, hasta llegar a un punto en que estamos tan cerca que los rayos dejan de llegar. Cuando el primer rayo deja de llegar al infinito nos encontramos en el horizonte de sucesos, en la frontera del agujero negro. Esta superficie, formada por todos estos rayos que ya no pueden escapar del agujero, debe ser una hipersuperficie nula, pues debe contener a todas las trayectorias de luz (nulas) que están dejando de llegar. La condición, sin embargo, no es recíproca, pues es fácil imaginar hipersuperficies nulas que no constituyen horizontes de sucesos. Por ejemplo, en un espacio-tiempo de Minkowski, las superficies  $x = \pm t$  son nulas, pero sin embargo este espacio-tiempo no contiene horizontes de sucesos.

### 2.5.1 Horizontes de Killing

Vamos a definir ahora un concepto que estará íntimamente ligado a los horizontes de sucesos: el horizonte de Killing. Dado un campo vectorial de Killing  $\chi^\mu$ , si éste es nulo a lo largo de una hipersuperficie nula  $\Sigma$ , entonces decimos que  $\Sigma$  es un horizonte de Killing de  $\chi^\mu$ . En principio, la noción de horizonte de Killing es independiente de la de horizonte de sucesos, pero en espacios-tiempo estacionarios (como los que vamos a considerar), ambas definiciones están fuertemente ligadas. Es fácil ver, por ejemplo, que para el agujero negro de Schwarzschild, el vector de Killing  $K = \partial_t$  se hace nulo en el horizonte de sucesos  $r = 2M$ :

$$g_{\mu\nu}K^\mu K^\nu = 1 - \frac{2M}{r} \quad (2.26)$$

Es decir, el horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild es un horizonte de Killing. En general, existen dos resultados independientes (obtenidos por Carter [8] y Hawking [9],[10]) que muestran que el horizonte de sucesos de un agujero negro estacionario y asintóticamente plano debe ser un horizonte de Killing. Habitualmente, nos referimos a estos resultados como teoremas de rigidez. Además, a partir de consideraciones meramente geométricas, puede demostrarse que en agujeros negros estáticos todo horizonte de sucesos es un horizonte de Killing del vector  $K = \partial_t$  [8].

Cabe también mencionar que, aunque todos los horizontes de sucesos para espacios-tiempo estacionarios y asintóticamente planos sean horizontes de Killing, esta propiedad no aplica a la inversa. Es fácil imaginar bajo estas condiciones horizontes de Killing que no son horizontes de sucesos. Podemos poner el mismo ejemplo que ya habíamos utilizado con las hipersuperficies nulas. En un espacio-tiempo plano dado por la métrica de Minkowski, las hipersuperficies nulas  $x = \pm t$  son horizontes de Killing del campo vectorial  $\chi = x\partial_t + t\partial_x$ . Sin embargo, sabemos que no existen horizontes de sucesos en esta variedad.

### 2.5.2 Gravedad de superficie

Un horizonte de Killing  $\Sigma$  es, por definición, una hipersuperficie nula. Y el vector de Killing  $\chi^\mu$  asociado a ella es su vector normal. Por lo tanto, las curvas integrales  $x^\mu(\alpha)$  dadas por:

$$\chi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha} \quad (2.27)$$

deberán ser curvas geodésicas nulas contenidas en la hipersuperficie  $\Sigma$  (para una demostración ver apéndice A). Por lo tanto, sobre el horizonte de Killing,  $\chi^\mu$  debe satisfacer la ecuación geodésica:

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa(\alpha) \chi^\nu \quad (2.28)$$

donde  $\kappa(\alpha)$  es una función que aparece como consecuencia de que el parámetro  $\alpha$  no tiene por qué ser necesariamente afín. Es esta función  $\kappa$  la que se define como gravedad de superficie. Como veremos más adelante, la gravedad de superficie será constante a lo largo de todo el horizonte de Killing. A partir de la ecuación de Killing ( $\nabla_{(\mu} \chi_{\nu)} = 0$ ) y de la propiedad  $\chi_{[\mu} \nabla_\nu \chi_{\sigma]} = 0$ , que se cumple en el horizonte y que deriva del hecho de que  $\chi^\mu$  es normal a  $\Sigma$ , podemos obtener fácilmente una fórmula útil para la gravedad de superficie:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu) \quad (2.29)$$

donde evidentemente el término derecho debe ser evaluado sobre el horizonte de Killing  $\Sigma$ .

Se hace claro a partir de esta definición que el valor de la gravedad de superficie asociado a un horizonte de Killing es en principio arbitrario, pues depende de la escala que apliquemos al vector de Killing  $\chi^\mu$ : Nada nos impide definir otro vector de Killing

$\xi^\mu = c\chi^\mu$ , con  $c$  una constante arbitraria, tal que su gravedad de superficie asociada se vea multiplicada por ese mismo factor. Por todo ello, vamos a definir siempre la gravedad de superficie a partir de un vector de Killing normalizado. Para fijar esta normalización utilizamos el vector de Killing de traslación temporal  $K = \partial_t$ , e imponemos:

$$K_\mu K^\mu(r \rightarrow \infty) = -1 \quad (2.30)$$

Para un espacio-tiempo estático, dado que  $K_\mu$  es el vector de Killing del horizonte, esto fija inmediatamente el valor de la gravedad de superficie. Pero también es válido para el caso estacionario. Como veremos más adelante, el vector de Killing asociado al horizonte en un agujero estacionario es una combinación lineal de  $K^\mu$  y el vector de rotación  $R^\mu$ ; por lo que fijar la normalización de  $K^\mu$  fija también la del vector de Killing completo.

Para entender por qué denominamos a esta cantidad gravedad de superficie, es necesario imaginar el caso de un espacio-tiempo estático y asintóticamente plano. Bajo estas condiciones, vamos a demostrar que la gravedad de superficie  $\kappa$  es la aceleración de un observador estático situado en el horizonte medida por un observador estático en el infinito. Para mostrarlo, será necesario introducir primero el concepto de redshift gravitacional.

### Interpretación de $\kappa$ . El factor de redshift

Imaginemos un observador estático en la métrica de Schwarzschild. La 4-velocidad  $U$  de este observador debe ser, por definición, proporcional al vector de Killing de traslación temporal  $K = \partial_t$ :

$$K^\mu = V(x)U^\mu \quad (2.31)$$

donde  $V(x)$  es un factor de proporcionalidad.

A partir de la condición de normalización de la 4-velocidad:  $U_\mu U^\mu = -1$ , obtenemos una expresión para el factor  $V(x)$ :

$$V = \sqrt{-K_\mu K^\mu} = \sqrt{-g_{tt}} \quad (2.32)$$

Vemos que  $V(x)$  tomará valores que van desde cero en el horizonte ( $K^\mu$  es nulo sobre su horizonte de Killing) hasta 1 en el infinito (así hemos definido la normalización de  $K$ ).

El factor  $V$  recibe habitualmente el nombre de factor de redshift, ya que permite relacionar las frecuencias de un fotón medidas por dos observadores estáticos. Para ver esto, vamos a considerar dos observadores estáticos  $O_1$  y  $O_2$ .  $O_1$  emite un fotón en el evento  $P_1$ , que seguirá una trayectoria geodésica hasta ser recibido por  $O_2$  en  $P_2$ . Considerando que el fotón lleva un momento  $p^\mu$ , las frecuencias medidas por los dos observadores serán:

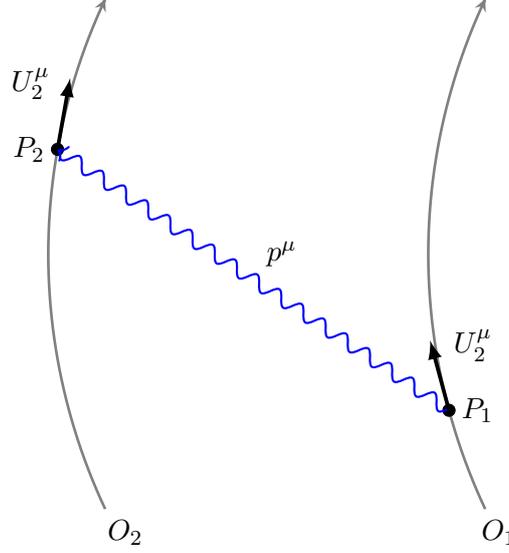


Figura 2.3: Emisión de un fotón desde un observador estático  $O_1$  a otro observador estático  $O_2$ . Las curvas grises representan sus respectivas trayectorias.

$$\omega_1 = (-p_\mu U_1^\mu)|_{P_1}, \quad \omega_2 = (-p_\mu U_2^\mu)|_{P_2} \quad (2.33)$$

Haciendo el cociente entre ambas frecuencias y sustituyendo las expresiones de las 4-velocidades en función de los vectores de Killing, obtenemos:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(-p_\mu U_1^\mu)|_{P_1}}{(-p_\mu U_2^\mu)|_{P_2}} = \frac{(-p_\mu K^\mu)|_{P_1} V_2}{(-p_\mu K^\mu)|_{P_2} V_1} \quad (2.34)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son los factores de redshift evaluados en  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Además, dado que  $K^\mu$  es un vector de Killing, toda geodésica dada por un vector tangente  $U^\mu$  conserva la cantidad  $K_\mu U^\mu$  a lo largo de toda la trayectoria (demostración en apéndice E.3). Por lo tanto, y dado que  $p^\mu$  es por definición un vector tangente a la trayectoria del fotón, llegamos a:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad (2.35)$$

lo que confirma la denominación de  $V$  como factor de redshift.

Una vez hemos visto cómo actúa el redshift gravitacional entre observadores estáticos en un espacio-tiempo estático, podemos entender mejor la gravedad de superficie. Para ello, vamos a considerar una vez más un observador estático  $O_1$ . Para poder mantenerse estático, el observador debe sufrir una 4-aceleración dada por  $a^\mu = U^\sigma \nabla_\sigma U^\mu$ , que en términos de  $V$  se expresa como:

$$a_\mu = \nabla_\mu \ln V \quad (2.36)$$

Y la magnitud de la aceleración que sufre el observador será:

$$a = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \frac{1}{V} \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (2.37)$$

que podemos ver rápidamente que diverge en el horizonte de Killing ( $V = 0$  sobre el horizonte). Es decir, para mantener al observador estático sobre el horizonte, éste debe sufrir una aceleración infinita.

Por otro lado, podemos plantearnos qué aceleración mide sobre  $O_1$  otro observador estático  $O_2$  situado en el infinito. Para ello, vamos a plantear un experimento mental. Imaginemos que ambos observadores están unidos por una cuerda infinita, y que  $O_2$  tira de la cuerda una distancia propia infinitesimal  $\delta s$  con una aceleración  $a_\infty$ , ejerciendo por tanto un trabajo  $\delta W_\infty = a_\infty \delta s$ . En la posición de  $O_1$ , el desplazamiento será también  $\delta s$ , pero la aceleración será en principio diferente, de forma que el trabajo ejercido sobre él será  $\delta W = a \delta s$ . Supongamos que todo este trabajo se transforma en luz y es transmitido como radiación de nuevo hacia el observador 2. Esta radiación sufrirá redshift al alejarse de  $O_1$ , de forma que la energía que llega de nuevo a  $O_2$  es:

$$E_\infty = V \delta W = V a \delta s \quad (2.38)$$

donde  $V$  es el factor de redshift en la posición de  $O_1$  (ya que en el infinito  $V(x) = 1$ ).

Por lo tanto, para que pueda cumplirse el principio de conservación de la energía,  $E_\infty = \delta W_\infty$ , lo que implica:

$$a_\infty = V a \quad (2.39)$$

Entonces, la aceleración sobre un observador estático que mide otro observador estático situado en el infinito viene dada por la siguiente expresión, que podemos comprobar a través de un cálculo sencillo que es equivalente a la ecuación (2.29), y que coincide con la definición de la gravedad de superficie cuando se evalúa sobre el horizonte:

$$a_\infty = V a = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (2.40)$$

Es decir, la gravedad de superficie en un espacio-tiempo estático es la aceleración que es necesario ejercer desde el infinito para mantener a un observador estático sobre el horizonte de sucesos. Como veremos más adelante, en métricas estacionarias pero no estáticas el vector de Killing de traslación temporal  $K$  no tiene un horizonte de Killing. El vector de Killing en este tipo de espacio-tiempo ya no es de la forma  $K = \partial_t$ , y por lo tanto, la cantidad  $\kappa$  asociada a él ya no puede ser interpretada como la aceleración de un observador estático vista desde el infinito (aunque sí podríamos definir algo análogo para otro tipo de observadores). Sin embargo, en un abuso del lenguaje, seguiremos usando el término "gravedad de superficie" para referirnos a esta cantidad.

Vamos a aplicar ahora la expresión (2.40) para calcular la gravedad de superficie del agujero negro de Schwarzschild. Para este caso, podemos calcular el factor de redshift a partir de la ecuación (2.32) como:

$$V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (2.41)$$

Entonces, sustituimos la expresión de  $V(x)$  en la ecuación (2.40) para obtener:

$$a_\infty = \frac{M}{r^2} \quad (2.42)$$

que, evaluando sobre el horizonte de sucesos ( $r = 2M$ ), nos da el valor de la gravedad de superficie en un agujero negro de Schwarzschild:

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (2.43)$$

Vemos que la gravedad de superficie del agujero es inversamente proporcional a la masa del mismo. Esto en principio parece extraño, ya que nos dice que cuanto mayor es la masa, menor es la fuerza que hay que ejercer para mantener un cuerpo en el horizonte sin caer al agujero. Sin embargo, lo que ocurre es que a medida que aumenta la masa, también aumenta el radio del horizonte, de modo que es este efecto de distanciamiento el que domina. Así, son los agujeros negros más pequeños los que presentan una mayor gravedad de superficie.

## 2.6 Colapso gravitacional. Cota de Buchdahl

La métrica de Schwarzschild no tiene por qué describir necesariamente un agujero negro. Si imaginamos un objeto esférico con un radio mayor a  $r_s = 2M$ , la geometría que genera en su exterior viene dada efectivamente por Schwarzschild. Sin embargo, no hay ningún horizonte de sucesos, ya que este debería encontrarse dentro del propio objeto, donde ya no rigen las condiciones de vacío para las que esta solución es válida. Esta situación describiría, por ejemplo, la gravedad de una estrella en su exterior. Por otro lado, sabemos que las estrellas reales evolucionan, pudiendo suceder que en un momento dado la estrella agote su energía y acabe cediendo a la fuerza de su propia gravedad, comprimiéndose hasta un radio menor a  $2M$  y dando lugar a un agujero negro. Es lo que se conoce como colapso gravitacional hacia un agujero negro. Para entender mejor esta situación, vamos a estudiar cómo se comporta la métrica en el interior de la estrella. Partimos de la definición de una métrica genérica estática y con simetría esférica:

$$ds^2 = -e^{2a(r)} dt^2 + e^{2b(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.44)$$

A partir de esta expresión, podemos calcular las siguientes componentes del tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ :

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(a-b)} (2r\partial b - 1 + e^{2b}) \quad (2.45)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (2r\partial a + 1 - e^{2b}) \quad (2.46)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2b} \left[ \partial_r^2 a + (\partial a)^2 - (\partial_r a) (\partial_r b) + \frac{1}{r} (\partial_r a - \partial_r b) \right] \quad (2.47)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta} \quad (2.48)$$

Ahora dado que vamos a estudiar el interior de la estrella, usaremos la ecuación de Einstein fuera del vacío:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

Y vamos a considerar además que podemos modelizar la estrella como un fluido perfecto, de forma que el tensor de energía-momento es descrito por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  la presión del fluido y  $U^\mu$  la 4-velocidad de las partículas del fluido, que como hemos considerado condiciones de estaticidad deberá tener sólo componente temporal.

Además, imponiendo la condición de normalización  $U^\mu U_\mu = -1$ :

$$U_\mu = (-e^a, 0, 0, 0) \quad (2.51)$$

el tensor de energía-momento toma la forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2a} \rho & & & \\ & e^{2b} P & & \\ & & r^2 P & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta P \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Entonces, aplicando las ecuaciones de Einstein, obtenemos 3 relaciones independientes (ya que las componentes  $G_{\phi\phi}$  y  $G_{\theta\theta}$  dan lugar a expresiones equivalentes):

$$\frac{1}{r^2} e^{2(a-b)} (2r \partial b - 1 + e^{2b}) = 8\pi \rho \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{r^2} (2r \partial a + 1 - e^{2b}) = 8\pi P \quad (2.54)$$

$$e^{-2b} \left[ \partial_r^2 a + (\partial a)^2 - (\partial_r a) (\partial_r b) + \frac{1}{r} (\partial_r a - \partial_r b) \right] = 8\pi P \quad (2.55)$$

Por conveniencia, y haciendo una analogía con la solución de Schwarzschild, vamos a redefinir  $b(r)$  a partir de una nueva función  $m(r)$ , que como ya hemos visto se corresponde con la masa/energía de la estrella:

$$e^{2b} = \left[ 1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} \implies m(r) = \frac{1}{2} (r - r e^{-2b}) \quad (2.56)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.53), ésta se reduce a:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (2.57)$$

que vemos que es la misma ecuación (2.4) a partir de la que habíamos definido la masa/energía del agujero negro o estrella.

Usando también la definición de  $m(r)$  sobre la ecuación (2.54), llegamos a la expresión equivalente:

$$\partial_r a = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \quad (2.58)$$

El siguiente paso lógico sería utilizar las ecuaciones (2.55) y (2.58) para obtener una expresión  $P(r)$  de la presión en función del radio. Sin embargo, para una mayor simplicidad de los cálculos es conveniente no seguir este camino, y utilizar en su lugar de forma equivalente la ecuación de conservación del tensor de energía-momento:  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Dada la métrica y el tensor de energía momento que hemos considerado, es un cálculo directo obtener que esta ecuación es equivalente a:

$$\partial_r P + (P + \rho) \partial_r a = 0 \quad (2.59)$$

Entonces, la combinación de ambas ecuaciones permite deshacerse del término  $\partial_r a$ , llegándose a la expresión:

$$\partial_r P = - \frac{(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} \quad (2.60)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de equilibrio hidrostático o de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

La ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff relaciona la presión en cada punto del cuerpo con su densidad  $\rho(r)$ . Pero dado que la función de densidad radial puede tomar una forma arbitraria, éste no es un sistema cerrado. Si queremos obtener una función concreta para  $P(r)$  debemos añadir otra relación más, una ecuación de estado. Generalmente, las ecuaciones de estado termodinámicas definen la presión en función de la densidad y la entropía,  $P(\rho, S)$ , aunque es habitual considerar situaciones en las que la entropía es muy pequeña y su efecto es despreciable en comparación con el de la densidad, de modo que se define  $P(\rho)$ . En nuestro caso, por simplicidad, vamos a considerar la situación más sencilla en que podemos pensar: la de un fluido infinitamente rígido (incompresible), de forma que mantiene una densidad constante  $\rho_0$  en todos sus puntos. De esta forma, para una distribución de radio  $R$ :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (2.61)$$

Así, queda definida de forma directa la función  $m(r)$  dada por la integral de la ecuación (2.57):

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 & r \leq R \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = M & r > R \end{cases} \quad (2.62)$$

Para  $r > R$  estamos en condiciones de vacío, por lo que no tiene sentido plantearse resolver la función de la presión radial (ésta será nula en el exterior). El caso que nos interesa es el interior de la estrella,  $r \leq R$ . En esta región, la ecuación de equilibrio hidrostático se reduce a:

$$\partial_r P = -(\rho_0 + P)(\rho + 3P) \frac{\frac{4\pi}{3}r}{1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 r^2} \quad (2.63)$$

E integrando ambos lados obtenemos:

$$\int_{P_c}^{P(r)} \frac{dP}{(\rho_0 + P)(\rho + 3P)} = - \int_0^r \frac{\frac{4\pi}{3}s}{1 - \frac{8\pi}{3}\rho_0 s^2} ds \quad (2.64)$$

donde  $P_c$  es la presión en el centro de la distribución ( $r = 0$ ). Ahora, resolviendo la integral llegamos a la relación:

$$\frac{\rho_0 + 3P(r)}{\rho_0 + P(r)} = \frac{\rho_0 + 3P_c}{\rho_0 + P_c} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

Vamos a buscar obtener a partir de aquí una expresión para la presión en el centro de la distribución,  $P_c$ . Para ello, evaluamos la ecuación (2.65) en  $r = R$ , donde sabemos que la presión debe ser nula. Entonces:

$$1 = \left(\frac{\rho_0 + 3P_c}{\rho_0 + P_c}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \quad (2.66)$$

Podemos ver a partir de esta ecuación que para un radio de la estrella  $R = \frac{9}{4}M$ , la presión central diverge, se hace infinita. Para radios inferiores a éste no existe solución posible. Es decir, para una masa de la estrella fija  $M$ , hay un radio mínimo por debajo del cual el cuerpo es demasiado denso como para sostenerse gravitacionalmente y el colapso se hace inevitable. No importa cuán rígido sea el fluido del que esta compuesta, pues la presión se hace infinitamente grande.

$$R_{min} = \frac{9}{4}R \quad (2.67)$$

Es de remarcar que este resultado ha sido obtenido restringiéndose a unas condiciones muy concretas (simetría esférica, estaticidad, densidad constante) que no tienen por qué darse. Para un caso más general, el teorema de Buchdahl [11] establece que cualquier solución estática y esféricamente simétrica en la que  $\rho(r)$  no sea creciente con  $r$  cumple necesariamente  $R > \frac{9}{4}R$ . Aunque la demostración requeriría un mayor trabajo, podemos ver que tiene mucho sentido a partir de lo que hemos visto. Si hay una densidad máxima permitida que se alcanza con el fluido infinitamente rígido, parece lógico que para el resto de fluidos de rigidez finita esta densidad deba ser menor. Algo muy importante a tener

en cuenta es que hemos derivado este resultado suponiendo condiciones de estaticidad. El límite de Buchdahl no tiene por qué cumplirse para soluciones dinámicas, como es el caso de un colapso.

## Capítulo 3

# El agujero negro de Reissner-Nordström

En este capítulo, abordaremos el estudio de los agujeros negros con carga eléctrica. Hay que reconocer antes de comenzar que no esperamos encontrar este tipo de agujeros en el mundo real (en la naturaleza un agujero cargado sería rápidamente neutralizado por la interacción con la materia en su vecindad). Sin embargo, su estudio permite ilustrar algunas características generales importantes, y es por ello que no carecen de interés. La primera pregunta que cabe hacerse es, ¿qué cambia en la métrica cuando añadimos carga eléctrica al agujero? Ya hemos visto que la métrica de Schwarzschild describe cualquier solución con simetría esférica en el vacío, ¿por qué iba a ser diferente cuando añadimos carga? La respuesta radica en que al añadir carga se rompe la condición de vacío, ya que ahora la carga producirá un campo eléctrico en el exterior con una energía asociada. Vamos a ver que este hecho cambiará completamente la estructura en el interior del agujero negro, llevándonos a un resultado muy diferente al de Schwarzschild. Para esta sección, nos basaremos especialmente en los desarrollos expuestos en [1],[2] y [12].

### 3.1 Derivación de la solución de Reissner-Nordström

Lo primero que vamos a hacer es derivar la métrica correspondiente a un agujero cargado con simetría esférica, que se conoce como métrica de Reissner-Nordström. Como punto de partida, hemos impuesto como condición la simetría esférica de la solución, por lo que necesariamente el campo electromagnético sólo puede tener componentes radiales. Además, consideramos también que no existen monopolos magnéticos, por lo que tampoco habrá campo magnético. En ese caso, el tensor de campo electromagnético se reduce a:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ -E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

A partir de la definición de la densidad lagrangiana asociada al campo electromagnético:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

podemos obtener la expresión para el tensor de energía-momento asociado a  $F^{\mu\nu}$ :

$$T^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\beta} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \quad (3.3)$$

que para nuestro caso concreto podemos comprobar que toma la forma:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{(F^{tr})^2}{8\pi} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Para determinar la forma de  $F^{\mu\nu}$  vamos a recurrir a las ecuaciones de Maxwell en el vacío. En concreto a  $\nabla_\mu F^{\nu\mu} = 0$ . Si consideramos el caso  $\nu = 0$ , y dado que la métrica que estamos utilizando viene dada por (2.2), esta ecuación se traduce en:

$$\left( e^\psi r^2 F^{tr} \right)' = 0 \implies F^{tr} = e^{-\psi} \frac{Q}{r^2} \quad (3.5)$$

donde  $Q$  es una constante de integración que como veremos más adelante representa la carga eléctrica del agujero negro.

De forma que calculando explícitamente con la expresión del tensor de campo electromagnético que habíamos obtenido, llegamos a:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Una vez tenemos el tensor de energía momento, y dado que hemos impuesto la condición de simetría esférica, podemos utilizar las ecuaciones de campo de Einstein para una métrica esféricamente simétrica que habíamos obtenido en la sección 2.1. Podemos ver a partir de la ecuación (2.5) que no existe dependencia temporal de la métrica. Nos quedan entonces dos ecuaciones. La primera nos dice  $m' = \frac{Q^2}{2r^2}$  de donde obtenemos  $m(r) = M - \frac{Q^2}{2r}$ , con  $M$  siendo una constante de integración que representará la masa del agujero. De la segunda ecuación obtenemos  $\psi' = 0$ , por lo que podremos reparametrizar la coordenada para, sin pérdida de la generalidad, fijar  $\psi = 0$ . De esta forma, la solución general para el agujero de Reissner-Nordström es la siguiente:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.7)$$

## 3.2 La carga eléctrica

Antes hemos mencionado que el parámetro  $Q$  que aparece en la métrica de Reissner-Nordström representa la carga eléctrica del agujero. Vamos a comprobar que efectivamente esto es así.

El campo electromagnético lleva asociada una densidad de corriente conservada:

$$J^\mu = (\rho(x), \vec{J}(x)) \quad (3.8)$$

donde  $\rho$  y  $\vec{J}$  son las densidades de carga y corriente eléctricas respectivamente. Además, el primer par de ecuaciones de Maxwell nos dice que esta 4-corriente viene definida a partir del tensor de campo electromagnético como:

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\mu \quad (3.9)$$

Por lo tanto, podremos calcular el flujo de carga eléctrica que atraviesa una hipersuperficie  $\Sigma$  de tipo espacio a través de la integral propia:

$$Q = - \int_\Sigma d^3x \sqrt{|g'|} n_\mu J^\mu = - \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^3x \sqrt{|g'|} n_\mu \nabla_\nu F^{\nu\mu} \quad (3.10)$$

donde  $g'$  es el determinante de la métrica inducida ( $g'_{\mu\nu}$ ) sobre la hipersuperficie, y  $n^\mu$  el vector unitario normal a la hipersuperficie. El signo menos inicial se ha introducido simplemente por una cuestión de convenio, de forma que la carga se haga positiva cuando utilicemos un vector  $n^\mu$  dirigido hacia el futuro. Podemos notar que si definimos esta región de integración como una hipersuperficie de tiempo constante ( $n^\mu \propto (1, 0, 0, 0)$ ), lo que estaríamos haciendo sería calcular la carga contenida en el volumen que define la hipersuperficie. Esto es precisamente lo que queremos hacer para obtener la carga del agujero negro. Sin embargo, la distribución es singular en el centro del agujero. Para sortear este problema vamos a utilizar el teorema de Stokes, de forma que podemos reducir la integral de volumen a una evaluada sobre la frontera de la hipersuperficie  $\partial\Sigma$ :

$$Q = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} d^3x \sqrt{|g''|} n_\mu \sigma_\nu F^{\nu\mu} \quad (3.11)$$

donde  $g''$  es ahora el determinante de la métrica inducida sobre la frontera bidimensional y  $\sigma^\mu$  el vector unitario normal a la frontera y dirigido hacia el exterior del volumen.

Vamos ahora pues a realizar el cálculo para el caso que nos ocupa. Debemos escoger una región que encierre la singularidad (donde está concentrada toda la carga). Por simplicidad, escogemos integrar sobre 2-esferas de  $r, t = cte$ . En este caso,  $n^\mu \propto (1, 0, 0, 0)$  y  $\sigma^\mu \propto (0, 1, 0, 0)$ . Ahora, aplicando las condiciones de normalización obtenemos:

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = -1 \rightarrow n_t = -\frac{1}{\sqrt{g^{tt}}} \quad g^{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu = -1 \rightarrow \sigma_r = \frac{1}{\sqrt{g^{rr}}} = \sqrt{g^{tt}} \quad (3.12)$$

Por último, necesitamos obtener el valor de  $\sqrt{|g''|}$ . Sobre la 2-esfera, el elemento de línea se reduce a  $ds^2 = r^2 d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ . A partir de aquí es un cálculo directo obtener el determinante:

$$\sqrt{|g''|} = r^2 \sin \theta \quad (3.13)$$

Entonces, una vez tenemos todos los ingredientes sólo hace falta ponerlos juntos para obtener:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} d^3x \sqrt{|g''|} n_\mu \sigma_\nu F^{\nu\mu} = \frac{Q}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = Q \quad (3.14)$$

Así, queda demostrado que el parámetro  $Q$  que aparece en la métrica de Reissner-Nordström representa efectivamente la carga eléctrica total contenida en el agujero negro.

### 3.3 La métrica de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström, al igual que la de Schwarzschild, presenta una única singularidad física en  $r = 0$  (como se puede comprobar calculando el escalar de Kretschmann). Sin embargo, la estructura de horizontes aquí es algo más complicada. En este caso, la métrica presenta patologías cuando  $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$ . Al tratarse de una ecuación de segundo grado, ya no tendremos una única solución posible como en el caso de Schwarzschild, sino que ahora las singularidades de coordenadas vienen dadas por:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (3.15)$$

Dependiendo de los valores de carga  $Q$  y masa  $M$  del agujero negro, podremos tener una, dos, o ninguna solución. Vamos por tanto a considerar los tres casos por separado:

#### 3.3.1 $M^2 < Q^2$ . La hipótesis del censor cósmico

En este caso, no existe una solución física (con  $r \in \mathbb{R}$ ) que haga  $f(r) = 0$ . Es decir, no existe ningún horizonte de sucesos que evite que un observador acceda hasta la singularidad en  $r = 0$  y regrese para contar lo que ha visto. Esto es lo que se conoce como una singularidad desnuda, y sin duda constituye una situación problemática. Debido a ello se plantea la hipótesis del censor cósmico, concebida por Roger Penrose en 1969, que postula que no pueden darse en la naturaleza este tipo de situaciones. Sin embargo, si ignoramos por un momento estas patologías, podemos estudiar la forma de las geodésicas en esta geometría. Resulta entonces que la singularidad es repulsiva, y que por tanto las geodésicas de tipo tiempo nunca pueden llegar a  $r = 0$  (sí pueden hacerlo, por el contrario, las geodésicas nulas y las curvas temporales no geodésicas).

#### 3.3.2 $M^2 = Q^2$ . Agujeros negros extremos

Este caso concreto describe lo que se conoce como un agujero negro extremo. Si bien se presentan como una solución inestable, pues añadir una mínima cantidad de materia

haría que nos situásemos en el caso siguiente, los agujeros extremos no carecen de interés, siendo recurrentes en el estudio de la gravitación cuántica. Recuperaremos la noción de agujero negro extremo más adelante, cuando hablemos de la termodinámica de agujeros negros.

### 3.3.3 $M^2 > Q^2$

Es esta la solución que esperaríamos obtener a partir de un colapso gravitacional realista. En este caso, la métrica presenta dos regiones singulares ( $r = r_+$  y  $r = r_-$ ), que constituirán dos horizontes de sucesos. Podemos comprobar que ambas superficies delimitan los cambios de comportamiento de las coordenadas. En el exterior de  $r_+$ , la coordenada radial es de tipo espacio. Para  $r_+ > r > r_-$  pasa a ser temporal, de forma que al igual que ocurría en la solución de Schwarzschild, esto provocará que un observador en esta región esté obligado a moverse a radios cada vez menores. Hasta aquí nada cambia con respecto al de Schwarzschild. Sin embargo, ahora tenemos un horizonte adicional en  $r_-$ , de forma que para  $r < r_-$ ,  $r$  vuelve a ser una coordenada radial. Este hecho será determinante, ya que eventualmente hará posible esquivar la singularidad. Para ver esto en más detalle, lo mejor será obtener el diagrama de Penrose-Carter del agujero de Reissner-Nordström. Al igual que en el caso de Schwarzschild, el primer paso para ello será buscar unas coordenadas que no presenten problemas en los horizontes.

## 3.4 Coordenadas de Kruskal

Las coordenadas con las que hemos descrito el agujero negro de Reissner-Nordström se vuelven singulares en el horizonte externo ( $r = r_+$ ). Pero ya hemos visto que esta singularidad no es intrínseca de la geometría, sino que se debe a la elección de coordenadas. Por lo tanto, de igual manera que para el agujero de Schwarzschild, vamos a buscar unas nuevas coordenadas que nos permitan extender la métrica más allá de esta superficie. Esto puede hacerse a través de las coordenadas de Kruskal. Para obtenerlas, realizamos el mismo proceso que en el caso de Schwarzschild. En primer lugar, podemos reescribir las componentes de la métrica en función de  $r_{\pm}$ :

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} dt^2 + \left[ \frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.16)$$

Ahora, definimos unas coordenadas  $u$  y  $v$  análogas a las que habíamos introducido en la sección 2.3:

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^* \quad (3.17)$$

$$r^* = \int \frac{r^2 dr}{(r-r_+)(r-r_-)} = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln|r-r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r-r_-| + C. \quad (3.18)$$

donde  $C$  es una constante de integración que fijaremos más adelante.

Al igual que en el caso de Schwarzschild, esta transformación no nos elimina la singularidad en  $r_+$ , sino que simplemente la desplaza a  $v - u = -\infty$ . Para buscar un cambio de coordenadas que nos elimine la singularidad en  $r_+$ , vamos a estudiar el comportamiento de  $r^*$  en la vecindad de esa región. En un entorno lo suficientemente próximo a  $r_+$ :

$$r^* \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |r - r_+| + C \quad \text{con} \quad \kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} \quad (3.19)$$

donde  $\kappa_+$  es una cantidad que resultará ser la gravedad de superficie en  $r_+$ , de ahí que utilicemos esta simbología para nombrarla. Ahora, por conveniencia, vamos a definir la constante de integración como  $C = \frac{1}{2\kappa_+} \ln \kappa_+$  (esto equivaldría a hacer una reparametrización de las coordenadas). De esta forma obtenemos:

$$r^* \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+(r - r_+)| \quad (3.20)$$

Y tras unos cálculos sencillos análogos a los realizados para el caso de Schwarzschild, podemos despejar a partir de aquí la forma de la métrica en un entorno de  $r_+$ :

$$ds^2 \simeq \mp 2 (e^{-\kappa_+ u} du) (e^{\kappa_+ v} dv) + r^2 d\Omega^2 \quad (3.21)$$

donde el símbolo superior aplica a la región  $r > r_+$  y el inferior a  $r < r_-$ .

Se hace entonces claro que podremos eliminar esta singularidad de la métrica definiendo las coordenadas de Kruskal:

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u} \quad V_+ = e^{\kappa_+ v} \quad (3.22)$$

La forma del elemento de línea entorno a  $r_+$  en este nuevo sistema de coordenadas toma la siguiente forma, que como puede apreciarse de forma directa, no presenta ninguna patología en esta región:

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+^2} dU_+ dV_+ + r_+^2 d\Omega^2 \quad (3.23)$$

Hemos eliminado la singularidad de coordenadas en el horizonte externo. Sin embargo, cabe preguntarse si esta métrica definida a través estas nuevas coordenadas de Kruskal también se comporta bien en  $r_-$ . La respuesta es que no. Un estudio más detallado de la métrica fuera de la región próxima a  $r_+$  revela que es singular en  $r_-$ . Por lo tanto, podremos utilizar las coordenadas  $(U_+, V_+)$  en un intervalo  $r' < r < \infty$  con  $r' > r_-$ , pero si queremos ir más allá necesitaremos otro parche de coordenadas. Para construirlo, vamos a emplear el mismo procedimiento, pero esta vez centraremos el desarrollo en el horizonte interno en lugar de en el externo. De esta forma, obtenemos un nuevo par de coordenadas de Kruskal  $(U_-, V_-)$  adaptadas al horizonte interno:

$$U_- = \mp e^{-\kappa_- u}, \quad V_- = -e^{\kappa_- v} \quad \text{con} \quad \kappa_- = \frac{r_- - r_+}{2r_-^2} \quad (3.24)$$

donde el signo superior se corresponde con  $r > r_-$  y el inferior con  $r < r_-$ .

Ahora  $\kappa_-$  es la gravedad de superficie relativa al horizonte interno. Así, de forma análoga a lo que ocurría en el horizonte externo, obtenemos una métrica regular en  $r = r_-$ , pero singular en  $r_+$ . Tenemos dos parches entonces que solapan en la región entre los dos horizontes y que en conjunto nos permiten cubrir toda la variedad del agujero negro de Reissner-Nordström. Utilizaremos  $(U_+, V_+)$  en un intervalo  $r' < r < \infty$  y  $(U_-, V_-)$  en  $r < r'$ , con  $r_- < r' < r_+$ .

Una vez hemos resuelto el problema de los horizontes, cabe preguntarse ahora qué aspecto tiene la singularidad en  $r = 0$ . En el agujero negro de Schwarzschild habíamos obtenido (ecuación (2.23)) que dentro del horizonte de sucesos  $r$  se comportaba como una coordenada espacial. Esto hacía que todas estas superficies, y en particular la singularidad en  $r = 0$ , fuesen de tipo espacio, haciendo que la singularidad fuese inevitable una vez cruzado el radio de Schwarzschild (recordemos que estas superficies estaban descritas por  $UV = cte. > 0$  para  $r < 2M$ ). Sin embargo, en el caso de Reissner-Nordström ocurre algo distinto. Cuando nos situamos en el interior del horizonte interno dado por  $r_-$ ,  $r$  vuelve a ser una coordenada espacial, lo que hará que estas superficies sean ahora temporales. Podemos deducir a partir de las definiciones de las ecuaciones (3.24), (3.17) y (3.18) la relación:

$$U_- V_- = -e^{2\kappa_- r} (r_- - r) (r_+ - r)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}} \quad (3.25)$$

En este caso, las superficies de radio constante en el interior de  $r_-$  vienen dadas por  $U_- V_- = cte. < 0$ . Estas superficies, y en particular la singularidad en  $r = 0$  van a ser de tipo tiempo (podemos apreciarlo en la figura 3.1). En consecuencia, al contrario que en caso de Schwarzschild, un observador que caiga en el interior del agujero va a poder evitar la singularidad. Este es un fenómeno sorprendente que necesita ser estudiado más en detalle, y para ello vamos a recurrir una vez más a los diagramas de Penrose-Carter.

### 3.5 Diagrama de Penrose-Carter

Podemos repetir el mismo procedimiento que empleamos con el agujero de Schwarzschild para obtener el diagrama de Penrose-Carter del agujero de Reissner-Nordström. Esta vez tenemos dos parches, pero el desarrollo es el mismo. Además, dado que hemos empleado una vez más coordenadas de Kruskal, podemos seguir utilizando la propiedad de que la luz que se mueve radialmente lo hace a través de trayectorias de  $U$  o  $V$  constante. El cono de luz también guarda las mismas propiedades que en el agujero negro de Schwarzschild.

Obtenemos el diagrama que se puede observar en la figura 3.1. El comportamiento en el exterior del agujero no difiere del ya estudiado en el agujero negro sin carga. Mientras se está en la región I, existen trayectorias de tipo tiempo (o nulas) que permiten escapar del agujero hacia  $I^+$ . Pero una vez se cruza  $r_+$ , ya no existen trayectorias de retorno. La superficie  $r_+$  es la que representa ahora el horizonte de sucesos del agujero; una vez se ha traspasado esta frontera, no es posible escapar ni enviar ningún tipo de información hacia el exterior. Las verdaderas discrepancias con el agujero de Schwarzschild comienzan

cuando nos hallamos dentro del horizonte, en la región II. Como habíamos dicho antes, entre  $r_+$  y  $r_-$ ,  $r$  es una coordenada de tipo tiempo, lo que causa que en esta región el observador en el interior del agujero está forzado a moverse en la dirección de  $r$  decreciente. Sin embargo, esta caída forzada hacia el interior sólo dura hasta que se traspasa la superficie  $r_-$ . En esta región, las superficies de radio constante pasan a ser de nuevo de tipo tiempo, por lo que el observador no está forzado a cruzarlas. Esto incluye a la propia singularidad, como ya se había mencionado. Vemos en el diagrama que existen trayectorias temporales que van a dar a la singularidad, pero también otras que permiten esquivarla. El observador tiene entonces la capacidad de elegir si dejarse caer hacia la singularidad o continuar su camino y alejarse de nuevo cruzando superficies de radio cada vez mayor. Llegará un momento en que cruce de nuevo  $r_-$ . Esta, sin embargo, no es la misma superficie que cruzó la primera vez, sino que es otra copia de la superficie  $r = r_-$  (en los diagramas de Kruskal hay dos copias de cada superficie  $r = cte$ , propiedad que ocurría también en el caso de Schwarzschild). Entrará ahora en una nueva región, en la que una vez más la coordenada  $r$  es temporal, y vuelve a convertirse en imposible dar la vuelta. Sin embargo, ahora la orientación está invertida, de forma que esta región funciona como un agujero blanco que le obliga a escapar en trayectorias de  $r$  forzosamente creciente. Está entonces obligado a cruzar de nuevo una superficie de  $r = r_+$ , que esta vez constituye un horizonte de sucesos pasado. Aquí se acabarían los dos parches  $(U_+, V_+)$  y  $(U_-, V_-)$  que habíamos utilizado para describir la variedad de Reissner-Nordström. Sin embargo, no hay razón alguna para que el espacio-tiempo deba terminar aquí, por lo que podemos colocar a continuación otro parche de Kruskal  $(U_+, V_+)$  para extender la métrica más allá de este horizonte. La consecuencia física de esto es que el observador sale del agujero y aparece en otra copia de la región I, en otro universo paralelo idéntico al inicial. Aquí volvemos a encontrarnos en la misma situación que al inicio: el observador tiene la capacidad de elegir si permanecer en esta nueva copia del universo o entrar en el agujero de Reissner-Nordström que reside en él y volver a iniciar una vez más el ciclo. De esta forma, habrá un infinito número de copias posibles a las que poder acceder.

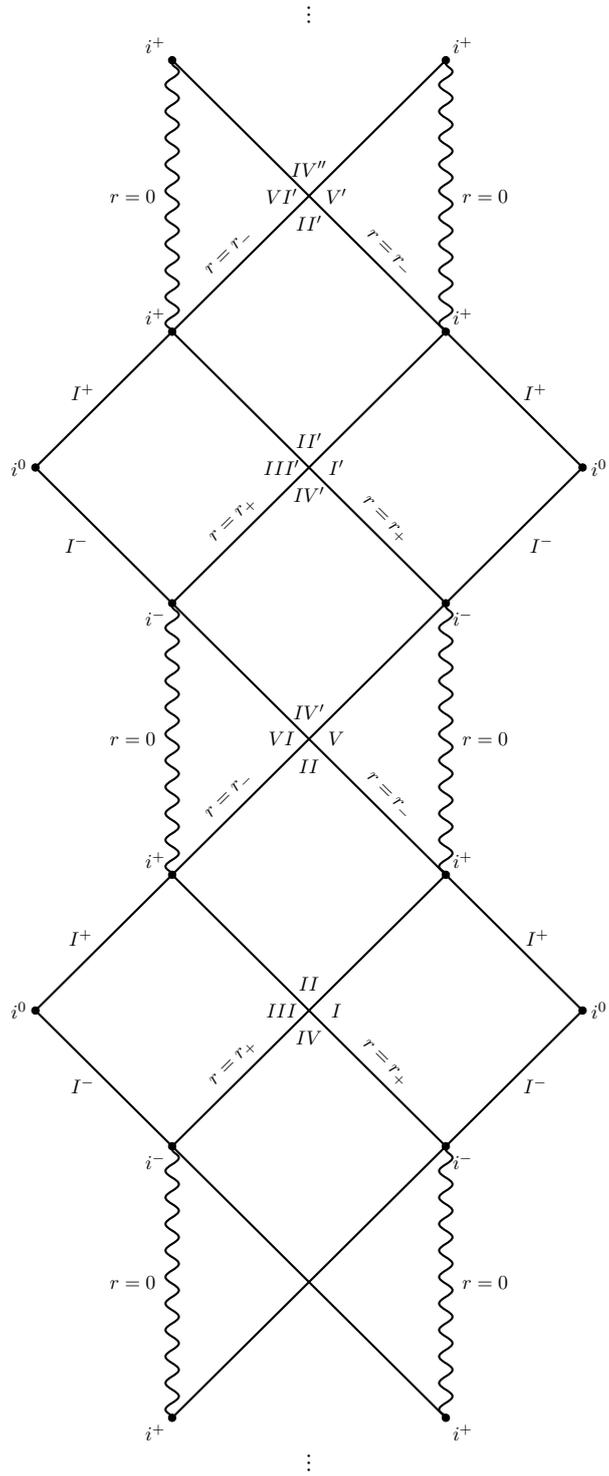


Figura 3.1: Diagrama de Penrose-Carter para la solución de Reissner-Nordström con  $M^2 > Q^2$ .

### 3.6 Gravedad de superficie y agujeros negros extremos

En el agujero de Reissner-Nordström, el horizonte de sucesos en  $r_+$  es un horizonte de Killing para el vector de translación temporal  $K = \partial_t$ . Era de esperar, pues al igual que el agujero de Schwarzschild, ésta es una solución estática. Cabe entonces preguntarse qué expresión tomará la gravedad de superficie correspondiente a este horizonte.

Para hallarla, podemos utilizar la ecuación (2.32) para obtener una expresión para el factor de redshift:

$$V = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \quad (3.26)$$

Y sustituyendo esta función en la ecuación (2.40), legamos a la expresión para la gravedad de superficie del agujero negro,  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_+^2} = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} \quad (3.27)$$

que coincide con la definición para la gravedad de superficie en el horizonte de sucesos que habíamos adelantado en la ecuación (3.19), y que entonces denotábamos  $\kappa_+$ . Nos satisface también comprobar cómo al fijar  $Q = 0$  (agujero sin carga), recuperamos el resultado conocido para el caso de Schwarzschild. Otra característica fundamental que podemos comprobar es que para los agujeros extremos la gravedad de superficie se hace cero. Como veremos más adelante, la gravedad de superficie juega un importante papel en la descripción termodinámica de los agujeros negros. Es por ello que se hace especialmente relevante el caso de los agujeros negros extremos. Rescataremos esta propiedad característica de la gravedad de superficie de los agujeros negros extremos más adelante.

## Capítulo 4

# El agujero negro de Kerr

Hasta ahora, nos hemos limitado a considerar soluciones esféricamente simétricas, lo que impone a su vez la condición de estaticidad de la geometría (teorema de Birkhoff). Sin embargo, esta no es una condición que deba cumplirse necesariamente en la naturaleza. Podemos plantearnos entonces qué ocurre cuando un agujero negro rota. En este caso, abandonamos la condición de estaticidad, ya que el sistema es por definición dinámico. Sin embargo, aunque el sistema evoluciona en el tiempo, éste lo hace siempre de la misma forma. No importa en qué instante lo observemos, siempre se comporta igual. Decimos entonces que nos encontramos ante una solución estacionaria. Cualitativamente, podemos comprender la diferencia entre un sistema estático y uno estacionario pensando en una tubería por la que circula agua. Si el agua está quieta y el sistema no evoluciona, decimos que es estático. Pero si por la tubería circula una corriente constante de agua, el sistema es estacionario. Otra forma de pensar en que esta métrica no es estática es que no es invariante bajo inversión temporal: invertir el paso del tiempo haría cambiar el sentido de rotación, y por tanto el momento angular; al igual que en el ejemplo de la tubería esto invertiría el sentido del flujo de agua. Se puede encontrar una definición más rigurosa de los conceptos de estaticidad y estacionaridad en el apéndice D.

Además, al añadir un eje de rotación, hemos eliminado también la simetría esférica. En su lugar, tendremos un sistema axisimétrico (con simetría bajo rotaciones alrededor de un eje). La eliminación de la condición de simetría esférica complica mucho la búsqueda de soluciones. De hecho, mientras que las métricas de Schwarzschild y de Reissner-Nordström fueron descubiertas poco después de que la relatividad general fuese planteada (en 1915 y 1921 respectivamente); hubo que esperar a 1963 para que Roy Kerr hallase la solución para un agujero negro en rotación. En este capítulo, abordaremos la estructura causal del agujero de Kerr y repasaremos sus características fundamentales, algunas de las cuales serán algo sorprendentes. Para ello, nos basaremos principalmente en las referencias [1], [2], [4], [6] y [13].

Vamos en primer lugar a introducir la forma de la métrica de Kerr. En las coordenadas estándar de Boyer-Lindquist, y considerando que el eje de rotación viene dado por  $\theta = 0$ , la métrica de Kerr aparece descrita por la siguiente expresión:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (4.1)$$

donde:

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (4.2)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (4.3)$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (4.4)$$

Aquí  $M$  y  $a$  son dos parámetros que caracterizan las posibles soluciones. Puede verificarse (en un cálculo directo, aunque largo) que  $M$  representa la masa/energía total del agujero y  $a$  el momento angular por unidad de masa:

$$a = \frac{J}{M} \quad (4.5)$$

La primera pregunta que cabe hacerse es acerca del significado geométrico del sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist  $(r, \theta, \phi, t)$ . En los agujeros anteriores la métrica planteada estaba representada por coordenadas esféricas. ¿Sigue siendo así ahora? Para verlo, vamos a estudiar lo que ocurre cuando la masa del agujero tiende a cero. Evidentemente, deberíamos recuperar la métrica de un espacio plano. Podemos comprobar que en este límite el elemento de línea de Boyer-Lindquist se convierte en:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.6)$$

Ésta es efectivamente la métrica de un espacio-tiempo plano. Pero no está descrita en coordenadas esféricas, sino en lo que se conoce como coordenadas elipsoidales. En estas coordenadas, las superficies de  $r = cte.$  no definen esferas, sino elipsoides de rotación a lo largo de un eje  $z$ . Otra propiedad fundamental de las coordenadas elipsoidales es que  $r = 0$  ya no representa un punto del espacio como lo hacía en las coordenadas esféricas habituales, sino todo un disco de radio  $a$  en el plano ecuatorial. Conviene recordar esta propiedad, pues será importante tenerla en cuenta cuando estudiemos la singularidad del agujero.

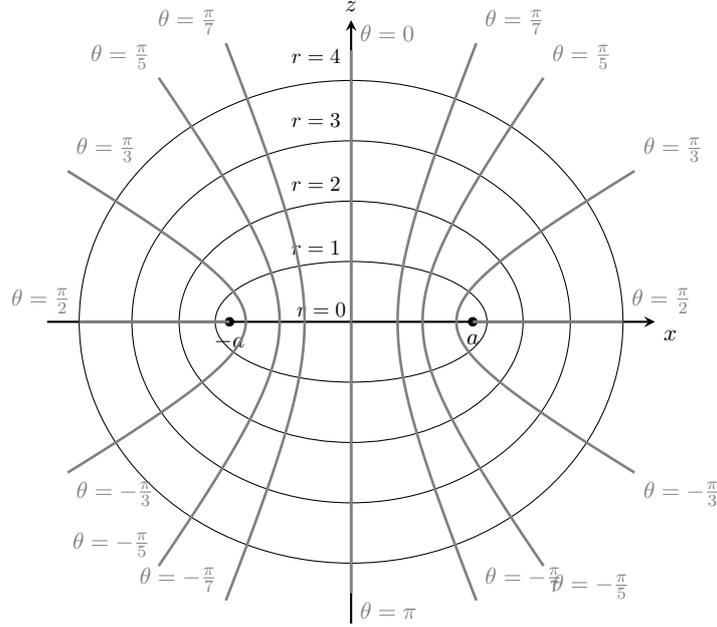


Figura 4.1: Representación de una sección del espacio ( $y = 0$ ) en las coordenadas elipsoidales utilizadas para describir la métrica de Kerr dada por la ecuación (4.1). La región  $r = 0$  representa un disco de radio  $a$ .

Podemos estudiar también qué ocurre cuando  $a = 0$  (el momento angular del agujero es nulo). En esta situación, dado que el agujero no rota, deberíamos recuperar el caso estático y esféricamente simétrico. Pues bien, a partir de la ecuación (4.1) podemos comprobar que se obtiene la métrica de Schwarzschild en su forma habitual en coordenadas polares. La solución de Kerr es coherente con lo que hemos visto hasta ahora.

## 4.1 La métrica de Kerr-Newman

Dada la solución de Kerr, no es difícil generalizarla para incluir una posible carga eléctrica del agujero. Al igual que ocurría al pasar del agujero de Schwarzschild al de Reissner-Nordström, la solución cargada guarda la misma estructura, pero sustituyendo  $2M$  por  $2M - \frac{Q^2}{r}$ . De esta forma, se obtiene la métrica para el conocido como agujero negro de Kerr-Newman, que en coordenadas de Boyer-Lindquist generalizadas toma la forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} + \frac{Q^2}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2(2Mr - Q^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (4.7)$$

donde ahora  $\Delta$  también se ha modificado de la misma forma para añadir la contribución de la carga eléctrica:  $\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2$ .

Esta solución es de gran importancia, pues constituye la métrica más general en la que podemos pensar para un agujero negro estacionario. Sin embargo, ya habíamos hablado anteriormente de la improbabilidad de encontrar agujeros negros cargados en la naturaleza. Debido a esto, y por simplicidad, dado que las propiedades características del agujero negro de Kerr-Newman se mantienen en ausencia de carga eléctrica; vamos a centrar el estudio de los agujeros negros en rotación en la solución de Kerr.

## 4.2 Singularidades, horizontes y ergosferas

A la vista de la métrica del agujero negro de Kerr dada por la ecuación (4.1), se hace patente que las regiones  $\rho^2 = 0$ ,  $\Delta = 0$  y  $\rho^2 = 2Mr$  van a comportarse mal. Para determinar si estas singularidades tienen realmente sentido físico o si son por el contrario un artificio fruto de la elección de coordenadas, vamos a recuperar una vez más el escalar de Kretschmann. Para esta métrica:

$$K = R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) (\rho^4 - 16a^2 r^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}} \quad (4.8)$$

El hecho de que esta cantidad diverja en  $\rho^2 = 0$  nos confirma que esta región se corresponde a una singularidad física real. Sin embargo, no observamos ningún comportamiento anómalo del escalar de Kretschmann en  $\Delta = 0$  ni en  $\rho^2 = 2Mr$ . Esto no nos permite afirmar con total seguridad que estas zonas no constituyan también singularidades reales, pero basándonos en nuestra experiencia con el agujero negro de Schwarzschild vamos a asumir que el mal comportamiento en estas regiones se debe a una mala elección de coordenadas. Más adelante veremos que en un nuevo sistema más conveniente estas patologías efectivamente desaparecen, confirmando que nuestra suposición es correcta.

### 4.2.1 La singularidad

Una vez hemos identificado las singularidades, vamos a ver en más detalle qué superficies definen. En primer lugar, estudiaremos la singularidad real en  $\rho^2 = 0$ , que es equivalente a:

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (4.9)$$

El lado izquierdo de la ecuación es la suma de dos cantidades que no pueden hacerse negativas por definición, por lo que la única opción posible es que ambas se anulen por separado. No es descabellado pedir esto, ya que debemos recordar que estamos describiendo el espacio-tiempo en coordenadas elípticas, por lo que  $r = 0$  ya no define un único punto en el espacio como solía hacer, sino todo un disco. El parámetro  $a$  no puede hacerse nulo, dado que si lo hiciese no estaríamos describiendo un agujero negro en rotación, sino que nos remontaríamos a la solución de Schwarzschild. Por lo tanto, la única solución posible viene dada por los puntos que cumplen:

$$r = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (4.10)$$

La singularidad ya no se sitúa en el punto  $r = 0$  como en los agujeros con simetría esférica, sino que ahora ocupa todo un anillo (recordemos que el valor de  $\phi$  no está fijo). Es como si la rotación del agujero hubiese "centrifugado" la singularidad, obligándola a extenderse. Cabe ahora preguntarse a la vista de este hecho si el comportamiento de esta singularidad va a diferir de lo que hemos visto en los agujeros de Schwarzschild y Reissner-Nordström. La respuesta a esto será claramente sí, pero para verlo en detalle tendremos que esperar un poco más.

### 4.2.2 Los horizontes de sucesos

Vamos a ver ahora en más detalle la patología en la región  $\Delta = 0$ :

$$\Delta = 0 \rightarrow r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \rightarrow r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4.11)$$

Vemos que la ecuación  $\Delta = 0$  nos describe superficies de  $r = \text{cte}$ . Obtenemos de esta forma una estructura análoga a la que ya habíamos visto en el agujero de Reissner-Nordström (aunque debemos recordar que estamos describiendo el espacio en coordenadas elipsoidales, por lo que las superficies  $r = \text{cte}$  ya no son esferas). Más adelante veremos que la hipersuperficie dada por  $r = r_+$  constituye el horizonte de sucesos del agujero, mientras que  $r = r_-$  es un horizonte interno. Volvemos a encontrarnos también con los agujeros extremos, que en este caso se darán para  $M = a$ .

### 4.2.3 La ergosfera

Por último, nos centraremos en  $\rho^2 = 2Mr$ , que se corresponde con un mal comportamiento de la componente  $g_{tt}$  de la métrica. Expandiendo la definición de  $\rho$  tenemos:

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \rightarrow r_{\pm}^e(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4.12)$$

Vemos que la solución representa superficies en las que  $r$  ya no es constante, sino que depende del ángulo  $\theta$ . Estas superficies son completamente nuevas para nosotros, y no podemos compararlas con nada que hayamos visto en los agujeros anteriores. Para comprender lo que representan estas regiones vamos a estudiar el comportamiento de los observadores estáticos en la métrica de Kerr.

Los observadores estáticos son aquellos que se encuentran en reposo, en los que las coordenadas espaciales no varían en el tiempo. Por lo tanto, su 4-velocidad será proporcional al vector de Killing de traslación temporal  $K$ , sólo siendo no nula la componente temporal. Además, la condición de normalización para una trayectoria de tipo tiempo impone  $U^\mu U_\mu = -1$ , lo que implica:

$$-1 = g_{tt} (U^t)^2 \quad (4.13)$$

Vemos inmediatamente que esta condición solo puede satisfacerse siempre y cuando  $g_{tt} < 0$ , pero esto no se cumple en todo el espacio-tiempo de Kerr. De hecho, la función  $g_{tt}$  se anula en las superficies dadas por  $r(\theta) = r_{\pm}^e(\theta)$ , haciéndose positiva en el espacio comprendido entre ambas. Por lo tanto, entre estas dos superficies no podrán existir

observadores estáticos. No importa la fuerza que se aplique sobre él, un observador en esta región no podrá mantenerse en reposo. Podemos interpretar que la rotación del agujero negro arrastra consigo al espacio-tiempo, obligándolo a girar junto a él. A la superficie dada por  $r_+^e$  más allá de la cual el movimiento es obligatorio la conocemos como límite estático. Este límite, sin embargo, no coincide con el horizonte de sucesos del agujero (que hemos dicho que viene dado por  $r_+$ ). Esto quiere decir que existe una región entre las superficies  $r_+^e$  y  $r_+$  en la que los observadores no pueden permanecer estáticos, pero aún tienen la posibilidad de evitar la singularidad y escapar al exterior del agujero. Esta región se conoce como ergosfera.

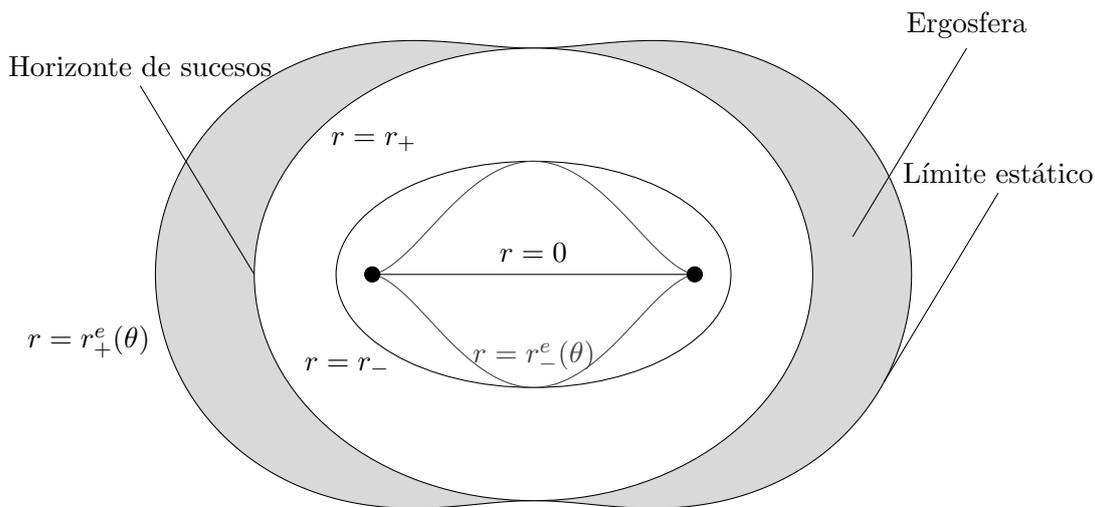


Figura 4.2: Estructura de horizontes del agujero negro de Kerr.

### 4.3 Arrastre de sistemas de referencia inerciales

La imposibilidad de permanecer parado en la ergosfera es un resultado que deriva directamente de la rotación del agujero. Sin embargo, aunque este comportamiento se hace más notable en esta región, la rotación produce comportamientos extraños incluso fuera de las ergosferas y el horizonte de sucesos. Para verlo, vamos a considerar un observador con momento angular nulo en la métrica de Kerr. Para rotaciones contenidas en un plano  $\theta = cte$ , esta condición se expresa como  $L = U_\mu R^\mu = 0$ , donde  $U^\mu$  es la 4-velocidad y  $R^\mu$  el vector correspondiente a la coordenada angular  $\phi$  ( $R = \partial_\phi$ ). Expandiendo explícitamente el lado izquierdo de la ecuación llegamos directamente a:

$$g_{\phi t} \frac{dt}{d\tau} + g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (4.14)$$

desde donde multiplicando por  $\frac{d\tau}{dt}$  obtenemos que la velocidad angular del observador en estas coordenadas es:

$$\omega(r, \theta) = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (4.15)$$

Es decir, aunque el momento angular sea nulo, la frecuencia angular con la que rota el observador no lo es. Podemos decir que todo el espacio-tiempo es forzado a rotar con el agujero, y no sólo la región que define la ergosfera. Cualquier observador es arrastrado a rotar con el agujero, haciendo que éste gire aún cuando en condiciones normales debería estar en reposo (momento angular cero). El efecto se da en todos los puntos exteriores al horizonte, pero es en la ergosfera cuando se lleva al extremo. Como habíamos visto antes, aquí no es posible permanecer estático, en esta zona el arrastre es tan fuerte el agujero nos obliga a girar queramos o no. Como cabría esperar, el arrastre es menor a medida que nos alejamos del agujero. Podemos ver que en regiones lo suficientemente alejadas la velocidad angular del observador de momento angular cero se comporta como  $\omega \propto \frac{1}{r^3}$ , es decir, el arrastre decrece rápidamente a medida que nos alejamos, haciéndose nulo en el infinito.

Este efecto, que hace que un observador inercial que se deja caer desde el infinito sin velocidad angular vaya adquiriéndola a medida que se acerca al agujero, se conoce como arrastre de sistemas de referencia inerciales. No es una propiedad exclusiva de la métrica de Kerr, sino que es algo común a todas las fuentes de gravitación en rotación. Como podemos ver a partir de la ecuación (4.15), el origen del arrastre se manifiesta en el hecho de que la componente  $g_{t\phi}$  de la métrica sea no nula.

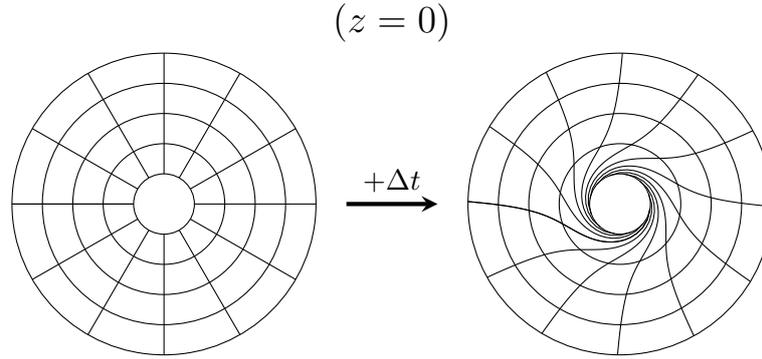


Figura 4.3: Representación esquemática del arrastre de sistemas de referencia inerciales en torno a una fuente gravitacional en rotación con simetría axial a lo largo del eje  $z$ .

Otra consecuencia del arrastre es que no es lo mismo rotar en torno al eje del agujero en un sentido que en el contrario. Para visualizar esto, vamos a considerar un fotón que ha sido emitido en el plano ecuatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) en la dirección  $\phi$  (el movimiento no tiene componente radial inicialmente). En el momento en el que es emitido, el movimiento sólo tiene componente no nula en la coordenada  $\phi$  (además de en la temporal, evidentemente). Así:

$$0 = ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (4.16)$$

Dividiendo por  $dt^2$ , obtenemos una ecuación de segundo grado en  $\frac{d\phi}{dt}$ , cuyas dos soluciones serán las correspondientes a haber lanzado el fotón en un sentido o en el otro:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (4.17)$$

Vemos a partir de esta ecuación que el movimiento en un sentido siempre sale beneficiado con respecto al contrario. El límite de esto se produce a medida que nos acercamos al borde de la ergosfera. Como hemos visto, en esta región  $g_{tt}$  se anula, y por lo tanto las dos soluciones se reducen a:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{2M^2 + a^2} \quad (4.18)$$

Justo en el borde de la ergosfera, cuando lanzamos el fotón en el sentido opuesto de la rotación del agujero éste se queda parado. Y dentro de la ergosfera estará obligado a girar en el mismo sentido que el agujero. Evidentemente, este efecto de arrastre ocurre también con partículas u observadores masivos, que deben moverse con una velocidad menor que la de la luz. Este es el comportamiento que habíamos descrito cuando definimos la ergosfera. Vamos a ver esto en más detalle, estudiando los llamados observadores estacionarios de la métrica de Kerr.

Llamamos observador estacionario a aquel que describe una trayectoria de rotación alrededor del agujero moviéndose sólo en la dirección  $\phi$  con velocidad angular constante. El nombre de este observador proviene de que a lo largo de su movimiento siempre percibe el mismo campo gravitatorio. Su 4-velocidad tendrá por tanto solamente componentes no nulas en las coordenadas  $t$  y  $\phi$ . Como consecuencia, será una combinación lineal de los vectores  $K^\mu$  y  $R^\mu$ :

$$U^\mu = A(K^\mu + \Omega R^\mu) \quad (4.19)$$

donde  $\Omega$  es una constante arbitraria que parametriza la velocidad angular del observador ( $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{U^\phi}{U^t}$ ), y  $A$  es una constante de normalización. Para fijar esta constante, imponemos la condición de normalización que debe cumplir cualquier trayectoria de tipo tiempo:

$$-1 = U^\mu U_\mu = A^2 (g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) \quad (4.20)$$

Para que la ecuación pueda satisfacerse, la única posibilidad es que la cantidad entre paréntesis sea negativa. Dado que se trata de una ecuación de segundo grado en  $\Omega$  y que la componente  $g_{\phi\phi}$  es siempre positiva (es fácil comprobarlo a partir de su definición), la función sólo se hace negativa entre sus dos raíces. Las posibles velocidades angulares  $\Omega$  del movimiento serán entonces:

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+ \quad (4.21)$$

donde

$$\Omega_{\pm} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{\phi\phi}g_{tt}}}{g_{\phi\phi}} \quad (4.22)$$

Esta relación presenta dos casos relevantes. El primero de ellos se da cuando  $g_{tt} = 0$ , en el límite exterior de la ergosfera  $r = r_+^e(\theta)$ . En esta situación  $\Omega_- = 0$ . A partir de aquí  $\Omega$  debe ser positivo: se hace obligatorio girar en el mismo sentido que el agujero. El segundo caso se da sobre el horizonte de sucesos ( $r = r_+$ ), cuando la raíz cuadrada se hace nula. En este caso, las dos raíces convergen, forzando a que la velocidad angular pueda tomar únicamente un valor:

$$\Omega_H = -\frac{g_{t\phi}(r_+)}{g_{\phi\phi}(r_+)} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (4.23)$$

Esta frecuencia se interpreta como la velocidad angular del agujero negro. Sería la velocidad angular con la que un observador estacionario rotaría si estuviese justo afuera del horizonte de sucesos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que este valor es un límite. Ningún observador estacionario puede situarse sobre el horizonte de sucesos, pues justo en  $r = r_+$  la 4-velocidad necesaria es un vector nulo.  $\Omega_H$  es también la máxima velocidad angular permitida dentro de la ergosfera para un observador estacionario.

## 4.4 Vectores y horizontes de Killing

Antes, hemos definido las superficies  $r = r_{\pm}$  como horizontes de sucesos. Así pues, dado que el espacio-tiempo es estacionario y asintóticamente plano, el teorema de rigidez que ya introducimos en la sección 2.5.1 nos garantiza que será un horizonte de Killing. ¿Cuál será pues el vector de Killing de este horizonte? Para esta métrica tenemos dos vectores de Killing, que derivan de las dos simetrías del sistema. Por un lado, está el vector de traslación temporal  $K = \partial_t$ . Por otro, existe también una simetría axial de rotación alrededor del eje de giro, que se expresa a través del vector de Killing  $R = \partial_{\phi}$ . En el agujero de Schwarzschild, el papel de vector de Killing del horizonte lo jugaba el vector de traslación temporal  $K = \partial_t$ , por lo que cabe plantearse si esto sigue siendo así. No lo es. Podemos ver que la norma del vector  $K$  viene dada por:

$$K^{\mu}K_{\mu} = -\frac{1}{\rho^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \quad (4.24)$$

que claramente no se anula en el horizonte de sucesos ( $\Delta = 0$ ), salvo en los polos ( $\theta = 0, \pi$ ). Por el contrario, vemos que la condición  $K^{\mu}K_{\mu} = 0$  es la que nos daba el límite de la ergosfera, la condición  $g_{tt} = 0$ . El hecho de que  $K$  se haga nulo, pasando de ser un vector temporal a uno espacial, nos dice que el paso del tiempo más allá de esta región va a llevar asociado inevitablemente movimiento espacial. Y esta es precisamente la definición de la ergosfera que hemos dado anteriormente.

El vector de traslación temporal no es por tanto el vector de Killing que estamos buscando. Sin embargo, sí conocemos (aunque quizás no nos lo hayamos visto planteado

así) un vector de Killing que se hace nulo en el horizonte. Al hablar de los observadores estacionarios, habíamos definido su 4-velocidad como:

$$U^\mu = A(K^\mu + \Omega R^\mu) \quad (4.25)$$

Esta velocidad es, por definición, un tensor de Killing, pues es una combinación lineal de vectores de Killing. Además, habíamos visto que la trayectoria de estos observadores se hacía nula justo sobre el horizonte de sucesos, donde forzosamente  $\Omega = \Omega_H$ . Así pues, ya habíamos deducido anteriormente la condición que necesitábamos. El vector de Killing correspondiente al horizonte de sucesos del agujero de Kerr es definido como:

$$\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu \quad (4.26)$$

## 4.5 Coordenadas nulas entrantes y salientes

Para tratar de encontrar un sistema de coordenadas que nos permita sortear los malos comportamientos que aparecen en la métrica de Boyer-Lindquist, vamos a recurrir una vez más a las trayectorias geodésicas de los rayos de luz. Este camino, sin embargo, se complica notablemente cuando el agujero negro está en rotación. El arrastre de los sistemas de referencia inerciales que provoca la rotación del agujero no hace posibles las trayectorias geodésicas radiales. Por lo tanto, ya no podremos utilizar una trayectoria en la que  $\phi$  se mantenga constante. Ahora tendremos que tener en cuenta también esta coordenada, lo que hace el trabajo más dificultoso que en los agujeros con simetría esférica.

El punto de partida serán las ecuaciones del movimiento de una geodésica nula. Si operamos sobre la ecuación geodésica en las coordenadas de Boyer-Lindquist, las ecuaciones del movimiento para trayectorias nulas pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\rho^2 \frac{dt}{d\tau} = -a(aE \sin^2 \theta - L) + (r^2 + a^2) \frac{P}{\Delta} \quad (4.27)$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R} \quad (4.28)$$

$$\rho \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\Theta} \quad (4.29)$$

$$\rho^2 \frac{d\phi}{d\tau} = - \left( aE - \frac{L}{\sin^2 \theta} \right) + a \frac{P}{\Delta} \quad (4.30)$$

con:

$$P = E(r^2 + a^2) - aL \quad (4.31)$$

$$R = P^2 - \Delta \left[ (l - aE)^2 + C \right] \quad (4.32)$$

$$\Theta = C + \cos^2 \theta \left( a^2 E^2 - \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (4.33)$$

donde  $E$ ,  $L$  y  $C$  son tres constantes del movimiento que se correlacionan con la energía, el momento angular y la conocida como “constante de Carter” respectivamente.

Ahora, vamos a elegir estos parámetros convenientemente, y de forma que la geodésica describa una trayectoria de  $\theta$  constante. Elegimos:

$$L = aE \sin^2 \theta \quad C = -(L - aE)^2 \quad (4.34)$$

De este modo, las ecuaciones del movimiento se simplifican notablemente, reduciéndose a:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad \frac{dr}{d\tau} = \pm 1 \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{a}{\Delta} \quad (4.35)$$

donde el valor de  $E$  ha sido absorbido dentro del parámetro  $\tau$ .

De esta forma, el vector tangente a la trayectoria vendrá dado por:

$$k^\mu \partial_\mu = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_t \pm \partial_r + \frac{a}{\Delta} \partial_\phi \quad (4.36)$$

con el signo superior correspondiente al rayo saliente y el inferior al entrante al agujero.

De forma análoga a como habíamos hecho en los agujeros esféricamente simétricos, vamos a introducir unas nuevas coordenadas que se mantengan constantes a lo largo de estas trayectorias. Para los rayos entrantes definimos:

$$v = t + r^* \quad \psi = \phi + r^\square \quad (4.37)$$

donde

$$r^* = \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr = r + \frac{Mr_+}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{Mr_-}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| \quad (4.38)$$

$$r^\square = \int \frac{a}{\Delta} dr = \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right| \quad (4.39)$$

Se hace evidente a partir de las ecuaciones de movimiento (4.35) que las coordenadas  $v$  y  $\psi$  se mantienen constantes a lo largo de la trayectoria. En el sistema  $(v, r, \theta, \psi)$  todas las componentes salvo  $r$  se mantienen constantes, siendo la coordenada radial el parámetro afín.

Podemos hacer una definición análoga para los rayos salientes, en la que ahora sustituimos la coordenada  $v$  y  $\psi$  por la  $u$  y la  $\chi$ , pero las propiedades se mantienen intactas.

$$u = t - r^* \quad \chi = \phi - r^\square \quad (4.40)$$

Éstas son las coordenadas de Eddington-Finkelstein para la métrica de Kerr.

## 4.6 Diagrama de Penrose-Carter

La estructura causal en el agujero de Kerr es notablemente más compleja que en los casos anteriores. Al añadir la rotación, hemos perdido la simetría en la coordenada  $\theta$  de la que gozábamos anteriormente. La eliminación de esta simetría hace que ya no podamos elegir un valor de  $\theta = \text{cte.}$  sin perder la generalidad. Sin embargo, si queremos representar la estructura causal en un diagrama bidimensional de Penrose-Carter, no nos queda otra opción. Vamos pues a fijar un valor de  $\theta$  constante, teniendo en cuenta que esto representa una pérdida de la generalidad, ya que distintos valores darán lugar a distintos comportamientos. Por simplicidad, vamos a elegir la dirección  $\theta = 0$ . Seguimos conservando la simetría en la coordenada  $\phi$ , por lo que sí podemos elegir sin ningún perjuicio fijar  $\phi = 0$ . Con estas condiciones, podemos representar la métrica de Kerr a través de las coordenadas de Eddington-Finkelstein  $u$  y  $v$  que habíamos definido antes. Es un cálculo directo mostrar que evaluando las coordenadas de Boyer-Lindquist sobre las superficies  $\theta = \phi = 0$  obtenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{r^2 + a^2} dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2 \\ &= -\frac{\Delta}{r^2 + a^2} \left( dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) \left( dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) = -\frac{\Delta}{r^2 + a^2} dudv \end{aligned} \quad (4.41)$$

Esta métrica se hace singular cuando  $\Delta = 0$ , en las superficies  $r_{\pm}$ . Este es un caso análogo al que nos encontrábamos en el agujero de Reissner-Nordström, por lo que vamos a proceder de igual forma para obtener unas nuevas coordenadas que se comporten bien en estas regiones. Al tener dos singularidades vamos a necesitar dos parches:

En un entorno próximo a  $r = r_+$ , la métrica se aproxima por:

$$ds^2 \simeq 2\kappa_+ (r - r_+) dudv \quad \text{con} \quad \kappa_+ = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} \quad (4.42)$$

donde al igual que ocurría en Reissner-Nordström,  $\kappa_+$  acabará descubriéndose como la gravedad de superficie del horizonte  $r_+$ . Y si ahora calculamos en esta misma aproximación el valor de  $r^* = \frac{1}{2}(v - u)$  obtenemos:

$$\frac{1}{2}(v - u) = r^* \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \log |\kappa_+ (r - r_+)| \quad (4.43)$$

desde donde es directo despejar:

$$|\kappa_+ (r - r_+)| = e^{\kappa_+(v-u)} \quad (4.44)$$

que, dada la forma de la métrica de la ecuación (4.42), motiva a introducir unas nuevas coordenadas  $(U_+, V_+)$  que absorban la patología dentro de ellas:

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u} \quad V_+ = e^{\kappa_+ v} \quad (4.45)$$

donde el signo superior aplica cuando  $r > r_+$  y el inferior en caso contrario. En estas nuevas coordenadas la métrica es manifiestamente no singular en  $r_+$ :

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+} dU_+ dV_+ \quad (4.46)$$

Haciendo lo mismo para el horizonte  $r = r_-$  llegamos al cambio de coordenadas:

$$U_- = \mp e^{-\kappa_- u} \quad V_- = -e^{\kappa_- v} \quad (4.47)$$

donde el signo superior se corresponde con  $r > r_-$  y viceversa, y se ha definido:

$$\kappa_- = -\frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{r_-^2 + a^2} \quad (4.48)$$

Estos parches de coordenadas son análogos a los que utilizábamos en la métrica de Reissner-Nordström; y evidentemente, por su construcción debe cumplirse que los rayos de luz entrantes y salientes se mueven en trayectorias de  $V$  y  $U$  constantes respectivamente.

El camino a seguir a partir de ahora continúa siendo conocido: compactificar el sistema de coordenadas de tipo Kruskal en  $U$  y  $V$  para obtener una representación de todo el espacio-tiempo contenido en una región finita en el espacio de coordenadas. El resultado para los dos parches es el que se reproduce en las figuras 4.4. Los dos parches de coordenadas son válidos en la región situada entre ambos horizontes, por lo que podemos solaparlos. Y al igual que ocurría en el caso de Reissner-Nordström, no hay razón para no poder seguir extendiendo esto más allá, colocando otro parche de coordenadas  $(U_+, V_+)$  a continuación del de  $(U_-, V_-)$ , y así sucesivamente. De esta forma, encontramos lo que se conoce como la extensión analítica maximal del agujero negro de Kerr (figura 4.5).

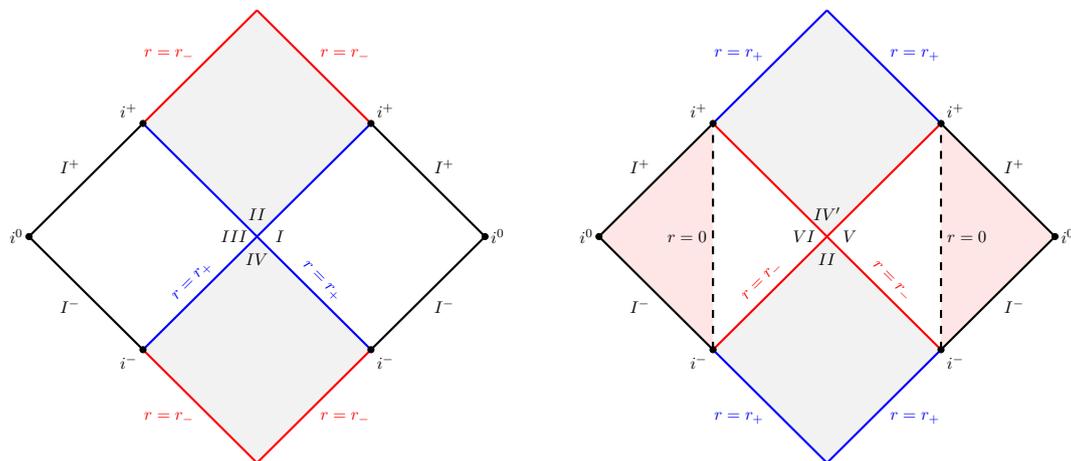


Figura 4.4: Parches de Penrose-Carter para el agujero negro de Kerr. A la izquierda se encuentra el parche válido para  $r > r_-$  y a la derecha el de  $r < r_+$ .

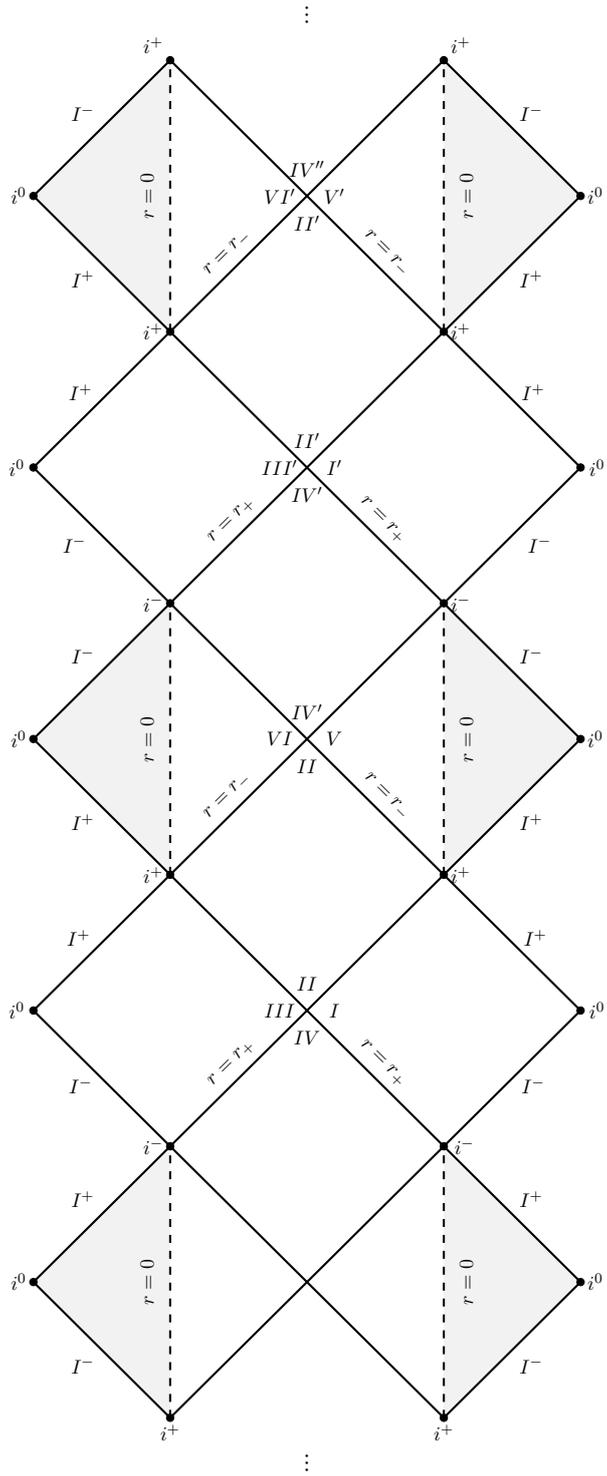


Figura 4.5: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo de Kerr.

El diagrama no difiere mucho en el exterior del agujero del que pudiésemos encontrar en Schwarzschild o Reissner-Nordström (salvo por la presencia de la ergosfera). Las verdaderas diferencias comienzan una vez cruzamos el horizonte. A primera vista, lo que se aprecia no es muy diferente al diagrama para el agujero de Reissner-Nordström. Se repite el comportamiento de  $r$  como coordenada temporal y espacial en las distintas regiones que delimitan los horizontes. Además, la región  $r = 0$  constituye una superficie de tipo temporal, y por lo tanto es evitable. De este modo, tenemos la opción de continuar nuestro camino evitando la región  $r = 0$ , transitando sucesivamente por distintas copias idénticas de nuestro universo. En este sentido, el agujero de Kerr se comporta igual que el de Reissner-Nordström.

Sin embargo, la principal diferencia radica en la propia superficie  $r = 0$ . Recordemos que la singularidad se había dispersado en un anillo de radio  $a$  en el plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de forma que no toda la región  $r = 0$  forma parte de la singularidad. Además, en este diagrama estamos considerando la dirección  $\theta = 0$ , por lo que en esta dirección podremos atravesar sin problemas la singularidad y pasar al otro lado. Aquí encontraríamos una nueva región del espacio-tiempo descrita por las coordenadas  $r < 0$ . Esta nueva región es también asintóticamente plana, pero ya no es una copia idéntica de aquel universo del que provenimos, sino que aquí no hay ningún horizonte. Nada nos impide rehacer nuestros pasos, volver a atravesar la singularidad y volver por donde hemos venido. Además, esta región todavía guarda una sorpresa más: curvas causales cerradas. Veremos en más detalle estas curvas en la sección 4.6.2.

#### 4.6.1 Horizontes de Cauchy

Otra característica del agujero de Kerr (y que ya estaba presente en Reissner-Nordström), es el hecho de que el horizonte interno ( $r = r_-$ ) constituye un horizonte de Cauchy. Un horizonte de Cauchy es un límite en el dominio de validez de un problema de Cauchy o de valor inicial. Para entender lo que representa esto, vamos a definir primero algunas nociones.

Dada una variedad  $M$  y un subconjunto  $S$  de dicha variedad, decimos que el futuro desarrollo de Cauchy de  $S$ ,  $D^+(S)$ , consiste en el conjunto de todos los puntos  $p \in M$  tales que cualquier observador que se encuentre en el punto  $p$  deba haber pasado necesariamente por  $S$ . Podemos hacer una definición análoga para el pasado desarrollo de Cauchy  $D^-(S)$ , consistente en todos los puntos tales que cualquier trayectoria temporal que sale de ellos debe atravesar  $S$  en algún momento. Decimos que  $S$  es una superficie de Cauchy si todas las posibles trayectorias temporales (cuando las extendemos infinitamente) de la variedad  $M$  tienen un (y sólo un) punto de intersección con  $S$ . Entonces, en una superficie de Cauchy  $S$ , se cumple  $D^+(S) \cup S \cup D^-(S) = M$ . En términos familiares, podemos interpretar que las superficies de Cauchy representan un instante de tiempo extendido a todas las posiciones. Dado que todas las curvas temporales atraviesan en algún momento la superficie de Cauchy  $S$ , será posible utilizar la información contenida en  $S$  como punto de partida de un problema de valor inicial. Entonces, si conocemos toda la información de las trayectorias sobre la superficie  $S$ , podremos utilizar las ecuaciones de Einstein para determinar toda su evolución futura (y pasada). Así, todo el

futuro (y pasado) desarrollo del universo queda determinado a partir de la información codificada en  $S$ .

Sin embargo, si  $D^+(S) \cup S \cup D^-(S) \neq M$ , entonces existe un horizonte de Cauchy que separa  $D^\pm(S)$  de las regiones de la variedad que no están completamente determinadas por la información en  $S$ . Podemos plantear esta situación en el agujero negro de Kerr. Es fácil ver a partir de la figura 4.6 que cuando nos restringimos a las regiones  $I$ ,  $II$ ,  $III$  y  $IV$  todas las posibles trayectorias temporales atraviesan en algún momento la superficie  $S$ . Decimos que  $S$  es efectivamente una superficie de Cauchy para estas regiones. Sin embargo, esto cambia completamente cuando atravesamos el horizonte interno  $r = r_-$ . Y es que en las regiones  $V$  y  $VI$  existen trayectorias temporales con origen al otro lado de la singularidad que no han pasado ni pasarán en ningún momento por  $S$ . Claramente  $r = r_-$  constituye un horizonte de Cauchy, más allá del cual el futuro ya no está completamente determinado por las condiciones en  $S$ , ya que puede llegar información (trayectorias) desde el otro lado de la singularidad.  $r = r_-$  separa las regiones causalmente determinadas por  $S$  de aquellas que no lo están.

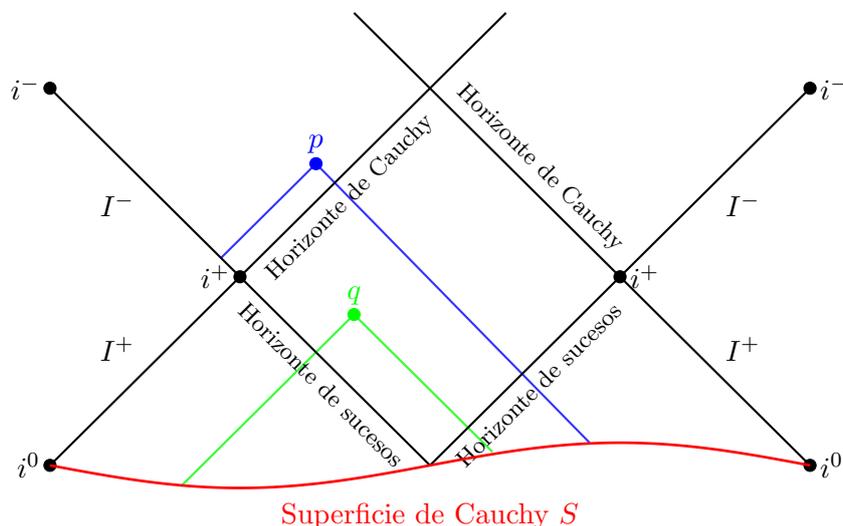


Figura 4.6: Horizonte de Cauchy en la métrica de Kerr. El pasado causal del punto  $q$  exterior al horizonte de Cauchy está completamente determinado por la información contenida en  $S$ . Sin embargo, el cono de luz pasado del punto  $p$ , en el interior del horizonte, contiene puntos cuyas trayectorias pueden no cruzar en ningún momento la superficie de Cauchy.

#### 4.6.2 Curvas causales cerradas

Como habíamos introducido antes, una propiedad extraña de la región al otro lado de la singularidad, en la que  $r < 0$ , es la posibilidad de que existan aquí lo que se conoce como curvas causales cerradas. Es decir, la curvatura del espacio-tiempo en esta región es tal que puede hacer que una curva temporal que se dirige continuamente hacia el futuro

acabe llegando al mismo instante del que partió. Antes de discutir las implicaciones patológicas que esto conllevaría, vamos a mostrar en primer lugar su existencia teórica.

Supongamos una trayectoria en coordenadas de Boyer-Lindquist en la cual todas las coordenadas salvo  $\phi$  se mantienen constantes. Si esta trayectoria fuese posible, al realizar una vuelta completa en torno al ángulo  $\phi$  retornaríamos exactamente al mismo instante inicial, volviendo atrás en el tiempo al punto desde donde habíamos partido. El elemento de línea sobre esta órbita viene dado por:

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 = \left[ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2M}{r} \frac{a^2 \sin^4 \theta}{1 + \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta} \right] d\phi^2 \quad (4.49)$$

En general, para valores de  $r$  positivos  $ds^2$  siempre es mayor que cero, por lo que estas trayectorias siempre son de tipo espacio e imposibles de realizar por un observador. Sin embargo, más allá de la singularidad, donde  $r < 0$ , esta posibilidad se hace real. Vamos a considerar que la trayectoria se da en un plano de  $\theta = cte.$ , y en una región muy próxima a la singularidad:  $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta$  y  $r = -a\delta$  con  $\delta$  tan pequeño como se quiera. Si expandimos en  $\delta$  en la vecindad de la singularidad, obtenemos que para valores de  $\delta$  lo suficientemente próximos a cero:

$$ds^2 \simeq \left( a^2 - \frac{Ma}{\delta} \right) d\phi^2 \quad (4.50)$$

A partir de esta expresión se concluye que para un valor de  $\delta$  lo suficientemente pequeño  $ds^2 < 0$ , y por tanto pueden existir trayectorias temporales que constituyan curvas causales cerradas. La existencia de estas curvas genera inevitablemente la posibilidad de que un observador pueda ser capaz de viajar a su propio pasado, con todas las paradojas que esto implicaría. Los problemas que esto genera son bastante claros, por lo que esperaríamos que existiese algo que evite que esta situación pueda llegar a ocurrir. Este papel lo juega una vez más la hipótesis del censor cósmico. Y es que en su sentido fuerte, esta hipótesis plantea que la relatividad general debe ser una teoría determinista. Por lo tanto, si se cumple esta hipótesis no estaría permitido extender el espacio-tiempo más allá del horizonte de Cauchy, no pudiendo existir entonces la región  $r < 0$  en la que son posibles las curvas causales cerradas.

## 4.7 Procesos de Penrose

Vamos a ver ahora que cuando un agujero negro rota, es posible utilizar la ergosfera para extraer energía del agujero. Estos procesos de extracción se conocen como procesos de Penrose. Analicémoslos en más detalle.

En relatividad general, el 4-momento  $p^\mu$  de una partícula de masa  $m$  viene descrito por la expresión:

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.51)$$

Utilizando este vector, podemos definir dos cantidades conservadas:

$$E = -K_\mu p^\mu \quad L = R^\mu p^\mu \quad (4.52)$$

donde  $K^\mu$  y  $R^\mu$  son los vectores de Killing de la métrica de Kerr que habíamos definido anteriormente.

A partir de las definiciones, se hace claro que  $E$  se corresponde a la energía de la partícula que se mediría desde el infinito (en el infinito  $K_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ , y por tanto  $E = p^0$ ) y  $L$  a su momento angular de rotación en torno al eje del agujero (también medido desde el infinito). Mientras estamos fuera de la ergosfera,  $K$  es el vector que define el paso del tiempo, por lo que  $K_\mu p^\mu < 0 \rightarrow E > 0$ . Sin embargo, cuando evaluamos estas cantidades sobre la ergosfera ocurre algo peculiar. En esta región  $K^\mu$  se hace de tipo espacio, permitiendo que podamos imaginar entonces partículas en las que:

$$E = -K_\mu p^\mu < 0 \quad (4.53)$$

Debemos recordar antes de alarmarnos que  $E$  denota la energía de la partícula que se mediría en el infinito si esta fuese llevada hasta allí. Sin embargo, cualquier medida local de la energía de la partícula dará como resultado una energía positiva. El signo negativo hace referencia a que la partícula no puede existir fuera de la ergosfera (está ligada, no tiene permitido escapar con ese valor de energía), y no a que estemos creando partículas de energía negativa. Dada esta condición, no es difícil imaginar un proceso en el que se utilicen partículas de “energía negativa” creadas en el interior de la ergosfera para extraer energía del agujero negro. Estos escenarios se conocen como procesos de Penrose. La idea no es compleja: un observador en el exterior del agujero se deja caer hacia la ergosfera cargando un bulto pesado. El momento total de ambos será  $p_T^\mu$ , y su energía conservada  $E = -K_\mu p_T^\mu > 0$  (ya que vienen de afuera de la ergosfera y  $E$  es una cantidad que debe conservarse). Una vez en el interior de la ergosfera, el observador lanza el bulto con un 4-momento  $p_1^\mu$ . Su 4-momento resultante será entonces  $p_2^\mu$ , de forma que debe cumplirse:

$$p_T^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu \quad (4.54)$$

y por tanto, si contraemos con  $K^\mu$ :

$$E_T = E_1 + E_2 \quad (4.55)$$

Si el observador es lo suficientemente preciso al lanzar el bulto, es posible que lo haya hecho de forma que  $E_1 < 0$ . Además, puede demostrarse que es posible hacerlo de tal manera que el momento  $p_2$  resultante lleve al observador hacia fuera de la ergosfera a través de una trayectoria geodésica. De esta forma, la energía conservada  $E_2$  con la que el observador sale de la ergosfera es mayor de aquella con la que entró. Ha conseguido extraer energía del agujero negro.

$$E_2 = E_T - E_1 > E_T \quad (4.56)$$

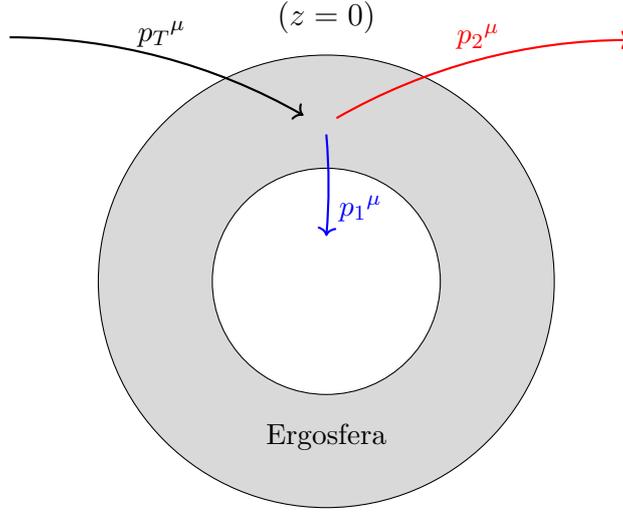


Figura 4.7: Esquemmatización de un proceso de Penrose.

La energía no se crea de la nada, por lo que si el observador ha salido del agujero con más energía, es porque el agujero debe haberla perdido de alguna forma en el proceso. La respuesta está en que para que el bulto adquiriera una energía conservada negativa, ha debido ser lanzado en contra de la rotación del agujero, y por lo tanto éste ha perdido momento angular (y energía en consecuencia). Vamos a verlo en más detalle.

El hecho de que la partícula lanzada tenga  $E < 0$  hace que sea imposible para ella escapar de la ergosfera. Su destino inevitable será caer al interior del agujero negro. Una vez ha cruzado el horizonte de sucesos, la masa/energía  $M$  del agujero y su momento angular  $J$  han cambiado:

$$\delta M = E_1 \quad \delta J = L_1 = R^\mu p_{1\mu} \quad (4.57)$$

Dado que  $E_1 < 0$ , el proceso reducirá la masa del agujero negro. Sin embargo, no es tan directo comprobar que su momento angular también se ve reducido. Para verlo, es útil considerar un observador estacionario (que se mueve con  $r$  y  $\theta$  fijos). Ya hemos visto anteriormente que la 4-velocidad de este observador (vista desde el infinito) será:

$$U^\mu = A(1, 0, 0, \Omega) \quad (4.58)$$

donde  $A > 0$  es una constante de normalización y  $\Omega$  la velocidad angular del observador con respecto al infinito. La energía de la partícula que mide este observador cuando ésta pasa junto a él será:

$$E_{obs} = -p_{1\mu} U^\mu = -A(-E_1 + L_1 \Omega) \quad (4.59)$$

Esta energía debe ser necesariamente positiva, por lo que debe cumplirse:

$$L < \frac{E_1}{\Omega} \quad (4.60)$$

Y como  $E_1 < 0$  y  $\Omega > 0$  para cualquier observador en la ergosfera,  $L$  debe ser necesariamente negativa, es decir, dirigida en sentido contrario a la rotación del agujero. Por lo tanto, el momento angular del agujero negro decrece en un proceso de Penrose. Decimos que el agujero pierde energía rotacional. El hecho de que estemos reduciendo el momento angular del agujero hace que este proceso no vaya a poder repetirse hasta agotar toda la energía del agujero. Sólo podremos extraer energía hasta que el momento angular se acabe ( $a = 0$ ) y pase a ser un agujero de Schwarzschild. Cuando esto ocurre, la ergosfera deja de existir, y por lo tanto ya no pueden seguir llevándose a cabo procesos de Penrose.

A partir de la discusión anterior, podemos encontrar un límite para la cantidad de momento angular que es posible “robarle” al agujero en un proceso de Penrose. El máximo valor posible de  $\Omega$  se da para  $r = r_+$ , cuando  $\Omega = \Omega_H$ . Por lo tanto, los cambios en masa y momento angular del agujero deben respetar la condición:

$$\delta J \leq \frac{\delta M}{\Omega_H} \quad (4.61)$$

El proceso ideal se alcanzaría a medida que la trayectoria de la partícula se hace nula, límite en el que se lograría  $\delta J = \frac{\delta M}{\Omega_H}$ .

Retomaremos esta propiedad de la solución de Kerr cuando hablemos de la termodinámica de agujeros negros, donde veremos que está íntimamente relacionada con el conocido como teorema del área.

## 4.8 Gravedad de superficie

Hemos visto que el horizonte de sucesos en  $r = r_+$  constituye un horizonte de Killing para el vector:

$$\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu \quad (4.62)$$

Por lo tanto, podemos definir una gravedad de superficie sobre este horizonte empleando la ecuación (2.28), que puede demostrarse (apéndice E.2) que es equivalente a:

$$\nabla_\mu (-\chi^\nu \chi_\nu) = 2\kappa \chi_\mu \quad (4.63)$$

Por otro lado, calculamos la norma del vector de Killing  $\chi^\mu \chi_\mu$ , que viene dada por la expresión:

$$\chi^\mu \chi_\mu = \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( \Omega_H + \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}} \right)^2 - \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma} \quad (4.64)$$

Y diferenciando y evaluando sobre el horizonte, obtenemos:

$$\nabla_\mu (-\chi^\nu \chi_\nu) = \frac{\rho^2}{\Sigma} \partial_\mu \Delta \quad (4.65)$$

Sobre este horizonte, tenemos que  $\partial_\mu \Delta = 2(r_+ - M) \delta_{\mu r}$  y  $\chi_\mu = (1 - a\Omega_H \sin^2 \theta) \delta_{\mu r}$ . Ahora, comparando con la ecuación (4.63), es un cálculo directo llegar a la expresión para la gravedad de superficie:

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2} \quad (4.66)$$

Vemos que es una cantidad que no depende de la coordenada  $\theta$ , por lo que es constante a lo largo del horizonte. Como veremos más adelante, esta es una propiedad que aplica a los agujeros negros en general, no sólo al de Kerr.

De igual manera podemos obtener la expresión para la gravedad de superficie del agujero estático más general, el de Kerr-Newman. Toma la misma forma que la dada en la ecuación (4.66), donde evidentemente habría que sustituir el valor del radio del horizonte de sucesos  $r_+$  por su valor equivalente para el agujero cargado. También vemos que si fijamos  $a = 0$ , la expresión se reduce a la del agujero negro de Schwarzschild, de forma que todo parece ser coherente.

## 4.9 2-esfera de bifurcación

Vamos ahora a definir un concepto que recuperaremos más adelante, el de la 2-esfera de bifurcación. Ésta es una región del horizonte de sucesos donde el vector de Killing correspondiente al horizonte se hace cero.

Podemos ver esta región por ejemplo en el agujero negro de Schwarzschild. En esta métrica, el vector de Killing que corresponde al horizonte de sucesos es el de traslación temporal  $K = \partial_t$ . Para poder ver donde se ubicaría esta región en el diagrama de Penrose-Carter, vamos a reescribir este vector en coordenadas de Kruskal. El cambio de coordenadas de un vector  $V$  en coordenadas  $x^\mu$  a otro sistema de coordenadas  $x'^\mu$  viene dado por:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (4.67)$$

En el caso que nos ocupa,  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , por lo que sólo hará falta calcular la derivada temporal:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dU}{du} = -\frac{U}{4M} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dV}{dv} = \frac{V}{4M} \quad (4.68)$$

De esta forma, obtenemos la expresión del vector  $K$  en coordenadas de Kruskal:

$$K^U = -\frac{U}{4M} \quad K^V = \frac{V}{4M} \quad (4.69)$$

Queda claro que la región de bifurcación se dará en las coordenadas  $(U, V) = (0, 0)$ , que constituyen una 2-esfera en las coordenadas polares habituales (ya que no están fijadas  $\theta$  y  $\phi$ ), de ahí la denominación. Podemos notar que esta región sólo existe en la

extensión maximal del agujero, por lo que si éste se ha formado por colapso gravitacional la 2-esfera no existirá.

Podemos plantearnos ahora si esta región existe también en el agujero de Kerr. Vamos a considerar las coordenadas  $(v, r, \theta, \psi)$ , que son regulares sobre el horizonte de sucesos. Hemos visto que, en el agujero de Kerr (y en general ocurre también para cualquier agujero estacionario), el horizonte de eventos es un horizonte de Killing para el vector:

$$\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu \quad (4.70)$$

Por definición, las curvas integrales dada por:

$$\chi^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha} \quad (4.71)$$

son geodésicas nulas contenidas en el horizonte (ver apéndice A), donde  $\alpha$  es un parámetro que no tiene por qué ser afín y que en este caso se corresponde con el tiempo avanzado  $v$ . Es decir, cumplen:

$$\chi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu = \kappa(\alpha) \chi^\mu \quad (4.72)$$

Como hemos visto antes, esta geodésica va a ser la que nos defina la gravedad de superficie del agujero, por lo que sabemos que (salvo que estemos en el caso de un agujero extremo) el parámetro  $v$  no es afín ( $\kappa \neq 0$ ). Vamos entonces a buscar un parámetro afín  $\lambda$  para esta ecuación. Podemos comprobar que, dado que  $\kappa$  es constante a lo largo del horizonte, el vector afinmente parametrizado que cumple la ecuación geodésica es:

$$\zeta^\mu = V^{-1} \chi^\mu \longrightarrow \chi^\mu = V \zeta^\mu \quad (4.73)$$

donde

$$V = \kappa \lambda = e^{\kappa v} \quad (4.74)$$

Por lo tanto, siempre que el horizonte de sucesos sea geodésicamente completo, es decir, siempre que podamos extender los generadores nulos hasta un instante infinitamente lejano en el pasado; podremos encontrar un instante en el que  $V = 0$  y por lo tanto el vector de Killing se anule. Todos los generadores nulos pasan por la 2-esfera en el instante  $\lambda = 0$ . Es evidente que si el agujero se ha formado por colapso gravitacional, el horizonte de sucesos no existía en un instante infinitamente pasado, y por lo tanto esta región donde  $V = 0$  no puede existir. En este caso no habría 2-esfera de bifurcación. Es importante mencionar para futuros desarrollos que este razonamiento no sólo aplica para agujeros de Kerr, sino para cualquier agujero negro estacionario.

## Capítulo 5

# Los agujeros negros “reales”

En las secciones anteriores, hemos dado por hecho sin ningún tipo de consideración la existencia de agujeros blancos, universos paralelos accesibles o curvas causales cerradas. Sin embargo, cabe preguntarse hasta qué punto podemos considerar estas situaciones como realistas, como posibles en la física real, y no como objetos meramente teóricos. Ese será precisamente el tema de discusión de este capítulo, en el que buscaremos determinar cómo son realmente los agujeros negros que podríamos encontrarnos en nuestro universo. Como base para este análisis hemos recurrido principalmente a [2], [1] y [14].

El primer ejemplo de este tipo de situaciones poco esperables en la realidad nos lo encontramos al obtener la extensión maximal del espacio-tiempo de Schwarzschild. Esta solución no solo describe el agujero negro planteado inicialmente, sino que también lleva asociada consigo un agujero blanco y otra región paralela asintóticamente plana. Pero ¿tenemos razones para pensar que estas nuevas regiones existen realmente en los agujeros negros que podemos encontrar en la naturaleza? Pues bien, si consideramos que el agujero negro se ha formado a partir de un colapso gravitacional, la respuesta es que no. La razón podemos encontrarla al observar el diagrama de Penrose-Carter del agujero completo (figura 2.2). Si observamos la definición de los horizontes en las coordenadas de Schwarzschild, se puede ver que el horizonte pasado que conecta las regiones IV y I se corresponde con el radio de Schwarzschild  $r = 2M$  para un tiempo de coordenadas infinitamente pasado  $t = -\infty$ . Sin embargo, si consideramos que el agujero proviene del colapso de una estrella, éste no ha podido estar ahí siempre. Es decir, en este instante infinitamente lejano no existía el agujero, y por lo tanto no podemos utilizar la métrica de Schwarzschild para describir esta región. Recordemos también, que la métrica de Schwarzschild es una solución de vacío, por lo que tampoco se puede aplicar para describir el interior de la estrella mientras está colapsando. El diagrama de Schwarzschild no puede continuar más allá de la superficie temporal que describe la superficie de la estrella que está colapsando. Si realizamos esta representación en más detalle, el diagrama correspondiente a un agujero negro formado a partir del colapso gravitacional de una estrella sería el siguiente:

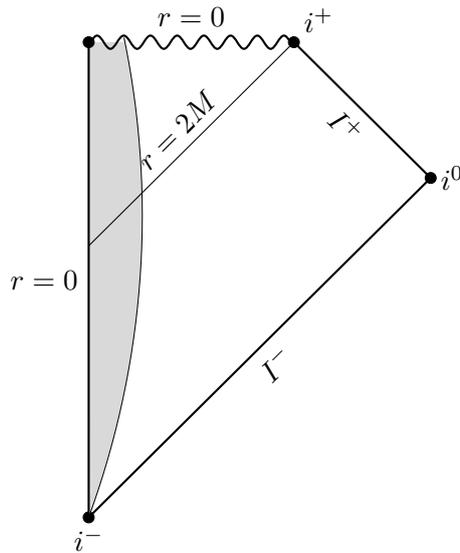


Figura 5.1: Diagrama de Penrose-Carter de un agujero negro formado por colapso gravitacional. La zona sombreada representa el interior de la estrella en colapso, que no puede ser descrito por la solución de Schwarzschild.

El nuevo diagrama comparte con el “completo” el comportamiento y la representación de la singularidad y el horizonte de sucesos; pero han desaparecido el agujero blanco, el horizonte de sucesos pasado y la región paralela asintóticamente plana; que sólo pueden estar presentes si suponemos que el agujero ha existido siempre.

El caso de las extensiones de los agujeros de Reissner-Nordström y Kerr es aún más problemático. Estas soluciones no solo plantean la existencia de universos paralelos, sino que ofrecen una forma de esquivar la singularidad y poder llegar hasta ellos. Otra vez, podemos plantearnos si ésta es una situación realista, o si por el contrario es algo más cercano a la ciencia-ficción. La respuesta, una vez más, vuelve a ser decepcionante. Y es que la existencia de estos túneles que conectan universos a través del agujero negro está muy condicionada a que se cumplan las simetrías que hemos considerado de estaticidad/estacionaridad y simetría esférica/axial. Perturbaciones mínimas en estas condiciones, como las que se darían en un agujero negro real, romperían la geometría interna del agujero, haciendo imposibles los viajes entre universos. Dicho de otra forma, el horizonte de Cauchy de estos agujeros, y por lo tanto todas las regiones que seguirían, son muy inestables bajo perturbaciones. Pero, de todas formas, vamos a suponer el nada realista caso de que estuviésemos ante un agujero de Reissner-Nordström o de Kerr exacto, sin nada que perturbase la métrica ideal. En esta situación, ¿sería posible atravesarlo para explorar todos los posibles universos paralelos? La respuesta sigue siendo probablemente no. Y es que cualquier observador en el agujero representaría en sí mismo una perturbación para la geometría del agujero. Como hemos dicho, el horizonte de Cauchy en  $r = r_-$  es extremadamente sensible a las perturbaciones, por lo que el espacio-tiempo con el observador en su interior ya no podría ser descrito por



## Capítulo 6

# Termodinámica de los agujeros negros

En 1973, Stephen Hawking, Jim Bardeen y Brandon Carter formularon cuatro leyes fundamentales que pretendían describir el comportamiento de los agujeros negros [15], y que guardan un gran parecido con las leyes habituales de la termodinámica. Aunque inicialmente este hecho fue percibido como una mera coincidencia formal, pronto se hizo patente la utilidad de estudiar los agujeros negros desde un punto de vista termodinámico. Este sorprendente descubrimiento ha afectado radicalmente a nuestro entendimiento de la relatividad general, y a su relación con la teoría cuántica de campos. En los siguientes apartados, realizaremos un acercamiento teórico a la derivación de estas cuatro leyes de la termodinámica de los agujeros negros, haciendo hincapié en sus correspondientes leyes análogas en la termodinámica clásica. Para ello, utilizaremos como principales fuentes los libros y artículos [1], [16], [17], [2], [18], [15] y [19].

### 6.1 El teorema de no pelo

Una de las características más sorprendentes de los agujeros negros es que su comportamiento puede ser completamente descrito a través de muy pocos parámetros. Esto no es lo habitual en otros objetos. Por ejemplo, si pensamos en una estrella, su espectro de emisión será muy dependiente de su composición química. Estrellas formadas por distintos elementos tendrán características diferentes. Sin embargo, esto no es así para los agujeros negros. Dos agujeros negros de la misma masa, pero uno formado a partir de hierro y el otro de oro, serán completamente indistinguibles. Esta característica se resume en el que se conoce como teorema de no pelo. Éste postula que el agujero negro estacionario y asintóticamente plano más general es el que define la métrica de Kerr-Newman, y que por lo tanto cualquier agujero de estas características queda completamente definido por tres magnitudes observables: su masa  $M$ , su carga  $Q$ , y su momento angular  $J$ .

## 6.2 Primera ley

Ya que vamos a buscar una descripción termodinámica de los agujeros negros, el primer paso lógico será buscar una definición análoga al primer principio. El teorema de no pelo nos da tres buenos parámetros termodinámicos a partir de los que construir la teoría: la masa, la carga y el momento angular del agujero. Sin embargo, para tener un conjunto completo de observables termodinámicos es necesario además definir una entropía. Pero, ¿cómo definimos la entropía de un agujero negro? Se hace claro que no podemos basar esta definición en los estados de la materia que forma el agujero, ya que ésta no es observable una vez se ha producido el colapso. Así pues, parece que la interpretación del concepto de entropía de un agujero negro será un problema al que tendremos que enfrentarnos tarde o temprano.

Para este análisis, vamos a restringirnos exclusivamente a los agujeros negros estacionarios, aquellos que se encuentran en equilibrio y no evolucionan con el tiempo. En este sentido, la métrica asintóticamente plana más general en la que podemos pensar es la del agujero negro de Kerr-Newman, como nos asegura el teorema de no pelo. A partir de esta métrica, vamos a definir una cantidad que será de mucha relevancia más adelante: el área superficial del agujero negro,  $A$ . Esta magnitud se define como la superficie descrita por el horizonte de sucesos. Para el agujero negro de Kerr-Newman, el elemento de línea contenido sobre el horizonte en un instante de tiempo fijo viene dado por:

$$ds'^2 = \rho_+^2 d\theta^2 + \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\rho_+^2} \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.1)$$

donde  $\rho_+^2 = \rho^2(r_+)$  tal como se define en la ecuación (4.3), y  $r_+$  es el radio del horizonte de sucesos del agujero negro de Kerr-Newman, que es análogo al que habíamos hallado para Kerr añadiendo la contribución de la carga eléctrica:  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}$ .

A partir del elemento de línea, podemos calcular el área de esta región a través de la integral propia:

$$A = \int \int \sqrt{g'} d\theta d\phi \quad \text{donde} \quad g' = \det(g'_{\mu\nu}) \quad (6.2)$$

Y dada la forma de la métrica dada por la ecuación (6.1) es directo obtener:

$$g' = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \quad (6.3)$$

Y sustituyendo en la integral obtenemos entonces una expresión para el área en función de los tres parámetros que caracterizan el agujero: la masa/energía  $M$ , la carga eléctrica  $Q$  y el momento angular por unidad de masa  $a$ .

$$A = (r_+^2 + a^2) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi (r_+^2 + a^2) \quad (6.4)$$

Ahora, sustituyendo el valor de  $r_+$  y expresando  $a = \frac{J}{M}$  llegamos a la forma:

$$A = 8\pi \left( M^2 - \frac{Q^2}{2} + M \sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right) \quad (6.5)$$

Ésta es la expresión más general del área de un agujero negro estacionario y asintóticamente plano. Podemos obtener la ecuación para el área del agujero de Kerr fijando  $Q = 0$ , el de Reissner-Nordström con  $J = 0$ , o el de Schwarzschild con ambos parámetros iguales a cero.

Una vez hemos llegado a una expresión general para el área, podemos preguntarnos por su forma diferencial. Dado que según el teorema de no pelo cualquier propiedad del agujero negro debe estar definida únicamente por su masa, carga y momento angular; tenemos:

$$dA = \left( \frac{\partial A}{\partial M} \right) dM + \left( \frac{\partial A}{\partial Q} \right) dQ + \left( \frac{\partial A}{\partial J} \right) dJ \quad (6.6)$$

A partir de aquí, simplemente desarrollando a partir de la expresión anterior para el área es un cálculo directo llegar a la forma:

$$\frac{dA}{8\pi} = \frac{A}{4\pi(r_+ - M)} dM - \frac{Qr_+}{r_+ - M} dQ - \frac{a}{r_+ - M} dJ \quad (6.7)$$

Y despejando de aquí  $dM$  obtenemos:

$$dM = \Theta dA + \Phi dQ + \Omega dJ \quad (6.8)$$

donde

$$\Theta = \frac{r_+ - M}{2A} \quad (6.9)$$

$$\Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \quad (6.10)$$

$$\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (6.11)$$

Podemos comprobar que  $\Phi$  describe el potencial eléctrico coulombiano que genera la carga sobre el horizonte de sucesos, mientras que  $\Omega$  coincide con la velocidad angular de rotación del agujero que habíamos obtenido en la ecuación (4.23). Se hace entonces clara ante nuestros ojos la similitud que guarda esta expresión con el primer principio de la termodinámica:

$$dE = TdS + \Phi dQ + \Omega dJ \quad (6.12)$$

donde  $E$  es la energía,  $T$  la temperatura y  $S$  la entropía.

Podemos identificar claramente la energía  $E$  con la masa del agujero negro. Así pues, vemos que ambas expresiones son muy similares. Lo único que falta para que ambas sean idénticas es identificar los términos  $TdS$  y  $\Theta dA$ . Necesariamente, esto implica que  $S$  debe ser una función de  $A$ , independiente del resto de parámetros termodinámicos:

$$S = f(A) \implies TdS = T f'(A) dA \implies T = \frac{\Theta}{f'(A)} \quad (6.13)$$

Así pues, si queremos realizar una descripción termodinámica de los agujeros negros (o como mínimo obtener una primera ley), hemos concluido que debe existir un estrecho vínculo entre la entropía del agujero negro y el área de este. Aún no conocemos sin embargo la función exacta que relaciona ambas magnitudes.

De forma implícita, la definición de una entropía del agujero lleva asociada la de una temperatura del mismo. Y si bien hemos establecido claramente una fuerte relación entre la entropía y el área del horizonte, podemos preguntarnos con qué magnitud irá ligada la temperatura. Vemos a partir de la expresión de la primera ley que su definición va asociada a la de la función  $\Theta$ . Pero, ¿con qué magnitud podemos pues relacionar esta función? Al sustituir la definición de  $A$  en la ecuación de  $\Theta$ , obtenemos una expresión conocida, la de la gravedad de superficie:

$$\Theta = \frac{r_+ - M}{8\pi (r_+^2 + a^2)} = \frac{\kappa}{8\pi} \quad (6.14)$$

Así pues, hemos establecido dos analogías claras: entropía-área y temperatura-gravedad de superficie. Sin embargo, aún no conocemos la relación exacta que existe entre ellas.

## 6.3 Segunda ley

### 6.3.1 La masa irreducible y el teorema del área de Hawking

En la sección 4.7 llegamos a la siguiente relación que debía cumplir cualquier proceso Penrose en el agujero negro de Kerr:

$$\delta J < \frac{\delta M}{\Omega_H} \quad (6.15)$$

Vamos a mostrar que esta relación implica inevitablemente que el área del agujero negro de Kerr nunca puede disminuir. Para hacer los cálculos más sencillos, es conveniente definir una nueva magnitud, conocida como la masa irreducible del agujero negro:

$$M_{irr}^2 = \frac{A}{16\pi} \quad (6.16)$$

que para el caso del agujero de Kerr que estamos considerando toma la forma:

$$M_{irr}^2 = \frac{1}{2} \left( M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right) \quad (6.17)$$

A partir de aquí, podemos diferenciar para obtener la expresión de la variación de la masa irreducible en función de los cambios en la masa y el momento angular del agujero:

$$dM_{irr} = \frac{a}{4M_{irr}\sqrt{M^2 - a^2}} \left( \frac{\delta M}{\Omega_H} - \delta J \right) \quad (6.18)$$

Si aplicamos a esta ecuación el límite que habíamos obtenido para los procesos Penrose, vemos que forzosamente debe cumplirse:

$$\delta M_{irr} > 0 \quad (6.19)$$

Es decir, la masa irreducible del agujero no puede disminuir (de ahí su nombre). Y por lo tanto, dado que  $M_{irr}$  es una función monótonamente creciente en  $A$  (ya que no pueden darse áreas negativas), el área del agujero tampoco puede decrecer. Una consecuencia directa de esto es que marca un límite superior para la cantidad máxima de energía que es posible extraer del agujero a través de procesos de Penrose.

$$\Delta E = M - M_{irr} = M - \frac{1}{\sqrt{2}} \left( M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right)^{1/2} \quad (6.20)$$

A partir de esta ecuación, se hace obvio que el máximo valor se obtendrá para un agujero negro extremo, para el cual el segundo término se hace nulo. Entonces, la máxima energía extraíble será:

$$\Delta E_{>} = M - \frac{1}{\sqrt{2}}M \rightarrow \frac{\Delta E_{>}}{M} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 29\% \quad (6.21)$$

La tendencia de los agujeros negros a aumentar su área no es una característica exclusiva de los procesos de Penrose, sino que es algo mucho más general. De hecho, en 1971, Stephen Hawking probó que no existe ningún proceso clásico que pueda hacer disminuir el área de un agujero negro (o en su defecto, el área total de todos los agujeros involucrados si hubiese más de uno).

$$\delta A \geq 0 \quad (6.22)$$

El teorema del área de Hawking hace más evidente aún si cabe la relación entre la entropía y el área del agujero negro. Si la segunda ley clásica de la termodinámica postula que la entropía total siempre debe aumentar (o permanecer constante a lo sumo), el teorema de área de Hawking plantea algo análogo para el área del agujero:

*El área total de los agujeros negros siempre debe aumentar (o mantenerse constante a lo sumo) en cualquier proceso clásico.*

Al igual que la entropía, el área del agujero siempre aumenta. Así pues, concluimos que la función  $f(A)$  que relaciona  $S$  y  $A$  a través de la ecuación  $S = f(A)$  debe ser

monótonamente creciente. Si bien esta propiedad limita las posibilidades, no nos permite decir mucho más acerca de la forma exacta de la función.

La prohibición de que el área del agujero pueda disminuir permite definir dos clases de procesos:

- **Procesos reversibles:** Aquellos en los que pueden variar los parámetros del agujero ( $M, Q, J$ ), pero el área se mantiene constante; haciendo que el proceso inverso sea también posible.
- **Procesos irreversibles:** Aquellos en los que aumenta el área del agujero, haciéndose imposible el proceso inverso, ya que éste por definición haría disminuir el área.

Imaginemos ahora un proceso reversible en el que se extraen la carga y el momento angular del agujero. Vemos a partir de la primera ley que este proceso debe implicar una reducción en la masa. Así, cuando se han eliminado completamente la carga y el momento angular, se obtendrá un agujero de Schwarzschild cuya masa, según la ecuación (6.5) será:

$$M = \sqrt{\frac{A}{16\pi}} = M_{irr} \quad (6.23)$$

Es decir, la masa irreducible de un agujero negro es la masa del agujero negro de Schwarzschild que tendría su mismo área.

### 6.3.2 La segunda ley generalizada

Nótese que hemos sido cuidadosos a la hora de limitar la aplicación del teorema del área a procesos clásicos. Esto no ha sido algo casual, ya que cuando la mecánica cuántica entra en juego esta ley ya no tiene por qué cumplirse. Como veremos más adelante, los agujeros negros pueden emitir radiación Hawking a través de procesos puramente cuánticos, lo que reduce su masa y por tanto su área y entropía. Para obtener una ley entrópica que se cumpla incluso bajo procesos de este tipo es necesario incorporar a la definición la entropía de la materia externa al agujero. Así, se describe lo que se conoce como la segunda ley generalizada:

*La suma de la entropía de los agujeros negros y la entropía ordinaria en su exterior nunca puede decrecer.*

De esta forma, aunque puedan existir procesos que reduzcan el área del agujero, el incremento de la entropía externa al agujero compensa la pérdida, de modo que la segunda ley generalizada siempre se cumple. Podemos fijarnos también en que esta ley se reduce a la segunda ley habitual de la termodinámica en ausencia de agujeros negros, y al teorema del área cuando materia y radiación exteriores no están presentes.

La cuestión sigue siendo encontrar la dependencia de la entropía con el área. A priori, una buena opción sería buscar que, al igual que la entropía ordinaria, la entropía

del agujero negro fuese una cantidad extensiva. Es decir, que al duplicar el valor de los parámetros termodinámicos  $M$ ,  $Q$  y  $J$ , la entropía también se duplicase. Esta propiedad nos daría la relación  $S \propto A^{\frac{1}{2}} \propto M_{irr}$ . Sin embargo, si considerásemos la fusión de dos agujeros de Schwarzschild, esta dependencia daría lugar a un absurdo. Dado que la entropía total no puede disminuir, debe cumplirse  $S_f \geq S_i$ , lo que implicaría  $M_{irr}^f \geq \Sigma M_{irr}^i$ , y esto es imposible. Hemos visto que para los agujeros de Schwarzschild, su masa/energía es igual a la masa irreducible, por lo que esta relación implicaría que la masa final es mayor que la inicial, lo que contradice el principio de conservación de la energía. Además, la fusión de los agujeros emitiría ondas gravitacionales, por lo que tampoco puede ser posible el caso en el que la energía de los agujeros se conserva. Debemos buscar otra dependencia. En general, la elección de  $S(A) \propto A^\gamma$  con cualquier  $\gamma = cte.$  da lugar a una violación de la segunda ley generalizada en algún rango de valores de  $A$ . Para verlo, podemos imaginarnos un cuerpo masivo que cae al agujero. Por el teorema del área, sabemos que el área del horizonte aumentará con un  $\Delta A > 0$ , haciendo que la entropía del agujero aumente:  $\Delta S_H = S'(A)\Delta A$ . Sin embargo, ¿es este aumento de la entropía suficiente para compensar la desaparición de la entropía del cuerpo  $S_C$ ? Para que la entropía total aumente debe cumplirse:

$$\Delta S_H = S'(A)\Delta A \geq S_C \quad (6.24)$$

De esta forma, si  $\gamma < 1$ , siempre podremos encontrar una violación de la segunda ley generalizada para un valor de  $A$  lo suficientemente grande. Y si  $\gamma > 1$  podremos hacer lo mismo para valores de  $A$  muy pequeños. La única potencia posible será  $\gamma = 1$ . Así pues, a pesar de no dar lugar a una entropía extensiva, la definición más simple, la lineal, parece ser la más apta. Además, el teorema del área nos garantiza que la entropía definida así nunca decrecerá en procesos clásicos.

$$S = \eta A \quad (6.25)$$

donde  $\eta$  es una constante.

Esta definición de la entropía nos fija inmediatamente la temperatura del agujero negro como:

$$T = \frac{\kappa}{8\pi\eta} \quad (6.26)$$

La temperatura es lineal con la gravedad de superficie. Y este es un resultado sorprendente, ya que como se puede comprobar a partir de su expresión, la gravedad de superficie disminuye con la masa del agujero. Es decir, la temperatura del agujero es mayor cuanto menor sea su masa. Los agujeros pequeños, paradójicamente, son los más calientes. Mención aparte merecen los agujeros negros extremos, para los que la gravedad de superficie es nula, y por tanto también lo es su temperatura. Hablaremos de esta propiedad en más detalle al tratar la tercera ley.

Una vez visto que las relaciones entropía-área y temperatura-gravedad de superficie son lineales, el siguiente paso lógico será obtener el valor de la constante de proporcionalidad  $\eta$ .

### 6.3.3 Radiación Hawking

En la termodinámica ordinaria, el que un cuerpo se encuentre a una cierta temperatura lleva asociado una emisión de radiación por parte de dicho cuerpo. Esta radiación sigue el conocido como espectro de cuerpo negro. Así pues, para que la analogía que estamos planteando fuese completa, la temperatura de un agujero negro debería conllevar una emisión de cuerpo negro por parte del mismo. Sin embargo, esto parece imposible a la vista de lo que hemos deducido en las anteriores secciones. Si nada puede escapar del horizonte de sucesos del agujero negro, ¿cómo es posible que éste pueda emitir radiación al exterior? Y es que clásicamente esto no puede ocurrir. De hecho, de producirse se violaría el teorema del área (al emitir radiación al agujero pierde energía y por lo tanto área), que hemos dicho que se cumple para cualquier proceso clásico. Sin embargo, cuando tenemos en cuenta las fluctuaciones del vacío que permite la mecánica cuántica, la situación cambia completamente, y la emisión de radiación se hace real. No pretendemos aquí derivar este resultado de forma rigurosa, sino simplemente entender su existencia de forma cualitativa. Esta explicación puede abordarse desde distintos puntos de vista. En nuestro caso, vamos a utilizar la dada por Gary Kessler en [20]. En realidad, la radiación no procede del interior del agujero, sino de la región exterior próxima al horizonte de sucesos. Sabemos que cuánticamente el vacío perfecto no existe, sino que se están formando continuamente pares partícula-antipartícula virtuales. El principio de indeterminación de Heisenberg nos dice que estos pares existen durante un tiempo muy corto, por lo que en condiciones normales ambas partículas se aniquilan rápidamente. Sin embargo, cuando esto ocurre en las proximidades del agujero, el gradiente gravitacional puede ser tan grande que evite que ambas partículas se junten de nuevo, de forma que una de ellas caiga al interior del agujero y la otra pueda lograr escapar, constituyendo una radiación procedente del horizonte.

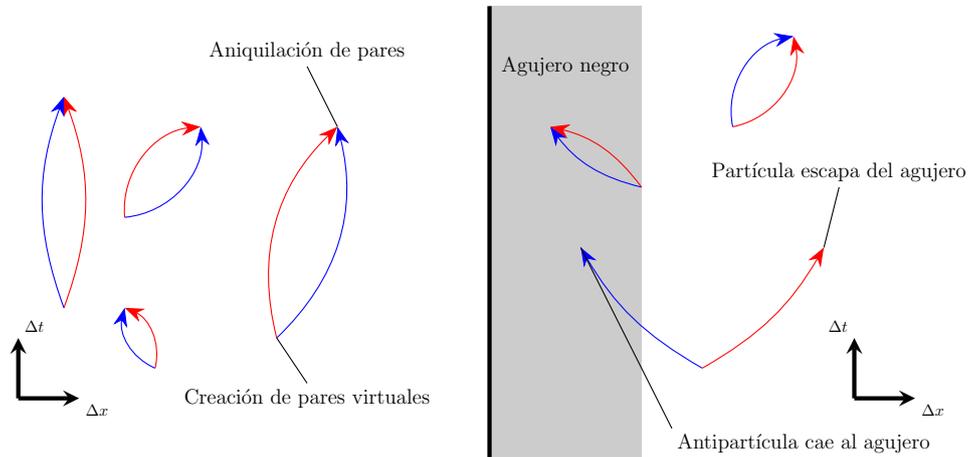


Figura 6.1: Comportamiento de la formación de pares partícula-antipartícula virtuales en un espacio-tiempo plano (izquierda) y en la vecindad del horizonte de sucesos de un agujero negro (derecha).

De esta forma, lo que vería un observador situado en el exterior del agujero sería que éste ha emitido una partícula. Algo que, por el principio de conservación de la energía, ha debido producirse asociado a una disminución de la masa del propio agujero. Es así, a través de este proceso cuántico (extremadamente lento) que los agujeros negros se evaporan, perdiendo su masa.

Los cálculos exactos realizados originalmente por Hawking en 1974 [21] conducen a que un agujero negro radia con un espectro de cuerpo negro equivalente a una temperatura dada por:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (6.27)$$

De esta forma, queda fijada la constante de proporcionalidad  $\eta = \frac{1}{4}$ , de modo que obtenemos por fin una definición exacta para la entropía de un agujero negro:

$$S = \frac{A}{4} \quad (6.28)$$

## 6.4 Ley cero

La ley o principio cero de la termodinámica postula que si un cuerpo se encuentra en equilibrio térmico, la temperatura es la misma en cualquiera de sus puntos. Ha quedado clara ya a través de la ecuación (6.27) la estrecha relación existente entre la temperatura de un agujero negro y su gravedad de superficie. Es de esperar, entonces, que la gravedad de superficie desempeñe un papel análogo al de la temperatura en la descripción de esta ley. Además, habrá que definir un concepto análogo al de "equilibrio térmico" adaptado a los agujeros negros. La noción de equilibrio termodinámico describe un sistema estable, que no cambia en el tiempo. Esta es una propiedad de la métrica a la que nos hemos referido recurrentemente: la estacionaridad. De este modo, la ley queda formulada de la siguiente forma:

*La gravedad de superficie,  $\kappa$ , de un agujero negro estacionario es constante a lo largo del horizonte de sucesos.*

Queda ahora la tarea de demostrar que esta afirmación es cierta. Vamos a hacerlo en dos pasos. En primer lugar, vamos a establecer que la gravedad de superficie es constante a lo largo de los generadores de la hipersuperficie nula que constituye el horizonte. A continuación, demostraremos que  $\kappa$  no varía de generador en generador. Probando estos dos enunciados, quedará demostrada la ley cero.

Dado que la ley cero habla de agujeros estacionarios, podemos asumir que el horizonte de sucesos será un horizonte de Killing. El punto de partida será entonces la ecuación (2.29), en la que se define la gravedad de superficie de un horizonte de Killing. Además, también será necesaria la identidad:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \chi_\sigma = R_{\sigma\nu\mu\rho} \chi^\rho \quad (6.29)$$

cuya demostración puede consultarse en la sección E.1.

Diferenciando en la ecuación (2.29) y empleando la propiedad que hemos visto en la ecuación (6.29) obtenemos:

$$2\kappa (\partial_\mu \kappa) = -(\nabla_\mu \nabla_\alpha \chi_\beta) (\nabla^\alpha \chi^\beta) = -R_{\beta\alpha\mu\sigma} \chi^\sigma (\nabla^\alpha \chi^\beta) \quad (6.30)$$

Y al contraer con el vector  $\chi^\mu$  para obtener la derivada en la dirección tangente al generador llegamos a:

$$2\kappa (\partial_\mu \kappa) \chi^\mu = -R_{\beta\alpha\mu\sigma} \chi^\mu \chi^\sigma (\nabla^\alpha \chi^\beta) = 0 \quad (6.31)$$

ya que el tensor  $\chi^\mu \chi^\sigma$  es simétrico y el tensor de Riemann  $R_{\beta\alpha\mu\sigma}$  es, por definición, antisimétrico en los índices  $(\mu, \sigma)$ . De esta relación obtenemos la demostración de la primera propiedad que queríamos probar: la gravedad de superficie es constante a lo largo de las direcciones tangentes a los generadores  $\chi^\mu$ :

$$(\partial_\mu \kappa) \chi^\mu = 0 \quad (6.32)$$

Queda ya sólo demostrar que  $\kappa$  tampoco cambia de un generador a otro. Para ello, vamos a estudiar cómo varía  $\kappa$  en las direcciones transversales a los generadores  $\chi_\mu$ . Estas direcciones vienen dadas por los vectores  $e_A^\mu$  (ver apéndice A). A partir de la ecuación (6.30) deducimos, multiplicando por los vectores  $e_A^\mu$ :

$$2\kappa (\partial_\mu \kappa) e_A^\mu = -(\nabla^\alpha \chi^\beta) R_{\beta\alpha\mu\sigma} e_A^\mu \chi^\sigma \quad (6.33)$$

Para poder probar esta segunda propiedad, nos gustaría poder demostrar, al igual que hicimos para las direcciones tangentes a  $\chi^\mu$ , que el lado derecho de la ecuación es cero en todo el horizonte. Sin embargo, hacerlo es sorprendentemente difícil. Cuando Bardeen, Hawking y Carter establecieron su demostración de la ley cero en su artículo de 1973, sólo pudieron hacerlo imponiendo ciertas restricciones sobre la energía [15]. No fue hasta 1995 cuando Rácz y Wald lo demostraron sin esta restricción [22]. En nuestro caso, vamos a suponer que el horizonte de sucesos es geodésicamente completo, y que por lo tanto contiene una 2-esfera de bifurcación. En la 2-esfera de bifurcación, se cumple  $\chi^\mu = 0$ , y por lo tanto el lado derecho de la ecuación se anula. Además, puede probarse que  $e_A^\mu \partial_\mu \kappa$  es constante a lo largo de los generadores nulos (apéndice E.4), por lo que inmediatamente tenemos que  $e_A^\mu \partial_\mu \kappa = 0$  en cualquier instante de la trayectoria de los generadores nulos, tanto dentro como fuera de la 2-esfera. En consecuencia, hemos demostrado que si existe una 2-esfera de bifurcación,  $\kappa$  no varía de generador en generador, y por lo tanto es constante en todo el horizonte.

Sin embargo, podemos ver que la gravedad de superficie también es constante sin que sea necesaria la existencia de la 2-esfera de bifurcación. Imaginemos dos agujeros negros idénticos en la actualidad. Uno de ellos se ha formado por colapso gravitacional, y por lo tanto carece de 2-esfera de bifurcación; mientras que el otro ha existido desde siempre y sí la tiene. Hemos probado que la gravedad de superficie es constante en el horizonte del segundo agujero. Pero ambos agujeros son idénticos en un instante posterior a la formación del primero, por lo que esta propiedad debe aplicarse también

éste. De esta forma, la ley zero debe cumplirse para cualquier agujero negro estacionario, independientemente de que sea geodésicamente completo o no.

## 6.5 Tercera ley

Cuando hablamos de la tercera ley de la termodinámica podemos referirnos al postulado de Plank o al de Nerst. Si nos restringimos a la tercera ley descrita por Plank: *la entropía de cualquier sistema tiende a cero a la temperatura cero*, es evidente que no se cumple en el caso de los agujeros negros, al menos clásicamente. Recordemos que la temperatura del agujero es igual a su gravedad de superficie (salvo por una constante de proporcionalidad), por lo que la temperatura cero se alcanza cuando el agujero se hace extremo. Sin embargo, a partir de la definición del área del horizonte de sucesos (ecuación (6.5)), es directo ver que el área no es necesariamente cero en estos casos, y por tanto tampoco lo es su entropía.

Sí podemos aplicar, por el contrario, el postulado de Nerst: *no es posible alcanzar el cero absoluto en un número finito de pasos*. Para la termodinámica de agujeros negros, esta ley se traduce como:

*No es posible hacer cero la gravedad de superficie de un agujero negro en un número finito de pasos.*

Cuando Bardeen, Hawking y Carter publicaron su descripción de las 4 leyes de la mecánica de los agujeros negros [15], no fueron capaces de aportar una demostración matemática rigurosa de esta ley. Sin embargo, sí resaltaron la existencia de fuertes razones para apoyar la afirmación. Y es que si existiese un proceso que permitiese, en un número finito de pasos, reducir la gravedad de superficie  $\kappa$  a cero produciendo un agujero negro extremo, no habría en principio ninguna razón para no poder continuar más allá. De esta forma, se crearía una singularidad desnuda, lo que contradice la hipótesis del censor cósmico de Penrose.

A pesar de la importancia de la teoría termodinámica de los agujeros negros, un problema abierto a día de hoy sigue siendo el de la interpretación de su entropía y su relación con la entropía ordinaria. La teoría de cuerdas permite dar explicación sólo para algunos tipos de agujeros extremos, mientras que la gravedad cuántica de bucles propone un sentido de la entropía que únicamente aplica para el caso de Schwarzschild. Se cree que una teoría de gravedad cuántica podría ofrecer una explicación en términos de microestados, de la misma forma en que se define la entropía ordinaria.

Posteriormente, Hawking y Gibbons [23] han demostrado que la termodinámica de los agujeros negros trasciende incluso a los propios agujeros, y que los horizontes de sucesos cosmológicos tienen también una entropía y una temperatura. Más tarde, en los

años 90 del siglo pasado, Gerard't Hooft y Leonard Susskind [24] usaron los principios de la termodinámica de agujeros negros para defender un principio holográfico general de la naturaleza, que postula que toda la información contenida en cierto volumen del espacio se puede conocer a partir de la información codificable sobre la frontera de dicha región.

# Capítulo 7

## Resumen

Comenzamos esta monografía con el estudio del agujero negro más sencillo, el de Schwarzschild, que nos sirvió para introducir dos conceptos que serían fundamentales para el estudio general de los agujeros negros: el horizonte de sucesos y la gravedad de superficie. El horizonte de sucesos del agujero de Schwarzschild se planteaba como la última frontera: cualquier observador o rayo de luz que lo cruzase nunca podría rehacer sus pasos, y su destino inevitable sería la singularidad. Nuestro sistema de coordenadas, sin embargo, era patológico en esta región, y no nos permitía adentrarnos más allá. Buscamos un nuevo sistema de coordenadas que nos hiciese posible estudiar lo que ocurre al otro lado del horizonte de sucesos, y acabamos descubriendo que podíamos extender la descripción del espacio-tiempo a un universo paralelo que contenía un agujero blanco. Esta región, sin embargo, no era accesible desde nuestro universo. Abordamos también el colapso gravitacional como forma de origen de un agujero negro, y más adelante terminaríamos viendo que cuando el agujero se ha originado de esta forma, las regiones que incluyen el universo paralelo y el agujero blanco no pueden existir.

A continuación, quisimos buscar descripciones de agujeros negros más generales. Lo primero que nos planteamos fue que estos estuviesen eléctricamente cargados, lo que nos llevó a la solución de Reissner-Norström. A pesar de que no esperamos encontrar este tipo de agujeros en la naturaleza (un agujero negro cargado sería rápidamente neutralizado por la materia a su alrededor), su estudio nos sirvió para introducir conceptos generales. Así pues, descartamos algunas soluciones de la métrica de Reissner-Norström basándonos en la hipótesis del censor cósmico de Penrose, y definimos los agujeros negros extremos (cuya gravedad de superficie es nula), que serían relevantes más adelante. La búsqueda de coordenadas más allá de los horizontes de sucesos (esta solución tiene dos), nos llevó a una situación aún más sorprendente que la que habíamos hallado en el caso de Schwarzschild: esta vez un observador en el interior del agujero puede ser capaz de esquivar la singularidad. Una vez cruzamos el horizonte de un agujero de Reissner-Nordstöm, el espacio-tiempo no nos lleva inevitablemente hacia la singularidad, sino que tenemos la posibilidad de elegir evitarla. Y haciéndolo, llegaríamos a un nuevo universo paralelo idéntico al nuestro. Una vez aquí, podemos elegir si permanecer en esta nueva región, o volver a caer en el agujero, pudiendo repetir el proceso un número indefinido

de veces.

La búsqueda de agujeros negros más generales nos llevó a considerar también la rotación. Así llegamos a la solución de Kerr. Al igual que la de Reissner-Nordström, ésta tiene dos horizontes de sucesos, pero además presenta una nueva región que no estaba presente en los agujeros anteriores: la ergosfera. En los agujeros negros anteriores, cruzar el horizonte de sucesos nos forzaba inevitablemente a desplazarnos hacia la singularidad (al menos en un primer momento en el caso de Reissner-Nordström) pero mientras estuviésemos fuera del agujero nada nos impedía quedarnos quietos en una posición fija. Esto deja de ser así en el agujero de Kerr. La rotación del agujero arrastra consigo el espacio-tiempo, haciéndolo girar con él. Si estamos lo suficientemente cerca del agujero, existe una región aún fuera del horizonte (todavía es posible escapar) en la que este efecto es tan grande que el agujero negro nos fuerza a girar con él, no pudiendo permanecer parados. Esta región es la ergosfera. Vimos también que la existencia de la ergosfera nos permitía extraer energía del agujero negro (aunque sólo procedente de su rotación), en lo que se conoce como procesos de Penrose. Cuando estudiamos más en detalle la estructura interna del agujero de Kerr nos encontramos con algo similar a lo que habíamos visto en Reissner-Nordström, pero con una peculiaridad. En el agujero de Kerr, la rotación expande la singularidad causando que pase de ocupar un punto del espacio a todo un anillo. Esto hace que no sólo vaya a ser posible evitar la singularidad, sino también atravesarla (cruzando el anillo) y llegar a una nueva región ausente en el agujero de Reissner-Nordström. El estudio de esta nueva región nos llevó a comprobar algo aún más chocante, ya que en su interior existen curvas causales cerradas. Es decir, existen trayectorias que permiten a un observador avanzar siempre hacia adelante en el tiempo y terminar llegando exactamente al mismo instante del que partió, ¡constituyendo máquinas en el tiempo! Sin embargo, y para nuestra decepción, un análisis más detallado nos hizo ver que toda esta estructura de universos paralelos atravesables y máquinas en el tiempo es muy inestable bajo perturbaciones. Por lo tanto, aunque existiese en la naturaleza un agujero negro tan perfecto como para que se diese esta estructura, la sola presencia de un observador en su interior sería suficiente para destruirla, haciendo que atravesar el agujero para llegar a estas nuevas regiones se convierta en algo imposible en la práctica.

Algo que también introducimos al hablar de los agujeros de Kerr es el concepto de horizonte de Cauchy. Estos horizontes, que ya estaban presentes en la métrica de Reissner-Nordström, constituyen un límite para el problema de Cauchy. Más allá de un horizonte de Cauchy, el futuro deja de estar completamente determinado por la información presente en el exterior del horizonte. Vimos que la existencia de estos horizontes generaba problemas, ya que la relatividad general es definida como una teoría determinista. Es por ello que la hipótesis del censor cósmico en sentido fuerte prohíbe su existencia.

Por último, abordamos una descripción termodinámica de los agujeros negros. Para ello, planteamos 4 leyes fundamentales que son análogas a los 4 principios de la termodinámica. Entre otras cosas, identificamos la entropía del agujero con el área de su horizonte de sucesos, de forma que el teorema del área de Hawking nos dice que el área

de un agujero negro nunca puede disminuir en un proceso clásico (segundo principio). Vimos también que la definición de la entropía del agujero llevaba asociada la de su temperatura, que identificamos con la gravedad de superficie. Y por último, pudimos comprobar cómo los efectos cuánticos permiten a los agujeros negros emitir radiación, en contra de lo que parece decirnos nuestra intuición clásica.

# Apéndice A

## Hipersuperficies

Una hipersuperficie es una subvariedad  $\Sigma$   $(n - 1)$ -dimensional de una variedad  $M$ . Una hipersuperficie puede ser definida a través de una ecuación de la forma:

$$f(x) = \text{cte.} \quad (\text{A.1})$$

Dada una hipersuperficie definida a partir de esta ecuación se cumple que el vector

$$\zeta^\mu = g^{\mu\nu} \nabla_\nu f \quad (\text{A.2})$$

es normal a la hipersuperficie. Es decir, es ortogonal a todos los posibles vectores contenidos en ella. Si  $\zeta^\mu$  es un vector de tipo tiempo se dice entonces que la hipersuperficie es de tipo espacio, y viceversa; y si es un vector nulo, entonces la hipersuperficie es nula.

### A.1 Hipersuperficies nulas

Una propiedad de las hipersuperficies nulas es que pueden ser divididas en un grupo de geodésicas nulas, que denominamos generadores nulos de la hipersuperficie. Para ver esto, tenemos que darnos cuenta de que el vector  $\zeta^\mu$ , además de ser normal a la superficie, también es tangente a ella, ya que los vectores nulos son ortogonales a sí mismos. Por lo tanto, las curvas integrales  $x^\mu(\gamma)$  dadas por:

$$\zeta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\gamma} \quad (\text{A.3})$$

describirán curvas nulas contenidas en la hipersuperficie. Vamos a ver que estas curvas son necesariamente geodésicas, por lo que deben cumplir la ecuación geodésica:

$$\zeta^\nu \nabla_\nu \zeta_\mu = \eta(\gamma) \zeta_\mu \quad (\text{A.4})$$

donde  $\eta(\gamma)$  es una función que caracteriza el hecho de que  $\gamma$  no tiene por qué ser un parámetro afín. Si lo fuese,  $\eta(\gamma) = 0$ .

Para verlo, vamos a calcular el lado izquierdo de la ecuación geodésica para nuestro vector  $\zeta^\mu$ :

$$\zeta^\nu \nabla_\nu \zeta_\mu = \eta^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu f = \zeta^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu f = \zeta^\nu \nabla_\mu \zeta_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu (\zeta^\nu \zeta_\nu) \quad (\text{A.5})$$

Se plantean ahora dos posibilidades. Si  $\nabla_\mu (\zeta^\nu \zeta_\nu) = 0$  obtenemos la ecuación geodésica afinmente parametrizada, de forma que ya hemos demostrado lo que queríamos. Pero si este gradiente no se anula, quiere decir que  $\zeta^\mu \zeta_\mu$  no es cero fuera de la hipersuperficie, por lo que podemos usar esta propiedad para definir la hipersuperficie a través de la ecuación  $f(x) = \zeta^\mu \zeta_\mu = 0$ . Esto nos garantiza que la derivada de la función nos dará un vector normal a la hipersuperficie, y que por tanto tendrá que ser igual a  $\zeta^\mu$  salvo por un factor de proporcionalidad:

$$\nabla_\mu (\zeta^\nu \zeta_\nu) = g \zeta_\mu \quad (\text{A.6})$$

De esta forma, obtenemos también la expresión de la ecuación geodésica, donde  $g = \eta(\gamma)$ .

Hemos demostrado que el vector normal a la hipersuperficie nula  $\zeta^\nu$  describe curvas geodésicas nulas contenidas en ésta. Normalmente, sin embargo, se suele dar este vector reparametrizado con un parámetro afín  $\lambda$ , de forma que en general daremos el vector:

$$\chi^\mu = h(x) \zeta^\mu \quad (\text{A.7})$$

tal que  $\chi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu = 0$ .

Cuando la hipersuperficie es nula, suele ser conveniente definir un sistema de coordenadas adaptado a esta superficie. Dado que la definición de la hipersuperficie nos elimina un grado de libertad, necesitaremos tres coordenadas. Tomamos el parámetro  $\gamma$  de los generadores como una de ellas e introducimos otras dos nuevas coordenadas  $\theta^A$  con  $A = 2, 3$  que servirán para indexar los generadores. Estas coordenadas serán constantes a lo largo de cada generador. De esta forma, el sistema de coordenadas intrínseco a la hipersuperficie vendrá dado por:

$$y^\mu = (\gamma, \theta^A) \quad (\text{A.8})$$

Variar  $\gamma$  con  $\theta^A$  constante nos permite desplazarnos a lo largo de un generador nulo, y el caso contrario nos desplaza entre los diferentes generadores, de forma que logramos cubrir toda la hipersuperficie. Así, podemos definir los vectores tangentes al horizonte como:

$$\zeta^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \gamma} \right)_{\theta^A} \quad e_A^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^A} \right)_\gamma \quad (\text{A.9})$$

que satisfacen  $\zeta_\mu e_A^\mu = 0$ .

## Apéndice B

# Métrica con simetría esférica

En este apéndice vamos a derivar la forma general de una métrica esféricamente simétrica. Seguiremos fundamentalmente el desarrollo planteado en la sección 5.2 de [2].

Un espacio-tiempo se dice esféricamente simétrico si presenta las mismas simetrías que una esfera, es decir, las rotaciones en 3 dimensiones que conforman el grupo  $SO(3)$ . Estas tres simetrías de rotación se manifestarán por la existencia de tres vectores de Killing, que en coordenadas  $(\theta, \phi)$  toman la forma:

$$R = \partial_\phi \tag{B.1}$$

$$S = \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi \tag{B.2}$$

$$T = -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi \tag{B.3}$$

Sin embargo, necesitamos una forma de determinar la simetría independientemente del sistema de coordenadas. Para ello, utilizamos la estructura de conmutadores de las transformaciones: una variedad posee simetría esférica si y sólo si tiene tres vectores de Killing  $R$ ,  $S$  y  $T$  que satisfacen:

$$[R, S] = T, \quad [S, T] = R, \quad [T, R] = S \tag{B.4}$$

Podemos aplicar entonces el teorema de Frobenius: *Un conjunto de campos vectoriales  $V_{(a)}^\mu$  encaja para formar un subvariedades integrales si y sólo si sus conmutadores cumplen  $[V_{(a)}, V_{(b)}]^\mu = \alpha^c V_{(c)}^\mu$  para algún conjunto de coeficientes  $\alpha^c$ .*  $T$ ,  $R$  y  $S$  cumplen esta condición, por lo que las curvas integrales generadas por estos vectores describen subvariedades de la variedad completa. En nuestro caso, estas subvariedades van a ser, por supuesto, esferas. Y como los campos vectoriales se extienden a lo largo de toda la variedad, vamos a poder exfoliar todo el espacio-tiempo en esferas de forma que cualquier punto, o casi cualquiera (imaginemos por ejemplo el caso del origen en un espacio-tiempo plano), estará contenido en una de estas esferas.

Una vez hemos mostrado que una variedad con simetría en  $SO(3)$  puede ser exfoliada en esferas, el siguiente paso será ver que esto implica que será posible escribir la métrica en la forma (2.2). Podemos pensar en describir cada esfera utilizando 2 coordenadas  $(\theta, \phi)$  y emplear las otras dos, que llamaremos  $a$  y  $b$  para indexar a cada una de las esferas. De esta forma, obtenemos un sistema completo de coordenads para cubrir toda la variedad. Además, sabemos que el elemento de línea sobre una esfera viene dada por el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega^2$ , de manera que para  $(a, b) = (a_0, b_0) = cte.$  la métrica toma la forma:

$$ds^2(a_0, b_0, \theta, \phi) = f(a_0, b_0)d\Omega^2 \quad (\text{B.5})$$

Claramente  $f$  debe depender únicamente del valor de  $a$  y  $b$ , ya que la simetría hace que dentro de una misma esfera todos los puntos sean equivalentes. Podemos aplicar el mismo principio si nos restringimos a valores fijos de  $\theta$  y  $\phi$ , de forma que obtenemos:

$$ds^2(a, b, \theta_0, \phi_0) = d\tau^2(a, b) \quad (\text{B.6})$$

Sin embargo, esto no nos garantiza que en la métrica no vayan a existir términos cruzados entre  $(a, b)$  y  $(\theta, \phi)$ . Para poder asegurar esto, debemos ser cuidadosos con la elección de las coordenadas que estamos utilizando. Debemos elegir las para que las esferas queden completamente alineadas entre ellas, de forma que desplazarse en la dirección perpendicular a una de ellas (variando  $a$  o  $b$ ) mantenga constantes las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ . Hacer esto no es trivial. Vamos a empezar por considerar un punto cualquiera  $p$  de coordenadas  $(\theta, \phi)$  situado en una esfera  $S_p$ . En ese punto  $p$ , habrá todo un subespacio bidimensional  $O_p$  dado por todas las posibles trayectorias geodésicas cuyo vector tangente en  $p$  es ortogonal a la superficie de la esfera  $S_p$ . Podemos ver también que va a existir un subgrupo unidimensional de rotaciones  $R_p$  que deja invariante cualquier dirección perpendicular a  $S_p$  en  $p$ . Por lo tanto, todo el subespacio  $O_p$  permanece invariante bajo la actuación de  $R_p$ . Vamos a considerar ahora otro punto  $q$  que se encuentra en otra esfera  $S_q \neq S_p$ , pero contenido en la 2-superficie  $O_p$ . Esto implica necesariamente que  $O_p$  también es ortogonal a  $S_q$ . Para verlo, vamos a considerar el plano  $V_q$  formado por todos los vectores ortogonales a  $O_p$  en el punto  $q$ . Entonces, dado que  $R_p$  deja invariante a  $O_p$ , la rotación debe necesariamente transformar  $V_r$  en sí mismo, pues la condición de ortogonalidad debe conservarse. Además, por definición, las rotaciones dejan invariantes las esferas, por lo que  $S_q$  también se transforma en sí mismo. Por lo tanto, podemos concluir que tanto  $V_q$  como  $S_q$  son ortogonales a  $O_p$  en el punto  $q$ , y en consecuencia (dado que estamos en 4 dimensiones), la única opción es que sean el mismo plano, siendo  $S_q$  ortogonal a  $O_p$ .

Recapitulando, hemos demostrado que si un punto  $q$  de una esfera  $S_q$  está en contenido en una superficie  $O_p$  ortogonal a la esfera  $S_p$  en  $p$ , entonces  $O_p$  es también ortogonal a  $S_q$ . Por la propia definición de la subvariedad  $O_p$ , sabemos que existirá una (única) geodésica que sea ortogonal a  $S_p$  y conecte  $p$  con  $q$ . Esto nos crea un mapa 1 a 1 de  $S_p$  en  $S_q$  que podemos utilizar para definir las coordenadas en  $S_q$  a partir de las de  $S_p$ . De esta forma, asignamos las mismas coordenadas  $(\theta, \phi)$  a los puntos conectados a través

de estas geodésicas. Y como  $O_p$  también es tangente a  $S_q$ , podemos seguir extendiendo este procedimiento a las demás esferas, de forma que conseguimos definir  $(\theta, \phi)$  a lo largo de toda la variedad. Queda ya tan solo fijar la definición  $a$  y  $b$ . Para ello, escogemos dos vectores  $T$  y  $S$  en el punto  $p$  que formen una base del espacio ortogonal  $O_p$ , de forma que la geodésica que conecta las esferas tenga como vector tangente en  $p$  al vector  $aS + bT$ . Así, a cada esfera le corresponderán unas coordenadas  $(a, b)$ , que asignaremos ahora a toda la esfera completa. De este modo, conseguimos un conjunto completo de 4 coordenadas para describir la variedad.

En estas coordenadas, es fácil ver que, evidentemente, la métrica satisface las ecuaciones (B.5) y (B.6). Lo único que queda entonces por mostrar es que no existen términos cruzados entre  $(a, b)$  y  $(\theta, \phi)$ , es decir, que los vectores  $\partial_a, \partial_b$  son ortogonales a  $\partial_\theta, \partial_\phi$ . Hacer esto es un razonamiento directo. Vamos a verlo por ejemplo para las coordenadas  $a$  y  $\theta$  (siendo lo mismo aplicable para los demás casos). En un punto  $p \in S_p$ , el vector  $\partial_\theta$  define el vector tangente a la trayectoria  $x^\mu(\theta) = (a_p, b_p, \theta, \phi_p)$ , que está enteramente contenida en la esfera  $S_p$ , dado que  $a$  y  $b$  permanecen constantes. Por el contrario, en ese mismo punto  $\partial_a$  describe la tangente a la curva  $x^\mu(\theta) = (a, b_p, \theta_p, \phi_p)$ , que es ortogonal a  $S_p$  por razones análogas. De esta manera, queda demostrado que ambos vectores son ortogonales y por tanto no existen términos cruzados, pudiendo escribirse la métrica de la variedad en la forma:

$$ds^2 = g_{aa}(a, b)da^2 + 2g_{ab}(a, b)dadb + g_{bb}(a, b)db^2 + r^2(a, b)d\Omega^2 \quad (\text{B.7})$$

donde  $r(a, b)$  es una función indeterminada. Podemos ahora realizar un cambio de coordenadas de  $(a, b)$  a  $(a, r)$  invirtiendo  $r(a, b)$ . El único caso en que no podríamos hacer esto sería si  $r$  fuese una función sólo de  $a$ , pero en ese caso podríamos hacer el cambio a  $(b, r)$  y llegaríamos al mismo punto. En cualquier caso, podemos reescribir la métrica como:

$$ds^2 = g_{aa}(a, r)da^2 + 2g_{ar}(a, r)dadr + g_{rr}(a, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (\text{B.8})$$

Buscaremos ahora una transformación de coordenadas que nos permita deshacernos de los términos cruzados en  $a$  y  $r$ . Para ello, vamos a definir una nueva coordenada  $t(a, r)$ . Así:

$$dt^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 da^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)(dadr + drda) + \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 dr^2 \quad (\text{B.9})$$

Entonces, para que este cambio de coordenadas nos permita eliminar los términos cruzados obteniendo una métrica diagonal de la forma:

$$ds^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (\text{B.10})$$

para unas funciones indeterminadas  $m$  y  $n$ ; debe cumplirse:

$$m\left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 = g_{aa} \quad (\text{B.11})$$

$$n + m \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 = g_{rr} \quad (\text{B.12})$$

$$m \left( \frac{\partial t}{\partial a} \right) \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right) = g_{ar} \quad (\text{B.13})$$

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones diferenciales para tres funciones desconocidas  $t$ ,  $m$  y  $n$ . Resolviéndolo, obtendremos una métrica de la forma de la ecuación (B.10). A partir de aquí, nada nos impide redefinir  $m$  y  $r$  a través de otras dos funciones  $f$  y  $\psi$  de la forma:

$$ds^2 = -e^{2\psi} f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.14})$$

que es la forma más general para una métrica con simetría esférica.

## Apéndice C

# Geodésicas radiales en la métrica de Schwarzschild

Vamos a resolver la ecuación geodésica en la métrica de Schwarzschild para soluciones radiales ( $\theta, \phi = \text{cte.}$ ). Para ello, partimos de la ecuación geodésica afinmente parametrizada por un parámetro  $\lambda$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Calculando los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  para la métrica de Schwarzschild llegamos a las ecuaciones para las diferentes coordenadas:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{B'}{2A} \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{A'}{2A} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r}{A} \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A} \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \quad (\text{C.5})$$

donde  $B = 1 - \frac{2M}{r}$ ,  $A = B^{-1}$  y  $'$  indica derivar con respecto a  $r$ .

Queremos buscar trayectorias radiales, por lo que  $\theta$  y  $\phi$  deberían ser constantes. Vemos a partir de las ecuaciones (C.4) y (C.5) que nada lo impide, estando permitidas estas soluciones. Una vez visto esto, vamos a centrarnos en las otras dos ecuaciones. Multiplicando la ecuación (C.2) por  $\frac{d\lambda}{dr}$ , los dos términos se pueden expresar como la derivada de un logaritmo, de forma que la ecuación se reescribe como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \ln \left( \frac{dt}{d\lambda} \right) \right] + \frac{d}{d\lambda} (\ln B) = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[ \ln \left( B \frac{dt}{d\lambda} \right) \right] = 0 \quad (\text{C.6})$$

De este modo, podemos determinar:

$$B \frac{dt}{d\lambda} = \alpha \quad (\text{C.7})$$

donde  $\alpha$  es una constante arbitraria que se define como la energía por unidad de masa de la partícula.

Ahora, multiplicando la ecuación (C.3) por  $2A \frac{dr}{d\lambda}$  obtenemos:

$$2A \frac{dr}{d\lambda} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + A' \frac{dr}{d\lambda} \left( \frac{dr}{d\lambda} \right) + \alpha^2 \frac{B'}{B^2} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Englobando los dos primeros términos en una sola derivada y notando que  $\frac{B'}{B^2} = \left(-\frac{1}{B}\right)'$ , podemos reescribir:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ A \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right] - \alpha^2 \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{B} \right) = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[ A \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{B} \right] = 0 \quad (\text{C.9})$$

A partir de aquí determinamos:

$$A \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{B} = -\chi \quad (\text{C.10})$$

donde  $\chi$  es otra constante arbitraria que relaciona el parámetro afín  $\lambda$  con el tiempo propio. Para verlo, vamos a calcular la expresión para el diferencial de tiempo propio:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda^2 = \left[ B \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - A \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 = \left[ B \frac{\alpha^2}{B^2} - \left( -\chi + \frac{\alpha^2}{B} \right) \right] d\lambda^2 = \chi d\lambda^2 \quad (\text{C.11})$$

Por lo tanto, para geodésicas temporales  $\chi > 0$  (y  $\chi = 0$  para nulas).

Vamos ahora a centrarnos en el caso concreto en el que  $\alpha = 1$ . Habíamos dicho que  $\alpha$  definía la energía por unidad de masa de la partícula, por lo que esta situación se correspondería con la de un cuerpo que parte desde el infinito en reposo, y cuya única energía inicial se debe únicamente a su masa. Vamos también a elegir  $\chi = 1$  para trabajar con el tiempo propio  $\tau$ . En estas condiciones, vamos a considerar la ecuación (C.10):

$$A \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - 1 = -1 \longrightarrow \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 1 - \frac{1}{A} = \frac{2M}{r} \quad (\text{C.12})$$

A partir de aquí es directo integrar para obtener la expresión del tiempo propio en función de la coordenada radial:

$$\frac{\tau}{2M} = -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.13})$$

Ahora, para obtener la dependencia de la coordenada temporal  $t$  con  $r$  vamos a recuperar la ecuación (C.7) e introducirla en la (C.10). Así

$$A \left( \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2M}{r} \longrightarrow \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{1}{A} = \frac{2M}{r} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \quad (\text{C.14})$$

E integrando esta relación obtenemos:

$$\frac{t}{2M} = -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r}{2M}} + 1}{\sqrt{\frac{r}{2M}} - 1} \right| + cte. \quad (\text{C.15})$$

## Apéndice D

# Espacios-tiempo estáticos y estacionarios

Se pretende en este apéndice aclarar las diferencias entre estaticidad y estacionaridad. Para ello nos basaremos en los planteamientos de [25], [5] y [2]. Vamos en primer lugar a definir qué entendemos por un espacio-tiempo estacionario:

- **Espacio-tiempo estacionario.** *Se dice que un espacio-tiempo es estacionario si posee un vector de Killing  $\xi$  que es de tipo tiempo en el infinito.* Dado este vector de Killing  $\xi$ , podemos construir una base de coordenadas  $(t, x, y, z)$  en la que  $\chi = \partial_t$ . En esta base de coordenadas, la métrica será completamente independiente de la coordenada temporal  $t$ . Así pues, otra definición equivalente de un espacio tiempo estacionario sería  $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ .
- **Espacio-tiempo estático.** La condición de estaticidad es aún más restrictiva. *Decimos que un espacio-tiempo es estático si existe un vector de Killing temporal en el infinito  $\xi$  que es ortogonal a una familia de hipersuperficies.* Según el teorema de Frobenius, la condición de que un vector  $\xi$  sea ortogonal a una familia de hipersuperficies se da si y sólo si:

$$\xi_{[\mu} \nabla_{\nu} \xi_{\sigma]} = 0 \tag{D.1}$$

Pero podemos encontrar un diagnóstico más sencillo para detectar un espacio-tiempo estático. Si el espacio-tiempo cumple la condición de estaticidad, podemos considerar la base de coordenadas adaptadas  $(\partial_z = \xi, \partial_{x^i})$ , donde  $\partial_{x^i}$  son vectores tangentes a cada una de las hipersuperficies a las que  $\xi$  es ortogonal. En esta base, las hipersuperficies estarán definidas por la ecuación:

$$z + a(x) = cte. \tag{D.2}$$

donde  $a$  es una función desconocida.

Además, dado que un espacio-tiempo estático es por definición estacionario, la métrica será independiente de la coordenada  $z$ :

$$ds^2 = g_{zz}(x)dz^2 + 2g_{zi}dzdx^i + g_{ij}(y)dx^i dx^j \quad (\text{D.3})$$

Vamos ahora a introducir una nueva coordenada  $t = z + a(x)$ . De esta forma, ahora las hipersuperficies ortogonales están descritas por la ecuación  $t = \text{cte.}$ . Así, por definición (ver apéndice A), el vector  $\partial_t$  es ortogonal a cualquier vector  $\partial_{x^i}$  contenido en la hipersuperficie. Y como ya vimos en el apéndice B, esto implica que no aparecerán en el elemento de línea términos cruzados de la forma  $dt dx^i$ . Hemos demostrado por tanto que una métrica estática puede expresarse como:

$$ds^2 = g_{tt}(x)dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j \quad (\text{D.4})$$

Vemos que las componentes de la métrica son independientes de  $t$  y que sólo aparecen términos cuadráticos en  $dt$ . Así, podemos concluir que la métrica de un espacio-tiempo estático es invariante bajo la transformación  $t \rightarrow -t$ . De esta forma obtenemos una definición alternativa para la estaticidad: *un espacio-tiempo es estático si su métrica es invariante bajo inversión temporal.*

# Apéndice E

## Demostraciones

### E.1 Demostración 1

Dado un vector de Killing  $\xi^\mu$ , que satisface la ecuación de Killing  $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$ , se cumple  $\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\rho = R^\rho{}_{\nu\mu\sigma} \xi^\sigma$ .

Una igualdad que utilizaremos en la demostración será la definición del tensor de Riemann en una variedad en ausencia de torsión:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \quad (\text{E.1})$$

Partimos de la definición del tensor de Killing, y diferenciando llegamos a:

$$\nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (\text{E.2})$$

Ahora, reetiquetando los índices de esta igualdad y sumando, obtenemos:

$$\nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\rho \xi_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\rho + \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\rho = 0 \quad (\text{E.3})$$

Y agrupando:

$$[\nabla_\rho, \nabla_\mu] \xi_\nu + [\nabla_\nu, \nabla_\mu] \xi_\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\mu = 0 \quad (\text{E.4})$$

Vamos a sustituir ahora con la ecuación (E.1) para obtener:

$$\nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\mu = (R_{\nu\sigma\mu\rho} + R_{\rho\sigma\mu\nu}) \xi^\sigma \quad (\text{E.5})$$

$$2\nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu = (R_{\nu\sigma\mu\rho} + R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\nu\rho\sigma\mu}) \xi^\sigma \quad (\text{E.6})$$

A continuación, vamos a hacer uso de la primera identidad de Bianchi:

$$R_{\nu\sigma\mu\rho} + R_{\nu\mu\rho\sigma} + R_{\nu\rho\sigma\mu} = 0 \quad (\text{E.7})$$

De esta forma, la ecuación (E.5) se reduce a:

$$2\nabla_\rho \nabla_\nu \xi_\mu = 2R_{\rho\sigma\mu\nu} \xi^\sigma \quad (\text{E.8})$$

Subiendo índices y reordenando el tensor de Riemann (haciendo uso de la propiedad  $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ ) llegamos a lo que queríamos demostrar:

$$\nabla_\rho \nabla_\nu \xi^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \xi^\sigma \quad (\text{E.9})$$

## E.2 Demostración 2

**Dado un horizonte de Killing  $\Sigma$  y su vector de Killing correspondiente  $\chi^\mu$ , las expresiones para la gravedad de superficie  $\chi^\mu \nabla_\nu \chi^\nu = \kappa \chi^\mu$  y  $\nabla_\mu (-\chi^\nu \chi_\nu) = 2\kappa \chi_\mu$  son equivalentes**

Partimos del lado izquierdo la segunda expresión:

$$\nabla_\mu (-\chi^\nu \chi_\nu) = 2\kappa \chi_\mu \longleftrightarrow -2\chi^\nu \nabla_\mu \chi_\nu = 2\kappa \chi_\mu \quad (\text{E.10})$$

Ahora, aplicando la ecuación de Killing que debe cumplir cualquier vector de Killing (y en particular  $\chi^\mu$ ):  $\nabla_{(\mu} \chi_{\nu)} = 0$ , obtenemos:

$$\chi^{n\mu} \nabla_\nu \chi_\mu = \kappa \chi_\mu \quad (\text{E.11})$$

A partir de esta ecuación llegamos a la expresión que buscábamos simplemente subiendo el índice  $\mu$ .

## E.3 Demostración 3

**Dado un vector de Killing  $\zeta^\mu$  y una geodésica de vector tangente  $U^\mu$ , entonces  $\zeta_\mu U^\mu$  es constante a lo largo de dicha trayectoria geodésica.**

Queremos demostrar que  $U^\mu \nabla_\mu (\zeta_\nu U^\nu) = 0$ . Pues bien, si expandimos la parte izquierda tenemos:

$$U^\mu \nabla_\mu (\zeta_\nu U^\nu) = U^\mu U^\nu \nabla_\mu \zeta_\nu + \zeta_\nu U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0 \quad (\text{E.12})$$

En el primer término, dado que  $\zeta_\nu$  satisface la ecuación de Killing, nos encontramos la contracción de un tensor claramente simétrico ( $U^\mu U^\nu$ ) con uno antisimétrico. Por lo tanto este término se anula. Si observamos el segundo sumando, vemos que contiene la ecuación geodésica para  $U^\mu$ ; y dado que la 4-velocidad  $U^\mu$  está por definición afinmente parametrizada (es un vector parametrizado por el tiempo propio), este término también es cero. Hemos por tanto demostrado lo que queríamos.

## E.4 Demostración 4

**Dado un horizonte de Killing  $\Sigma$  con gravedad de superficie  $\kappa$  cuyo vector de Killing asociado es  $\chi$ , entonces  $e_A^\mu \nabla_\mu \kappa$  es constante a lo largo de los generadores nulos.**

Queremos demostrar que  $\chi^\mu \nabla_\mu (e_A^\sigma \nabla_\sigma \kappa) = 0$ . Extendiendo el lado izquierdo de la ecuación:

$$\chi^\mu \nabla_\mu (e_A^\sigma \nabla_\sigma \kappa) = \chi^\mu (\nabla_\mu e_A^\sigma) (\nabla_\sigma \kappa) + \chi^\mu e_A^\sigma \nabla_\mu \nabla_\sigma \kappa \quad (\text{E.13})$$

Ahora vamos a centrarnos en el segundo sumando. Aplicando la regla de la cadena podemos ver que:

$$\chi^\mu e_A^\sigma \nabla_\mu \nabla_\sigma \kappa = \nabla_\sigma (\chi^\mu e_A^\sigma \nabla_\mu \kappa) - (\nabla_\sigma \chi^\mu) e_A^\sigma \nabla_\mu \kappa - (\nabla_\sigma e_A^\sigma) \chi^\mu \nabla_\mu \kappa \quad (\text{E.14})$$

donde vemos que el último sumando se anula, ya que como hemos demostrado en la sección 6.4,  $\chi^\mu \nabla_\mu \kappa = 0$ .

De esta forma, llegamos a:

$$\chi^\mu \nabla_\mu (e_A^\sigma \nabla_\sigma \kappa) = \nabla_\sigma \kappa [\chi^\mu \nabla_\mu e_A^\sigma - e_A^\mu \nabla_\mu \chi^\sigma] + \nabla_\sigma (\chi^\mu e_A^\sigma \nabla_\mu \kappa) \quad (\text{E.15})$$

Vemos que la cantidad entre corchetes es la definición de la derivada de Lie a lo largo del vector de Killing  $\chi$ :  $\mathcal{L}_\chi e_A^\sigma$ . Dado que  $\chi$  es el vector de Killing del horizonte, podemos ver que esta cantidad es igual a cero. Para ello, consideramos que no hay torsión y por tanto los símbolos de Christoffel son simétricos. Así:

$$\mathcal{L}_\chi e_A^\sigma = \chi^\mu \nabla_\mu e_A^\sigma - e_A^\mu \nabla_\mu \chi^\sigma = \chi^\mu \partial_\mu e_A^\sigma - e_A^\mu \partial_\mu \chi^\sigma \quad (\text{E.16})$$

Ahora vamos a sustituir  $\chi^\mu$  y  $e_A^\mu$  por sus definiciones dadas en las ecuaciones (A.9):

$$\mathcal{L}_\chi e_A^\sigma = \frac{\partial x^\mu}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A} \right) - \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^A} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \gamma} \right) = 0 \quad (\text{E.17})$$

Así, una vez visto esto ya sólo nos queda el segundo sumando. Expandiéndolo tenemos:

$$\chi^\mu \nabla_\mu (e_A^\sigma \nabla_\sigma \kappa) = (\nabla_\sigma e_A^\sigma) (\chi^\mu \nabla_\mu \kappa) + e_A^\sigma \nabla_\sigma (\chi^\mu \nabla_\mu \kappa) \quad (\text{E.18})$$

Ya hemos visto antes que el primer sumando debe ser cero. Sin embargo, en cuanto al segundo, el que la cantidad entre paréntesis sea cero no implica que su derivada tenga que serlo. Aquí vamos a emplear un razonamiento similar al que realizamos en la ecuación (A.6). Por un lado, si la derivada se anula el término se hace cero y hemos demostrado lo que queríamos. Pero si no lo hace, quiere decir que  $\chi^\mu \nabla_\mu \kappa$  no es cero fuera del horizonte, y por lo tanto podemos utilizar la ecuación  $f(x) = \chi^\mu \nabla_\mu \kappa = 0$  para definir esta hipersuperficie nula. Así,  $\nabla_\sigma (\chi^\mu \nabla_\mu \kappa)$  será por definición un vector tangente a la hipersuperficie, y en consecuencia proporcional a  $\chi^\sigma$ . Y dado que  $\chi^\sigma$  y  $e_A^\sigma$  son ortogonales tenemos que el término se anula y llegamos de nuevo al resultado que queríamos.

# Bibliografía

- [1] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [2] S. M. Carroll, *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973.
- [4] M. P. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [6] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes: An Introduction*. Imperial College Press, 1990.
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, 1972.
- [8] B. Carter, "Black Hole Equilibrium States," in *Black Holes*, ed. by C. De Witt and B. S. de Witt, *Gordon and Breach* (1973) 57–214.
- [9] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [10] I. R. H. Friedrich and R. M. Wald, "On the Rigidity Theorem for Spacetimes with a Stationary Event Horizon or a Compact Cauchy Horizon," *Commun. Math. Phys.* **204** (1999) 691–707, [arXiv:9811021 \[gr-qc\]](#).
- [11] H. A. Buchdahl, "General Relativistic Fluid Spheres," *Phys. Rev.* **116** no. 4, (1959) 1027–1034.
- [12] J. Nordebo, "The Reissner-Nordström metric," *Umea University, Department of Physics. Yöksek Lisans Tezi*, 46s (2016) .
- [13] C. Heinicke and F. W. Hehl, "Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation," [arXiv:1503.02172 \[gr-qc\]](#).

- [14] S. Chandrasekhar and J. B. Hartle, “On crossing the Cauchy horizon of a Reissner-Nordström black-hole,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **384** no. 1787, (1982) 301–315.
- [15] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four Laws of Black Hole Mechanics,” *Commun. math. Phys.* no. 31, (1973) 161–170.
- [16] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Information Theory,” [arXiv:0311049 \[quant-ph\]](#).
- [17] S. Carlip, “Black Hole Thermodynamics,” [arXiv:1410.1486 \[gr-qc\]](#).
- [18] S. W. Hawking, “The Quantum Mechanics of Black Holes,” *Sci. Am.* **34-41** (1977) 678.
- [19] R. M. Wald, “The Thermodynamics of Black Holes,” [arXiv:9912119 \[gr-qc\]](#).
- [20] G. Kessler, “Simple model for the emission of particles by black holes,” *Am. J. Phys.* **46** (1978) 678.
- [21] S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature* **248** (1974) 30–31.
- [22] I. Rácz and R. M. Wald, “Global extensions of spacetimes describing asymptotic final states of black holes,” [arXiv:9507055 \[gr-qc\]](#).
- [23] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation,” *Phys. Rev.* **15** (1977) 2738–2751.
- [24] L. Susskind, “The World as a Hologram,” [arXiv:9409089 \[hep-th\]](#).
- [25] R. D’Iverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [26] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.