

OpenCourseWare para

**Cálculo Integral**  
de primer curso de los  
Grados en Matemáticas y en Física

José Manuel Bayod  
Universidad de Cantabria

Octubre 2012

# Índice

<b>Presentación</b>	<b>5</b>
Contexto . . . . .	5
Objetivos mínimos . . . . .	5
Qué quiere ser (y qué no pretende ser) este OCW . . . . .	6
Demostraciones / Justificaciones: una muestra . . . . .	8
Infinitésimos e infinitos . . . . .	13
Competencias y conocimientos previos . . . . .	13
Palabras clave . . . . .	14
Para finalizar la presentación . . . . .	14
<b>1. Integrales de una variable e integrales sobre curvas</b>	<b>15</b>
1.1. Integral de Riemann para funciones de una variable real . . . . .	16
1.1.1. Introducción . . . . .	16
1.1.2. Teorema Fundamental del Cálculo . . . . .	20
1.1.3. Cálculo de primitivas . . . . .	21
1.2. Integrales sobre caminos . . . . .	23
1.2.1. Integral de un campo escalar sobre un camino . . . . .	24
1.2.2. Integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria . . . . .	33
1.2.3. Cambios de parámetro . . . . .	37
1.2.4. Efectos de los cambios de parámetros en el valor de las integrales . . . . .	41
1.3. Integrales sobre curvas . . . . .	44
1.4. Campos conservativos . . . . .	49
1.5. Notas adicionales . . . . .	58
1.5.1. Ejemplos de integrales de campos vectoriales sobre caminos . . . . .	58
1.5.2. Lema de Poincaré para conjuntos estrellados . . . . .	59
<b>2. Integrales de dos variables</b>	<b>63</b>
2.1. Introducción . . . . .	64
2.2. Integración de funciones definidas sobre rectángulos . . . . .	67
2.2.1. Definiciones . . . . .	67
2.2.2. Integrabilidad . . . . .	70
2.2.3. Propiedades elementales . . . . .	75
2.2.4. Integrales reiteradas . . . . .	77
2.3. Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados . . . . .	81
2.3.1. Introducción . . . . .	81
2.3.2. Regiones bidimensionales simples . . . . .	83
2.3.3. Otras propiedades . . . . .	90
2.4. Cambios de variable . . . . .	95
2.4.1. Fórmula del cambio de variable . . . . .	95
2.4.2. Coordenadas polares . . . . .	101
2.5. Integrales impropias . . . . .	104
2.6. Teorema de Riemann-Green . . . . .	107
2.6.1. Fórmula de Riemann-Green para rectángulos . . . . .	108
2.6.2. Fórmula de Riemann-Green para regiones simples . . . . .	110
2.6.3. Fórmula de Riemann-Green para regiones más generales . . . . .	115

2.6.4.	Otras formulaciones del Teorema de Riemann-Green	119
2.6.5.	Aplicaciones del teorema de Riemann-Green	121
2.7.	Notas adicionales	125
2.7.1.	Función de Dirichlet	125
2.7.2.	Condición suficiente de integrabilidad	125
2.7.3.	Demostración (parcial) del teorema 2.11	126
2.7.4.	Demostración de que el mínimo rectángulo que contiene a $D$ siempre existe	128
2.7.5.	Demostración del teorema 2.26	128
2.7.6.	Demostración del teorema 2.29, del valor medio para integrales, en el caso $n = 2$	129
2.7.7.	Interior y frontera de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$	130
2.7.8.	Fórmula del cambio de variable para integrales simples y valor absoluto de la derivada	133
2.7.9.	Demostración de que los cambios a coordenadas polares verifican las hipótesis del teorema del cambio de variable, 2.32	134
2.7.10.	Ejemplo de integral en coordenadas polares	134
2.7.11.	La gráfica de $y = \varphi_1(x)$ es una curva simple	135
2.7.12.	Orientación antihoraria	137
2.7.13.	Fórmula de Riemann-Green para conjuntos deformados mediante un $\mathcal{C}^2$ -difeomorfismo	137
<b>3.</b>	<b>Integrales sobre superficies</b>	<b>139</b>
3.1.	Superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas en forma paramétrica	140
3.1.1.	Introducción	140
3.1.2.	Ejemplos	144
3.1.3.	Definición formal de superficie	150
3.2.	Integral de un campo escalar sobre una superficie	153
3.3.	Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada	159
3.3.1.	Integral de un campo vectorial sobre una parametrización	159
3.3.2.	Orientación de superficies definidas en forma explícita	160
3.3.3.	Orientación de superficies generales	162
3.3.4.	Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada	168
3.4.	Teorema de Stokes (clásico)	173
3.4.1.	Fórmula de Stokes para superficies definidas explícitamente	173
3.4.2.	Fórmula de Stokes para superficies más generales	175
3.4.3.	Aplicaciones del teorema de Stokes	177
3.5.	Notas adicionales	178
3.5.1.	Los vectores tangentes a trayectorias con imagen sobre $\Sigma$ son combinación lineal de las derivadas parciales	178
3.5.2.	Una superficie definida paraméricamente es localmente una superficie definida por ecuaciones explícitas	178
3.5.3.	Acordeón de Schwarz	178
3.5.4.	Otras aplicaciones de las integrales de campos escalares sobre superficies	180
3.5.5.	La cinta de Möbius no es orientable	182
3.5.6.	Aplicaciones del teorema de Stokes	184

<b>4. Integrales de tres variables</b>	<b>187</b>
4.1. <a href="#">Introducción</a>	188
4.2. <a href="#">Integrabilidad, teorema de Fubini y regiones tridimensionales simples</a>	189
4.3. <a href="#">Ejemplos</a>	192
4.4. <a href="#">Coordenadas esféricas</a>	198
4.5. <a href="#">Coordenadas cilíndricas</a>	200
4.6. <a href="#">Teorema de la Divergencia</a>	201
4.6.1. <a href="#">Fórmula de la Divergencia</a>	201
4.6.2. <a href="#">Aplicaciones del teorema de la divergencia</a>	204
4.7. <a href="#">Definiciones alternativas de la integral de Riemann</a>	209
4.8. <a href="#">Otras integrales diferentes de la de Riemann</a>	210
4.8.1. <a href="#">Integral de Lebesgue</a>	210
4.8.2. <a href="#">Integral de Kurzweil-Henstock</a>	210
4.8.3. <a href="#">¿Hasta dónde puede ampliarse el concepto de integral?</a>	211
4.9. <a href="#">Notas adicionales</a>	213
4.9.1. <a href="#">Otros órdenes de integración en el ejemplo 4.7</a>	213
4.9.2. <a href="#">Demostración de que los cambios a coordenadas esféricas verifican las hipótesis del teorema del cambio de variable</a>	213
4.9.3. <a href="#">Principio de Cavalieri generalizado</a>	214
4.9.4. <a href="#">Demostración del lema 4.11</a>	216
4.9.5. <a href="#">Otras aplicaciones del teorema de la Divergencia</a>	216
<b>5. Otras dimensiones: integración de formas diferenciales sobre cadenas</b>	<b>219</b>
5.1. <a href="#">Introducción</a>	220
5.2. <a href="#">Álgebra multilineal</a>	221
5.2.1. <a href="#">El espacio <math>\Lambda^k(\mathbb{R}^n)</math>, de tensores alternados de orden <math>k</math> sobre <math>\mathbb{R}^n</math>.</a>	221
5.2.2. <a href="#">Producto exterior</a>	223
5.3. <a href="#">Cálculo diferencial</a>	225
5.4. <a href="#">Cálculo integral</a>	228
5.4.1. <a href="#">Definición de cadena y de integral sobre una cadena</a>	228
5.4.2. <a href="#">Los casos de dimensión menor o igual que 3</a>	229
5.5. <a href="#">Teorema General de Stokes</a>	232
5.6. <a href="#">Notas adicionales</a>	234
5.6.1. <a href="#">Producto vectorial en dimensiones mayores que 3</a>	234
5.6.2. <a href="#"><math>k</math>-formas exactas</a>	234
<b>6. Referencias</b>	<b>235</b>

# Presentación

## Contexto

El curso *Cálculo Integral* es una asignatura de 6 créditos ECTS que se imparte a estudiantes del segundo semestre del primer curso de los grados universitarios en Física y en Matemáticas de la Universidad de Cantabria. Parte, por consiguiente, de la suposición de que quien sigue el curso ha superado con éxito la educación preuniversitaria en la rama de Ciencias y ha cursado también un primer semestre de *Cálculo Diferencial*, en el que se han tratado las cuestiones elementales relativas a números reales, convergencia de sucesiones y de funciones, continuidad y derivación de funciones (de una o de varias variables).

En el contexto de los citados planes de estudios de Grado en Física y de Grado en Matemáticas, la asignatura *Cálculo Integral* sirve como una introducción a los principales tipos de integrales que aparecen en las aplicaciones clásicas del Cálculo Infinitesimal, de una, dos o tres variables, de línea y de superficie.

1. Despojada de su contexto local, la asignatura bien podría denominarse  
***Primer curso de cálculo integral vectorial.***

(Los recuadros como éste contienen aclaraciones, avisos, consejos o advertencias que consideramos de especial trascendencia para el aprendizaje del estudiante.)

## Objetivos mínimos

Pretendemos que el estudiante que supere este curso alcance, al menos, los siguientes resultados del aprendizaje:

- Comprenda el concepto intuitivo de integral de 1, 2 o 3 variables y de las integrales sobre curvas o sobre superficies.
- Conozca una definición formal de cada una de ellas, y sepa para qué se utilizan en las aplicaciones.
- Conozca sus propiedades básicas y la manera de utilizarlas.
- Sepa la forma de calcularlas para funciones sencillas, usando, si es conveniente, un programa de cálculo simbólico.
- Sepa utilizarlas para modelizar problemas de otras disciplinas.
- Comprenda justificaciones de todos los cálculos, así como de todas las propiedades que utilice.
- Conozca los principales resultados, incluyendo las relaciones que existen entre las diferentes integrales (teoremas clásicos del cálculo vectorial).
- De algunos resultados, los menos, conocerá también una demostración, y de todos conocerá alguna justificación.
- Distinga con claridad entre demostraciones y justificaciones, apreciando el valor de ambas categorías.

## Qué quiere ser (y qué no pretende ser) este OCW

(1) El curso no está concebido como un apoyo al profesor, sino como una ayuda para el aprendizaje, con frecuentes comentarios explicativos que están al margen del discurso formal. Se parece a unos (buenos) apuntes, con explicaciones que unas veces descienden a los detalles y otras veces se mantienen en el nivel de las ideas directrices —como seguramente ocurre en las clases de todo buen profesor.

(2) No aspira a mostrar los resultados más amplios, matemáticamente hablando, sino que quiere ser un fiel reflejo de lo que se explicaría en las clases de una asignatura presencial para estudiantes que se están introduciendo en el nivel universitario. El contenido de los capítulos 1 a 4, que es el corazón del curso, está ajustado a la realidad de los créditos <sup>(1)</sup> y de la formación previa de los estudiantes que acceden a este nivel.

Cada capítulo tiene al final un apartado de notas adicionales, que no son esenciales en el desarrollo del curso pero que ayudan a esclarecer algunos pasajes.

Los alumnos potenciales de este curso precisarán manejar métodos matemáticos a diferentes niveles. Si eligiéramos incluir solamente lo imprescindible, lo que todo estudiante tiene que alcanzar, correríamos el riesgo de que los más motivados y/o más capaces se sintieran decepcionados en sus expectativas. Por esta razón, no hemos escatimado espacio en utilizar las notas a pie de página o las notas al final de cada capítulo (que no deberían ser indispensables para la consecución de los objetivos mínimos), así como los comentarios recuadrados, para proveer de sugerencias e indicaciones adicionales a quienes se interesen en profundizar en la materia a otros niveles superiores. Esperamos con ello que en el curso convivan varios niveles de aprendizaje.

El capítulo 5 explica cómo generalizar de manera elemental a dimensiones arbitrarias los resultados fundamentales de los capítulos 1 a 4, cosa que puede y debe interesar a los estudiantes más curiosos, *pero que no cabe en el desarrollo ordinario de un semestre académico*.

(3) No pretendemos, en cambio, que el estudiante conozca demostraciones de todas las propiedades, ni tampoco los enunciados más amplios posibles de los teoremas. Ambas cosas están fuera del alcance de un curso introductorio como éste. En algunas ocasiones, para acceder a estas demostraciones o enunciados, daremos una referencia a un libro o a una dirección de internet y en otras remitiremos a un material suplementario que se encuentra en las notas al final de cada capítulo.

En cierto modo, cualquier razonamiento (en la resolución de un problema, por ejemplo) es una demostración y, como tal, ha de ser riguroso. Para que un razonamiento sea riguroso la primera premisa es que estén claras cuáles son exactamente las hipótesis de las que se parte, y para ello será a su vez imprescindible que los conceptos que usemos tengan una definición precisa en términos técnicos, por lo que a lo largo del curso dedicaremos bastante esfuerzo a las definiciones. La primera vez que aparece definido un término está escrito **en rojo y en negrita**, salvo en el apartado 1.1, que es meramente recordatorio.

**2.** Que no se hagan demostraciones completas de muchos teoremas no obsta, naturalmente, para que todos los razonamientos que hagamos con objetos matemáticos hayan de ser rigurosos.

<sup>1</sup>6 créditos europeos equivalen, en teoría, a 150 horas de trabajo por parte de un estudiante medio.

No nos detendremos en demostrar de forma completa muchas de las propiedades. De nuestras integrales nos interesará mucho más saber manejarlas, comprender el tipo de problemas que cada una quiere resolver, conocer sus propiedades y hasta dónde llegan, y saber razonar rigurosamente con ellas, que conocer demostraciones de todo lo que sepamos hacer. Lo que queremos decir aquí con “forma completa” de demostrar se refiere a argumentos que se basen únicamente en una axiomática claramente identificada, sin recurrir a argumentos de otro tipo, como pueden ser los gráficos, los intuitivos o los de analogía.

No forma parte de los objetivos el haber comprendido demostraciones de todos los resultados que se manejen sobre integrales, como hemos señalado más arriba. A menudo nos conformaremos con comprender una “justificación”, que unas veces será muy técnica y otras muy intuitiva, de por qué una determinada fórmula expresa lo que buscamos. O nos conformaremos con entender una explicación que ilustre el sentido o el origen de una propiedad.

**3.** Pero sí que nos interesará mucho aprender a distinguir entre una demostración de una propiedad y una justificación de por qué la propiedad es cierta.

Como consecuencia, cuando de una aserción demos justificaciones pero no demos una demostración, procuraremos dejarlo claro, mediante el formato tipográfico o advirtiéndolo expresamente que no se trata de una demostración. También lo advertiremos expresamente cuando una demostración no esté completa porque solamente tratemos algún caso particular.

(4) Por último, entendemos que en un curso elemental de matemáticas no es admisible que se formule una teoría, con sus definiciones y teoremas, para, a continuación, aplicarla a contextos para los que no son válidas las definiciones o en lo que no se cumplen las hipótesis de los teoremas, con la excusa de que las aplicaciones importantes no siempre encajan exactamente en aquellas hipótesis.

**4.** Hemos puesto especial empeño en mantener la coherencia entre lo que se explica con detalle y lo que después de utiliza en los ejemplos, aplicaciones o problemas.

Varias muestras de lo que queremos decir:

La definición que demos de superficie ha de ser, además de elemental, lo bastante amplia como para incluir a todos aquellos objetos sobre los que queremos hacer cálculos (conos, cilindros, etc.), por mucho que para ello se compliquen los enunciados y/o las demostraciones <sup>(2)</sup>.

Necesitamos manejar conjuntos que sean de magnitud despreciable a los efectos de la integrabilidad, pero queremos evitar hablar de medida nula, un concepto que consideramos demasiado sofisticado para este curso. La solución será apelar a las gráficas de funciones continuas, que serán más que suficientes en todas las aplicaciones <sup>(3)</sup>.

En la demostración de la fórmula de Riemann-Green en el plano aparecen varios detalles sutiles (serán sutiles, puesto que algunos libros de amplia aceptación los obvian), incluso cuando se hace solamente para regiones que son simples en las dos coordenadas. No sólo no obviaremos esos detalles, sino que los haremos aflorar para indicar cómo se pueden resolver, aunque no siempre podamos explicar todos los detalles de la solución <sup>(4)</sup>.

<sup>2</sup>Hemos seguido básicamente las ideas del texto [2].

<sup>3</sup>Hemos seguido, entre otros, el texto [11].

<sup>4</sup>Hemos hecho una elaboración personal.

En el cuerpo del texto hemos querido evitar al máximo la formulación abstracta de los conceptos topológicos, incluso los básicos de conjunto abierto o cerrado, lo que nos ha llevado a considerar algunas de las propiedades solamente sobre conjuntos simples <sup>(4)</sup>.

## Demostraciones / Justificaciones: un ejemplo

Para ejemplificar el tipo de conocimientos, competencias y habilidades que se espera obtener mediante esta asignatura, así como los que no se espera obtener, analizaremos una operación no trivial que un alumno tipo de este curso debe conocer, *la raíz cuadrada de un número entero positivo*.

**CONCEPTO INTUITIVO Y DEFINICIÓN FORMAL.** La raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

Dado un número (natural, real, complejo, etc.)  $a$ , se dice que otro número  $r$  del mismo tipo es una raíz cuadrada de  $a$  cuando  $r^2 = r \cdot r = a$ .

**PROPIEDADES BÁSICAS.** Dentro de  $\mathbb{R}$  tienen raíz cuadrada todos los números reales positivos. (¿Se sabe demostrar con una “demostración completa”?) En cambio, dentro de los enteros o de los racionales, pocos números positivos tienen raíz cuadrada. (¿Se sabe demostrar que 2 no tiene raíz cuadrada en  $\mathbb{Q}$ ?)

“La” raíz cuadrada no es, en general, única, de modo que la igualdad  $(\sqrt{a})^2 = a$  es cierta siempre que existan todos los términos que en ella aparecen, mientras que la igualdad  $\sqrt{r^2} = r$  no siempre es cierta, aunque todos los términos que aparecen en la misma existan.

Etc.

**CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA POSITIVA (EN  $\mathbb{R}$ ) DE UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.** Damos por supuesto que es conocido el procedimiento que se suele explicar en la matemática elemental para calcular los sucesivos decimales de, por ejemplo,  $\sqrt{18}$ .

**JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO QUE SE UTILIZA PARA EL CÁLCULO A MANO DE  $\sqrt{18}$ .** Elevar al cuadrado un número significa, en términos geométricos, construir un cuadrado cuyo lado mida ese número (de aquí el nombre de la operación), tal como se indica en la figura 0.1 con el cuadrado de lado 3. Como nosotros representamos todos los números sobre una misma

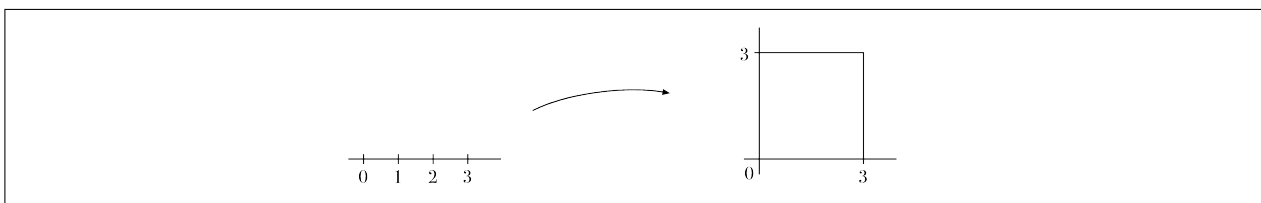


Figura 0.1: Cuadrado de lado 3

recta, sin utilizar normalmente las dos dimensiones que tiene el plano, en el cuadrado de lado 3 numeramos los cuadrados de lado 1 y, a continuación, bajamos los que están en las líneas superiores para colocarlos todos en una sola línea (figura 0.2). Decimos entonces que 9 es el cuadrado de 3.

Pues bien, calcular la raíz cuadrada de un número es el proceso inverso al anterior, es decir, dado un número positivo como, por ejemplo, el 18, se trata de apilar los 18 cuadrados de lado 1 de modo que formemos un cuadrado con un lado que mida lo que haga falta para



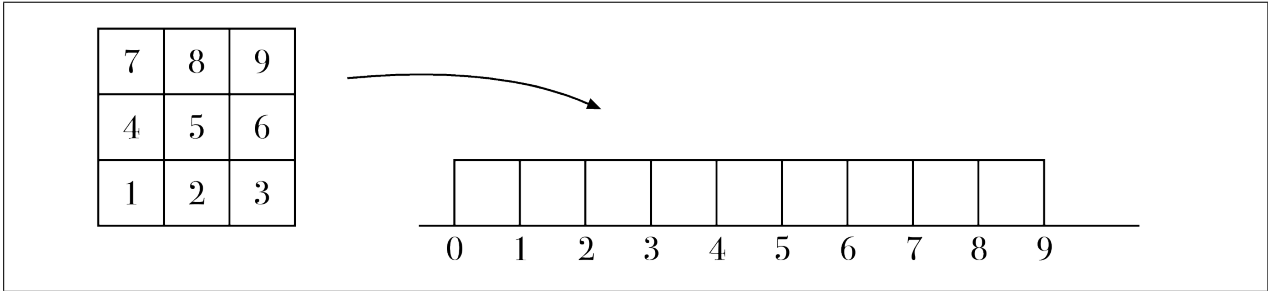


Figura 0.2: El cuadrado de 3 es 9

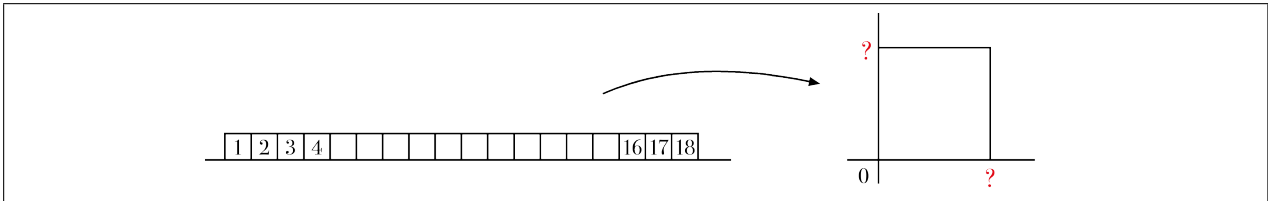


Figura 0.3: Encontrar  $\sqrt{18}$  significa encontrar un cuadrado que mida lo mismo que el rectángulo formado por 18 cuadrados

que su área sea exactamente igual a 18 (figura 0.3).

Para este cálculo procedemos del siguiente modo.

1. Apilamos los cuadrados de lado 1, los últimos sobre los primeros, formando cuadrados de lado 2, 3, etc., mientras se pueda. Nos tenemos que parar en el tercer paso de la figura 0.4, donde hemos formado un cuadrado de lado 4 y solamente nos quedan 2 cuadrados (numerados con 5 y 6), que, al intentar dar el paso siguiente, observamos que no serían suficientes para formar un cuadrado de lado 5.

Así que la raíz cuadrada de 18 está comprendida entre 4 y 5.

2. A continuación, dividimos los 2 cuadrados que nos quedan en  $10 \times 10$  cuadrados iguales cada uno, de lado 0,1 (figura 0.5). Estos 200 cuadrados de lado 0,1 son los que ahora apilamos para hacer un cuadrado mayor que el que habíamos formado con los 16 primeros. Utilizaremos 81 para la primera capa de minicuadrados (en color amarillo en la figura 5) y 83 en la segunda capa (en color azul en la figura 5). No podremos poner una tercera capa, dado que solamente nos quedan  $200 - 81 - 83 = 36$  y en la figura vemos que no van a ser suficientes.

De modo que la raíz cuadrada de 18 está comprendida entre 4,2 y 4,3. (Que obtengamos así el primer decimal es consecuencia de que hayamos dividido el lado de cada cuadrado en 10 partes iguales.)

3. Repetimos el ultimo paso. Para ello, dividiremos los 36 cuadrados en 100 cuadrados iguales, que ahora miden 0,01 de lado. Y apilaremos estos 3600 cuadrados alrededor de los demás para ir agrandando, mientras sea posible, el cuadrado grande.

Una figura ya no nos ayudará a hacer un recuento, mejor intentaremos razonar de una manera que nos sirva de ahora en adelante. ¿Cuántas capas podremos construir alrededor del cuadrado grande que ya habíamos formado?

Si llamamos  $x$  al número de capas de amplitud 0,01 que vamos a poder completar

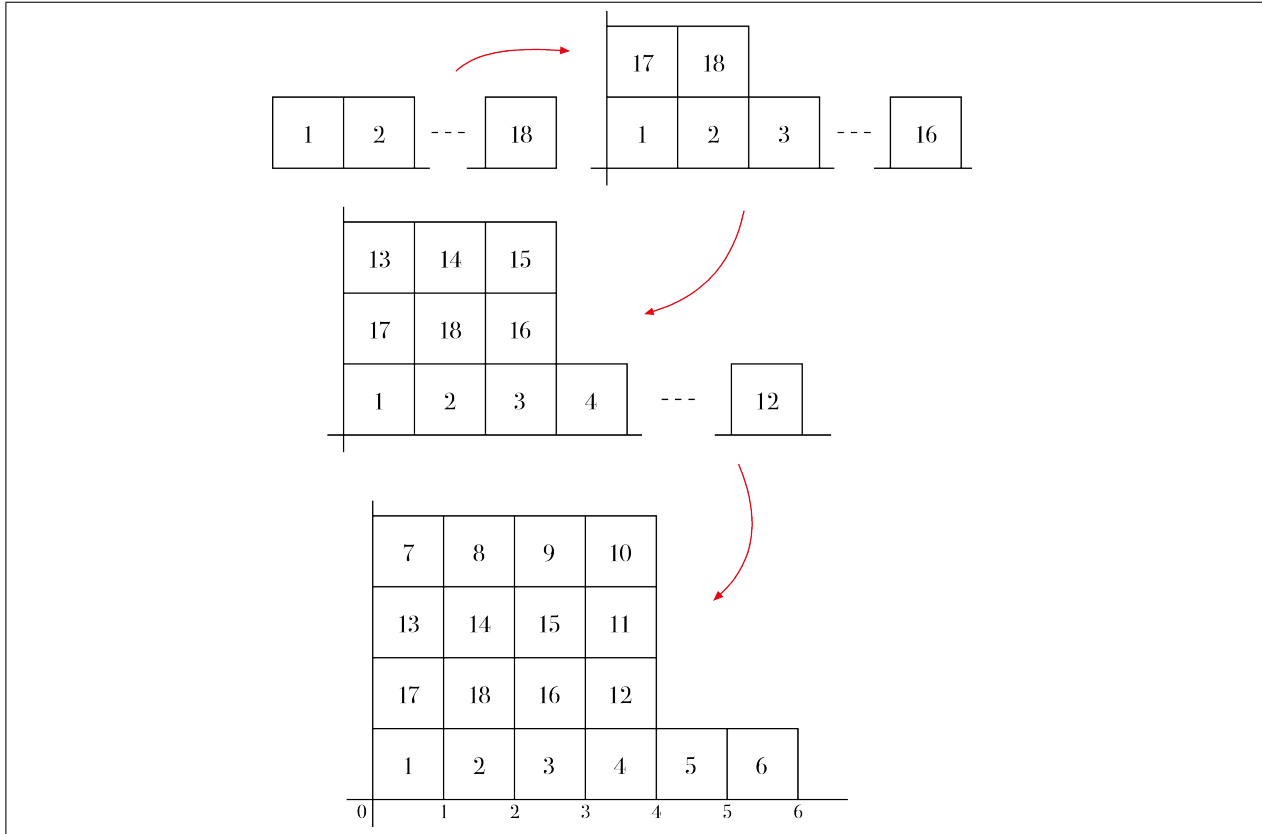


Figura 0.4: Formamos un nuevo cuadrado, utilizando el mayor número posible de cuadrados pequeños

(figura 0.6), por una parte sabemos que  $x < 10$ , puesto que que no teníamos suficientes cuadrados de lado 0,01 para añadir una capa de anchura 0,1, y por otra parte observamos que tenemos que formar:

- un rectángulo cuya base tiene  $x$  cuadrados de lado 0,01 y cuya altura tiene  $42 \times 10$  cuadrados (en azul en la figura 6), puesto que para alcanzar cada uno de los 42 cuadrados de lado 0,1 necesitamos 10 de los que tenemos disponibles;
- un rectángulo de base  $42 \times 10$  cuadrados y altura  $x$  cuadrados (en amarillo), por el mismo motivo;
- un cuadrado de que en cada lado tiene  $x$  de lado 0,01 (en rojo), para completar el cuadrado.

Así que en total habremos utilizado

$$42 \times 10 \times x + 42 \times 10 \times x + x \times x$$

cuadrados pequeños.

Sólo tenemos 3600 cuadrado pequeños, por tanto  $x$  tiene que cumplir que

$$3600 \geq 2 \times 42 \times 10 \times x + x^2 = (2 \times 42 \times 10 + x)x.$$

Y además queremos tomar el mayor  $x$  posible,  $x = 0, 1 \dots 9$ , entre todos los que cumplen esta desigualdad.

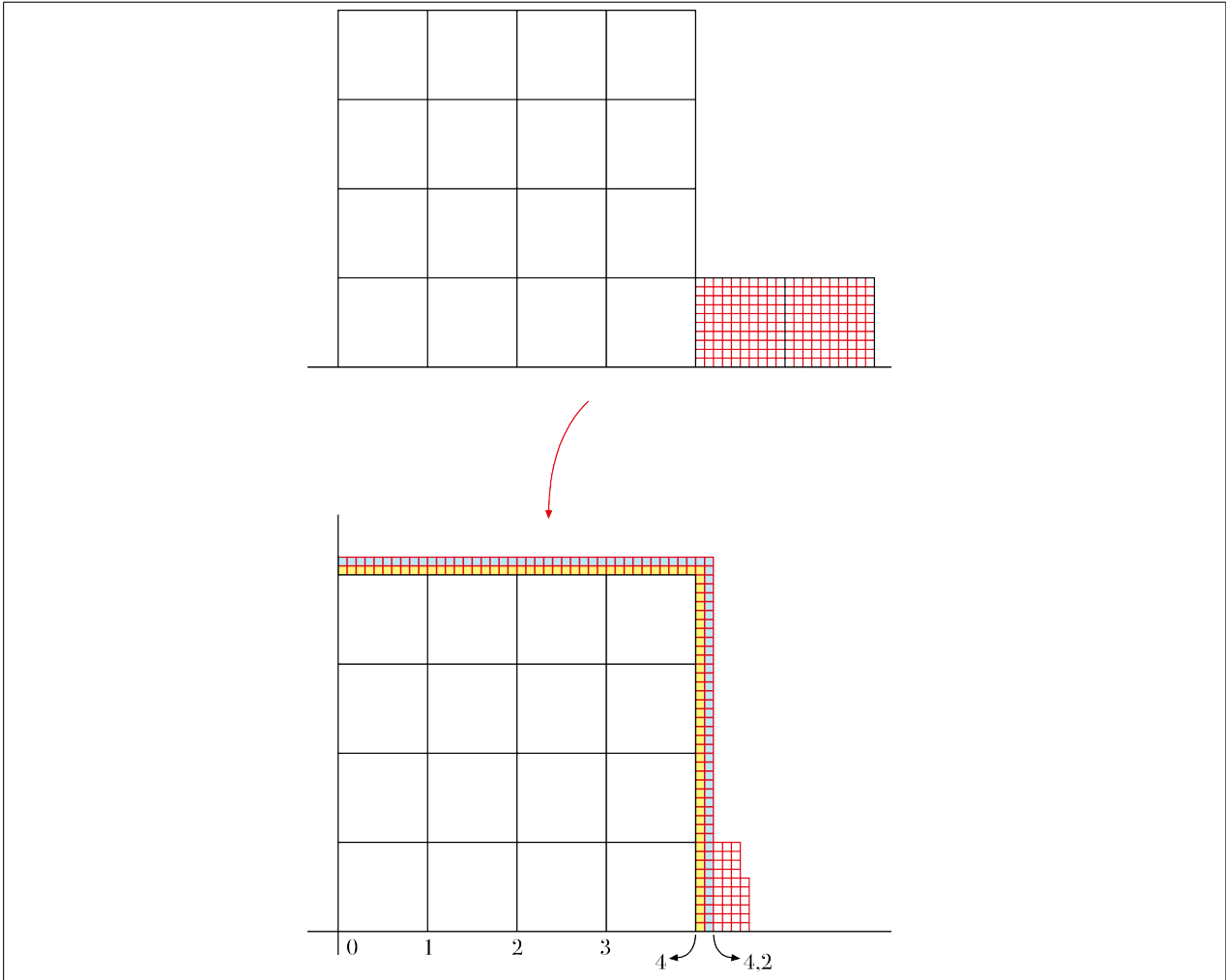


Figura 0.5: Utilizamos todos los cuadraditos rojos que podamos, para agrandar el cuadrado que teníamos

Obsérvese que multiplicar un número por 10 y sumarle el dígito  $x$  es lo mismo que adjuntarle el dígito  $x$  a la derecha.

4. Así que el número  $x$ , que será el siguiente decimal de la raíz cuadrada de 18, es *el mayor posible de los números que hacen que al multiplicar 42 (que es la parte de la raíz cuadrada que habíamos calculado hasta ahora, sin la coma) por 2, adjuntarle el dígito  $x$  a la derecha y multiplicarlo por el mismo  $x$ , el resultado es menor o igual que el resto de la operación que habíamos calculado hasta ahora después de adjuntarle dos ceros a la derecha.*

Éste es exactamente el procedimiento que se explica en la matemática elemental para calcular los sucesivos decimales de la raíz cuadrada de 18.

DEMOSTRACIÓN. (NOS LIMITAREMOS A DAR UN ESQUEMA DE CÓMO PODRÍA HACERSE UNA DEMOSTRACIÓN.) *Lo primero sería hacer una formalización detallada del procedimiento para construir el número decimal que presuntamente va aproximándose a la raíz cuadrada, lo que haríamos de la siguiente manera. Supongamos que estamos calculando la raíz cuadrada*

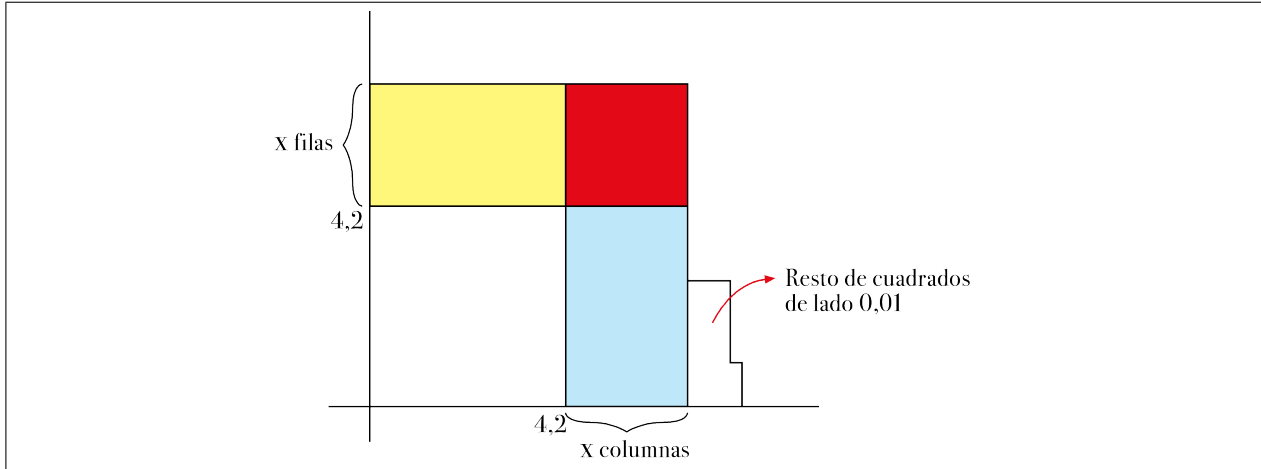


Figura 0.6: Adición de  $x$  capas, con cuadrados de 0,01 de lado

positiva de un número natural  $a$  menor que 100. Definiríamos

$$r_0 = \max\{x \in \{0, \dots, 9\} : x^2 \leq a\}; \quad R_0 = 100(a - r_0^2).$$

Y para cada número entero  $m \geq 0$  (supuestos definidos los dígitos  $r_0, \dots, r_{-m}$  y el resto  $R_m$ ),

$$r_{-(m+1)} = \max\{x \in \{0, \dots, 9\} : x(r_0 \dots r_{-m}x)_{10} \leq R_m\}$$

$$R_{m+1} = 100(R_m - r_{-(m+1)}(r_0 \dots r_{-m}r_{-(m+1)})_{10}),$$

donde  $(\dots)_{10}$  indica notación en base 10. De esta manera iríamos construyendo, dígito a dígito, la raíz cuadrada aproximada  $(r_0, r_{-1} \dots r_{-m})_{10}$ .

Lo que quedaría ahora (y no es poco) sería demostrar que esta raíz cuadrada aproximada converge efectivamente a la raíz cuadrada positiva del número  $a$ , es decir, que

$$|[(r_0, r_{-1} \dots r_{-m})_{10}]^2 - a| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Esta demostración se convierte así en un proceso largo, técnicamente complicado y, sobre todo, que no contribuye en nada a comprender por qué esta forma de calcular es un método válido para aproximar la raíz cuadrada. La justificación que hemos dado, por contra, da mucha luz sobre los motivos por los que “se bajan” las cifras de dos en dos y nos explica de manera convincente por qué se hacen el resto de operaciones.

5. El estudiante no debe olvidar, sin embargo, que por convincente que sea la justificación, no puede sustituir a una demostración: solamente demostrando un resultado con razonamientos formalizables podemos estar seguros de que las conclusiones son matemáticamente correctas. Una justificación se apoya en la intuición, mientras que una demostración nos garantiza que la intuición no nos ha engañado. Así que justificar y demostrar son actividades complementarias, que no pueden contraponerse sino que sirven a distintas finalidades.

## Infinitésimos e infinitos

Una última observación sobre el tratamiento que daremos a los infinitésimos y a los números infinitos. Los utilizaremos libremente en las gráficas y en las justificaciones, cuidando de que los razonamientos matemáticos que con ellos hagamos no solamente ayuden a la comprensión de un concepto o de un resultado, sino además que sean formalizables dentro de los *números hiperreales* (también conocidos como *números no estándar*). Sin embargo, no entraremos a explicar en detalle esas formalizaciones, ni los utilizaremos en las demostraciones, donde nos moveremos dentro del cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales.

## Competencias y conocimientos previos

### Imprescindibles

- Conocimiento de las propiedades básicas de  $\mathbb{R}$  (incluyendo la completitud).
- Concepto de función continua de una y de varias variables. Propiedades elementales. Propiedad de los valores intermedios para las funciones continuas de una variable.
- Propiedad de Weierstrass para funciones continuas sobre productos de intervalos cerrados y acotados de  $\mathbb{R}^n$ .
- Concepto de derivada y de derivada parcial. Funciones derivables con continuidad. Regla de la cadena.
- Enunciado y aplicaciones del teorema de la función inversa (en varias variables).
- Uso riguroso de límites de sucesiones y de sus propiedades. Concepto de serie.
- Concepto de integral para funciones de una variable. Teorema fundamental del cálculo. Obtención de primitivas de funciones sencillas.
- Manejo con soltura de las funciones elementales y sus propiedades (representación gráfica, diferenciación, integración).
- Saber hacer demostraciones por reducción al absurdo.
- Distinguir entre condición necesaria y condición suficiente.
- Saber enunciar la propiedad recíproca y la contrarrecíproca de una propiedad que contenga cuantificadores.
- Saber expresar, mediante ecuaciones, rectas y cónicas en el plano, así como planos y esferas en el espacio.

### Convenientes, pero no estrictamente necesarios

- Continuidad uniforme.
- Dibujar gráficas de funciones de una o dos variables, incluido el uso de un programa de cálculo simbólico.
- Interior, frontera y clausura de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  definidos a través de desigualdades con funciones elementales.
- Manejo riguroso de los infinitésimos en  ${}^*\mathbb{R}$ .

### No hacen falta

- Construcción del conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ , a partir del de los números racionales,  $\mathbb{Q}$ .
- Construcción de un conjunto de hiperreales  ${}^*\mathbb{R}$  a partir de  $\mathbb{R}$ .
- Construcción de las funciones elementales a partir de una axiomática de  $\mathbb{R}$ .
- Demostraciones de teoremas de la función inversa o de la función implícita.
- Saber sumar series (más allá de las series geométricas y similares).
- Saber calcular antiderivadas complicadas.
- Series de potencias. Convergencia de funciones.

### Palabras clave

Análisis matemático, Cálculo infinitesimal, Cálculo integral, Cálculo vectorial, Fundamentos matemáticos, Calculus, Integral de línea, Integral de Riemann, Integral de superficie, Integral definida, Matemáticas.

### Para finalizar la presentación

Resulta obligado mostrar públicamente el agradecimiento del autor a la Universidad de Cantabria por promover la realización y publicación del material de los cursos abiertos OpenCourseWare; a los responsables de este servicio de la Universidad, por su comprensión y por su impagable colaboración con la confección de la práctica totalidad de las figuras; y a la profesora Cristina Pérez García, por su desinteresada ayuda en multitud de ocasiones.

Santander, octubre de 2012

**1. Integrales de una variable e integrales sobre curvas**

## 1.1. Integral de Riemann para funciones de una variable real

Este apartado es un resumen que sirve para recordar ideas y unificar notaciones sobre un concepto y unos resultados que los alumnos que acceden a este curso deben haber conocido en sus estudios previos, como es la integral de una variable y sus primeras propiedades. En el capítulo 2 volveremos sobre las mismas cuestiones y las repetiremos con todo detalle para las funciones de dos variables.

### 1.1.1. Introducción

Consideramos una función definida sobre un intervalo real  $[a, b]$  y que supondremos acotada y tomando solamente valores positivos,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Nuestro objetivo es *definir*, manejar y calcular el valor numérico del “área” de la región del plano contenida entre la

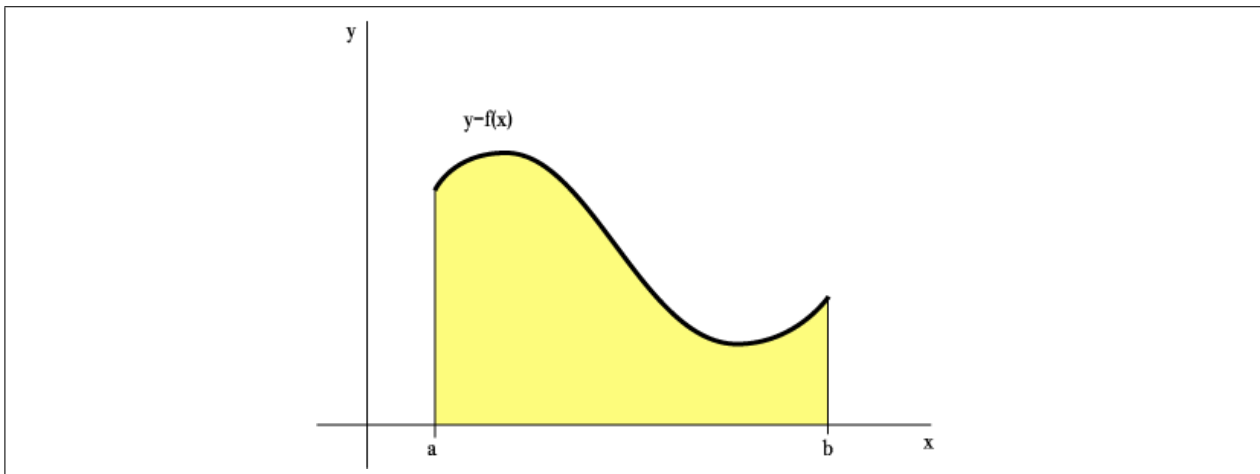


Figura 1.1: Región cuya área queremos definir

gráfica de  $f$ , el eje  $X$  de las abscisas y las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ . <sup>(5)</sup>

La idea es sustituir esta región por una aproximación suya formada por rectángulos que tienen una base infinitesimal,  $dx \approx 0$ , y una altura igual al valor de  $f$  en algún punto de la base (figura 1.2). Cada uno de esos rectángulos tiene área infinitesimal (base  $\times$  altura) y la suma de todos ellos esperamos que sea una aproximación al área de la región.

Hay varias formas de concretar técnicamente esta idea, algunas equivalentes entre sí y otras no. Pensemos, por ejemplo, en si todas las bases de los rectángulos tienen que medir lo mismo, o no; si el punto donde se evalúa la función en cada tramo infinitesimal es arbitrario o está determinado de alguna forma; etc. Sobre esto volveremos en los apartados 4.7 y 4.8.

Podríamos utilizar directamente infinitésimos <sup>(6)</sup>, pero evitaremos por el momento las aproximaciones infinitesimales y utilizaremos en su lugar pasos al límite.

<sup>5</sup>Ponemos el acento en *definir* porque el área no es para nosotros un concepto primitivo. Aunque utilicemos con mucha frecuencia figuras, donde el área puede parecer algo evidente, en los razonamientos formales nos basaremos únicamente en los axiomas de  $\mathbb{R}$  y en sus consecuencias.

Las figuras servirán en unos casos para guiarnos la intuición en los razonamientos y en otros para convencernos de que el modelo matemático que estamos construyendo se adecúa a lo que queremos modelizar.

<sup>6</sup>En 1960 A. Robinson demostró que se puede ampliar el cuerpo  $\mathbb{R}$  de números reales a un cuerpo  $^*\mathbb{R}$  de números hiperreales que incluye números infinitamente próximos a cualquier número real, así como infinitamente grandes e infinitesimales (estos últimos son los infinitamente próximos a cero), identificando la manera sistemática de transferir propiedades entre ambos cuerpos.

Los hiperreales y los reales comparten todas las propiedades de primer orden, es decir, aquellas que se



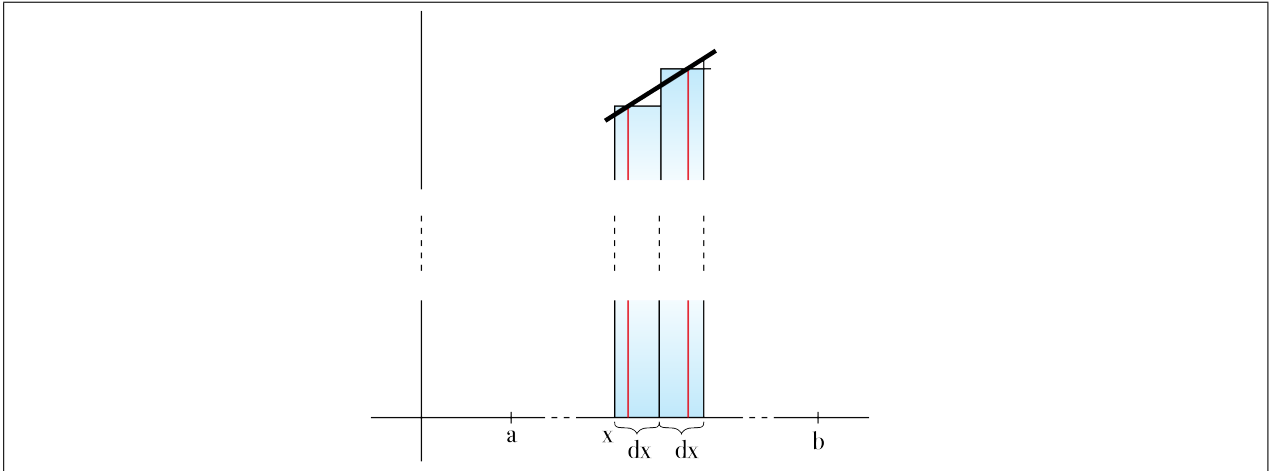


Figura 1.2: Aproximación con rectángulos de base infinitesimal  $dx$

Empezaremos con una forma similar a como lo hizo Riemann a mediados del siglo XIX. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales, cada una de longitud  $\Delta x = (b - a)/n$ , y construimos una colección de rectángulos de base cada una de esas partes o subintervalos y altura igual al valor de  $f$  en un punto sin determinar de cada subintervalo:

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b - a}{n}, \dots, x_{n-1} = a + (n - 1)\frac{b - a}{n}, x_n = b,$$

y para cada  $i = 1, \dots, n$  elegimos un punto  $\xi_i$  en el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . A continuación formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x,$$

y pasamos al límite cuando  $n$  tiende a infinito.

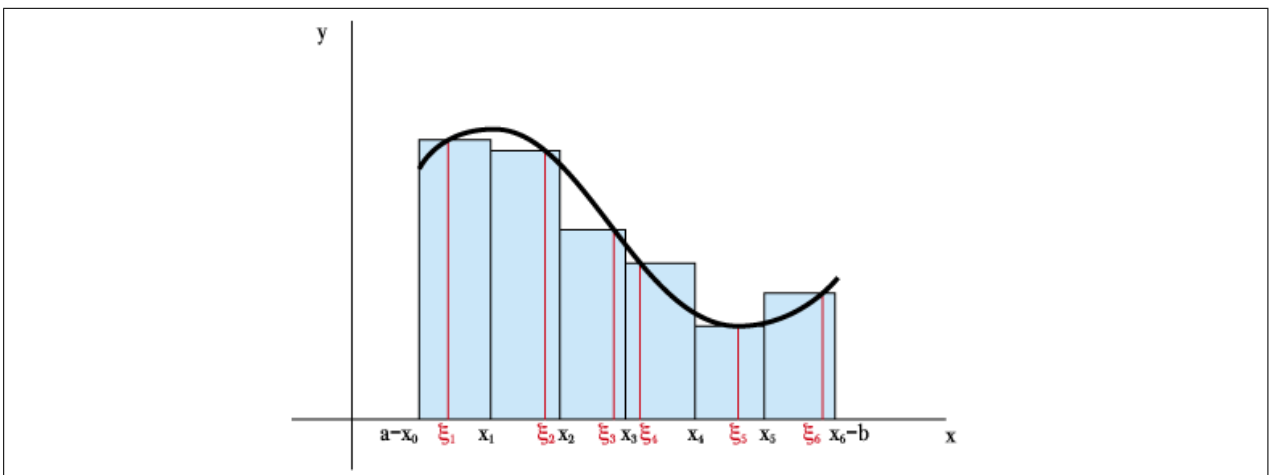


Figura 1.3: Una suma de Riemann  $S_6$

Si ocurre que las sumas de Riemann convergen a un número real y además siempre que elegimos unos  $\xi_i^*$  distintos de los  $\xi_i$  las sumas de Riemann  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i^*)\Delta x$  también convergen

---

expresan formalmente con los cuantificadores  $\forall$  y  $\exists$  aplicados a números, pero no aplicados a conjuntos de números.

al mismo número real, entonces es cuando decimos que la función  $f$  es integrable en el sentido de Riemann, y el valor del límite se llama la integral de Riemann de  $f$ , denotada mediante  $\int_a^b f(x) dx$ . Puede demostrarse que toda función continua  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable.

En el caso de que la función  $f$  no sólo tome valores positivos, podemos seguir el mismo proceso para formar las sumas de Riemann y pasar al límite, teniendo en cuenta que ahora la integral de Riemann representará también el área comprendida entre la gráfica de  $f$  y el eje horizontal, pero considerando como negativas las áreas que hay por debajo del eje. A partir de ahora dejaremos de suponer que  $f$  es positiva.

Otra forma distinta de aproximar con rectángulos es la siguiente, que fue sugerida por Darboux en 1875. En lugar de usar como altura el valor de  $f$  en un punto arbitrario, usamos la mayor y la menor posible de las alturas, mejor dicho, el supremo y el ínfimo de los valores de  $f$ . Como  $f$  la supusimos acotada, estos supremos y estos ínfimos existen, lo que no está garantizado es que coincidan con sendos valores de  $f$ . Y no nos limitamos a particiones del intervalo en subintervalos iguales. Llamamos partición del intervalo  $[a, b]$  a un conjunto finito de puntos suyos entre los cuales están siempre los extremos,  $\mathcal{P} = \{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ , y los supondremos con los subíndices elegidos de modo que los puntos están ordenados:

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , definimos

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

y llamamos suma superior de Darboux y suma inferior de Darboux a

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

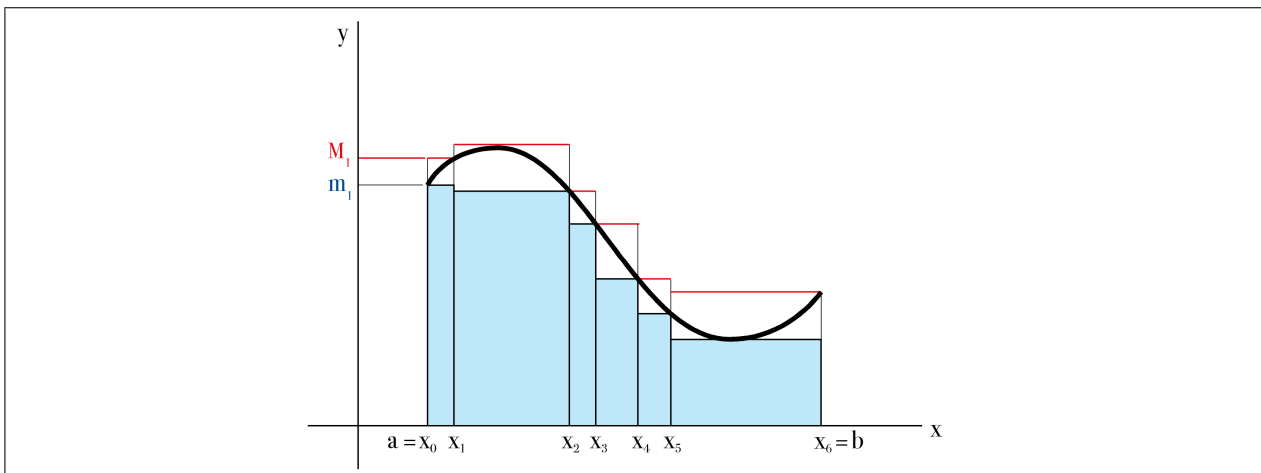


Figura 1.4: Sumas superior (con borde rojo) e inferior (coloreada en azul) de Darboux para la misma partición  $\{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$

Ahora tomamos, respectivamente, ínfimo y supremo de todos los valores posibles de  $U(f, \mathcal{P})$  y de  $L(f, \mathcal{P})$ , donde la que varía es la partición. Y a los resultados los llamamos integral superior de Darboux e integral inferior de Darboux,

$$U(f) = \inf\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}\}, \quad L(f) = \sup\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}\}.$$

En caso de que ambas integrales superior e inferior coincidan, decimos que la función  $f$  es integrable en el sentido de Darboux y que ese valor común es la integral de Darboux de  $f$ .

**Teorema 1.1 (Darboux, 1875)** *La integral de Riemann y la integral de Darboux coinciden. En otras palabras: una función acotada es integrable Riemann si y sólo si es integrable Darboux; y en caso de que lo sea, los valores de ambas integrales son el mismo.*

Observar que lo que estamos haciendo al integrar es generalizar la operación de sumar. La suma para nosotros es una operación de dos sumandos que por inducción ampliamos a un número finito de sumandos. Pero no a un número infinito. Una manera de generalizar la suma a un número infinito de sumandos la constituyen las series, pasando al límite de las sumas parciales. Los procedimientos de Riemann y de Darboux son otras formas diferentes de sumar infinitos sumandos, ninguno de los cuales involucra a series, el primero pasa al límite unas sucesiones y el segundo pasa al supremo y al ínfimo de unos conjuntos de valores.

Hasta tal punto estamos hablando de una generalización de la suma que el propio símbolo de la integral es una “s” en la caligrafía del siglo XVII (del mismo modo, el símbolo de una serie es una “S” en el alfabeto griego).

Vale la pena insistir en esto porque las aplicaciones de las integrales se refieren siempre a alguna forma generalizada de sumar. Simplificando bastante, puede decirse que cuando queremos pasar a una cantidad numerable de sumandos, las series son un instrumento adecuado; y cuando queremos utilizar una cantidad no numerable de sumandos, habremos de recurrir a las integrales <sup>(7)</sup>. Así, por ejemplo, si pensamos en una barra recta de un material con densidad variable y queremos hablar de su densidad media, una modelización adecuada

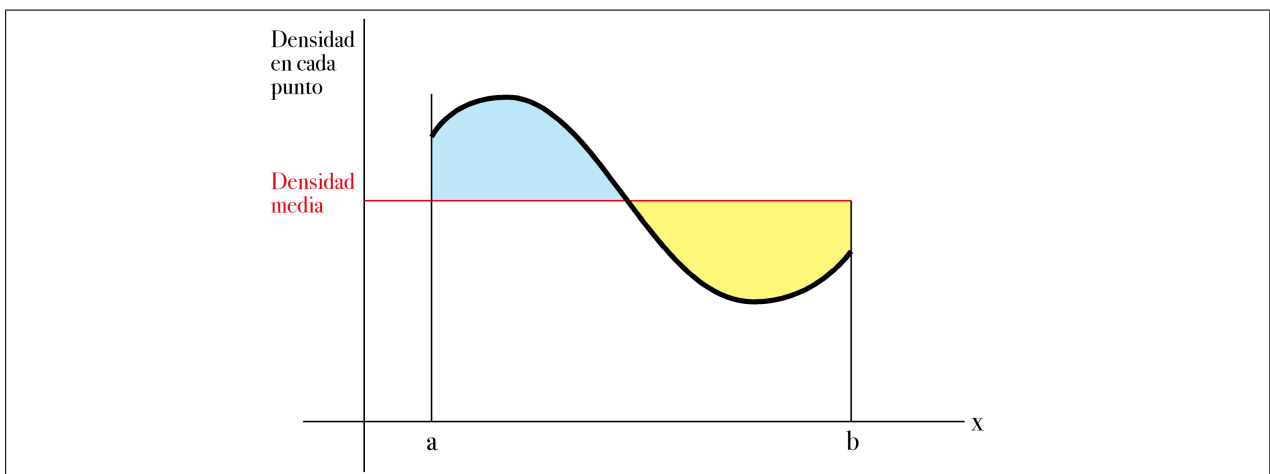


Figura 1.5: Definimos la densidad media como la altura de la línea roja para la que la zona de color azul tiene la misma área que la zona de color amarillo

es considerar la barra como un intervalo  $[a, b]$  y la densidad como una función  $f$  sobre cada punto de ese intervalo.

Si quisiéramos calcular la media de una colección finita de valores, sumaríamos esos valores y dividiríamos por el número de valores. En el caso de querer evaluar la densidad media, lo que haremos será integrar  $f$  sobre  $[a, b]$  y dividir por la longitud  $b - a$ . Geométricamente, eso significa hallar la altura media de la gráfica de  $f$ .

<sup>7</sup>También puede modelizarse directamente el problema de “sumar infinitos sumandos” mediante sumas hiperfinitas, que se manejan de manera muy similar a las finitas, ver [9], capítulo 6, o [16], capítulo 9.

**6.** Existen otras formas de definir y aproximar el área buscada utilizando sumas de áreas de rectángulos. Algunas de ellas también coinciden con la de Riemann, ver el apartado 4.7, y otras no (Integral de Lebesgue, Integral de Kurzweil-Henstock), ver el apartado 4.8. Salvo en esos apartados, nos referiremos siempre a la integral de Riemann.

### 1.1.2. Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo es el resultado que asegura que las operaciones de derivar y de integrar son recíprocas. Se trata por tanto de un resultado doble: si primero integramos y después derivamos, o si primero derivamos y después integramos, en ambos supuestos se obtiene la función original. Para un enunciado formal con integrales de Riemann es imprescindible añadir algunas hipótesis sobre las funciones:

**Teorema 1.2 (Fundamental del Cálculo)** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces para todo  $x \in [a, b]$ ,*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

(en el caso de que  $x = a$  o  $x = b$ , la derivada es derivada lateral).

**JUSTIFICACIÓN:** Ver [17], 9.3. La figura 1.6, en la que  $dx$  indica un infinitésimo, proporciona una explicación de por qué una función definida a través de la integral de una función continua tiene por derivada a la función original.

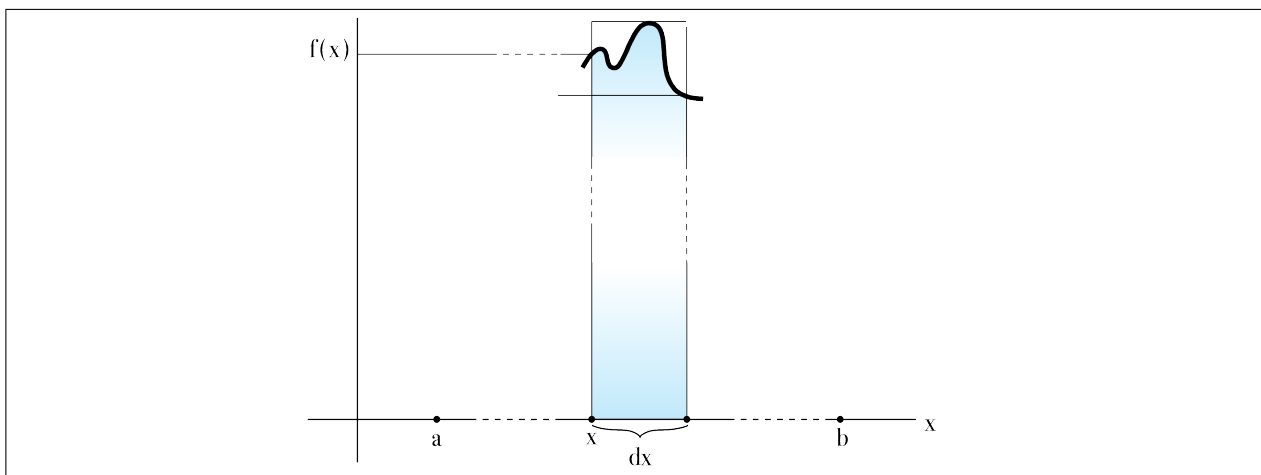


Figura 1.6: Tomamos un punto  $x$  y avanzamos un infinitésimo  $dx$ . Cuando no hay discontinuidades, la tasa de variación de la integral (parte coloreada dividida por  $dx$ ) es infinitamente próxima al valor de la función en  $x$

La parte coloreada es el incremento de área entre  $x$  y  $x + dx$ , que está contenida entre dos rectángulos de base  $dx$  y alturas infinitamente próximas a  $f(x)$ , por lo que al dividir el incremento de área por el incremento de la variable ( $dx$ ), el resultado es siempre infinitamente próximo a  $f(x)$ .

**Teorema 1.3 (Regla de Barrow)** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y con derivada continua (las funciones que se llaman también de clase  $\mathcal{C}^1$ ), entonces

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad \text{Notación: } \left[ f(x) \right]_a^b.$$

JUSTIFICACIÓN: Ver [16], Teorema 2. La integral  $\int_a^b f'(x) dx$  se aproxima mediante un sumatorio de  $H$  términos del tipo  $f'(\xi_i)dx$  (donde  $dx$  es un infinitésimo y  $H$  es un entero infinito). Y cada derivada  $f'(\xi_i)$  se puede aproximar a su vez <sup>(8)</sup> por el cociente  $\frac{f(\xi_i + dx) - f(\xi_i)}{dx}$ . Por consiguiente, no es de extrañar que la integral sea infinitamente próxima a la suma telescópica  $\sum_{i=1}^H [f(\xi_i + dx) - f(\xi_i)]$ , que es igual a  $f(b) - f(a)$ .

### 1.1.3. Cálculo de primitivas

En este curso supondremos conocidas las propiedades elementales de las integrales: la integral de una suma es la suma de las integrales; las constantes pueden sacarse fuera de la integral; si una función es mayor o igual que otra en todos los puntos, entonces la integral de la primera también es mayor o igual que la integral de la segunda; el valor absoluto de una integral es menor o igual que la integral del valor absoluto; y la aditividad de los intervalos, es decir, si  $a < c < b$  y  $f$  es integrable sobre  $[a, c]$  y sobre  $[c, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Gracias a la regla de Barrow, para conocer el valor de la integral de una función es suficiente con conocer el valor de cualquier primitiva suya.

También supondremos conocido el cálculo de primitivas

- de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales;
- de funciones racionales;
- a través de cambios de variable: al hacer el cambio  $x = h(t)$ ,

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx = \int_a^b f(h(t))h'(t) dt,$$

(donde las funciones  $f$  y  $h$  se suponen de clase  $\mathcal{C}^1$ );

---

<sup>8</sup>Hay que tener presente que en términos infinitesimales el hecho de que una función sea de clase  $\mathcal{C}^1$  equivale a que esa aproximación sea infinitesimal en todos los puntos del intervalo, reales o hiperreales, no solamente en los puntos estándar (ver [16], teorema 10), por lo que en este caso puede aplicarse a los puntos  $\xi_i$ .

- a través de la integración por partes: si  $f$  y  $g$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[ f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

## 1.2. Integrales sobre caminos

Las integrales sobre curvas son integrales de funciones definidas sobre unos objetos que en cierto modo son, intuitivamente hablando, de dimensión 1 pero que no están contenidos en  $\mathbb{R}$ , sino que su espacio ambiente es  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  o, incluso, otro  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 3$ . Las curvas las modelizaremos como deformaciones de intervalos cerrados y acotados que tras sufrir una deformación se han salido, por así decir, de su espacio ambiente natural y han adquirido una forma que necesitaba de más dimensiones.

Una situación similar se nos dará con las superficies, objetos esencialmente de dos dimensiones pero que no están contenidos en  $\mathbb{R}^2$  sino en  $\mathbb{R}^3$  (ver los apartados 3.2 y 3.3).

Querremos integrar sobre curvas dos tipos de aplicaciones distintas, funciones escalares y funciones vectoriales.

7. Un adjetivo aplicado a una función normalmente se refiere a sus imágenes, no a su dominio. Así, por ejemplo, una función compleja es la que toma valores en el cuerpo de los números complejos; en cambio, si es el dominio el que está formado por números complejos se llama función de variable compleja.

Las funciones escalares, por tanto, toman valores en  $\mathbb{R}$ , y las funciones vectoriales toman valores en un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ , con  $n > 1$ , donde  $n$  dependerá de cada caso.

Las funciones escalares y las vectoriales a integrar representarán en las aplicaciones de estas integrales una magnitud (de índole física, económica, etc., según cuál sea el campo de aplicación) de la que nos interesa conocer un comportamiento global a partir de que conozcamos su comportamiento local. En la introducción de cada tipo de integral se concretará este planteamiento mediante alguna de sus aplicaciones más características.

En lugar de hablar de funciones escalares o vectoriales hablaremos a menudo de **campos escalares** y **campos vectoriales**.

8. Un rasgo adicional de los campos vectoriales es que el conjunto inicial y el final están contenidos en espacios vectoriales de la misma dimensión.

Para definir integrales sobre curvas necesitaremos precisar qué entenderemos por una curva. Una de las ideas intuitivas que tenemos de curva es de un subconjunto del plano o del espacio que se puede “trazar”, que se puede “recorrer”. Nos vamos a apoyar en esta visión dinámica de las curvas para describirlas. Supondremos que hay un cierto parámetro, que denotaremos con una  $t$  porque en las aplicaciones con frecuencia se refiere a una variable temporal, que es el que nos permite hacer el recorrido de la curva, comenzando en un punto y terminando en otro (o en el mismo), tras haber “pasado” por cada punto una o más veces.

La primera consecuencia de este planteamiento es que comenzaremos tratando, no con las curvas propiamente dichas, sino con su descripción a través de una función (ver la observación 22), que suele denominarse trayectoria, parametrización, camino, o con otros nombre similares.

### 1.2.1. Integral de un campo escalar sobre un camino

Nuestra aproximación a las curvas (de las que ya advertimos ahora que no daremos una definición hasta el apartado 1.3), la haremos a través de lo que llamaremos caminos:

**Definición 1.4** Un **camino en  $\mathbb{R}^n$**  es una aplicación continua, definida sobre un intervalo cerrado y acotado (con más de un punto, para evitar los casos degenerados) y con valores en  $\mathbb{R}^n$ , donde normalmente  $n$  será 2 o 3, pero también podría ser 1 o cualquier número natural mayor que 3.

Usaremos las palabras **trayectoria** y **parametrización** como sinónimos de camino.

Los caminos en  $\mathbb{R}^2$  los consideraremos a menudo como un caso particular de caminos en  $\mathbb{R}^3$ , a base de sumergir  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , añadiendo una tercera coordenada nula.

Supóngase que  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable con continuidad (lo que también llamamos de clase  $\mathcal{C}^1$ ) y que queremos medir algo en su imagen, como pueden ser, por ejemplo, la longitud de la imagen misma,  $\mathbf{c}([a, b])$ ; o la masa de la imagen  $\mathbf{c}([a, b])$  suponiendo que conocemos la densidad  $f(x, y, z)$  en cada punto suyo; o el área de una superficie tridimensional que tiene por base a  $\mathbf{c}([a, b]) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  y una altura variable dada por una función positiva  $z = f(x, y, 0)$ . En todos estos casos nos proponemos medir una magnitud que está definida sobre una deformación del intervalo  $[a, b]$ , deformación que viene dada por la función  $\mathbf{c}$ .

Vamos a enfocar la cuestión como si el camino fuese un cambio de variable, pero teniendo en cuenta que no podemos aplicar directamente la fórmula del apartado 1.1.3 porque allí el cambio de variable  $h$  era una aplicación entre dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , mientras que ahora el “cambio de variable”  $\mathbf{c}$  es una aplicación desde un subconjunto de  $\mathbb{R}$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ .

La fórmula

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx = \int_a^b f(h(t))h'(t) dt$$

transforma el cálculo de una integral sobre el intervalo imagen mediante  $h$  en una integral sobre el intervalo original, pero con un factor multiplicador,  $h'(t)$ , que compensa la distorsión de longitudes que introduce el cambio  $h$ .

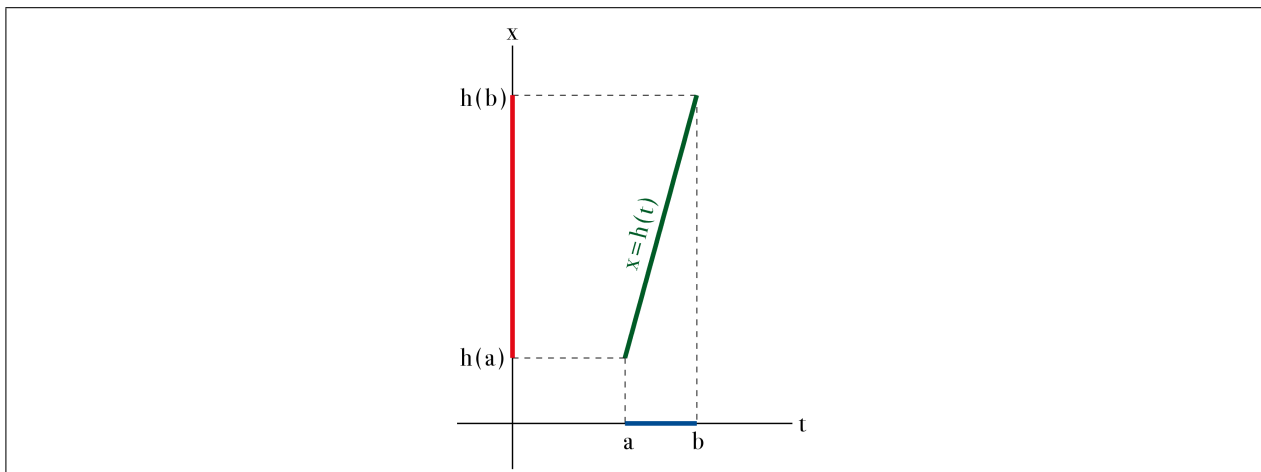


Figura 1.7: La función  $h$  estira los intervalos en un factor igual a  $h'$



Cuando  $h'$  sea mayor que la unidad,  $h$  estirará el intervalo y cuando sea menor que la unidad lo encogerá, por lo que resulta natural que aparezca la derivada como una especie de coeficiente de dilatación imprescindible para que las dos integrales sean iguales, no sería razonable que cambiásemos la variable  $x$  por la variable  $t$ , poniendo  $f(h(t))$  en lugar de  $f(x)$ , pero no introdujéramos un coeficiente de este tipo.

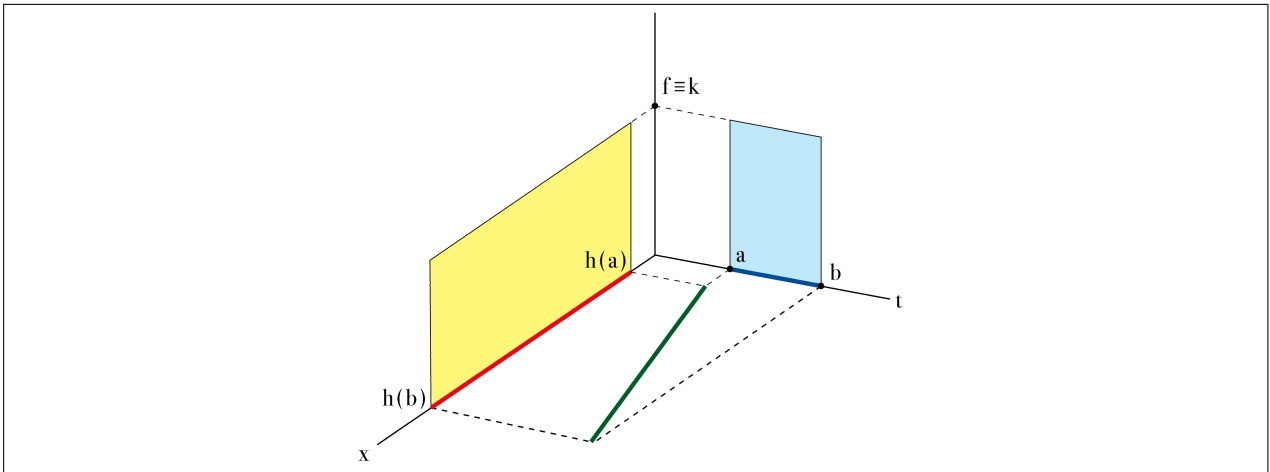


Figura 1.8: Las áreas coloreadas no son iguales, están afectadas por un factor igual a  $h'$

Tomemos, por ejemplo, una función constante  $f \equiv k$ . Al ser constante, no cambia porque hagamos un cambio de variable, vale lo mismo  $f(x)$  que  $f(h(t))$ . Pero al integrar  $f$  sobre  $[a, b]$  o sobre  $[h(a), h(b)]$  obtendremos áreas distintas, a menos que tengamos en cuenta, como factor de corrección, la dilatación inducida por  $h$ .

**9.** Esta idea de fijarnos en la dilatación que produce una transformación es una de las más interesantes del curso, puesto que será la clave para entender algunos de los principales conceptos relacionados con distintos tipos de integrales.<sup>(9)</sup>

Además, constituye uno de los puntos de enlace con el Cálculo Diferencial, dado que nuestros coeficientes de dilatación los evaluaremos a escala infinitesimal, con lo que se expresarán a través de derivadas.

Obsérvese, por otra parte, que las integrales de funciones de una variable se calculan sobre intervalos recorriéndolos en un cierto orden, desde  $h(a)$  hasta  $h(b)$  y desde  $a$  hasta  $b$ . Sabemos que  $a \leq b$ , pero no sabemos si  $h(a)$  es menor o mayor que  $h(b)$ . Sabemos también que  $\int_{h(b)}^{h(a)} f = -\int_{h(a)}^{h(b)} f$ . En cambio, para medir longitudes o masas, como estamos pretendiendo ahora, las integrales no han de ser “orientadas”, su valor no debería depender del orden en el que se recorra la imagen del camino.

Nos interesa, por tanto, una fórmula de cambio de variable que no dependa del orden de recorrido del intervalo. La que deduciremos enseguida, suponiendo que  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , inyectiva y con derivada no nula en ningún punto (salvo, quizá, en los extremos

<sup>9</sup>Nos aparecerá en varios contextos. En este caso son funciones reales de una sola variable, pero en el futuro serán funciones entre espacios de otras dimensiones.

del intervalo), es la siguiente:

$$\int_{h([a,b])} f(x) dx = \int_{[a,b]} f(h(t)) |h'(t)| dt,$$

que puede entenderse interpretando el coeficiente  $|h'(t)|$  como una medida de la dilatación local que produce  $h$  en un entorno infinitesimal de cada punto  $t$ .

Comprobamos que esta nueva fórmula se sigue de la original, distinguiendo los dos casos posibles,  $h$  creciente y  $h$  decreciente. No hay más posibilidades, porque al ser  $h'$  no nula en todos los puntos de  $(a, b)$ , o es siempre positiva o es siempre negativa <sup>(10)</sup>.

- Si  $h$  es creciente, entonces  $h'(t) \geq 0$ . Y además,  $h([a, b]) = [h(a), h(b)]$ , luego las fórmulas son iguales miembro a miembro.
- Si  $h$  es decreciente, entonces  $|h'(t)| = -h'(t)$ . Y además,  $h([a, b]) = [h(b), h(a)]$ , luego el miembro de la izquierda (respectivamente, de la derecha) de una de las fórmulas es igual al opuesto del miembro de la izquierda (respectivamente, de la derecha) de la otra fórmula.

De esta manera queda probada la igualdad.

Para poder aplicar las ideas que acabamos de exponer será frecuente que consideremos caminos que no solamente sean continuos sino que tengan buenas propiedades de derivabilidad, lo que nos permitirá tratarlos a escala infinitesimal como si sus imágenes fueran trozos de recta.

Para asegurar que las derivadas tienen una aproximación infinitesimal suficientemente buena, nos conviene la condición de que el camino sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , como en la fórmula del cambio de variable que citábamos. Ahora bien, un tipo de caminos que nos interesan especialmente es el formado por caminos cuyas imágenes y sus expresiones analíticas sean las más sencillas posibles: caminos que dan lugar a polígonos en  $\mathbb{R}^3$ , que están descritos mediante un encadenamiento de polinomios de grado 1 <sup>(11)</sup>. No serán trayectorias de clase  $\mathcal{C}^1$  en cuanto tengan algún vértice <sup>(12)</sup>, pero sí lo son en el entorno de cada uno de los valores del parámetro que no se corresponden con un vértice.

**Definición 1.5** Diremos que un camino  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es **de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos** cuando existe una partición del intervalo  $[a, b]$ ,  $\{a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b\}$ , de modo que la restricción de  $\mathbf{c}$  a cada subintervalo  $[t^{k-1}, t^k]$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  ( $k = 1, \dots, N$ ).

**10.** No olvidar que todos nuestros caminos, incluidos los de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, son funciones continuas.

Apelando a todas estas consideraciones, definimos la integral de la siguiente manera:

<sup>10</sup>Puesto que todas las derivadas, tanto si son continuas como si no lo son, tienen la propiedad de los valores intermedios (no demostraremos esta afirmación; ver, por ejemplo, [1], teorema 5.16).

<sup>11</sup>A estos encadenamientos los llamaremos más adelante sumas de caminos, ver definición 1.9.

<sup>12</sup>Este comentario no contradice a la observación 22. Aquí es seguro que no son de clase  $\mathcal{C}^1$  porque estamos considerando solamente expresiones polinómicas de grado 1.

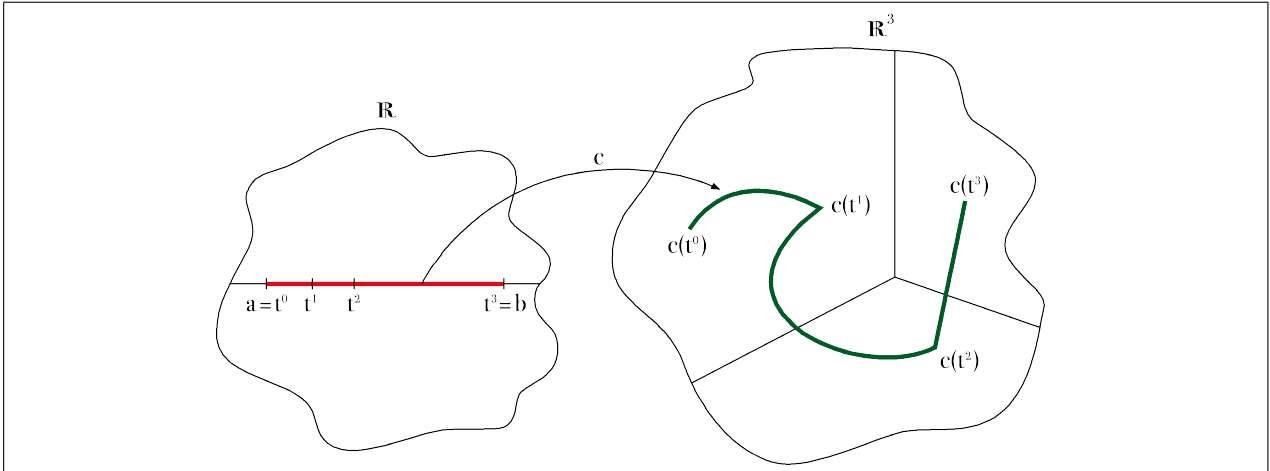


Figura 1.9: Esquema de un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos

**Definición 1.6** Sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, y sea  $f$  un campo escalar continuo definido sobre la imagen de  $\mathbf{c}$ ,  $f : \mathbf{c}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ . La **integral del campo  $f$  a lo largo del camino  $\mathbf{c}$**  es

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt.$$

**Ejemplo 1.7** Hallar el promedio de la ordenada  $y$  de los puntos de la semicircunferencia de radio  $a$  parametrizada por  $\mathbf{c} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\theta \rightsquigarrow (0, a \sin \theta, a \cos \theta)$ , donde  $a > 0$ .

El promedio de una función  $f(x, y, z)$  sobre una parametrización  $\mathbf{c}$  se define como  $\int_{\mathbf{c}} f \, ds / \int_{\mathbf{c}} ds$ , en coherencia con definiciones de promedios en otros contextos.

**11.** La definición de **promedio** es una generalización de la fórmula para calcular la media ponderada de una colección finita de datos. Recordar que las integrales son una buena manera de generalizar las sumas finitas cuando tenemos una cantidad no numerable de datos.

Como

$$\int_{\mathbf{c}} y \, ds = \int_0^{\pi} a \sin \theta [a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta]^{1/2} \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = 2a^2,$$

y

$$\int_{\mathbf{c}} ds = \int_0^{\pi} [a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta]^{1/2} \, d\theta = a \int_0^{\pi} d\theta = a\pi,$$

el promedio buscado es igual a  $\frac{2}{\pi} a$ .

El promedio de  $x$  es cero porque  $x$  siempre lo es. Y el de  $z$  también es cero, como puede comprobarse por un cálculo directo,

$$\int_{\mathbf{c}} z \, ds = \int_0^{\pi} a \cos \theta [a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta]^{1/2} \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \cos \theta \, d\theta = 0,$$

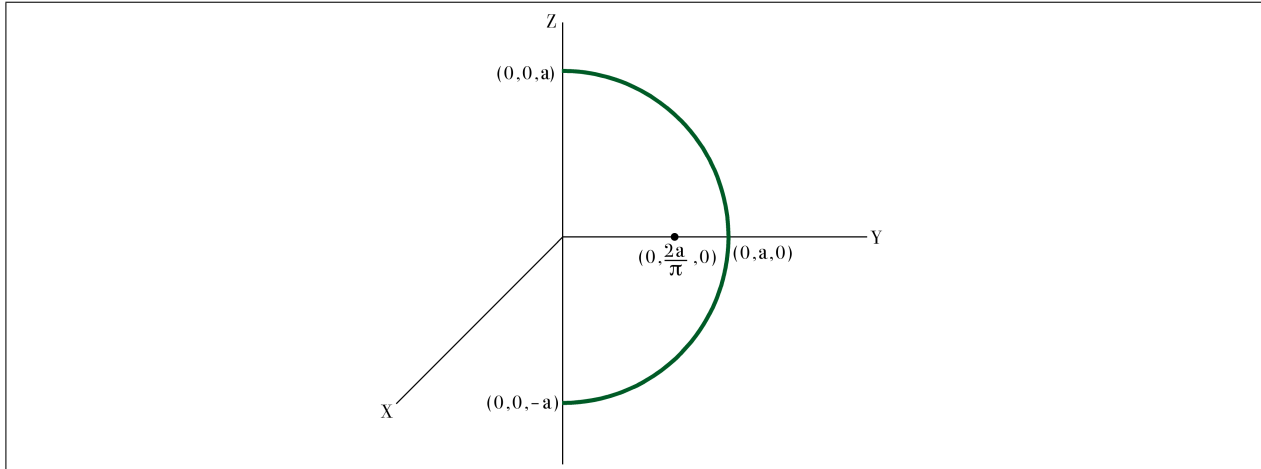


Figura 1.10: Imagen de la trayectoria del ejemplo 1.7

o justificarse por motivos de simetría: como  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ,

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = 0$$

(para la segunda igualdad, en una de las dos integrales se ha cambiado  $\theta$  por  $\pi - \alpha$ ).

**12.** En el cálculo de integrales, puede demostrarse que un argumento de simetría es riguroso mediante una utilización *ad hoc* del teorema del cambio de variable: se divide el dominio en dos partes, se aplica la aditividad de la integral y mediante un cambio de variable se demuestra que alguno de los sumandos es igual (u opuesto) al otro.

La figura ilustra el sentido de este resultado: el punto formado por los tres promedios es el centro de gravedad de la imagen de la trayectoria, que por cierto se encuentra fuera de la misma, y como  $2/\pi$  es un número comprendido entre 0,5 y 1, el **centro de gravedad** se encuentra más próximo a la curva semicircular que al centro de la semicircunferencia. ■

**Observación sobre la existencia de la integral en la definición 1.6:** Si la derivada  $\mathbf{c}'$  existe y es continua en todos los valores del parámetro, es seguro que la integral existe, puesto que el integrando se obtiene mediante operaciones y composiciones de funciones continuas, luego es a su vez una función continua.

Si no es así, es decir, si hay puntos donde  $\mathbf{c}$  no es derivable o donde alguna de sus componentes no tiene derivada continua, entonces la integral en realidad hay que entenderla como la suma de las integrales sobre los subintervalos  $[t^{k-1}, t^k]$  (notaciones de la definición 1.5):  $\int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$  significa  $\sum_{k=1}^N \int_{t^{k-1}}^{t^k} f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\| \, dt$ .

**13.** En las explicaciones que demos y en las figuras que hagamos (y a veces también en las demostraciones) será frecuente que supongamos que el camino es de clase  $\mathcal{C}^1$ , no de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, de manera que para pasar al caso general simplemente argumentaremos sobre cada uno de los trozos de clase  $\mathcal{C}^1$  para luego sumar los resultados.

Las sumas de Riemann correspondientes a la integral de la definición 1.6 son de la forma

$$S_m = \sum_{i=1}^m f(\mathbf{c}(\xi_i)) \|\mathbf{c}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1}),$$

cuyo límite cuando  $m$  tiende a infinito lo podemos aproximar de otra manera que la utilizada en la definición de integral, mediante la siguiente interpretación.

Supóngase que  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o sea,  $n = 3$ ) y que queremos medir la longitud de la imagen  $\mathbf{c}([a, b])$  (o sea,  $f = 1$ , ver los comentarios posteriores a la definición 1.30). Utilizando una partición de  $[a, b]$ ,  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ , pretendemos aproximar la imagen  $\mathbf{c}([a, b])$  mediante el polígono que une los puntos  $\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \dots, \mathbf{c}(t_m)$  en este orden. La longitud de

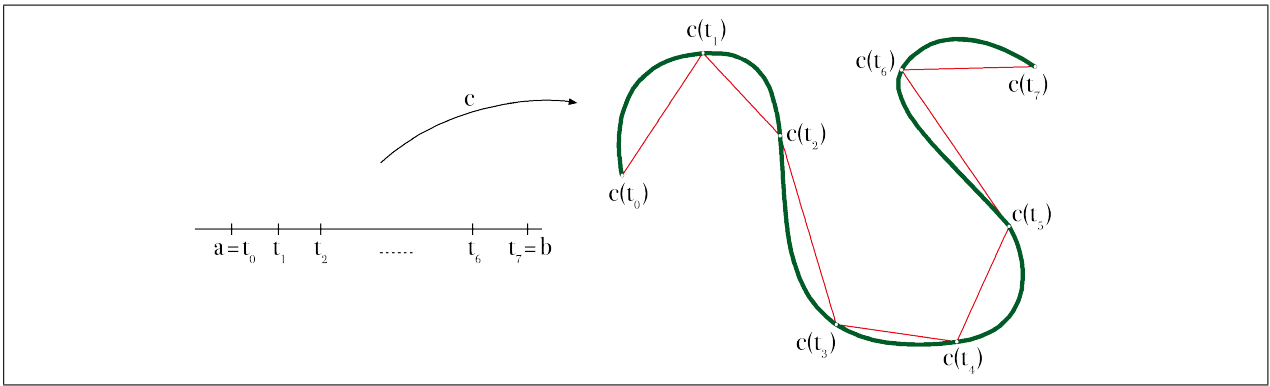


Figura 1.11: Aproximación con poligonales

dicho polígono es  $\sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$ , donde cada sumando puede sustituirse aplicando el teorema del valor medio para derivadas,

$$\|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\| = [x'(t'_i)^2 + y'(t''_i)^2 + z'(t'''_i)^2]^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1})$$

para ciertos  $t'_i, t''_i, t'''_i \in [t_{i-1}, t_i]$  no necesariamente iguales <sup>(13)</sup>. Al aumentar el número  $m$  de elementos de la partición, se aproximarán entre sí los valores de cada derivada  $x', y', z'$ , aunque los tres puntos intermedios no sean iguales, gracias a que las derivadas son también funciones continuas. En otras palabras, se aproximarán entre sí la longitud del polígono,  $\sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$ , y la suma de Riemann  $S_m = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{c}'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$ .

El razonamiento que hemos expuesto nos sirve aquí para justificar (no para demostrar, porque todavía necesitaríamos comprobar que coinciden los límites de las sumas de Riemann y de las longitudes de las poligonales) el resultado del teorema que viene a continuación.

<sup>13</sup>Hay que considerar las derivadas coordenada a coordenada (porque el teorema del valor medio para funciones vectoriales no daría lugar a una igualdad) y como consecuencia los puntos intermedios  $t'_i, t''_i, t'''_i$  no están relacionados entre sí:

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(t'_i)(t_i - t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(t''_i)(t_i - t_{i-1}) \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(t'''_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

**Teorema 1.8** (Notaciones como en la definición 1.6.)

$$\int_{\mathbf{c}} f \, ds = \lim_m \sum_{i=1}^m f(\mathbf{c}(t_i)) \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|,$$

donde los  $\{t_i\}$  constituyen una partición del intervalo  $[a, b]$ .

Las integrales de campos escalares tienen las mismas propiedades de aditividad, producto por un escalar, etc., que las que ya conocemos para la integral de Riemann y que citamos en el apartado 1.1.3. Su demostración es inmediata, apelando a la correspondiente propiedad en la integral de Riemann.

Más interés tiene ahora la propiedad análoga a la aditiva para intervalos. Para enunciarla necesitamos precisar a qué adición de caminos nos referimos aquí. La idea es muy sencilla, se trata de convertir dos imágenes de caminos en la imagen de un solo camino, con la única condición previa de que una de las imágenes comience donde termina la otra.

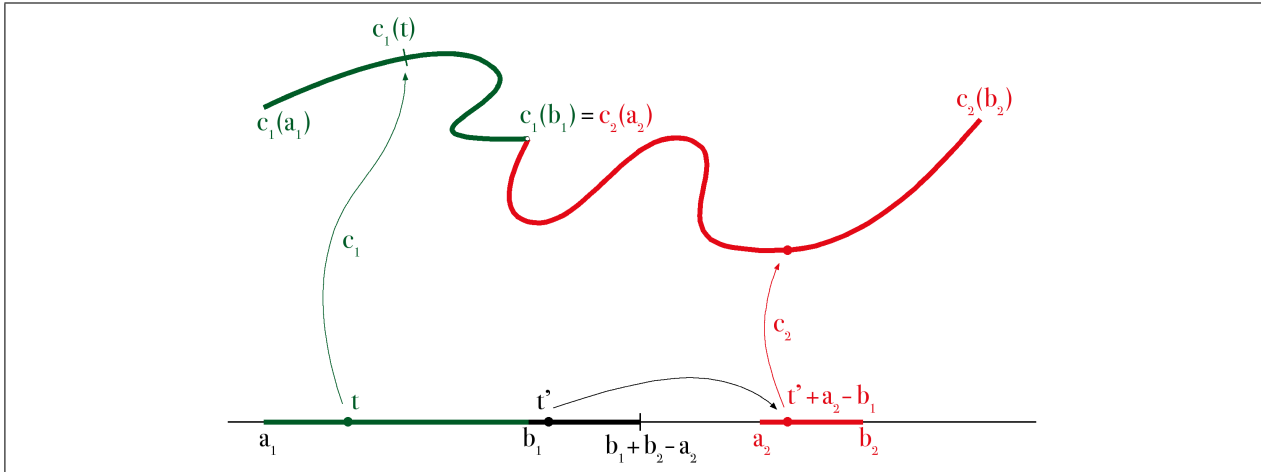


Figura 1.12: Suma de dos caminos

Dados dos caminos, una de cuyas imágenes comienza donde termina la imagen del otro, lo primero que hacemos es construir un dominio de parámetros que podamos usar para describir toda la imagen, a base de trasladar uno de los dominios para ponerlo a continuación del otro. Acto seguido hacemos una nueva traslación del segundo parámetro para poderle aplicar el segundo camino:

**Definición 1.9** Sean  $\mathbf{c}_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$ , dos caminos con la condición de que  $\mathbf{c}_1(b_1) = \mathbf{c}_2(a_2)$ . Llamaremos **suma** de  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  al camino  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por

$$(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1(t) & \text{si } t \leq b_1 \\ \mathbf{c}_2(t + (a_2 - b_1)) & \text{si } t \geq b_1. \end{cases}$$

**Teorema 1.10** La suma de caminos está **bien definida**. Diremos también que la definición 1.9 es **correcta**.

**14.** Este enunciado merece un comentario aparte. Se asegura en él, y a continuación lo demostraremos, que una definición es “correcta”. Pero una definición no es algo que necesite demostración, en matemáticas hay mucha libertad para dar nombres y definiciones a conceptos matemáticos, ¿cómo se explica que aquí se tenga que comprobar que la definición está bien?

La explicación reside en que lo que sí se exige a una definición es que no contenga imprecisiones y que los objetos matemáticos que se manejen tengan garantizada su existencia.

Obsérvese que para  $t = b_1$  hemos asignado, sorprendentemente, dos valores del camino suma. Y que para que el *camino suma* sea propiamente un camino, habrá de ser continuo.

**DEMOSTRACIÓN:** Para que la definición sea correcta hemos de comprobar que  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es un camino, o sea, que es una aplicación continua.

En  $t = b_1$  hemos asignado, sorprendentemente, dos valores del camino suma. La explicación reside en que los dos valores son el mismo, gracias a la hipótesis  $\mathbf{c}_1(b_1) = \mathbf{c}_2(a_2)$ . Por tanto,  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es una aplicación.

Para demostrar la continuidad de la aplicación  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  en un punto cualquiera  $t$  argumentamos de este modo:

**Si**  $a_1 \leq t < b_1$ .  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es continua por la continuidad de la aplicación  $\mathbf{c}_1$ , puesto que coincide con ella en un entorno de  $t$ .

**Si**  $b_1 < t \leq b_1 + b_2 - a_2$ .  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es continua por la continuidad de  $\mathbf{c}_2$  y de la aplicación  $t \rightsquigarrow t + a_2 - b_1$ , puesto que coincide con la composición de ambas en un entorno de  $t$ .

**Si**  $t = b_1$ . Utilizando los mismos argumentos que en los dos casos anteriores se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow b_1^-} (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) = \mathbf{c}_1(b_1), \quad \lim_{t \rightarrow b_1^+} (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t) = \mathbf{c}_2(a_2),$$

y la conclusión de que  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es continua en  $b_1$  se obtiene de que  $\mathbf{c}_1(b_1) = \mathbf{c}_2(a_2)$ .

Con esto terminamos la comprobación de que la suma de caminos ha sido definida correctamente.

**15.** En cada una de las definiciones que encontremos a partir de ahora estaremos atentos a la posibilidad de que se den ambigüedades y a si puede asegurarse la existencia de todos los elementos que en ella se usan.

**Teorema 1.11** Si  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  son dos caminos que pueden sumarse, ambos de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, entonces también es de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos el camino suma  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ .

**DEMOSTRACIÓN:** No hay más que observar que si  $a_i = t_i^0 < \dots < t_i^{N_i} = b_i$  son los únicos puntos donde  $\mathbf{c}_i$  no tiene derivada continua, de modo que las restricciones de  $\mathbf{c}_i$  a cada intervalo  $[t_i^{k-1}, t_i^k]$  son derivables con continuidad (todo ello para  $i = 1, 2$ ), entonces el

camino  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$  es también derivable con continuidad en cada uno de los intervalos cuyos extremos son dos puntos consecutivos de entre los siguientes:

$$a_1 = t_1^0 < t_1^1 < \dots < t_1^{N_1} = b_1 = t_2^0 - a_2 + b_1 < \\ < t_2^1 - a_2 + b_1 < \dots < t_2^{N_2} - a_2 + b_1 = b_1 + b_2 - a_2,$$

puesto que sobre cada subintervalo son continuas las derivadas de  $\mathbf{c}_1$ , o de  $\mathbf{c}_2$  y de  $t \rightsquigarrow t + a_2 - b_1$  (según si estamos con  $t \leq b_1$  o con  $t \geq b_1$ , respectivamente).

**16.** Un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos podemos verlo como la suma de un número finito de caminos de clase  $\mathcal{C}^1$ . Esta observación será muy útil en algunas demostraciones.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar la aditividad de nuestra integrales para caminos:

**Teorema 1.12** Si  $f$  es un campo escalar continuo sobre una suma  $\mathbf{c}_1 + \dots + \mathbf{c}_m$  de caminos de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos,

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \dots + \mathbf{c}_m} f ds = \int_{\mathbf{c}_1} f ds + \dots + \int_{\mathbf{c}_m} f ds.$$

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad <sup>(14)</sup> podemos suponer que los caminos son de clase  $\mathcal{C}^1$  <sup>(15)</sup>. Haremos la demostración solamente para  $m = 2$ , y luego argumentaríamos por inducción sobre  $m$ , repitiendo el razonamiento que damos para  $m = 2$ .

Empezamos descomponiendo la primera integral en suma de otras dos, por aplicación de la aditividad de la integral de Riemann de una variable cuando se calcula sobre dos intervalos consecutivos:

---

14

**17.** En una demostración matemática, la expresión “sin pérdida de generalidad” significa que los casos restantes se pueden reducir al que vamos a tratar.

<sup>15</sup>Como indicamos en la observación 16, un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos no es más que una suma finita de caminos de clase  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\mathbf{c}_i$  no es de clase  $\mathcal{C}^1$ , siempre podrá ponerse de la forma  $\mathbf{c}_i^1 + \dots + \mathbf{c}_i^{N_i}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ). Entonces el enunciado equivaldría a

$$\int_{\substack{\mathbf{c}_1^1 + \dots + \mathbf{c}_1^{N_1} + \dots + \\ \mathbf{c}_m^1 + \dots + \mathbf{c}_m^{N_m}}} f ds = \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, N_i}} \int_{\mathbf{c}_i^k} f ds,$$

donde cada  $\mathbf{c}_i^k$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ .



$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2} f \, ds &= \int_{a_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f((\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t)) \|(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)'(t)\| \, dt = \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} f((\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t)) \|(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)'(t)\| \, dt + \int_{b_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f((\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)(t)) \|(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)'(t)\| \, dt = \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}_1(t)) \|\mathbf{c}_1'(t)\| \, dt + \int_{b_1}^{b_1 + b_2 - a_2} f(\mathbf{c}_2(t + a_2 - b_1)) \|\mathbf{c}_2'(t + a_2 - b_1)\| \, dt = \\
 &= \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}_1(t)) \|\mathbf{c}_1'(t)\| \, dt + \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_2(u)) \|\mathbf{c}_2'(u)\| \, du = \int_{\mathbf{c}_1} f \, ds + \int_{\mathbf{c}_2} f \, ds,
 \end{aligned}$$

donde en una de las integrales hemos hecho el cambio  $u = t + a_2 - b_1$ .

### 1.2.2. Integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria

Pretendemos ahora resolver un problema diferente. Cuando una partícula se mueve de modo rectilíneo desde un punto  $\mathbf{A}$  hasta un punto  $\mathbf{B}$  bajo la acción de una fuerza constante  $\mathbf{F}$ , el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  sobre la partícula se define (por motivos en los que no vamos a entrar aquí) como el producto escalar  $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A})$ .

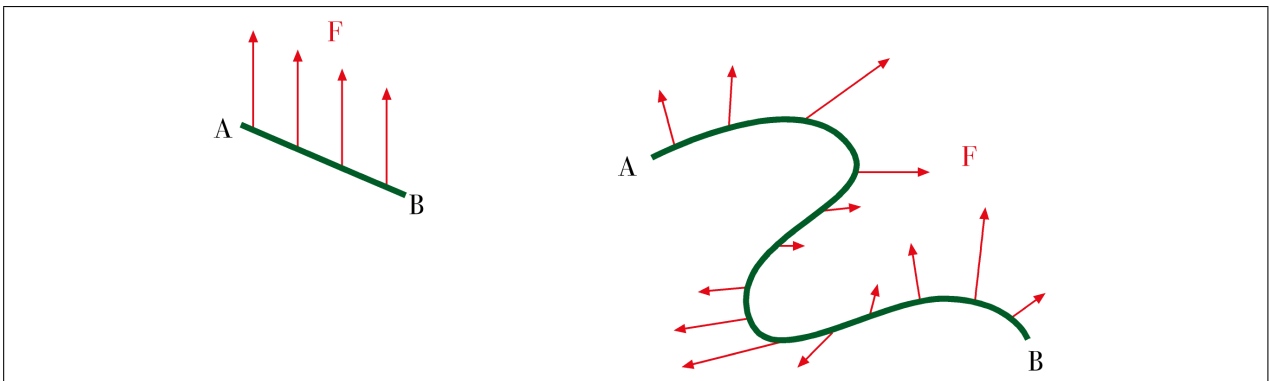


Figura 1.13: Un campo de fuerzas constante sobre un segmento y un campo de fuerzas variable sobre la imagen de una trayectoria arbitraria

En el caso de que la trayectoria recorrida por la partícula no sea recta o de que la fuerza varíe de un punto a otro del recorrido, la anterior fórmula no es aplicable, y hay que buscar alguna alternativa. Lo que vamos a hacer es, en el espíritu del teorema 1.8, retocarla para darle un sentido aproximando con una trayectoria poligonal.

Tomamos una partición infinitesimal  $t_0 = a < a + dt < a + 2dt < \dots < a + Hdt = b$  del intervalo  $[a, b]$  (donde  $dt$  es un infinitésimo positivo y  $H$  es un hipernatural infinito y  $dt$  es infinitésimo  $dt = (b - a)/H$ ) y consideramos la suma de los trabajos realizados en los tramos rectos como si la fuerza fuese constante sobre cada uno de ellos,  $\sum_{i=1}^H \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot [\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})]$ . En efecto, si suponemos que  $\mathbf{F}$  es continuo, en cada tramo infinitesimal es indistinguible de

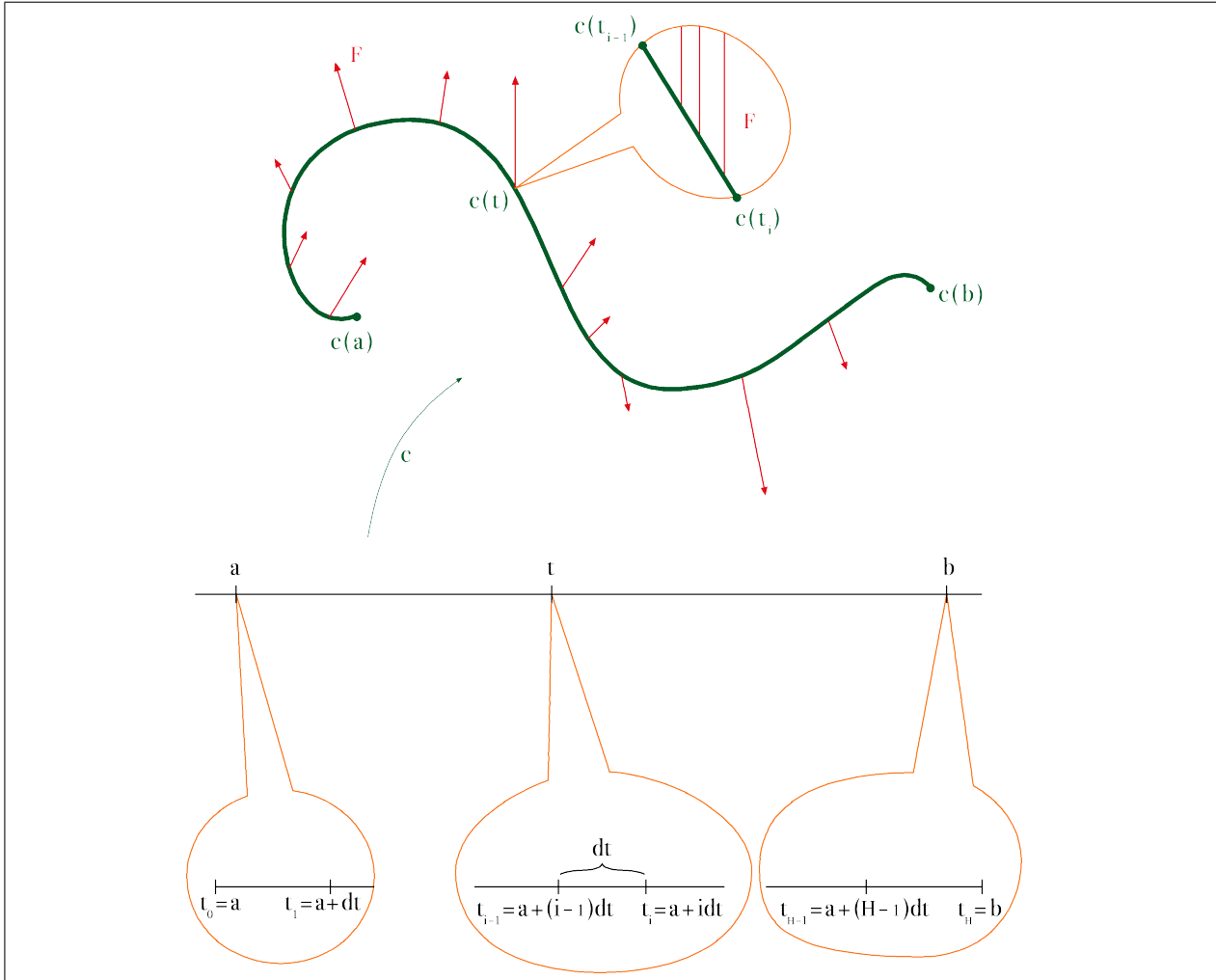


Figura 1.14: Resultado de aplicar un microscopio de potencia infinita  $H = (b - a)/dt$  a puntos del dominio del parámetro y a un punto de la imagen de la trayectoria de clase  $\mathcal{C}^1$

una constante. Y si suponemos que  $\mathbf{c}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , a escala infinitesimal la imagen de la trayectoria no se distingue de un tramo recto en la dirección de la derivada (ver la figura 1.14). Así que

$$\sum_{i=1}^H \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot [\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})] \approx \sum_{i=1}^H \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \mathbf{c}'(t_i) dt.$$

Y como la segunda expresión es una suma de Riemann (infinita) de la integral de  $(\mathbf{F} \circ \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}'$ , utilizamos esta integral como definición de la magnitud buscada.

**Definición 1.13** Sea  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo definido al menos sobre la imagen de  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{F} : \mathbf{c}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  (obsérvese que la dimensión del espacio origen es la misma que la del espacio imagen). Definimos la **integral del campo  $\mathbf{F}$  a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{c}$**  mediante

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

También se utiliza, especialmente en algunas aplicaciones, el nombre de **circulación del campo  $\mathbf{F}$  a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{c}$** .

Análogas observaciones a las hechas tras la definición 1.6, de integral de un campo escalar sobre un camino, son válidas aquí: siempre que el camino sea derivable con continuidad, la integral de la derecha existe <sup>(16)</sup>; y si solamente es de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, entonces la integral de la derecha es en realidad una suma de integrales.

Igualmente son válidas las propiedades elementales (ver la observación 39), incluida la relativa a la suma de caminos, que también para campos vectoriales se transforma en una suma de integrales:

**Teorema 1.14** *Si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial continuo sobre el camino suma  $\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_m$ , donde  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$  son de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos,*

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_{\mathbf{c}_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Es análoga a la de la misma propiedad para campos escalares (teorema 1.12).*

Las integrales de campos vectoriales no sólo comparten propiedades con las de campos escalares, sino que en muchos casos la integral de un campo vectorial coincide con la integral de la componente tangencial del campo:

**Teorema 1.15** *Sea  $\mathbf{c}$  un camino inyectivo y **regular** (es decir,  $\mathbf{c}$  es una aplicación inyectiva y con derivada continua, y además la derivada  $\mathbf{c}'$  es distinta de cero en todos los puntos), y sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial sobre la imagen de  $\mathbf{c}$ . Entonces la integral de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $\mathbf{c}$  coincide con la integral a lo largo de  $\mathbf{c}$  de la componente tangencial de  $\mathbf{F}$ :*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

donde  $\mathbf{T}$  es la **tangente unitaria** determinada por  $\mathbf{c}$  en cada punto  $\mathbf{p}$  de la imagen de  $\mathbf{c}$ ,

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{c}'(\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{p}))}{\|\mathbf{c}'(\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{p}))\|}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Un cálculo directo sirve para comprobar que*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \|\mathbf{c}'(t)\| \, dt = \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

<sup>16</sup>Puesto que el integrando es continuo, al ser el resultado de hacer operaciones y composiciones con funciones continuas.

**18.** Al dividir por  $\|\mathbf{c}'(t)\|$  es donde hemos aplicado la hipótesis de que la derivada de  $\mathbf{c}$  sea no nula en todos los puntos.

No es tan evidente dónde hemos necesitado la inyectividad de  $\mathbf{c}$ . La hemos utilizado en la definición de la tangente unitaria, porque no está definida sobre el conjunto de parámetros, sino sobre los puntos de la imagen. Si el camino no fuera inyectivo podría ocurrir que pasara varias veces por el mismo punto y que la tangente unitaria en ese punto no fuese única, con lo cual no estaría bien definida (ver observación 14).

Cuando  $n = 3$ , la notación clásica para este tipo de integrales no es la que venimos usando, más compacta y funcional pero menos intuitiva que la clásica. Llamando  $P$ ,  $Q$  y  $R$  a las tres funciones componentes del campo vectorial  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

la integral sobre el camino  $\mathbf{c}$  se escribe a menudo como

**19.**

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} P dx + Q dy + R dz.$$

El motivo que hace que sea una notación muy usada en la práctica es el siguiente. El camino  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene tres funciones componentes, que suelen denominarse con el mismo nombre que tienen las variables

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

(se dice “la coordenada  $x$  es función del parámetro  $t$ ”, etc.), con lo que se escribe formalmente  $dx = x'(t)dt$ ,  $dy = y'(t)dt$ ,  $dz = z'(t)dt$ . Entonces,  $P dx + Q dy + R dz$  no es más que una abreviatura de

$$\left[ P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt,$$

que resulta ser el desarrollo del producto escalar que hay en la integral utilizada en la definición 1.13. Así, la notación ayuda a recordar la fórmula.

Pueden consultarse algunos ejemplos de cálculos de integrales de este tipo en el apartado 1.5.1.

Dada la definición de integral de un campo vectorial sobre un camino como integral de Riemann de otra función, es razonable preguntarse si existe alguna generalización a este caso de la regla de Barrow. La única dificultad es identificar qué es lo que ahora jugará el papel que jugaba la derivada de una función en la regla de Barrow. El siguiente teorema demuestra que en este caso es el gradiente lo que sustituye a la derivada <sup>(17)</sup>.

<sup>17</sup>Recuérdese que el **gradiente** de un campo escalar  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, donde  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es el campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de  $f$ ,

$$\mathbf{grad} f = \nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \rightsquigarrow \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right),$$

que en el caso de que  $n$  sea igual a 1 coincide con la función derivada de  $f$ ,  $f'$ .

**Teorema 1.16 (Fundamental del Cálculo Generalizado)** *Sea  $f$  un campo escalar, diferenciable con continuidad y definido sobre la imagen del camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces*

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

DEMOSTRACIÓN: También aquí podemos suponer que el camino  $\mathbf{c}$  es derivable con continuidad, al igual que hicimos en la demostración del teorema 1.12 (<sup>18</sup>).

La demostración se reduce entonces a un simple cálculo, en el que utilizamos la regla de Barrow y la regla de la cadena para una composición de funciones diferenciables del tipo  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (f \circ \mathbf{c})'(t) dt = (f \circ \mathbf{c})(b) - (f \circ \mathbf{c})(a).$$

**20.** Una primera consecuencia del teorema fundamental del cálculo generalizado es que la integral de un gradiente sobre un camino no depende propiamente del camino, sino solamente del punto inicial y del punto final. Volveremos sobre esta propiedad en el apartado 1.4.

### 1.2.3. Cambios de parámetro

Nuestro enfoque en todo este apartado ha sido hasta ahora integrar campos vectoriales o campos escalares sobre un determinado recorrido de una curva, no sobre la curva misma (observar que todavía no hemos dado una definición formal de “curva”, estamos apelando al concepto intuitivo). Es de suponer que este planteamiento se deba a que distintos recorridos, distintas trayectorias, de la misma curva den lugar también a distintas integrales. De no ser así, sería razonable sospechar que habríamos definido las integrales sobre una curva a base de utilizar cualquier recorrido suyo.

El siguiente ejemplo nos dará una pista de lo que ocurre cuando se recorre una misma imagen (la circunferencia unidad,  $x^2 + y^2 = 1$ ) en sentidos opuestos.

**Ejemplo 1.17** Calcular la integral de  $x dy - y dx$  sobre  $\mathbf{c}_1(t_1) = (\cos t_1, \sin t_1)$  y sobre  $\mathbf{c}_2(t_2) = (\cos t_2, -\sin t_2)$  ( $0 \leq t_1, t_2 \leq 2\pi$ ).

<sup>18</sup>En caso de que  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^1 + \dots + \mathbf{c}^N$ , con todos los  $\mathbf{c}^k$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , y que supongamos demostrado el resultado para cada  $\mathbf{c}^k$ ,

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \sum_k \int_{\mathbf{c}^k} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \sum_k [f \circ \mathbf{c}^k(t^k) - f \circ \mathbf{c}^k(t^{k-1})] = f \circ \mathbf{c}^N(b) - f \circ \mathbf{c}^1(a) = f \circ \mathbf{c}(b) - f \circ \mathbf{c}(a).$$

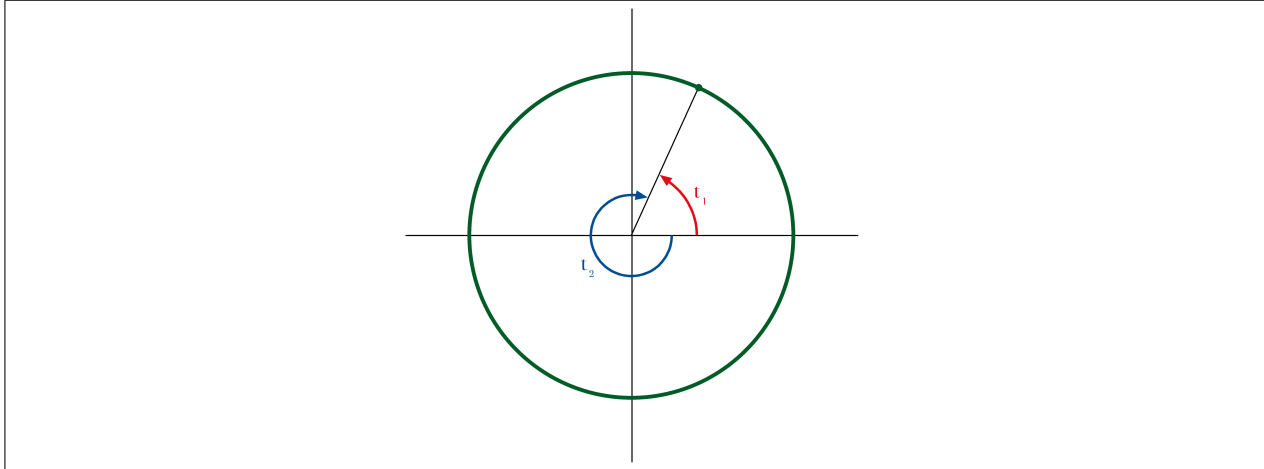


Figura 1.15: Las parametrizaciones de la circunferencia unidad utilizadas en el ejemplo 1.17

Todos los cálculos son muy sencillos:

$$\int_{\mathbf{c}_1} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t_1 + \sin^2 t_1) dt_1 = \int_0^{2\pi} dt_1 = 2\pi,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t_2 - \sin^2 t_2) dt = - \int_0^{2\pi} dt_2 = -2\pi. \quad \blacksquare$$

Al tratarse de una imagen conocida, hemos sabido parametrizarla en dos sentidos de recorrido diferentes incluso utilizando el mismo dominio de parámetros (si bien en cada caso el parámetro representa un ángulo distinto). El siguiente procedimiento generaliza lo que hemos hecho en el planteamiento del ejemplo: nos servirá siempre que tengamos sobre una curva cualquiera una trayectoria y queramos pasar a otra con idéntico recorrido pero en sentido opuesto, y con el mismo dominio de parámetros.

**Definición 1.18** Si  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es cualquier camino, se llama **camino opuesto de  $\mathbf{c}$**  a  $\mathbf{c}_{op} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por

$$\mathbf{c}_{op}(t) = \mathbf{c}(a + b - t).$$

El paso de una trayectoria con un parámetro a otra trayectoria con la misma imagen pero con otro parámetro ocurre en más contextos que en los de cambio de sentido. Piénsese, por ejemplo, en el recorrido de una misma curva en el mismo sentido pero a velocidades diferentes. En orden a manejar integrales sobre la misma imagen pero obtenidas a través de trayectorias diferentes, formalizados la situación de la siguiente manera.

**Definición 1.19** Sean  $\mathbf{c}_1 : I_1 = [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_2 : I_2 = [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dos caminos de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos y con la misma imagen, es decir,  $\mathbf{c}_1(I_1) = \mathbf{c}_2(I_2)$ . Diremos que la función  $h : I_2 \rightarrow I_1$  es un **cambio de parámetro(s)** cuando  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \circ h$  y además  $h$  cumpla las siguientes condiciones:

- es biyectiva;

- es de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos;
- su derivada es no nula en todos los puntos donde exista (ya sea bilateral o lateral).

Diremos que  $\mathbf{c}_2$  es una **reparametrización** de  $\mathbf{c}_1$  cuando existe un cambio de parámetros que convierte el parámetro de  $\mathbf{c}_1$  en el parámetro de  $\mathbf{c}_2$ .

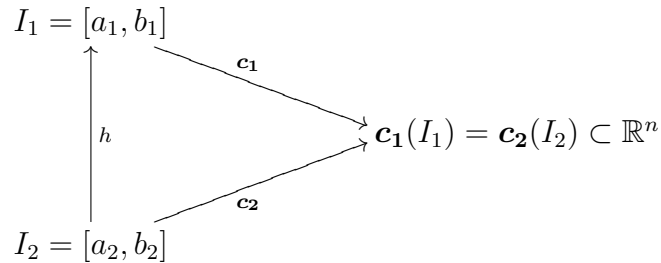


Figura 1.16: Diagrama de un cambio de parámetros

**21.** Las condiciones impuestas a los cambios de parámetros nos permiten asegurar que la relación “ $\mathbf{c}_2$  es una reparametrización de  $\mathbf{c}_1$ ” es de equivalencia <sup>(19)</sup>.

En [11] no se exige que la derivada del cambio de parámetros sea no nula, con lo que su función inversa podría tener derivada infinita en algunos puntos.

En otros textos, se dice también que los caminos  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  son equivalentes (ver, por ejemplo, [2], definición 2.6.9).

**Ejemplo 1.20 (continuación del 1.17.)** El camino  $\mathbf{c}_2$  es una reparametrización de  $\mathbf{c}_1$ . El cambio de parámetros es  $t_1 = h(t_2) = 2\pi - t_2$ , decreciente. ■

**Ejemplo 1.21** La gráfica de  $y = |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  puede parametrizarse de modo obvio tomando a la  $x$  como parámetro,  $\mathbf{c}_1(x) = (x, |x|)$ , y entonces la parametrización no tiene

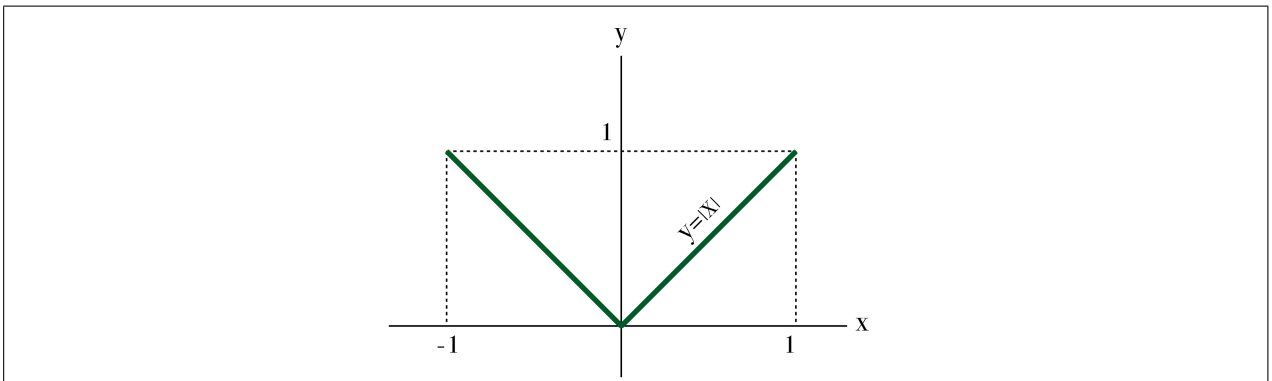


Figura 1.17: Gráfica de  $|x|$ , con  $-1 \leq x \leq 1$

derivada en el origen (el punto que da lugar al vértice de la gráfica).

<sup>19</sup>Gracias al teorema de la función inversa para funciones reales de una variable.

Pero también puede parametrizarse mediante  $\mathbf{c}_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}_2(t) = (t^3, |t^3|)$  y entonces sí que existe  $\mathbf{c}_2'(0) = \mathbf{0}$  <sup>(20)</sup>. La existencia de derivada no contradice la presencia del vértice, puesto que se trata de la imagen de la función  $\mathbf{c}_2$  y no de la gráfica de la función  $\mathbf{c}_2$ , y como la derivada es nula no apunta ninguna dirección de una tangente en el vértice.

La biyección  $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  que relaciona las dos parametrizaciones y cumple  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \circ h$  es  $h(t) = t^3$ , que tiene derivada nula en  $t = 0$ , y por tanto no es un cambio de

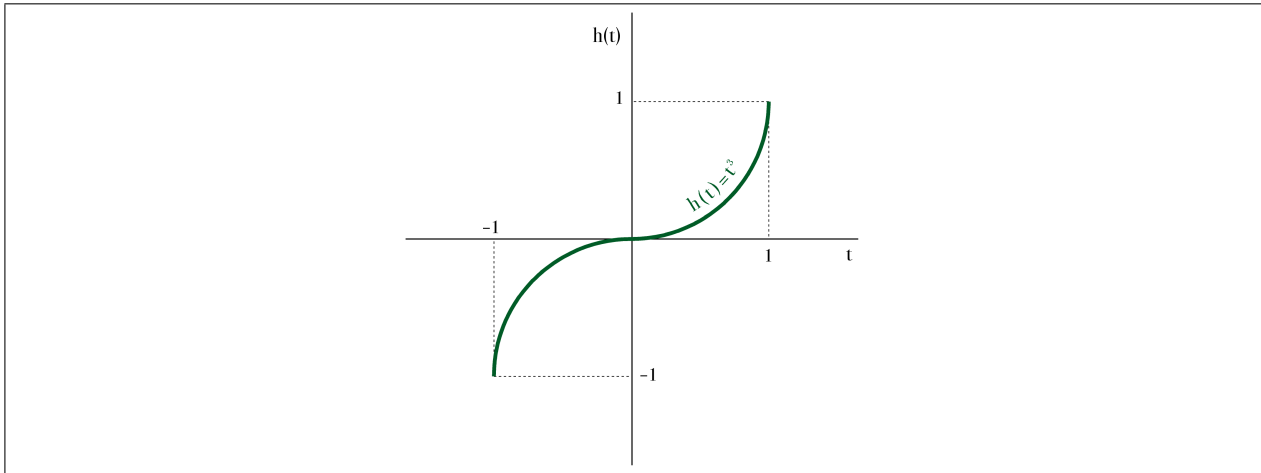


Figura 1.18: Gráfica de  $t^3$ , con  $-1 \leq t \leq 1$

parámetros,  $\mathbf{c}_2$  no es una reparametrización de  $\mathbf{c}_1$ . ■

**22.** No perder de vista que ahora no tratamos en general con gráficas de funciones, sino con imágenes de funciones.

Dos funciones diferentes no pueden compartir la misma gráfica, pero sí que pueden compartir la misma imagen.

Cuando una gráfica presenta una singularidad en forma de vértice, podemos estar seguros de que la función no es derivable en el punto al que corresponde el vértice. En cambio, la imagen puede tener un vértice sin que la función deje de ser derivable.

El hecho de que  $h$  sea inyectiva y continua obliga a que sea estrictamente monótona <sup>(21)</sup>, por lo que necesariamente se tendrá una de las dos posibilidades siguientes:

1.  $h$  es estrictamente creciente, y  $h'(t_2) > 0$  en todos los puntos  $t_2 \in I_2$  en los que exista la derivada de  $h$  (lateral o bilateral);

<sup>20</sup>La derivada de una función vectorial se calcula componente a componente. La primera componente de  $\mathbf{c}_2$ ,  $t \rightsquigarrow t^3$  es derivable con derivada  $3t^2$ , que en el origen es nula. Para obtener la derivada de la segunda componente,  $t \rightsquigarrow |t^3|$ , no podemos aplicar las reglas de derivación, por lo que calculamos los límites laterales del cociente de incrementos, lo que nos permite distinguir los dos casos,  $t$  positivo y  $t$  negativo:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t^3|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 = 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t^3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -t^2 = 0.$$

<sup>21</sup>Ver, por ejemplo, [1], ejercicio 4.62.



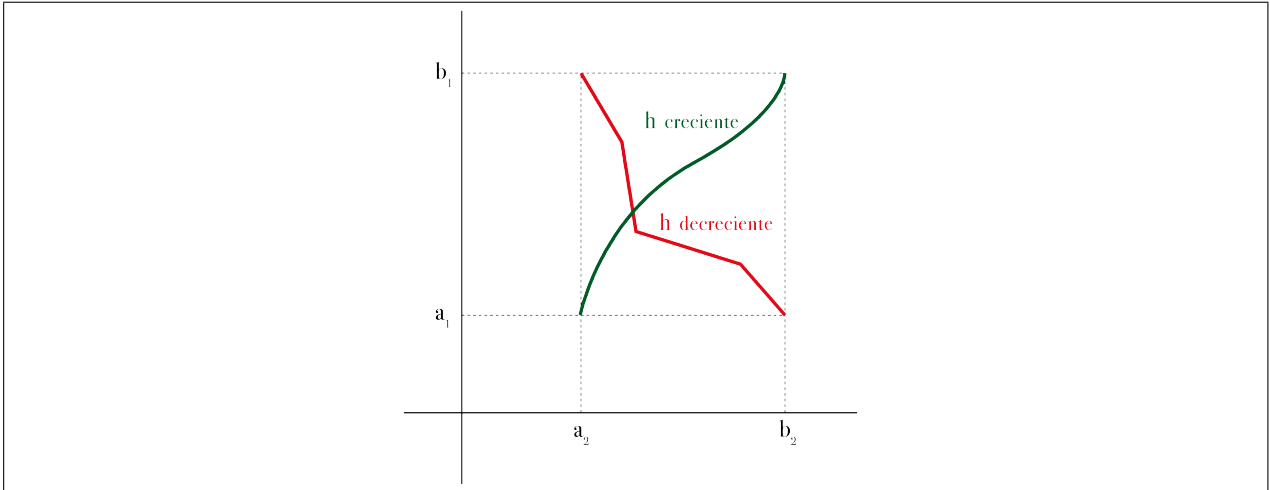


Figura 1.19: Como  $h$  es continua y biyectiva entre dos intervalos cerrados y acotados, su gráfica no puede dar saltos ni repetir valores y ha de llegar a los dos extremos, con lo que no hay más que dos posibilidades: o es estrictamente creciente o es estrictamente decreciente

2.  $h$  es estrictamente decreciente, y  $h'(t_2) < 0$  en todos los puntos  $t_2 \in I_2$  en los que exista la derivada de  $h$  (lateral o bilateral).

**Definición 1.22** En el primer caso diremos que  $h$  **conserva la orientación** o que  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  **tienen la misma orientación**, y en el segundo caso que  $h$  **invierte la orientación** o que  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  **tienen orientaciones opuestas**.

**23.** Nótese que no hemos definido, por ahora, qué se entiende por orientación.

La biyectividad de  $h$  garantiza que los extremos del intervalo  $I_1$  se corresponden con los extremos del intervalo  $I_2$ ; es decir, que se tiene una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:

- si  $h$  es creciente, entonces  $h(a_2) = a_1$  y  $h(b_2) = b_1$ , por lo que  $\mathbf{c}_2(a_2) = \mathbf{c}_1(a_1)$  y  $\mathbf{c}_2(b_2) = \mathbf{c}_1(b_1)$ ;
- y si  $h$  es decreciente, entonces  $h(a_2) = b_1$  y  $h(b_2) = a_1$ , por lo que  $\mathbf{c}_2(a_2) = \mathbf{c}_1(b_1)$  y  $\mathbf{c}_2(b_2) = \mathbf{c}_1(a_1)$ .

Obsérvese que en el caso especial de que la imagen de la trayectoria sea cerrada, es decir, cuando  $\mathbf{c}_1(a_1) = \mathbf{c}_1(b_1)$ , la correspondencia entre los puntos “extremos” de la imagen (que ahora no son verdaderos extremos) no nos aclara si hay o no cambio de orientación. En otras palabras, puede ocurrir, por ejemplo, que  $\mathbf{c}_2(a_2) = \mathbf{c}_1(a_1)$  y  $\mathbf{c}_2(b_2) = \mathbf{c}_1(b_1)$  pero que  $h$  sea decreciente.

#### 1.2.4. Efectos de los cambios de parámetros en el valor de las integrales

**Teorema 1.23** Sea  $f$  un campo escalar continuo sobre la imagen de la trayectoria  $\mathbf{c}_1$  de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, y sea  $\mathbf{c}_2$  una reparametrización de  $\mathbf{c}_1$ . Entonces

$$\int_{\mathbf{c}_2} f \, ds = \int_{\mathbf{c}_1} f \, ds.$$

DEMOSTRACIÓN: Supondremos en primer lugar que  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  y  $h$  son las tres diferenciables con continuidad. Entonces la regla de la cadena nos garantiza que (notaciones como en la definición 1.19)  $\mathbf{c}_2'(t) = h'(t)\mathbf{c}_1'(h(t))$  y por tanto  $\|\mathbf{c}_2'(t)\| = |h'(t)| \|\mathbf{c}_1'(h(t))\|$ . Aplicando ahora la fórmula del cambio de variable para integrales de funciones de una variable (apartado 1.1.3),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_2} f \, ds &= \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_2(t)) \|\mathbf{c}_2'(t)\| \, dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_1(h(t))) |h'(t)| \|\mathbf{c}_1'(h(t))\| \, dt = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}_1(u)) \|\mathbf{c}_1'(u)\| \, du = \int_{\mathbf{c}_1} f \, ds, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos hecho el cambio  $u = h(t)$  y para probarla hemos distinguido dos casos posibles, a saber,

- $h$  creciente. Entonces,  $|h'(t)| = h'(t)$ ,  $h(a_2) = a_1$  y  $h(b_2) = b_1$ , con lo que la igualdad resulta obvia.
- $h$  decreciente. Entonces,  $|h'(t)| = -h'(t)$ ,  $h(a_2) = b_1$  y  $h(b_2) = a_1$ , con lo que

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_1(h(t))) |h'(t)| \|\mathbf{c}_1'(h(t))\| \, dt = - \int_{b_1}^{a_1} f(\mathbf{c}_1(u)) \|\mathbf{c}_1'(u)\| \, du = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}_1(u)) \|\mathbf{c}_1'(u)\| \, du.$$

A partir de lo que hemos probado puede deducirse el caso en que alguna (o varias) de las funciones  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  y  $h$  sean solamente de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos (<sup>22</sup>).

**Teorema 1.24** Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre la imagen de la trayectoria  $\mathbf{c}_1$  de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, y sea  $\mathbf{c}_2$  una reparametrización de  $\mathbf{c}_1$ . Entonces

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde el signo depende de si  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  tienen o no la misma orientación.

<sup>22</sup> Pasamos ahora al caso general, en el que  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  y  $h$  solamente son de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos. La estrategia de la demostración consistirá en descomponer los caminos  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  en sumas de caminos de clase  $\mathcal{C}^1$  con la condición adicional de que también la restricción del cambio de parámetros  $h$  sea un cambio de parámetros de clase  $\mathcal{C}^1$  para cada sumando.

En  $I_2$  hay un conjunto finito de puntos,  $F_2$ , donde o la función  $h$  o la función  $\mathbf{c}_2$  incumplen las condiciones para ser de clase  $\mathcal{C}^1$ . Y en  $I_1$  hay un conjunto finito (cuando decimos conjunto finito admitimos la posibilidad de que sea vacío),  $F_1$ , donde  $\mathbf{c}_1$  incumple la condición de clase  $\mathcal{C}^1$ .

En  $I_1$  consideramos el conjunto  $F_1 \cup h(F_2)$ , y en  $I_2$  el conjunto  $F_2 \cup h^{-1}(F_1)$ , ambos finitos y homólogos mediante  $h$ , que determinan sendas particiones en  $I_1$  e  $I_2$ . Aplicamos el resultado ya probado a cada una de los subintervalos de  $I_1$  e  $I_2$  así obtenidos y con ello terminamos la demostración, gracias al teorema 1.12.

DEMOSTRACIÓN: La demostración es totalmente análoga a la del teorema anterior, 1.23. El único cambio resaltable es que ahora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_2(t)) \cdot \mathbf{c}_2'(t) dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{c}_1(h(t))) \cdot \mathbf{c}_1'(h(t))h'(t) dt = \\ &= \pm \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}_1(u)) \cdot \mathbf{c}_1'(u) du = \pm \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned}$$

donde el signo depende de si  $h'$  es positiva o negativa.

**24.** Suele decirse que la integral de un campo vectorial sobre un camino es una **integral orientada**, depende del sentido de recorrido, mientras que la de un campo escalar no es orientada, es independiente del sentido de recorrido.

Esto es congruente con el hecho de que una integral de un campo escalar positivo siempre es positiva, <sup>(23)</sup> mientras que no hay un resultado similar en integrales de campos vectoriales.

---

<sup>23</sup>Puesto que en la integral de la definición 1.6 todos los factores que aparecen en el integrando son positivos.

### 1.3. Integrales sobre curvas

En cierta clase de problemas nos interesará la parametrización, no sólo su imagen (por ejemplo, cuando analicemos el recorrido de un objeto en movimiento, su velocidad, etc.), mientras que en otros sólo queremos recurrir a una trayectoria de modo auxiliar, no porque sea esencial a la cuestión que estamos estudiando (por ejemplo, al medir una longitud). En este apartado el objeto sobre el que integraremos será una curva en sí misma, no una parametrización suya.

Supóngase que se tiene una curva con puntos múltiples, como una lemniscata de Bernoulli o un folium de Descartes. Pueden parametrizarse de varias maneras, como todas las curvas,

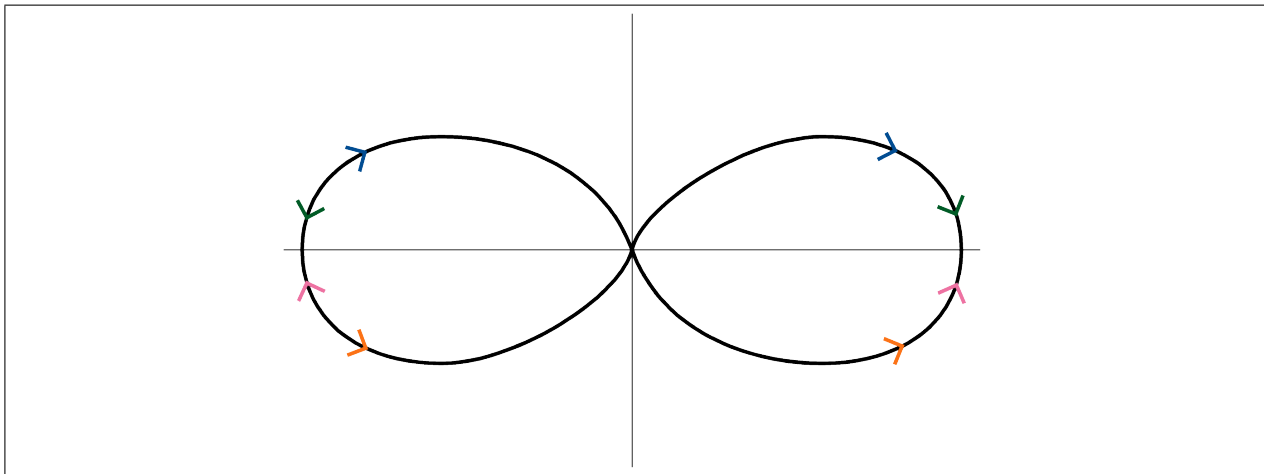


Figura 1.20: Cuatro sentidos de recorrido para la lemniscata  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ , conjugando las dos posibilidades de orientación en las dos mitades (seguir cada uno de los cuatro colores)

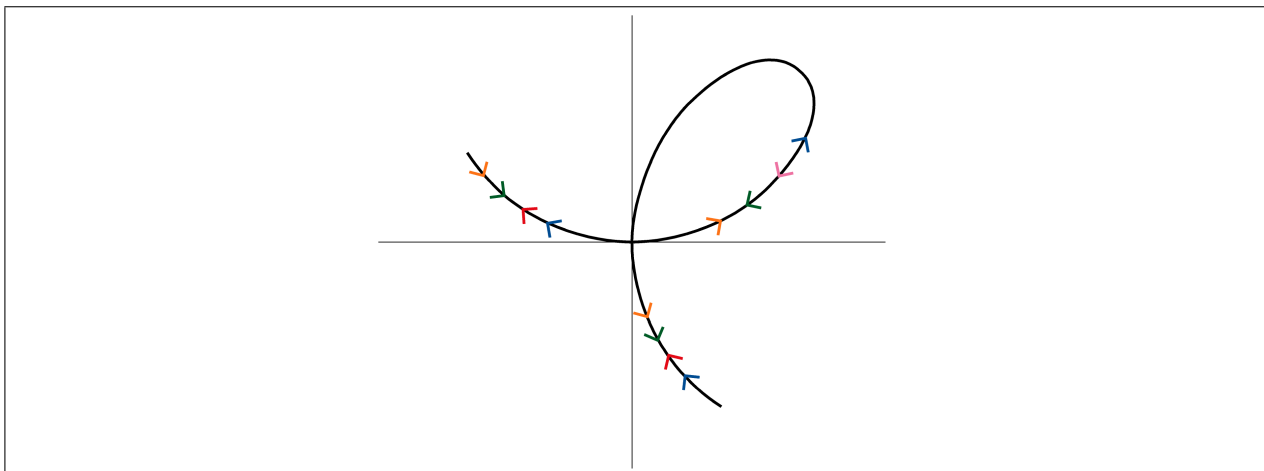


Figura 1.21: Cuatro sentidos de recorrido para el folium de Descartes  $x^3 + y^3 = xy$  (recórrase siguiendo cada uno de los cuatro colores)

pero al tener un punto múltiple aparecen más de dos sentidos de recorrido, lo que complica su estudio. Por motivos como éste, no daremos una teoría general de integrales sobre curvas, que sería un objetivo excesivamente ambicioso, nos limitaremos a dos tipos especiales de curvas sobre las que estamos en condiciones de comprender las demostraciones (aunque por motivos de calendario no las demos).

**Definición 1.25**

1. Una **curva simple (o arco simple)** en  $\mathbb{R}^n$ ,  $C$ , es la imagen de un camino  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es una función inyectiva y **regular a trozos** (o sea, que salvo en un número finito de puntos, es de clase  $\mathcal{C}^1$  y con derivada no nula).

Cuando hablemos de una **parametrización** de una curva simple entenderemos que nos referimos a un camino que cumple todas estas condiciones.

Los puntos  $\mathbf{c}(a)$  y  $\mathbf{c}(b)$  de  $C$  son los **extremos** de la curva simple  $C$  <sup>(24)</sup>.

2. Una **curva cerrada simple** en  $\mathbb{R}^n$ ,  $C$ , es la imagen de un camino  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  regular a trozos que es una función inyectiva sobre  $[a, b)$  y verifique que  $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ .

Cuando hablemos de una **parametrización** de una curva cerrada simple entenderemos que nos referimos a un camino que cumple todas estas condiciones.

Observar que una curva cerrada simple no es una curva simple, de modo que la expresión “cerrada simple” hay que entenderla como un todo.

La **suma de dos curvas simples**,  $C = C_1 + C_2$  es la imagen de un camino que sea suma de sendas parametrizaciones de  $C_1$  y  $C_2$ , siempre que estas parametrizaciones se puedan sumar, claro. Puede que  $C_1 + C_2$  sea una curva simple, pero también puede ser una curva cerrada simple, o no ser ninguna de las dos cosas, todo depende de las intersecciones que haya entre  $C_1$  y  $C_2$ .

El siguiente resultado garantiza que tanto para las curvas simples como para las curvas cerradas simples pueden definirse dos y sólo dos orientaciones diferentes.

**Teorema 1.26** *Las curvas simples y las curvas cerradas simples tienen la siguiente propiedad: dada una parametrización suya, cualquier otra parametrización de la misma curva es o una reparametrización que conserva la orientación o una reparametrización que invierte la orientación.*

Aun para los dos casos especialmente sencillos de curvas que nosotros tratamos, las demostraciones del teorema 1.26 son relativamente complicadas. Consultar una demostración en [2], desde el teorema 2.6.23 hasta el ejemplo 2.6.31 (para los arcos simples) y en [2], teoremas 6.2.10 y 6.2.12 (para las curvas cerradas simples).

Como consecuencia del teorema 1.26, todas las parametrizaciones de un mismo arco simple pueden dividirse en dos clases, con el criterio de que dos parametrizaciones pertenecen a la misma clase cuando el cambio de parámetros es creciente y pertenecen a distinta clase cuando el cambio de parámetros es decreciente. Cada una de estas dos clases se llama **orientación** del arco simple. De la misma forma se define una orientación de una curva cerrada simple.

**Definición 1.27** *Una **curva (simple o cerrada simple) orientada** es el resultado de seleccionar una de las dos orientaciones posibles. Las parametrizaciones que pertenecen a la clase seleccionada se dice que son **compatibles con la orientación**.*

<sup>24</sup>Observando que la aplicación  $\mathbf{c}_2^{-1} \circ \mathbf{c}_1$  es continua y biyectiva, y argumentando como hicimos a continuación del ejemplo 1.21, se demuestra que el conjunto  $\{\mathbf{c}(a), \mathbf{c}(b)\}$  es independiente de la parametrización de  $C$ .

Una curva orientada, tanto si es simple como si es cerrada simple, se denota por  $C^+$  o por  $C^-$ . La única condición para elegir el superíndice  $+$  o el  $-$  es que, para la misma curva  $C$ , las curvas orientadas  $C^+$  y  $C^-$  tengan orientaciones opuestas, es decir, para pasar de una parametrización de  $C^+$  a una de  $C^-$ , o viceversa, el cambio de parámetro sea decreciente.

**25.** La asignación del signo  $+$  o del signo  $-$  es, en principio, totalmente discrecional.

**Definición 1.28** Dado un campo escalar continuo  $f$  sobre una curva simple o sobre una curva cerrada simple  $C$ ,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , la **integral del campo sobre la curva** es la integral del campo sobre cualquier parametrización de la curva. Notación:  $\int_C f \, ds$ .

Y dado un campo vectorial continuo  $\mathbf{F}$  sobre una curva simple orientada o sobre una curva cerrada simple orientada,  $\mathbf{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la **integral del campo sobre la curva orientada**  $C^+$  es la integral del campo sobre cualquier parametrización de  $C^+$ , es decir, sobre una parametrización de la curva  $C$  que pertenezca al conjunto de parametrizaciones que constituyen la orientación de  $C^+$ . Notación:  $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot ds$ .

En coherencia con la notación introducida en la página 36, pondremos también  $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{C^+} F_1 \, dx_1 + \cdots + F_n \, dx_n$ .

Tal como está enunciada la definición 1.28, resulta que para definir la integral de un campo escalar o de un campo vectorial sobre una curva se toma una cierta parametrización de la curva (de las que tenemos una infinidad para elegir) y se utiliza esa parametrización para calcular la integral. Así que se ha dejado un elemento al azar que puede dar lugar a una indeterminación del concepto: ¿qué ocurre si al elegir dos parametrizaciones resulta que el valor de la integral es distinto?, ¿cuál es el valor de la integral sobre la curva?

**Corolario 1.29** Gracias a los teoremas 1.23, 1.24 y 1.26, la definición 1.28 es correcta. Y además, con los datos como en la definición 1.28, la integral de un campo escalar  $f$  sobre una  $C$  no depende de la orientación de ésta, mientras que la integral de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  sí que depende:

$$\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot ds = - \int_{C^+} \mathbf{F} \cdot ds.$$

**DEMOSTRACIÓN:** Consideremos la integral de un campo vectorial  $\mathbf{F}$  sobre una curva simple (o cerrada simple) orientada  $C^+$ . Por la definición 1.25, la curva  $C$ , sin orientar, tiene alguna parametrización  $\mathbf{c}$ . Si  $\mathbf{c}$  no es una de las parametrizaciones de la orientación de  $C^+$ , entonces su opuesta  $\mathbf{c}_{op}$  tiene que ser necesariamente orientación de  $C^+$ , gracias al teorema 1.26 (tal como se argumentó cuando se dio la definición de orientación). Así hemos comprobado que siempre hay alguna parametrización compatible con la orientación de  $C^+$ .

Si ahora tomamos dos parametrizaciones de la curva  $C$ , entonces el teorema 1.24 garantiza que si ambas son compatibles con la orientación de  $C^+$ , la integral es la misma, lo que termina la comprobación de que la definición 1.28 es correcta para el caso de integrales de campos vectoriales. Y, por el mismo teorema, las integrales toman valores opuestos en el caso de que cada una de las dos parametrizaciones pertenezca a una orientación.

Para las integrales de campos escalares, el razonamiento es similar, aplicando el teorema

1.23 en lugar del teorema 1.24 y sin necesidad de distinguir los casos en que dos parametrizaciones pertenezcan a la misma orientación.

Para la integral sobre una curva cerrada se utiliza también el símbolo  $\oint$ , en lugar del símbolo  $\int$ , especialmente en el análisis de funciones de variable compleja.

Para curvas simples y para curvas cerradas simples podemos dar ahora una definición de su longitud:

**Definición 1.30** Si  $C \subset \mathbb{R}^n$  es o una curva simple o una curva cerrada simple, llamaremos **longitud de  $C$**  a la integral de la función constantemente igual a 1 sobre  $C$ :

$$\ell(C) = \int_C ds = \int_c ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

donde  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización de  $C$ .

La última definición requiere una explicación que legitime el uso que hacemos en ella de la palabra longitud. Para ello recurrimos al teorema 1.8 y observamos que la integral de la función constantemente igual a 1 sobre un camino es igual al límite de las longitudes de unas poligonales inscritas en la imagen del camino (ver figura 1.11). También podemos imaginar, sobre una curva  $C$  contenida en un plano (ver figura 1.22), el conjunto comprendido entre

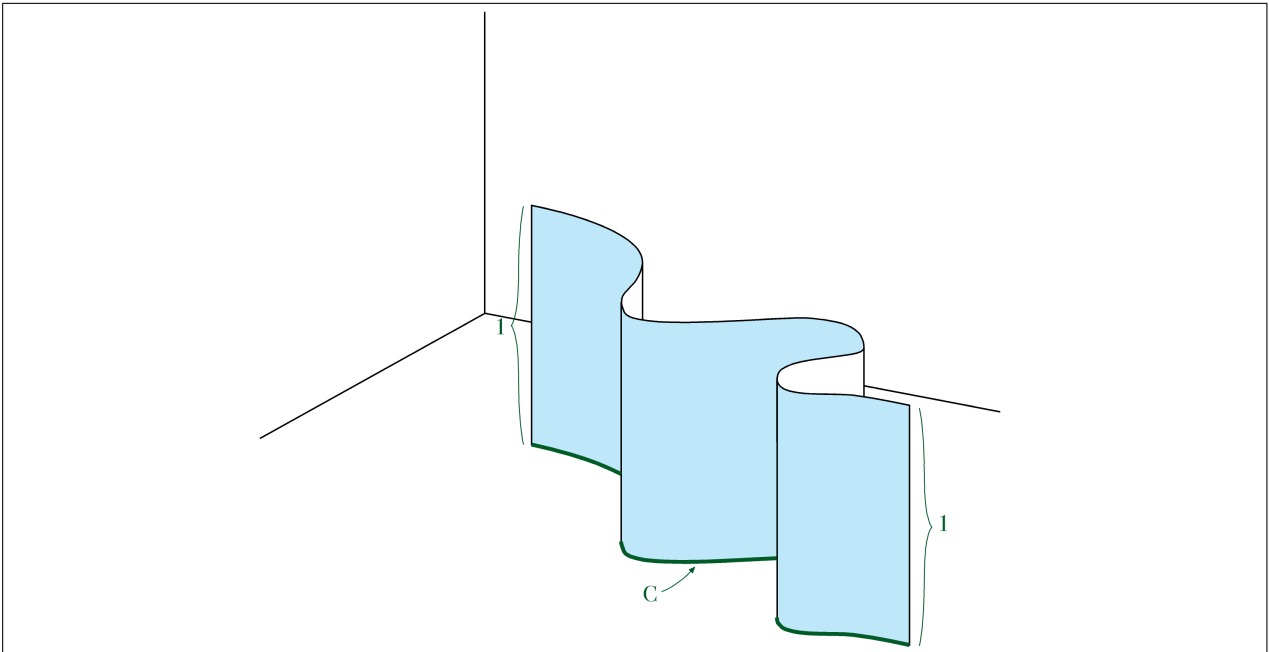


Figura 1.22: La integral de 1 sobre  $C \subset \mathbb{R}^2$  podemos considerarla como una forma de medir el área de la parte coloreada

$C$  y la gráfica de la función constantemente igual a 1 como una superficie que, una vez rectificadas la curva (enderezándola, pero sin estirla ni encogerla), sería un rectángulo de altura 1 y de base  $\ell(C)$ , con lo que su área sería igual a  $\ell(C)$ .

Por otra parte, la definición es correcta porque el teorema 1.23 nos garantiza que el valor de la integral es el mismo independientemente de cuál sea el camino que utilicemos para parametrizar  $C$ .

**26.** La definición de longitud no sería correcto aplicarla a otras “curvas” distintas de los arcos simples y las curvas cerradas simples, a menos que demos demos previamente que, también para esas curvas, la integral de la función 1 es independiente de la parametrización.



### 1.4. Campos conservativos

La técnica más conocida para calcular la integral de una función de una variable sobre un intervalo cerrado y acotado consiste en buscar una antiderivada para a continuación aplicar la regla de Barrow. Este procedimiento, que se utiliza tan a menudo, parece dar por descontado que todas las funciones que manejamos tienen antiderivada. Y con razón, porque todas las funciones continuas tienen antiderivada, como se sigue inmediatamente del teorema fundamental del cálculo (teorema 1.2) <sup>(25)</sup>.

Para integrales de campos vectoriales sobre caminos, el teorema fundamental del cálculo generalizado (1.16) constituye una ampliación de la regla de Barrow que nos proporciona una fórmula para la integral de un gradiente a lo largo de un camino regular a trozos. La integral se obtiene evaluando la función escalar cuyo gradiente es el campo vectorial, en el punto final y en el punto inicial de la imagen del camino, y restando. Como primera consecuencia,

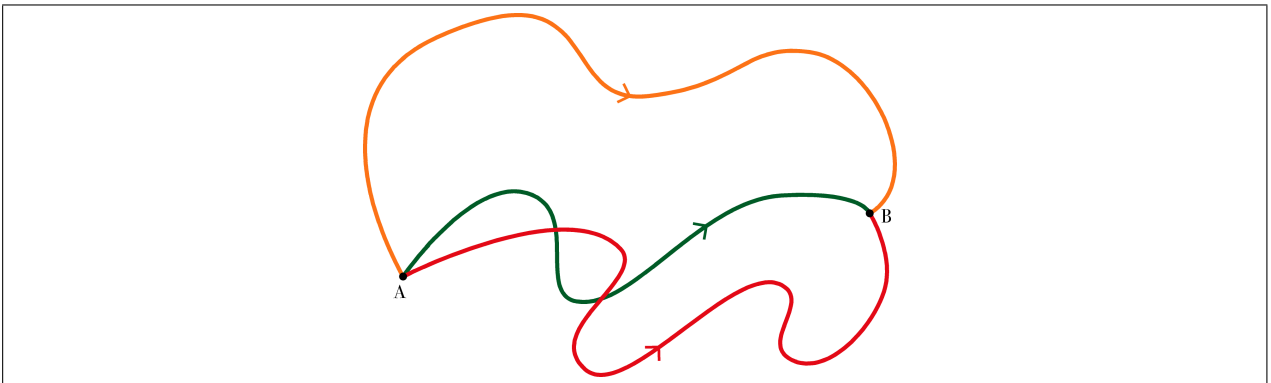


Figura 1.23: Varios caminos con el mismo punto inicial, A, y el mismo punto final, B

el valor de la integral de un gradiente no depende propiamente del camino, sino solamente de sus puntos inicial y final. Otro corolario es que cuando integremos un gradiente sobre un camino cerrado, el resultado será siempre igual a cero.

La primera pregunta que queremos resolver en este apartado es si esto ocurre siempre, como en el caso de funciones con valores en  $\mathbb{R}^1$  que acabamos de citar, o, por el contrario, cuando  $n$  es mayor o igual que 2 hay funciones con valores en  $\mathbb{R}^n$  que no son un gradiente.

Pues bien, en cuanto estemos en dimensión mayor o igual que 2, no es cierto que todos los campos vectoriales continuos sean el gradiente de un campo escalar. Basta observar, por ejemplo, que el rotacional <sup>(26)</sup>, de un gradiente de clase  $\mathcal{C}^1$  siempre es nulo <sup>(27)</sup>, y es fácil

<sup>25</sup>Asunto totalmente distinto es si esa antiderivada es una función elemental, en el sentido en el que se explica en una nota al pie de la página 87.

<sup>26</sup>Si  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^3$ , es un campo vectorial tridimensional, que tiene por funciones componentes  $F_1, F_2$  y  $F_3$ , recordemos que el **rotacional** de  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$p \rightsquigarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} (p) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(p), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(p), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(p) \right).$$

<sup>27</sup>Si  $\mathbf{F} = \nabla f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces las derivadas segundas de  $f$  existen y son continuas, puesto que sus derivadas primeras no son otras que las componentes de  $\mathbf{F}$ . Al ser  $f$  de clase  $\mathcal{C}^2$ , sus derivadas cruzadas son iguales (ver, por ejemplo, [11], apartado 3.1). Pero en este caso las tres componentes de **rot(grad f)** son

construir campos de clase  $\mathcal{C}^\infty$  con rotacional no nulo. Más sencillo todavía es remitirnos al ejemplo 1.17, donde hemos integrado un campo vectorial sobre un camino cerrado (en realidad, sobre dos caminos cerrados) y no nos ha dado cero, luego ese campo vectorial no puede ser un gradiente.

Así, pues, ya sabemos que no siempre la integral de un campo vectorial es independiente del camino recorrido y que esta propiedad sí que es cierta para los campos que sean un gradiente (es una propiedad necesaria de los campos que son un gradiente). Nuestro objetivo ahora es saber hasta qué punto esta propiedad es también suficiente para asegurar que el campo en cuestión es un gradiente de otro campo. Además, caracterizar los casos en los que se dé esta importante propiedad.

**27.** Cuando en matemáticas hablamos de “caracterizar”, de “caracterización”, de “propiedad característica”, etc., siempre nos referimos a una propiedad que sea necesaria y suficiente.

Y resolver los mismos interrogantes para la propiedad de que las integrales sobre curvas cerradas simples sean siempre nulas.

**28.** Resumiendo, sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua.

- $\mathbf{F} = \nabla f$  para alguna  $f \Rightarrow$  la integral  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  sólo depende de los puntos inicial y final de  $\mathbf{c}$
- $\mathbf{F} = \nabla f$  para alguna  $f \Rightarrow$  la integral  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  es nula siempre que los puntos inicial y final de  $\mathbf{c}$  sean iguales
- Las implicaciones recíprocas de las dos anteriores son ciertas cuando  $n = 1$ .

¿Son ciertas las implicaciones recíprocas también cuando  $n \geq 2$ ?

El teorema 1.32 dará una respuesta afirmativa a esta pregunta, al menos cuando la formulemos para campos que tengan todas las derivadas de primer orden continuas y cuyo dominio de definición sea un conjunto abierto (<sup>28</sup>).

Para ello nos interesará saber de qué forma construir un campo escalar cuyo gradiente sea un campo vectorial conocido. Empezaremos resolviendo un ejemplo. Lo haremos por tres métodos distintos, que serán ilustrativos de las demostraciones de varias partes de nuestro resultado principal (teorema 1.32).

**Ejemplo 1.31** Considérese sobre el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x + z \cos(yz), y \cos(yz))$  la pregunta ¿existe un campo escalar  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ ?

diferencia de dos derivadas cruzadas, luego son nulas:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right) = (0, 0, 0).$$

<sup>28</sup>Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es **abierto** cuando ningún punto suyo es límite de una sucesión de puntos de fuera de  $D$ .

MÉTODO 1. Definimos  $f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt = \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos(yt) dt = xy + \sin(yz)$ . Y comprobamos trivialmente que el gradiente de la función  $f$  es efectivamente  $\mathbf{F}$ .

En la demostración del teorema 1.32 se verá que la construcción de esta  $f$  no es una mera idea feliz.

MÉTODO 2. Definimos  $f(x, y, z) = \int_0^1 \mathbf{F}(tx, ty, tz) \cdot (x, y, z) dt = \int_0^1 [2txy + 2tyz \cos(t^2yz)] dt = xy + \sin(yz)$ .

También esta definición de  $f$  tiene una justificación, ya que este método aparece de manera natural cuando se quiere construir  $f$  sobre un conjunto estrellado (ver la parte C) del teorema 1.32).

MÉTODO 3. En los anteriores métodos hemos comenzado dando una función que es candidata a ser un campo escalar cuyo gradiente en  $\mathbf{F}$ . Estos procedimientos son válidos con carácter general para algunos dominios de definición del campo  $\mathbf{F}$ , pero no sobre todos. Nuestro último método no presupone que tengamos un candidato a la solución (ni que exista solución).

Estamos buscando una solución al sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= F_1 = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= F_2 = x + z \cos(yz) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= F_3 = y \cos(yz) \end{aligned} \right\},$$

donde la incógnita es  $f$ . Integrando respecto de  $x$  la primera ecuación,

$$f(x, y, z) = xy + \varphi(y, z),$$

donde  $\varphi(y, z)$  es la llamada “constante de integración”, que es constante como función de  $x$ , pero puede depender de las otras dos variables. Ahora que sabemos que  $f$  es igual a  $xy$  más una función que no depende de  $x$ , metemos ese dato en la segunda ecuación, lo que nos da

$$x + z \cos(yz) = \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z \cos(yz).$$

Integramos respecto de  $y$  para obtener información sobre la función  $\varphi$ , con el resultado

$$\varphi(y, z) = \sin(yz) + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = xy + \sin(yz) + \psi(z),$$

donde  $\psi$  es la constante de integración, lo que ahora significa que es una función que no depende de  $y$  ni de  $x$ .

Por último, introducimos estos datos en la tercera ecuación,

$$y \cos(yz) = \frac{\partial f}{\partial z} = y \cos(yz) + \psi'(z), \quad \Rightarrow \quad \psi'(z) = 0,$$

así que  $\psi$  es una constante genuina,  $\psi(z) = k$ . Concluimos que el sistema de ecuaciones tiene solución y que cualquier solución es de la forma

$$f(x, y, z) = xy + \sin(yz) + k.$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . ■

En el teorema siguiente supondremos que  $n > 1$  (aunque no es imprescindible), dado que el caso  $n = 1$  está resuelto. Obsérvese, por otro lado, que un parte de la tesis C) depende de la dimensión  $n$ , pero el resto vale en realidad para cualquier dimensión.

**Teorema 1.32** *Supondremos dado un conjunto abierto <sup>(28)</sup>  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Considérense las siguientes propiedades, referidas a un campo vectorial  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$ :*

1. *La integral de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier trayectoria de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos y cerrada cuya imagen esté contenida en  $D$ , es nula.*
- 1'. *La integral de  $\mathbf{F}$  a lo largo de cualquier curva cerrada simple orientada y contenida en  $D$  es nula.*
2. *Las integrales de  $\mathbf{F}$  sobre dos trayectorias de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos cuyas imágenes estén contenidas en  $D$  y tengan el mismo origen y el mismo extremo, son iguales.*
- 2'. *La integral de  $\mathbf{F}$  sobre una curva simple orientada que esté contenida en  $D$  sólo depende del punto inicial y del punto final de la curva.*
3.  *$\mathbf{F}$  es el gradiente de alguna función escalar.*
4. *Para todo par de índices  $i, j = 1, \dots, n$ , se cumple que*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

(En el caso  $n = 3$  esta propiedad equivale a  $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .)

Entonces

A)  $1 \iff 1' \iff 2 \iff 2' \iff 3 \implies 4$ .

B)  $4 \not\iff 3$ .

C)  $4 \implies 3$  siempre que se cumpla alguna de las siguientes condiciones adicionales <sup>(29)</sup>:

- $D$  es “estrellado” <sup>(30)</sup>
- $n = 2$  y además  $D$  no “encierra agujeros” (ver apartado 2.6.5)
- $n = 3$  y además  $D$  es todo  $\mathbb{R}^3$  excepto un número finito de puntos.

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL)

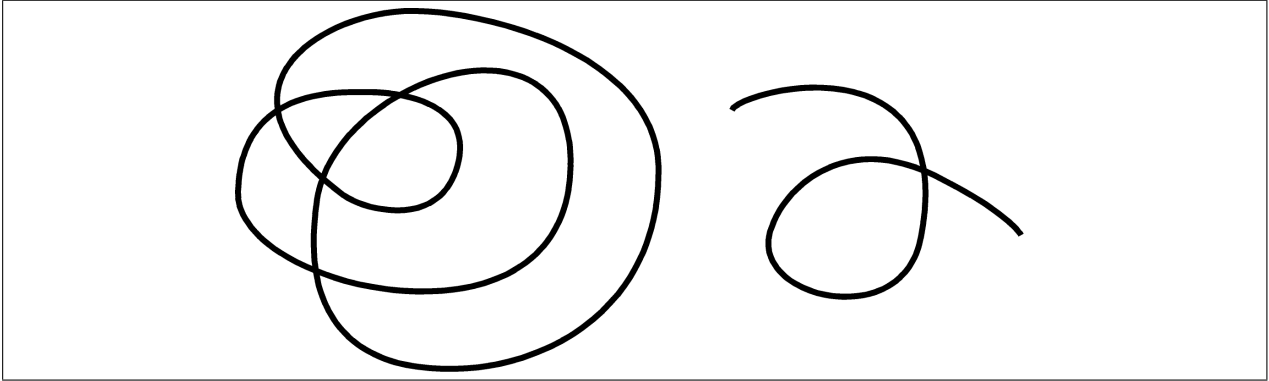


Figura 1.24: Imagen de una trayectoria en  $\mathbb{R}^2$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y cerrada, pero que no es una curva cerrada simple. Y de un camino de clase  $\mathcal{C}^1$  que no es una curva simple

A)  $1 \iff 1'$  y  $2 \iff 2'$ : No las haremos. Las implicaciones hacia la derecha son inmediatas, aplicar la definición 1.28. Pero las implicaciones hacia la izquierda son más laboriosas <sup>(31)</sup>.

$1 \implies 2$ : Si  $c_1$  y  $c_2$  son dos caminos en  $D$  que comparten punto inicial y punto final, entonces puede construirse  $c_1 + (c_2)_{op}$ , que es un camino cerrado. Aplicándole la hipótesis 1, obtendremos la igualdad de las integrales sobre  $c_1$  y sobre  $c_2$ :

$$0 = \int_{c_1 + (c_2)_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{(c_2)_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{c_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{c_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

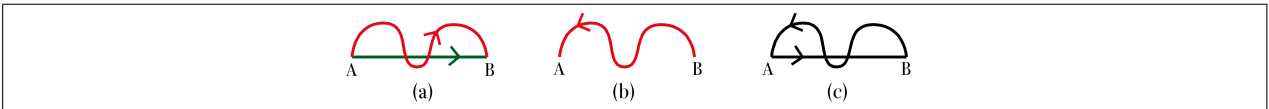


Figura 1.25: Demostración de  $1 \implies 2$ . (a) Los caminos  $c_1$  y  $c_2$ . (b) El camino  $(c_2)_{op}$ . (c) El camino  $c_1 + (c_2)_{op}$

$3 \implies 4$ : Se sigue del teorema sobre la igualdad de las derivadas cruzadas para funciones de clase  $\mathcal{C}^2$ , puesto que si  $\mathbf{F} = \nabla f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces necesariamente  $f \in \mathcal{C}^2$ , y

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

$3 \implies 1$ : Es consecuencia directa del teorema fundamental del cálculo generalizado (teorema 1.16).

$2 \implies 3$ : Supondremos, para simplificar, que  $D = \mathbb{R}^n$ , o que  $D$  es un rectángulo (si estamos en  $\mathbb{R}^2$ ) o un paralelepípedo (si estamos en  $\mathbb{R}^3$ ) que contiene al origen. El

<sup>29</sup>Ver también la condición de que  $D$  sea **simplemente conexo** ([2], definición 7.6.3 y teorema 7.6.5).

<sup>30</sup>Un conjunto  $D$  se dice que es **estrellado** cuando tiene algún punto  $\mathbf{p}_0 \in D$  para el que se cumple que para cualquier otro  $\mathbf{p} \in D$  todo el segmento  $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}]$  está contenido en  $D$ .

<sup>31</sup>Si queremos demostrar que  $1' \implies 1$ , tomaremos cualquier trayectoria  $c : [a, b] \rightarrow D$ , de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos y con  $c(a) = c(b)$ , con el fin de demostrar que  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ . No podremos aplicar directamente  $1'$ , puesto que es posible que  $c$  no sea la parametrización de ninguna curva cerrada simple (puede tener puntos dobles), así que habrá que utilizar otra estrategia más elaborada.

caso general no lo demostraremos <sup>(32)</sup>.

Haremos la demostración para tres variables, el caso general sería completamente análogo. Para cada punto  $\mathbf{p} = (x, y, z)$  defínase  $f(\mathbf{p})$  como la integral de  $\mathbf{F}$  a lo largo de un camino cualquiera que va desde el origen hasta  $\mathbf{p}$  y está contenido en  $D$ . Demostramos a continuación que  $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) = F_3(\mathbf{p})$ , eligiendo para ello un camino que nos convenga, y del mismo modo se probaría para las demás variables, cambiando de camino según cuál sea la variable. Gracias a la hipótesis podemos

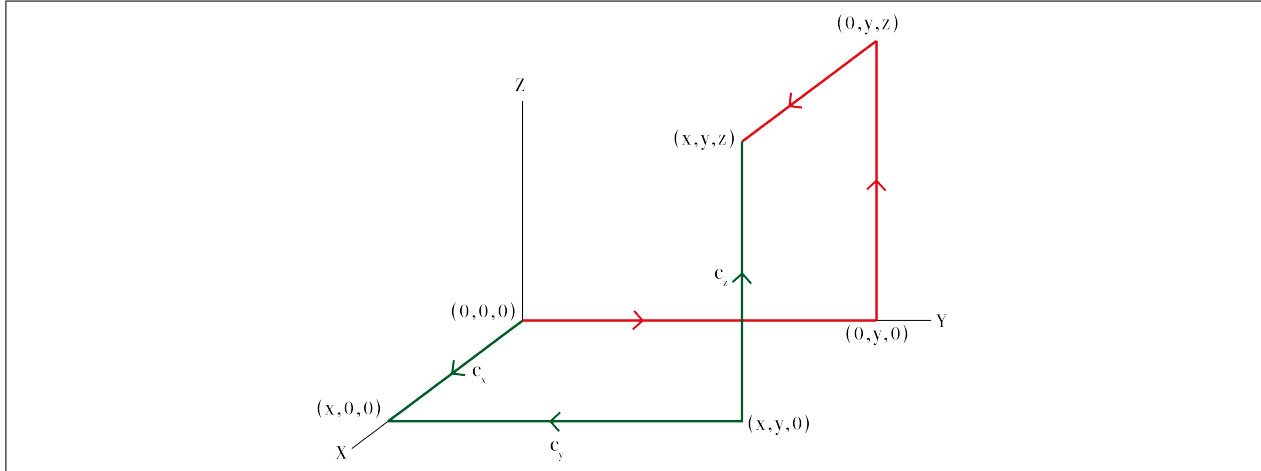


Figura 1.26:  $f(x, y, z)$  se define como la integral de  $\mathbf{F}$  sobre cualquier camino que vaya desde  $(0, 0, 0)$  hasta  $(x, y, z)$ . En verde, el camino utilizado para la demostración de que  $\partial f / \partial z = \mathbf{F}_3$ . En rojo, el que usaríamos para probar que  $\partial f / \partial y = \mathbf{F}_2$

suponer que la trayectoria que utilizamos para calcular el valor de  $f$  es cualquiera, así que tomamos la trayectoria poligonal  $\mathbf{c}$  que vaya uniendo los puntos  $(0, 0, 0)$ ,  $(x, 0, 0)$ ,  $(x, y, 0)$ ,  $(x, y, z)$ . Para ello ponemos  $\mathbf{c}$  como la suma  $\mathbf{c}_x + \mathbf{c}_y + \mathbf{c}_z$ , donde cada uno de los tres caminos parametriza uno de los segmentos.

Las parametrizaciones pueden elegirse de esta manera, donde los signos dependen de si el correspondiente valor de  $x$ ,  $y$  o  $z$  es positivo o negativo <sup>(33)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_x &: [0, |x|] \longrightarrow D, & \mathbf{c}_x(t) &= (\pm t, 0, 0) \\ \mathbf{c}_y &: [0, |y|] \longrightarrow D, & \mathbf{c}_y(t) &= (x, \pm t, 0) \\ \mathbf{c}_z &: [0, |z|] \longrightarrow D, & \mathbf{c}_z(t) &= (x, y, \pm t) \end{aligned}$$

Entonces  $\mathbf{c}'_x = (\pm 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{c}'_y = (0, \pm 1, 0)$ ,  $\mathbf{c}'_z = (0, 0, \pm 1)$ , luego

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \circ \mathbf{c}_x(t)) \cdot \mathbf{c}'_x(t) &= \pm F_1(\pm t, 0, 0) \\ (\mathbf{F} \circ \mathbf{c}_y(t)) \cdot \mathbf{c}'_y(t) &= \pm F_2(x, \pm t, 0) \\ (\mathbf{F} \circ \mathbf{c}_z(t)) \cdot \mathbf{c}'_z(t) &= \pm F_3(x, y, \pm t), \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Se requiere el manejo del concepto topológico de componente conexa. Ver una demostración en [2], teorema 5.5.6.

<sup>33</sup>En los casos en los que alguna coordenada sea nula, por ejemplo  $y = 0$ , el correspondiente camino es degenerado,  $\mathbf{c}_y : \{0\} \longrightarrow D$ ,  $\mathbf{c}_y(0) = (x, 0, 0)$ , y la integral de  $\mathbf{F}$  sobre él es nula. Luego también en este caso se tiene que  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^y F_2(x, t, 0) dt$ .

y por tanto:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_x} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{c}_y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{c}_z} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \int_0^{\pm x} \pm F_1(\pm t, 0, 0) dt + \int_0^{\pm y} \pm F_2(x, \pm t, 0) dt + \int_0^{\pm z} \pm F_3(x, y, \pm t) dt = \\ &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \end{aligned}$$

(en las integrales en las que aparezcan los signos  $-$ , hacer un cambio de variable  $t' = -t$ ).

Ahora derivamos respecto de  $z$ . Las dos primeras integrales no contienen a la variable  $z$ , de modo que su derivada es nula. Aplicamos el teorema fundamental del cálculo a la tercera integral y concluimos que  $f$  es derivable en  $\mathbf{p}$  respecto a  $z$ , y su derivada es  $F_3(\mathbf{p})$ .

Derivar  $f$  respecto a  $x$  usando la fórmula anterior no es tan fácil como derivarla respecto a  $z$ . Por ello, para probar que  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = F_1(\mathbf{p})$ , elegiríamos la poligonal  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, y, 0) \rightarrow (0, y, z) \rightarrow (x, y, z)$ . Y análogamente para demostrar que  $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = F_2(\mathbf{p})$ .

B) El campo  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  cumple la propiedad 4, pero no la propiedad 1. En efecto,

(4): es de comprobación rutinaria;

(1): si integramos a lo largo del círculo unidad  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

**29.** Puede parecer que el campo del ejemplo puesto en esta demostración de la parte B) del teorema sí que cumple la propiedad 3 del enunciado, puesto que sus componentes son las derivadas parciales de la función ángulo polar,  $\arctan \frac{y}{x}$ .

Pero no es así <sup>(34)</sup>, dado que el dominio de  $\mathbf{F}$  es todo el plano menos el origen,  $D_{\mathbf{F}} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mientras que el campo escalar  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  no está definido sobre la totalidad de  $D$ , sino solamente sobre todo el plano menos el eje coordenado vertical,  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ . <sup>(35)</sup>

<sup>34</sup>No podía ser que la cumpliera, una vez que hemos demostrado que no cumple la 1 y que  $3 \implies 1$ .

<sup>35</sup>Y si nos limitamos a  $D_f$ , entonces sí que el gradiente de  $f$  coincide con la restricción de  $\mathbf{F}$  a  $D_f$ . Lo que ocurre es que no entramos en contradicción con el ejemplo puesto más arriba porque ahora no tenemos derecho a integrar a lo largo del círculo unidad la restricción de  $\mathbf{F}$  a  $D_f$ , ya que el círculo se sale de  $D_f$ .

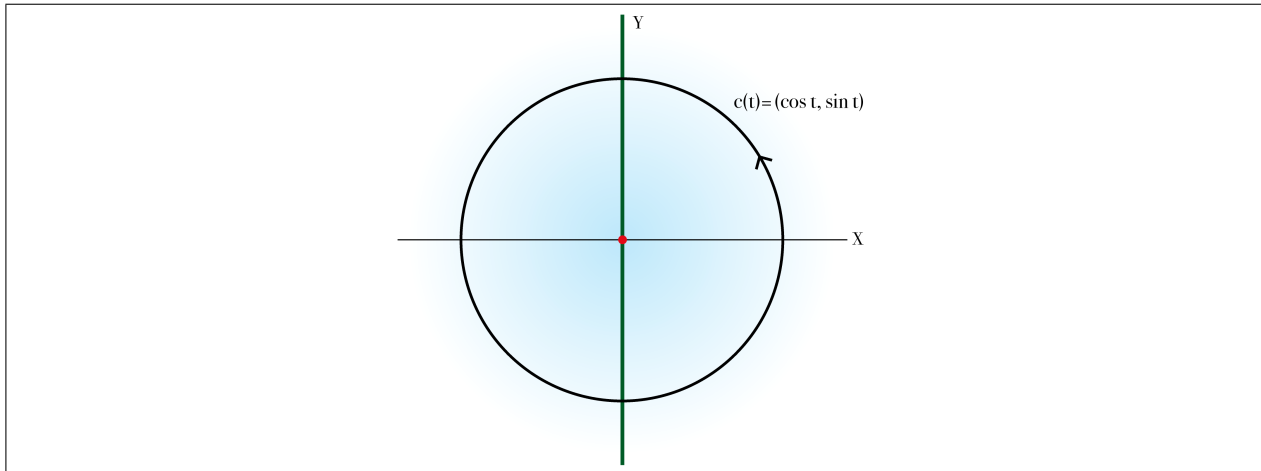


Figura 1.27: El dominio de  $F$  es todo el plano menos el origen. Contiene a la imagen de  $c$ . El dominio de  $f$  es menor, todo el plano menos el eje  $Y$ . No contiene a la imagen de  $c$

C) No haremos demostraciones completas de que las condiciones del enunciado son suficientes para demostrar que 4 implica alguna de las otras condiciones.

Para una demostración de la suficiencia de la hipótesis de que  $D$  sea estrellado, ver el apartado 1.5.2. Daremos justificaciones de la suficiencia de la hipótesis de que  $D$  no contenga agujeros (cuando  $n = 2$ ) y de que  $D$  sea todo el espacio salvo un conjunto finito (cuando  $n = 3$ ) en los apartados 2.6.5 y 3.5.6, respectivamente.

Con esto finalizamos la demostración.

**Definición 1.33** Los campos que cumplen las condiciones 1, 1', 2, 2' o 3, se llaman **conservativos** o **exactos**, mientras que un campo que cumpla la condición 4 se dice que es **cerrado**.

Si  $F = \nabla f$ , el campo escalar  $-f$  se llama **función potencial de  $F$** .

**30.** El signo “-” que precede a  $f$  se debe a la interpretación que tiene la función potencial en las aplicaciones físicas.

**31.** En algunos textos se utilizan las palabras “conservativo” y “cerrado” como sinónimos, lo cual es correcto si, por ejemplo, se trabaja solamente con campos que estén definidos sobre el espacio total. Si no se concreta ninguna condición sobre los dominios de definición, no es correcto utilizar el mismo nombre para los campos que cumplan la condición 4 que para los que cumplan la condición 1 o sus equivalentes.

En el teorema 1.32 se probó un recíproco parcial de la propiedad de que el rotacional de un gradiente de clase  $C^1$  sobre  $\mathbb{R}^3$  sea nulo. También puede probarse un recíproco de otro



resultado similar, que la divergencia <sup>(36)</sup> de un rotacional de clase  $\mathcal{C}^1$  es siempre nula:

**Teorema 1.34** *Si  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ .
2. Existe un campo vectorial  $\mathbf{G}$  de clase  $\mathcal{C}^2$  sobre  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ .

DEMOSTRACIÓN: [11], ejercicio 8.3.16.

El hecho de que un campo vectorial sea un gradiente o sea un rotacional tiene importantes consecuencias en algunas modelizaciones de fenómenos físicos, más allá de su interés matemático. El resultado conocido como descomposición de Helmholtz, garantiza que, bajo ciertas condiciones de regularidad y de convergencia a cero en el infinito, un campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  puede descomponerse en suma de un campo con rotacional nulo más otro campo con divergencia nula, o, lo que es lo mismo, en suma de un gradiente más un rotacional.

---

<sup>36</sup>Si  $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es un campo vectorial  $n$ -dimensional que tiene por funciones componentes  $F_1, \dots, F_n$ , recordemos que la **divergencia** de  $\mathbf{F}$  es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \rightsquigarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(p).$$

## 1.5. Notas adicionales

### 1.5.1. Ejemplos de integrales de campos vectoriales sobre caminos

**Ejemplo 1.35** Sea  $\mathbf{F}$  el campo vectorial definido por  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z)$ . Calcular  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , donde  $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

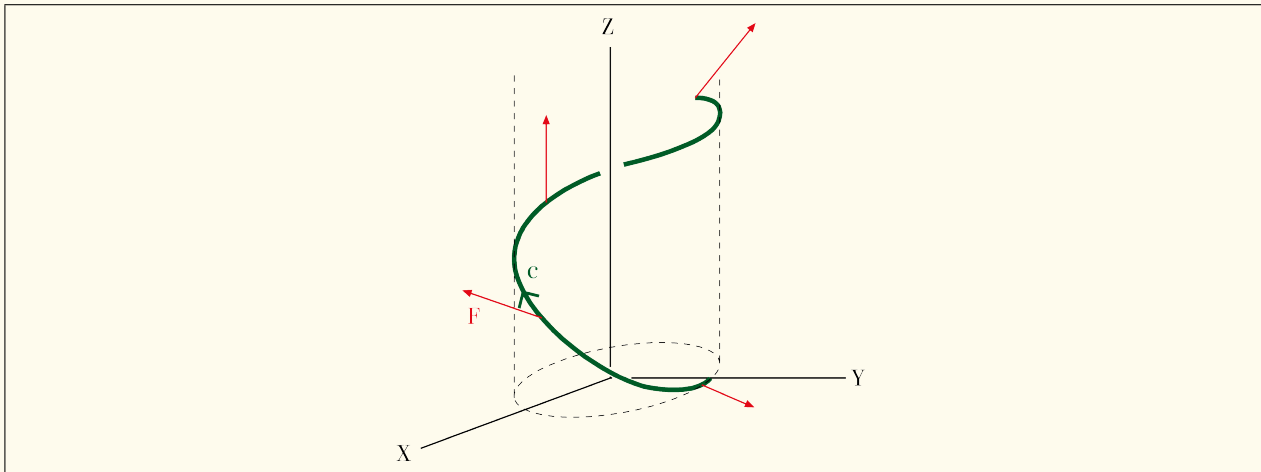


Figura 1.28:  $\mathbf{F} = (x, y, z)$ ;  $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$

En este caso  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $z(t) = t$ ,  $P = x$ ,  $Q = y$ ,  $R = z$ , luego la integral es

$$\int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - \sin t \cos t + t) dt = \int_0^{2\pi} t dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.36** Evaluar  $\int_c x^2 dx + xy dy + dz$ , donde  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t^2$ ,  $z(t) = 1$ , y el parámetro  $t$  recorre el intervalo  $[0, 1]$ .

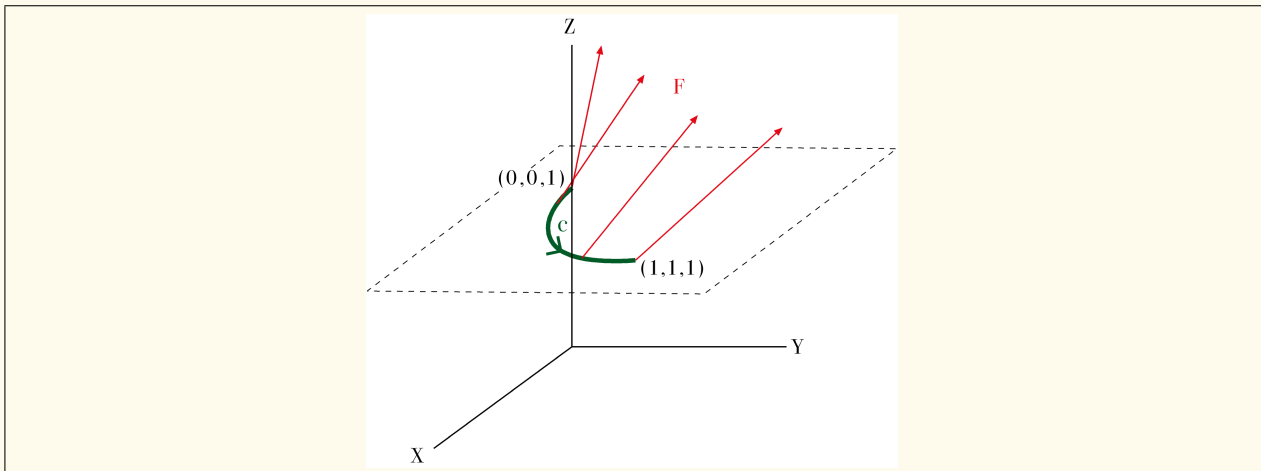


Figura 1.29:  $\mathbf{F} = (x^2, xy, 1)$ ;  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$ , con  $0 \leq t \leq 1$

$$\int_0^1 (t^2 + 2t^4) dt = \left[ \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{5} t^5 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 1.37** Considérese el campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  sobre una trayectoria  $c$  que describa la circunferencia contenida en el plano  $YZ$ , con radio  $a$  y centrada en el origen. Calcular  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , y comentar qué sentido

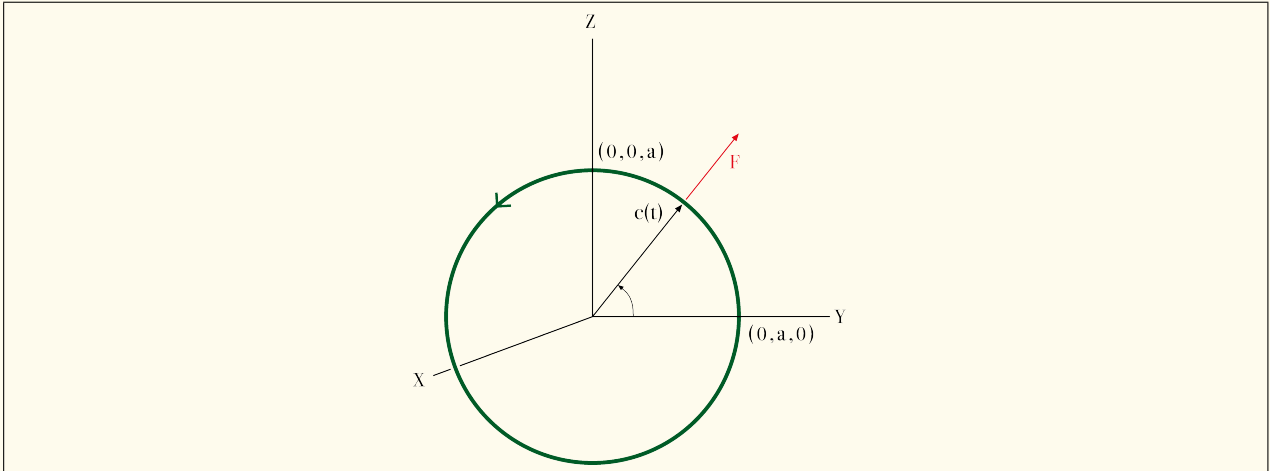


Figura 1.30:  $\mathbf{F} = (x^3, y, z)$ ;  $\mathbf{c}(t) = (0, a \cos t, a \sin t)$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$

tiene que sea nula.

Tomamos un camino que describa la circunferencia, si bien luego veremos un motivo para que la integral dé cero sin necesidad de considerar un camino concreto. Como descripción de la circunferencia utilizamos la trayectoria  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = a \cos t$ ,  $z(t) = a \sin t$ , con  $t \in [0, 2\pi]$ . Entonces,

$$\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \sin t \cos t + a^2 \sin t \cos t) dt = 0.$$

La integral tenía que ser nula, puesto que la circunferencia está contenida en el plano  $x = 0$ , por lo que el campo es  $y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , que resulta ser, en cada punto  $\mathbf{c}(t)$ , ortogonal a la circunferencia. Entonces, no importa cómo se parametrize la curva, el producto escalar  $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$  ha de ser constantemente nulo. ■

### 1.5.2. Lema de Poincaré para conjuntos estrellados

**Teorema 1.38 (Lema de Poincaré)** *Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto estrellado (es decir, existe un punto  $\mathbf{p}_0 \in D$  tal que para todo  $\mathbf{p} \in D$  el segmento  $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}] = \{\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) : t \in [0, 1]\}$  está contenido en  $D$ ), entonces sobre  $D$  se cumple que  $4 \Rightarrow 3$  (cf. el enunciado del teorema 1.32).*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $D$ ,  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  para el que se cumple que

$$\forall i, j = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Queremos construir un campo escalar sobre  $D$  cuyo gradiente coincida con  $\mathbf{F}$ .

Sin pérdida de generalidad puede suponerse que  $\mathbf{p}_0$  es el origen <sup>(37)</sup>.

<sup>37</sup>En caso de que  $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{0}$ , lo que haremos será trasladar todo el problema restando  $\mathbf{p}_0$  a  $D$ , obtener el campo escalar y trasladar el campo escalar sumando  $\mathbf{p}_0$ .

Llamamos  $\mathbf{F}^*$  al campo vectorial

$$\mathbf{F}^* : D - \mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p} + \mathbf{p}_0),$$

que sigue cumpliendo la hipótesis 4 (las derivadas parciales de  $\mathbf{F}^*$  son las mismas que las de  $\mathbf{F}$ ) y está definido sobre un conjunto estrellado con “centro” en el origen. Entonces, si  $f^*$  es un campo escalar  $D - \mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gradiente es  $\mathbf{F}^*$ , conseguimos el campo escalar que buscábamos mediante

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{p}) = f^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0),$$

cuyo gradiente es  $\mathbf{F}$ , porque para cada  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \frac{\partial f^*}{\partial x_i}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = F_i^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{p}).$$

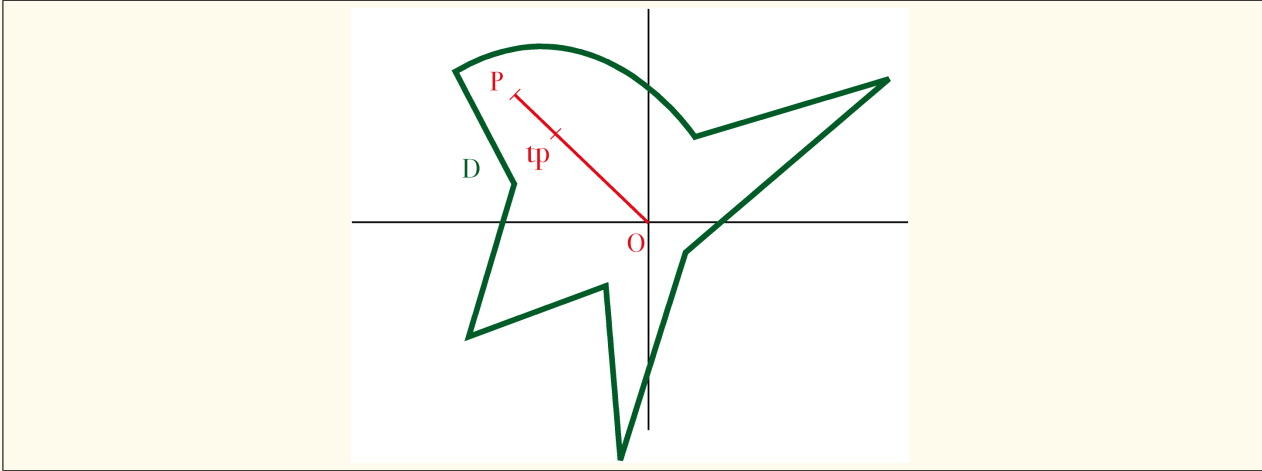


Figura 1.31: Conjunto estrellado, con  $p_0 = \mathbf{0}$ . Segmentos des  $\mathbf{0}$  hasta  $p$

Definimos

$$f(\mathbf{p}) = \int_0^1 \mathbf{F}(t\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} dt = \int_0^1 \sum_i^n F_i(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt,$$

y utilizando la Fórmula de Leibniz (teorema 1.39) para calcular derivadas bajo el signo de integral, obtenemos una cualquiera de las derivadas de  $f$ , por ejemplo la derivada respecto a la primera variable:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}) &= \int_0^1 \left[ F_1(t\mathbf{p}) + \sum_i^n t \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(t\mathbf{p}) x_i \right] dt = \int_0^1 \left[ F_1(t\mathbf{p}) + \sum_i^n t x_i \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(t\mathbf{p}) \right] dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [tF_1(t\mathbf{p})] dt = F_1(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado al hipótesis 4 al sustituir  $\partial F_i / \partial x_1$  por  $\partial F_1 / \partial x_i$ .

La siguiente fórmula de Leibniz nos permite, bajo ciertas condiciones, intercambiar una derivación y una integración:

**Teorema 1.39 (Fórmula de Leibniz)** Si  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con derivada  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continua, la función  $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , es derivable, y su derivada es

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: <sup>(38)</sup> Sean  $y, y_0 \in [c, d]$ , con  $y \neq y_0$ .

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) dx,$$

<sup>38</sup>Ver [1], Teorema 7.40

por el teorema del valor medio para derivadas de funciones de una variable, donde del punto  $\bar{y}$  lo único que sabemos es que  $|\bar{y} - y_0| < |y - y_0|$ . Entonces,

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx - \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) \right| dx.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es continua sobre  $[a, b] \times [c, d]$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  de modo que para todo  $x \in [a, b]$  y toda pareja  $u, v \in [c, d]$  (<sup>39</sup>),

$$|u - v| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, u) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v) \right| < \varepsilon,$$

luego

$$0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx - \frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

---

<sup>39</sup>Estamos usando la continuidad uniforme de  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , cosa que podemos hacer porque sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es continua sobre un producto de intervalos cerrados y acotados.



## 2. Integrales de dos variables

## 2.1. Introducción

Igual que ocurre en el Cálculo Diferencial, en el Cálculo Integral surgen abundantes cambios al pasar de una a dos variables, algunos de los cuales se resuelven de manera sencilla, poniendo una segunda coordenada con un poco de cuidado, mientras que otros son más profundos y requieren un replanteamiento de la teoría porque la que valía para una variable no vale más de una variable.

Puede decirse que buena parte de las novedades se presentan ya en el paso de una a dos variables. En muchos aspectos, el salto de dos variables a cualquier número finito de coordenadas puede reducirse a un mero incremento del número de coordenadas, al menos en cuanto a las integrales múltiples.

Se complica más el lenguaje necesario para integrar sobre los conjuntos que generalizan a las superficies cuando estamos en dimensiones mayores que 3, como veremos en el capítulo 5.

Señalamos a continuación algunos de los que cambios que son más significativos desde el punto de vista del aprendizaje.

(1) En una variable integramos sobre intervalos: cerrados y acotados en la construcción de la integral, e intervalos cualesquiera al hablar de integrales impropias. Si en alguna aplicación se hace necesario integrar sobre conjuntos que sean uniones de intervalos disjuntos, simplemente sumamos las integrales sobre cada uno de ellos. Para integrar sobre conjuntos más complicados lo mejor es abandonar la integral de Riemann y pasar a las de Lebesgue o de Kurzweil-Henstock, que son más útiles para tratar integrales sobre conjuntos arbitrarios.

En dos variables surgen dominios de integración que son muy sencillos (círculos, elipses, etc.) y que no podemos ignorar por su importancia en las aplicaciones, pero que no pueden descomponerse en un número finito de productos de intervalos (rectángulos). Por consiguiente necesitaremos elaborar una teoría que tenga en cuenta esta complejidad <sup>(40)</sup>.

(2) Con la integrabilidad de funciones discontinuas ocurre algo parecido. En una variable, integrar funciones que sean discontinuas en infinitos puntos no es algo que tratemos en un curso elemental como éste. En cambio, en dos variables nos resultará imprescindible necesario integrar funciones con infinitas discontinuidades, precisamente para poder solventar la dificultad aparejada a la integrabilidad sobre conjuntos que no sean intervalos.

(3) Para el cálculo de integrales en varias variables no se dispone de una fórmula tan sencilla y práctica como la regla de Barrow. Esto nos llevará a estudiar la forma de reducir el cálculo de una integral doble al cálculo sucesivo de dos integrales sencillas, para así aplicar la regla de Barrow dos veces seguidas.

Sí que existen adaptaciones a varias variables de los teoremas fundamentales del cálculo, pero son mucho más sofisticadas que un mero añadir coordenadas. Son los que se llaman teoremas clásicos del cálculo vectorial, que a su vez se unifican en el teorema general de Stokes.

(4) Aparecen, como sería de esperar, dificultades nuevas que son intrínsecas al hecho de utilizar varias variables. Por ejemplo:

- La forma geométrica que tengan los dominios de definición de las funciones afectará a la forma de calcular las integrales.

---

<sup>40</sup>Este es el motivo por el que descomponemos el estudio en dos apartados diferentes, el 2.2 y el 2.3.



- La ausencia de un orden en los conjuntos de dos parámetros origina dificultades en la orientación de las superficies que no se presentaban en la orientación de las curvas.
- El “acordeón de Schwarz” ejemplifica que no siempre los enfoques utilizados en una variable son trasladables a dos o más variables.

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada que depende de dos variables reales. Los dominios de definición de nuestras funciones podrán ser subconjuntos acotados <sup>(41)</sup> cualesquiera de  $\mathbb{R}^2$ , pero con frecuencia nos limitaremos a una clase especial de conjuntos que llamaremos regiones simples <sup>(42)</sup>. Esta limitación se deberá a varias razones:

- las regiones simples y las uniones finitas de regiones simples son suficientes para la gran mayoría de las aplicaciones de la integral de Riemann;
- los programas de cálculo simbólico son especialmente útiles para calcular integrales sobre estas regiones;
- el nivel de este curso solamente nos permitirá probar algunos de los resultados en regiones de este tipo.

Nuestra guía intuitiva para la definición de la integral de una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  que sólo tome valores positivos, será la búsqueda del volumen del conjunto tridimensional limitado entre la gráfica de  $f$  y el plano coordenado  $z = 0$ , es decir, del conjunto  $\Omega(f)$ :

**Definición 2.1** Si  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función positiva, llamaremos  $\Omega(f)$  al conjunto

$$\Omega(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Se puede demostrar <sup>(43)</sup> que la integral que vamos a definir es la única función que mide *razonablemente* el volumen de  $\Omega(f)$ .

**32.** Aprovechemos para insistir en que cálculo de volúmenes es solamente una de las utilidades que tiene el concepto que estamos introduciendo.

En realidad, nos interesa comprender el concepto de integral doble porque en las aplicaciones se utiliza para medidas de diversas magnitudes (físicas, económicas, etc., en función de la disciplina que estemos estudiando). A título de ejemplo, indiquemos que

- Si el conjunto bidimensional  $D$  es un modelo matemático de una placa construida con una composición de materiales que hace que tenga una densidad que varía en cada punto, y  $f$  es la función que a cada punto de  $D$  asocia precisamente esa densidad, entonces podremos utilizar la integral de  $f$  sobre  $D$  para definir la masa de la placa (en el modelo matemático).

<sup>41</sup>Excepto en el apartado 2.5.

<sup>42</sup>En el caso  $n = 1$  las regiones simples coinciden precisamente con los intervalos cerrados y acotados, que han sido nuestros dominios de integración en el apartado 1.1.

<sup>43</sup>Ver [10], capítulo 12, teorema de unicidad.

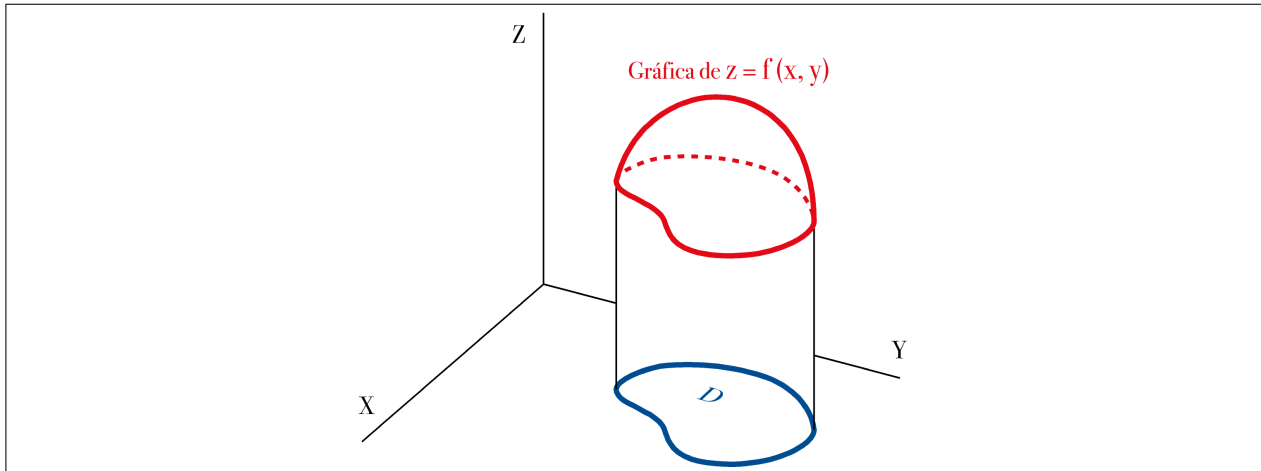


Figura 2.1:  $\Omega(f)$  es todo el conjunto comprendido entre la gráfica de  $f$  (en rojo) y el conjunto  $D$  (en azul), considerando a  $D$  no como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  sino como subconjunto de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

**Ejemplo 2.2** Sea  $D$  una placa rectangular cuyo lado largo mide el doble que el lado corto, de la que sabemos que su composición hace que la densidad crezca a partir de una de sus esquinas en cada dirección con el cuadrado de la distancia a esa esquina. La idealizamos como el rectángulo  $D = [0, 1] \times [0, 2]$  y con densidad  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

De esta manera, la masa de la placa la identificamos con el volumen de la región limitada por la gráfica de  $f$  y el plano horizontal. ■

- Cuando  $D$  sea una abstracción de una región de la superficie de la tierra que sea tan pequeña que la podamos considerar plana en una primera aproximación, y  $f$  exprese en cada punto la temperatura en un momento dado (o la altura sobre el nivel del mar, o...), entonces la integral doble de  $f$  sobre  $D$  servirá para calcular la temperatura media (o la altura media, etc.), de la misma manera que la integral de un campo escalar sobre un camino sirve para calcular otros promedios (ejercicio 1.7).
- Una integral doble o triple sirve también para definir el momento de inercia de un cuerpo, el potencial gravitacional de una distribución de masa ([22]), la rigidez flexural de una viga, ([11], capítulo 6, ejercicio 41 del último apartado), el campo eléctrico definido por una distribución de cargas, ([22], la probabilidad de que ocurra un suceso cuya dependencia de dos magnitudes (función de densidad) es conocida, ([7] o [23]), etc.

Admitiremos como punto de partida para nuestra definición el postulado de que para los conjuntos que sean productos cartesianos de intervalos acotados su volumen no es otro que el producto de las longitudes de sus lados <sup>(44)</sup>.

<sup>44</sup>Los motivos para adherirnos a este postulado están en la raíz misma del concepto de multiplicación de números. Desde cierto punto de vista sería tan correcto decir que el área de un rectángulo cuyos lados midan  $a$  y  $b$  se define como el producto  $ab$ , como decir que el producto  $ab$  se define como el área de un rectángulo cuyos lados midan  $a$  y  $b$ .

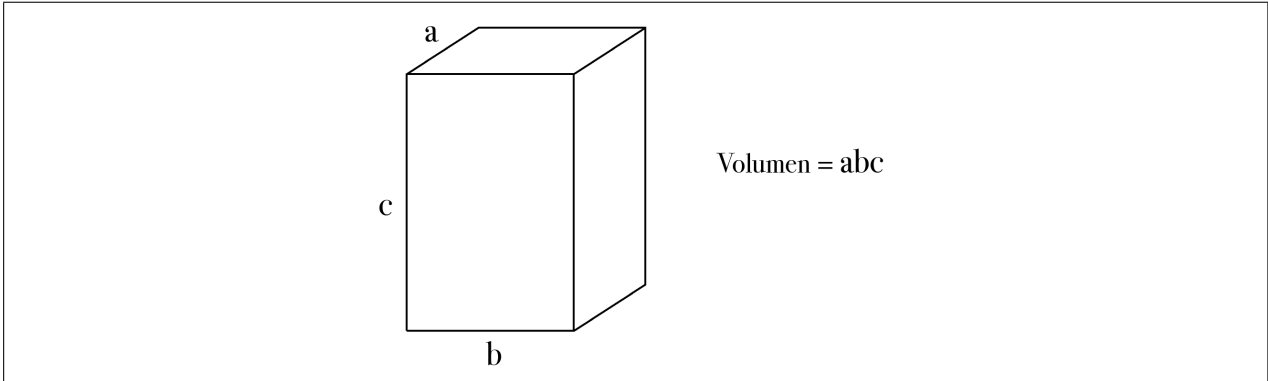


Figura 2.2: Volumen de un paralelepípedo

## 2.2. Integración de funciones definidas sobre rectángulos

### 2.2.1. Definiciones

Procederemos de manera muy similar al caso de una variable.

**Definición 2.3** Un **rectángulo**  $R$  es un producto cartesiano de dos intervalos cerrados y acotados,  $R = [a, b] \times [c, d]$ .

**33.** Reservamos la palabra *rectángulo* para estos conjuntos. Lo hacemos así para evitar tener que repetir con frecuencia la expresión *rectángulo cerrado, acotado y de lados paralelos a los ejes*.

**Definición 2.4** Considérese una función acotada  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . La **integral doble (de Riemann) de  $f$**  es, en caso de que exista, el número real al que convergen cuando  $n$  tiende a infinito las **sumas de Riemann**

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_{ij}^{(n)}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

para cualquier elección de los puntos  $\xi_{ij}^{(n)}$  dentro de cada subrectángulo  $R_{ij}^{(n)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , donde

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad y_0 = c, \quad y_n = d,$$

y para todos los subíndices  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (b - a)/n, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} = (d - c)/n.$$

Las funciones para las que exista su integral de Riemann se dice que son **integrables Riemann**.

Otra forma de dar la anterior definición es calcular las sumas de Riemann para unos incrementos  $dx_i, dy_j$  infinitesimales (las sumas tienen entonces un número infinito de sumandos,  $H$ ),

$$S_H = \sum_{i=1}^H f(\xi_{ij}^H) dx_i dy_j,$$

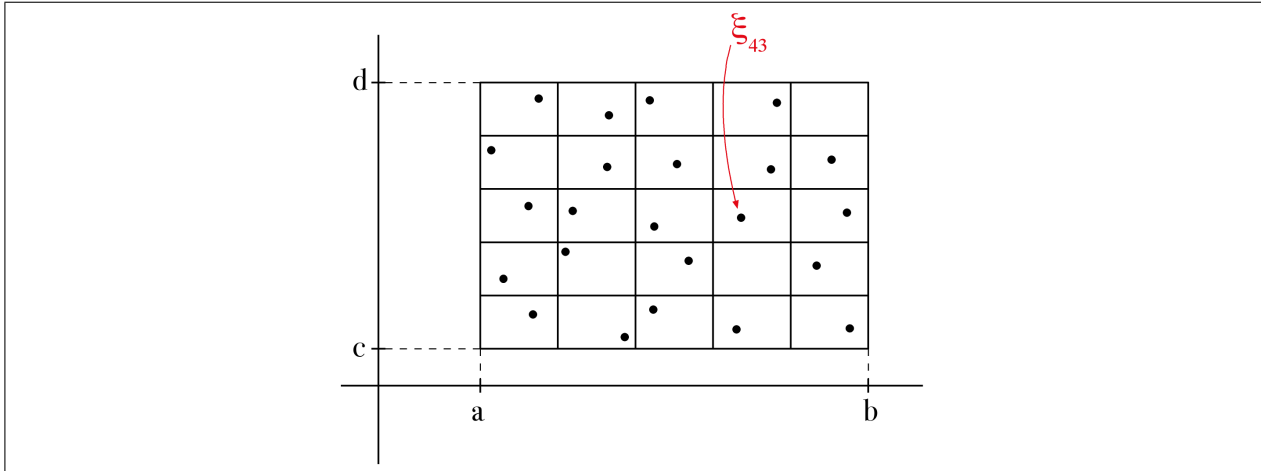


Figura 2.3: Una posible elección de los puntos  $\xi_{ij}^{(5)}$  en cada uno de los subrectángulos  $R_{ij}^{(5)}$

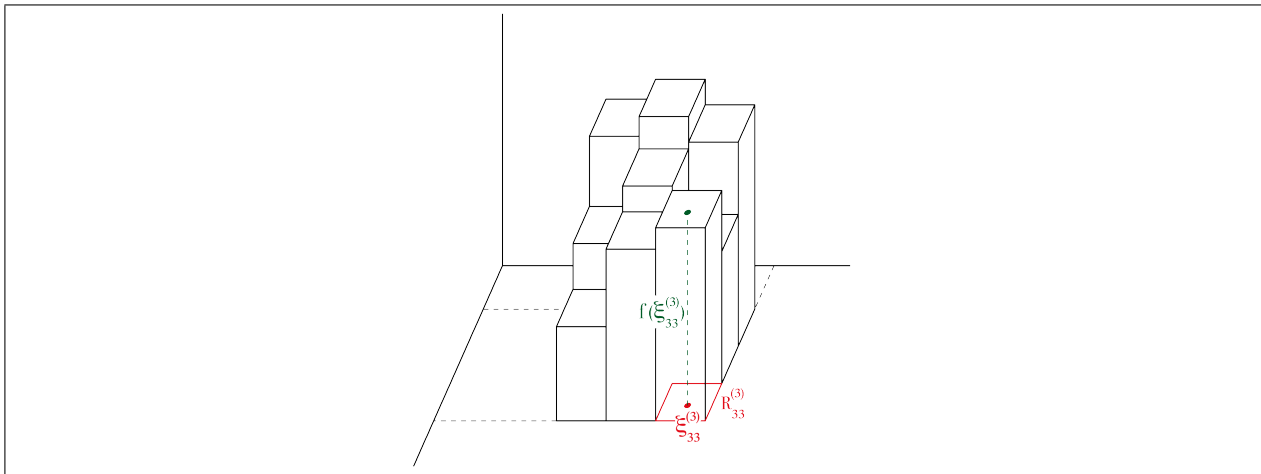


Figura 2.4: Una suma de Riemann  $S_3$ . Cada paralelepípedo tiene por base un  $R_{ij}^{(3)}$  y por altura el correspondiente  $f(\xi_{ij}^{(3)})$

y comprobar si todas ellas tienen la misma *sombra real* o *parte estándar*. En caso de que así sea, la sombra es la integral. Ver, por ejemplo, [10], capítulos 4 y 12, [5], capítulo 12.7, o [9], teoremas 6.1 y 6.2.

**Notaciones.** Denotaremos la integral doble de  $f$  sobre  $R$  mediante  $\iint_R f(x, y) dx dy$ .

En lugar de  $dx dy$  escribiremos también  $dA$  (leyéndolo como *diferencial de área*). Cuando el dominio o las variables se deduzcan del contexto, también usaremos  $\iint f$ , así como  $\int f$  cuando nos queramos referir a una integral de un número indeterminado de variables. En la literatura sobre integrales es muy frecuente también utilizar solamente la notación  $\int f$  para integrales sencillas, dobles o triples. Nosotros, en cambio, pondremos  $\iint f$ ,  $\iiint f$  siempre que manejemos una función de la que sepamos que tiene dos o tres variables, respectivamente.

El procedimiento ideado por Darboux también puede aplicarse cuando hay más de una variable.

**Definición 2.5** Sean  $R = [a, b] \times [c, d]$  y  $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definida sobre el rectángulo  $R$ .

- En cada uno de los lados de  $R$  tomemos una partición (en el sentido descrito en el apartado 1.1.1),

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d,$$

y formemos todos los rectángulos cerrados y acotados a que dan lugar las dos particiones,

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m, R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Estos rectángulos rellenan todo  $R$  y sus intersecciones dos a dos o son vacías o contienen solamente un segmento o un punto (se suele expresar esto último diciendo que los  $R_{ij}$  **no se solapan**). El resultado  $\mathcal{P} = \{R_{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$  es lo que llamaremos una **partición** del rectángulo  $R$ .

- Al ser  $f$  acotada, existen el supremo y el ínfimo de sus valores en cada rectángulo de la partición:

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}, \quad m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in R_{ij}\}.$$

Construimos las **sumas inferior y superior de Darboux para la función  $f$  y la partición  $\mathcal{P}$** ,

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La **integral inferior de Darboux de  $f$**  y la **integral superior de Darboux de  $f$**  son, respectivamente,

$$L(f) = \sup\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}\}, \quad U(f) = \inf\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}\}.$$

- Cuando  $L(f) = U(f)$ , se dice que la función  $f$  es **integrable Darboux**, y ese valor común de la integral inferior y la integral superior se llama **integral de  $f$  (de Darboux)**.

**34.** Observar que el supremo y el ínfimo utilizados para definir  $L(f)$  y  $U(f)$  existen siempre (y además  $L(f) \leq U(f)$ ), puesto que  $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}')$  para cada pareja de particiones  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$  <sup>(45)</sup>.

**Teorema 2.6** Las definiciones de integral de Riemann y de Darboux son equivalentes. En otras palabras, un función es integrable Riemann si y sólo si es integrable Darboux, y en caso de que lo sea los valores de ambas integrales coinciden.

DEMOSTRACIÓN: Puede completarse una demostración a partir de la del teorema 14.4 de [1].

<sup>45</sup>La última desigualdad se demuestra comparando a través de una partición  $\mathcal{P}''$  que tenga todos los puntos de  $\mathcal{P}$  y todos los de  $\mathcal{P}'$ .

### 2.2.2. Integrabilidad

El concepto de “función integrable” no merecería una definición si todas las funciones lo fueran o si ninguna lo fuera. Y no tendría interés si muy pocas lo fueran, es más, lo deseable sería que todas las funciones fuesen integrables, pero desgraciadamente esto no es cierto <sup>(46)</sup>. La identificación de todas las funciones que son integrables Riemann es una cuestión nada sencilla, que no fue resuelta hasta unos 50 años después de que Riemann definiera su integral. Nosotros no aspiramos a tanto, lo que sí haremos es mostrar que no todas las funciones son integrables Riemann y dar, sin demostración, una condición suficiente para que una función sea integrable que es lo bastante amplia como para garantizar que las funciones más habituales en las aplicaciones son integrables.

**Ejemplo 2.7** Sea  $f : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida del siguiente modo. Si  $x \in [0, 1]$  es un número racional, entonces  $f(x, y) = 1$  cualquiera que sea  $y \in [0, 2]$ ; y si  $x$  es irracional,  $f(x, y) = 0$  para cualquier  $y$ . En este caso todos los rectángulos

$$R_{ij}^{(n)} = \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[ 2\frac{j-1}{n}, 2\frac{j}{n} \right],$$

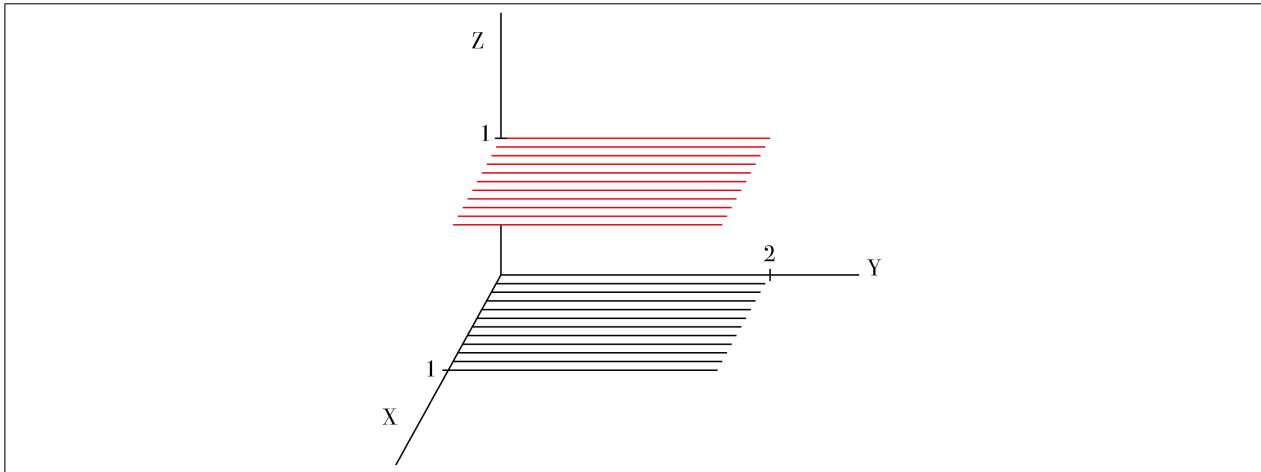


Figura 2.5: Los segmentos rojos corresponden a los valores racionales de la variable  $x$ , mientras que los segmentos verdes corresponden a los valores irracionales de  $x$ . Entre todos ellos forman la gráfica de la función del ejemplo 2.7

contienen puntos con la primera coordenada irracional y puntos con la primera coordenada racional. En consecuencia, resulta que por una parte podemos tomar todos los  $\xi_{ij}^{(n)}$  de forma que  $f(\xi_{ij}^{(n)}) = 1$ , con lo que las correspondientes sumas de Riemann serán todas iguales a 2, y también podemos tomar otros  $\xi_{ij}^{*(n)}$  de forma que  $f(\xi_{ij}^{*(n)}) = 0$ , con lo que las sumas de Riemann valdrán todas 0. Conclusión: esta función no es integrable. ■

La función de este ejemplo (debido esencialmente a Dirichlet, 1829, ver [8]), puede parecer rebuscada, y ciertamente lo es. Admite, sin embargo otra definición que no precisa distinguir entre números racionales e irracionales. En efecto, para todo  $x$  e  $y$  del dominio de  $f$ ,  $f(x, y) = \lim_n \lim_m [\cos(\pi n! x)]^m$  (consultar una demostración en el teorema 2.48, apartado 2.7.1).

<sup>46</sup>Ver el apartado 4.8.3.

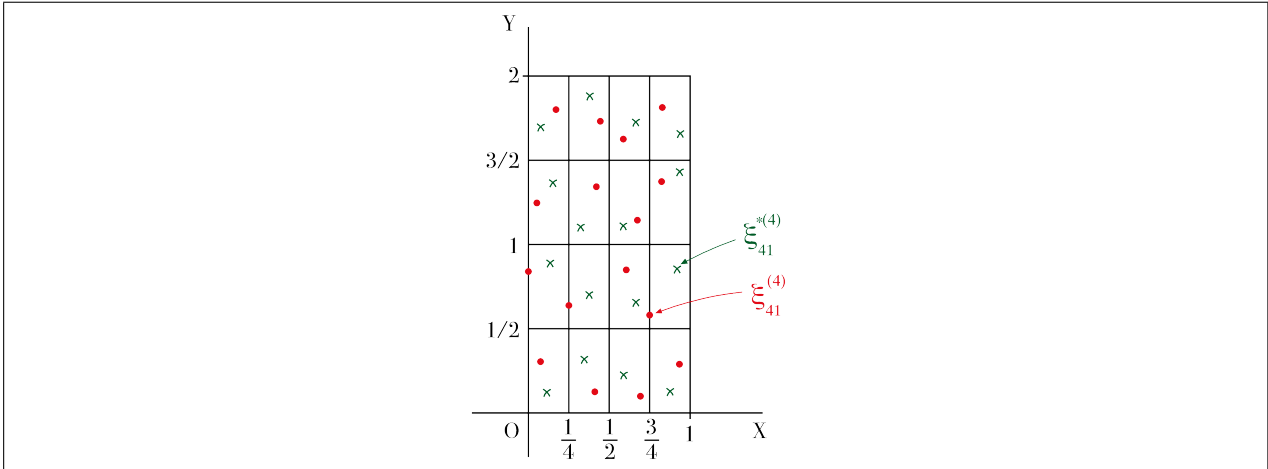


Figura 2.6: Dos elecciones de puntos donde evaluar la función del ejemplo 2.7. Los  $\xi_{ij}^{(4)}$ , rojos, tienen la primera coordenada racional y los  $\xi_{ij}^{*(4)}$ , verdes, tienen la primera coordenada irracional

Esta función es discontinua en todos los puntos. Del razonamiento sobre los valores de  $f$  en los subrectángulos sólo podemos deducir para esta función que el número que asignáramos como volumen de  $\Omega(f)$  (en caso de que se le pudiera asignar alguno por otro método distinto del de Riemann) tendría que estar comprendido entre 0 y 1.

En cambio, para funciones que sean continuas en todos los puntos nunca se presenta esta situación, el método de Riemann siempre les asigna una integral:

**Teorema 2.8** *Cualquier función continua de dos variables definida sobre un rectángulo es integrable.*

JUSTIFICACIÓN: Para una partición infinitesimal  $\mathcal{P}$  del dominio de una función continua de dos variables  $f$ , los valores  $M_{ij}$  y  $m_{ij}$  se alcanzan siempre en sendos puntos del rectángulo infinitesimal  $R_{ij}$ . Además, todos los  $M_{ij} - m_{ij}$  son infinitesimales, puesto que  $f$  es continua, luego el máximo de todos ellos (llamémosle  $k$ ) también es infinitesimal. Por tanto,

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = \sum [M_{ij} - m_{ij}] dx_i dy_j \leq \sum k dx_i dy_j = k(b - a)(d - c) \approx 0,$$

luego la función  $f$  es integrable.

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], capítulo 5, teorema 1.

Según el teorema 2.8, la continuidad de una función es una condición suficiente para la integrabilidad. Por otro lado, el ejemplo 2.7 nos muestra una función que no es integrable y que no sólo no es continua, como no podía ser de otra manera, sino que es discontinua en todos los puntos. En realidad, si una función es discontinua en todos los puntos, no puede ser integrable <sup>(47)</sup>. Estos son los dos extremos posibles, que una función sea continua en todos los puntos y por tanto integrable y que no lo sea en ninguno y por tanto no integrable, pero será frecuente que nos encontremos con casos intermedios. Ponemos a continuación otro ejemplo de función de dos variables, acotada y definida sobre un rectángulo, que no es continua (de hecho, tiene infinitos puntos de discontinuidad) y en cambio sí que es integrable.

<sup>47</sup>No demostraremos esto; ver, por ejemplo, teorema 14.5 de [1].

**Ejemplo 2.9** Sean  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  y

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{si } y < x, \end{cases}$$

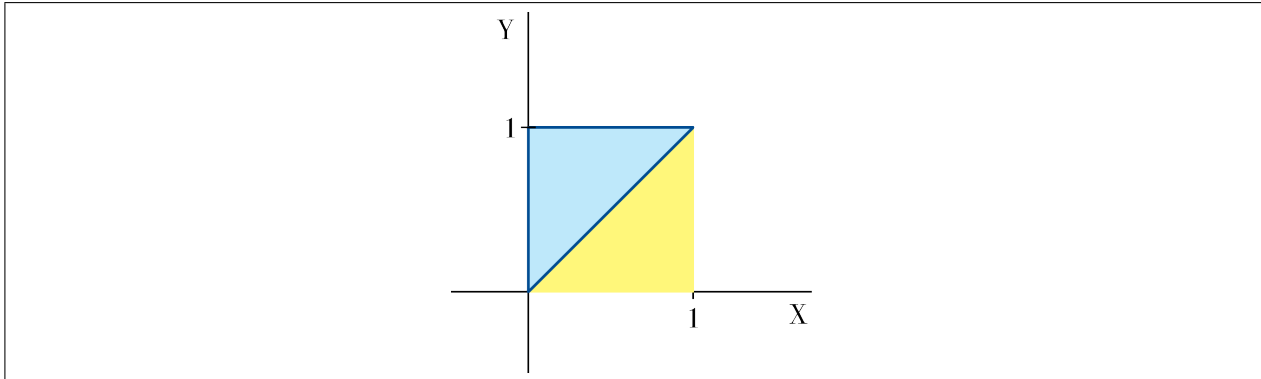


Figura 2.7: Dominio de la función del ejemplo 2.9. Sobre la parte azul la función vale 1 y sobre la parte amarilla vale 0

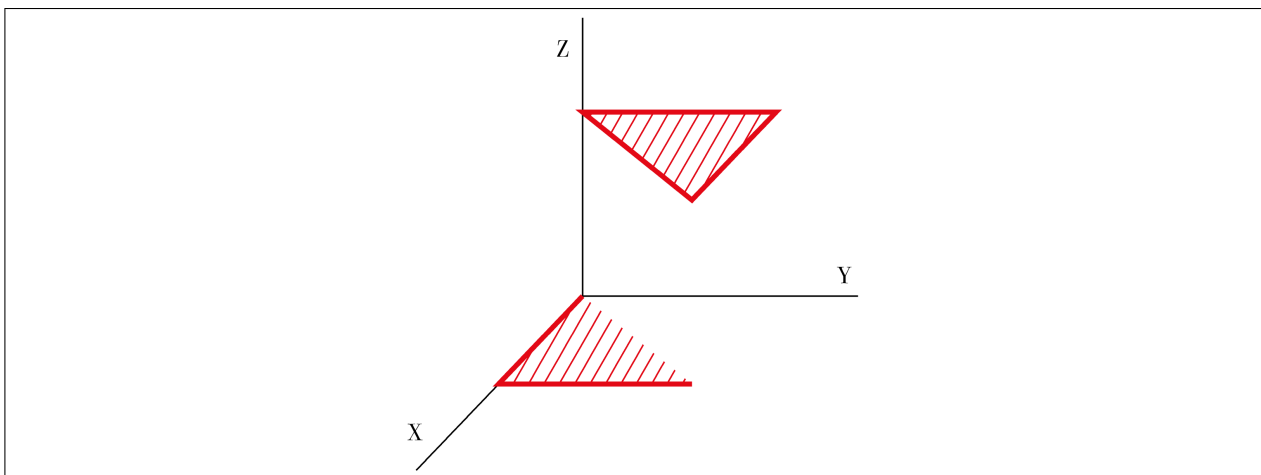


Figura 2.8: Gráfica de la función del ejemplo 2.9. Obsérvese que sobre la diagonal siempre toma el valor 1

que es discontinua en todos los puntos de la diagonal  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x = y \leq 1\}$  y continua en el resto de  $R$ .

Entonces para cualquier  $n$ , en los rectángulos  $R_{ij}^{(n)}$  que están por encima de la diagonal, incluso tocándola, la función vale 1 en todos sus puntos, luego  $f(\xi_{ij}^{(n)}) = 1$  independientemente de cómo elijamos los puntos  $\xi_{ij}^{(n)}$ . Análogamente,  $f(\xi_{ij}^{(n)})$  vale 0 siempre que  $R_{ij}^{(n)}$  esté por debajo de la diagonal, sin tocarla. Y en los demás, puede valer 0 o 1.

De los primeros  $R_{ij}^{(n)}$  hay  $1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n^2 - n)/2$  (hacer un recuento en la figura), luego la suma de Riemann  $S_n$  está acotada así:

$$S_n \geq \frac{n^2 - n}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$



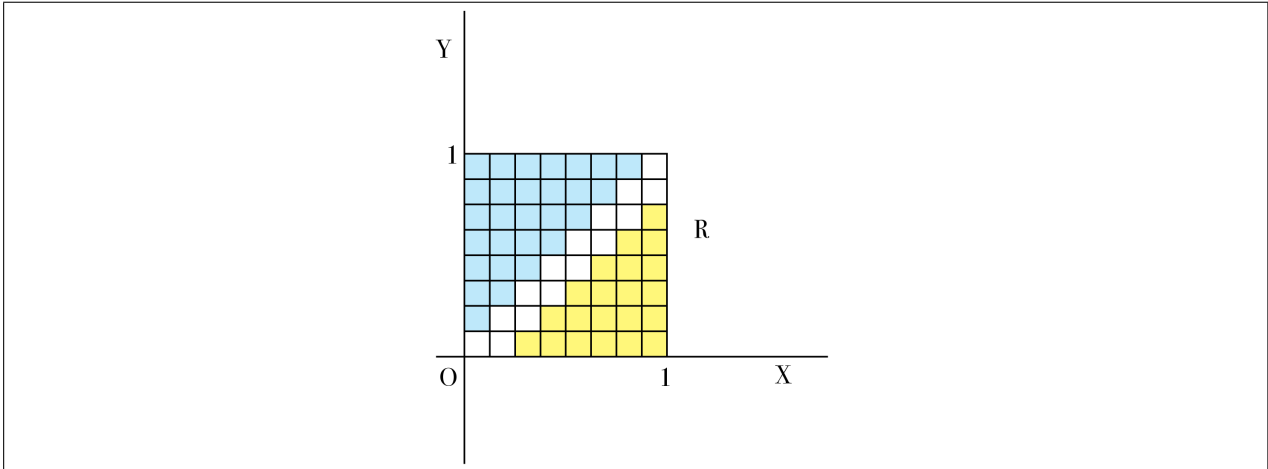


Figura 2.9: Partición correspondiente a  $n = 8$  para el rectángulo  $R$  del ejemplo 2.9. En los rectángulos azules,  $f(\xi_{ij}^{(8)})$  vale necesariamente 1. En los amarillos, vale necesariamente 0. Y en los blancos, puede valer 0 o 1, según cómo elijamos el punto  $\xi_{ij}^{(8)}$

Y de los terceros hay  $2n - 1$ , luego tenemos esta otra acotación por arriba (en el caso de que todos los  $\xi_{ij}^{(n)}$  se eligieran donde la función vale 1 siempre que se pueda):

$$S_n \leq \left( \frac{n^2 - n}{2} + 2n - 1 \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{n^2}.$$

La propiedad del sandwich para sucesiones garantiza que en todos los casos  $S_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , luego la función es integrable y su integral vale  $\frac{1}{2}$ . ■

**35.** Sobre un rectángulo, CONTINUA  $\Rightarrow$  INTEGRABLE pero INTEGRABLE  $\nRightarrow$  CONTINUA. En otras palabras, ser continua es una condición SUFICIENTE para que una función sea integrable, pero no es NECESARIA.

**36.** Es más: que las discontinuidades formen un conjunto finito es una CONDICIÓN SUFICIENTE para que la función sea integrable, pero no es NECESARIA (ver teorema 2.10).

¡¡No confundir CONDICIÓN NECESARIA con CONDICIÓN SUFICIENTE!!

En este ejemplo la función era continua en todo el rectángulo salvo en la recta  $y = x$ . La demostración de su integrabilidad se ha apoyado en que el conjunto donde falla la continuidad, la diagonal, es un conjunto tan fino que se puede sumergir en una colección de rectángulos infinitesimales cuyas áreas suman un infinitésimo. Entonces la contribución total de estos rectángulos a las sumas de Riemann es despreciable, con lo que puede decirse que los valores de la función en ese conjunto son irrelevantes para la integral, puesto que no hacen variar la suma de Riemann infinita más que en un infinitésimo, y en última instancia no nos importa si en esos puntos la función es continua o no.

Generalizando esta idea a otros conjuntos que se describan mediante expresiones más complicadas que  $y = x$ , se obtienen varias condiciones suficientes de integrabilidad de una

función, que permiten soslayar la discontinuidad de la función en conjuntos que, aun siendo infinitos, están contenidos en gráficas o en imágenes de determinadas funciones.

Nuestra generalización del ejemplo consistirá en admitir que la función no sea continua en los puntos de una o varias gráficas de funciones continuas (en el ejemplo 2.9, la diagonal era la gráfica de  $x \rightsquigarrow x$ ):

**Teorema 2.10** *Es integrable cualquier función de dos variables definida sobre un rectángulo, siempre que sea acotada y sus discontinuidades estén contenidas en una unión finita de gráficas de funciones continuas de una variable.*

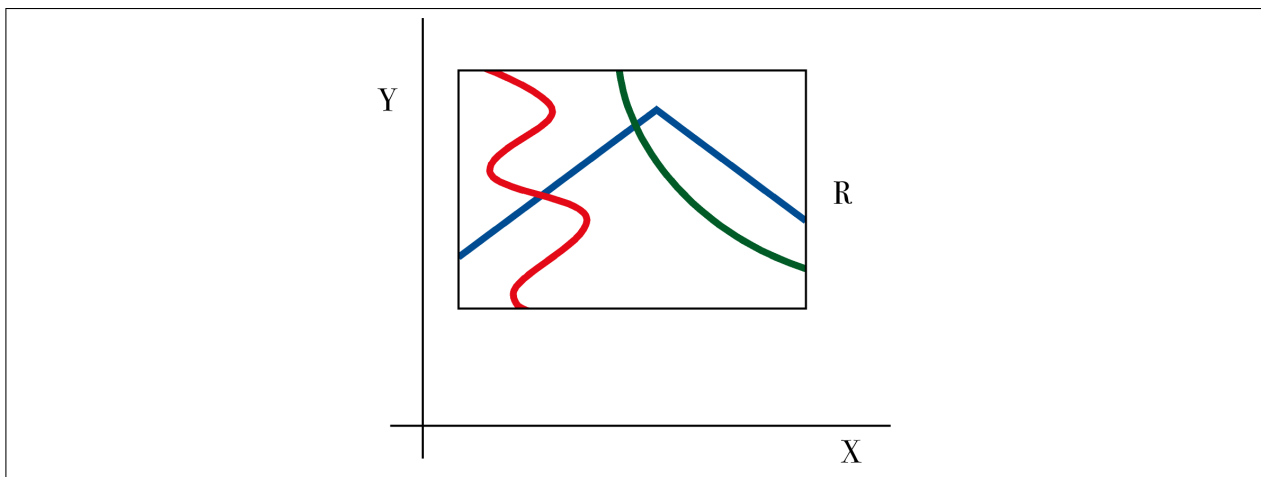


Figura 2.10: Sobre este rectángulo, la línea roja es la gráfica de una cierta función continua  $x = h_1(y)$ ; la azul es la gráfica de otra función continua  $y = h_2(x)$ ; y la verde es la gráfica de sendas funciones de los dos tipos. Una función acotada definida sobre  $R$  y que solamente sea discontinua en algunos de los puntos (o en todos ellos) de los conjuntos coloreados, es integrable sobre  $R$ , según el teorema 2.10

**JUSTIFICACIÓN:** *Las gráficas de funciones continuas de una variable tienen área nula, de modo que lo que pueda ocurrir en conjuntos de ese tamaño no afecta al valor de las integrales ni a la integrabilidad.*

**DEMOSTRACIÓN:** *En los ejercicios 5.5.4 a 5.5.6 de [11] se propone un esquema detallado para una demostración en el caso de dos variables que puede ser completada por el estudiante.*

Hay otras formas de generalizar la idea del ejemplo 2.9 y obtener una condición suficiente algo distinta, ver, por ejemplo, el apartado 2.7.2.

**37.** Entre las gráficas de funciones continuas de una variable dentro de un rectángulo están los conjuntos formados por un solo punto: si, por ejemplo,  $(x_0, y_0) \in R$ , no hay más que construir la función  $\alpha : \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\alpha(x_0) = y_0$ .

**38.** A lo largo del curso normalmente integraremos funciones que serán continuas en todos los puntos de su dominio. Lo que ocurre es que para probar que es integrable cualquier función continua definida sobre algunos dominios que no sean rectángulos, como por ejemplo los círculos (ver teoremas 2.20 y 2.21), será imprescindible disponer de una condición suficiente de integrabilidad que sirva para funciones discontinuas, como la del teorema 2.10.

Una condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable Riemann, condición que no se obtuvo hasta la década de 1910, mucho después de los trabajos de Riemann, está fuera del alcance de este curso (ver [1], teoremas 7.48 y 14.5). La idea planteada por primera vez por Riemann en 1854 (ver [8]) fue precisamente evitar este análisis detallado y estudiar las funciones integrables aunque no se sepan describir por completo. Esto es lo que haremos nosotros a continuación, empezando por averiguar qué ocurre al operar con funciones integrables.

### 2.2.3. Propiedades elementales

**39.** El sentido que en matemáticas se le da al adjetivo *elemental* es un poco peculiar. No es sinónimo de *fácil*. Una demostración puede ser elemental y a la vez muy difícil. Se utiliza para indicar que algo (una propiedad, una demostración, un concepto) es accesible o comprensible sin un gran aparato matemático.

En el caso de estas propiedades, además de elementales son todas fáciles de demostrar, pero no siempre es así. Todas las propiedades elementales de las integrales las utilizaremos con mucha frecuencia y sin necesidad de citarlas expresamente, tanto en el desarrollo de la teoría como en la resolución de problemas.

**Teorema 2.11** *Supóngase que  $f$  y  $g$  son funciones definidas sobre el mismo rectángulo  $R$ , ambas integrables. Entonces*

1. *Suma: La función  $f + g$  también es integrable, y  $\iint_R (f + g) = \iint_R f + \iint_R g$ .*
2. *Producto por un escalar: Si  $k$  es cualquier número real, la función  $kf$  también es integrable, y  $\iint_R (kf) = k \iint_R f$ .*

*Estas dos primeras propiedades pueden enunciarse conjuntamente de otro modo diciendo que el conjunto de funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal sobre él.*

3. *Monotonía: Si  $f \leq g$ , entonces  $\iint_R f \leq \iint_R g$ .*
4. *Valor Absoluto: La función  $|f|$  también es integrable, y  $|\iint f| \leq \iint |f|$ . La última desigualdad puede considerarse como una generalización de la desigualdad triangular.*
5. *La operación de integrar es aditiva también para los recintos de integración: Si  $R = R^1 \cup \dots \cup R^m$ , de modo que siempre que  $i \neq j$  los rectángulos  $R^i$  y  $R^j$  no se solapan,*

y  $h : R \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función acotada, entonces  $h$  es integrable si y sólo si son integrables todas las restricciones de  $h$  a cada  $R^i$ , y además

$$\iint_R h = \iint_{R^1} h + \cdots + \iint_{R^m} h,$$

donde  $\iint_{R^i} h$  significa la integral de  $h$  por el producto de la función característica <sup>(48)</sup> de  $R^i$  en  $R$ ,  $\iint_R h \chi_{R^i, R}$ .

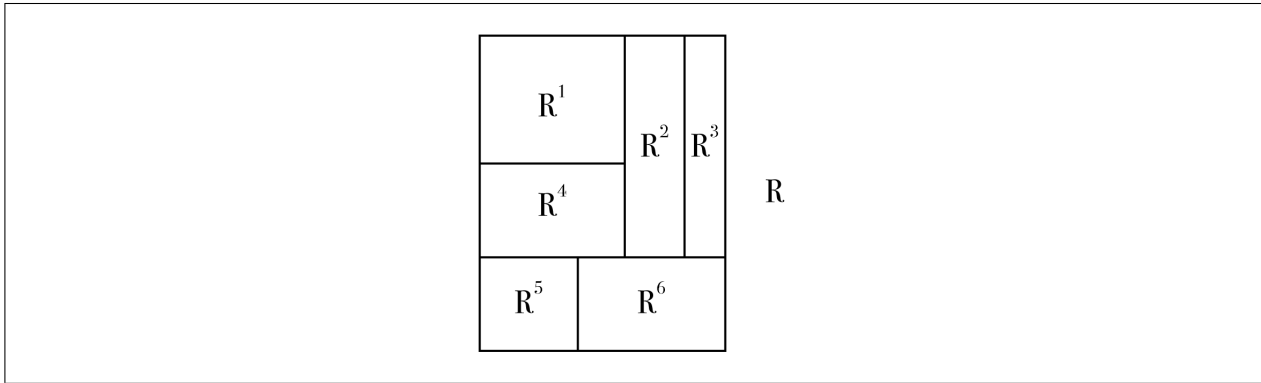


Figura 2.11: El rectángulo  $R$  es la unión de 6 rectángulos,  $R^1 \dots R^6$ , que no se solapan

(Las operaciones y relaciones con funciones se entienden “punto a punto” siempre que no se diga otra cosa, es decir, la función  $f + g$  está definida por  $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$  para todo punto  $(x, y) \in R$ , etc.)

DEMOSTRACIÓN: Haremos sólo la demostración de la primera propiedad, puede consultarse el resto de la demostración en el apartado 2.7.3.

Aplicamos directamente la definición 2.4, para lo que formamos las sumas de Riemann de  $f + g$ ,

$$\begin{aligned} S_n(f + g) &= \sum_{i=1}^n [f(\xi_{ij}) + g(\xi_{ij})] \Delta x_i \Delta y_j = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i=1}^n g(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \rightarrow \iint f + \iint g, \end{aligned}$$

donde la última convergencia se sigue de la integrabilidad de  $f$  y de  $g$ , independientemente de cuáles sean los puntos  $\xi_{ij}$ .

<sup>48</sup>Si  $B$  es un subconjunto de  $A$ , la **función característica** de  $B$  en  $A$  es la aplicación  $\chi_{B,A} : A \rightarrow \{0, 1\}$  que hace corresponder 1 a los puntos de  $B$  y 0 a los puntos de  $A$  que no están en  $B$ .

**40.** Conviene tener cierto cuidado con el enunciado de estas propiedades elementales. Así, la suma de dos integrables es integrable, pero que la suma de dos funciones sea integrable no implica que los sumandos sean integrables <sup>(49)</sup>. Esto se debe a que con los límites en general ocurre lo mismo, y la integral es en última instancia un límite.

Resulta peligroso manejar un límite del que no se ha probado su existencia, podrían obtenerse conclusiones absurdas porque en cuanto se opera con un límite se le está dando existencia, aunque sea de modo implícito.

#### 2.2.4. Integrales reiteradas

Volvamos al principio de este capítulo 2 y tomemos de nuevo una función del tipo  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  que sea positiva y acotada. Otra forma de aproximarse al volumen de la región  $\Omega(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  es la siguiente.

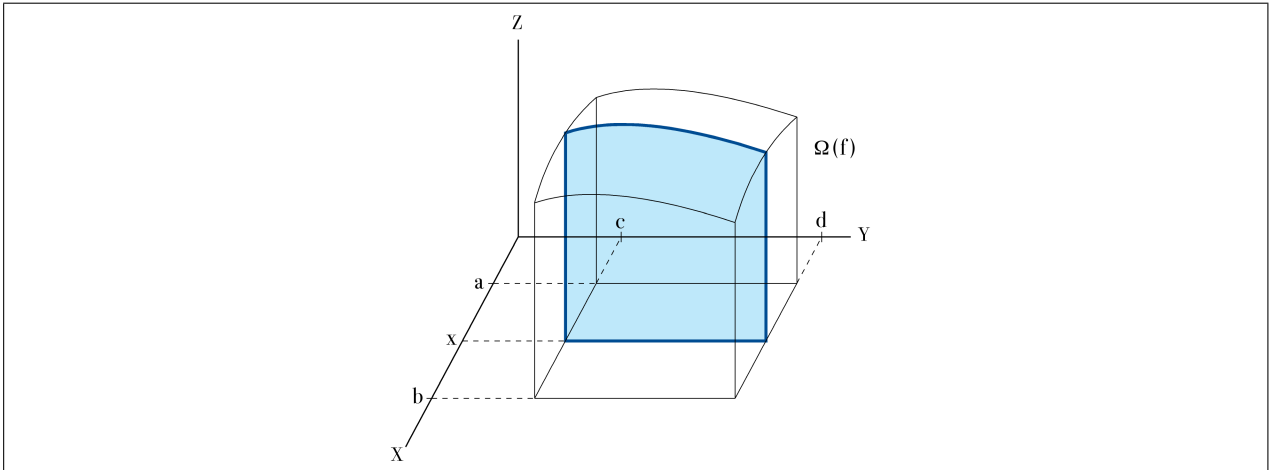


Figura 2.12: El área de la sección azul es la integral  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Si hacemos que  $x$  recorra todo el intervalo  $[a, b]$ , la sección azul recorrerá todo el conjunto  $\Omega(f)$

Fijado un  $x \in [a, b]$ , calculamos el área de la sección plana formada por los puntos de  $\Omega(f)$  cuya primera coordenada es exactamente  $x$ , es decir,  $\int_c^d f(x, y) dy$ . Ahora hacemos un barrido del volumen  $\Omega(f)$  variando  $x$  entre  $a$  y  $b$  y tratando de sumar las áreas de las secciones planas. En otras palabras, calculamos la integral  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ . De acuerdo con la percepción intuitiva que tenemos de las integrales de una variable, el resultado debería corresponder al volumen de  $\Omega(f)$ .

**41.** Obsérvese que estamos tratando el cálculo de este volumen como si el área de la sección plana en el punto  $x$  fuera una densidad en el punto  $x$  y calculásemos la masa del segmento  $[a, b]$ .

Si el planteamiento resulta ser correcto, tendrá la ventaja de que nos permitirá transformar el cómputo de una integral doble en el de dos integrales consecutivas de una sola

<sup>49</sup>Tómese una función  $f$  que no sea integrable, entonces  $-f$  tampoco lo es y en cambio  $f + (-f)$  sí que lo es.

variable. Y para calcular integrales de una variable disponemos de la regla de Barrow, por lo que nos proporcionará una forma de evitar la aproximación mediante sumas de Riemann, que suele ser engorrosa.

**Teorema 2.12 (de Fubini)** *Sea  $f$  una función integrable sobre  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Si la integral  $\int_c^d f(x, y) dy$  existe para cada  $x$  de  $[a, b]$ , entonces la **integral reiterada**  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$  también existe, y además*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_R f(x, y) dA.$$

*Es igualmente válido un enunciado análogo cambiando el orden de integración y los papeles de las variables  $x$  e  $y$ .*

DEMOSTRACIÓN: Puede consultarse una demostración en [2], teorema 7.3.11.

JUSTIFICACIÓN: Tomamos cualquier partición infinitesimal sobre  $R$  y elegimos  $\xi_{ij} = (x_i, y_j)$ , es decir, evaluamos la función en los vértices “de abajo a la izquierda”. Consideramos ahora las sumas hiperfinitas

$$\sum_{i,j=1}^H f(x_i, y_j) dx_i dy_j = \sum_{i=1}^H \left( \sum_{j=1}^H f(x_i, y_j) dy_j \right) dx_i.$$

Siempre que  $f$  sea integrable sobre  $R$ , la primera suma estará infinitamente próxima a la integral doble. Y como  $\sum_{j=1}^H f(x, y_j) dy_j \approx \int_c^d f(x, y) dy$  para cualquier  $x \in [a, b]$ , resulta razonable esperar que la suma de la derecha esté infinitamente próxima a la integral reiterada.

**Corolario 2.13 (Teorema de Fubini para funciones continuas)** *Sea  $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Entonces*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dA.$$

DEMOSTRACIÓN: Al ser  $f$  continua se cumplen todas las hipótesis del teorema de Fubini.

En una integral reiterada resulta crucial saber respecto de qué variable estamos integrando en cada momento. Cuando el integrando sea largo y complicado, la notación usada en el corolario puede resultar poco clara y requerir paréntesis, como pusimos en el enunciado del teorema de Fubini. En estos casos también se recurre a un abuso de notación para evitar paréntesis sin perder claridad, que es poner  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$  en lugar de  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$  o  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ .

**Ejemplo 2.14** Evaluar  $\iint_{[0,2] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} (x^2 \cos y - xy) dx dy$ .

Como la función es continua podemos integrar reiteradamente,

$$\int_0^2 dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cos y - xy) dy = \int_0^2 \left[ x^2 \sin y + \frac{x}{2} y^2 \right]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{16}{3}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 2.15** (Problema 7.25 de [1] y problema 5.2.9 de [11].) Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

La integral reiterada  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$  existe, pero  $f$  no es integrable. En efecto:

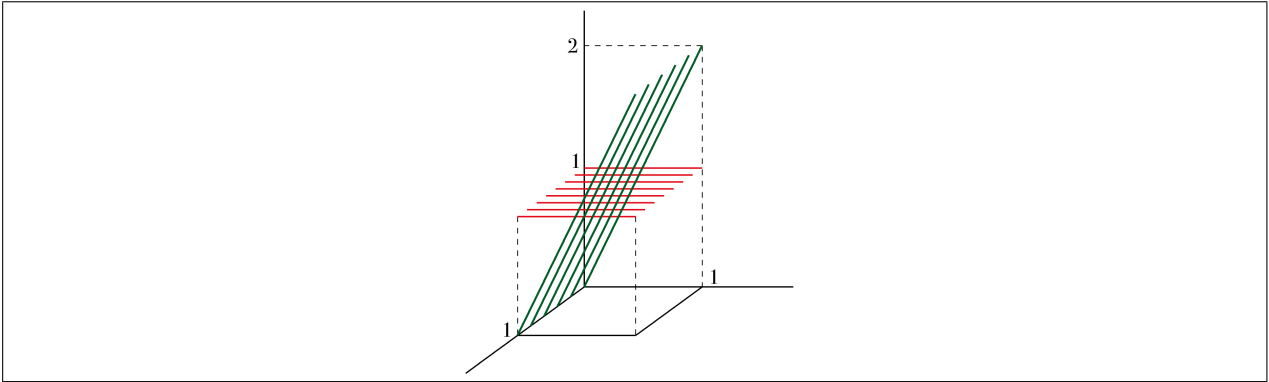


Figura 2.13: Gráfica de la función del ejemplo 2.15, formada por la unión de los segmentos rojos (que corresponden a los valores racionales de  $x$ ) con los verdes (para cada  $x$  irracional)

1. Para todo  $x \in [0, 1]$  existe  $\int_0^1 f(x, y) dy$ . Para probarlo distinguimos entre  $x$  racional y  $x$  irracional.
  - $x \in \mathbb{Q}$ . Entonces  $f(x, y)$  es constantemente igual a 1, luego es integrable y  $\int_0^1 f(x, y) dy = 1$ ;

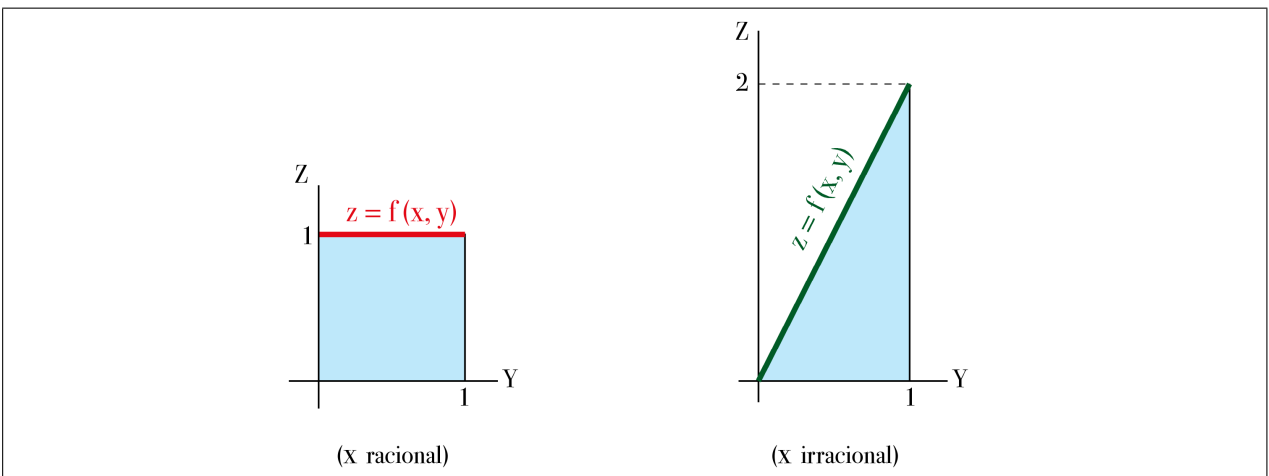


Figura 2.14: El área de la región azul es, en cada caso, el valor de la integral  $\int_c^d f(x, y) dy$

- $x \notin \mathbb{Q}$ . Entonces  $f(x, y) = 2y$  es continua, luego es integrable y  $\int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 2y dy = 1$ ;

luego  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\int_0^1 f(x, y) dy$  existe y es constantemente igual a 1.

2. *Existe la integral reiterada*  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ . Se sigue inmediatamente del hecho de que la función a integrar en  $x$  es constante. Y la integral reiterada vale  $\int_0^1 dx = 1$ .
3. En cambio, *la integral doble no existe*. Se demuestra argumentando de la misma forma que en el ejemplo 2.7. ■

**42.** El ejemplo anterior muestra que en el teorema de Fubini no se puede suprimir la hipótesis de que la integral doble exista: puede existir una de las dos integrales reiteradas sin que exista la doble <sup>(50)</sup>.

---

<sup>50</sup>Incluso pueden existir y ser iguales las dos reiteradas sin que exista la doble. Para un ejemplo, consultar el ejercicio 14.7 de [1]. También es posible que exista la integral doble pero la primera de las integrales reiteradas no exista para un conjunto denso de valores de la variable: ver [15], observación 4 al Teorema 3-10.



## 2.3. Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados

### 2.3.1. Introducción

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la integral, no nos podemos limitar a considerar únicamente funciones de dos variables definidas sobre rectángulos. Cuando tratamos con una sola variable, para integrar sobre un conjunto que no sea un intervalo lo que hacemos es descomponerlo en la unión de un número finito de intervalos que no se solapen, calcula-

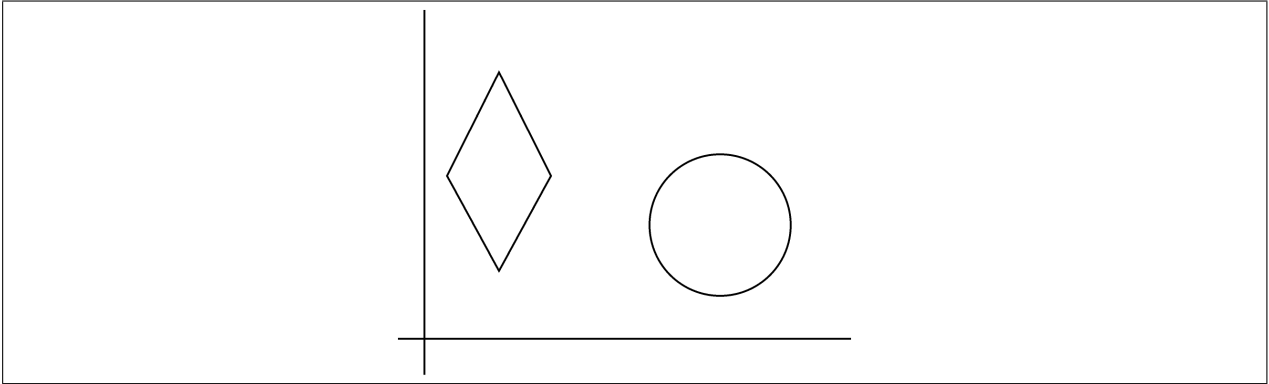


Figura 2.15: Un círculo o un rombo no pueden descomponerse en la unión de un número finito de rectángulos

mos la integral en cada intervalo y sumamos, con lo que se resuelven la inmensa mayoría de los casos. Pero en cuanto ya tenemos dos variables, hay conjuntos muy sencillos, como por ejemplo un círculo, que no se pueden descomponer en unión de un número finito de rectángulos.

En este apartado extenderemos la definición de integrable a funciones acotadas sobre conjuntos acotados que no necesariamente sean rectángulos (<sup>51</sup>). Por los motivos expuestos en el apartado 2.1, nos limitaremos enseguida a un tipo especial de dominios.

Un ejemplo nos dará las pistas de cómo reducir una integral sobre un conjunto que no sea un rectángulo a una integral sobre otro conjunto que sí lo sea:

**Ejemplo 2.16** (Ejemplo 5.3.2 de [11].) Para hallar el volumen del tetraedro acotado por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y - x + z = 1$ , enlazamos la cara inclinada del tetraedro con el triángulo plano en  $z = 0$  con vértices en  $(-1, 0)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(0, 1)$  (ver figura). Ahora calculamos la integral sobre  $[-1, 0] \times [0, 1]$  de la función cuya gráfica es la unión de esos dos triángulos y aplicamos Fubini, dado que la función es continua:

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{x+1} (x - y + 1) dy + \int_{x+1}^1 0 \cdot dy \right) dx = \frac{1}{6}. \quad \blacksquare$$

**43.** La definición que damos a continuación puede parecer una especie de idea feliz, pero si apelamos al ejemplo anterior y a lo que expusimos al comienzo del apartado 2.1 como guía intuitiva para la definición de la integral de una función que solamente tome valores positivos, no resultará extraña.

<sup>51</sup> Siguiendo una idea debida a Dirichlet, ver [8], página 334.

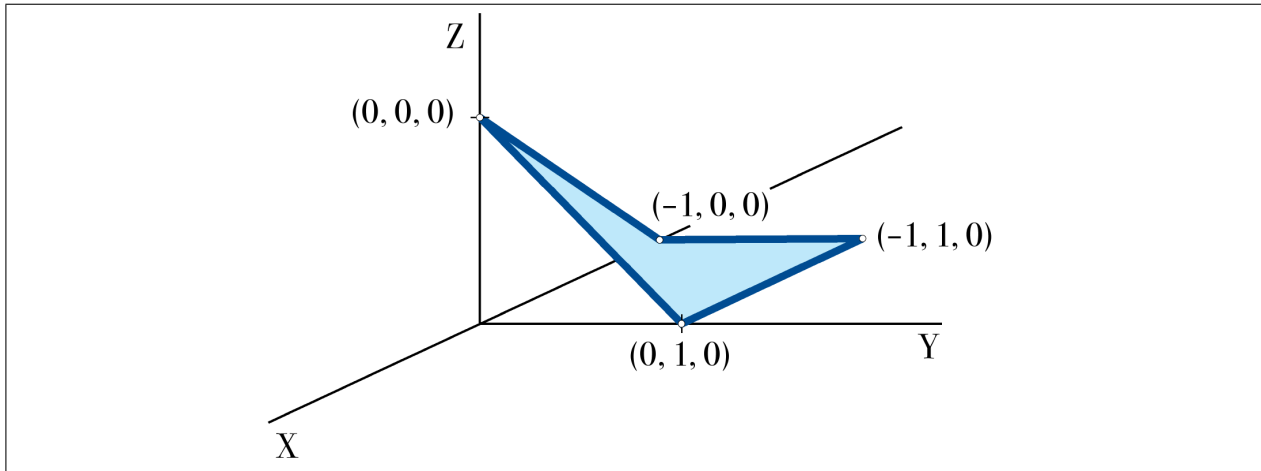


Figura 2.16: La cara inclinada del tetraedro junto con el triángulo en el plano  $XY$

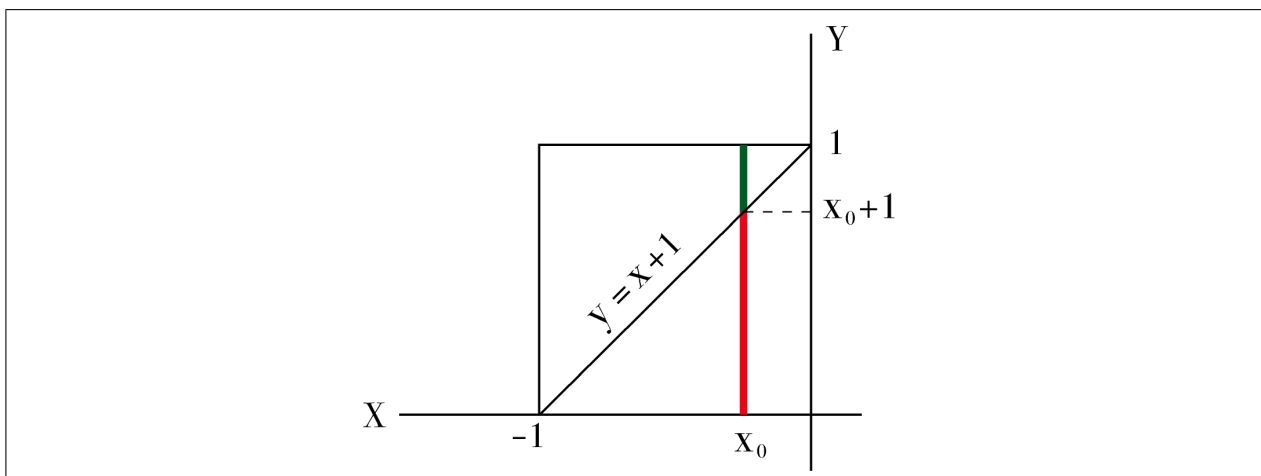


Figura 2.17: Una vez fijado  $x_0$ , integramos sobre el segmento  $\{x_0\} \times [0, 1]$ . Sobre el tramo rojo, la función a integrar vale  $x_0 + y + 1$ , y sobre el tramo verde la función a integrar vale 0

**Definición 2.17** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y definida sobre un conjunto acotado  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Tomamos un rectángulo  $R$  que contenga a  $D$  y prolongamos  $f$  a una función  $f^*$  sobre todo  $R$  dando el valor 0 a todos los nuevos puntos. Entonces  $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$  es la función

$$f^*(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}) & \text{si } \mathbf{p} \in D. \\ 0 & \text{si } \mathbf{p} \in R \setminus D \end{cases}$$

Diremos que  $f$  es **integrable (sobre  $D$ )** cuando lo sea  $f^*$ ; y en este caso llamaremos **integral de  $f$  (sobre  $D$ )** a la integral de  $f^*$ ,  $\iint_D f = \iint_R f^*$ .

**44.** Ponemos paréntesis en la definición anterior para indicar que contienen una información prescindible por redundante.

Estrictamente hablando, no hace falta decir “sobre  $D$ ” puesto que el dominio  $D$  es un dato que está incluido entre los de la función  $f$ . Lo que ocurre es que cuando se integra una función sobre una parte  $E$  de su dominio de definición, no sobre el total  $D$ , es más corriente decir

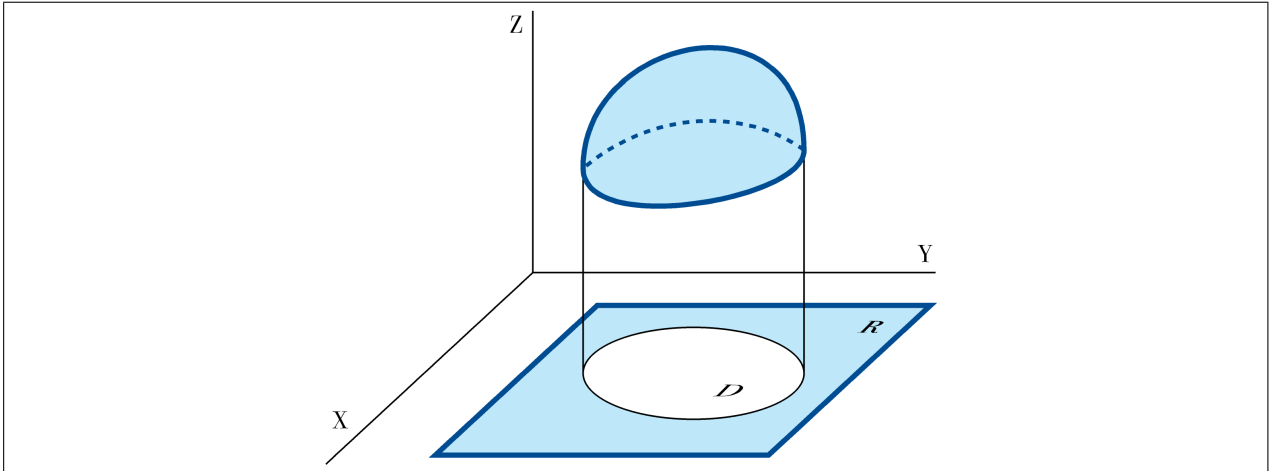


Figura 2.18: La gráfica de  $f^*$  es todo el conjunto azul

“integral de  $f$  sobre  $E$ ” que “integral de la restricción de  $f$  a  $E$ ”. Esto constituye un abuso de notación pero como resulta útil y no suele dar lugar a confusión, no hay inconveniente en usarlo.

### 2.3.2. Regiones bidimensionales simples

Volviendo al ejemplo 2.16, que usado para motivar la definición, pensamos en si también se puede generalizar el procedimiento seguido allí para realizar los cálculos, lo que nos da pie a introducir una clase muy especial de conjuntos acotados que aparecerá de manera natural en los problemas y en las aplicaciones y que llamaremos regiones simples, que vienen al ser aquellos conjuntos bidimensionales cuyos bordes se describen de manera sencilla a través de funciones continuas  $y = \varphi(x)$  o  $x = \psi(y)$ .

#### Definición 2.18 <sup>(52)</sup>

Una **región bidimensional simple en la dirección de las  $y$**  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  limitado por arriba y por abajo por dos gráficas de funciones continuas, es decir, que admite una descripción de este tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde  $a$  y  $b$  son dos números reales,  $a \leq b$ , y  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son dos funciones continuas definidas sobre el intervalo  $[a, b]$ , con  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ .

Una **región bidimensional simple en la dirección de las  $x$**  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  limitado por la izquierda y por la derecha por dos gráficas de funciones continuas, es decir, que admite una descripción de este tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde  $c$  y  $d$  son dos números reales,  $c \leq d$ , y  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son dos funciones continuas definidas sobre el intervalo  $[c, d]$ , con  $\psi_1 \leq \psi_2$ .

En algunos libros a las regiones simples, en lugar de denominarlas *en la dirección de las  $x$*  o *en la dirección de las  $y$* , se les llama *de tipo 1* o *de tipo 2*, u otras expresiones similares

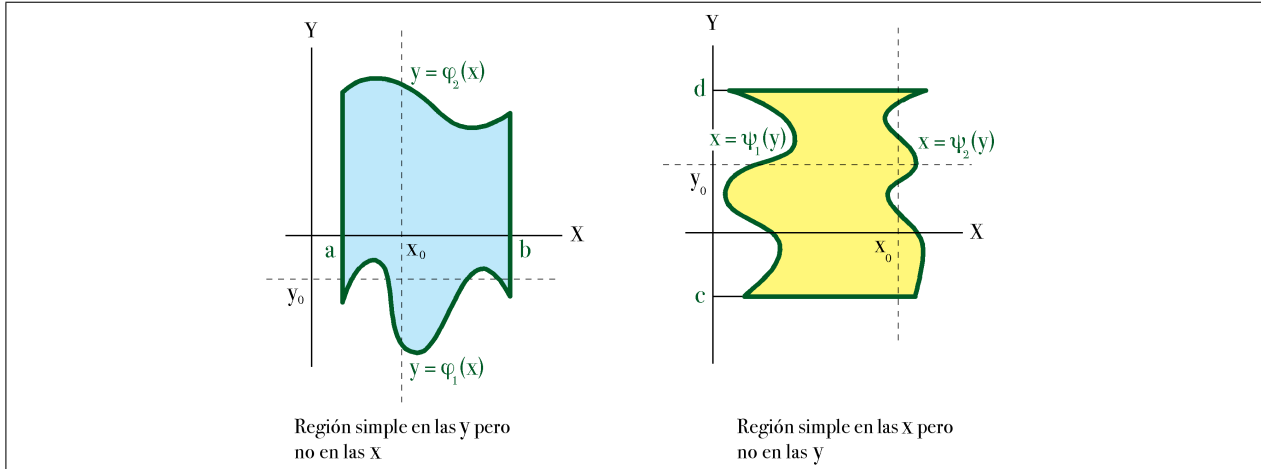


Figura 2.19: Ejemplos de regiones simples

(ver, por ejemplo, [11]).

**45.** Una buena guía intuitiva para reconocer una región simple en la dirección de las  $y$  consiste en pensar que lanzamos cualquier línea imaginaria paralela al eje  $Y$ ,  $x = x_0$ , la recorremos de abajo a arriba y observar si “entramos y salimos” varias veces del conjunto. Si esto ocurre para algún  $x_0$ , entonces el conjunto no es simple en la dirección de las  $y$ .

**Definición 2.19** Tomemos una región simple en la dirección de las  $y$ ,  $D$ . Se llama **interior de  $D$** ,  $\text{Int } D$ , a la parte de  $D$  definida mediante las desigualdades estrictas, es decir (utilizando las notaciones de la definición 2.18),

$$\text{Int } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

Se llama **borde de  $D$** ,  $\partial D$ , al resto del conjunto  $D$ :

$$\partial D = D \setminus \text{Int } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \vee x = b \vee y = \varphi_1(x) \vee y = \varphi_2(x)\}.$$

Análogas definiciones de borde y de interior pueden darse para el caso de que  $D$  sea una región simple en la dirección de las  $x$  (<sup>53</sup>).

De nuevo siguiendo el esquema aplicado en el ejemplo 2.16, supongamos que tenemos que calcular la integral de una función continua  $f$  definida sobre un conjunto  $D$  que es una región simple en la dirección de las  $y$  (en el ejemplo la función era  $f(x, y) = x - y + 1$  y la región era la base del tetraedro). Para ello, utilizando las notaciones de la definición de región simple, encerramos  $D$  en el rectángulo  $R = [a, b] \times [a', b']$ , donde  $a'$  es menor o igual que el mínimo de  $\varphi_1$  y  $b'$  es mayor o igual que el máximo de  $\varphi_2$  (ambos se alcanzan), y aplicamos el teorema de Fubini:

<sup>52</sup>De momento, ésta será nuestra definición. Sin embargo, ver la observación 61.

<sup>53</sup>Los conceptos topológicos de frontera (que aquí equivale al borde) y de interior pueden definirse sobre un subconjunto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  (para cualquier  $n$ ), no solamente sobre conjuntos simples bidimensionales. Ver el apartado 2.7.7.

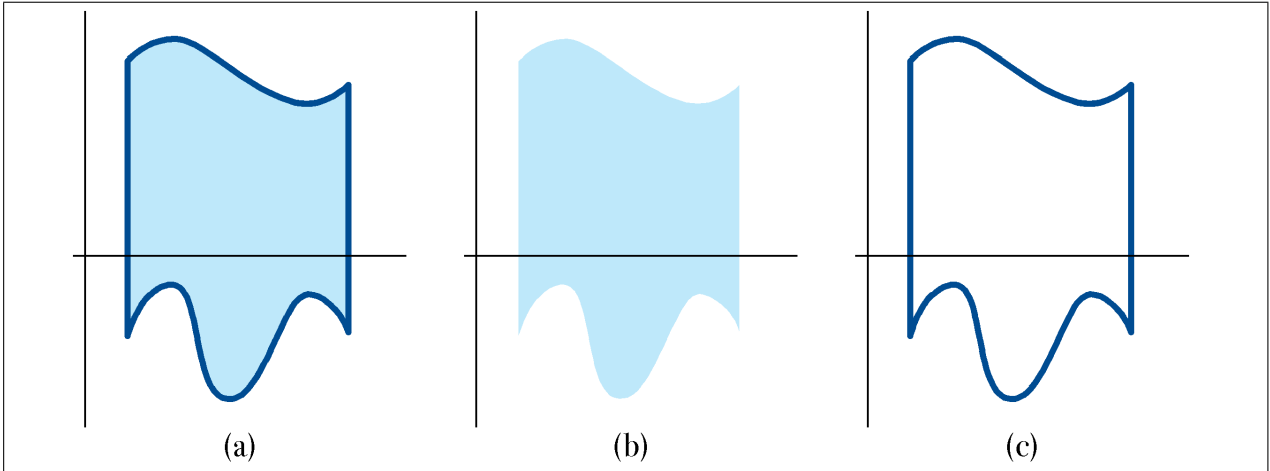


Figura 2.20: (a) Región simple  $D$ . (b)  $\text{Int } D$ . (c)  $\partial D$

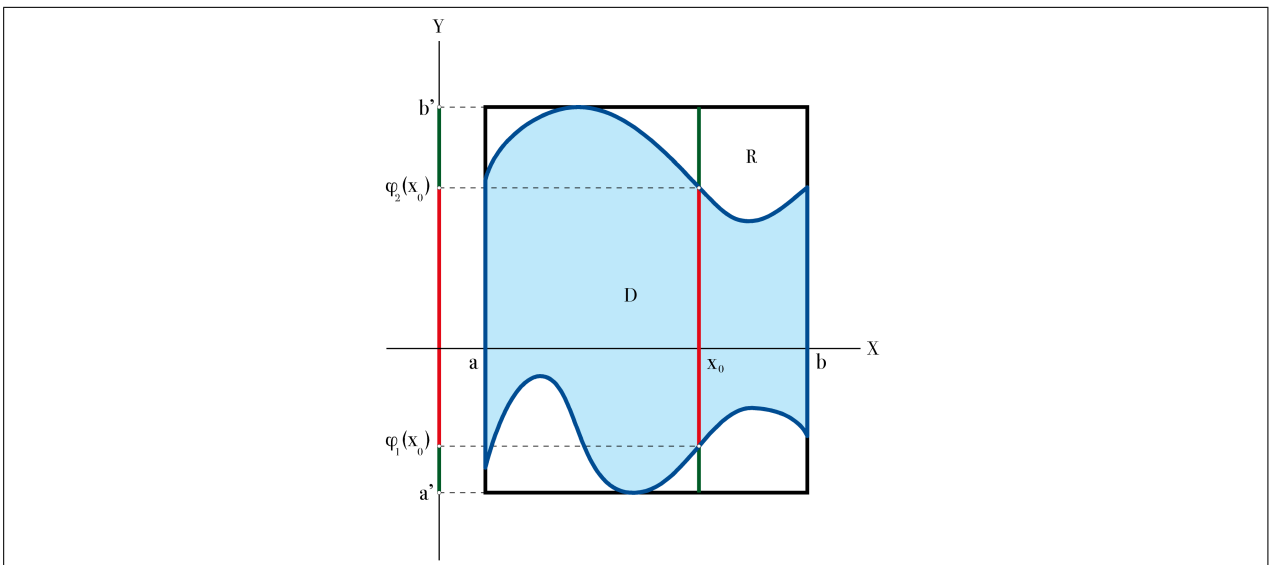


Figura 2.21: Sobre los tramos verdes la función  $f^*$  es nula y sobre los tramos rojos la función  $f^*$  y  $f$  coinciden

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \iint_R f^*(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{a'}^{b'} f^*(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left( \int_{a'}^{\varphi_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^{b'} f^*(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \left( \int_{a'}^{\varphi_1(x)} 0 dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^{b'} 0 dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Hay que resaltar que el teorema de Fubini es aplicable puesto que se cumplen sus hipótesis:

- Como la función  $f$  era continua en todos los puntos de  $D$ , la función  $f^*$  seguirá siéndolo en los puntos del interior de  $D$ , puesto que cualquier sucesión que tienda a un punto

de  $\text{Int } D$  tiene todos sus puntos (salvo, quizá, un número finito) dentro de  $\text{Int } D$  <sup>(54)</sup>. También es continua en los puntos  $\mathbb{R} \setminus D$ , porque en todos los puntos (salvo, quizá un número finito) de cualquier sucesión que tienda a un punto de  $\mathbb{R} \setminus D$ , la función  $f^*$  es constantemente nula <sup>(55)</sup>. Pero el borde de  $D$  está formado por, a lo más, cuatro partes:

- las gráficas de las funciones continuas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ;
- los dos segmentos (o puntos)  $x = a, \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)$  y  $x = b, \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)$ .

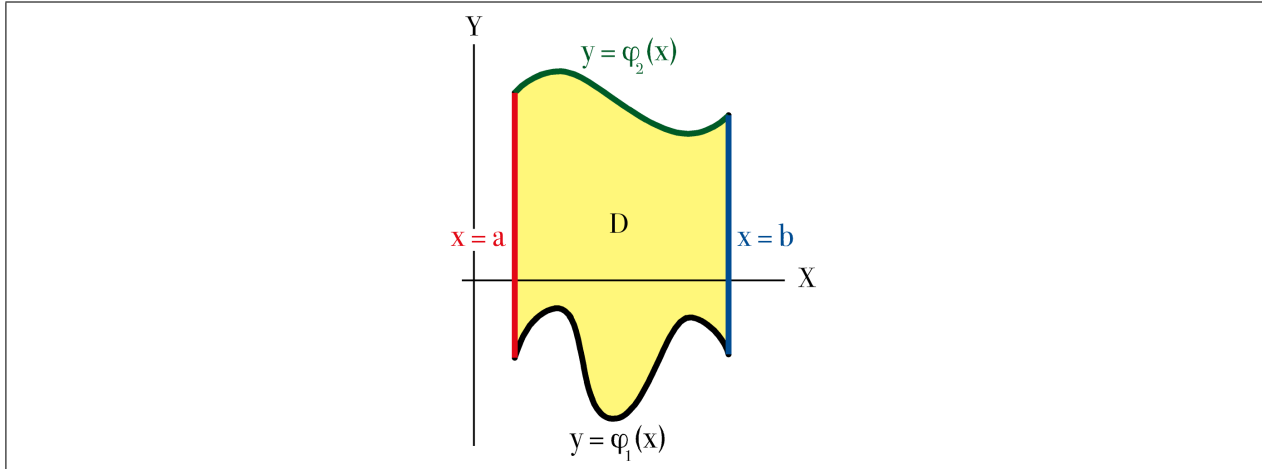


Figura 2.22:  $\partial D$  está formado por las gráficas roja, verde, azul y negra. Para otros  $D$  es posible que la gráfica azul o la roja consten de un solo punto.

Luego en todo caso se cumplirá la condición suficiente del teorema 2.10, y en consecuencia la función  $f^*$  es integrable sobre el rectángulo  $[a, b] \times [a', b']$ .

- Para cada  $x_0$  de  $[a, b]$ , la función  $f(x_0, y)$  (donde la variable es la  $y$ ) es continua en

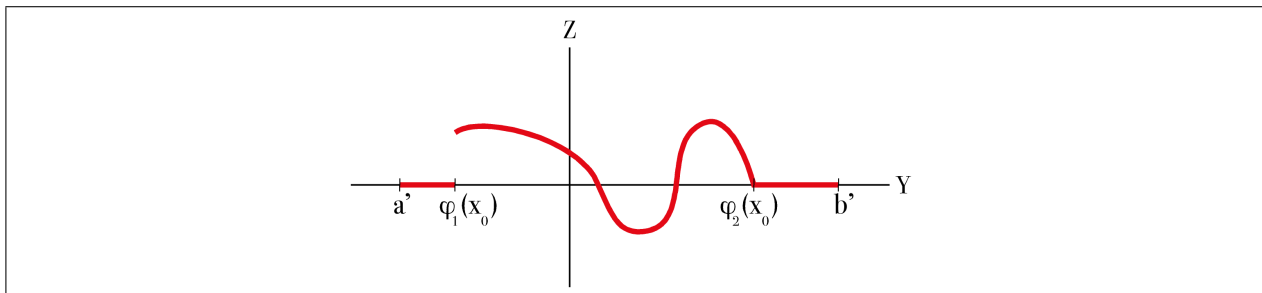


Figura 2.23: En rojo, la gráfica de  $z = f(x_0, y)$  para una cierta  $f$ . En este caso, la función  $y \rightsquigarrow f(x_0, y)$  sería discontinua en  $\varphi_1(x_0)$ , pero continua en  $\varphi_2(x_0)$ . En los demás puntos de  $[a', b']$  siempre es continua, cualquiera que sea la función continua  $f$

todos los puntos de  $[a', b']$  salvo quizá en los puntos  $\varphi_1(x_0)$  y  $\varphi_2(x_0)$ , luego integrable a lo largo de  $[a', b']$ .

<sup>54</sup>Puesto que las desigualdades que definen a  $\text{Int } D$  son estrictas. El argumento se desarrolla en detalle en la demostración del teorema 2.50.

<sup>55</sup>Vale la misma observación que en el caso de  $\text{Int } D$ , porque también las desigualdades que definen a  $\mathbb{R} \setminus D$  como subconjunto de  $\mathbb{R}$  son estrictas.

Hemos demostrado por tanto el siguiente resultado.

**Teorema 2.20** *Sea  $f$  una función continua sobre  $D$ , donde  $D$  es una región bidimensional simple en la dirección de las  $y$ . Entonces  $f$  es integrable sobre  $D$  y*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: *Está contenida en las observaciones anteriores al enunciado.*

De manera completamente análoga se demostraría un resultado similar para las regiones simples en la dirección de las  $x$  (notaciones como en la definición 2.18):

**Teorema 2.21** *Sea  $f$  una función continua sobre  $D$ , donde  $D$  una región bidimensional simple en la dirección de las  $x$ . Entonces  $f$  es integrable sobre  $D$  y*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

¿Y qué ocurre si la función de partida  $f$  no es continua pero es acotada y cumple la condición suficiente del teorema 2.10? Entonces las fórmulas anteriores también valen, pero resulta imprescindible ampliar previamente el concepto de integral sobre un intervalo para admitir funciones que no estén definidas sobre todo el intervalo, de modo que la integral reiterada del teorema 2.20 tenga sentido aunque la integral en la variable  $y$  no exista para algunos valores (quizá infinitos, pero formando en total un conjunto “nulo”, como en [2], teorema 7.4.28; ver también [1], al final del capítulo 14) de la variable  $x$ . No vale la pena estudiarlo más en detalle, en estos caso es mejor utilizar la integral de Lebesgue o la de Kurzweil-Henstock.

**46.** Una consecuencia obvia de los anteriores teoremas es que si el recinto de integración es una región simple en ambas direcciones, entonces se puede cambiar el orden de integración de una función continua.

Puede ocurrir que en un cierto orden la integral sea muy difícil, o incluso imposible de resolver en términos de funciones elementales, mientras que en el otro sea asequible o, al menos, factible.

**Ejemplo 2.22** La función  $e^{-x^2}$  no tiene primitiva en términos de funciones elementales<sup>(56)</sup>, por lo que la integral reiterada  $\int_0^{2\sqrt{\log 2}} dy \int_{y/2}^{\sqrt{\log 2}} e^{-x^2} dx$  no puede calcularse directamente (usando sólo funciones elementales).

Sin embargo, al cambiar el orden de integración es posible resolverla por métodos elementales:

La integral aparece planteada sobre una región simple en las  $x$  descrita mediante (notacio-

<sup>56</sup>Demostrar que  $e^{-x^2}$  no tiene primitiva elemental es bastante complicado. Para empezar, requiere previamente una formulación precisa de qué entendemos por funciones elementales, lo que no resulta ser ni fácil ni elemental (ver la observación 39 sobre el significado del adjetivo *elemental*). En internet se encuentran referencias varias sobre este resultado, obtenido por vez primera por Liouville en 1835.

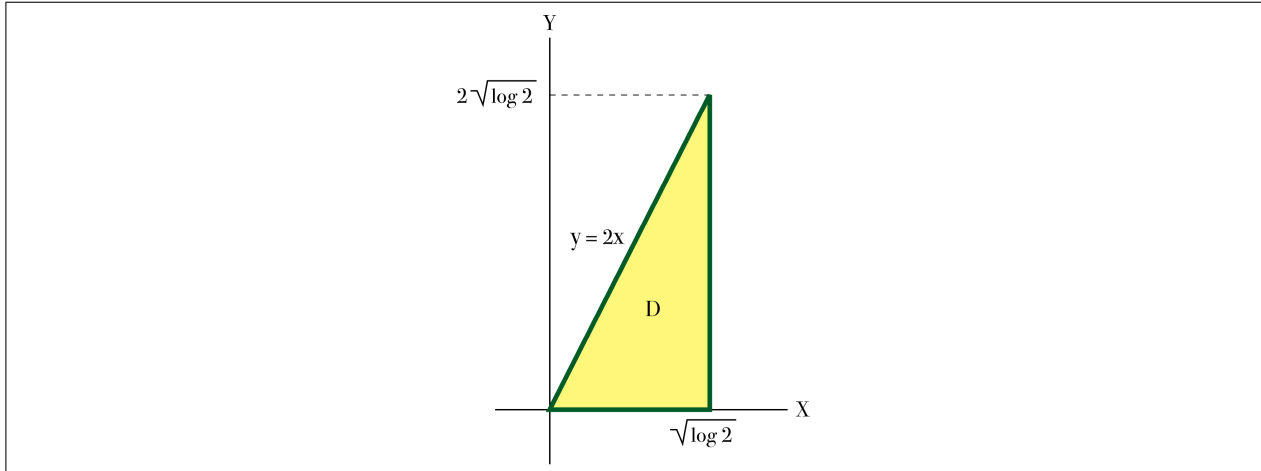


Figura 2.24: Dominio del enunciado

nes como en la definición 2.18)  $c = 0 \leq y \leq 2\sqrt{\log 2} = d$ ,  $\psi_1(y) = y/2 \leq x \leq \sqrt{\log 2} = \psi_2(y)$ . El dominio de integración es por tanto el triángulo rectángulo limitado por las rectas  $y = 0$ ,  $x = \sqrt{\log 2}$ ,  $y = 2x$ , que también puede ponerse como región simple en las  $y$  a través de las desigualdades (notaciones de la definición 2.18)  $a = 0 \leq x \leq \sqrt{\log 2} = b$ ,  $\varphi_1(x) = 0 \leq y \leq 2x = \varphi_2(x)$ . Por tanto la integral pedida es igual a

$$\int_0^{\sqrt{\log 2}} dx \int_0^{2x} e^{-x^2} dy = \int_0^{\sqrt{\log 2}} e^{-x^2} \left[ y \right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^{\sqrt{\log 2}} 2xe^{-x^2} dx = \left[ -e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\log 2}} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

**47.** Que una integral no pueda resolverse utilizando solamente funciones elementales no quiere decir que no pueda resolverse. Algunas funciones no elementales son de uso frecuente y sus propiedades y sus valores son tan conocidos como los de las funciones elementales. Así, por ejemplo, Maple resuelve la integral reiterada en el orden planteado en el enunciado, usando la función (no elemental) definida por  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

El ejemplo 5.4.2 de [11] muestra una integral reiterada que es bastante más sencilla hacerla en un orden que en el otro.

Cuando introdujimos las integrales de una variable dijimos que nuestra intención era definir y calcular áreas y volúmenes bajo una gráfica, o sea, de conjuntos del tipo  $\Omega(f)$ . Hasta ahora no hemos dado ninguna definición formal de área. En este momento estamos en condiciones de definir el concepto de área para una clase de conjuntos mucho más amplia que la de los que están bajo una gráfica.

**Definición 2.23** Llamaremos *área de un subconjunto acotado*  $D \subset \mathbb{R}^2$  a  $A(D) = \iint_D dA$ , cuando exista. Cuando la integral no exista, diremos que  $D$  *no tiene área*.

Comprobemos, en primer lugar, que nuestra definición de área coincide con la que hemos venido utilizando de manera informal para los conjuntos  $\Omega(f)$  cuando  $f$  tiene una sola variable:



**Teorema 2.24** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función positiva, acotada y con un número finito (en particular, nulo) de discontinuidades, entonces

$$A(\Omega(f)) = \int_a^b f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: No hay más que aplicar el teorema 2.20. En efecto:

$$A(\Omega(f)) = \iint_{\Omega(f)} dA = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b \left[ y \right]_{y=0}^{y=f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Hay otros motivos que legitiman el uso que hacemos de la palabra área en la definición 2.23, más allá del hecho de que sea compatible con el sentido que veníamos dándole a la palabra en las integrales de una variable. Si trazamos por encima de  $D$  la gráfica de la función constante 1, el conjunto tridimensional  $\Omega(1)$  lo vemos como un cilindro de base  $D$

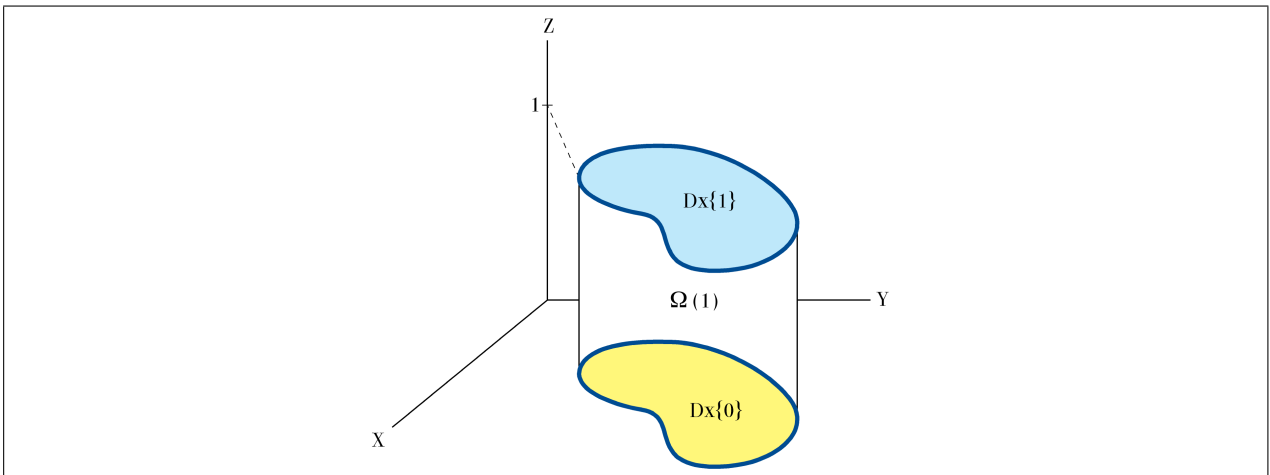


Figura 2.25: El conjunto azul es la gráfica de la función constantemente igual a 1 sobre  $D$ . El conjunto  $\Omega(1)$  es el cilindro comprendido entre los conjuntos amarillo y azul

y altura igual a 1. La fórmula de la geometría elemental “volumen de  $\Omega(f)$  igual a área de la base  $D$  multiplicada por la altura 1” coincide con  $\iint_D dA = A(D)$ . Obsérvese también que aplicando la definición de integral a la última igualdad, probaríamos que, en el caso de regiones simples, el área que acabamos de definir está infinitamente próxima a la suma de las áreas de los infinitos rectángulos infinitesimales que aproximan a  $D$ , tanto tomados por fuera como tomados por dentro. Ver [11], ejemplo 5-10.

**Ejemplo 2.25** Un conjunto sin área. Tómese

$$D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = 0 \text{ siempre que } x \in \mathbb{Q}\}.$$

Se argumenta como en el ejemplo 2.7 para probar que  $\iint_D dA$  no existe. ■

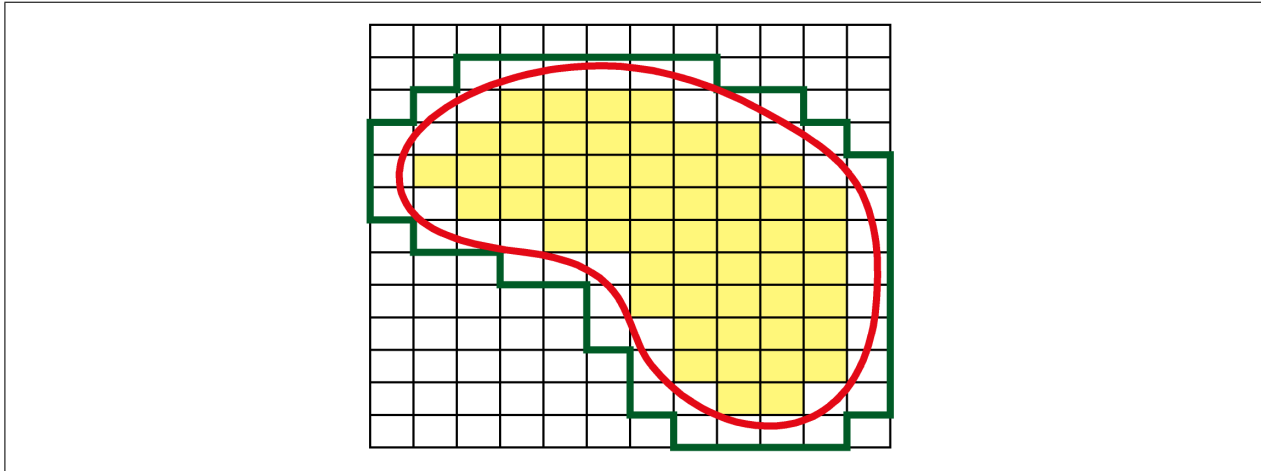


Figura 2.26: Aproximación de  $D$  (que es el conjunto encerrado por el borde rojo) mediante rectángulos contenidos en  $D$  (amarillos) y mediante rectángulos cuya unión contiene a  $D$  (los encerrados por el borde verde)

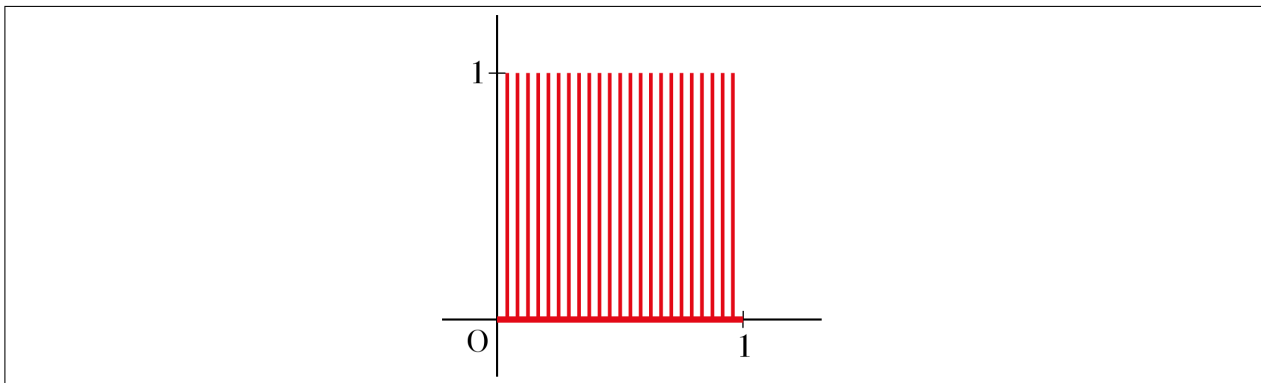


Figura 2.27: Los segmentos rojos que constituyen el conjunto  $D$  corresponden a los valores irracionales de  $x$

### 2.3.3. Otras propiedades

... algunas de las cuales ya las venimos usando.

Obsérvese que tal como está enunciada la definición 2.17, resulta que para definir *la integral de una función sobre un conjunto* se sumerge el conjunto en un cierto rectángulo (de los que tenemos una infinidad para elegir) y se utiliza ese rectángulo para terminar de formular la definición. Así que se ha dejado un elemento al azar que puede dar lugar a una indeterminación del concepto: ¿qué ocurre si al elegir un rectángulo resulta que la función prolongada es integrable y al elegir otro distinto la función prolongada no es integrable?, ¿la función original es integrable o no? Esta imprecisión hay que resolverla, de acuerdo con los comentarios que hicimos a raíz de la introducción de la de suma de caminos, definición 1.9, sobre qué se entiende por una definición correcta.

Distinto sería si la definición 2.17 dijera “para todo rectángulo  $R$  que contenga a  $D$  ocurre...”, o dijera “existe al menos un rectángulo  $R$  que contiene a  $D$  y tal que...”, entonces no se podría presentar esa disyuntiva, siempre sabríamos a qué atenernos, pero tal como está escrita 2.17, nos queda la duda. La duda se despeja en este caso gracias al teorema 2.26, que demuestra que en realidad las posibilidades “existe al menos un rectángulo” y “para

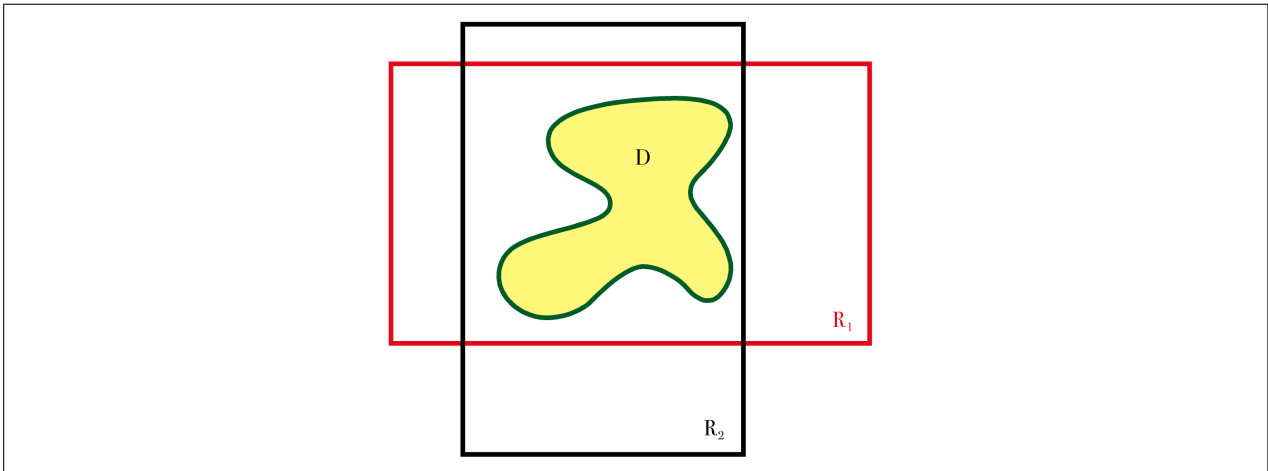


Figura 2.28: Un conjunto  $D$  contenido en dos rectángulos distintos,  $R_1$  y  $R_2$

todo rectángulo” son equivalentes, por lo que no hay imprecisión en la definición 2.17 tal como se ha dado.

Otra forma de evitar el problema habría sido decir, por ejemplo, “tomamos *el menor* rectángulo  $R$  que contenga a  $D$ ...”, con lo cual la definición se referiría a un rectángulo específico y no habría ambigüedad. Pero entonces necesitaríamos demostrar que ese rectángulo concreto existe en todos los casos (cosa que es cierta y no es difícil de demostrar, ver apartado 2.7.4), para evitar la otra fuente de defectos en una definición a la que nos hemos referido antes, la de que se manejen objetos que no siempre existan.

**Teorema 2.26** *Los conceptos de integrable y de integral sobre un conjunto acotado están bien definidos. Es decir, su definición, tal como aparece en 2.17, es independiente del rectángulo al que se prolongue la función.*

**JUSTIFICACIÓN:** *Las diferencias entre rectángulos que encierran el dominio no aportan nada a las sumas de Riemann.*

*Esta idea intuitiva puede transformarse fácilmente en una demostración utilizando la propiedad aditiva de la integral sobre la unión de rectángulos (ver apartado 2.7.5).*

**DEMOSTRACIÓN:** *Para el caso de funciones de dos variables que sean continuas sobre regiones simples podemos dar una demostración completa. En efecto, de las demostraciones de los teoremas 2.20 y 2.21 se sigue que, se tome como se tome el rectángulo que contiene a la región simple, la integral se obtiene en las mismas condiciones y mediante la misma fórmula.*

**Teorema 2.27** *Las propiedades elementales 1 – 4 del teorema 2.11 son válidas también para integrales sobre subconjuntos acotados que no sean rectángulos.*

**DEMOSTRACIÓN:** *Las cuatro propiedades pueden demostrarse de la misma forma, por lo que haremos solamente la primera. Sean  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones acotadas e integrables sobre un conjunto acotado  $D$ . Sumergimos  $D$  en un rectángulo  $R$  y ampliamos con ceros  $f$  y  $g$  a todo  $R$  para obtener las nuevas funciones  $f^*$  y  $g^*$ . La demostración se reduce a comprobar*

que  $(f + g)^* = f^* + g^*$ . Una vez hecha esta comprobación, se aplica la propiedad a  $f^*$  y  $g^*$  para deducir que  $f^* + g^*$  es integrable sobre  $R$  y que

$$\iint_D f + g = \iint_R (f + g)^* = \iint_R f^* + g^* = \iint_R f^* + \iint_R g^* = \iint_D f + \iint_D g.$$

Considérese ahora en  $\mathbb{R}^2$  la corona circular  $D$  de centro el origen y radios 1 y 2, de modo que  $D$  es el conjunto descrito por las desigualdades  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .  $D$  no es una región simple a pesar de estar definido por dos sencillas desigualdades algebraicas. Observamos, no obstante, que  $D$  puede descomponerse en cuatro regiones simples: los cortes de  $D$  con cada uno de los cuatro cuadrantes.

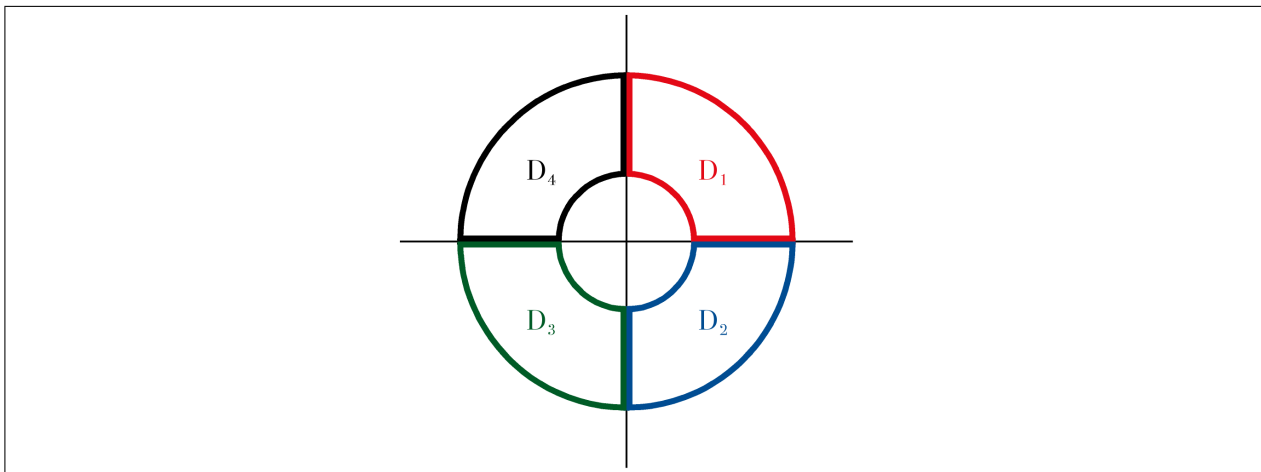


Figura 2.29: La corona  $D$  como unión de cuatro regiones simples que no se solapan

**48.** Calcularemos integrales sobre conjuntos como éste a base de descomponerlos en regiones simples y sumar, de acuerdo con el siguiente resultado:

**Teorema 2.28** Sea  $D$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$  que puede descomponerse en una unión finita de regiones simples,  $D = D^1 \cup \dots \cup D^m$  que **no se solapan**, es decir,  $\text{Int } D^i \cap \text{Int } D^j = \emptyset$  siempre que  $i \neq j$  (<sup>57</sup>). Entonces se cumple una propiedad aditiva similar a la 5 del teorema 2.11: si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada e integrable sobre cada uno de los  $D^i$ , también es integrable sobre  $D$  (y viceversa: si es integrable sobre  $D$ , también es integrable sobre cada  $D^i$ ), y además

$$\iint_D f = \iint_{D^1} f + \dots + \iint_{D^m} f.$$

DEMOSTRACIÓN: Puede consultarse en [1], teorema 14.13. También en [2] ejercicio 7.4.14, puesto que el borde de una región simple es un conjunto nulo.

<sup>57</sup>En el caso de que los conjuntos  $D^i$  sean rectángulos, el concepto de no solapamiento coincide con el que introdujimos en la definición 2.5, de integral de Darboux.

**Teorema 2.29 (del valor medio para integrales)** Si  $D \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$ ) es una región simple  $n$ -dimensional y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces existe algún punto  $\mathbf{c}_0 \in D$  para el que

$$\int_D f = \text{Vol}_n(D) f(\mathbf{c}_0).$$

En este enunciado **región simple 1-dimensional** significa intervalo cerrado y acotado; y  **$\text{Vol}_n(D)$**  significa la longitud o el área de  $D$ , según que  $n$  valga 1 o 2.

JUSTIFICACIÓN: Pensemos en la gráfica de una función positiva de una variable sobre un intervalo  $[a, b]$  (una consideración análoga puede hacerse para funciones de dos variables). Y construyamos un rectángulo de base  $[a, b]$  y altura variable, desde el eje  $X$  hacia arriba. El área del rectángulo comienza valiendo 0 y llega un momento en que vale un número

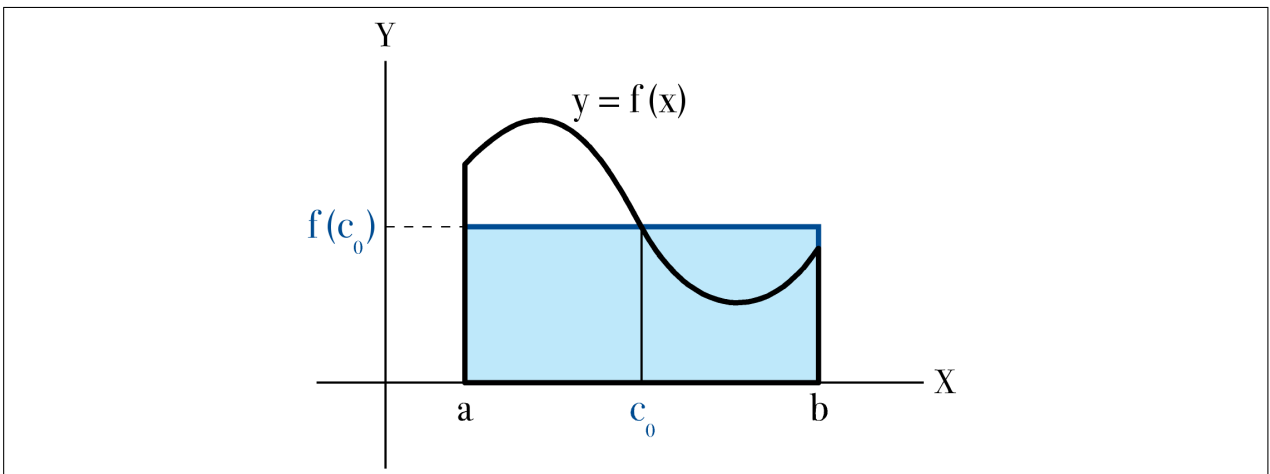


Figura 2.30: El área bajo la gráfica de  $y = f(x)$  coincide con la de algún rectángulo de base  $b - a$  y altura  $f(c_0)$

mayor que  $\int_a^b f(x) dx$ , luego en algún momento vale igual que la integral. Como la función es continua, su gráfica no da saltos y la altura que corresponde al rectángulo de área igual a la integral coincide con el valor de la función en algún punto.

DEMOSTRACIÓN: (SÓLO LA HAREMOS PARA EL CASO  $n = 1$ ). Lo que hay que demostrar es que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(c_0)$$

para algún  $c_0 \in [a, b]$ .

Obsérvese en primer lugar que al ser la función continua, alcanza en algún punto de  $[a, b]$  su valor mínimo  $m$  y en algún punto (distinto del anterior, a menos que  $f$  sea constante) de  $[a, b]$  su valor máximo  $M$ , es decir,

$$m = f(p^m) \leq f(p) \leq f(p^M) = M,$$

para ciertos  $p^m, p^M \in [a, b]$  y todo  $p \in [a, b]$ . Por las propiedades elementales de la integral,

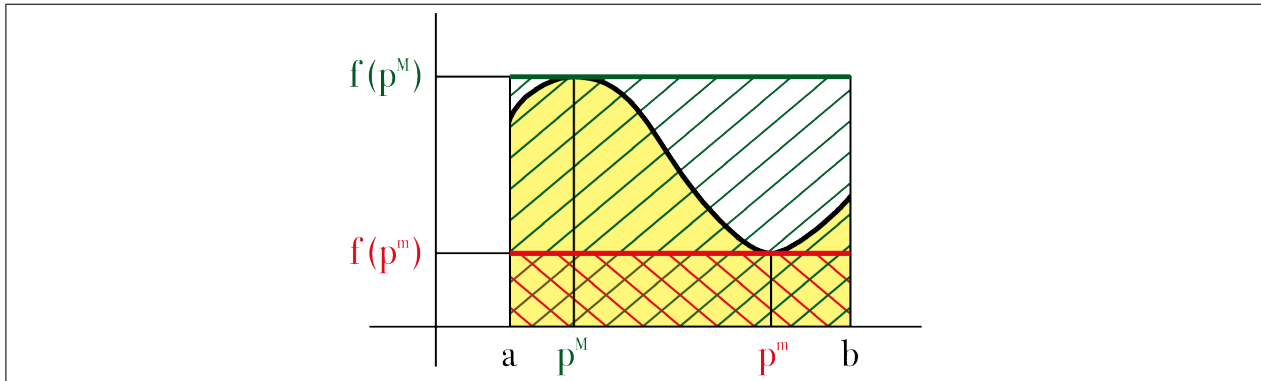


Figura 2.31: El área bajo la gráfica de  $f$  (es decir, la integral de  $f$ ) está comprendida entre las áreas de los rectángulos con tramas verde y roja, respectivamente

si integramos sobre  $[a, b]$  se mantienen las desigualdades, por lo que

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

(suponemos  $b \neq a$ , porque si  $b = a$  entonces lo que hay que demostrar es trivial.)

Por el teorema de Bolzano, la función continua  $f$  ha de tomar todos los valores intermedios entre  $f(p^m)$  y  $f(p^M)$ . En particular, ha de tomar el valor  $\int_a^b f / (b-a)$  en algún  $c_0$  comprendido entre  $p^m$  y  $p^M$ , lo que termina la demostración.

Cuando  $n = 2$ , el razonamiento del último párrafo hay que sustituirlo por otro adaptado a varias dimensiones (ver una demostración en el apartado 2.7.6).

## 2.4. Cambios de variable

A poca experiencia que se tenga en calcular integrales de una sola variable, se sabe que una técnica muy útil consiste en hacer un *cambio de variable*, que transforma, a veces de manera significativa, la función a integrar y el dominio de integración (apartado 1.1.3). Nos proponemos estudiar cómo se transforma una integral doble mediante cambios en sus variables.

La simplificación que eventualmente se consiga sobre una integral concreta no es el único motivo por el que interesa manejar cambios de variable. En las aplicaciones de las integrales no es infrecuente que las funciones que se manejan tengan su expresión natural en sistemas de coordenadas que estén más adaptadas al problema que se trata que las coordenadas cartesianas.

Manejaremos los recintos de integración que sean regiones simples, sin limitarnos ya más a rectángulos, puesto que al aplicar un cambio de variable, lo habitual será que los rectángulos no se transformen en rectángulos. Cuando los dominios de las funciones a integrar no sean regiones simples, apelaremos a la propiedad aditiva del teorema 2.28.

### 2.4.1. Fórmula del cambio de variable

Un **cambio de variable(s)** será para nosotros una aplicación entre dos regiones simples de la misma dimensión,  $D, E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{T} : E \rightarrow D = \mathbf{T}(E)$ , donde, en este capítulo  $n = 2$ . Las variables en  $D$  serán las cartesianas, mientras que el dominio de las nuevas variables será  $E$ , tal como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 \supset E & \xrightarrow{\mathbf{T}} & D = \mathbf{T}(E) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x, y) = \mathbf{T}(u, v) & \mapsto & f(x, y) = f(\mathbf{T}(u, v)) \end{array}$$

Consideremos ahora una función continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Nuestro objetivo en este apartado es convertir la integral de  $f$  sobre  $D$  (en las variables  $x, y$ ) en una integral sobre  $E$  (en las nuevas variables, que cuando no tengamos nombres específicos para ellas llamaremos  $u, v$ ).

Hacer un cambio de variable en la función  $f$  sustituyendo las variables  $x, y$  por las variables  $u, v$  significa dos cosas: la primera es sustituir el dominio  $D$  por el dominio  $E$ , y la segunda hacer una composición de  $f$  con la aplicación  $\mathbf{T}$ . De modo que la función en las nuevas variables es  $f \circ \mathbf{T}$ , que lleva el vector  $(u, v)$  al número  $f(\mathbf{T}(u, v))$ . Pero la integral de  $f$  sobre  $D$  no coincide con la integral de  $f \circ \mathbf{T}$  sobre  $E$ , porque la transformación  $\mathbf{T}$  deforma el plano, variando las áreas. Lo mismo ocurriría en una variable, donde el cambio  $x = h(t)$  obliga a introducir en la integral un multiplicador,  $h'(t)$ , que viene a ser una medida de cuánto estira las longitudes la función  $h$  en las cercanías del punto  $t$ . En varias variables el determinante jacobiano de la transformación juega un papel análogo al que juega la derivada en una variable.

**49.** Jacobi introdujo por primera vez los determinantes precisamente para expresar de manera resumida el coeficiente que aparecía en las fórmulas del cambio de variable en varias dimensiones.

Veremos en primer lugar algunos casos particulares sobre los que podremos dar justificaciones y alguna demostración, para luego pasar al resultado general, cuya demostración omitiremos por completo.

Focalizaremos los casos particulares en cómo se transforman los rectángulos, porque con objeto de comparar las sumas de Riemann de las integrales de una función de dos variables antes y después de aplicar un cambio de variable  $\mathbf{T}$ , nos interesa conocer la relación que hay entre el área de un rectángulo  $R$  y el área de ese mismo rectángulo una vez transformado mediante  $\mathbf{T}$ .

- $\mathbf{T}$  lineal y  $f = 1$ .

Supóngase que  $\mathbf{T}$  es una aplicación lineal  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y que  $f$  es la función constantemente igual a 1. Sabemos que entonces la integral de  $f$  sobre  $T(R)$ ,  $\iint_{T(R)} dx dy$ , coincide con el área de  $\mathbf{T}(R)$ .

Observemos en primer lugar cómo es la imagen de un rectángulo mediante una aplicación lineal. Un **paralelogramo** es un conjunto definido por  $\{\mathbf{P} + s\mathbf{A} + t\mathbf{B} : 0 \leq s, t \leq 1\}$ , donde  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son vectores y  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  son linealmente independientes. Un tipo especial de paralelogramos son los rectángulos  $R = [a, b] \times [c, d]$ , basta tomar  $\mathbf{P} = (a, c)$ ,  $\mathbf{A} = (c - a, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (0, d - b)$ .

Puesto que  $\mathbf{T}$  es lineal, es inmediato comprobar<sup>(58)</sup> que la imagen del paralelogramo determinado por  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es el paralelogramo determinado por  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{A})$  y  $\mathbf{T}(\mathbf{B})$  (siempre que  $\mathbf{T}(\mathbf{A})$  y  $\mathbf{T}(\mathbf{B})$  sean linealmente independientes, claro, porque de lo contrario no se cumpliría nuestra definición de paralelogramo). Por consiguiente hemos demostrado que:

**Teorema 2.30** *Una aplicación lineal inyectiva  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  transforma rectángulos en paralelogramos.*

Ahora podemos obtener el área de la imagen  $\mathbf{T}(R)$  en función del área de  $R$  y de la matriz de la transformación lineal. Siempre que no digamos otra cosa, se entiende que las matrices de aplicaciones lineales se refieren a las bases canónicas.

**Teorema 2.31** *El área de  $\mathbf{T}(R)$  es igual al área de  $R$  multiplicada por el valor absoluto del determinante de la matriz asociada a  $\mathbf{T}$ . Por tanto,*

$$\iint_{\mathbf{T}(R)} dx dy = A(\mathbf{T}(R)) = |\det \mathbf{T}| A(R) \iint_R |\det \mathbf{T}| du dv.$$

**JUSTIFICACIÓN:** *Razonaremos sobre la figura para el caso de que  $b = d = 1$  y tanto  $\mathbf{T}(1, 0)$  como  $\mathbf{T}(0, 1)$  estén sobre el primer cuadrante. El área de  $\mathbf{T}(R)$  es, aplicando la aditividad de las integrales (teorema 2.28), la del rectángulo total menos las de los triángulos y rectángulos que sobran (ver figura):*

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - 2 \frac{1}{2} a_2 b_2 - 2 \frac{1}{2} a_1 b_1 - 2 a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

que coincide con  $|\det \mathbf{T}|$ , puesto que la matriz de  $\mathbf{T}$ , que aquí identificamos con la propia  $\mathbf{T}$ , expresada en las bases canónicas y con los vectores escritos en columna, es

<sup>58</sup>Puesto que  $\mathbf{T}(\mathbf{P} + s\mathbf{A} + t\mathbf{B}) = \mathbf{T}(\mathbf{P}) + s\mathbf{T}(\mathbf{A}) + t\mathbf{T}(\mathbf{B})$ .



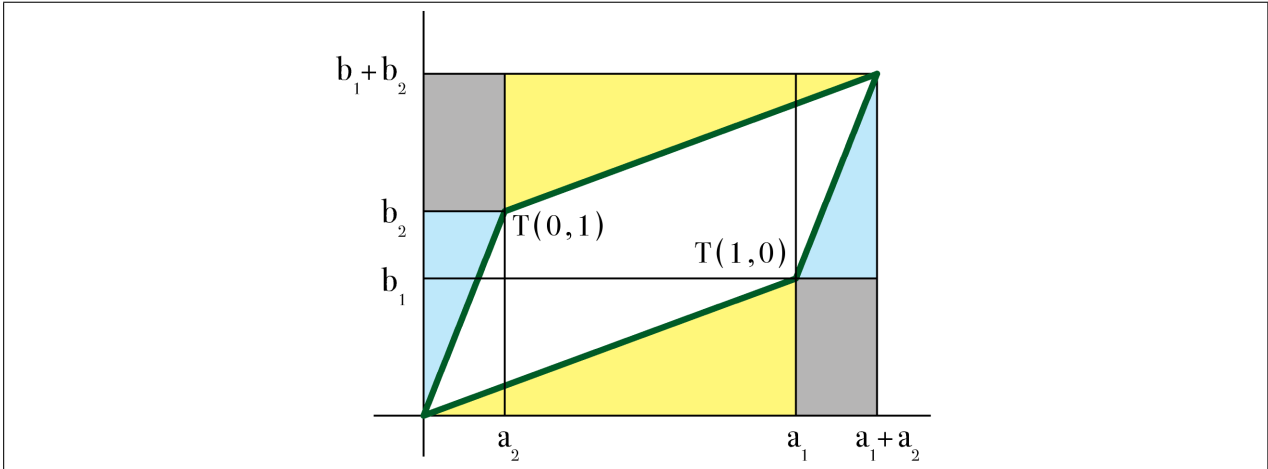


Figura 2.32: Paralelogramo imagen de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Calculamos su área restando el área del rectángulo total menos las áreas de las regiones coloreadas

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ . Este número es positivo, porque, como se ve en la figura, la pendiente  $b_2/a_2$  es mayor que la pendiente  $b_1/a_1$ .

Argumentando sobre una nueva figura en la que los vectores  $\mathbf{T}(1,0)$  y  $\mathbf{T}(0,1)$  también estén en el primer cuadrante pero el primero en una posición más avanzada que el segundo en el sentido de las agujas del reloj (es decir, cuando  $b_1/a_1 > b_2/a_2$ ), se demuestra que en ambos casos  $A(\mathbf{T}(R)) = |a_1b_2 - a_2b_1|$ . Y cuando  $a_1b_2 = a_2b_1$ , se obtiene también  $A(\mathbf{T}(R)) = 0$ . <sup>(59)</sup>

**50** . Interpretamos este resultado diciendo que, cuando el cambio de variable es lineal, las áreas de los rectángulos están sujetas a un “coeficiente de dilatación” que coincide con el valor absoluto del determinante de la aplicación.

- Coordenadas polares y  $f = 1$ .

Nos proponemos ahora buscar un coeficiente de dilatación similar al de antes para el cambio a coordenadas polares, es decir, para

$$(x, y) = \mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Ahora  $\mathbf{T}$  ya no transforma un rectángulo en un paralelogramo, como ocurría en el caso lineal, sino en una diferencia de sectores circulares. En la figura resulta obvio, además, que el coeficiente de dilatación no es el mismo en todos los puntos, va creciendo a medida que nos alejamos del origen.

<sup>59</sup>En caso de que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  fueran vectores tridimensionales, para calcular el área del paralelogramo que determinan podríamos suponer sin pérdida de generalidad que el plano que los contiene es  $z = 0$  y por tanto  $\mathbf{A} = (a_1, b_1, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (a_2, b_2, 0)$ . Entonces  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$ , luego el área del paralelogramo sería igual a  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ , la longitud del producto vectorial de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B}$ .

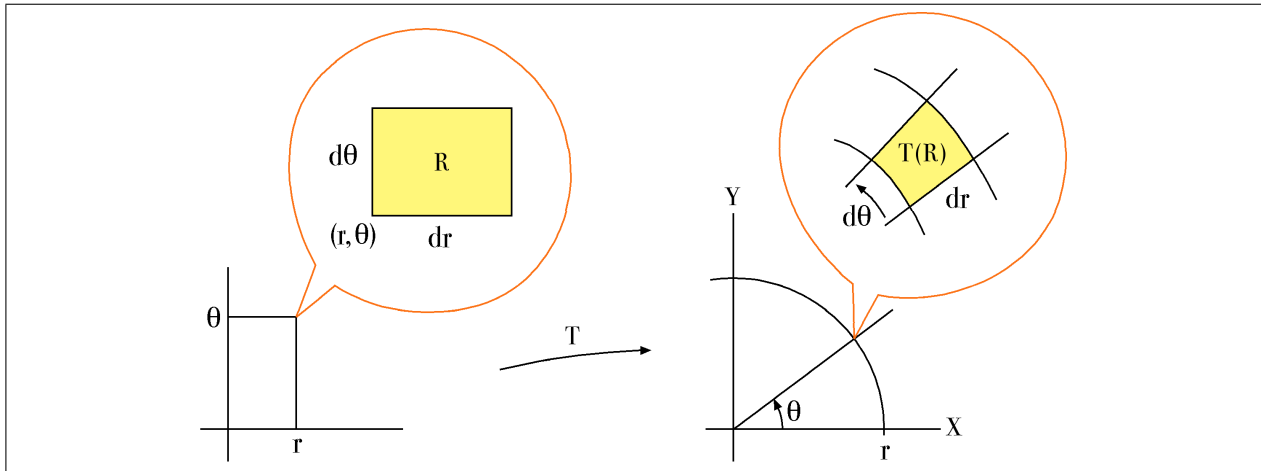


Figura 2.33: Transformación de un rectángulo de lados infinitesimales

**51** . No podremos hacer un cálculo exacto apelando a la geometría elemental, pero sí un cálculo aproximado para el caso que más nos importa, que es cuando el rectángulo original sea infinitesimal.

Cuando los lados del rectángulo  $R$  son infinitesimales, de medidas  $d\theta$  y  $dr$ , la imagen es infinitamente próxima a un rectángulo de lados  $r d\theta$  y  $dr$ , por lo que su área es también infinitamente próxima al producto  $r dr d\theta$ , que coincide con  $rA(R)$ .

Por tanto, una descomposición de  $T(R)$  en las imágenes de una partición infinitesimal de  $R$  da lugar a una aproximación del área de  $T(R)$ ,  $\sum r_i A(R_{ij})$ , que resulta ser una suma de Riemann de la función  $R \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $(r, \theta) \rightsquigarrow r$ , por lo que es a su vez infinitamente próxima, por definición de integral doble, a  $\iint_R r dr d\theta$ .

Puede demostrarse con un razonamiento de este tipo que el área de  $T(R)$  es

$$\iint_{T(R)} dx dy = \iint_R r dr d\theta.$$

**52** . En otras palabras,  $r$  es el coeficiente de dilatación de áreas asociado a la transformación  $T$ .

Se trata de un coeficiente variable, no como en el caso lineal, en el que el coeficiente a aplicar era el mismo en todos los puntos del plano.

**53** . ¿Qué tiene que ver el coeficiente  $r$  con las derivadas de la transformación  $T$ ? La explicación, como se verá en el caso más general que exponemos a continuación, es que  $r$  es el determinante jacobiano <sup>(60)</sup> de  $T$ .

- $\mathbf{T}$  diferenciable.

Generalizando los casos anteriores, intentaremos ahora justificar cuál pueda ser el coeficiente de dilatación de áreas cuando  $\mathbf{T}$  sea una función diferenciable.

**54** . Recordemos que una función es diferenciable cuando a escala infinitesimal puede aproximarse por una aplicación lineal.

La aplicación lineal que aproxima a  $\mathbf{T}$  en los alrededores del punto  $(u, v)$  es la diferencial de  $\mathbf{T}$  en  $(u, v)$ , denotada por  $\mathbf{T}'(u, v)$  o por  $D\mathbf{T}(u, v)$ , cuya matriz asociada es la jacobiana de  $\mathbf{T}$ ,  $J\mathbf{T}$ , formada por sus derivadas parciales de  $\mathbf{T}$ .

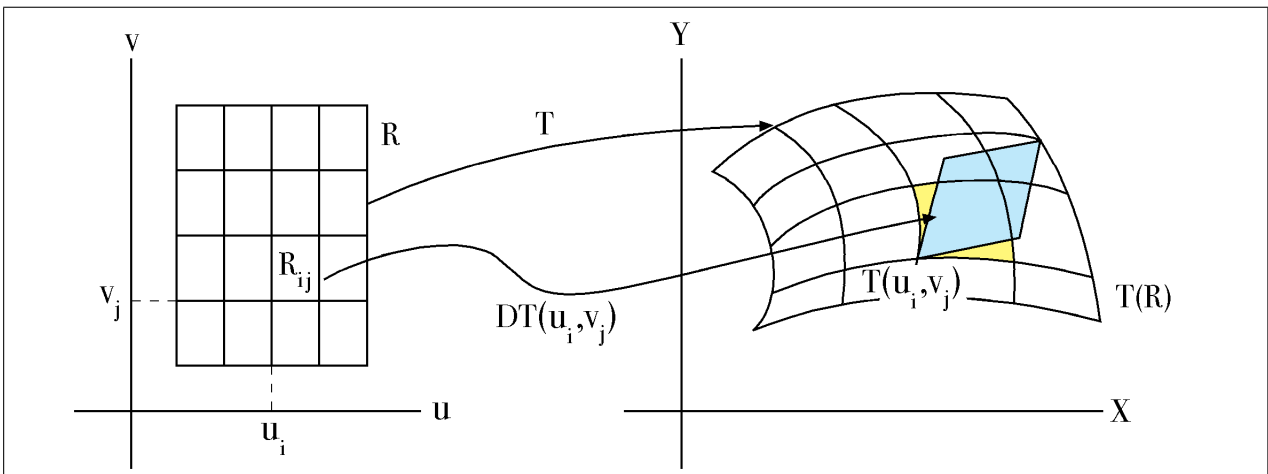


Figura 2.34: El área de  $\mathbf{T}(R_{ij})$  (en amarillo) es aproximadamente igual al área de  $D\mathbf{T}(u, v)(R_{ij})$  (en azul)

Razonando como en el caso de coordenadas polares, el área de  $\mathbf{T}(R_{ij})$  es aproximadamente igual a la de  $D\mathbf{T}(u_i, v_j)(R_{ij})$ , que vale (de acuerdo con el primer caso)  $|\det J\mathbf{T}(u_i, v_j)|A(R_{ij})$ . Por tanto,  $\sum f(x_i, y_j)A(\mathbf{T}(R_{ij}))$  es aproximadamente igual a

$$\sum (f \circ \mathbf{T})(u_i, v_j) |\det J\mathbf{T}(u_i, v_j)| A(R_{ij}) \, du \, dv.$$

Si  $f$  es continua, la función  $(f \circ \mathbf{T})|\det J\mathbf{T}|$  es continua, luego integrable, y por tanto la última suma está infinitamente próxima a la integral  $\iint_R (f \circ \mathbf{T})|\det J\mathbf{T}|$ . Se demuestra que, bajo ciertas hipótesis sobre los datos, la primera suma es, a su vez, infinitamente próxima a la integral  $\iint_{T(R)} f(x, y) \, dx \, dy$ . Por tanto,

$$\iint_{T(R)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R (f \circ \mathbf{T})|\det J\mathbf{T}(u, v)| \, du \, dv.$$

<sup>60</sup>Es decir, el determinante de la matriz  $2 \times 2$  formada por las cuatro derivadas parciales de las funciones componentes del cambio  $\mathbf{T}$  a coordenadas polares:

$$J\mathbf{T}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \det J\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Aunque no lo dijimos expresamente, al utilizar los números  $r$ ,  $dr$  y  $d\theta$  para medir una figura, estamos suponiendo que son positivos, por lo que en este caso  $r$  coincide con el valor absoluto del jacobiano.

Los ejemplos que hemos puesto explican o justifican, en cierto modo, la validez del siguiente resultado.

**Teorema 2.32 (del Cambio de Variable)** Sean  $D$  y  $E$  dos regiones simples en  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $\mathbf{T} : E \rightarrow D$  una aplicación de clase  $\mathcal{C}^1$  y suprayectiva para la que existe un cierto conjunto  $N \subset E$  tal que

1.  $\mathbf{T}$  es inyectiva sobre  $E \setminus N$ ,
2. para todo  $(u, v) \in E \setminus N$ ,  $\det J\mathbf{T}(u, v) \neq 0$ ,
3.  $N$  es una unión finita de gráficas de funciones continuas de una variable.

Entonces, si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua sobre  $\mathbf{T}(E \setminus N)$ , la función  $f \circ \mathbf{T} |\det J\mathbf{T}|$  también es integrable sobre  $E$  y se verifica la igualdad

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E (f \circ \mathbf{T})(u, v) |\det J\mathbf{T}(u, v)| \, du \, dv.$$

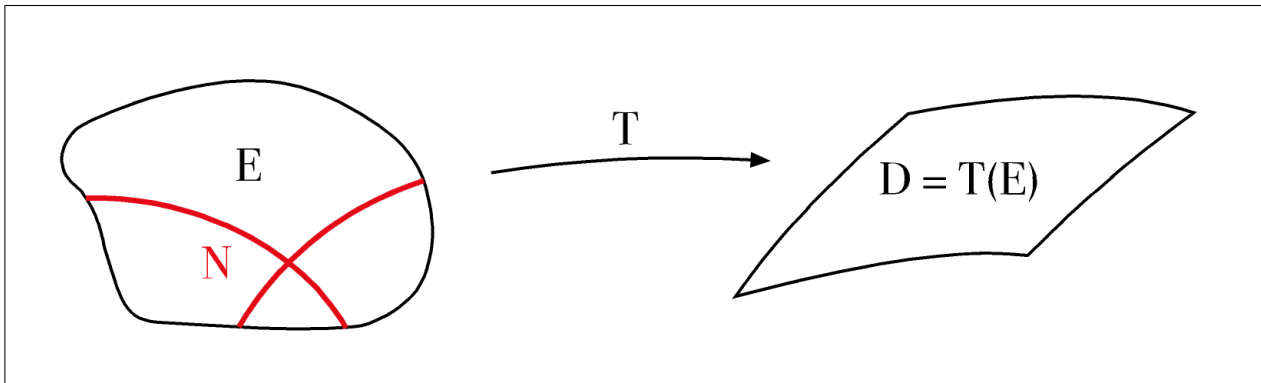


Figura 2.35:  $\mathbf{T}$  es inyectiva y regular sobre  $E \setminus N$ , donde  $N$  (en rojo) es la unión de las gráficas de dos funciones continuas de una variable

Puede consultarse un esquema de la demostración en [2], capítulo 7.7.

En caso de que la función  $f$  no sea continua sobre  $\mathbf{T}(E \setminus N)$ , sino solamente integrable sobre  $D$ , se puede demostrar un resultado análogo, pero para la integral de Lebesgue o de la de Kurzweil-Henstock en lugar de la de Riemann (ver, por ejemplo, [1], teorema 15.11).

**55.** En nuestros ejemplos será frecuente que el conjunto  $N$  esté contenido en  $\partial E$ , la frontera topológica (o borde) de  $E$ .

La exigencia de que la transformación sea inyectiva (salvo en un conjunto  $N$  que sea despreciable para la integración) es lógica, porque si el cambio de variable tuviera, por ejemplo, tres valores de las nuevas variables para cada punto  $(x, y)$ , al calcular la integral en  $(u, v)$  pasaríamos tres veces por cada punto, con lo que lo esperable sería que obtuviéramos la integral original multiplicada por 3.

**56.** El coeficiente de dilatación no es el jacobiano, sino su valor absoluto. Si olvidamos poner el valor absoluto, podemos terminar obteniendo resultados absurdos, como volúmenes negativos.

A diferencia de la fórmula del teorema 2.32, en la fórmula para el caso de funciones de una sola variable (ver página 21) no utilizamos  $|h'(t)|$ , sino  $h'(t)$ . ¿A qué se debe esta diferencia al pasar a varias variables, por qué hemos introducido el valor absoluto? Ver una explicación en el apartado 2.7.8.

### 2.4.2. Coordenadas polares

Para el cambio a coordenadas polares se utilizan las ecuaciones  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . El significado es el de la figura. La variable  $r$  suele llamarse radio vector, y la variable  $\theta$ ,

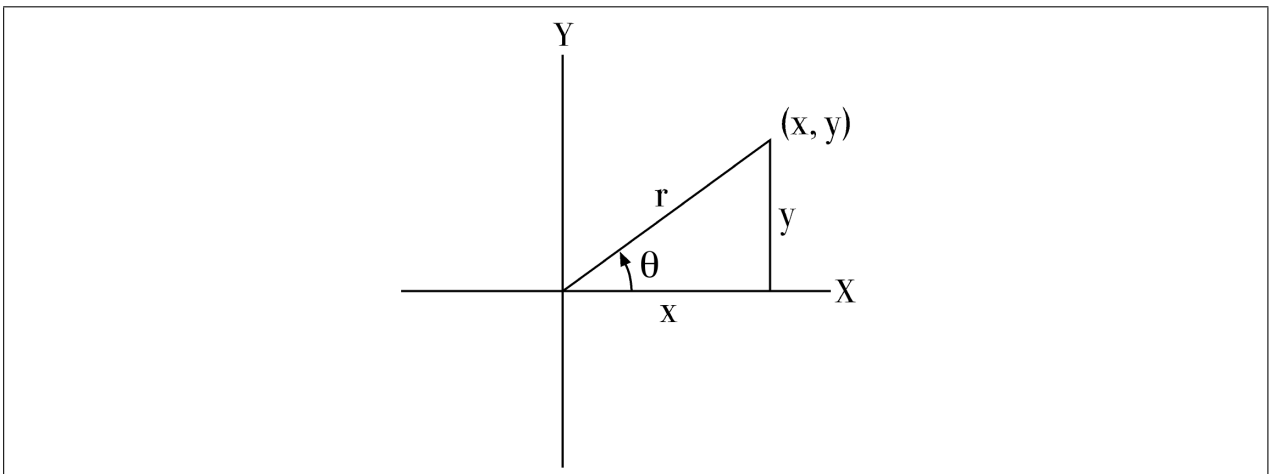


Figura 2.36: Coordenadas polares

ángulo polar. Las curvas  $r = k$ , donde  $k$  es una constante, son circunferencias centradas en el origen, mientras que las  $\theta = k$  son semirrectas que parten del origen. Ambos haces de curvas se cortan en todos los puntos del plano, por lo que sirven para describirlos todos.

Puede definirse sobre todo  $\mathbb{R}^2$ , pero como las funciones circulares son periódicas de periodo  $2\pi$ , para describir cualquier punto  $(x, y)$  es suficiente con limitar la variable  $\theta$  a un rango de amplitud  $2\pi$ , e incluso a un rango de amplitud  $\pi$  si se admite que  $r$  pueda tomar valores negativos.

**Ejemplo 2.33** (Ejemplo 6.3.4 de [11].) Pasando a coordenadas polares, evaluar  $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ , donde  $D$  es la región contenida en el primer cuadrante y comprendida entre los arcos de las circunferencias  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 = b^2$  (donde  $0 < a < b$ ).

Nuestra primera labor va a ser identificar el conjunto  $E$  del plano  $(r, \theta)$  que se corresponde con  $D$  en el paso a polares.

Las desigualdades que según el enunciado caracterizan a los puntos de  $D$  son

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,$$

que en coordenadas polares se transforman en

$$r \cos \theta \geq 0, \quad r \sin \theta \geq 0, \quad a^2 \leq r^2 \leq b^2.$$

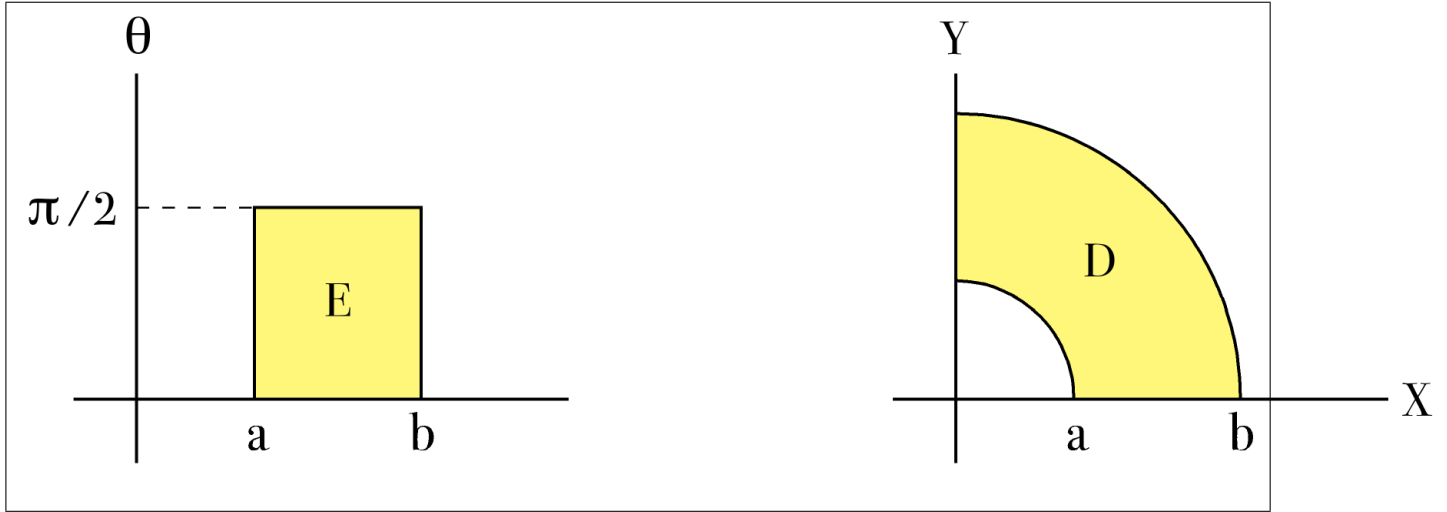


Figura 2.37: Los conjuntos  $D$  y  $E$  del ejemplo

Por otra parte, el valor absoluto del determinante jacobiano es igual a  $|r|$  <sup>(60)</sup>. Puesto que tenemos varias posibilidades en la elección de  $r$  y  $\theta$ , decidimos en primer lugar que  $r \geq 0$ , y así no tendremos que introducir valores absolutos en la integral a calcular.

Hecha esta elección, las desigualdades equivalen a

$$\cos \theta \geq 0, \quad \sin \theta \geq 0, \quad a \leq r \leq b.$$

El ángulo polar podemos restringirlo a un intervalo de amplitud  $2\pi$ , así que elegimos  $[0, 2\pi]$  (como podríamos elegir cualquier otro, aquí hay total discrecionalidad), y entonces las desigualdades equivalen a

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \leq r \leq b.$$

Resumiendo, el cambio a polares  $\mathbf{T} : E = [a, b] \times [0, \pi/2] \longrightarrow D$  en este caso no sólo es una aplicación suprayectiva sino biyectiva. Podemos aplicar el teorema del cambio de variable y la integral se transforma de la siguiente manera:

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_E r \log r^2 \, dr \, d\theta = \int_a^b \int_0^{\pi/2} 2r \log r \, d\theta \, dr = \pi \int_a^b r \log r \, dr.$$

La última integral se resuelve por partes y el resultado final es  $\frac{\pi}{2} [b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)]$ . ■

Las ideas que han aparecido en el ejemplo pueden sernos útiles para otros muchos casos. Querremos tener una transformación que verifique las hipótesis del teorema del cambio de variable 2.32, por lo que hemos de limitar el dominio de las nuevas variables, para lo que hay varias opciones posibles. *Nosotros usaremos siempre  $r \geq 0$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , salvo indicación en contrario.* Un **cambio a coordenadas polares** será a partir de ahora una aplicación definida sobre una región simple  $E \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$  por  $(r, \theta) \rightsquigarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , y cuya imagen sea una región simple  $D$  en el plano  $XY$ .

Llamando  $N$  al conjunto de puntos de  $E$  que están además en la frontera de  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ , se comprueba que entonces se cumplen las hipótesis del teorema 2.32 (ver apartado

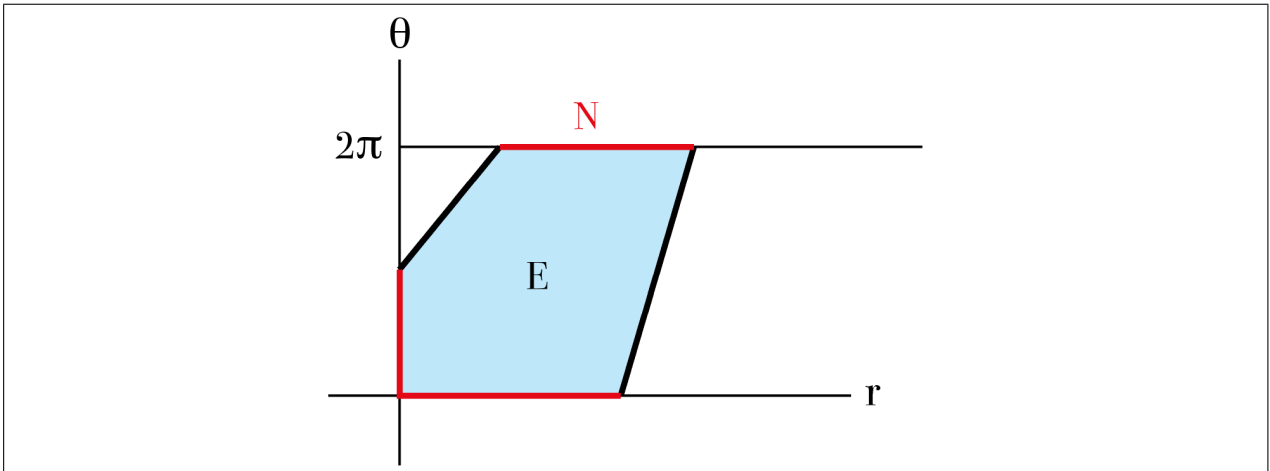


Figura 2.38: Conjuntos  $E$  y  $N$  a los que sería aplicable el teorema 2.32 para coordenadas polares (y para una  $f$  adecuada).  $N$  es el conjunto formado por las tres líneas rojas y  $E$  es el conjunto azul, incluidos los bordes de cualquier color

2.7.9) y que la fórmula que relaciona la integral en coordenadas cartesianas con la integral en coordenadas polares es

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

La utilización de la propiedad aditiva (teorema 2.28) nos permitirá aplicar la fórmula del cambio de variable a conjuntos que no sean regiones simples, como muestra el ejemplo 2.53 (apartado 2.7.10).

## 2.5. Integrales impropias

**57.** En este apartado, como excepción, no supondremos que las funciones a integrar sean acotadas ni que los dominios de definición de las funciones sean acotados.

Solamente pondremos algunos ejemplos, sin dar ninguna definición general. Para un uso intensivo de la integración sobre conjuntos no acotados o de funciones no acotadas, la integral de Riemann es bastante limitada, es mucho mejor utilizar la de Lebesgue y, sobre todo, la de Kurzweil-Henstock.

**Ejemplo 2.34** Sobre  $(0, 1]$  considérese la función  $1/x$  y la partición  $\mathcal{P}_n$  en  $n$  partes iguales, teniendo en cuenta que ahora el primer subintervalo no puede ser cerrado, tendrá que ser  $(0, 1/n]$  puesto que en el 0 no está definida la función. Si  $\xi$  es la selección de puntos asociada

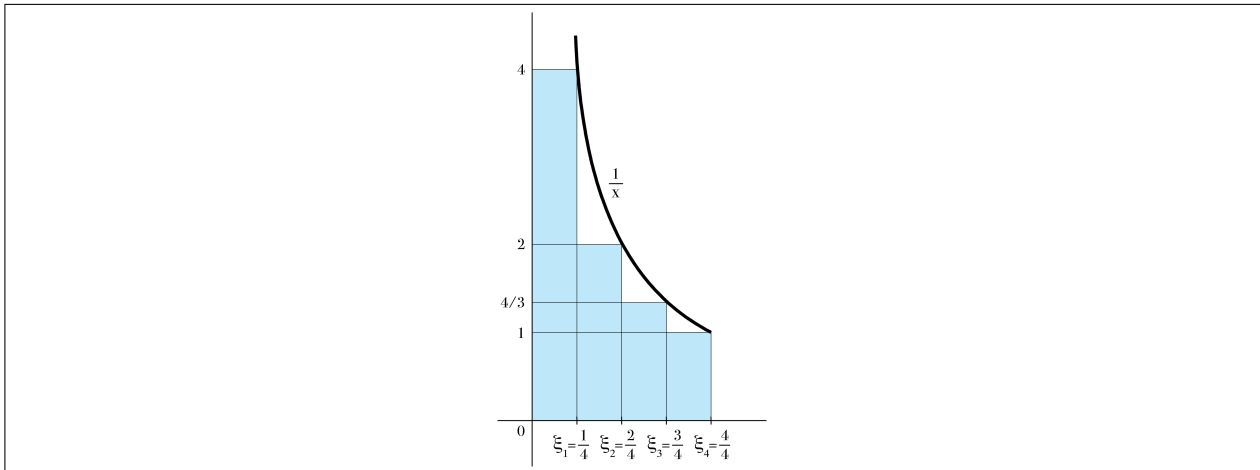


Figura 2.39: La suma de Riemann  $S_4$  vale  $4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ . La figura está deformada porque las escalas de los ejes horizontal y vertical no son iguales, para facilitar la lectura de algunos valores

a esa partición definida por  $\xi_i = \frac{i}{n}$ , la suma de Riemann

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito.}$$

Este resultado es coherente con el siguiente:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \log x \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (-\log \delta) = +\infty.$$

Se resume esta situación diciendo que **la integral impropia  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  es divergente.** ■

**Ejemplo 2.35** Actuando como en el ejemplo anterior pero con la función  $1/\sqrt{x}$  y tomando una selección de puntos en subintervalos,  $\xi$ , de modo que el primer punto  $\xi_1$ , el que pertenece



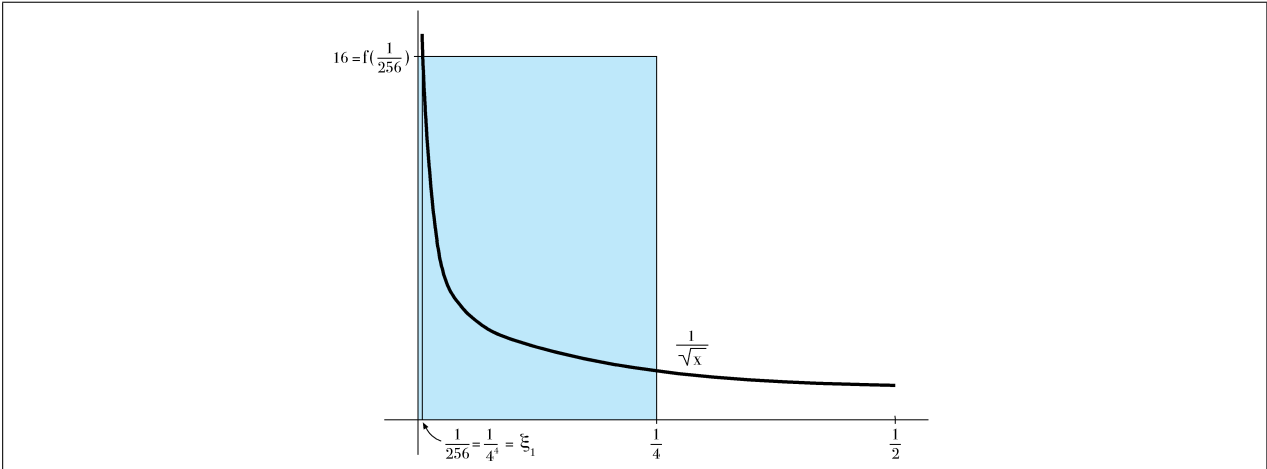


Figura 2.40: La suma de Riemann  $S_4$  es mayor que 4, el área del rectángulo azul. La figura está deformada porque las escalas de los ejes horizontal y vertical no son iguales, para facilitar la lectura de algunos valores

al primer subintervalo  $(0, 1/n]$ , sea  $1/n^4$  (sin importarnos cuáles sean los demás puntos  $\xi_i$  para  $i > 1$ ),

$$S_n > \frac{1}{1/n^2} \frac{1}{n} = n \rightarrow +\infty \quad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito,}$$

y en cambio

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ 2\sqrt{x} \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\delta}) = 2.$$

Se resume esta situación diciendo que **la integral impropia  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  es convergente y su valor es 2**, a pesar de que hay al menos unas sumas de Riemann que tienden a  $+\infty$ . ■

**Ejemplo 2.36** La integral impropia  $\iint_D \log x dx dy$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq e^y\}$  es convergente y su valor es  $2 - e$  (utilizando estas expresiones en el mismo sentido que en el último ejemplo).

En efecto: recortando  $D$  por la zona donde el integrando no está acotado, A  $D_{\delta} =$

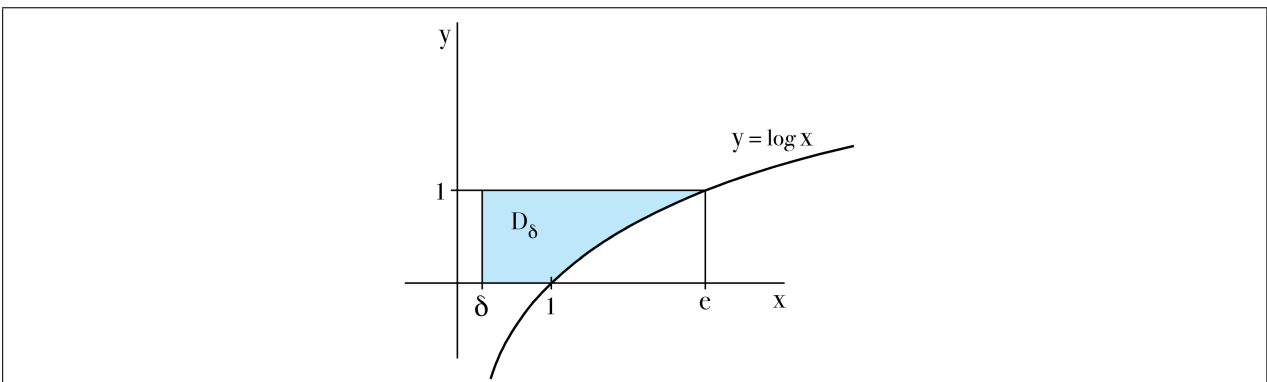


Figura 2.41: Conjuntos  $D_{\delta}$

$\{(x, y) \in D : x \geq \delta\}$ , donde  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{D_\delta} \log x \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_\delta^{e^y} \log x \, dx = \int_0^1 (ye^y - e^y - \delta \log \delta + \delta) \, dy = \\ &= 2 - e - \delta \log \delta + \delta \rightarrow 2 - e \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

puesto que  $\delta \log \delta$  tiende a cero cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ . ■

De manera similar se tratan las integrales de funciones sobre conjuntos no acotados: si  $D \subset \mathbb{R}$  no es acotado y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y acotada, recortamos  $D$  con los elementos una sucesión de conjuntos acotados que rellene toda la recta, por ejemplo  $D_m = D \cap [-m, m]$ , integramos  $f$  sobre  $D_m$  y pasamos al límite cuando  $m$  tiende a infinito.

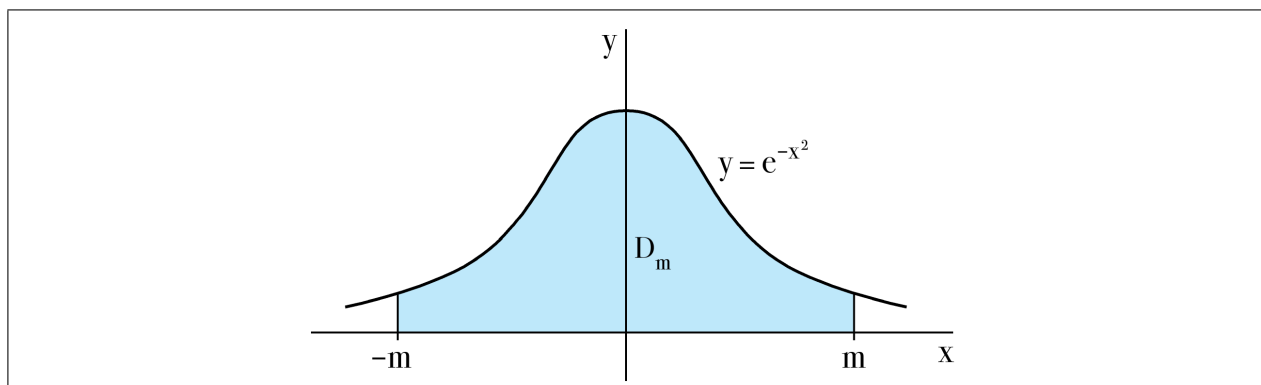


Figura 2.42: Conjuntos  $D_m$

En función del resultado de este límite se dice que **la integral impropia  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$  es convergente o divergente.**

## 2.6. Teorema de Riemann-Green

Llamamos “teoremas clásicos del cálculo vectorial” a tres resultados conocidos desde el siglo XIX que tienen en común que proporcionan fórmulas que relacionan entre sí a dos integrales de diferente tipo y dimensión. Todos ellos pueden considerarse una especie de regla de Barrow para dimensiones superiores a 1.

Los nombres que se dan a estos resultados varían según los textos e incluso según tradiciones nacionales. Nosotros los denominaremos teoremas de Riemann-Green, de Stokes y de la Divergencia.

No es posible insistir demasiado en la trascendencia de los teoremas clásicos. Al relacionar integrales de dos tipos distintos, constituyen un poderoso elemento de demostración y suministran herramientas en multitud de aplicaciones.

**58.** Dentro del análisis matemático, todos los teoremas que tienen como tesis una igualdad entre dos procesos distintos de paso al límite (y las integrales son límites), figuran entre los más importantes y útiles, y conviene recordarlos porque surgen aplicaciones suyas por doquier.

La fórmula de Riemann-Green (o de Green en el plano, o simplemente de Green) para un campo vectorial de dos variables, compara una integral doble sobre un recinto plano y una integral de línea sobre la frontera del mismo recinto. Puede verse como una regla de Barrow pero de una dimensión más: la integral doble (sencilla en la regla de Barrow) de unas derivadas sobre un recinto bidimensional (unidimensional en la regla de Barrow) se transforma en una integral de las funciones sin derivar sobre la frontera del recinto, que resulta ser una o varias curvas (un par de puntos en la regla de Barrow).

Uno de los puntos más resbaladizos es la orientación de las curvas implicadas en la fórmula de Riemann-Green. Para considerar la integrales de línea sobre esas curvas se precisa que la frontera esté dotada de una determinada orientación, que con frecuencia se define recurriendo a conceptos como derecha e izquierda o como el sentido de las agujas del reloj, conceptos que, si bien son muy intuitivos y ayudan sobremanera a reconocer la orientación en las aplicaciones, no caben en nuestro modelo matemático <sup>(61)</sup>.

**59.** Por coherencia con el nivel de abstracción que manejamos en el resto del curso, nosotros optaremos por actuar exactamente al revés: en la formulación más general no definiremos una orientación como positiva y después enunciaremos la fórmula usando esa orientación, sino que utilizaremos la fórmula para definir la orientación que llamaremos positiva.

No obstante, a la hora de demostrar la fórmula para algunos casos especialmente simples lo haremos de manera constructiva, con lo que, para esos casos particulares, concretaremos previamente la orientación que manejemos.

<sup>61</sup>Como dice L. Schwartz ([14], página 29), si pretendiéramos explicar nuestros conceptos de izquierda y derecha a unos seres inteligentes residentes en un lugar del universo desconocido para nosotros, no seríamos capaces de hacerlo.

No haremos la demostración del caso más general posible, pero sí demostraremos la fórmula bajo hipótesis bastante amplias como para incluir los conjuntos que son más habituales en las aplicaciones.

Las funciones que integraremos serán todas continuas, con lo que la existencia de las integrales estará garantizada. Puede extenderse el resultado a funciones más generales, no continuas, pero estas extensiones no acarrearán más dificultades que las propias de la integrabilidad. Lo sorprendente de los teoremas clásicos, y de éste en particular, es que las mayores dificultades sobre la validez de la fórmula se derivan de la complejidad geométrica del recinto de integración (curvas y conjuntos bidimensionales, en el caso que nos ocupa), más que de las propiedades de las funciones a integrar.

### 2.6.1. Fórmula de Riemann-Green para rectángulos

Primero probaremos la validez de la fórmula para los recintos más sencillos y después analizaremos su extensión a otros recintos más complicados.

Consideramos en primer lugar campos vectoriales definidos sobre rectángulos  $R = [a, b] \times [c, d]$ . El borde de  $R$ ,  $\partial R$ , es una curva cerrada simple formada por la suma de sus cuatro

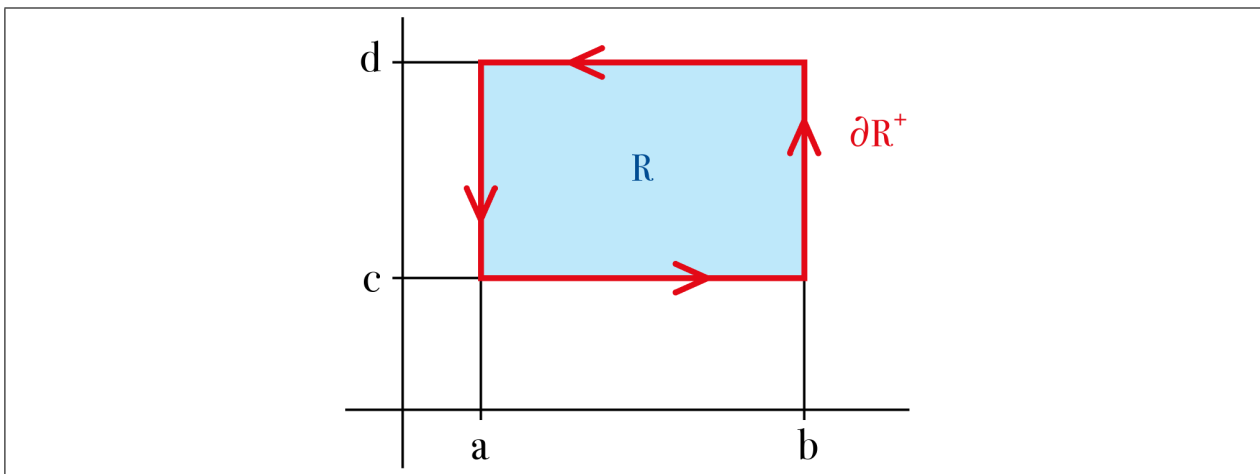


Figura 2.43: Orientación *antihoraria* del borde de un rectángulo

lados. Dotamos a  $\partial R$  de la orientación definida por la parametrización que es suma de los cuatro caminos

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, & t &\rightsquigarrow (t, c) \\ \mathbf{c}_2 &: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2, & t &\rightsquigarrow (b, t) \\ \mathbf{c}_3 &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, & t &\rightsquigarrow (a + b - t, d) \\ \mathbf{c}_4 &: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2, & t &\rightsquigarrow (a, c + d - t) \end{aligned}$$

Diremos entonces que  $\partial R^+$  está dotado con la **orientación antihoraria o positiva**.

**Teorema 2.37 (de Riemann-Green para rectángulos)** Sea  $\mathbf{F} : R = [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  que tiene por componentes a las funciones reales  $P$  y  $Q$ ,  $\mathbf{F} = (P, Q)$ . Entonces se cumple la **fórmula de Riemann-Green**:

$$\int_{\partial R^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy .$$

**60.** Observar que distinguimos entre “fórmula” de Riemann-Green, y “teorema” de Riemann-Green, que es un enunciado cuya tesis es la fórmula.

Cuando digamos que sobre un cierto dominio “se cumple la fórmula de Riemann-Green” queremos decir que se cumple para todo campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  definido sobre el dominio (<sup>62</sup>).

DEMOSTRACIÓN: *La demostración no requiere ninguna idea feliz. Nos limitaremos a calcular con un poco de cuidado la integral de línea utilizando la parametrización que conocemos de  $\partial R^+$  y a aplicar los teoremas 2.20 y 2.21 para la integral doble.*

*Empezando con la integral doble,*

$$\begin{aligned} \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = \\ &= \int_c^d \left[ Q(x, y) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left[ P(x, y) \right]_{y=c}^{y=d} = \\ &= \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy - \int_a^b P(x, d) dx + \int_a^b P(x, c) dx. \end{aligned}$$

*Ahora calculamos la integral del campo vectorial sobre cada uno de los cuatro caminos que parametrizan  $\partial R^+$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_1} P dx + Q dy &= \int_a^b \left( P(t, c), Q(t, c) \right) \cdot (1, 0) dt = \int_a^b P(t, c) dt \\ \int_{\mathbf{c}_2} P dx + Q dy &= \int_c^d \left( P(b, t), Q(b, t) \right) \cdot (0, 1) dt = \int_c^d Q(b, t) dt \\ \int_{\mathbf{c}_3} P dx + Q dy &= \int_a^b \left( P(a + b - t, d), Q(a + b - t, d) \right) \cdot (-1, 0) dt = \\ &= - \int_a^b P(a + b - t, d) dt = - \int_a^b P(u, d) du \\ \int_{\mathbf{c}_4} P dx + Q dy &= \int_c^d \left( P(a, c + d - t), Q(a, c + d - t) \right) \cdot (0, -1) dt = \end{aligned}$$

<sup>62</sup>Siempre que hablemos de una función cuyo dominio de definición  $D$  sea una región simple (y el rectángulo  $R$  lo es), al decir que es de clase  $\mathcal{C}^1$  queremos decir que la función está en realidad definida y es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre un conjunto más amplio que contiene a  $D$  en su interior (ver las definiciones 2.19 y 2.51), pero este tecnicismo no nos hará falta en la práctica durante el curso.

$$= - \int_c^d Q(c + d - t) dt = - \int_c^d Q(a, v) dv$$

(donde se han introducido los cambios de variable  $u = a + b - t$ ,  $v = c + d - t$ ). A continuación sumamos las cuatro integrales y observamos que el resultado coincide con el obtenido más arriba para la integral doble, con lo que la fórmula queda demostrada.

### 2.6.2. Fórmula de Riemann-Green para regiones simples

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que la fórmula de Riemann-Green no solamente se cumple para rectángulos, sino también sobre cualquier región que sea simple en ambas direcciones. Comprobaremos enseguida que esta generalización complica extraordinariamente la demostración. Las complicaciones se derivarán, más que de los nuevos cálculos (que seguirán un esquema muy parecido al de la anterior demostración), de las consideraciones que habrá que hacer para adaptar al borde de la región simple algunas ideas que hemos utilizado sobre los lados del rectángulo.

En primer lugar, con los conceptos que hemos dado en este curso, en caso de que el borde  $\partial D$  de una región simple no fuera una curva cerrada simple es obvio no podríamos ni siquiera enunciar el teorema 2.38, puesto que la integral del primer miembro de la igualdad es una integral de línea sobre una curva de este tipo.

**61.** A partir de ahora, todas nuestras **regiones bidimensionales simples** supondremos que tienen la característica adicional de que su borde (o frontera) es una curva cerrada simple.

Lo que no es tan obvio es que, como se dice en la observación 61, la propiedad de que  $\partial D$  sea una curva cerrada simple constituya verdaderamente una característica adicional al hecho de que  $D$  sea una región simple. Podría ocurrir que de la hipótesis de que  $D$  sea una región simple se dedujera que  $\partial D$  es una curva cerrada simple. Para poder asegurar con certeza matemática que no es así, tendríamos que encontrar al menos una región simple cuyo borde no sea una curva cerrada simple.

Incluso después de suponer que el borde de una región bidimensional es una curva cerrada simple, en las demostraciones tendremos que tener cuidado con las parametrizaciones de esa curva, que no son tan sencillas como puede parecer a primera vista. Intentaremos explicarlo a continuación. Si  $D$  es una región simple en las  $y$ , por ejemplo, y conocemos una descripción suya en los términos de la definición 2.18, entonces automáticamente conocemos una trayectoria que describe a la frontera  $\partial D$  como imagen de un camino cerrado e inyectivo (con la salvedad de que el punto inicial y el final son el mismo, claro): no hay más que recorrer primero la gráfica de  $y = \varphi_1(x)$  de izquierda a derecha (<sup>63</sup>); después el segmento vertical que corresponde a  $x = b$ , de abajo a arriba; a continuación la gráfica de  $y = \varphi_2(x)$  de derecha a

<sup>63</sup>No hay contradicción entre lo que se dijo antes en contra de utilizar en las definiciones o en las demostraciones las nociones de izquierda y derecha (o arriba y abajo) y el uso informal que le estamos dando aquí, puesto que éste es formalizable sin recurrir a izquierda o derecha, aunque sea un poco complicado.

En efecto, cuando decimos coloquialmente que “recorremos la gráfica de  $y = \varphi_1(x)$  de izquierda a derecha”

izquierda; y por último el segmento de la frontera que está sobre la recta  $x = a$ , de arriba a abajo.

Lo que ocurre es que las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  pueden ser solamente continuas, mientras que para parametrizar una curva cerrada simple necesitamos un camino con ciertas propiedades de diferenciabilidad, ver la definición 1.25. No hace falta recurrir a conjuntos complicados para apreciar la importancia de esta diferencia. Por ejemplo, el círculo  $D$  definido por  $x^2 + y^2 \leq 1$  es una región simple en las  $y$ , para las funciones continuas  $\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$  y

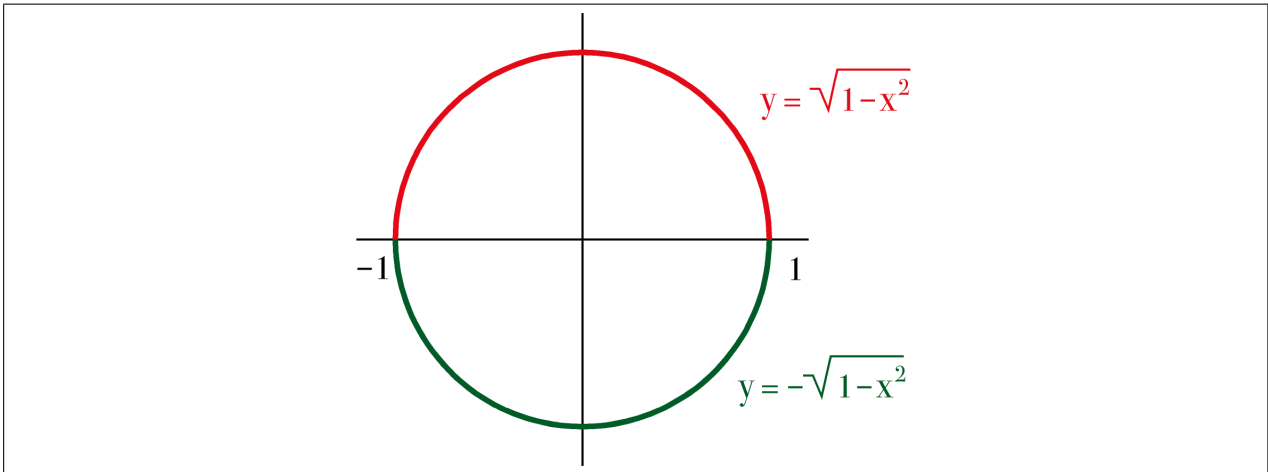


Figura 2.44: Las funciones que describen al círculo unidad  $x^2 + y^2 \leq 1$  como región simple (que son dos semicircunferencias) no son diferenciables en los puntos 1 y  $-1$

$\varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ . Por otra parte,  $\partial D$ , que es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  completa, es una curva cerrada simple. Sin embargo, ni  $\varphi_1$  ni  $\varphi_2$  son de clase  $\mathcal{C}^1$ , puesto que en los extremos del intervalo  $[-1, 1]$  no son derivables, luego no nos sirven para parametrizar  $\partial D$ . Esta observación la tendremos presente durante la demostración del teorema 2.38.

**Teorema 2.38 (de Riemann-Green para regiones simples)** Sea  $\mathbf{F} = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  que es una región simple tanto en las  $x$  como en las  $y$ . Entonces para una cierta orientación del borde  $\partial D$  que se llamará orientación positiva del borde,  $\partial D^+$ , se cumple la fórmula de Riemann-Green:

$$\int_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy .$$

DEMOSTRACIÓN:

Estructuramos la demostración en varios pasos intermedios.

(1) Supongamos en primer lugar que  $Q = 0$  y que  $D$  es una región simple en las  $y$ . Siguiendo las notaciones habituales pondremos  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ , donde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas, con  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ . Entonces el borde

podríamos decir lo mismo de un modo totalmente preciso: “consideremos la gráfica de  $y = \varphi_1(x)$  con la orientación para la que el punto inicial es  $(a, \varphi_1(a))$  y el punto final es  $(b, \varphi_1(b))$ ”. Esta frase no apela a nuestra idea de izquierda y de derecha. Lo que sí hay que tener en cuenta es una sutileza adicional: que el hecho de que la gráfica de  $y = \varphi_1(x)$  sea una curva simple requiere una demostración, a menos que las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  fueran de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Puede hacerse una demostración, para la que basta que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  sean continuas, utilizando el concepto topológico de conjunto conexo, pero no es nada sencilla: ver 2.7.11.

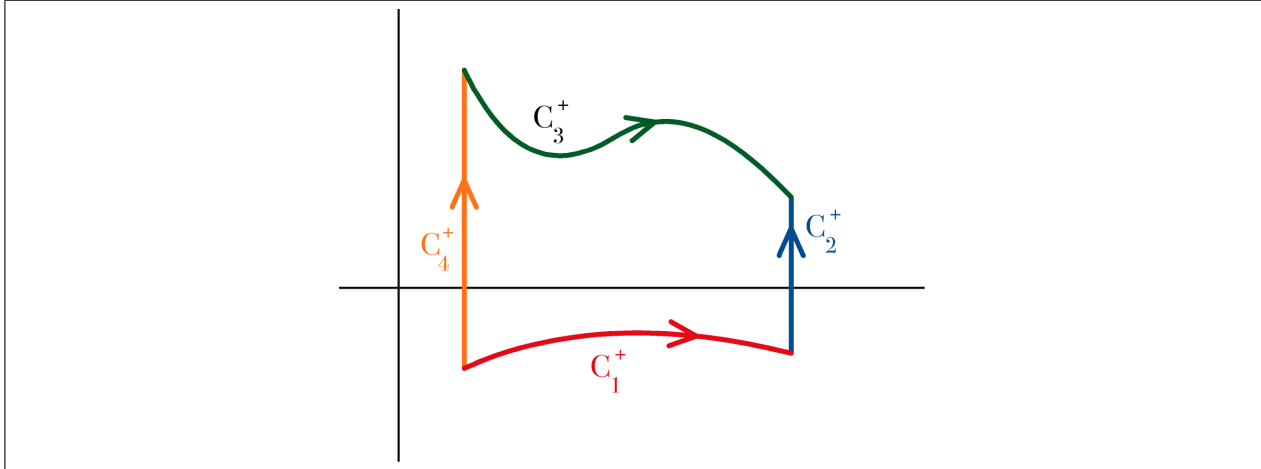


Figura 2.45: Los cuatro conjuntos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  en los que dividimos el borde de la región simple  $D$ . Las orientaciones son las utilizadas en la demostración

de  $D$  (definición 2.19) es la unión de cuatro conjuntos,  $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ , donde

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, \varphi_1(x)) : a \leq x \leq b\} \\ C_2 &= \{(b, y) : \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)\} \\ C_3 &= \{(x, \varphi_2(x)) : a \leq x \leq b\} \\ C_4 &= \{(a, y) : \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)\}. \end{aligned}$$

Cada uno de los conjuntos  $C_2$  y  $C_4$ , o se reduce a un solo punto o es una curva simple. Como para el cálculo de integrales los dominios reducidos a un solo punto pueden despreciarse, podremos suponer sin pérdida de generalidad que  $C_2$  y  $C_4$  son curvas simples. Entonces las descripciones de estos segmentos son trayectorias de curvas simples orientadas, que denotaremos con  $C_2^+$  y  $C_4^+$ , respectivamente.

En cuanto a  $C_1$  y  $C_3$ , son curvas simples <sup>(64)</sup>, y las supondremos orientadas con la orientación inducida por las descripciones <sup>(65)</sup> expuestas más arriba,  $C_1^+$ ,  $C_3^+$  (es decir,  $C_1^+$  comienza en  $(a, \varphi_1(a))$  y  $C_3^+$  comienza en  $(a, \varphi_2(a))$ ).

**Definición 2.39** Con las notaciones anteriores, llamaremos **orientación positiva sobre la curva borde  $\partial D$** , a la definida mediante  $\partial D^+ = C_1^+ + C_2^+ + C_3^- + C_4^-$ . <sup>(66)</sup>

Añadimos de manera transitoria la hipótesis de que las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  sean de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Ahora sí que tenemos parametrizaciones de las cuatro curvas, en función de  $x$

<sup>64</sup>Esta afirmación no es evidente, puesto que con los datos que conocemos no disponemos de ningún camino de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos que parametrize a  $C_1$  o a  $C_3$ . Ver una demostración, utilizando la propiedad topológica de la conexión, en 2.7.11.

<sup>65</sup>A estas descripciones no las llamamos parametrizaciones porque pueden no serlo, como hemos explicado más arriba, dado que las funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  podrían ser solamente continuas, y para tener una verdadera parametrización se requieren funciones que sean de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos. Aunque no sean verdaderas parametrizaciones, sí que inducen una orientación en las curvas simples  $C_1$  y  $C_2$ , al fijar para cada una de ellas un punto inicial y un punto final en las curvas simples, ver el comentario en la nota <sup>(63)</sup>.

<sup>66</sup>En el apartado 1.3 hemos tratado con sumas de curvas simples, pero no con sumas de curvas simples orientadas. Esta suma de curvas orientadas hay que entenderla como “la curva orientada que tiene por parametrización a una suma de parametrizaciones de las curvas orientadas que son los sumandos” (en caso de que  $C_2$  o  $C_4$  se reduzcan a un punto, habría que omitir estos sumandos).



o de  $y$ , luego podemos hacer cálculos de integrales sobre ellas de manera muy parecida a lo que hicimos en la demostración de la misma propiedad para rectángulos (teorema 2.37):

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} P dx + Q dy &= \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(x)) dx = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ \int_{C_2^+} P dx + Q dy &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} 0 \cdot dy = 0 \\ \int_{C_3^+} P dx + Q dy &= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)), 0) \cdot (1, \varphi_2'(x)) dx = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx \\ \int_{C_4^+} P dx + Q dy &= \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} 0 \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

(en el caso de que las derivadas de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  no existan en un número finito de puntos de  $[a, b]$ , las integrales en las que aparecen esas derivadas hay que entenderlas como una suma de integrales, igual que hacemos en otras situaciones similares). Por tanto, apelando al corolario 1.29,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} P dx + Q dy &= \int_{C_1^+} P dx + Q dy + \int_{C_2^+} P dx + Q dy - \int_{C_3^+} P dx + Q dy - \int_{C_4^+} P dx + Q dy = \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dy = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy . \end{aligned}$$

Ahora volvamos a que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  sean solamente continuas <sup>(67)</sup>. Para reducirlo al caso anterior, tomamos una parametrización de la curva  $C_1^+$  que sea compatible con su orientación,  $\mathbf{c} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Entonces para todo  $t \in [a', b']$ ,  $c_2(t) = \varphi_1(c_1(t))$ , luego también ahora

$$\int_{C_1^+} P dx + Q dy = \int_{a'}^{b'} (P(c_1(t), \varphi_1(c_1(t))), 0) \cdot (c_1'(t), c_2'(t)) dt = \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx,$$

donde en el último paso se ha hecho el cambio de variable  $x = c_1(t)$ . Repetimos el argumento para  $C_3^+$  y con ello el razonamiento hecho para cuando  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  fueran de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos es también válido aquí.

(2) Ahora suponemos que  $P = 0$  y  $D$  es una región simple en las  $x$ . De forma comple-

<sup>67</sup>Estamos resolviendo los casos como el del ejemplo del círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  que pusimos antes del enunciado de este teorema, puesto que  $\varphi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$  no es derivable en  $-1$  y en  $+1$ . Como parametrización de  $C_1^+$  tomaríamos, por ejemplo,  $\mathbf{c}(t) : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ . Y como parametrización de  $C_3^+$ ,  $\mathbf{c}(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\mathbf{c}(t) = (-\cos t, \sin t)$ .

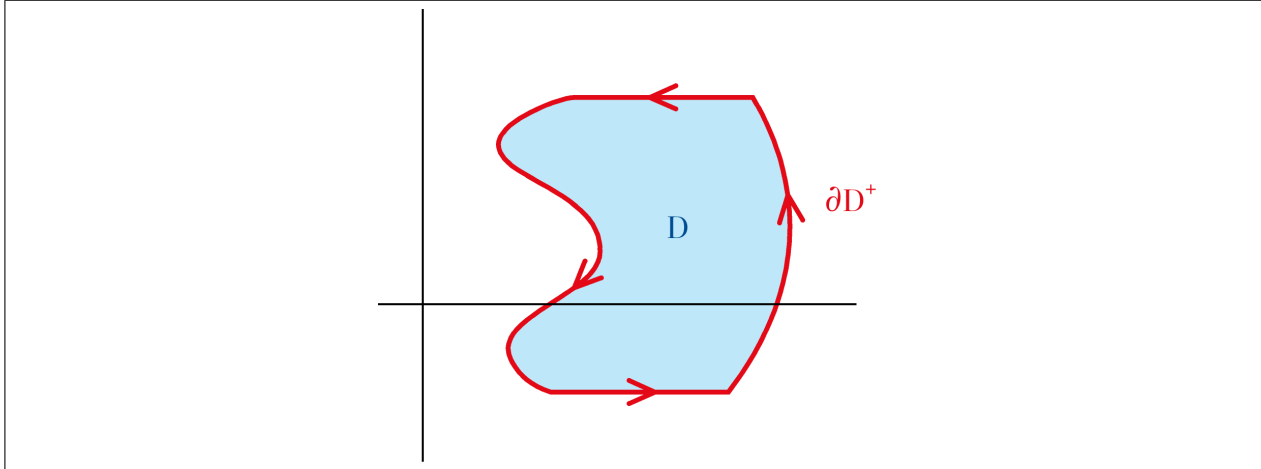


Figura 2.46:  $D$  es una región simple en las  $x$ . En rojo, su borde  $\partial D^+$

tamente análoga al caso anterior se define una orientación positiva para la curva cerrada simple  $\partial D$  y se prueba la fórmula del enunciado, que bajo estas hipótesis es

$$\int_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

(Hacerlo y comprobar que ahora no aparece un signo negativo delante de la derivada  $\partial Q/\partial x$ , igual que ocurrió en la demostración del teorema 2.37.)

(3) Terminamos por situarnos en el caso del enunciado: tanto  $P$  como  $Q$  pueden ser funciones no nulas y  $D$  es una región simple en las  $x$  y simple en las  $y$ . Nuestra estrategia consiste en aplicar el resultado demostrado en el caso (1) al campo vectorial  $(P, 0)$  y lo demostrado en el caso (2) al campo vectorial  $(0, Q)$ , para a continuación sumar ambos resultados, obteniendo así la fórmula del Riemann-Green del enunciado.

Ahora bien, para poder hacer la suma

$$\int_{\partial D^+} (P, 0) \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial D^+} (0, Q) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D^+} (P, Q) \cdot d\mathbf{s},$$

hemos de garantizar que en el miembro de la izquierda estamos integrando las dos veces a lo largo de la misma curva y con la misma orientación. Necesitamos saber, por tanto, que las que hemos definido como orientaciones positivas para cuando  $D$  es simple en las  $y$  y para cuando  $D$  es simple en las  $x$ , coinciden cuando  $D$  sea simple en las dos direcciones. Intuitivamente quizá se vea muy claramente que así es, pero ello se debe a que en ambos casos interpretamos las dos orientaciones como las que corresponden al sentido antihorario, y éste es un motivo que no podemos utilizar en una demostración, como explicamos en la introducción de la Fórmula de Riemann-Green. Una comprobación de que ambas orientaciones coinciden puede consultarse en el teorema 2.56, del apartado 2.7.12.

Ahora aplicamos los dos casos anteriores a  $(P, 0)$  y  $(0, Q)$ , respectivamente, y sumamos, obteniendo la fórmula de Riemann-Green.

Con lo que damos por terminada la demostración del teorema de Riemann-Green para regiones simples en ambas direcciones.

### 2.6.3. Fórmula de Riemann-Green para regiones más generales

La fórmula de Riemann-Green no sólo es válida sobre los conjuntos simples en las dos direcciones, ni mucho menos. Al contrario, lo que resulta difícil es encontrar un conjunto plano sobre el que no sea válida. Otra cosa es que sea fácil demostrarla bajo hipótesis más generales, que no lo es. Vamos a dar varias ampliaciones de las hipótesis de los teoremas 2.37 y 2.38, todas ellas referidas al dominio  $D$ , manteniendo las hipótesis de diferenciabilidad para el campo  $\mathbf{F}$ .

(1) Nuestra primera ampliación va a consistir en admitir que el conjunto  $D$  tenga “agujeros”, con la (importante) condición adicional de que el campo vectorial esté definido y sea también de clase  $\mathcal{C}^1$  dentro de los agujeros, no sólo sobre  $D$ . Lo probaremos para el caso de que el conjunto agujereado se obtenga como diferencia conjuntista de dos regiones que sean simples en ambas direcciones (el agujero, junto con su borde, también será una región simple). Para probarlo cuando haya más de un agujero aplicaríamos el mismo procedimiento repetidamente.

Supondremos que  $D = D_1 \setminus \text{Int } D_2$ , donde  $D_2 \subset \text{Int } D_1$  y que ambos conjuntos son simples

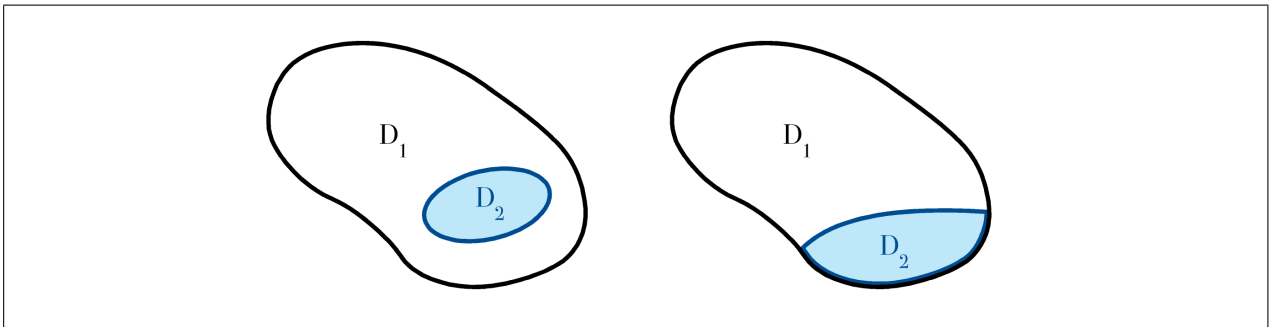


Figura 2.47: Dos ejemplos de regiones simples  $D_1, D_2$ , con la segunda contenida en la primera. El primero de los ejemplos cumple las hipótesis del corolario 2.40 y el segundo no. Observar que en este segundo caso,  $\partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$

en ambas direcciones.

Aplicamos el teorema 2.38 a  $D_1$  y a  $D_2$ , restamos las dos fórmulas y hacemos uso de varias propiedades de las integrales para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial D_2^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial D_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\partial D_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \end{aligned}$$

A partir de aquí obtendremos la fórmula de Riemann-Green si interpretamos adecuadamente para este caso el borde orientado de  $D$ . Llamaremos **borde de  $D$ ,  $\partial D$** , a la unión  $\partial D_1 \cup \partial D_2$ , dado que esta definición es coherente con el concepto topológico de frontera <sup>(68)</sup>.

<sup>68</sup>Gracias a que hemos supuesto que  $D_2$  no sólo está contenido en  $D_1$  sino en su interior (y que  $\partial D_2$  es una curva cerrada simple), resulta que la frontera de  $D$  es la unión de las dos fronteras, ver el teorema 2.52 del apartado 2.7.7.

Por tanto,  $\partial D$  no es, hablando con propiedad, una curva cerrada simple, sino la unión disjunta de dos curvas cerradas simples.

**62.** Escribiremos  $\partial D = \partial D_1 + \partial D_2$ , en el bien entendido de que es un abuso de notación, puesto que la definición de suma de caminos (1.9) exigía que el segundo comience donde termina el primero, cosa que no ocurre con  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$ .

La justificación para escribir la unión de caminos disjuntos como una suma es que también denotaremos la suma de las integrales (de campos escalares o de campos vectoriales) sobre cada una de las curvas como la integral sobre la unión de las curvas disjuntas.

Cada uno de los dos bordes  $\partial D_i$  tiene su propia orientación positiva, que no es otra que la que se precisa para que la fórmula de Riemann-Green sea cierta sobre el correspondiente conjunto  $D_i$ , es decir, la descrita en la demostración del teorema 2.38. Pues bien, llamaremos **orientación positiva del borde  $\partial D$**  a la orientación positiva de la curva exterior,  $\partial D_1^+$ , junto con la orientación negativa de la curva interior,  $\partial D_2^-$ , y pondremos  $\partial D^+ = \partial D_1^+ + \partial D_2^-$ .

Haciendo uso de estas notaciones, lo que hemos demostrado es el siguiente resultado:

**Corolario 2.40** *La igualdad*

$$\int_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy .$$

*es válida siempre que*

- *el conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  pueda ponerse como una diferencia  $D = D_1 \setminus \text{Int } D_2$ , donde  $D_1$  y  $D_2$  son dos regiones simples en ambas direcciones y  $D_2 \subset \text{Int } D_1$ ;*
- *además,  $\mathbf{F} = (P, Q) \in \mathcal{C}^1(D_1)$ ;*

*considerando como orientación positiva del borde  $\partial D$  la descrita por  $\partial D^+ = \partial D_1^+ + \partial D_2^-$ .*

(2) La segunda ampliación que daremos de las hipótesis bajo las cuales se cumple la fórmula de Riemann-Green tiene interés teórico y su demostración es instructiva, pero demasiado larga para incorporarla a este curso. Consiste en deformar un conjunto sobre el que sabemos que se cumple la fórmula, siempre que esa deformación sea un cambio de variable con buenas condiciones de diferenciabilidad.

**Corolario 2.41** *Sea  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación de clase  $\mathcal{C}^2$  y con jacobiano estrictamente positivo en todos los puntos. Si  $D^* \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto sobre el que  $\mathbf{T}$  es inyectiva y sobre el que además se cumple la fórmula de Riemann-Green, entonces sobre  $D = \mathbf{T}(D^*) \subset \mathbb{R}^2$  también se verifica la fórmula de Riemann-Green.*

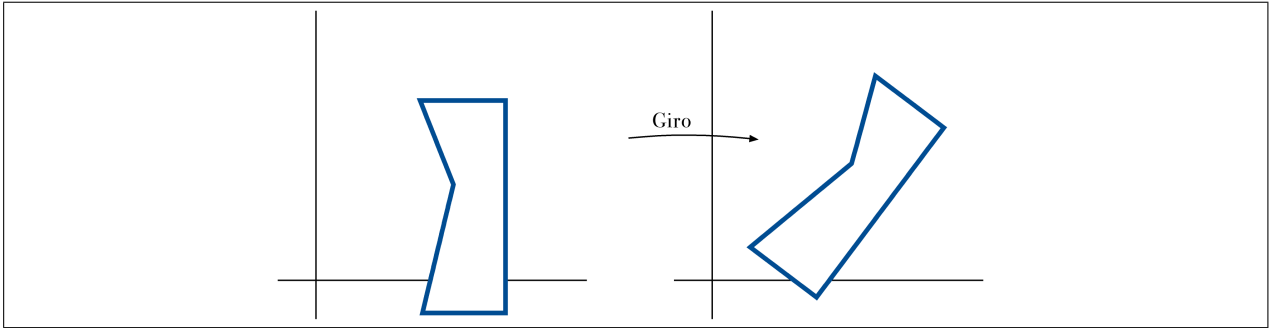


Figura 2.48: Mediante un giro pueden pasar a ser regiones simples en las dos direcciones algunos conjuntos que no lo eran

DEMOSTRACIÓN: Consultar el apartado 2.7.13.

Por ejemplo, si  $D \subset \mathbb{R}^2$  no es simple en las dos direcciones pero mediante un giro lo podemos convertir en un conjunto que sí lo sea, entonces sobre  $D$  es válida la fórmula de Riemann-Green, puesto que un giro en  $\mathbb{R}^2$  es una transformación de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

(3) Hasta ahora, la validez de la fórmula de Riemann-Green la hemos estudiado comenzando con un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que cumple ciertas condiciones y después considerando su frontera. También puede hacerse la revés, comenzar con una curva cerrada simple en el plano y considerar el conjunto que encierra.

Cualquier curva cerrada simple divide al plano en dos zonas, la de los puntos que están dentro de la curva y la de los que están fuera de la curva. Como ocurría con las orientaciones antihorarias, el concepto de estar dentro de la curva es muy visual pero para definirlo necesitamos utilizar alguna herramienta de tipo técnico, alguna herramienta matemática. Lo más útil es el teorema de la curva de Jordan <sup>(69)</sup>, que asegura que si  $C$  es la imagen de un camino cualquiera (en el sentido de que basta con que sea continuo) y que es inyectivo salvo por el hecho de que la imagen del punto inicial y del punto final del intervalo coinciden, entonces el resto del plano,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , está formado por dos conjuntos, cada uno de los cuales tiene la propiedad de que dados dos puntos cualesquiera siempre pueden unirse por un camino que no se sale del conjunto; y además, uno de esos dos conjuntos es acotado y el otro no. El conjunto acotado es el que se denomina **la parte de dentro de la curva  $C$** .

Si llamamos  $D$  al conjunto que está dentro de una curva cerrada simple  $C$ , puede demostrarse que  $C = \partial D$  (donde  $\partial D$  es aquí la frontera de  $D$ ,  $\text{Fr } D$ , de la definición 2.51) y que la fórmula de Riemann-Green es válida para una orientación sobre  $C$ . La demostración para este caso supera ampliamente los confines del presente curso <sup>(70)</sup>

(4) Nuestra última generalización tampoco la vamos a demostrar, incluso su formulación la haremos de una forma más laxa que las demás ampliaciones del teorema de Riemann-Green. A pesar de que la formulación no sea totalmente precisa, será muy útil en las aplicaciones concretas.

Cuando un conjunto acotado  $D \subset \mathbb{R}^2$  tenga como frontera <sup>(71)</sup>  $\partial D$  una unión disjunta de curvas cerradas simples y además pueda descomponerse en unión de un número finito

<sup>69</sup>La demostración de este resultado, que no es nada elemental, pertenece a la rama de las matemáticas que se conoce con el nombre de topología. Puede consultarse una prueba en [12].

<sup>70</sup>Ver un planteamiento de este tipo en [2], 7.5.

<sup>71</sup>Ver definición 2.51 en el apartado 2.7.7.

de conjuntos que no se solapen y sobre los que sea válida la Fórmula de Riemann-Green,

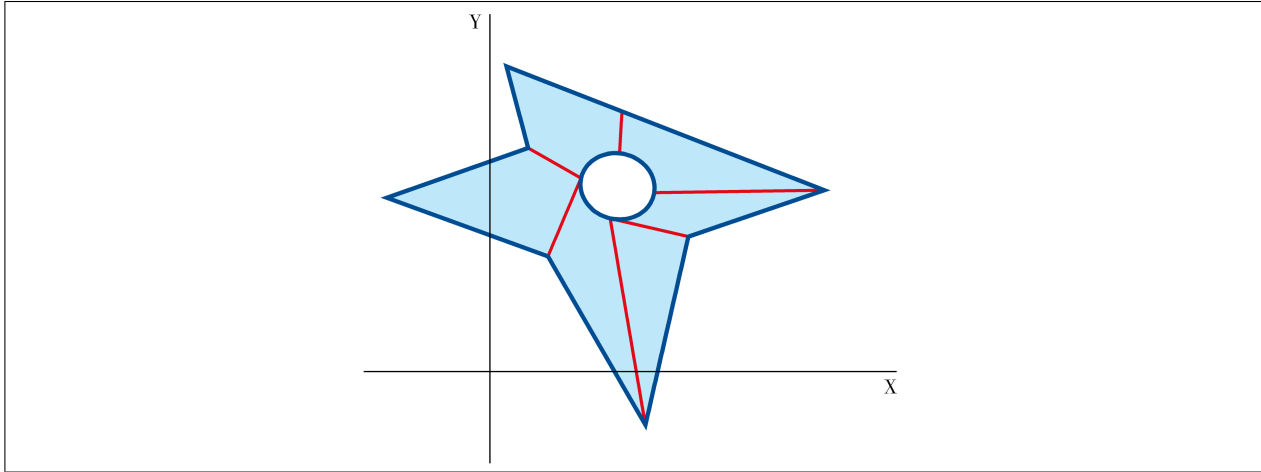


Figura 2.49: Muchos conjuntos pueden dividirse en un número finito de regiones simples en las dos direcciones

también sobre  $D$  es válida la misma fórmula para una determinada orientación de  $\partial D$  que llamaremos **positiva**.

No intentaremos desarrollar una demostración, daremos solamente un ejemplo que pone de manifiesto la manera de proceder, para aplicar las mismas ideas cuando nos enfrentemos a un caso concreto.

**Ejemplo 2.42** Sobre una corona circular puede demostrarse la Fórmula de Riemann-Green a través de una descomposición en cuatro regiones simples. <sup>(72)</sup>

Tomamos el origen de coordenadas en el centro de las circunferencias que limitan a la corona  $D$ , con lo que las ecuaciones que definen a  $D$  serán del tipo  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ , con  $0 < a < b$ , y llamamos  $D_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) a los cortes de  $D$  con los cuatro cuadrantes (ver la figura 2.29). Cada  $D_i$  es una región simple en los dos sentidos, luego le es aplicable el teorema 2.38 <sup>(73)</sup>. De modo que si  $(P, Q)$  es un campo vectorial sobre  $D$ , podemos aplicar

<sup>72</sup>Puede parecer que para una corona circular ya se ha probado la fórmula, a través de la primera ampliación de las hipótesis, la que nos permitía que el conjunto tuviera agujeros, puesto que la corona es diferencia de dos regiones simples, pero no es así. Como advertimos más arriba, para el razonamiento que justificó aquella ampliación a conjuntos del tipo  $D = D_1 \setminus \text{Int } D_2$  tuvimos que suponer que el campo vectorial estaba definido y era de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre todo  $D_1$ , no nos bastó con que lo fuera sobre la diferencia.

Ambas cosas no son lo mismo. Así, por ejemplo, el campo utilizado en la demostración del teorema 1.32.B) sobre esta misma corona circular daría

$$\int_{\partial D^+} P dx + Q dy = 2\pi(b^2 - a^2), \quad \text{que es distinto de} \quad \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0.$$

En cambio, para nuestro razonamiento de ahora será suficiente con suponer que el campo vectorial es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $D$ .

<sup>73</sup>También deduciríamos que sobre cada  $D_i$  se cumple la fórmula de Riemann-Green utilizando el teorema 2.37 y el corolario 2.41, puesto que, por ejemplo,  $D_1 = D \cap \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$  es la imagen del rectángulo  $[a, b] \times [0, \pi/2]$  mediante la transformación de clase  $\mathcal{C}^2$  que define las coordenadas polares,  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

la fórmula a  $(P, Q)$  y cada uno de los  $D_i$ , y sumando todas las igualdades,

$$\sum_{i=1}^4 \int_{\partial D_i^+} P dx + Q dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

El miembro de la derecha es igual a la integral sobre la unión de los  $D_i$ , gracias a la aditividad de las integrales dobles. En cuanto a la suma que aparece en el miembro de la izquierda, no podemos escribirla como la integral sobre la unión de las curvas, puesto que ni los caminos que parametrizan a  $\partial D_i$  son sumables en el sentido de la definición 1.9, ni les podemos aplicar la observación 62, dado que los bordes  $\partial D$  no son disjuntos.

No terminaremos la demostración, nos conformaremos con una guía de la forma de actuar a partir de aquí, con el siguiente razonamiento que será de aplicación bastante general. En cada una de las curvas cerradas simples  $\partial D_i$  distinguimos dos tipos de tramos: los que ya pertenecían a  $\partial D$ , que siguen con la misma orientación, y los que hemos introducido al dividir  $D$  en los  $D_i$ . Estos últimos se recorren siempre dos veces, una en cada sentido, puesto que por su propia naturaleza son frontera de dos  $D_i$  diferentes, uno a cada lado. Por tanto, en la suma de las integrales, estos tramos se cancelan, quedando únicamente los tramos que formaban  $\partial D$ , con la orientación que, como dijimos más arriba, llamaremos positiva. ■

#### 2.6.4. Otras formulaciones del Teorema de Riemann-Green

##### FORMA VECTORIAL

Consideremos a los objetos bidimensionales de la Fórmula de Riemann-Green como sumergidos en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $D$  contenido en el plano horizontal —identificando  $D$  con  $\Sigma = D \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ — y el campo vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q)$  dotado de una tercera componente que es nula en todos los puntos —identificando  $\mathbf{F}$  con  $\mathbf{F}^*$ , donde

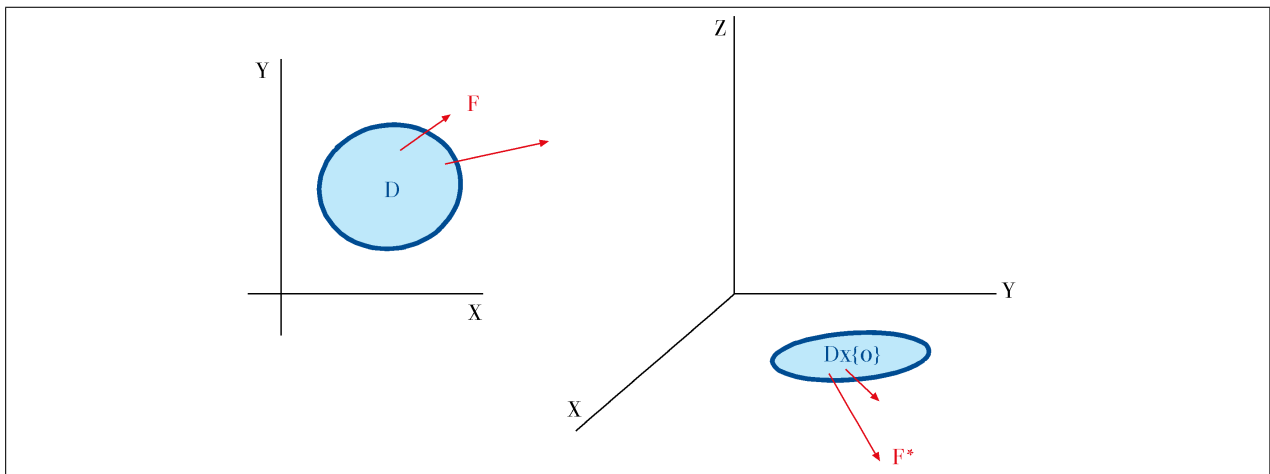


Figura 2.50: Inmersión de  $D$  y  $\mathbf{F}$  en  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}^*(x, y, 0) = (P(x, y), Q(x, y), 0) .$$

**Corolario 2.43 (Forma Vectorial de la Fórmula de Riemann-Green)** *Bajo las hipótesis y notaciones del teorema de Riemann-Green o de alguna de sus extensiones (apartado 2.6.3) y del párrafo anterior,*

$$\int_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathbf{rot} \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{k} \, dA,$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector unitario  $(0, 0, 1)$  y  $\Sigma$  es considerada como una superficie definida explícitamente por  $z = 0$  (ver la definición de  $\partial\Sigma^+$  para este caso en 3.34).

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que el rotacional  $\mathbf{rot} \mathbf{F}^* = \nabla \times \mathbf{F}^*$  es un vector con las dos primeras coordenadas nulas y la tercera igual a  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ .

La forma vectorial del teorema de Riemann-Green arroja un poco de luz sobre el sentido que tiene la diferencia de derivadas parciales que aparece en la integral doble: su razón de ser reside en que es una componente de un rotacional. Además, nos permitirá comprobar inmediatamente que la fórmula de Riemann-Green es un caso particular de la fórmula de Stokes.

#### TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO

Así como la anterior formulación nos liga el resultado con el teorema de Stokes para superficies en  $\mathbb{R}^3$  (teorema 3.35), la que exponemos a continuación nos lo relaciona con el teorema de la divergencia para volúmenes en  $\mathbb{R}^3$  (teorema 4.12). Para enunciarla repensaremos la orientación en una curva cerrada simple, que definimos a través del sentido del vector tangente unitario <sup>(74)</sup>, como la selección de una de las dos normales unitarias a la curva.

**Definición 2.44** *Supóngase que  $D \subset \mathbb{R}^2$  es una región sobre la que es válida la Fórmula de Riemann-Green y que cada una de las curvas cerradas simples que forman  $\partial D^+$  tiene una parametrización regular a trozos  $(x(t), y(t))$ . La **normal exterior a  $\partial D$  en un punto regular  $(x(t), y(t))$**  es*

$$\mathbf{n}(x(t), y(t)) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

No hay más que multiplicar escalarmente  $\mathbf{n}$  por el vector tangente a  $\partial D$ ,  $(x', y')$ , y ver que da cero para entender el nombre de *normal* a  $\partial D$ . El nombre de *exterior* se justifica mediante la figura, que muestra cómo la normal así definida apunta siempre hacia fuera del conjunto  $D$ .

Como comentábamos a continuación del teorema 1.28, también aquí hemos de demostrar que la definición de normal exterior depende solamente del conjunto  $D$  y del punto donde se calcule, no depende de la parametrización sobre  $\partial D^+$  que utilicemos para calcularla <sup>(75)</sup>.

<sup>74</sup>La orientación de una curva cerrada simple la habíamos definido mediante la utilización de cambios de variable con derivada positiva (ver definición 1.22), pero eso es equivalente a seleccionar uno de los dos vectores tangentes unitarios.

<sup>75</sup>En efecto, si  $(x_1(t_1), y_1(t_1))$  es cualquier otra parametrización de  $\partial D^+$ , con cambio de parámetros  $t_1 = h(t)$ , entonces  $h'(t)$  siempre es estrictamente positivo (ignoramos los puntos del conjunto finito donde la derivada puede no existir, ya que estamos alrededor de un punto regular de la curva). Entonces

$$(y'(t), -x'(t)) = h'(t)(y'_1(h(t)), -x'_1(h(t))) = h'(t)(y'_1(t_1), -x'_1(t_1)),$$

que una vez normalizados serán vectores iguales.



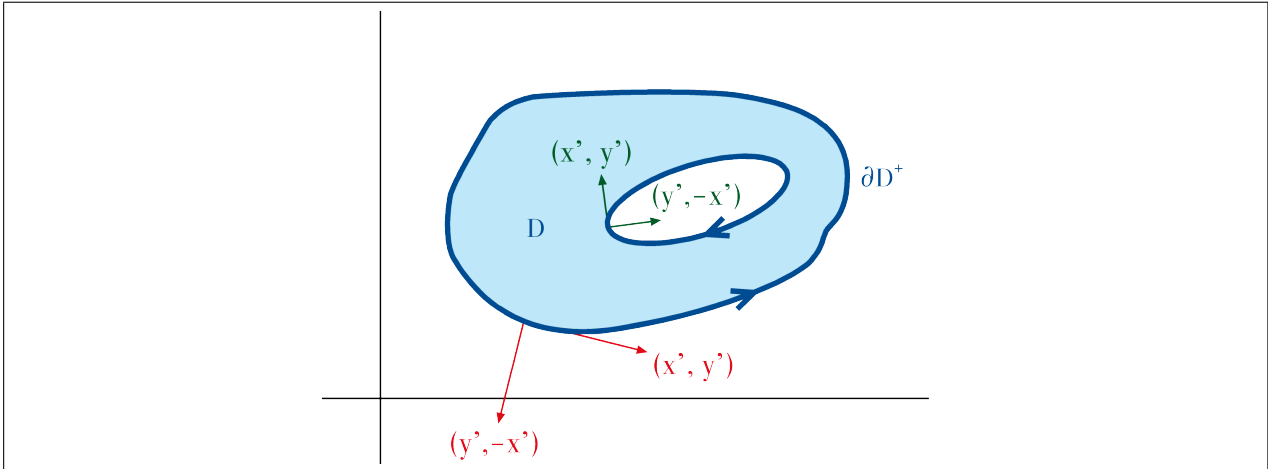


Figura 2.51: Vector tangente  $(x', y')$  en dos puntos de  $\partial D^+$ , con sus respectivos vectores ortogonales en el sentido de la normal exterior,  $(y', -x')$ . En ambos casos la normal exterior apunta hacia fuera de  $D$

**Teorema 2.45 (de la divergencia en el plano)** *Bajo las hipótesis y notaciones del teorema de Riemann-Green o de alguna de sus extensiones (apartado 2.6.3),*

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA,$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal exterior a  $D$ .

DEMOSTRACIÓN: Aplicaremos la *Formula de Riemann-Green*, pero no al campo  $\mathbf{F} = (P, Q)$ , sino al campo  $(-Q, P)$ . Llamando, como siempre,  $\mathbf{c} = (x, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a una parametrización de  $\partial D$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \circ \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{n} \circ \mathbf{c}) \|\mathbf{c}'\| \, dt = \int_a^b (\mathbf{F} \circ \mathbf{c}) \cdot (y', -x') \, dt = \int_a^b (Py' - Qx') \, dt = \\ &= \int_{\partial D^+} -Q \, dx + P \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA. \end{aligned}$$

**63.** Ambos resultados, la forma vectorial y el teorema de la divergencia en el plano son equivalentes al de Riemann-Green. Es decir, si suponemos cierto uno de estos dos entonces podemos deducir la fórmula de Riemann-Green.

**2.6.5. Aplicaciones del teorema de Riemann-Green**

A partir del teorema de Riemann-Green es posible obtener una fórmula para el área de un recinto, que tiene una particularidad que la distingue de las demás que hemos visto hasta ahora: el cálculo se realiza únicamente sobre la frontera del conjunto. Apoyándose en este resultado, se construyen unos instrumentos que se llaman *planímetros* (ver [4]) y que computan el área a medida que una rueda recorre el borde del conjunto.

**Corolario 2.46** *Si sobre  $D$  es válida la fórmula de Riemann-Green, entonces*

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} -y \, dx + x \, dy.$$

DEMOSTRACIÓN: *La fórmula del enunciado se obtiene por aplicación directa de la de Riemann-Green:*

$$\int_{\partial D^+} -y \, dx + x \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dA = \iint_D 2 \, dA = 2A(D).$$

**CAMPOS CONSERVATIVOS**

Estamos ahora en condiciones de dar una *justificación* de que sobre un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  que no contenga agujeros, un campo vectorial que sea cerrado (es decir, que tenga la propiedad 4 del teorema 1.32) es siempre exacto (propiedad 3 del mismo teorema).

Sea  $\mathbf{F} = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial que cumple la hipótesis 4 del teorema 1.32. Tómesese cualquier curva cerrada simple,  $C \subset D$ , la dotamos de una orientación y queremos probar que la integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $C^+$  es nula, con lo que habremos demostrado la propiedad

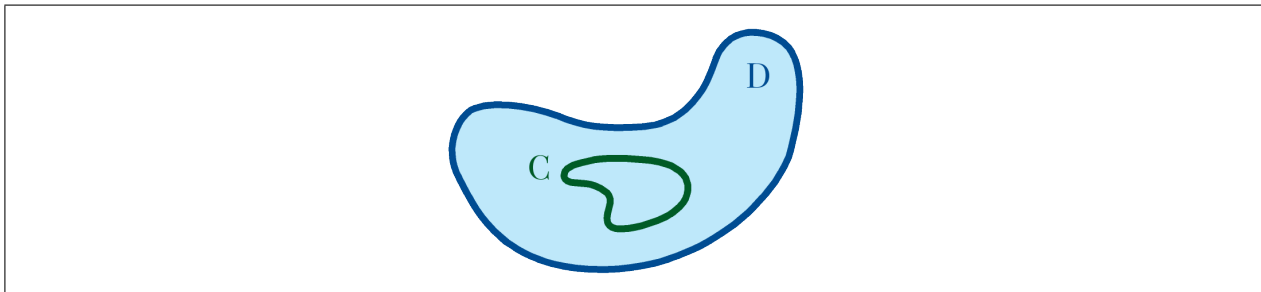


Figura 2.52: Una curva cerrada simple contenida,  $C$ , en  $D$

1' del teorema 1.32, que es equivalente a la 3.

El conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  queda dividido en dos trozos, uno de los cuales es acotado y el otro no (cf. lo que se comentó en el apartado 2.6.3(3) sobre el teorema de la curva de Jordan). Nuestra hipótesis sobre la ausencia de agujeros significa que la parte acotada  $K$  está toda ella contenida en el dominio  $D$ . Suponiendo que sobre  $K$  pueda aplicarse el teorema de Riemann-Green, y observando que  $C = \partial K$  y que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  por la hipótesis 4, concluimos que

$$\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0.$$

## ROTACIÓN DE UN FLUIDO

Pensamos en una lámina de agua muy poco profunda, que identificamos con un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , y nos preguntamos si, al moverse el agua, una boya de diámetro infinitesimal centrada en un punto pero anclada en el fondo giraría como efecto de la velocidad que trata de arrastrarla. Construimos un modelo del movimiento de un fluido sobre un plano, para lo que el campo vectorial  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  representará la velocidad del fluido en el punto  $\mathbf{p}$ . Supuesta conocida la función  $\mathbf{F}$ , que deberá ser de clase  $\mathcal{C}^1$ , nos interesa averiguar si en un determinado punto el fluido está sometido a una rotación.

Llamaremos  $B_\varepsilon$  al círculo (o bola cerrada) de centro en  $\mathbf{p}$  y radio  $\varepsilon$ , y  $C_\varepsilon$  la circunferencia con el mismo centro y el mismo radio, que es la frontera de  $B_\varepsilon$ ,  $\partial B_\varepsilon$ . Y planteamos la

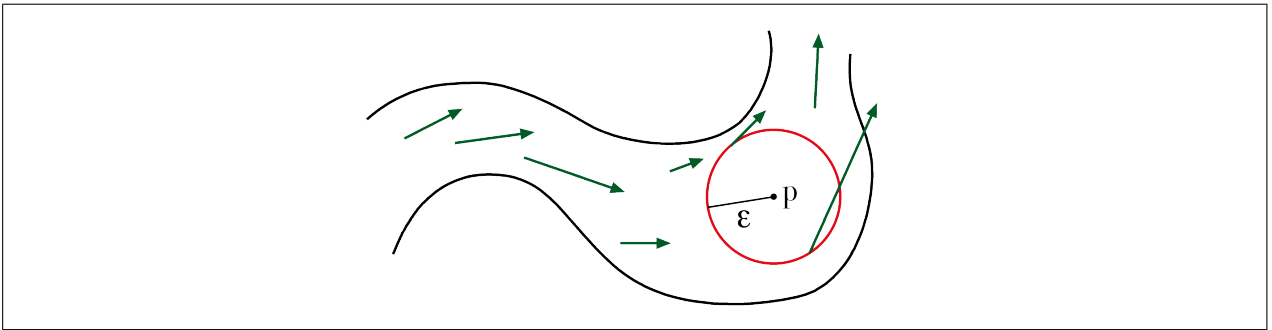


Figura 2.53: Los puntos de la circunferencia de centro  $\mathbf{p}$  y radio  $\varepsilon$  están sujetos a la acción de la velocidad  $\mathbf{F}$

expresión

$$\frac{1}{\ell(C_\varepsilon)} \int_{C_\varepsilon^+} \frac{\mathbf{F}}{\varepsilon} \cdot d\mathbf{s}.$$

De acuerdo con el teorema 1.15, la integral de  $\mathbf{F}/\varepsilon$  es la integral a lo largo de  $C_\varepsilon$  de la componente tangencial (en el sentido de giro dado por la orientación de  $C_\varepsilon^+$ ) de la velocidad partida por el radio, es decir, de la medida de la velocidad angular. Al estar dividida por la longitud de la circunferencia, puede interpretarse como un promedio de la componente tangencial de la velocidad angular del fluido alrededor de  $C_\varepsilon^+$ . Pasando al límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero, si dicho límite existe obtendremos una **medida de la rotación del fluido en el punto  $\mathbf{p}$** .

Además,

$$\frac{2}{\ell(C_\varepsilon)} \int_{C_\varepsilon^+} \frac{\mathbf{F}}{\varepsilon} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int_{C_\varepsilon^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

es la integral a lo largo de la circunferencia de la componente tangencial de la velocidad, dividida por el área del círculo, así que el resultado de pasar al límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero podremos llamarlo (en caso de que el límite exista, claro) la **tasa de variación de esa circulación respecto al área, en el punto  $\mathbf{p}$** .

Y gracias al teorema de Riemann-Green,

$$\frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int_{C_\varepsilon^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint_{B_\varepsilon} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Por el teorema del valor medio para integrales, la última integral es igual a

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\mathbf{p} + \mathbf{q}_\varepsilon)$$

para cierto vector  $\mathbf{q}_\varepsilon$  de longitud menor que  $\varepsilon$ . Ahora podremos pasar al límite cuando  $\varepsilon$  tiende a cero, demostrando que el límite existe y calculando su valor. En efecto, como las derivadas de  $P$  y de  $Q$  son funciones continuas, el límite de la última expresión cuando  $\varepsilon$  tiende a cero existe, y es igual al valor de  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\mathbf{p})$ . Si este número es positivo, indica que en las proximidades infinitesimales del punto  $\mathbf{p}$  el fluido gira en el sentido antihorario, mientras que si es negativo gira en el sentido horario. Y si es cero, significa que no hay rotación. Hemos demostrado, en resumen,

**Corolario 2.47** *(Notaciones como en el corolario 2.43.) La rotación del fluido en el punto  $\mathbf{p}$  es igual a la única componente no nula del vector  $\mathbf{rot F}^*(\mathbf{p})$ .*

(También el teorema de la divergencia en el plano (teorema 2.45) conlleva una interpretación física del significado de la divergencia, ver, por ejemplo, [10]. páginas 821 y 822.)

## 2.7. Notas adicionales

### 2.7.1. Función de Dirichlet

**Teorema 2.48** La función que a cada número real  $x$  asocia  $\lim_n \lim_m [\cos(\pi n!x)]^m$ , coincide con la **función de Dirichlet**, que asigna 1 a los números racionales y 0 a los irracionales.

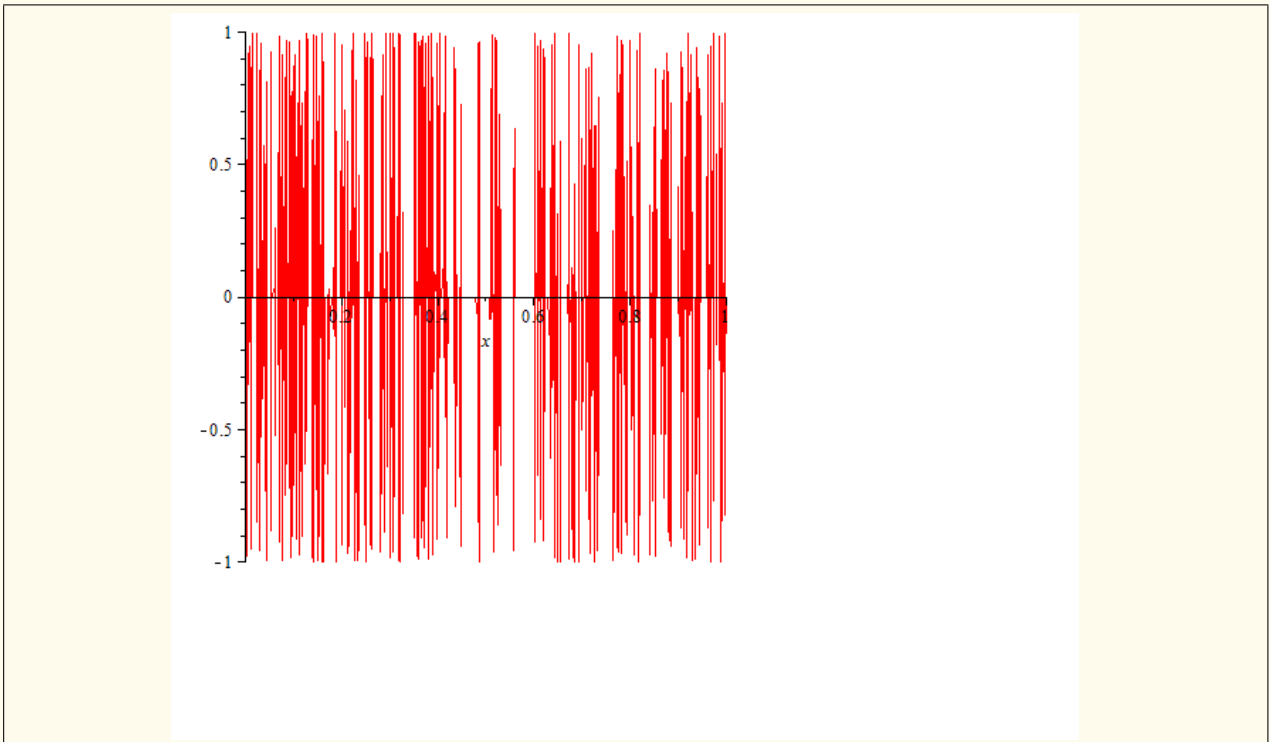


Figura 2.54: Gráfica de la función  $[\cos(\pi n!x)]^m$  para  $n = 30$ ,  $m = 31$  obtenida con Maple 15. No se aprecia la convergencia a la función de Dirichlet, ¿por qué?

DEMOSTRACIÓN:

- Si  $x \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $n!x$  no es nunca un número entero, luego  $|\cos(\pi n!x)|$  es estrictamente menor que 1. Al elevarlo a exponentes  $m$  cada vez mayores ha de tender a cero. Como el primer límite  $\lim_m$  ya es cero, al pasar al límite cuando  $n$  tiende a infinito seguimos teniendo un cero.
- Si  $x \in \mathbb{Q}$ , entonces para  $n$  pequeño no sabemos asegurar nada. Pero como nos interesa el límite en  $n$  podemos fijarnos solamente en valores grandes de  $n$ . Ahora bien, para  $n$  suficientemente grande es seguro que  $n!x$  es un entero par, luego  $\cos(\pi n!x) = 1$  y por tanto  $[\cos(\pi n!x)]^m = 1$  para  $n$  suficientemente grande y para cualquier  $m$ . El límite, por tanto, ha de ser igual a 1.

### 2.7.2. Condición suficiente de integrabilidad

Otra condición suficiente de integrabilidad, que es similar a la del teorema 2.10 y también muy útil en las aplicaciones, se refiere a conjuntos que sean imágenes de funciones derivables con continuidad (en el ejemplo 2.9, la diagonal es la imagen de  $t \rightsquigarrow (t, t)$ ).

**Teorema 2.49** Es integrable cualquier función definida sobre un rectángulo que sea acotada y cuyas discontinuidades estén contenidas en una unión finita de imágenes de funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  definidas sobre intervalos cerrados y acotados.

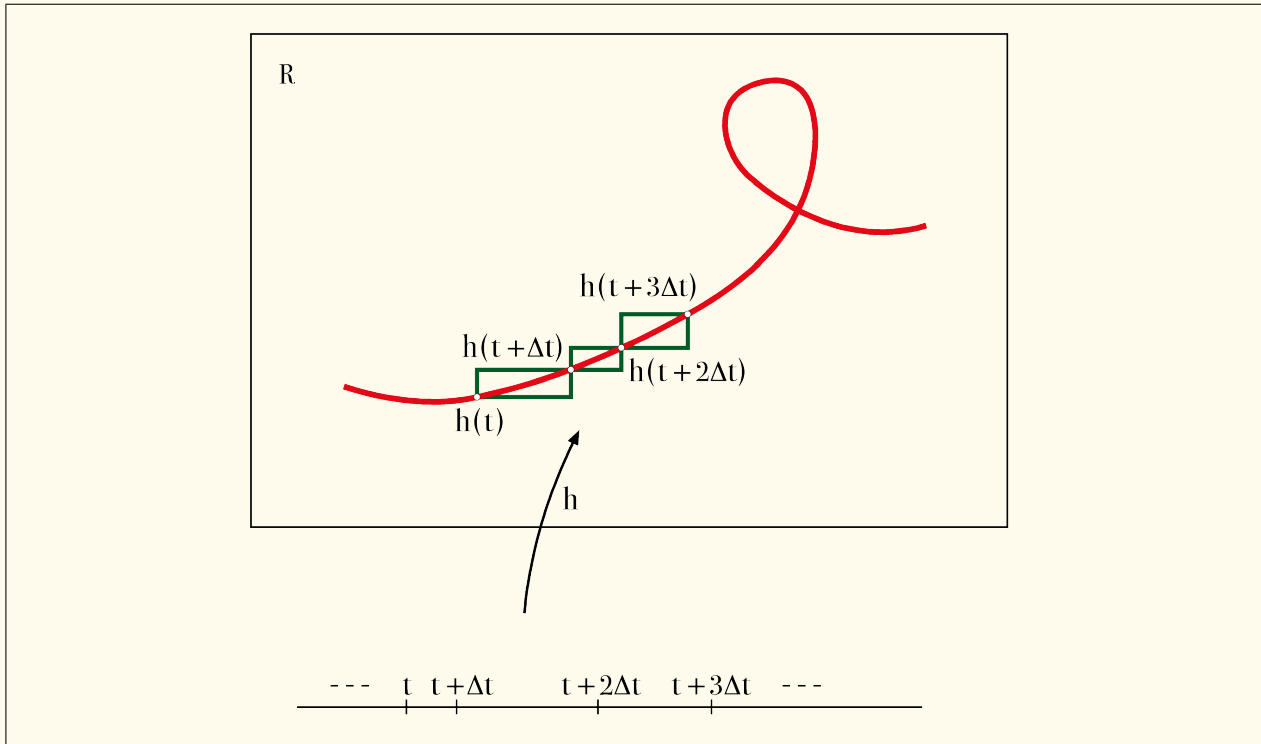


Figura 2.55: Para una partición suficientemente fina en el dominio de  $h$ , la imagen de  $h$  está contenida en una unión de rectángulos, cada uno de los cuales tiene la diagonal acotada por  $M\Delta t$ . La suma de las áreas de esos rectángulos puede hacerse tan pequeña como se quiera

JUSTIFICACIÓN: El teorema de los incrementos finitos, junto con el hecho de que la derivada sea continua sobre un rectángulo, garantiza que cada función  $h$  de clase  $\mathcal{C}^1$  admite una acotación del tipo  $\|h(B) - h(A)\| \leq M|B - A|$  para todo par de puntos distintos en el dominio de  $h$ . Una partición suficientemente fina del dominio da lugar entonces a una colección de rectángulos que recubren la imagen y cuya área total es tan pequeña como se quiera.

DEMOSTRACIÓN: Ver [2], teorema 7.2.11.

**64.** En la condición suficiente de integrabilidad del teorema 2.49 no puede rebajarse la hipótesis de que las funciones sean de clase  $\mathcal{C}^1$  a que sean solamente continuas (como ocurría en la condición suficiente del teorema 2.10).

El motivo es que algunas funciones continuas de una variable tienen una imagen en  $\mathbb{R}^2$  que no es en absoluto despreciable desde el punto de vista de las integrales dobles, incluso las hay que rellenan todo un cuadrado. Por ejemplo, puede consultarse una función  $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  que es continua y suprayectiva en [1], 9.7 o en [21].

### 2.7.3. Demostración (parcial) del teorema 2.11

1. La propiedad para la suma se ha probado en el texto.
2. Para el producto por un escalar la demostración es muy similar a la suma. Las sumas de Riemann de  $kf$  y de  $f$  están relacionadas por el factor  $k$ ,

$$S_n(kf) = \sum_{i,j=1}^n kf(\xi_{ij})\Delta x_i\Delta y_j = k \sum_{i,j=1}^n f(\xi_{ij})\Delta x_i\Delta y_j \rightarrow k \iint_R f,$$

donde la última convergencia se sigue de la integrabilidad de  $f$  y de  $g$ , independientemente de cuáles sean los puntos  $\xi_{ij}$ .

3. *Monotonía.* Si  $f \leq g$  en todos los puntos, entonces  $f(\xi_{ij}) \leq g(\xi_{ij})$  en cualquier punto  $\xi_{ij}$ , luego

$$S_n(f) = \sum_{i,j=1}^n f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i,j=1}^n g(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = S_n(g),$$

y al pasar al límite se conserva la desigualdad,  $\iint_R f \leq \iint_R g$ .

4. *Valor absoluto.* Una vez que hayamos demostrado la integrabilidad de  $|f|$ , la desigualdad se seguirá de aplicar la propiedad de monotonía a las desigualdades  $-|f| \leq f \leq |f|$ . Para demostrar que  $|f|$  es integrable siempre que lo sea  $f$ , recurrimos al criterio de Darboux (teorema 2.6). Para cada subrectángulo  $R_{ij}$  de una partición, la diferencia entre el supremo y el ínfimo de cualquier función es un supremo,

$$M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|) = \sup\{|f(x, y)| - |f(x', y')| : (x, y), (x', y') \in R_{ij}\}$$

$$M_{ij}(f) - m_{ij}(f) = \sup\{f(x, y) - f(x', y') : (x, y), (x', y') \in R_{ij}\}$$

pero por la propiedad triangular,  $||f(x, y)| - |f(x', y')|| \leq |f(x, y) - f(x', y')|$ , luego cada una de las diferencias que forman el primero de los conjuntos está acotada por alguna de las diferencias que forman el segundo conjunto (observar que en el segundo conjunto están tanto  $f(x, y) - f(x', y')$  como  $f(x', y') - f(x, y)$ ), por tanto

$$U(|f|, \mathcal{P}) - L(|f|, \mathcal{P}) = \sum_{i,j=1}^n [M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|)] \leq \sum_{i,j=1}^n [M_{ij}(f) - m_{ij}(f)] = U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}).$$

Como  $f$  sí que es integrable, para todo número real estrictamente positivo  $\varepsilon$  se puede elegir la partición  $\mathcal{P}$  de manera que el último miembro sea menor que  $\varepsilon$ , lo cual demuestra que  $|f|$  es integrable.

5. *Aditividad.* Volvemos a utilizar el teorema 2.6. Necesitamos probar que dado un  $\varepsilon$  estrictamente positivo, podemos encontrar una partición  $\mathcal{P}$  del rectángulo total  $R$  de modo que  $U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$ , partiendo de que esta propiedad sí que se cumple para sendas particiones de los rectángulos pequeños. Para ello tomamos en cada  $R^k$  una partición  $\mathcal{P}^k$  tal que

$$U(\mathcal{P}^k) - L(\mathcal{P}^k) \leq \frac{\varepsilon}{m}.$$

Ahora construimos una partición  $\mathcal{P}_0$  sobre el rectángulo  $R$  de manera que todas las líneas divisorias, horizontales o verticales, de cada uno de las particiones  $\mathcal{P}^k$  figure también en  $\mathcal{P}_0$ . La figura explica cómo

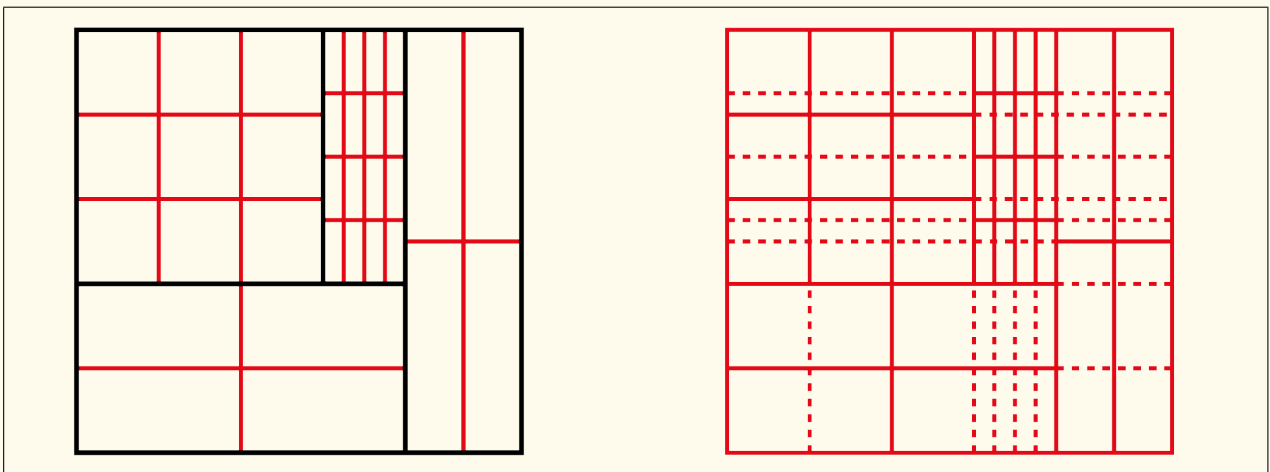


Figura 2.56: Construimos una partición del rectángulo  $R$  a base de prolongar todas las líneas que aparecen en la primera figura.

hacerlo (¡ojo!, no estamos dando una demostración completa de que una  $\mathcal{P}_0$  con estas condiciones pueda construirse, sino solamente una justificación intuitiva).

Si restringimos la nueva partición  $\mathcal{P}_0$  a uno cualquiera de los rectángulos iniciales  $R^k$ , tendremos una

nueva partición  $\mathcal{P}_0^k$  en la que habrá, si acaso, más líneas que las que había con  $\mathcal{P}^k$ . En consecuencia,  $U(\mathcal{P}_0^k) - L(\mathcal{P}_0^k)$  será también menor o igual que  $\varepsilon/m$  (comprobar esto con detalle). Entonces

$$U(\mathcal{P}_0) - L(\mathcal{P}_0) \leq \sum_{k=1}^m U(\mathcal{P}_0^k) - L(\mathcal{P}_0^k) \leq m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

**2.7.4. Demostración de que el mínimo rectángulo que contiene a  $D$  siempre existe**

Haremos la demostración para cualquier dimensión, sustituyendo “rectángulo” por “producto de intervalos cerrados y acotados”.

Como  $D$  es acotado, cada una de sus coordenadas está acotada, es decir, la proyección sobre una cualquiera de las coordenadas,

$$\pi_i(D) = \{r \in \mathbb{R} : \exists x_1, \dots, x_n, (x_1, \dots, \overset{i}{r}, \dots, x_n) \in D\}$$

es un conjunto acotado para  $i = 1, \dots, n$ . Llamamos  $a_i$  a su ínfimo y  $b_i$  a su supremo. El conjunto  $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  es el buscado, como comprobamos a continuación.

Si  $(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ , es trivial que cada  $x_i^0$  está en  $\pi_i(D)$ , luego  $a_i \leq x_i^0 \leq b_i$ . Queda así probado que  $D \subset I$ .

Veamos ahora que  $I$  es el mínimo de los productos de intervalos cerrados y acotados que contienen a  $D$ . De la definición de ínfimo y supremo se sigue que para cada coordenada,  $[a_i, b_i]$  es el menor intervalo cerrado y acotado que contiene a  $\pi_i(D)$ . Entonces, si  $I' = [a'_1, b'_1] \times \dots \times [a'_n, b'_n]$  es cualquier otro intervalo cerrado y acotado que contiene a  $D$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  se tiene

$$[a'_i, b'_i] \supset \pi_i(D) \supset [a_i, b_i].$$

Luego  $I' \supset I$ , como queríamos demostrar.

**2.7.5. Demostración del teorema 2.26**

Sumergimos a  $D$  en dos rectángulos  $R$  y  $R'$  y construimos sendas ampliaciones de  $f$  a  $R$  y a  $R'$ ,  $f^*$  y  $f^{*'}$ , respectivamente. Nuestro objetivo es demostrar que  $f^*$  es integrable si y sólo si lo es  $f^{*'}$ , y que en este caso,  $\int_R f^* = \int_{R'} f^{*'}$ .

Añadimos temporalmente la suposición de que uno de los dos rectángulos está contenido en el otro, luego veremos que con demostrarlo con esta hipótesis adicional es suficiente. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $R \subset R'$ .

Si  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  y  $R' = [a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2]$ , necesariamente se tienen las desigualdades  $a'_i \leq a_i \leq b_i \leq b'_i$ ,

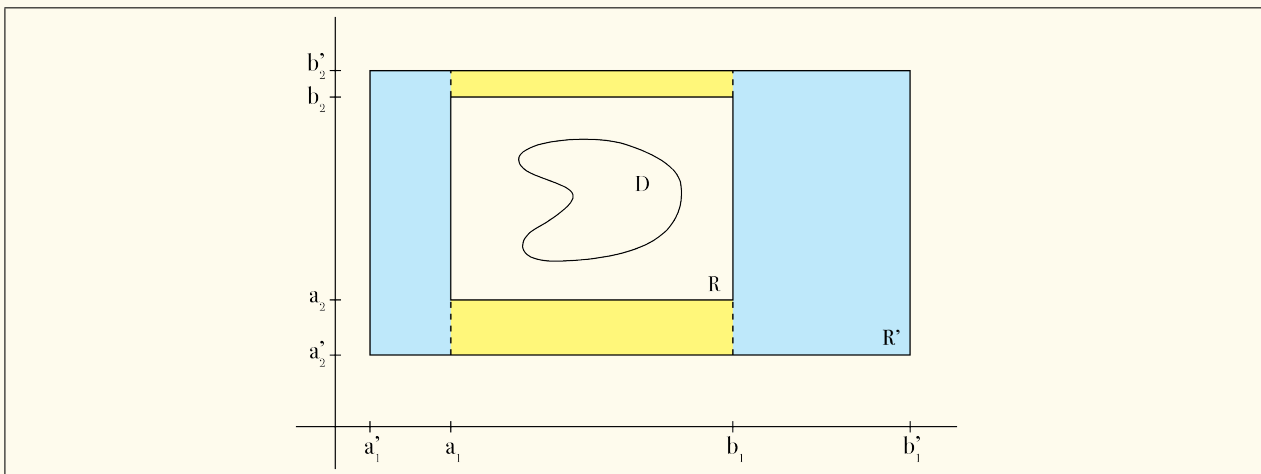


Figura 2.57: La función  $f^{*'}$  es constantemente nula sobre cada uno de los cuatro rectángulos coloreados

( $i = 1, 2$ ). Entonces

$$R' = R \cup ([a'_1, a_1] \times [a'_2, b'_2]) \cup ([b_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2]) \cup ([a_1, b_1] \times [a'_2, a_2]) \cup ([a_1, b_1] \times [b_2, b'_2]).$$



**65.** En la figura resulta evidente esta identidad, pero debe comprobarse usando las desigualdades que definen a  $R$  y  $R'$ , de lo contrario no se tendría una demostración.

Además, los cinco rectángulos no se solapan (comprobar también que no se solapan, tomándolos de dos en dos). Por tanto, aplicando el teorema 2.28 a  $R'$  y  $f^{*'}$ ,

$$\iint_{R'} f^{*'} = \iint_R f^{*'} + 0 + 0 + 0 + 0 = \iint_R f^*,$$

donde la primera igualdad se sigue de que  $f^{*'}$  es nula sobre cada punto de los cuatro rectángulos que forma  $R' \setminus R$ , y la segunda de que  $f^{*'}$  y  $f^*$  coinciden sobre  $R$ .

**66.** Estas igualdades hay que entenderlas en todos los sentidos: uno de los miembros existe si y sólo si existe el otro; y en caso de existir, son iguales (ver el enunciado del teorema 2.11).

Supongamos finalmente que entre  $R$  y  $R'$  no hay relación de contenido. Entonces formamos  $R \cap R'$ , que también contiene a  $D$  y terminamos la demostración aplicando dos veces lo que ya hemos probado, primero a  $R$  y  $R \cap R'$ , y después a  $R'$  y  $R \cap R'$ .

### 2.7.6. Demostración del teorema 2.29, del valor medio para integrales, en el caso $n = 2$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad <sup>(76)</sup> que  $D$  es una región simple en la dirección de las  $y$ .

Comenzamos la demostración igual que en el caso  $n = 1$ , observando que  $f$  alcanza su mínimo  $m$  y su máximo  $M$  en puntos de su dominio, es decir,

$$m = f(\mathbf{p}^m) \leq \mathbf{p} \leq f(\mathbf{p}^M) = M,$$

para todo  $\mathbf{p} \in D$  y ciertos  $\mathbf{p}^m, \mathbf{p}^M \in D$ , y que  $m \leq \iint_D f/A(D) \leq M$ . No podemos aplicar el teorema de Bolzano, como hicimos en el caso unidimensional, porque no hay nada equivalente para funciones de varias variables, es un resultado que depende de manera esencial del hecho de que la variable tenga un orden total.

**67.** Lo que vamos a hacer es, mediante una estratagema, fijarnos no en todo  $D$  sino en una parte de  $D$  que podamos considerar unidimensional, y a continuación aplicar el teorema de Bolzano.

Gracias a la estructura que tienen las regiones simples podemos construir una función continua definida sobre un intervalo y cuya imagen contenga a  $\mathbf{p}^m$  y  $\mathbf{p}^M$  y esté toda ella contenida en  $D$ . Lo haremos comenzando en  $\mathbf{p}^m$ , “subiendo” hasta el borde superior de  $D$ , siguiendo sobre el borde superior hasta llegar a la altura de  $\mathbf{p}^M$  y, por último, “bajando” hasta  $\mathbf{p}^M$ .

Llamando  $\mathbf{p}^m = (x^m, y^m)$  y  $\mathbf{p}^M = (x^M, y^M)$ ,

$$\varphi_1(x^m) \leq y^m \leq \varphi_2(x^m); \quad \varphi_1(x^M) \leq y^M \leq \varphi_2(x^M)$$

(notaciones como en la definición 2.18). Supongamos que  $x^m \leq x^M$ , nuevamente sin pérdida de generalidad <sup>(77)</sup>, y consideremos entonces el intervalo  $[x^m - (\varphi_2(x^m) - y^m), x^M + (\varphi_2(x^M) - y^M)]$  y la función  $\alpha$  definida sobre él mediante

$$\alpha(t) = \begin{cases} (x^m, t + \varphi_2(x^m) - x^m) & \text{si } t \leq x^m \\ (t, \varphi_2(t)) & \text{si } x^m \leq t \leq x^M \\ (x^M, -t + \varphi_2(x^M) + x^M) & \text{si } t \geq x^M. \end{cases}$$

<sup>76</sup>Si lo que tenemos es una región simple en las  $x$  en lugar de las  $y$ , lo que haremos será cambiar las etiquetas de las variables, intercambiando así los papeles de la  $x$  y la  $y$ , con lo que habremos convertido el problema en otro sobre una región simple en las  $y$ .

<sup>77</sup>Bastaría con intercambiar los papeles de  $x^m$  y  $x^M$ , puesto que lo que importa en la demostración es que hagamos un recorrido entre los puntos  $\mathbf{p}^m$  y  $\mathbf{p}^M$ , sin importar el sentido del recorrido.

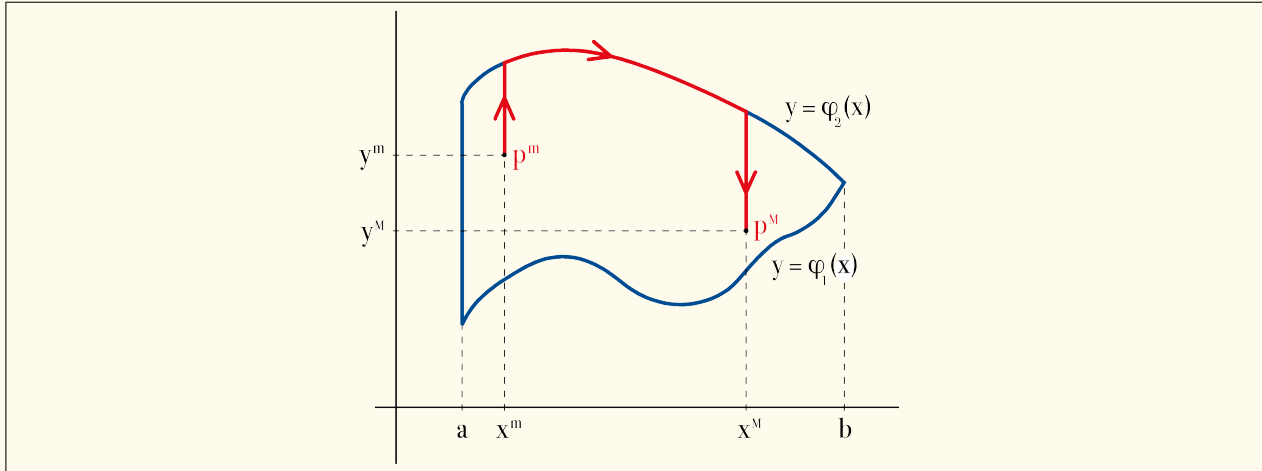


Figura 2.58: En rojo, la imagen del camino  $\alpha$ , que va desde  $p^m$  hasta  $p^M$

Entonces, la aplicación compuesta  $f \circ \alpha$  es una función continua, definida sobre un intervalo, cuyos valores en los extremos del intervalo son precisamente  $f(p^m)$  y  $f(p^M)$  (comprobarlo), luego de acuerdo con el teorema de Bolzano,  $f \circ \alpha$  alcanza cualquier valor intermedio entre estos dos, en particular ha de existir algún punto  $t_0$  del intervalo de forma que

$$f(\alpha(t_0)) = \frac{\iint_D f}{A(D)}.$$

Para terminar la demostración basta tomar  $c_0 = \alpha(t_0)$ .

### 2.7.7. Interior y frontera de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$

Para generalizar a conjuntos arbitrarios los conceptos de interior y de borde que hemos dado para una región simple del plano en la definición 2.19, necesitamos caracterizar éstos de un modo que no se utilicen las desigualdades que delimitan una región simple.

**Teorema 2.50** Sean  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región simple en las  $y$ , y  $p \in \mathbb{R}^2$  un punto cualquiera del plano. Entonces

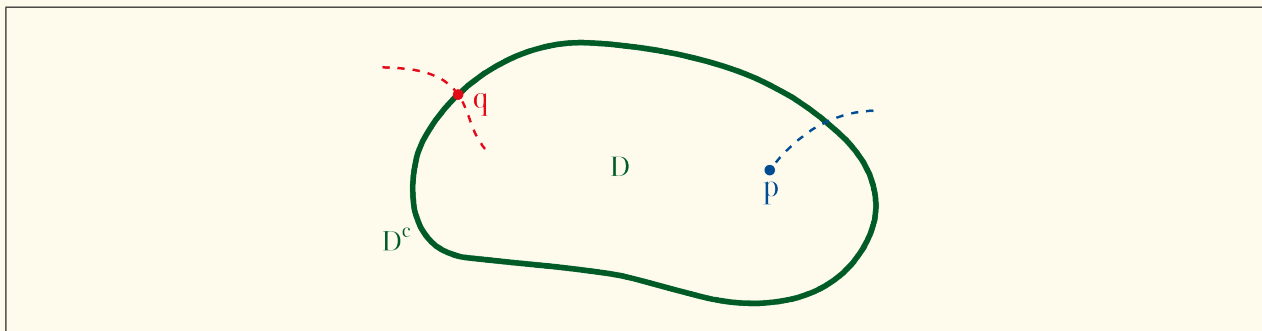


Figura 2.59: Si  $p$  (en azul) es un punto del interior de  $D$ , cualquier sucesión que se le aproxime llega un momento en el que sus términos están en  $D$ . Un punto  $q$  de la frontera de  $D$  (en rojo) es límite tanto de sucesiones contenidas en  $D$  como de sucesiones contenidas en  $D^c$

1.  $p \in \text{Int } D$  si y sólo si no es el límite de ninguna sucesión de vectores que pertenezcan todos ellos al complementario de  $D$ ,  $D^c$ .
2.  $p \in \partial D$  si y sólo si es límite de una sucesión de vectores de  $D$  y de otra sucesión de vectores de  $D^c$ .

DEMOSTRACIÓN: Utilizaremos las notaciones de la definición 2.19 y haremos la demostración para el caso de conjuntos simples en la dirección de las  $y$ ; si se tratase de conjuntos simples en la dirección de las  $x$ , los razonamientos serían totalmente análogos.

1. Comenzamos suponiendo que  $\mathbf{p} = (x, y)$  está en  $\text{Int } D$ , es decir,  $a < x < b$ ,  $\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)$ , y razonamos por reducción al absurdo. Si  $\mathbf{p}$  es límite de una sucesión de puntos  $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n)$ , entonces para todo índice  $n$  a partir de un cierto  $n_0$ ,  $a < x_n < b$ . Si los  $\mathbf{p}_n$  no son de  $D$ , para esos mismos  $n$  habrá de cumplirse que o bien hay infinitos  $n$  con  $\varphi_1(x_n) > y_n$  (en cuyo caso  $\varphi_1(x) \geq y_n$ , que es falso), o bien hay infinitos  $n$  con  $y_n > \varphi_2(x_n)$  (lo que implicaría que  $y \geq \varphi_2(x)$ , que también es falso).

Recíprocamente, tomamos un punto  $\mathbf{p}$  que no pertenezca a  $\text{Int } D$ . Tenemos que demostrar que existe alguna sucesión de puntos de  $D^c$  que converja a  $\mathbf{p}$ . En caso de que el propio  $\mathbf{p}$  no pertenezca a  $D$ , la sucesión constante  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \dots)$  nos sirve. Y en caso de que  $\mathbf{p} \in D$ , necesariamente habrá de ser del borde de  $D$ ,  $\mathbf{p} \in \partial D$ . Dada la definición del borde (definición 2.19), terminamos de construir la sucesión de puntos de fuera de  $D$  discutiendo varios casos:

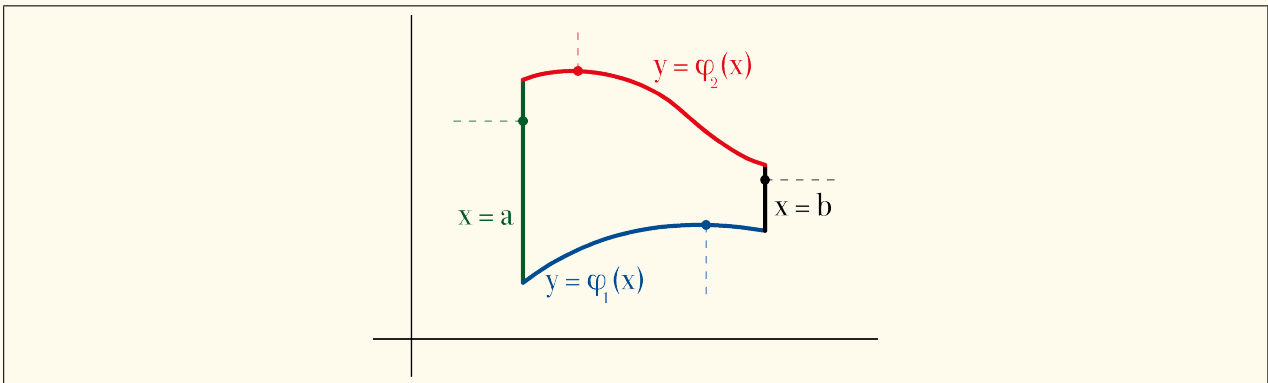


Figura 2.60: Sucesión que converge a un punto de  $\partial D$  con puntos de  $D^c$ , distinguiendo los cuatro casos posibles

**En caso de que  $x = a$**  nos sirve la sucesión  $(x - 1/n, y)$ .

**En caso de que  $x = b$ ,** nos sirve  $\mathbf{p}_n = (x + 1/n, y)$ .

**En caso de que  $a < x < b$  y  $\varphi_1(x) = y$ ,** escogemos la sucesión  $(x, y - 1/n)$ ,

**Y en caso de que  $a < x < b$  e  $y = \varphi_2(x)$ ,** una sucesión que nos sirve es  $(x, y + 1/n)$ .

2. Haremos primero la implicación hacia la izquierda y después la implicación hacia la derecha.

**Si:** De la existencia de  $(\mathbf{p}_n)_n = ((x_n, y_n))_n \subset D$ , con  $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p} = (x, y)$ , se deduce que para todo  $n$ ,  $a < x_n < b$ , luego pasando al límite,  $a \leq x \leq b$ .

Y de la existencia de  $(\mathbf{p}'_n)_n = ((x'_n, y'_n))_n \subset D^c$ , con  $\mathbf{p}'_n \rightarrow \mathbf{p} = (x, y)$ , se deduce que para cada  $n$  alguna de las cuatro desigualdades siguientes es cierta:

$$a > x'_n, \quad x'_n > b, \quad \varphi_1(x'_n) > y'_n, \quad y'_n > \varphi_2(x'_n),$$

por lo que al menos una de ellas es válida para infinitos subíndices. Pasamos al límite en las que se cumplan para infinitos subíndices y así demostramos que es cierta alguna (o varias) de las siguientes:

$$a \geq x, \quad x \geq b, \quad \varphi_1(x'_n) \geq y'_n, \quad y'_n \geq \varphi_2(x'_n).$$

Entonces, de acuerdo con la definición 2.19,  $\mathbf{p} \in \partial D$ .

**Sólo si:** Tomamos un punto  $\mathbf{p}$  de  $\partial D$ . Como  $\partial D \subset D$ , ya tenemos una sucesión de puntos de  $D$  que converge a  $\mathbf{p}$ : la sucesión constante  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \dots)$ . Para terminar la demostración observamos que como  $\mathbf{p}$  está en  $\partial D$ , no puede pertenecer a  $\text{Int } D$ , luego, aplicando el punto 1 de este mismo teorema, tiene que existir alguna sucesión de puntos de  $D^c$  que converja hacia  $\mathbf{p}$ .

**Definición 2.51** Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto de dimensión arbitraria y  $\mathbf{p}$  es un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ , entonces el **interior de  $X$ ,  $\text{Int } X$** , es el conjunto de puntos  $\mathbf{p}$  de  $\mathbb{R}^n$  que no son límite de ninguna sucesión de puntos de fuera de  $X$ . Cuando un conjunto  $X$  es igual a su interior se dice que  **$X$  es abierto** (el concepto de conjunto abierto fue utilizado en el enunciado del teorema 1.32).

Y la **frontera (topológica) de  $X$ ,  $\text{Fr } X$** , es el conjunto de puntos  $\mathbf{p}$  de  $\mathbb{R}^n$  que son, a la vez, límite de una sucesión de puntos  $X$  y de otra sucesión de puntos del complementario de  $X$ . Cuando un conjunto  $X$  contiene a su frontera se dice que  **$X$  es cerrado**.

En el caso de regiones simples (bidimensionales o tridimensionales), la frontera topológica y el borde coinciden, tal como se ha demostrado en el último teorema para el caso de regiones bidimensionales simples en la dirección de las  $y$ . En cambio, para superficies en  $\mathbb{R}^3$ , su borde (ver la definición 3.34) no es lo mismo que su frontera topológica.

**68.** Diremos frontera "topológica" cuando queramos resaltar que nos estamos refiriendo al concepto introducido en la definición 2.51, y no al borde de una superficie.

Hay que tener en cuenta, de todos modos, que en algunos textos se utiliza la palabra borde como sinónimo de frontera.

**Teorema 2.52** Si  $D_1$  y  $D_2$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  simples en las dos direcciones y  $D_2$  está contenido en el interior de  $D_1$ , entonces  $\text{Fr}(D_1 \setminus \text{Int } D_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2$ .

DEMOSTRACIÓN: Probaremos los dos contenidos.

$\text{Fr}(D_1 \setminus \text{Int } D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$ : Si  $\mathbf{p}$  pertenece a la frontera de  $D_1 \setminus \text{Int } D_2$ , han de existir dos sucesiones, una dentro del conjunto y otra fuera del conjunto, que converjan a  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n) &\subset D_1 \cap (\text{Int } D_2)^c, & \mathbf{p}_n &\rightarrow \mathbf{p}, \\ (\mathbf{p}'_n) &\subset D_1^c \cup \text{Int } D_2, & \mathbf{p}'_n &\rightarrow \mathbf{p}. \end{aligned}$$

- En caso de que haya infinitos términos de la sucesión de  $\mathbf{p}'_n$  que estén en  $D_1^c$ , ya tenemos una sucesión en  $D_1$  que converge a  $\mathbf{p}$  (la de los  $\mathbf{p}_n$ ) y otra fuera de  $D_1$  que también converge a  $\mathbf{p}$  (la formada por los infinitos  $\mathbf{p}'_n$  que están en  $D_1^c$ ), luego  $\mathbf{p} \in \partial D_1$ .
- En caso contrario, sólo hay un número finito de  $\mathbf{p}'_n \in D_1^c$ , luego todos los  $\mathbf{p}'_n$  desde un subíndice en adelante necesariamente están en  $\text{Int } D_2$ , lo que nos proporciona una sucesión de puntos de  $D_2$  que converge a  $\mathbf{p}$ . Para concluir que entonces  $\mathbf{p} \in \partial D_2$ , hemos de encontrar una sucesión de puntos de fuera de  $D_2$  que también converja a  $\mathbf{p}$ . Y para esto es posible que no nos sirvan los  $\mathbf{p}_n$ , puesto que de los  $\mathbf{p}_n$  solamente sabemos que no están en  $\text{Int } D_2$ , pero podrían estar todos en  $D_2$ .

Lo que haremos en primer lugar será observar que los  $\mathbf{p}_n$  que estén en  $D_2$  necesariamente han de estar fuera de  $\text{Int } D_2$ , luego pertenecen a  $\partial D_2$ . Por tanto, para cada uno de ellos habrá una sucesión de puntos de fuera de  $D_2$  que converja a él:

$$(\mathbf{q}_m^n)_m \subset D_2^c, \quad \lim_m \mathbf{q}_m^n = \mathbf{p}_n.$$

A continuación razonamos de la siguiente manera. Para cada  $n$  elegimos un índice  $m_n$  para el que  $\|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_{m_n}^n\| < 1/n$ , y entonces la sucesión  $(\mathbf{q}_{m_1}^1, \mathbf{q}_{m_2}^2, \dots, \mathbf{q}_{m_n}^n, \dots)$  está formada totalmente por puntos de fuera de  $D_2$  y además converge a  $\mathbf{p}$ , puesto que

$$\|\mathbf{q}_{m_n}^n - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{q}_{m_n}^n - \mathbf{p}_n\| + \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| < \frac{1}{n} + \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\| \rightarrow 0.$$

$\text{Fr}(D_1 \setminus \text{Int } D_2) \supset \partial D_1 \cup \partial D_2$ : Distinguiremos dos casos.

- Supongamos en primer lugar que  $\mathbf{p} \in \partial D_1$ . Entonces han de existir dos sucesiones, una con puntos de  $D_1$  y otra con puntos de  $D_1^c$ , ambas convergentes a  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_n) &\subset D_1, & \mathbf{p}_n &\rightarrow \mathbf{p}, \\ (\mathbf{p}'_n) &\subset D_1^c, & \mathbf{p}'_n &\rightarrow \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Como  $D_1 \setminus \text{Int } D_2 \subset D_1$ , los puntos  $\mathbf{p}'_n$  nos sirven también como puntos de  $(D_1 \setminus \text{Int } D_2)^c$ , así que lo único que necesitamos es encontrar una sucesión de puntos de  $D_1 \setminus \text{Int } D_2$  que converja a  $\mathbf{p}$ , y para ello sólo tenemos los  $\mathbf{p}_n \in D_1$ . Si hay infinitos de estos  $\mathbf{p}_n$  que no están en  $\text{Int } D_2$ , ya hemos terminado. Pero es que si no fuera así, entonces  $\mathbf{p}$  sería límite de una sucesión de puntos de  $\text{Int } D_2$ , y por tanto sería de  $D_2$  (gracias a que las desigualdades que definen a  $D_2$  no son estrictas), y por tanto de  $\text{Int } D_1$  (por una de las hipótesis), lo que es imposible puesto que es de  $\partial D_1$ .

- Para terminar, supongamos que  $\mathbf{p} \in \partial D_2$ . Necesitamos demostrar que existen dos sucesiones, una en  $D_1 \setminus \text{Int } D_2$  y otra en su complementario, que convergen a  $\mathbf{p}$ .

Llamando

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^i \leq x \leq b^i, \varphi^i(x) \leq y \leq \psi^i(x)\}, \quad i = 1, 2,$$

de las hipótesis se deduce que  $a^1 < a^2 < b^2 < b^1$  <sup>(78)</sup> y que para cualquier  $x$  del intervalo abierto  $(a^2, b^2)$ ,  $\varphi^1(x) < \varphi^2(x) < \psi^2(x) < \psi^1(x)$  <sup>(79)</sup>.

Como el punto  $\mathbf{p} = (x, y)$  está en el borde de  $D_2$ , sabemos que

$$a^2 \leq x \leq b^2, \quad \varphi^2(x) \leq y \leq \psi^2(x),$$

y que al menos una de esas cuatro relaciones es una igualdad. Entonces

**En caso de que**  $a^2 < x < b^2$ , basta tomar las sucesiones  $(x, y - 1/n)$  y  $(x, y + 1/n)$ .

**En caso de que**  $a^2 = x < b^2$ , elegimos las sucesiones

$$\left( x + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \left[ \varphi^2 \left( x + \frac{1}{n} \right) + \psi^2 \left( x + \frac{1}{n} \right) \right] \right), \quad \left( x - \frac{1}{n}, y \right).$$

**Y en caso de que**  $a^2 < x = b^2$ ,

$$\left( x - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \left[ \varphi^2 \left( x - \frac{1}{n} \right) + \psi^2 \left( x - \frac{1}{n} \right) \right] \right), \quad \left( x + \frac{1}{n}, y \right).$$

En los tres casos ambas convergen a  $\mathbf{p}$  y además, a partir de un cierto  $n_0$  en adelante, los términos de una de ellas están en  $D_1 \setminus \text{Int } D_2$  y los de la otra en su complementario.

### 2.7.8. Fórmula del cambio de variable para integrales simples y valor absoluto de la derivada

Si aplicáramos la fórmula del teorema del cambio de variable (teorema 2.32) al caso unidimensional, obtendríamos

$$\int_{h([a,b])} f(x) dx = \int_{[a,b]} f(h(t)) |h'(t)| dt,$$

mientras que la fórmula enunciada en el apartado 1.1.3 fue

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx = \int_a^b f(h(t)) h'(t) dt$$

(estamos suponiendo, sin decirlo, que la función  $h$  cumple todas las condiciones para poder aplicar ambos resultados, es decir,  $h$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y es inyectiva y con derivada no nula salvo, quizá en los extremos del intervalo).

Se trata en realidad de la misma fórmula. En la segunda, las integrales se calculan sobre intervalos recorriéndolos en un cierto orden, desde  $h(a)$  hasta  $h(b)$  y desde  $a$  hasta  $b$ . Sabemos que  $a \leq b$ , pero no sabemos si

<sup>78</sup>La primera y la tercera desigualdades se siguen de que  $D_2 \subset \text{Int } D_1$ , mientras que el hecho de que la segunda desigualdad sea estricta se debe a que estamos suponiendo que el borde de  $D_2$  es una curva cerrada simple.

<sup>79</sup>Por idénticos motivos que en las desigualdades anteriores.

$h(a)$  es menor o mayor que  $h(b)$ . Sabemos también que  $\int_{h(b)}^{h(a)} f = -\int_{h(a)}^{h(b)} f$ .

En cambio, en la primera fórmula las integrales se calculan sobre conjuntos, sin que haya ningún orden prefijado (no es de extrañar que aquí no exista orden en la variable, al ser una fórmula válida para cuando la variable es un vector).

Comprobamos que ambas fórmulas son equivalentes distinguiendo los dos casos posibles,  $h$  creciente y  $h$  decreciente. No hay más posibilidades porque al ser  $h'$  no nula en todos los puntos de  $(a, b)$ , o es siempre positiva o es siempre negativa, dado que todas las derivadas tienen la propiedad de los valores intermedios<sup>(80)</sup>.

- Si  $h$  es creciente, entonces  $h'(t) \geq 0$ . Y además,  $h([a, b]) = [h(a), h(b)]$ , luego las fórmulas son iguales miembro a miembro.
- Si  $h$  es decreciente, entonces  $|h'(t)| = -h'(t)$ . Y además,  $h([a, b]) = [h(b), h(a)]$ , luego el miembro de la izquierda (respectivamente, de la derecha) de una de las fórmulas es igual al opuesto del miembro de la izquierda (respectivamente, de la derecha) de la otra fórmula.

### 2.7.9. Demostración de que los cambios a coordenadas polares verifican las hipótesis del teorema del cambio de variable, 2.32

En primer lugar,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , son funciones derivables de todos los órdenes sobre el plano  $(r, \theta)$ , por lo que  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  restringida al subconjunto  $E$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1(E)$ .

La frontera del conjunto  $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$  está formada por la unión de un segmento vertical y dos semirrectas horizontales<sup>(81)</sup>,

$$\partial([0, +\infty) \times [0, 2\pi]) = (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, +\infty) \times \{0\}) \cup ([0, +\infty) \times \{2\pi\}),$$

por lo que el conjunto  $N = E \cap \partial([0, +\infty) \times [0, 2\pi])$  es unión de tres gráficas de funciones continuas (figura 2.38):

$$\begin{aligned} E \cap (\{0\} \times [0, 2\pi]) &\text{ es la gráfica de } r = 0 \text{ que hay dentro de } E, \\ E \cap ([0, +\infty) \times \{0\}) &\text{ es la gráfica de } \theta = 0 \text{ que hay dentro de } E, \\ E \cap ([0, +\infty) \times \{2\pi\}) &\text{ es la gráfica de } \theta = 2\pi \text{ que hay dentro de } E. \end{aligned}$$

Queda por demostrar que sobre  $E \setminus N$ , la aplicación  $\mathbf{T}$  es inyectiva y tiene jacobiano no nulo. Esto último se sigue directamente del hecho de que  $\det \mathbf{T}(r, \theta) = r$ , dado que todos los puntos para los que  $r = 0$  están contenidos en  $N$ . Para probar la inyectividad, tomamos dos puntos de  $E \setminus N$ ,  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$  y probamos que si tienen la misma imagen entonces ambos puntos son el mismo.

Como tienen la misma imagen,

$$r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2, \quad r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2,$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando,  $r_1^2 = r_2^2$ . Esta igualdad, junto con el hecho de que  $r_1, r_2 \geq 0$ , implica que  $r_1 = r_2$ .

Ahora podemos simplificar  $r_1$  y  $r_2$ , puesto que son iguales y distintos de cero:

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2, \quad \sin \theta_1 = \sin \theta_2,$$

y como además  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 2\pi)$ , hemos de concluir que  $\theta_1 = \theta_2$ .

### 2.7.10. Ejemplo de integral en coordenadas polares

**Ejemplo 2.53** (Ejemplo 7.7.7 de [2].) Calcular la integral  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$  pasando a coordenadas polares, donde  $D$  es la corona circular  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

Como las desigualdades  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  equivalen a  $1 \leq r \leq 2$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (recuérdese que siempre suponemos que  $r \geq 0$  y que  $\theta \in [0, 2\pi]$ ), la corona circular  $D$  es la imagen del rectángulo  $E = [1, 2] \times [0, 2\pi]$  mediante la aplicación de  $\mathbf{T}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

<sup>80</sup>Ver, por ejemplo, [1], teorema 5.16.

<sup>81</sup>Se demuestra argumentando como en la demostración del teorema 2.50

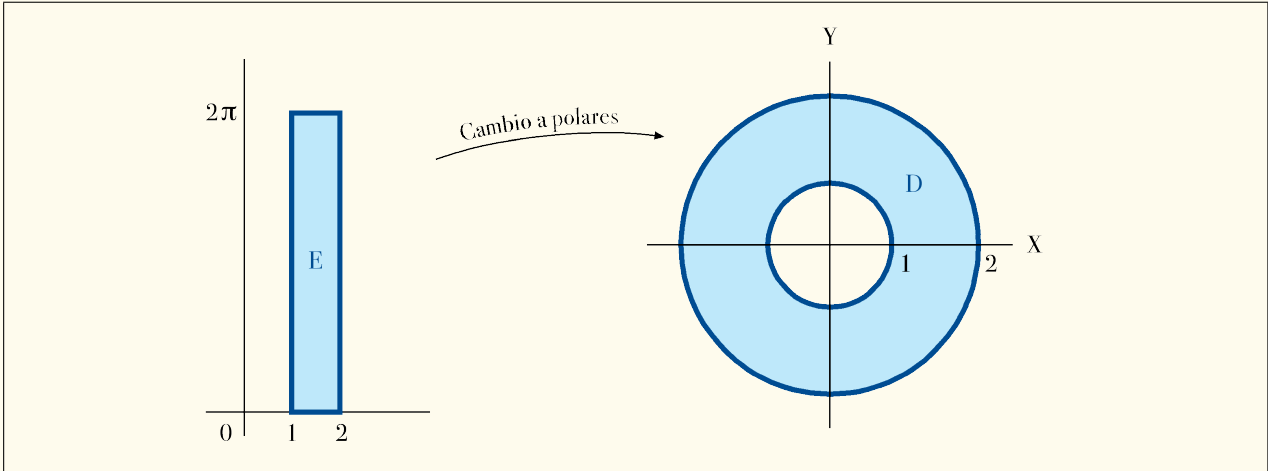


Figura 2.61: Los conjuntos  $E$  y  $D$  del ejemplo 2.53

Descomponemos la corona circular  $D$  en cuatro regiones simples que no se solapan, según su intersección con cada cuadrante

$$\begin{aligned}
 D^1 &= \{(x, y) \in D : x \geq 0, y \geq 0\} = T(E^1), \text{ donde } E^1 = [1, 2] \times [0, \pi/2] \\
 D^2 &= \{(x, y) \in D : x \leq 0, y \geq 0\} = T(E^2), \text{ donde } E^2 = [1, 2] \times [\pi/2, \pi] \\
 D^3 &= \{(x, y) \in D : x \leq 0, y \leq 0\} = T(E^3), \text{ donde } E^3 = [1, 2] \times [\pi, 3\pi/2] \\
 D^4 &= \{(x, y) \in D : x \geq 0, y \leq 0\} = T(E^4), \text{ donde } E^4 = [1, 2] \times [3\pi/2, 2\pi],
 \end{aligned}$$

y aplicamos la aditividad de la integral (teorema 2.28);

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \sum_{i=1}^4 \iint_{D^i} x^2 y^2 dx dy = \sum_{i=1}^4 \iint_{E^i} r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dr d\theta = \\
 &= \iint_E r^5 \frac{1}{4} \sin^2 2\theta dr d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \left[ r^6 \right]_1^2 \frac{1}{4} \left[ 2\theta - \frac{1}{2} \sin 4\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{21}{8} \pi .
 \end{aligned}$$

■

### 2.7.11. La gráfica de $y = \varphi_1(x)$ es una curva simple

**Lema 2.54** Si  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos de una curva cerrada simple  $C$ , entonces  $C$  es la suma de dos curvas simples con extremos en  $A$  y en  $B$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una curva cerrada simple  $C$ , con parametrización  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y elijamos en ella dos puntos distintos,  $A = c(t_A)$ ,  $B = c(t_B)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a \leq t_A < t_B \leq b$  <sup>(82)</sup>.

Entonces la restricción de  $c$  al intervalo  $[t_A, t_B]$  es parametrización de una curva simple  $C_1$ .

Por otra parte, las restricciones de  $c$  a los intervalos  $[t_B, b]$  y  $[a, t_A]$  son también dos caminos de clase  $C^1$ , que se pueden sumar. Llamemos  $C_2$  a su suma.

$C_1$  y  $C_2$  son dos curvas simples cuya suma es  $C$  y cuyos extremos son, en ambos casos, los puntos  $A$  y  $B$ .

**Teorema 2.55** Si  $D$  es una región simple bidimensional en la dirección de las  $y$ , entonces el conjunto  $\{(x, \varphi_1(x)) : a \leq x \leq b\} \subset \partial D$  es una curva simple (notaciones como en la definición 2.18).

<sup>82</sup>En caso de que el orden de recorrido de  $C$  mediante  $c$  fuera el contrario, cambiaríamos  $c$  por la parametrización opuesta de  $c$ .

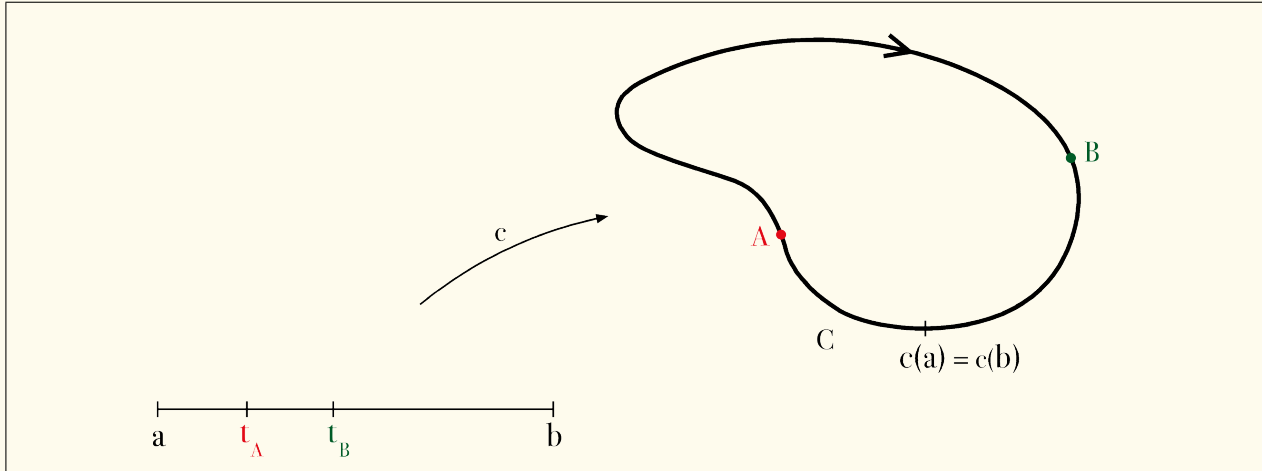


Figura 2.62: Parametrización de  $C$  utilizada en la demostración del lema

DEMOSTRACIÓN: <sup>(83)</sup> La curva  $C = \partial D$  es un conjunto conexo, por ser imagen continua de un intervalo. Aplicamos el lema anterior para  $A = (a, \varphi_1(a))$ ,  $B = (b, \varphi_1(b))$  y probamos en primer lugar que  $C \setminus \{A, B\}$  tiene dos componentes conexas. En efecto, esas componentes no son otras que los conjuntos  $C_1 \setminus \{A, B\}$  y  $C_2 \setminus \{A, B\}$  donde  $C_1$  y  $C_2$  son las curvas de la demostración del lema:

- ambos conjuntos conexos, por ser imagen continua de un intervalo
- los conjuntos son disjuntos, por construcción
- la unión de los dos conjuntos coincide con  $C \setminus \{A, B\}$ , por el lema.

Como el conjunto  $Z = \{(x, \varphi_1(x)) : a < x < b\} \subset C \setminus \{A, B\}$  también es conexo, si probamos que

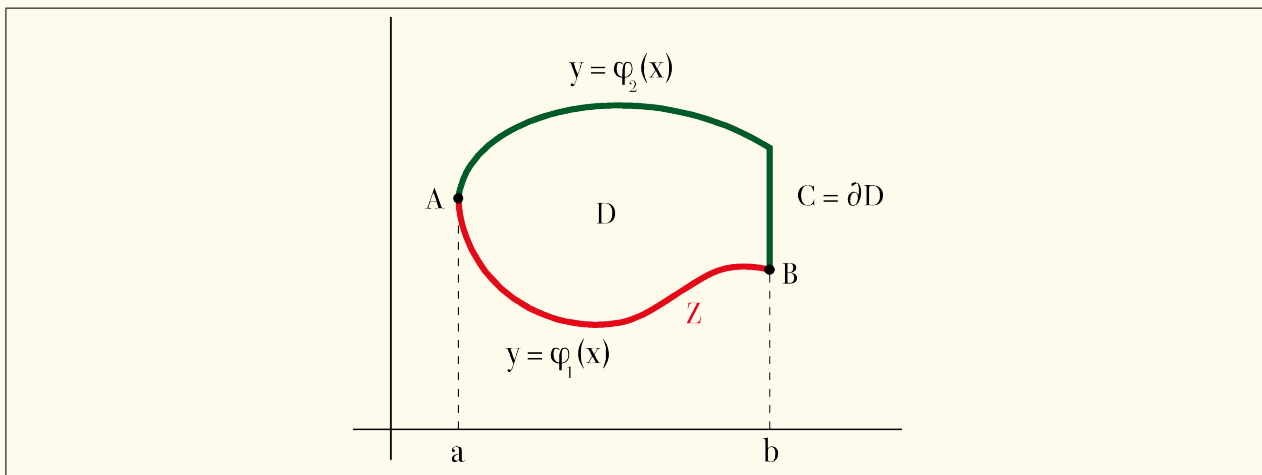


Figura 2.63: En color rojo, el conjunto  $Z$  de la demostración (que no incluye a los puntos  $A$  y  $B$ ). La otra componente conexa del conjunto  $C \setminus \{A, B\}$  está trazada en color verde

es abierto y cerrado en  $C \setminus \{A, B\}$  deduciremos que es igual a una de las dos componentes, pongamos que  $\{(x, \varphi_1(x)) : a < x < b\} = C_1 \setminus \{A, B\}$ . De aquí concluiremos, añadiendo los puntos  $A$  y  $B$ , que el conjunto del enunciado coincide con la curva simple  $C_1$ .

Demostramos que  $Z$  es abierto en  $C \setminus \{A, B\}$  observando que

$$Z = [C \setminus \{A, B\}] \cap \left[ \{(x, y) : a < x < b\} \cup \left\{ (x, y) : y < \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \right\} \right].$$

<sup>83</sup>Esta demostración utiliza la definición y las propiedades de los conjuntos conexos en espacios topológicos. Ver, por ejemplo, [13], §§ 9 y 10, o cualquier libro introductorio de topología.



Y que  $Z$  es cerrado en  $C \setminus \{A, B\}$  analizado una sucesión  $((x_n, y_n))$  de puntos de  $Z$  que tenga límite  $(x_0, y_0)$  en  $C \setminus \{A, B\}$ . En primer lugar,  $y_0 = \lim \varphi_1(x_n) = \varphi_1(x_0)$ , por continuidad de  $\varphi_1$ . Por tanto  $x_0$  no puede ser ni  $a$  ni  $b$ , pues si lo fuera, entonces el límite sería  $A$  o  $B$ , respectivamente. Así que  $a < x_0 < b$ ,  $y_0 = \varphi_1(x_0)$ , luego el punto límite  $(x_0, y_0)$  pertenece a  $Z$ .

### 2.7.12. Orientación antihoraria

**Lema 2.56** Las orientaciones positivas sobre  $\partial D$  definidas en el Caso (1) y en el Caso (2) de la demostración del teorema 2.38 son la misma.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $or_i$  la orientación positiva sobre  $\partial D$  que se ha definido en el Caso (i) ( $i = 1, 2$ ). Puesto que  $\partial D$  es una curva cerrada simple, ambas orientaciones o son iguales o son opuestas (teorema 1.26). Suponemos que son opuestas y llegaremos a una contradicción.

Aplicamos la Fórmula de Riemann-Green en cada uno de los casos al campo vectorial  $(0, x)$  y al campo vectorial  $(y, 0)$ , respectivamente. Entonces,

$$\int_{(\partial D, or_2)} (0, x) \cdot ds \stackrel{\text{(Caso 2)}}{=} \iint_D dx \, dy = A(D),$$

$$\int_{(\partial D, or_2)} (y, 0) \cdot ds = - \int_{(\partial D, or_1)} (y, 0) \cdot ds \stackrel{\text{(Caso 1)}}{=} \iint_D dx \, dy = A(D),$$

luego, sumando,

$$\int_{(\partial D, or_2)} (y, x) \cdot ds = 2A(D).$$

Como el campo vectorial  $(y, x) = \nabla(xy)$  es el gradiente del campo escalar  $xy$ , su integral sobre cualquier curva cerrada simple ha de ser nula (por el teorema fundamental del cálculo generalizado), lo que obliga a que  $D$  tenga área nula, de acuerdo con la última fórmula.

Ahora bien, sabemos también que

$$A(D) = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \, dx.$$

Al ser  $\varphi_2 - \varphi_1$  una función continua y no negativa, el hecho de que su integral sobre el intervalo  $[a, b]$  sea nula implica que o bien la función es nula o bien  $a = b$  <sup>(84)</sup>.

En cualquiera de las dos posibilidades, tanto si el intervalo  $[a, b]$  fuese degenerado como si las gráficas de  $\varphi_1$  y de  $\varphi_2$  coincidieran, el borde  $\partial D$  no sería una curva cerrada simple.

### 2.7.13. Fórmula de Riemann-Green para conjuntos deformados mediante un $\mathbb{C}^2$ -difeomorfismo

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 2.41: Considérese un campo  $F = (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $\mathbb{C}^1$ , definido sobre el dominio  $D$ , para el que queremos demostrar la fórmula.

<sup>84</sup>En efecto, si  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua,  $a < b$  y  $h$  es positiva en algún punto de  $[a, b]$ ,  $h(x_0) > 0$  para algún  $x_0 \in [a, b]$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad, por la continuidad de  $h$ , que  $a < x_0 < b$  y deducimos, nuevamente por la continuidad de  $h$ , que para algún  $\delta$  estrictamente positivo,  $h(x) > h(x_0)/2$  siempre que  $|x - x_0| < \delta$ , luego

$$\int_a^b h(x) \, dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x) \, dx \geq 2\delta \frac{h(x_0)}{2} = \delta h(x_0) > 0.$$

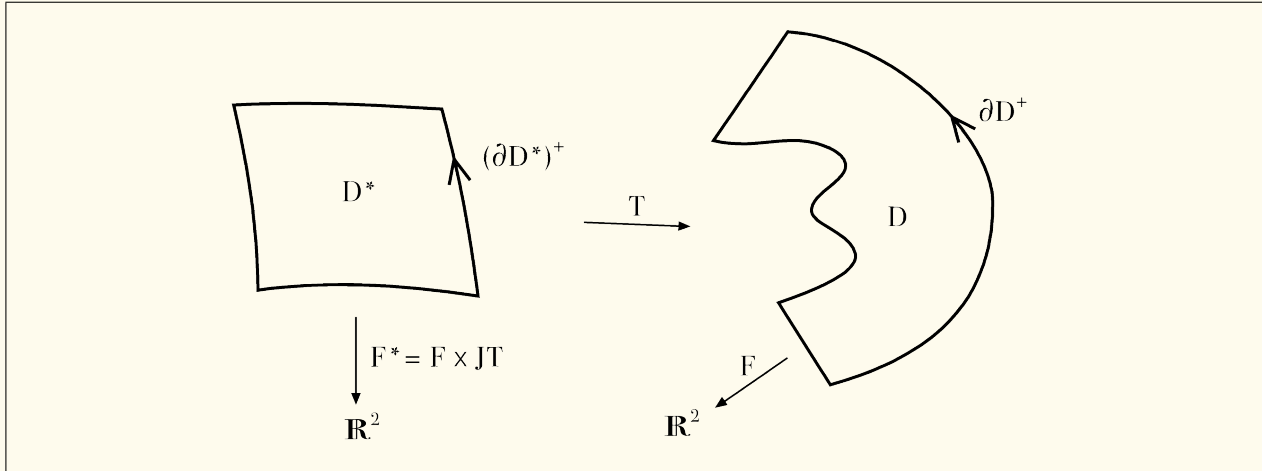


Figura 2.64: Esquema de las aplicaciones que se utilizan en la demostración del corolario 2.41

Construiremos otro campo sobre  $D^*$ ,  $\mathbf{F}^* = (P^*, Q^*)$ , al que aplicaremos la hipótesis, y a partir de la igualdad que nos proporcione concluiremos la igualdad que buscamos. En el resto de la demostración, cuando hablemos de  $\mathbf{T}$  nos referiremos a su restricción a  $D^*$ , que es biyectiva y cuya inversa es también de clase  $\mathcal{C}^2$ .

Para ello definimos  $\mathbf{F}^* = (P, Q) \times \mathbf{JT}$ , es decir,

$$P^* = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_u = Px_u + Qy_u, \quad Q^* = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_v = Px_v + Qy_v,$$

donde los subíndices indican, durante esta demostración, derivadas parciales. Por la hipótesis sobre  $D^*$ ,

$$\iint_{D^*} (Q_u^* - P_v^*) \, du \, dv = \int_{(\partial D^*)^+} (P^*, Q^*) \cdot ds.$$

Probaremos que cada uno de los miembros de esta igualdad coincide con cada uno de los miembros de la igualdad que queremos demostrar.

Aplicando la regla de la cadena y utilizando el hecho de que  $\mathbf{T} \in \mathcal{C}^2$  para garantizar que las derivadas cruzadas de  $\mathbf{T}$  coinciden,

$$\begin{aligned} Q_u^* &= P_x x_u x_v + P_y y_u x_v + P_{x_{vu}} + Q_x x_u y_v + Q_y y_u y_v + Q_{y_{vu}} \\ P_v^* &= P_x x_v x_u + P_y y_v x_u + P_{x_{uv}} + Q_x x_v y_u + Q_y y_v y_u + Q_{y_{uv}}, \end{aligned}$$

luego

$$Q_u^* - P_v^* = (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u) = (Q_x - P_y) \det \mathbf{JT}.$$

Por tanto, aplicando ahora el teorema del cambio de variable para la transformación  $\mathbf{T}^{-1}$ ,

$$\iint_{\mathbf{T}^{-1}(D)} (Q_u^* - P_v^*) \, du \, dv = \iint_D (Q_x - P_y) \det \mathbf{JT} \, | \det \mathbf{JT}^{-1} | \, dx \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$

En cuanto a la integral de línea, consideraremos sobre  $\partial(\mathbf{T}(D^*)) = \partial D$  la orientación asociada a la parametrización que se obtiene al componer  $\mathbf{T}$  con una parametrización de  $(\partial D^*)^+$ ,  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Entonces  $\mathbf{T} \circ \mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametriza a  $\partial D^+$ , luego

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{c}(t))) \cdot (\mathbf{T} \circ \mathbf{c})'(t) \, dt = \int_a^b \mathbf{F}((\mathbf{T} \circ \mathbf{c})(t)) \cdot [\mathbf{JT}(\mathbf{c}(t)) \times \mathbf{c}'(t)] \, dt = \\ &= \int_a^b (\mathbf{F} \times \mathbf{JT})(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt = \int_a^b \mathbf{F}^*(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \, dt = \int_{(\partial D^*)^+} \mathbf{F}^* \cdot ds. \end{aligned}$$

### **3. Integrales sobre superficies**

### 3.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas en forma paramétrica

#### 3.1.1. Introducción

Nuestras superficies serán objetos bidimensionales, porque dependen de dos parámetros, pero que ocupan parte de un espacio tridimensional. Siempre que hablemos de superficies supondremos por tanto que estamos hablando de conjuntos de puntos con 3 coordenadas. Dedicamos estos primeros apartados a introducir una definición de superficie que nos permita

- definir formalmente conceptos como los de área de una superficie, orientación, flujo de un campo vectorial que la atraviesa, así como obtener expresiones para calcularlos, en su caso;
- admitir como superficies a modelos matemáticos de los objetos geométricos elementales (esferas, paralelepípedos, cilindros, conos, ...);
- comparar con otras definiciones de superficie (en forma explícita, en forma implícita), y recuperar los resultados obtenidos para estos casos en el cálculo diferencial;
- mantener los estudios y los cálculos en un nivel elemental;
- utilizar programas de cálculo simbólico para representaciones gráficas de superficies.

Cuando se introducen las derivadas parciales, se estudian ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  que tienen plano tangente en todos sus puntos. Son las **superficies descritas en forma implícita**, o conjuntos de puntos que verifican una expresión del tipo  $h(x, y, z) = 0$ , donde  $h$  se supone de clase  $\mathcal{C}^1$  y con gradiente no nulo en ningún punto. El plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es entonces el que pasa por ese punto y tiene como vector característico al gradiente  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$ . Esta descripción de superficies es muy útil en el cálculo diferencial,

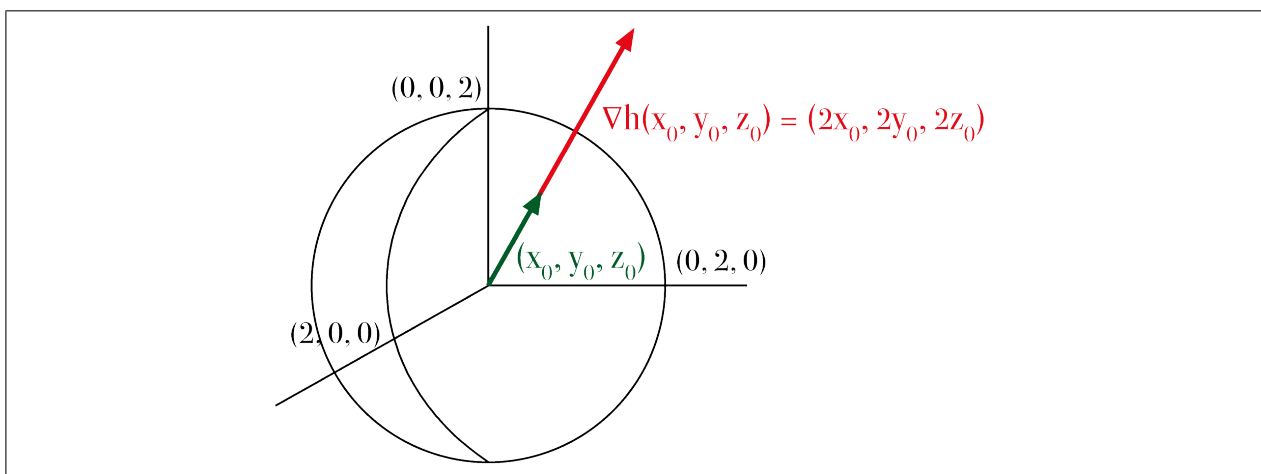


Figura 3.1: Esfera de centro el origen y radio 2, definida por  $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ . Y gradiente de  $h$  en un punto cualquiera de la esfera

es lo bastante general para incluir algunos conjuntos que no pueden describirse a través de una variable despejada en función de las otras dos —definición explícita—, y tiene además la ventaja de que gracias al teorema de la función implícita, localmente puede identificarse con la definición explícita. Pero para el cálculo integral no es una descripción práctica, y

además nosotros pretendemos incluir conjuntos que carezcan de plano tangente en ciertos puntos (superficies con vértices o aristas). Por ello buscaremos otra aproximación distinta a la definición de superficie.

Intuitivamente hablando podemos visualizar una superficie como una porción de un plano que ha sido *deformada* <sup>(85)</sup> saliéndose del plano pero sin salirse del espacio tridimensional. Para precisar esta idea teniendo en cuenta los objetivos que se enuncian más arriba, limitaremos los posibles tipos de porciones del plano a considerar, así como las deformaciones admisibles.

El caso más sencillo, que por otra parte es muy útil, es el de suponer que solamente se ha deformado la porción plana en la dirección de una de las coordenadas. Esta situación corresponde en realidad a las superficies dadas en forma explícita, que no son sino gráficas de funciones reales de dos variables, es decir, conjuntos definidos mediante una expresión del tipo  $z = g(x, y)$ . Por motivos técnicos convendrá suponer que tales funciones  $g$  están definidas sobre una región simple y son diferenciables con continuidad <sup>(62)</sup>.

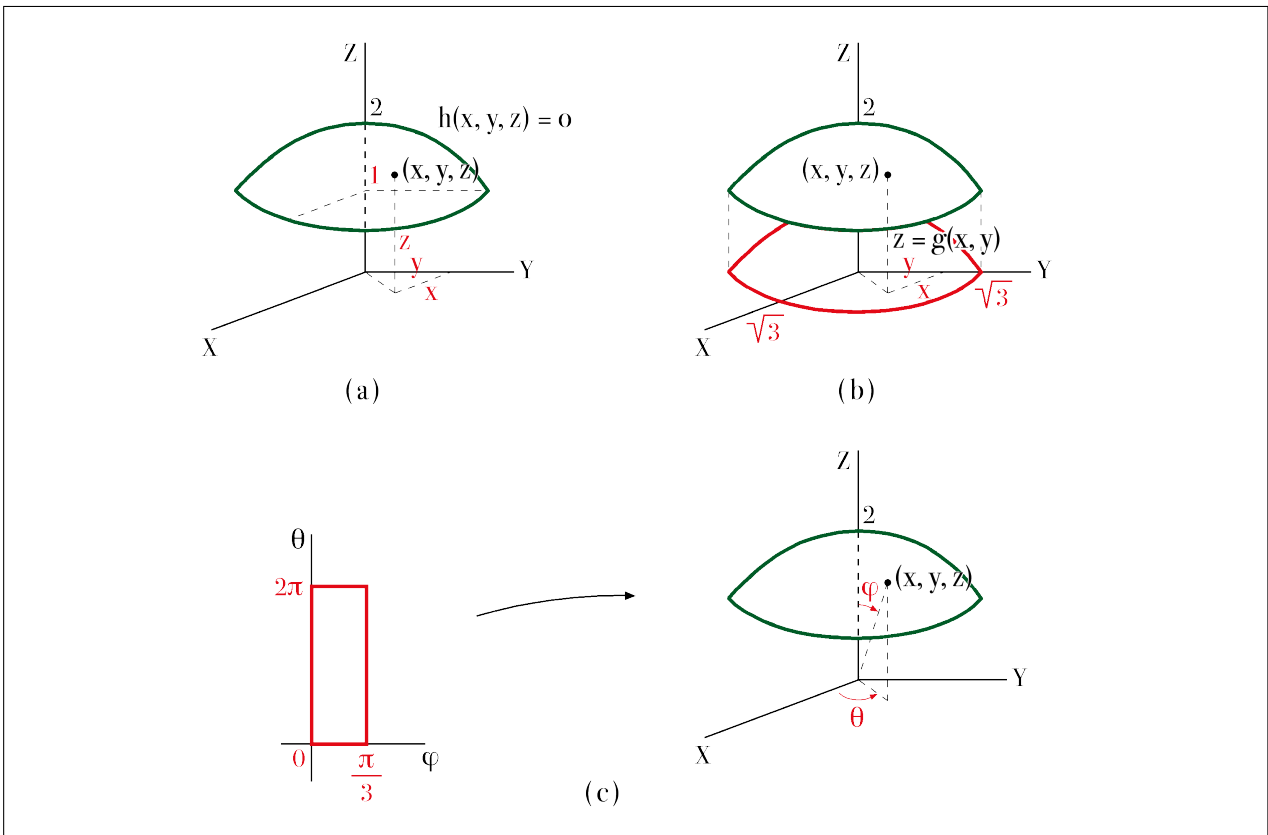


Figura 3.2: Tres definiciones distintas para describir una misma parte de una esfera.

(a) Implícita:  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1$ .

(b) Explícita:  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 3$ .

(c) Paramétrica:  $x = \sin \varphi \cos \theta, y = \sin \varphi \sin \theta, z = \cos \varphi$ , con  $0 \leq \varphi \leq \pi/3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Más en general, supondremos que los dos parámetros que nos sirven para determinar los puntos de la superficie no coinciden con dos de las coordenadas cartesianas. De la misma

<sup>85</sup>A base de doblar, estirar o encoger, pero no de romper.

manera que para curvas en  $\mathbb{R}^3$  utilizábamos una parametrización o trayectoria definida como  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , en función de un parámetro  $t$  que no tenía por qué ser ninguna de las coordenadas, para superficies  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  utilizaremos una parametrización  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , en función de dos parámetros, de modo que  $\Phi : D \rightarrow \Phi(D) = \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi = (x, y, z)$ , sea de clase  $\mathcal{C}^1$ .

Antes de dar una definición formal veremos por vía de varios ejemplos cuáles son las condiciones que nos harán falta. Tomamos un valor  $(u_0, v_0) \in \text{Int } D$ , (será suficiente que hagamos estas consideraciones para cuando  $D$  sea una región simple, por lo que el interior de  $D$  será el definido en 2.19) que da lugar al punto  $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0) \in \Sigma$ .

En las proximidades de  $\mathbf{p}$  consideramos las curvas que son imagen mediante  $\Phi$  de las rectas descritas por  $(t, v_0)$  y por  $(u_0, t)$ , y calculamos los vectores tangentes a estas dos curvas contenidas en  $\Sigma$ . Estas tangentes resultan ser las derivadas parciales

$$\Phi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \Phi_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0).$$

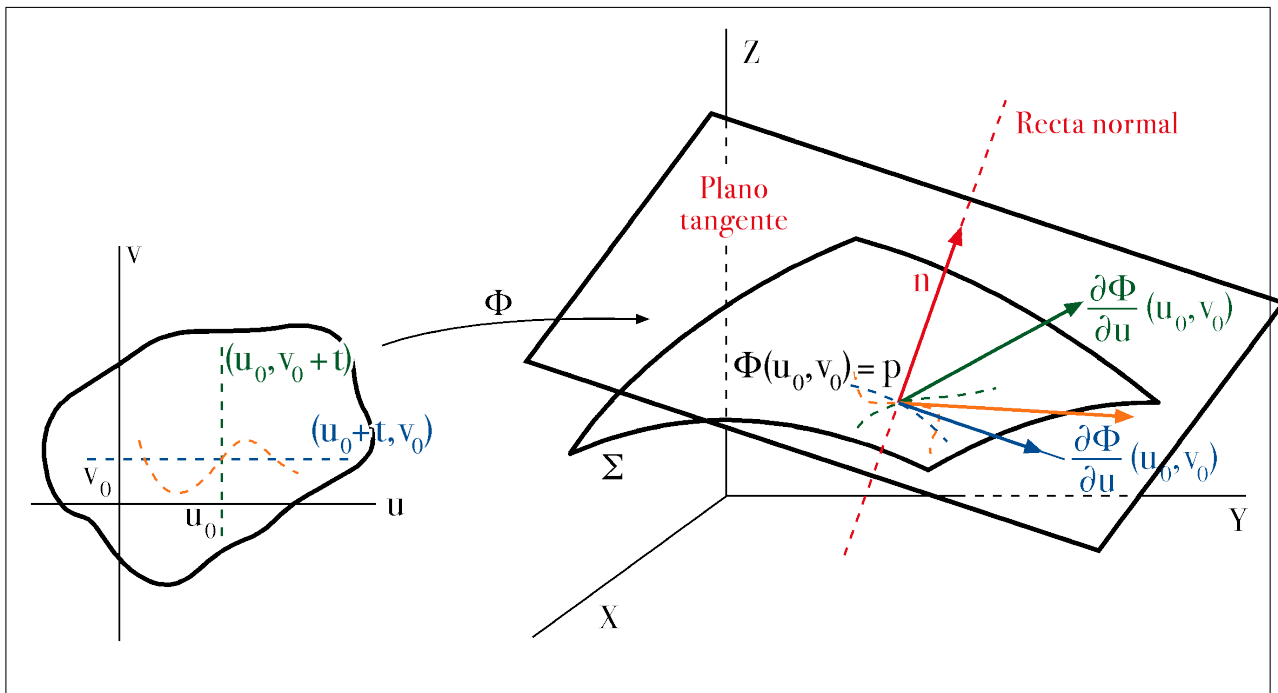


Figura 3.3: Vector normal, recta normal y plano tangente

Se demuestra, además, que cualquier otro vector tangente en  $\mathbf{p}$  a una trayectoria con imagen contenida en  $\Sigma$  es combinación lineal de  $\Phi_u(u_0, v_0)$  y de  $\Phi_v(u_0, v_0)$  (ver el apartado 3.5.1). En consecuencia llamaremos **plano tangente a  $\Sigma$  en  $\mathbf{p}$ ,  $T_\Sigma(\mathbf{p})$** , al plano que pasa por  $\mathbf{p}$  y contiene a esos dos vectores; **vector normal de  $\Phi$  en  $(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{n}_\Phi(u_0, v_0)$** , al producto vectorial  $\mathbf{n}_\Phi(u_0, v_0) = \Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)$ ; y **recta normal a  $\Sigma$  en  $\mathbf{p}$** , a la recta que pasa por  $\mathbf{p}$  y está en la dirección del vector normal  $\mathbf{n}_\Phi(u_0, v_0)$ .

**69.** Nótese que decimos que el plano tangente y la recta normal lo son a la superficie, mientras que el vector normal no es de la superficie, sino de la parametrización.

Para que efectivamente obtengamos así un plano y una recta (respectivamente) lo que necesitamos es que el vector normal sea no nulo (cf. teorema 3.36), es decir, que los vectores  $\Phi_u(u_0, v_0)$  y  $\Phi_v(u_0, v_0)$  no sean colineales o, equivalentemente, que la matriz jacobiana de  $\Phi$  tenga rango 2 <sup>(86)</sup>, lo que en cálculo diferencial se suele denominar diciendo que la parametrización  $\Phi$  es **regular**, o **suave**, en el punto. Entonces la ecuación del plano tangente es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\Phi_u(u_0, v_0) \times \Phi_v(u_0, v_0)) = 0.$$

**70.** La ecuación del plano tangente es ésta porque identifica a los vectores  $(x, y, z)$  que, una vez trasladado el plano poniendo el vector  $(x_0, y_0, z_0)$  en el origen, son perpendiculares a los dos vectores que lo engendran.

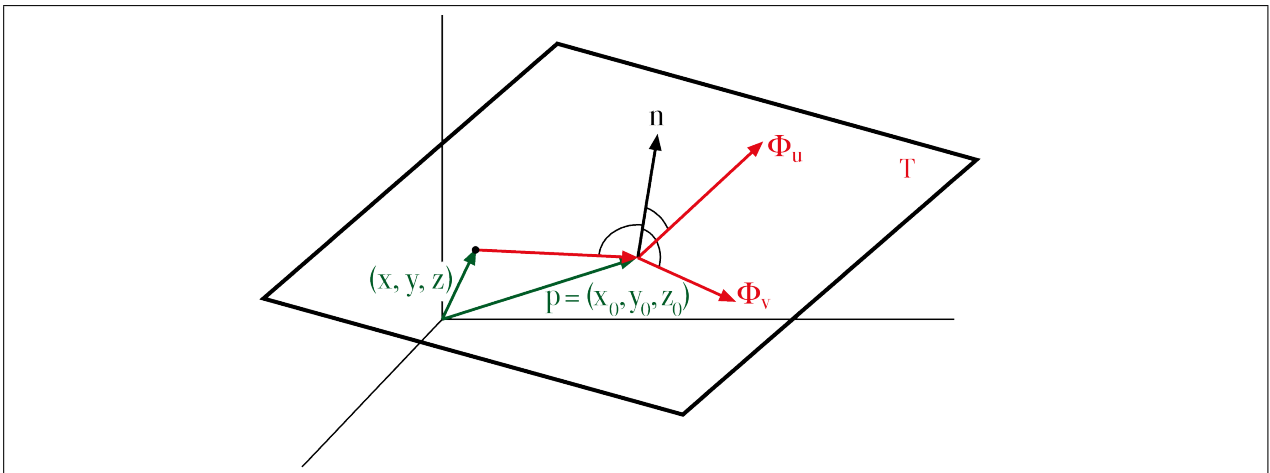


Figura 3.4: Vectores  $(x, y, z)$  que pertenecen al plano tangente: la diferencia  $\mathbf{p} - (x, y, z)$  yace sobre el plano  $T$ . Los ángulos resaltados son todos rectos

**71.** En las figuras unas veces ponemos las flechas de vector a partir del origen y otras veces a partir de otro punto. Siempre que dibujamos un vector a partir de un punto distinto del origen, como ocurre en la figura 3.4 con los vectores  $\mathbf{n}$  (que parte de  $\mathbf{p}$ ) o  $\mathbf{p} - (x, y, z)$  (que parte de  $(x, y, z)$ ), estamos dibujando el vector trasladado. Se trata de un abuso de escritura que es muy útil y poco peligroso.

No todos los textos imponen las mismas restricciones que nosotros vamos a imponer para formalizar la noción de superficie. Existen varias opciones que pueden servir para los propósitos que nos hemos marcado al comienzo de este apartado.

En primer lugar, nuestros dominios de parámetros contendrán a su borde o frontera. La consecuencia será que en un cilindro, por ejemplo, siempre consideraremos incluidas las dos circunferencias que lo limitan (no los círculos completos, pero sí las circunferencias).

<sup>86</sup>Las columnas de la matriz jacobiana de  $\Phi$ , consideradas como vectores, no son otra cosa que las dos derivadas parciales:

$$J\Phi(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} (u_0, v_0).$$

Se expresa esta opción diciendo que manejamos **superficies con borde** (las que lo tienen, porque una superficie esférica, por ejemplo, no tiene borde).

En segundo lugar, admitiremos aristas y vértices en nuestras superficies, para incluir a conos y cubos, por ejemplo, lo que a menudo se traducirá en que necesitaremos que las mejores condiciones de diferenciabilidad no se cumplan en ciertos conjuntos de puntos excepcionales.

Por último, nos limitaremos a dominios de parámetros que sean regiones simples o uniones finitas de regiones simples, para poder aplicar todas las propiedades de las integrales dobles que hemos introducido en el apartado 2.3.2.

### 3.1.2. Ejemplos

**Ejemplo 3.1** El **cono**  $z^2 = x^2 + y^2, z \leq 0$ , puede parametrizarse de varias maneras.

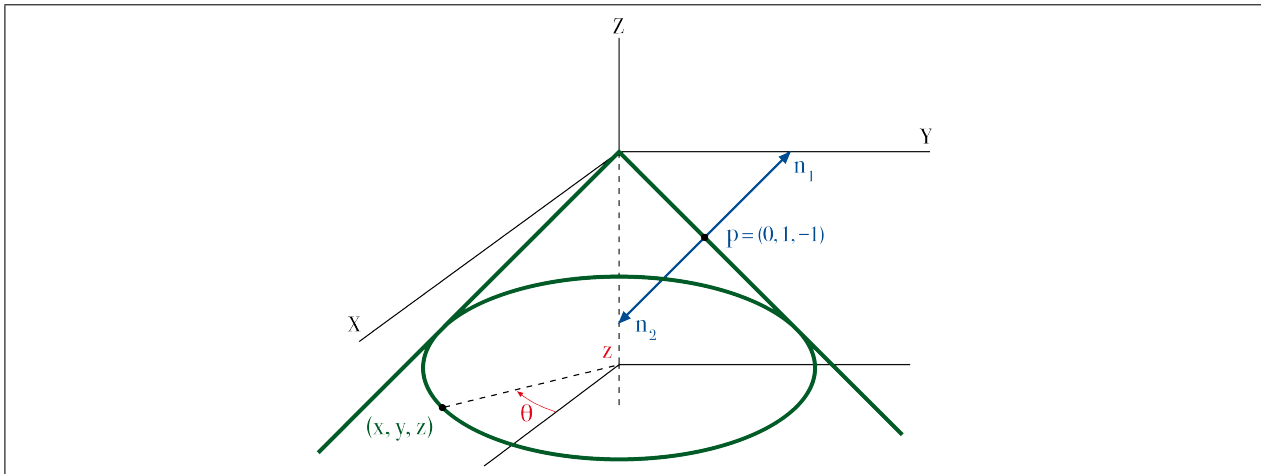


Figura 3.5: Cono  $x^2 + y^2 = z^2, z \leq 0$ . Coordenadas de un punto genérico para la parametrización  $\Phi_2$  (en rojo) y vectores normales en el punto  $(0, 1, -1)$  (en azul)

**72.** En las dos parametrizaciones que vamos a dar, el dominio de definición de los parámetros no es un conjunto acotado (como tampoco lo es el cono). Para que estas parametrizaciones lo sean en el sentido de la definición 3.9, será imprescindible que reduzcamos el dominio de parámetros.

Una de ellas consiste en tomar como parámetros a las variables  $x$  e  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= -\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \text{(ésta es la descripción de la parametrización } \Phi_1)$$

Entonces la matriz jacobiana es

$$J\Phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$



y el vector normal es

$$\mathbf{n}_1 = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Por ejemplo, en el punto  $\mathbf{p} = (0, 1, -1) = \Phi_1(0, 1)$  el vector normal es  $(0, 1, 1)$ . Hay que observar que los cálculos que hemos hecho son válidos en todos los puntos excepto en  $(0, 0)$ , donde no hay vector normal. Señalemos que esta normal apunta siempre hacia arriba, dado que la coordenada  $z$  del vector es estrictamente positiva.

Otra forma de parametrizar el cono es la siguiente. Elegimos en primer lugar un valor de  $z$ . El corte del cono a la altura  $z$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = z^2$ , luego tomando como nuevo parámetro un ángulo  $\theta$  podremos describir cualquier punto del cono como

$$\Phi_2(z, \theta) : \quad x = z \cos \theta, \quad y = z \sin \theta, \quad z = z,$$

(donde es suficiente con tomar  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). Entonces la matriz jacobiana es

$$J\Phi_2(z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -z \sin \theta \\ \sin \theta & z \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y el vector normal es  $\mathbf{n}_2 = (-u \cos \theta, -u \sin \theta, u)$ , que ahora existe en todos los puntos, incluido el vértice. ¿Es que el cono tiene plano tangente en el vértice? No, lo que pasa es que allí el vector normal existe pero es nulo, no determina ni recta normal ni plano tangente.

El mismo punto  $\mathbf{p}$  de antes es igual a  $\Phi_2(-1, 3\pi/2)$ , luego el nuevo vector normal en  $\mathbf{p}$  es  $(0, -1, -1)$ , el opuesto al anterior. Con esta segunda parametrización, el vector normal siempre apunta hacia abajo (salvo cuando es nulo, claro), puesto que  $z \leq 0$ . ■

**73.** El hecho de que la superficie tenga un vértice, un punto singular donde la superficie no tiene plano tangente, no impide que sea imagen de una parametrización derivable con continuidad en todos los puntos, como acabamos de ver. Algo análogo ocurriría con las curvas, ver ejemplo 1.21.

Lo que es imposible es que en un vértice la parametrización tenga un vector normal a la superficie que sea no nulo, puesto que entonces ese vector normal determinaría un plano tangente.

**Ejemplo 3.2** La parametrización  $x = 2 \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = 2 \cos \varphi$  describe puntos de la **superficie esférica** de centro el origen y radio 2. Para demostrarlo no tenemos más que observar que todas las imágenes así obtenidas verifican  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  (hacer las operaciones). Recíprocamente, todos los puntos  $(x, y, z)$  para los que  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , son imagen de la parametrización (siempre que admitamos cualquier valor para los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ ), como pasamos a comprobar:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \left| \frac{z}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow \exists \varphi, z = 2 \cos \varphi;$$

entonces

$$\left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 = 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi \Rightarrow \exists \theta, x = 2 \sin \varphi \cos \theta \wedge y = 2 \sin \varphi \sin \theta.$$

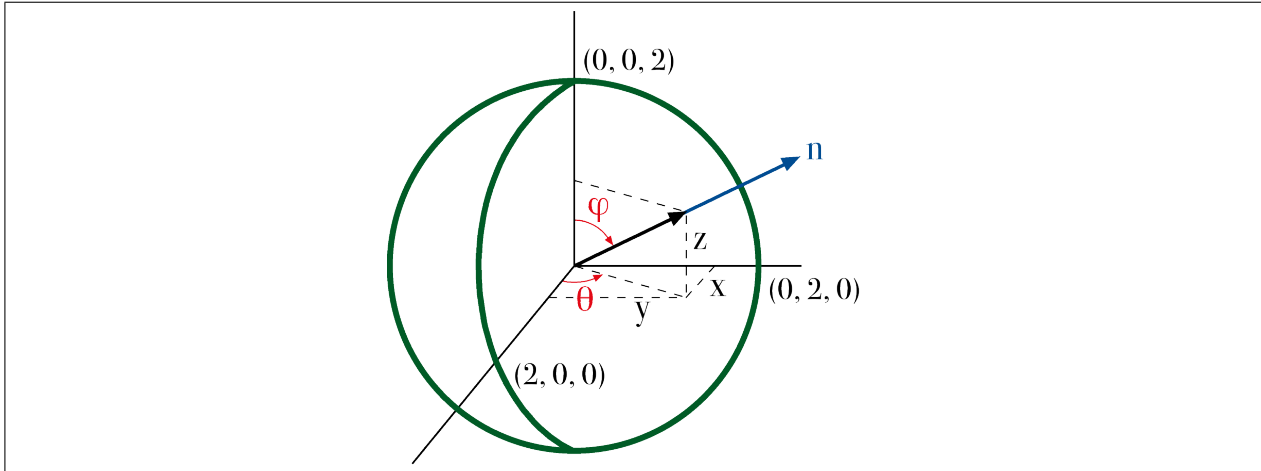


Figura 3.6: Esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ . Parámetros  $\varphi$ ,  $\theta$  y vector normal  $\mathbf{n}$  para punto cualquiera de la esfera

Para la existencia de  $\varphi$  y  $\theta$  no necesitamos todos los valores posibles de los ángulos, nos basta con  $\varphi \in [0, \pi]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , que serán los que tomemos a partir de ahora al manejar esta parametrización, salvo que digamos lo contrario.

La matriz jacobiana de la parametrización  $\Phi$  es

$$J\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \cos \theta & -2 \sin \varphi \sin \theta \\ 2 \cos \varphi \sin \theta & 2 \sin \varphi \cos \theta \\ -2 \sin \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

donde las columnas son los vectores  $\Phi_\varphi$  y  $\Phi_\theta$ , derivadas parciales de  $\Phi$  respecto a  $\varphi$  y a  $\theta$ , respectivamente. Haciendo el producto vectorial de las dos columnas se obtiene que el vector normal de la parametrización en el punto  $(\varphi, \theta)$  (cuya imagen es el punto  $(x, y, z)$  de la esfera) es

$$\mathbf{n} = 2 \sin \varphi (x, y, z),$$

que cuando  $\sin \varphi \neq 0$  es un vector proporcional al radio vector  $(x, y, z)$  y por tanto ortogonal al plano tangente a la esfera (como era de esperar, puesto que en una esfera el plano tangente siempre es perpendicular al radio). Así se determinan el plano tangente y la recta normal en todos los puntos salvo en los casos en los que  $\sin \varphi = 0$ , es decir, salvo en los puntos que correspondan a  $\varphi = 0, \pi$ . ■

**74.** Como la esfera no tiene puntos singulares hay que concluir que esta ausencia de plano tangente en algunos puntos es un “defecto” de la parametrización, no de la superficie.

**Ejemplo 3.3** El **cilindro** definido por las condiciones  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $|z| \leq h$  (donde  $a$  y  $h$  son estrictamente positivos) puede describirse como la imagen de la siguiente aplicación:

$$(\theta, z) \in D = [0, 2\pi] \times [-h, h] \rightsquigarrow \Phi(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z).$$

Podemos visualizar la deformación que hemos hecho del rectángulo  $D$  observando que el

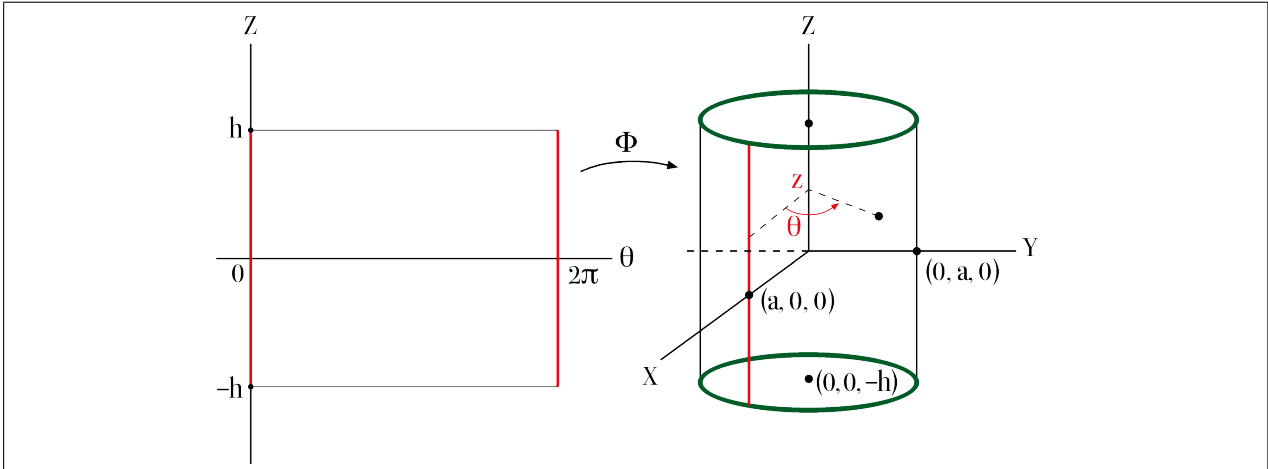


Figura 3.7: Parametrización del cilindro  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $|z| \leq h$ . Los dos lados verticales del rectángulo (en rojo) se han unido para formar una generatriz del cilindro (en rojo)

resultado ha sido como si lo recortásemos del plano  $(\theta, z)$ , lo estirásemos de acuerdo al factor  $a$  (si  $a < 1$ , en realidad lo estaremos encogiendo), y lo enrollásemos, pegando los dos lados correspondientes a  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ .

La matriz jacobiana es

$$J\Phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -a \sin \theta & 0 \\ a \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el vector normal en un punto de parámetros  $\theta, z$  es  $\mathbf{n} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) = (x, y, 0)$ , siempre horizontal. ■

**Ejemplo 3.4** Una variante del ejemplo anterior es la que podemos llamar **cilindro con tapas**, consistente en añadir a la superficie cilíndrica

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad |z| \leq h$$

los dos círculos

$$z = h, \quad x^2 + y^2 \leq a^2 \quad \text{y} \quad z = -h, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$$

que, en cierto modo, cierran la figura cilíndrica terminando de formar el modelo matemático de un objeto con forma de lata.

Para obtener una descripción paramétrica podemos actuar de dos maneras. La primera consiste en dar parametrizaciones independientes de cada uno de los tres trozos en los que se descompone de forma natural el cilindro con tapas, es decir, por una parte la superficie cilíndrica (ejemplo 3.3), por otra la tapa de arriba

$$(x, y) \in D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\} \rightsquigarrow (x, y, h),$$

y por otra la tapa de abajo

$$(x, y) \in D_{-h} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\} \rightsquigarrow (x, y, -h).$$

Una segunda manera consiste en pensar en un “desarrollo” de la figura completa,

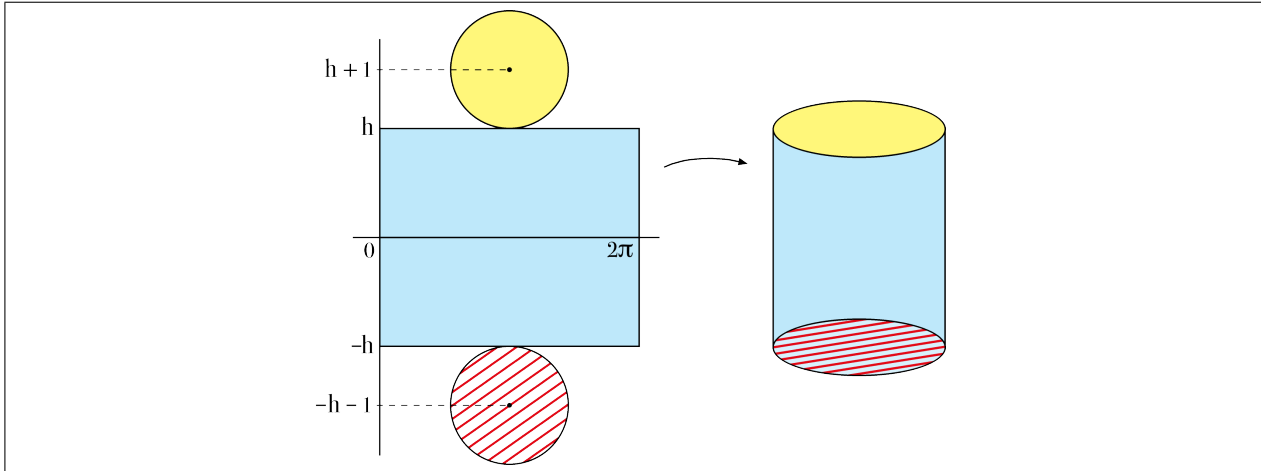


Figura 3.8: Parametrización del “cilindro con tapas”

convirtiéndola en una figura plana formada por un rectángulo junto con dos círculos tangentes al rectángulo en lados opuestos. Este procedimiento lleva a construir una única función  $\Phi$  definida mediante tres fórmulas distintas sobre las tres partes de esa figura plana, con un espíritu similar al que explicamos pormenorizado en el ejemplo 3.5. ■

**Ejemplo 3.5** El **cubo** formado por las seis caras de  $[0, 1]^3$  es la imagen de  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $D = D_1 \cup \dots \cup D_6$ ,  $D_1 = [0, 1] \times [1, 2]$ ,  $D_2 = [0, 1] \times [-1, 0]$ ,  $D_3 = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $D_4 = [1, 2] \times [0, 1]$ ,  $D_5 = [2, 3] \times [0, 1]$ ,  $D_6 = [3, 4] \times [0, 1]$ , y

$$\begin{aligned} (u, v) \in D_1 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (v - 1, u, 1) \\ (u, v) \in D_2 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (-v, u, 0) \\ (u, v) \in D_3 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (0, u, v) \\ (u, v) \in D_4 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (u - 1, 1, v) \\ (u, v) \in D_5 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (1, 3 - u, v) \\ (u, v) \in D_6 &\Rightarrow \Phi(u, v) = (4 - u, 0, v) \end{aligned}$$

La función  $\Phi$  está bien definida (porque sobre los bordes comunes de los  $D_i$  coincide) y

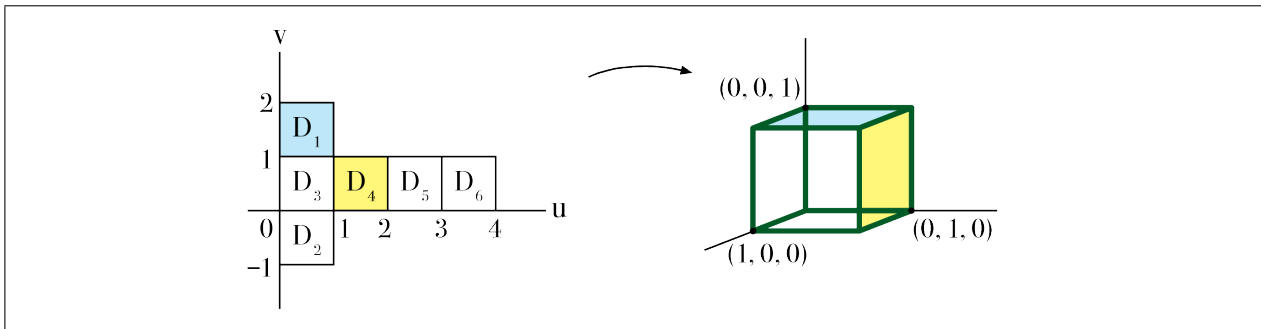


Figura 3.9: Parametrización del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

es continua sobre todo  $D$ . Además, su restricción a cada  $D_i$  es derivable con continuidad, puesto que todas las fórmulas son polinomios de primer grado.

Para mejor comprender la parametrización, podemos imaginar que hemos dibujado un

desarrollo del cubo, con las seis caras dispuestas en forma de T, para a continuación recortar y pegar lados de las caras para ir formando las aristas. ■

**Ejemplo 3.6** Si  $D$  es una región simple de dos variables y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable con continuidad sobre  $D$ , entonces la gráfica de  $g$ ,  $\Sigma = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in D\}$ , es una **superficie en forma explícita**, imagen de la parametrización

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y)) \quad \forall (x, y) \in D,$$

que es inyectiva y regular en todos los puntos del dominio  $D$ , ya que su matriz jacobiana es

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

que siempre tiene rango igual a 2 porque el determinante de las dos primeras filas es no

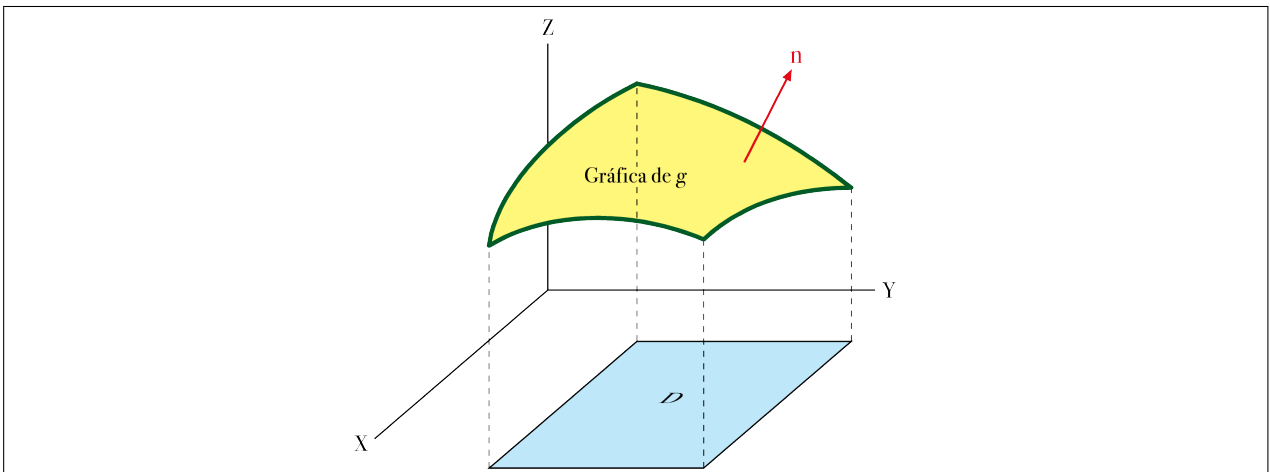


Figura 3.10: Superficie en forma explícita

nulo. El vector normal vale  $\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$ . <sup>(87)</sup> ■

**75.** Si  $\Sigma = \Phi(D)$ , entonces alrededor de los puntos de  $\Sigma$  para los que la matriz jacobiana de  $\Phi$  tiene rango 2, siempre puede expresarse una parte de  $\Sigma$  en forma explícita (ver teorema 3.37, en el apartado 3.5.2).

**Teorema 3.7** Sea  $\Sigma$  la superficie dada en forma explícita por  $z = g(x, y)$  (notaciones como en el ejemplo 3.6), y  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$  un punto de  $\Sigma$ . Entonces el plano tangente a  $\Sigma$  en  $\mathbf{p}$  es el conjunto de puntos  $(x, y, z)$  que cumplen

$$z = z_0 + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

<sup>87</sup>Observar que si hubiéramos elegido los parámetros de modo que las variables  $x, y$  se obtuviesen en el otro orden posible,  $(u, v) \rightsquigarrow (v, u, g(u, v))$ , entonces el vector normal también sería no nulo,  $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial u}, -1\right)$ , pero su última coordenada sería negativa. Esto ahora no tiene trascendencia, pero la tendrá cuando hablemos de la orientación (apartado 3.3.2).

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de la definición de plano tangente (página 143) y de los vectores normales calculados en el ejemplo 3.6.

**76.** Como consecuencia de esta fórmula puede decirse que nuestros planos tangentes son los mismos que los que se introdujeron en el cálculo diferencial para superficies definidas en forma explícita.

**Ejemplo 3.8** El teorema de la función implícita garantiza que de una ecuación  $h(x, y, z) = 0$ , donde  $h$  es una función derivable con continuidad y que tiene gradiente no nulo en todos los puntos, siempre se puede despejar alguna de las tres variables en función de las otras dos, al menos en un entorno de cada punto.

En efecto, si en un punto  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$  el gradiente de  $h$  es no nulo, alguna de sus derivadas parciales tiene que ser distinta de cero. Sin pérdida de generalidad supondremos que  $\partial h / \partial z(\mathbf{p}_0) \neq 0$ . Por el teorema de la función implícita sabemos que existe una función  $g$  de dos variables tal que  $g(x_0, y_0) = z_0$  y que en un entorno de  $\mathbf{p}_0$  la ecuación  $h(x, y, z) = 0$  equivale a  $z = g(x, y)$ .

**77.** Como consecuencia, siempre que un subconjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  esté definido por una ecuación  $h(x, y, z) = 0$  (por ejemplo, una esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ), donde  $h$  sea una función derivable con continuidad y que tenga gradiente no nulo en todos los puntos donde se anula  $h$ , en un entorno de cada punto el conjunto  $\Sigma$  es una superficie en forma explícita.

Un resultado totalmente análogo al teorema 3.7 es válido para superficies definidas en forma implícita. ■

### 3.1.3. Definición formal de superficie

Nuestra definición de superficie incluye los conjuntos que se pueden obtener uniendo imágenes de parametrizaciones que son inyectivas y regulares sobre interiores de regiones simples, con la condición adicional de que solamente se “peguen” puntos que correspondan a los bordes. En cierto modo, es algo similar a lo que hicimos con las parametrizaciones de curvas, al admitir funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

**Definición 3.9** Una **superficie** es cualquier subconjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  que sea imagen,  $\Sigma = \Phi(D)$ , de una aplicación continua  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  es una unión (finita) de  $m$  regiones simples  $D_i$ ,  $m \geq 1$ , y de forma que

1. Para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $\Phi|_{D_i} \in \mathcal{C}^1(D_i)$ .
2.  $\Phi|_{\text{Int } D_1 \cup \dots \cup \text{Int } D_m}$  es inyectiva y regular.
3.  $\Phi(\text{Int } D_i) \cap \Phi(\partial D_i) = \emptyset$  para todo  $i$ .
4.  $\Phi(\text{Int } D_i) \cap \Phi(D_j) = \emptyset$  siempre que  $i \neq j$ .

Cualquier función que cumpla estas condiciones se denomina una **parametrización** de la superficie  $\Sigma$ .

La última condición obliga en particular a que las regiones simples no se solapen, es decir, a que  $\text{Int } D_i \cap \text{Int } D_j = \emptyset$  siempre que  $i \neq j$ .

En algunos textos las superficies en las que  $m = 1$  y además  $\Phi$  es inyectiva y suave sobre todo la región simple  $D$  se llaman **superficies simples regulares** ([2], definición 8.1.1).

**78.** Recordar que desde el apartado 2.6, a nuestras regiones simples del plano les exigimos la condición de que su borde sea una curva cerrada simple (observación 61).

La esfera, el cono, el cilindro y demás conjuntos de los ejemplos 3.1 a 3.5 cumplen estas condiciones (en el caso del cono hay que limitar el dominio de parámetros de manera que sea una región simple o una unión finita de regiones simples), así como otras *superficies* de frecuente aparición en las aplicaciones.

**79.** Una definición como la 3.9 que se limitara al caso  $m = 1$  no incluiría a la superficie de un paralelepípedo, ni a otras muchas figuras que tengan distintas “caras” y para su descripción requieran usar ecuaciones distintas.

**Ejemplo 3.10** La unión de dos trozos de planos que se cortan, definida por  $xy = 0$ ,  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq 2$ ,  $0 \leq -z \leq 3$ , también es una superficie. ■

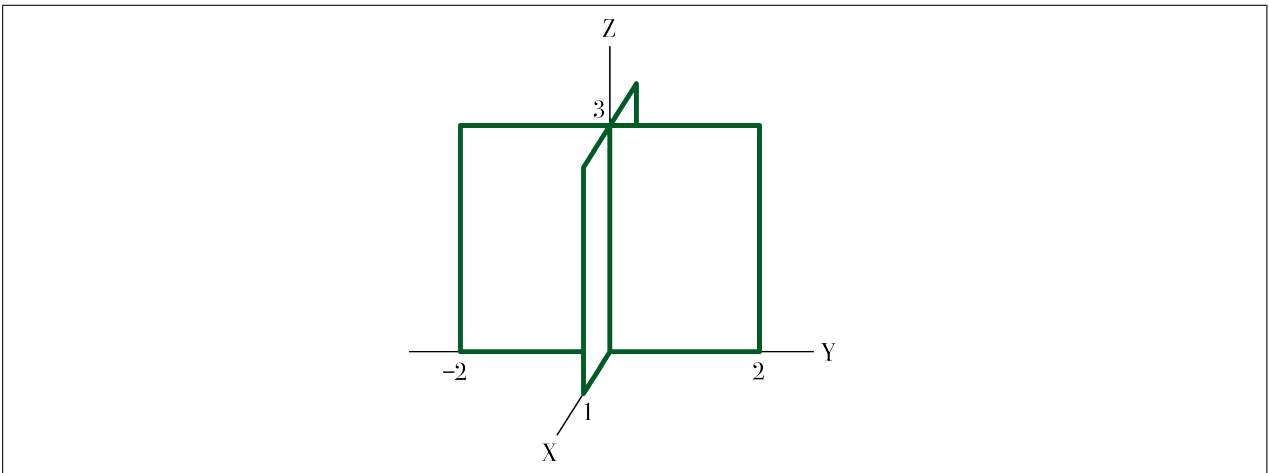


Figura 3.11: Superficie contenida en  $xy = 0$

Ahora que disponemos de una definición precisa de superficie es el momento de replantearnos los conceptos de recta normal y de plano tangente, en particular necesitamos comprobar que están bien definidos, igual que ocurrió en otros conceptos de este mismo curso (reparar la observación 69). Aquí habrá que garantizar que las definiciones dadas no dependen de la parametrización utilizada, sino solamente de la superficie y del punto en cuestión. Lo que sí que depende de la parametrización utilizada es tanto la magnitud como el sentido del vector normal en un punto. Todas estas afirmaciones se deducen de la fórmula del siguiente teorema, que garantiza que un vector normal se puede obtener de otro vector normal multiplicándolo por un escalar:

**Teorema 3.11** *Si  $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$  son regiones simples y  $\Phi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son dos parametrizaciones con la misma imagen, con la condición adicional de que ambas son inyectivas y regulares sobre todo su dominio, entonces para cada punto  $(u, v) \in D_2$ ,*

$$\mathbf{n}_2(u, v) = \det J\mathbf{h}(u, v) \mathbf{n}_1(\mathbf{h}(u, v))$$

*donde  $\mathbf{h}$  es el cambio de parámetros, es decir, una función  $D_2 \rightarrow D_1$  biyectiva y regular (con jacobiano no nulo) para la que  $\Phi_2 = \mathbf{h} \circ \Phi_1$ .*

La parte más complicada de la demostración es la construcción de  $\mathbf{h}$  y la demostración de sus propiedades (cf. [2], teorema 8.1.10). Una vez hecho todo eso, la fórmula se deduce de la regla de la cadena (con algo de trabajo, ver por ejemplo [2], teorema 8.2.7).



### 3.2. Integral de un campo escalar sobre una superficie

Las integrales de campos escalares sobre superficies nacen para resolver cuestiones muy similares a las que resuelven las integrales de campos escalares sobre curvas: medir masas, temperaturas medias, etc. También la justificación que daremos para su definición será del mismo estilo, buscando un coeficiente multiplicador asociado a la parametrización, que a escala infinitesimal mida de modo aproximado la relación entre el área de un rectángulo en el dominio de parámetros y el área de su imagen una vez aplicada la deformación de la representación paramétrica.

No podremos obtener, sin embargo, un resultado análogo al teorema 1.8, donde se probó que la longitud de un camino es el límite de las longitudes de poligonales inscritas en el camino. Un paso al límite de este tipo es más complejo de lo que parece a primera vista, ya que incluso para una superficie tan sencilla como un cilindro, el área de un poliedro que la aproxime no siempre aproxima el valor del área del cilindro, como demostró Hermann Schwarz en 1881 (ver apartado 3.5.3).

**80.** Para asegurarnos de que un poliedro inscrito en una superficie sirve para aproximar el área de la superficie, hay que comprobar además que la inclinación de las caras del poliedro se aproxime de modo uniforme a la de los planos tangentes.

Lo que sí coincide con el área de una superficie es el ínfimo de todos los límites posibles de áreas de poliedros que se aproximan a la misma (dejamos sin precisar qué se entiende exactamente por aproximarse a la superficie).

**Ejemplo 3.12** Puesto que una aproximación a través de triangulaciones de la superficie puede no funcionar, intentamos una aproximación diferente, comenzando con el área de la

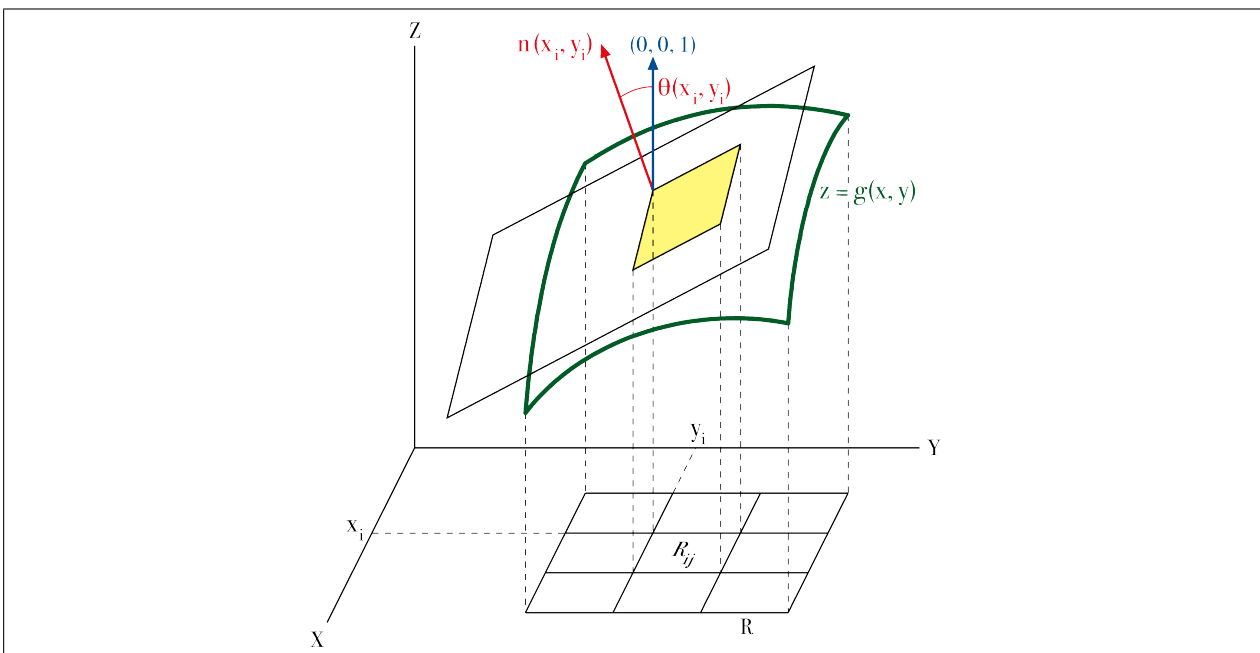


Figura 3.12: El paralelogramo amarillo es la parte del plano tangente a la superficie que se proyecta sobre  $R_{ij}$ . El ángulo  $\theta(x_i, y_j)$  que forma la normal  $\mathbf{n}(x_i, y_j)$  con la vertical es el mismo que el que forman el plano tangente y el plano  $z = 0$

gráfica de una función  $z = g(x, y)$  definida sobre un rectángulo  $R$  (una superficie en forma explícita). Aproximamos el área haciendo una partición infinitesimal sobre  $R$  que lo divida en rectángulos  $R_{ij}$  y calculando la suma de las áreas de cada uno de los paralelogramos que sean tangentes a la superficie en el punto  $(x_i, y_j, g(x_i, y_j))$  y cuya proyección sea  $R_{ij}$  (una especie de escamas infinitesimales que recubren toda la superficie).

Al ser  $R_{ij}$  la proyección del paralelogramo, su área es igual al área del paralelogramo multiplicada por el coseno del ángulo  $\theta(x_i, y_j)$  que forma su plano con el plano horizontal. (Nótese que nos referimos al ángulo que sea menor que  $\pi/2$ , para que el coseno sea positivo.) Al sumar todos estos productos y pasar al límite cuando el diámetro de la partición tienda a cero lo que se tendrá será la integral del inverso del mencionado coseno. En consecuencia, el coeficiente local de dilatación en el punto  $(x, y)$  es precisamente  $\frac{1}{\cos \theta(x, y)}$ .

Por otra parte, el inverso del coseno coincide en cada punto con la longitud del vector normal a  $z = g(x, y)$  como demuestra el siguiente cálculo (<sup>88</sup>):

$$\|\mathbf{n}(x_i, y_j)\| \cos \theta(x_i, y_j) = \mathbf{n}(x_i, y_j) \cdot (0, 0, 1) = 1,$$

donde la última igualdad se sigue del ejemplo 3.6.

Otro razonamiento que nos lleva a la misma conclusión, y que es válido no sólo para una superficie en forma explícita sino para cualquier tipo de parametrización, es el siguiente. El área del paralelogramo es la longitud del producto vectorial de sus lados, como vimos al introducir la fórmula del cambio de variable para integrales múltiples, pero estos lados son  $dx \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_i, y_j)$  y  $dy \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_i, y_j)$ , luego el área del paralelogramo es

$$\left\| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) (x_i, y_j) \right\| |dx| |dy| = \|\mathbf{n}(x_i, y_j)\| A(R_{ij}).$$

En consecuencia, el coeficiente local de dilatación coincide con la longitud del vector normal en cada punto,  $\|\mathbf{n}(x, y)\|$ . ■

**Ejemplo 3.13** Si ahora consideramos una superficie  $\Sigma$  definida por la parametrización  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  (no necesariamente en explícitas), un razonamiento análogo al último hecho en el ejemplo anterior, introduciendo una partición en rectángulos infinitesimales, sugiere que el área de  $\Sigma$  sea también la integral sobre  $D$  de la longitud del vector normal, así como que la integral de un campo escalar cualquiera se defina como la integral a través de la representación paramétrica y el coeficiente dado por la longitud del vector normal. ■

**Definición 3.14** (Notaciones como en la definición 3.9.) El **área de la superficie  $\Sigma = \Phi(D)$**  es

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\mathbf{n}_\Phi(u, v)\| \, du \, dv.$$

<sup>88</sup>Para este cálculo elegimos parametrizar en el orden  $(x, y)$  y no en el  $(y, x)$  (ver final del ejemplo 3.6). Podríamos haberlo hecho al revés, pero entonces multiplicaríamos escalarmente por el vector unitario  $(0, 0, -1)$ , para que el coseno siguiera siendo positivo.

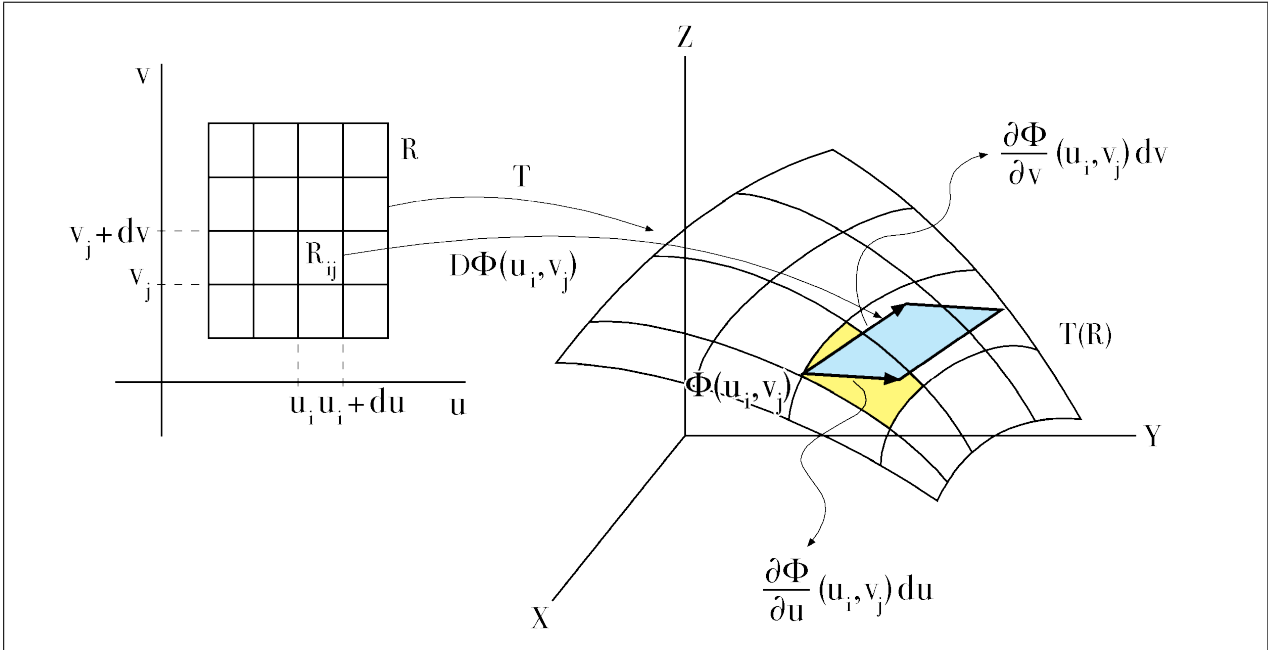


Figura 3.13: El paralelogramo azul viene definido por los vectores  $du \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j)$  y  $dv \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j)$ .

**Definición 3.15** Sean  $\Sigma = \Phi(D)$  una superficie (notaciones como en la definición 3.9), y  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar, definida y continua sobre  $\Sigma$ . La **integral de  $f$  sobre  $\Sigma$**  es

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_D (f \circ \Phi) \|\mathbf{n}_{\Phi}\| = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\mathbf{n}_{\Phi}(u, v)\| \, du \, dv.$$

**81.** Para asegurarnos de que es correcta esta definición (y, en consecuencia, también la anterior) hay que comprobar que la integral del miembro de la derecha siempre existe y que solamente depende de la superficie y de la función, pero no de la parametrización.

La integral siempre existe, ya que el integrando es continuo sobre cada una de las regiones simples  $D_i$ . Más complicado resulta comprobar que la definición es independiente de la parametrización:

**Teorema 3.16** La definición 3.15 es independiente de la parametrización.

**DEMOSTRACIÓN:** (PARCIAL) Lo probaremos solamente para el caso de que las dos parametrizaciones sean biyectivas y regulares sobre la totalidad de sus dominios. Después, para probar el caso general habría que usar la propiedad aditiva del teorema 2.28 (esta es la parte fácil) y probar que podemos aplicar la fórmula del cambio de variable para integrales dobles ignorando en cada  $D_i$  el conjunto  $\partial D_i \cup \Phi_i^{-1}(\Phi_j(D_j))$  (donde  $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) (esta es la parte difícil).

Aplicando el teorema del cambio de variable 2.32 al cambio de parámetros  $\mathbf{h}$  que se

construyó en el teorema 3.11,

$$\begin{aligned} \iint_{D_1=\mathbf{h}(D_2)} [(f \circ \Phi_1) \|\mathbf{n}_1\|](u_1, v_1) du_1 dv_1 &= \\ &= \iint_{D_2} [(f \circ \Phi_1 \circ \mathbf{h})(\|\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{h}\|)](u_2, v_2) |\det J\mathbf{h}(u_2, v_2)| du_2 dv_2 = \\ &= \iint_{D_2} [(f \circ \Phi_2) \|\mathbf{n}_2\|](u_2, v_2) du_2 dv_2. \end{aligned}$$

Lo que sí resulta inmediato es que  $A(\Sigma) = \iint_{\Sigma} d\sigma$ . Tampoco es difícil que la integral sobre una superficie puede descomponerse en la suma de las integrales sobre sus “caras”:

**Teorema 3.17** Sea  $\Sigma = \Phi(D_1) \cup \dots \cup \Phi(D_m)$  una superficie (notaciones como en la definición 3.9), y  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo sobre ella. Entonces

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \sum_{i=1}^m \iint_{\Phi(D_i)} f d\sigma$$

DEMOSTRACIÓN: No hay más que aplicar la propiedad aditiva del teorema 2.28.

**82.** Este resultado es el análogo para superficies de la propiedad aditiva de las integrales de campos escalares sobre una suma de caminos.

Terminaremos este apartado con dos casos particulares, uno de los cuales nos ha servido de introducción y el otro proporciona una fórmula para cierto tipo de superficies de revolución.

**Teorema 3.18** Sea  $\Sigma$  una superficie definida en forma explícita por  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  (cf. ejemplo 3.6), y  $f$  un campo escalar continuo sobre  $\Sigma$ . Entonces

$$\iint_{\Sigma} f d\sigma = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \varphi} dx dy,$$

donde  $\varphi$  es el ángulo menor que  $\pi/2$  que forma la recta normal a la superficie con el eje de las  $Z$ .

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL) La primera igualdad se obtiene inmediatamente de la definición 3.15 y del ejemplo 3.12. Este ejemplo es también una justificación de la segunda igualdad.

**Ejemplo 3.19** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable con continuidad y con un conjunto finito (eventualmente vacío) de raíces. Formalizamos la idea intuitiva de superficie de revolución generada al girar la gráfica de  $f$  alrededor del eje  $X$  de la siguiente manera. Un punto de la superficie de revolución se caracteriza porque pertenece a una circunferencia que tiene el centro en el intervalo  $[a, b]$  del eje  $X$ , está situada en un plano perpendicular al eje  $X$  (y por tanto paralelo al  $YZ$ ) y cuyo radio es igual al valor absoluto de  $f$  en el centro.

Por consiguiente, los puntos  $(x, y, z)$  de tal superficie han de ser los que cumplan estas dos condiciones:

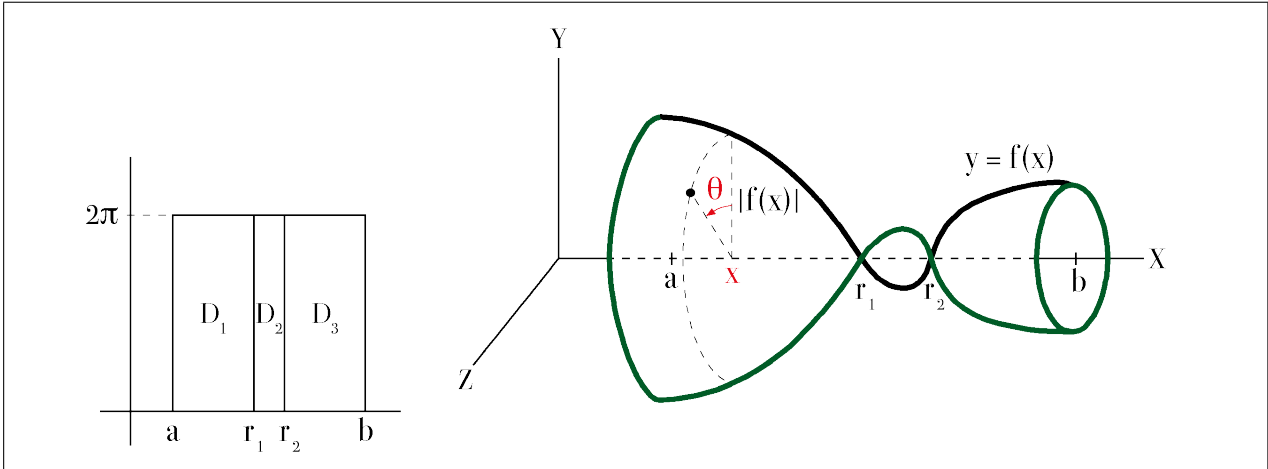


Figura 3.14: Superficie de revolución  $\Sigma$  obtenida al girar la gráfica de  $y = f(x)$  (en negro) alrededor del eje  $X$ . Los parámetros que determinan cada punto de la superficie son  $x$  y el ángulo  $\theta$

- $x \in [a, b]$ ,
- $y^2 + z^2 = f(x)^2$ .

Para parametrizarla pensamos que primero nos situamos a la altura de la coordenada  $x$  (con lo que elegimos precisamente a  $x$  como primer parámetro) y después nos fijamos en el ángulo de rotación  $\theta \in [0, 2\pi]$  a partir del punto inicial  $(x, f(x), 0)$ .

Resumiendo, la **superficie de revolución generada al girar la gráfica de  $f$  alrededor del eje  $X$**  es el conjunto

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

El conjunto  $\Sigma$  es efectivamente una superficie, con parametrización

$$D = [a, b] \times [0, 2\pi], \quad \Phi(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta).$$

Para comprobar que es una superficie distinguiremos dos casos. Si  $f$  no se anula nunca en el intervalo abierto  $(a, b)$ , entonces  $\Sigma$  responde a la definición 3.9 sin más que tomar  $m = 1$ . En efecto,  $f$  es inyectiva sobre el interior de  $D$ ,  $\text{Int } D = (a, b) \times (0, 2\pi)$ , y como la matriz jacobiana es

$$J\Phi(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x) \cos \theta & -f(x) \sin \theta \\ f'(x) \sin \theta & f(x) \cos \theta \end{pmatrix},$$

resulta que tiene siempre rango 2 en los puntos de  $(a, b) \times (0, 2\pi)$ , porque dos de los determinantes  $2 \times 2$  valen  $-f(x) \sin \theta$  y  $f(x) \cos \theta$ , que no pueden ser nulos a la vez.

En caso de que  $f$  tenga  $m (\geq 1)$  raíces dentro de  $(a, b)$ ,  $r_1 < \dots < r_m$ , descomponemos  $D$  en la unión de las  $m + 1$  regiones simples  $D_i = [r_{i-1}, r_i] \times [0, 2\pi]$ ,  $i = 1, \dots, m + 1$  (donde  $r_0 = a$ ,  $r_{m+1} = b$ ) y aplicamos a cada una de ellas el razonamiento anterior. ■

**Teorema 3.20** Sea  $C$  la gráfica de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $\mathcal{C}^1$ , Y sea  $\Sigma$  la superficie de revolución obtenida al girar  $C$  alrededor del eje  $X$  (cf. ejemplo 3.19). Entonces

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_C 2\pi |f(x)| ds$$

(integral a lo largo de la gráfica de la longitud de la circunferencia generada por cada punto suyo).

DEMOSTRACIÓN: La parametrización introducida en 3.19 proporciona el siguiente cálculo:

$$\|\mathbf{n}_{\Phi}(x, \theta)\| = \|(f(x)f'(x), -f(x)\cos\theta, -f(x)\sin\theta)\| = |f(x)|\sqrt{f'(x)^2 + 1}.$$

Por otra parte, la gráfica de  $f$  admite la parametrización  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ , luego  $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ . Las fórmulas son ahora inmediatas.

**83.** El área de la superficie de revolución se obtiene con la misma fórmula que si calculásemos la masa de la gráfica de  $f$  suponiendo que cada punto de la gráfica contribuye a la masa con una densidad igual a la longitud de la circunferencia de revolución.

Otras aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes pueden consultarse en el apartado 3.5.4.

### 3.3. Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada

#### 3.3.1. Integral de un campo vectorial sobre una parametrización

La explicación de la próxima definición hay que buscarla, como en las demás integrales introducidas en este curso, en lo que se pretende modelizar. Si  $\mathbf{F}$  es el campo de velocidades de un fluido en una cierta región del espacio y  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametriza la superficie de una membrana sumergida en el fluido, la cantidad de fluido que atraviesa la membrana por unidad de tiempo (el **flujo** a través de la membrana) la definimos como la integral sobre la parametrización  $\Phi$  de la proyección de  $\mathbf{F}$  en la dirección de la normal a la membrana, puesto que en los puntos infinitamente próximos a cada uno de los de la membrana, de la velocidad que lleva el fluido solamente nos interesa la componente ortogonal a la superficie, ya que las

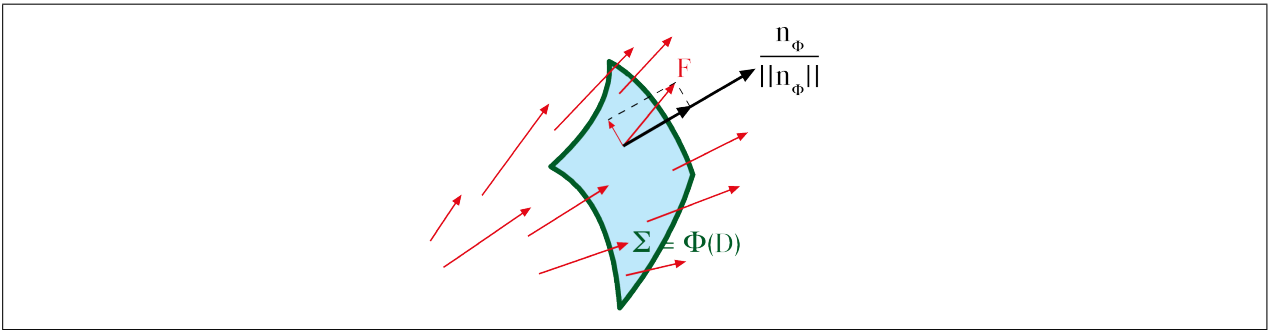


Figura 3.15: Membrana  $\Sigma = \Phi(D)$  atravesada por un fluido cuyo campo de velocidades es  $\mathbf{F}$

otras componentes serán tangenciales y no computarán a la hora del fluido que la atraviesa:

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{n}_\Phi}{\|\mathbf{n}_\Phi\|} d\sigma,$$

(en la integral del miembro derecho estamos suponiendo que el vector normal nunca es nulo, es decir, que el rango de la matriz jacobiana de  $\Phi$  es en todos los puntos igual a 2). De acuerdo con la definición 3.15, la integral de la derecha es igual a  $\iint_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}_\Phi(u, v) du dv$ , para cuya formulación ya no se necesita que el vector normal sea no nulo.

**Definición 3.21** Sean  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m \subset \mathbb{R}^2$  una unión finita de regiones simples bidimensionales y  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función continua sobre todo  $D$ , que sobre cada una de las regiones simples  $D_i$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y que cumple las demás condiciones de la definición 3.9.

Sea además  $\mathbf{F} : \Phi(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo sobre la imagen de  $\Phi$ . Llamamos **integral del campo  $\mathbf{F}$  sobre la parametrización  $\Phi$**  a

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}_\Phi(u, v) du dv.$$

Como todas las derivadas parciales de  $\Phi$  son continuas, el integrando del miembro de la derecha es una función continua. En consecuencia, la integral siempre existe.

Para representaciones paramétricas que sean la definición explícita de una superficie, la fórmula de la integral se expresa a menudo de la siguiente forma:

**Teorema 3.22** Con las notaciones del ejemplo 3.6, si  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  es un campo vectorial continuo sobre la gráfica de  $g$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \\ &= \iint_D \left[ -P(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - Q(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) + R(x, y, g(x, y)) \right] dx dy. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Es una aplicación directa de la definición 3.21 y de la fórmula para el vector normal obtenida en el ejemplo 3.6.

**84.** Observar que no hemos definido la integral de un campo vectorial sobre una superficie, sino sobre una parametrización.

Para que nuestra definición fuera válida como integral sobre una superficie necesitaríamos comprobar que es independiente de la parametrización, como hemos hecho en otros casos (por ejemplo, en la definición 3.15). Pero esto último no es cierto (ver el teorema 3.29), la integral depende en realidad de orientación de la superficie, concepto que introduciremos enseguida.

### 3.3.2. Orientación de superficies definidas en forma explícita

Para considerar integrales de campos vectoriales sobre una superficie, no sobre una parametrización, necesitaremos incorporar a la superficie una orientación. En las curvas teníamos el “sentido de recorrido” como guía intuitiva para la orientación. Una superficie, en cambio, no tiene sentidos de recorrido que identifiquen la orientación. Volviendo al comienzo del apartado 3.3.1, si  $\mathbf{F}$  es un campo de velocidades y  $\Sigma$  una membrana, lo que nos interesa es distinguir los resultados que nos dará la integral del campo sobre una superficie según en qué sentido la atraviese, así que esa distinción se basará ahora no en la manera de recorrer la superficie, sino en la manera de cruzarla. Asignaremos un “sentido de cruce” a base de seleccionar un sentido del vector normal.

En principio puede parecer una misión sencilla. En los puntos en los que el vector normal sea no nulo podemos elegir entre los dos vectores unitarios, que nos proporcionan los dos sentidos de cruce. Ahora bien, esta elección hemos de hacerla de manera coherente en toda la superficie, no vale que la selección la hagamos de cualquier manera, asignando en puntos infinitamente próximos unas normales que no estén infinitamente próximas, porque ello indicaría que en puntos infinitamente próximos estamos cruzando la superficie en dos sentidos opuestos.

**85.** La selección que hagamos de la normal unitaria tiene que ser continua.

Para superficies definidas explícitamente, con una variable despejada en función de las otras dos, este criterio necesario es suficiente para nuestro propósito. Para otras superficies no lo será, como explicaremos en el apartado 3.3.3.



Supóngase que  $\Sigma$  es una superficie que viene dada en forma explícita con la tercera variable despejada en función de las otras dos,  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  es una región simple bidimensional (cf. ejemplo 3.6). Sobre cada punto  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \in \Sigma$  hay definida una normal unitaria

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}} \left( -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$$

que es función continua de las coordenadas del punto  $\mathbf{p}$ . Como consecuencia, sobre toda  $\Sigma$  se puede construir una normal unitaria continua  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de dos maneras: eligiendo  $\mathbf{N}$  (que se distingue de su opuesta porque tiene la tercera componente positiva, diremos que **apunta hacia arriba**) sobre cada punto, o eligiendo  $-\mathbf{N}$  sobre cada punto.

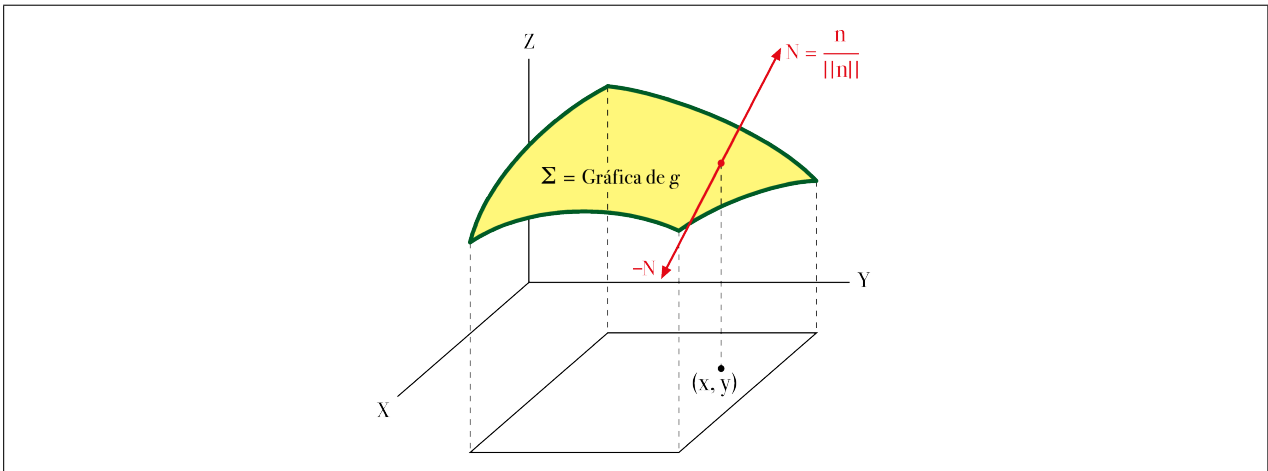


Figura 3.16: Las dos normales unitarias en cada punto de  $\Sigma$

Además, y esto es importante, sólo de estas dos maneras se puede construir una normal unitaria continua sobre toda  $\Sigma$ .

**Teorema 3.23** Si  $\mathbf{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo vectorial continuo que a cada punto de  $\Sigma$  asocia un vector unitario y normal a  $\Sigma$  (es decir, al plano tangente a  $\Sigma$ ) en el punto, entonces o bien  $\mathbf{F} = \mathbf{N}$ , o bien  $\mathbf{F} = -\mathbf{N}$ . (Notaciones como en los párrafos anteriores.)

DEMOSTRACIÓN: <sup>(89)</sup>

**Definición 3.24** Cuando sobre la superficie seleccionemos como normal unitaria precisamente la función  $\mathbf{N}$ , diremos que tenemos la superficie **orientada positivamente (respecto del eje Z)**, y la denotaremos por  $\Sigma^+$ , y cuando seleccionemos sobre cada punto de la superficie la normal  $-\mathbf{N}$ , pondremos  $\Sigma^-$  y diremos que la superficie  $\Sigma$  la tenemos **orientada negativamente (respecto del eje Z)**.

<sup>89</sup>Es obvio que, en cada punto  $(x, y, g(x, y))$  o bien se tiene  $\mathbf{F}(x, y, g(x, y)) = \mathbf{N}(x, y, g(x, y))$ , o bien se tiene  $\mathbf{F}(x, y, g(x, y)) = -\mathbf{N}(x, y, g(x, y))$ . Lo que el enunciado asegura es que el signo de estas igualdades es el mismo en todos los puntos, cosa que no es ni mucho menos evidente.

Para demostrarlo, observemos que la función  $D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por el producto escalar de  $\mathbf{F}$  por  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \mathbf{N}(x, y, g(x, y))$  es continua y toma solamente los valores  $+1$  y  $-1$ , luego tiene que ser constante (argumentétese como en la demostración del caso  $n = 2$  del teorema del valor medio para integrales, 2.29, ver el apartado 2.7.6.).

Todo lo dicho para la coordenada  $z$  vale para cualquiera de las otras dos coordenadas cuando la superficie se exprese con una de ellas despejada.

**86.** Es la segunda vez que decidimos reservar el símbolo  $+$  para una orientación determinada. Lo hicimos para algunas orientaciones de curvas (en relación con el teorema de Riemann-Green) y lo haremos más adelante con otras orientaciones de superficies (en relación con el teorema de la Divergencia).

Obsérvese que este concepto de orientación positiva está asociado a una descripción explícita de la superficie, y por tanto depende de cuál de las variables es la despejada <sup>(90)</sup>.

### 3.3.3. Orientación de superficies generales

Cuando pasamos a superficies generales la cuestión de disponer de una normal unitaria continua que nos sirva para diferenciar los dos lados de la superficie y con ello los dos sentidos de cruce, se complica extraordinariamente, en especial cuando la superficie tiene aristas. Comenzaremos comentando algunos casos concretos para después dar un enfoque más general.

Para el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2, |z| \leq h$  (ejemplo 3.3) el vector normal en el punto  $(x, y, z)$  es

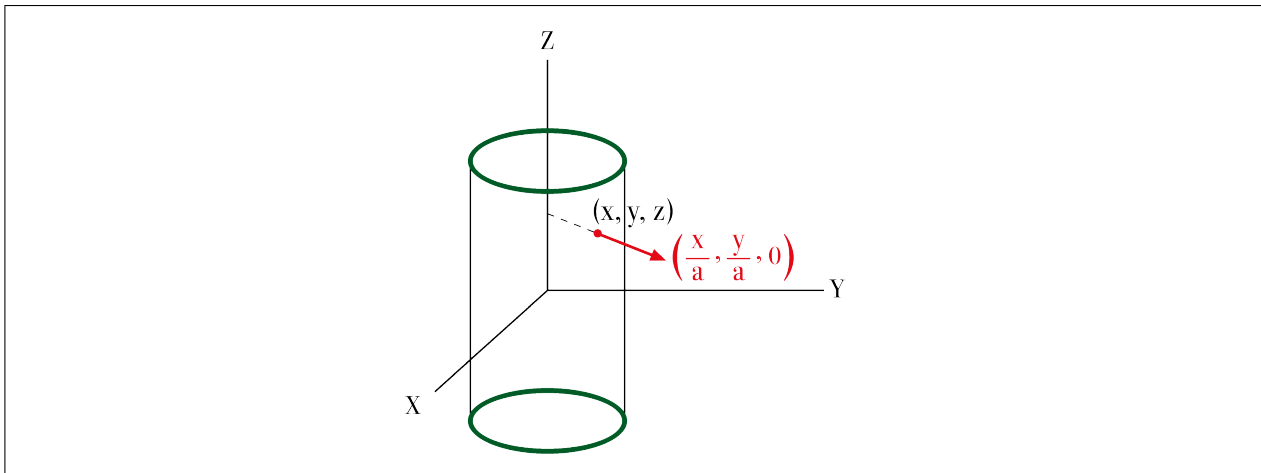


Figura 3.17: Normal unitaria en cada punto que siempre va desde dentro hacia fuera del cilindro

$(x, y, 0)$ , lo que proporciona un vector normal unitario sobre todo el cilindro que es función continua de  $(x, y, z)$ , mediante la expresión  $(x/a, y/a, 0)$  (por cierto, independiente de  $z$ , como nos sugiere la intuición: la normal unitaria es la misma en toda la generatriz que contiene al punto). Esta normal nos vale para distinguir entre los dos posibles sentidos de cruce de la superficie cilíndrica.

Para la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  (ejemplo 3.2), una normal en  $\mathbf{p}$  es  $2 \sin \varphi \mathbf{p}$ , luego *siempre que pueda simplificarse* sin  $\varphi$  se obtiene una normal unitaria continua con  $\mathbf{p}/2$ . Una vez

<sup>90</sup>Por ejemplo, la superficie plana  $\Sigma = \{(x, y, z) : y = z, 0 \leq x, y, z \leq 1\}$  estaría orientada positivamente respecto del eje  $Z$  mediante la normal unitaria constante  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Pero si en la definición de  $\Sigma$  consideramos la  $y$  despejada, en lugar de la  $z$ , la orientación positiva respecto al eje  $Y$  vendrá dada por la normal  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

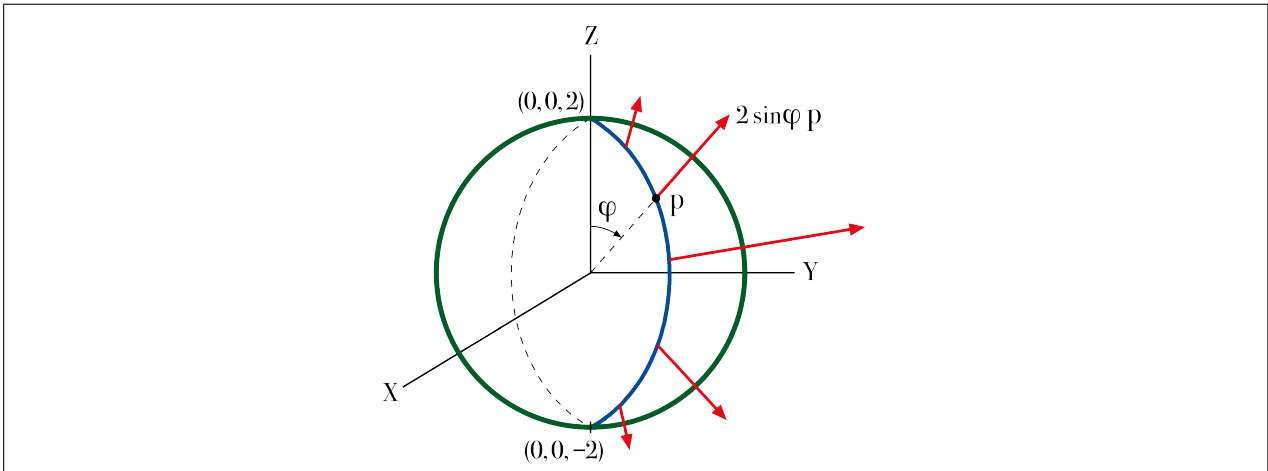


Figura 3.18: Vector normal (no unitario, en general) en puntos de un mismo meridiano, que siempre va desde dentro hacia fuera de la esfera. A medida que nos aproximamos a los puntos  $(0, 0, 2)$  o  $(0, 0, -2)$ , la longitud del vector normal tiende a cero

obtenida esta normal unitaria sobre una parte de la esfera observamos que en los casos en los que no pueda hacerse esa simplificación, la expresión  $\mathbf{p}/2$  también da una normal unitaria. Nuevamente, como en el caso del cilindro, tenemos una normal unitaria definida sobre toda la esfera y continua.

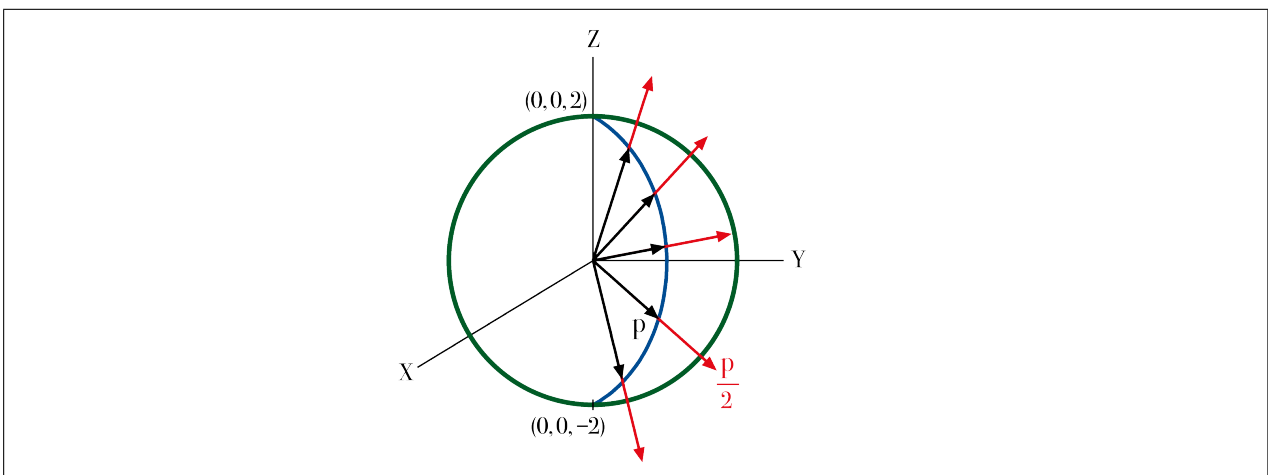


Figura 3.19: Normal unitaria en cada punto de la esfera, incluidos  $(0, 0, 2)$  y  $(0, 0, -2)$ , que siempre va desde dentro hacia fuera de la esfera

Para el cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \leq 0$  (ejemplo 3.1), se tiene una normal unitaria continua argumentando como en el caso de definición explícita, con la salvedad esperable de que hay un punto (el vértice) que carece de normal.

En estos ejemplos hemos podido solventar las dificultades que no son intrínsecas a la superficie. Hemos podido construir una normal unitaria continua sobre todo el subconjunto de la superficie formado por sus **puntos regulares**, o sea, sobre los puntos de la superficie que son imagen mediante alguna parametrización  $\Phi$  de  $\text{Int } D_i$  para algún  $i$  (sobre estos puntos, alguna parametrización tiene vector normal no nulo).

De esta manera hemos podido construir un tecnicismo que en las demostraciones nos servirá para distinguir lo que en lenguaje usual distinguimos con expresiones varias: *lado de*

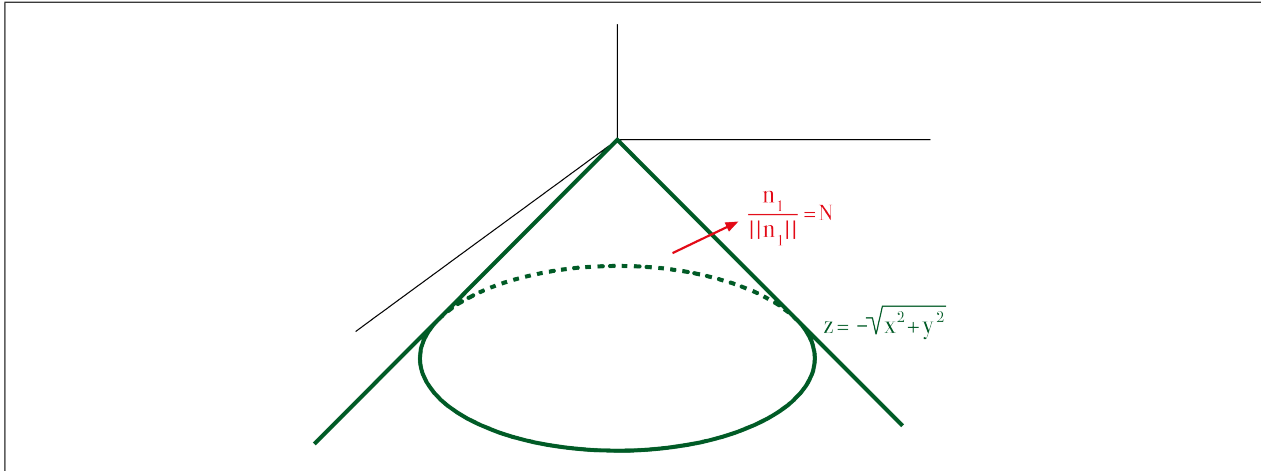


Figura 3.20: La normal unitaria  $N$  se obtiene a partir del vector normal  $\frac{n_1}{\|n_1\|}$ , ver ejemplo 3.1

*dentro y lado de fuera* de la superficie, dos *sentidos de cruce* de la superficie, etc.

Pero en el caso del cubo (ejemplo 3.5) o del cilindro con tapas (ejemplo 3.4), las pegas que plantean las aristas o las circunferencias, respectivamente, parecen insalvables. Para cada una de las seis caras del cubo se puede definir con facilidad una normal unitaria continua, incluso para los puntos de las aristas hay dos posibilidades, según de qué cara las consideremos, y para los vértices hay tres posibilidades, si bien lo sensato es no pretender elegir ninguna de ellas como normal a la superficie en esos puntos.

Cuando estamos en una misma cara, el criterio para la elección en cada punto de una normal unitaria o de la otra es sencillo, el resultado de la elección ha de ser una función continua. Es la continuidad la que nos permite relacionar la normal unitaria en un punto con la normal en otros puntos infinitamente próximos.

Pero ¿cómo relacionamos la elección que hayamos hecho de la normal unitaria en una cara con la normal unitaria en otra cara contigua? Si queremos, como en los ejemplos anteriores, que la normal unitaria nos seleccione uno de los dos “lados” de la superficie (en este caso, el lado que da dentro del cubo y el lado fuera del cubo), ya no basta con imponer la condición

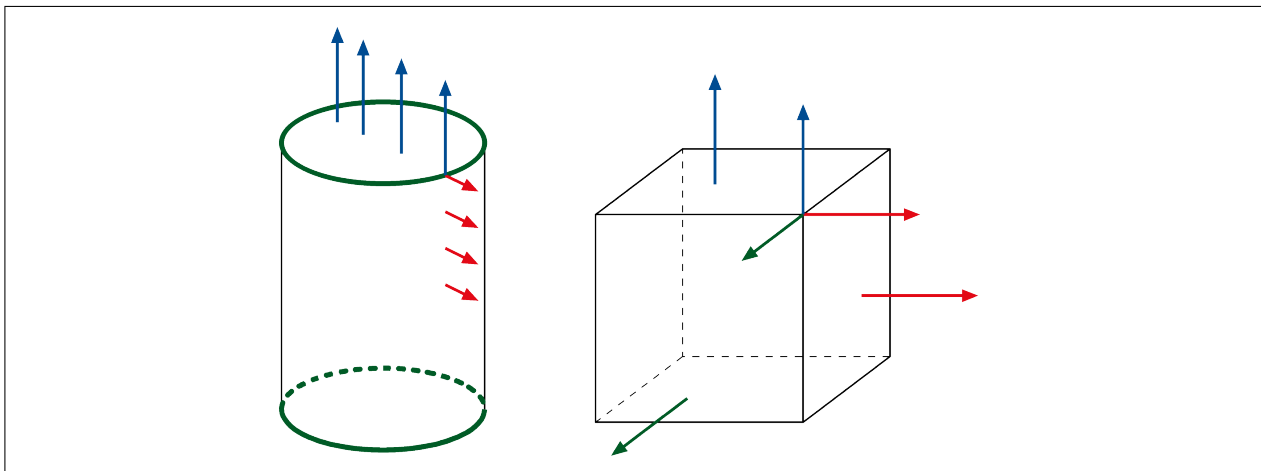


Figura 3.21: En un cilindro con tapas, para un punto que esté en la intersección de la superficie cilíndrica y una de las tapas podemos elegir dos normales unitarias que van hacia fuera del cilindro, la azul y la roja. En un cubo, para un vértice podemos elegir hasta tres

de la continuidad, puesto que se trata de trozos disconexos de la superficie, una vez que sobre las aristas y los vértices hemos decidido no elegir ninguna normal. Tendremos que introducir algún mecanismo que nos permita ligar la elección hecha en una determinada cara con la elección en las caras vecinas con las que comparte aristas.

**87.** Dicho de otra forma, no es que no tengamos normales unitarias continuas definidas sobre toda la superficie del cubo menos los puntos de las aristas, sino que tenemos demasiadas.

Para establecer la relación que buscamos entre orientaciones en las caras observamos que utilizando la “regla del sacacorchos” la normal unitaria en cada cara del cubo induce un sentido de giro en las aristas que forman su borde. Y que las normales unitarias de dos caras contiguas que apunten las dos hacia fuera del cubo (o las dos hacia dentro), inducen sentidos de recorrido opuestos sobre la arista que comparten. Mientras que en el caso de que

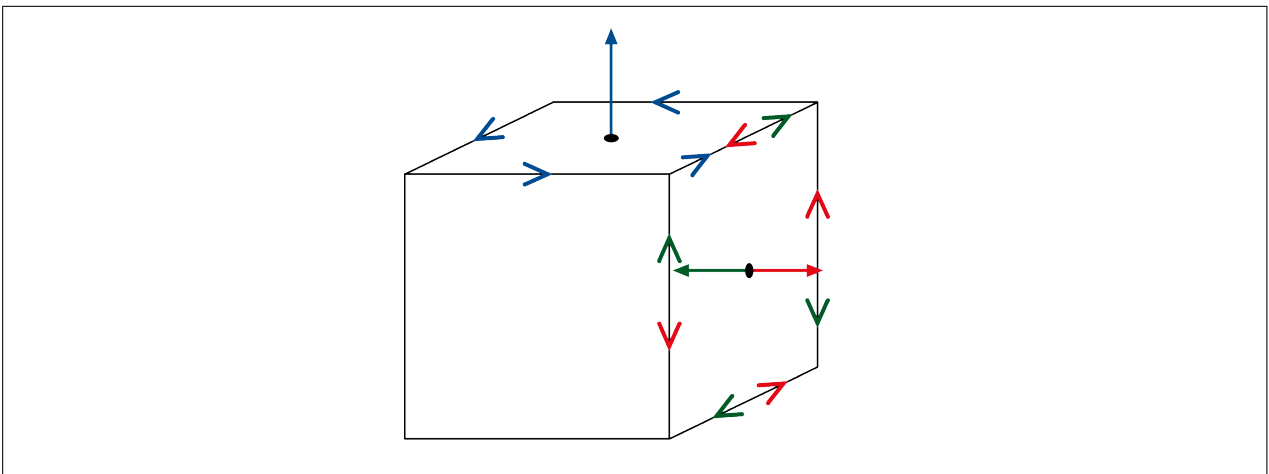


Figura 3.22: Dos caras de un cubo. En la cara superior, la orientación hacia fuera del cubo y la orientación inducida en su borde (flechas azules). En una cara contigua, la orientación hacia fuera, con la que induce en su borde (flechas rojas), y la orientación hacia dentro con la que induce en su borde (flechas verdes). Obsérvese lo que ocurre en la arista común a las dos caras

la de una cara apunte hacia fuera y la de otra apunte hacia dentro, entonces sobre la arista común el sentido de recorrido inducido por cada cara es el mismo. Por consiguiente, para que las orientaciones de dos caras que comparten la misma arista sean compatibles (las dos hacia fuera del cubo o las dos hacia dentro del cubo), lo que tiene que ocurrir es que las orientaciones inducidas sobre la arista sean opuestas.

La principal dificultad para formalizar la anterior justificación es que la regla del sacacorchos (o del tornillo, o de la mano derecha, etc.) no es independiente del sistema de referencia en el que estemos, mientras que en el modelo matemático necesitamos expresarla de manera que se entienda y se aplique igual aunque no se tenga una referencia común<sup>91</sup>. Recurriremos a la *orientación positiva* que introdujimos en el enunciado y la demostración del teorema 2.38, de Riemann-Green.

<sup>91</sup>Tuvimos ocasión de comentar el mismo inconveniente en la introducción al teorema de Riemann-Green, tampoco la regla del sacacorchos la podríamos explicar a unos seres inteligentes residentes en un lugar del universo con el que no tuviéramos ninguna referencia común.

Expresaremos lo anterior en términos de las parametrizaciones de la siguiente manera. Una **arista de la parametrización  $\Phi$**  es una parte (o el total) de algún  $\Phi(\partial D_i)$ . Si tomamos en cada borde  $\partial D_i$  una parametrización con la orientación positiva, quedará inducida, componiendo con  $\Phi$ , una parametrización de cada curva cerrada simple  $\Phi(\partial D_i)$ . Entonces una arista puede tener varias orientaciones inducidas por  $\Phi$  (bien porque esté contenida en  $\Phi(\partial D_i) \cap \Phi(\partial D_j)$ , con  $i \neq j$ , o bien porque se recorra varias veces por la imagen de un solo  $\Phi(\partial D_i)$ ), que se distinguirán por el sentido de su vector tangente. A través de estas orientaciones sobre la misma arista podemos relacionar entre sí las orientaciones de dos caras contiguas.

**88.** Cuidado con el nombre de “arista”. Estas aristas son propias de la parametrización, no de la superficie. Así que no esperemos reconocerlas a través de la representación gráfica, ya que es perfectamente posible que al cambiar de parametrización lo que eran aristas dejen de serlo.

Por otra parte, habremos de admitir la existencia de un número finito de puntos, los vértices, que están al margen de todas las consideraciones anteriores.

**Definición 3.25** Diremos que la superficie  $\Sigma$  está **orientada por su parametrización  $\Phi : D = D_1 \cup \dots \cup D_m \rightarrow \Sigma$**  (notaciones como en la definición 3.9) cuando se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. Existe una normal unitaria continua definida sobre todos los puntos regulares de  $\Sigma$  y que sobre la imagen de  $\text{Int } D_1 \cup \dots \cup \text{Int } D_m$  coincide con el vector normal unitario  $\frac{\mathbf{n}_\Phi}{\|\mathbf{n}_\Phi\|}$ . La función que a cada punto regular asigna esta normal unitaria se llama **orientación de  $\Sigma$** .
2. En cada uno de los puntos de  $\Phi(\partial D_1) \cup \dots \cup \Phi(\partial D_m)$ , salvo a lo más los de un cierto conjunto finito, se cumple que existe algún vector tangente asociado a  $\Phi$  y que
  - o bien entre sus vectores tangentes asociados a  $\Phi$  no hay más que uno que sea no nulo,
  - o bien existen exactamente dos vectores tangentes asociados a  $\Phi$  que sean no nulos, y además sus orientaciones son opuestas (es decir, su producto escalar es negativo).

En el caso de que una superficie admita alguna parametrización que la oriente, diremos que es **orientable**.

**89.** Los puntos excepcionales que aparecen en la definición 3.25, de los que se permite que haya un número finito, son los **vértices de la parametrización  $\Phi$** . Hay que tener con el nombre de “vértice” la misma precaución que con el de arista.

Todos las superficies que han aparecido en los ejemplos puestos hasta ahora están orientadas por sus respectivas parametrizaciones. Obsérvese en particular el caso del cubo descrito en el ejemplo 3.5, con las orientaciones inducidas por la parametrización en cada una de las aristas.

**Ejemplo 3.26** Cualquier superficie obtenida como imagen de una función inyectiva y regular sobre la totalidad (interior y borde) de una región simple, es orientable <sup>(92)</sup>. Las superficies en forma explícita, cuyas orientaciones hemos estudiado en el apartado 3.3.2, son un caso particular de éste. ■

Pero el hecho de que haya una parametrización cuyo dominio de parámetros sea una única región simple y que sea de clase  $\mathcal{C}^1$  y regular en todos los puntos de su dominio (ahora no suponemos que la parametrización sea inyectiva), no garantiza que la superficie sea orientable:

**Ejemplo 3.27** La **cinta de Möbius** es la superficie  $M$  dada por la parametrización  $\Phi$  definida sobre  $D = [0, \pi] \times [-1, 1]$  por

$$\Phi(\theta, v) = ((a - v \sin \theta) \cos 2\theta, (a - v \sin \theta) \sin 2\theta, v \cos \theta),$$

done  $a$  es una cierta constante positiva. Ver una demostración de que no es orientable en el

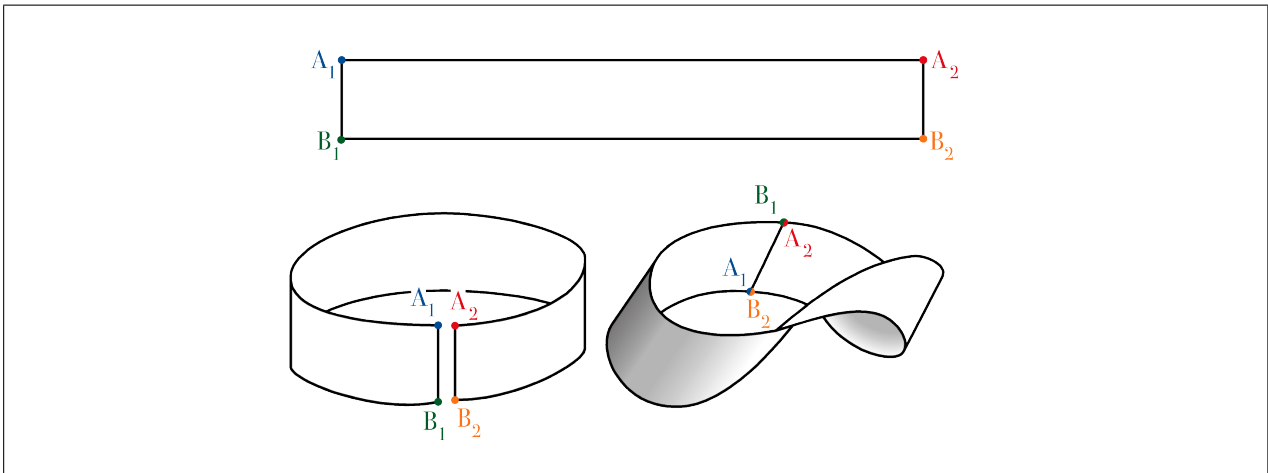


Figura 3.23: Para obtener una cinta de Möbius hay que retorcer  $180^\circ$  el rectángulo, de lo contrario se obtendría un cilindro

apartado 3.5.5. ■

**Definición 3.28** Una **superficie orientada**,  $\Sigma^+$  o  $\Sigma^-$ , es una superficie  $\Sigma$  para la que se ha elegido una parametrización que la oriente. Y si llamamos  $\Sigma^+$  (respectivamente,  $\Sigma^-$ ) a la superficie orientada, denotaremos con  $\Sigma^-$  (respectivamente,  $\Sigma^+$ ) a la misma superficie con su orientación opuesta.

**90.** La definición 3.28 es coherente con la que dimos de superficie orientada cuando la superficie viene dada en forma explícita (definición 3.24), sólo que allí además fijamos una de las dos orientaciones como “la positiva”.

<sup>92</sup>En efecto, basta observar que si  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $\Sigma$  con estas condiciones,  $\mathbf{n}_\Phi$  es una normal continua no nula sobre todo  $\Sigma$ . Y, al ser  $\Phi$  inyectiva, todos los puntos de  $\Phi(\partial D)$  cumplen automáticamente la condición de que no tienen más que un vector tangente asociado a  $\Phi$  que sea no nulo.

Una superficie definida explícitamente tiene dos y sólo dos orientaciones (ver teorema 3.23), pero en general una superficie puede no tener ninguna (cinta de Möbius), tener exactamente dos o tener más de dos: considérese, por ejemplo, una superficie formada por dos rectángulos con un solo vértice en común, o la superficie

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 0,$$

formada por la unión de dos superficies esféricas concéntricas, que tienen (cada una de ellas)

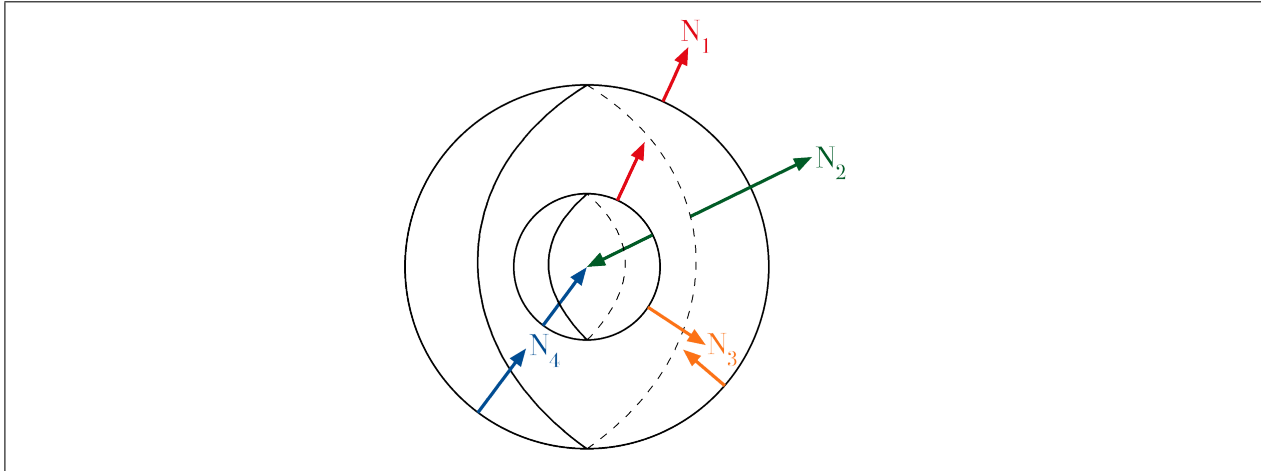


Figura 3.24: Cuatro orientaciones sobre la superficie  $(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 0$

cuatro orientaciones <sup>(93)</sup>. El primero de los dos ejemplos es un conjunto conexo, formado por un solo trozo, mientras que el segundo es un conjunto disconexo, que también podríamos considerar como la unión de dos superficies disjuntas.

### 3.3.4. Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada

Ahora estamos en condiciones de hablar de integrales de campos vectoriales que sean independientes de la parametrización, como hicimos con las de campos escalares. La diferencia fundamental reside en que para que la integral de un campo vectorial sea la misma al cambiar de parametrización, ambas representaciones paramétricas han de inducir la misma orientación sobre la superficie.

**Teorema 3.29** *Si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son parametrizaciones que describen una misma superficie y  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial continuo sobre esa superficie, entonces*

$$\iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

según que las orientaciones asociadas a las dos parametrizaciones sean iguales u opuestas.

**DEMOSTRACIÓN:** (PARCIAL) *Lo probaremos solamente para el caso de que las dos parametrizaciones sean biyectivas y regulares sobre la totalidad de sus dominios. Después, para probar el caso general habría que usar la propiedad aditiva del teorema 2.28 (esta es la parte*

<sup>93</sup>Observar que cada uno de estos dos objetos es una superficie en el sentido de nuestra definición 3.9.



fácil) y probar que podemos aplicar la fórmula del cambio de variable para integrales dobles ignorando en cada  $D_i$  el conjunto  $\partial D_i \cup \Phi_i^{-1}(\Phi_j(D_j))$  (donde  $i, j = 1, 2; i \neq j$ ) (esta es la parte difícil).

De acuerdo con las consideraciones inmediatamente anteriores a la definición 3.21 y con el teorema 3.11,

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{D_1=\mathbf{h}(D_2)} [(\mathbf{F} \circ \Phi_1) \cdot \mathbf{n}_1](u_1, v_1) du_1 dv_1 = \\ &= \iint_{D_2} [(\mathbf{F} \circ \Phi_1 \circ \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{h})](u_2, v_2) |\det J\mathbf{h}(u_2, v_2)| du_2 dv_2 = \\ &= \pm \iint_{D_2} [(\mathbf{F} \circ \Phi_2) \cdot \mathbf{n}_2](u_2, v_2) du_2 dv_2 = \pm \iint_{\Phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el teorema del cambio de variable (2.32) al cambio de parámetros  $\mathbf{h}$  que se construyó en el teorema 3.11. El signo viene determinado por el del jacobiano  $\det J\mathbf{h}$ , que tiene que ser constante puesto que el jacobiano es una función continua que nunca vale cero (si valiera cero, entonces el teorema 3.11 implicaría que  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ , cosa que estamos suponiendo que no ocurre).

**Definición 3.30** Sea  $\Sigma^+$  una superficie orientada (definiciones 3.24 o 3.28), y  $\mathbf{F} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo sobre ella. La **integral o flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\Sigma^+$**  es

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}_\Phi(u, v) du dv = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma,$$

donde  $\mathbf{N}$  es la normal unitaria que define la orientación de  $\Sigma^+$ , y  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización compatible con la misma.

Para que esta definición sea correcta hay que comprobar que al cambiar a otra parametrización que tenga la misma orientación que la primera, no cambia la integral:

**Corolario 3.31** La definición anterior no depende de la parametrización utilizada, siempre que sea compatible con la orientación.

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia del teorema 3.29.

Del teorema 3.29 se sigue también inmediatamente que al cambiar una orientación por su opuesta la integral cambia a su valor opuesto:

**Corolario 3.32** (Notaciones como en la definición 3.30.)

$$\iint_{\Sigma^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

**Notaciones.** Es corriente llamar con la misma letra a las variables  $x, y, z$  y a las aplicaciones que las expresan en función de los parámetros  $u, v$ . Así, la parametrización  $\Phi$  puede expresarse como

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \right\}.$$

Como el vector normal es el producto vectorial de las dos derivadas parciales de  $\Phi$ , sus componentes son determinantes jacobianos de matrices  $2 \times 2$  formadas por derivadas parciales de  $x, y, z$ , concretamente

$$\mathbf{n}_\Phi = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Debido a todo esto, es muy corriente la siguiente notación: si  $\mathbf{F}$  es el campo vectorial  $(P, Q, R)$ ,

**91.**

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy.$$

Es una notación sugestiva porque la integral se calcula pasando al dominio de parámetros, poniendo  $P, Q$  y  $R$  en función de los mismos y sustituyendo el producto formal  $dy \, dz$  por el jacobiano  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ , etc.

**92.** Observar el orden de las variables, porque al tratarse de determinantes el cambiar el orden implica un cambio de signo. Observar también el orden de las componentes de  $\mathbf{F}$  y compararlo con la notación análoga para integrales de línea (página 36).

**Ejemplo 3.33** ([11], ejercicio 7.6.1.) Sea la temperatura en un punto de  $\mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$ . Calcular el flujo de calor a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , suponiendo que la constante calorífica es  $k = 1$ .

Según la teoría del calor, el intercambio de calor se produce en la dirección del gradiente de temperatura, en el sentido de la temperatura descendente, es decir, según el campo  $-k\nabla T$  para una cierta constante  $k$  positiva que depende de los materiales, y que en nuestro caso es igual a 1, luego el campo vectorial cuyo flujo se nos pide es  $\mathbf{F}(x, y, z) = (-6x, 0, -6z)$ .

- La superficie cilíndrica  $\Sigma$  puede parametrizarse mediante la función  $\Phi$  descrita por

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{2} \cos \theta \\ y &= y \\ z &= \sqrt{2} \sin \theta \end{aligned} \right\} (\theta, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2],$$

cuyo vector normal  $\Phi_\theta \times \Phi_y = (-\sqrt{2} \cos \theta, 0, -\sqrt{2} \sin \theta)$  apunta hacia el interior de la superficie, como vamos a justificar a continuación. Puesto que es una función continua, basta con comprobarlo en un punto cualquiera, por ejemplo en el punto  $(0, 0, \sqrt{2})$ ,

que corresponde a los valores de los parámetros  $\theta = \pi/2, y = 0$ ; entonces el vector es  $(\Phi_\theta \times \Phi_y)(\pi/2, 0) = (0, 0, -1)$ . Llamaremos  $\Sigma^+$  al cilindro orientado según este vector normal. Entonces el flujo pedido es

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} (-6x, 0, -6z) \cdot d\mathbf{S} &= \\ &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2]} (-6\sqrt{2} \cos \theta, 0, -6\sqrt{2} \sin \theta) \cdot (-\sqrt{2} \cos \theta, 0, -\sqrt{2} \sin \theta) d\theta dy = 48\pi. \end{aligned}$$

Observar que la elección de la orientación (hacia dentro del cilindro) ha sido arbitraria, el enunciado no lo dejaba claro. El flujo hacia fuera del cilindro resultaría ser de  $-48\pi$ .

- También podríamos haber descrito el cilindro de manera explícita con la  $z$  despejada y aplicar la fórmula del teorema 3.22 <sup>(94)</sup>. Para ello partimos el cilindro en dos mitades <sup>(95)</sup> mediante  $z = \pm\sqrt{2-x^2}$ , donde las variables independientes  $x, y$  recorren  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  y  $[0, 2]$ , respectivamente. Entonces  $\partial z/\partial x = \mp x/\sqrt{2-x^2}, \partial z/\partial y = 0$ .

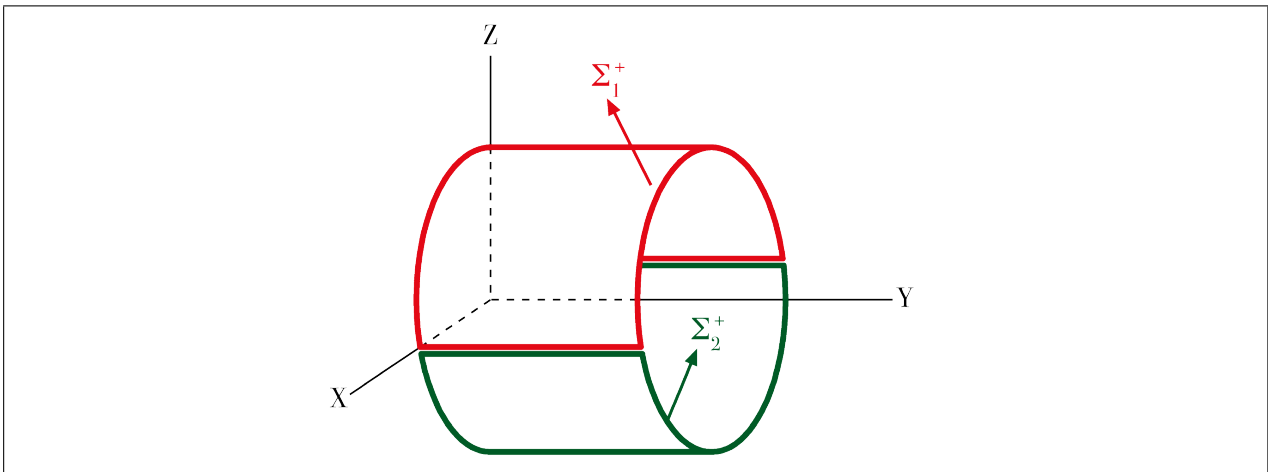


Figura 3.25: Las dos superficies orientadas,  $\Sigma_1^+$  y  $\Sigma_2^+$ , en las que hemos dividido el cilindro

Llamamos  $\Sigma_1$  a la mitad superior y  $\Sigma_2$  a la mitad inferior. Recordar que en el caso de superficies en forma explícita, llamamos orientación positiva a la que apunta en el sentido creciente de la variable despejada, en este caso en el sentido de las  $z$  crecientes, hacia arriba.

Hacemos los dos cálculos a la vez, teniendo cuidado con los signos:

$$\iint_{\Sigma_1^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = (\text{integral impropia}) \iint_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [0, 2]} \left( \mp \frac{6x^2}{\sqrt{2-x^2}} \mp 6\sqrt{2-x^2} \right) dx dy =$$

<sup>94</sup>Haciendo este planteamiento nos salimos de la teoría que hemos dado, porque al despejar  $z$  nos queda una función que en el borde del dominio no es derivable, su derivada parcial respecto de  $x$  toma valores infinitos, así que no estamos en las condiciones del ejemplo 3.6. Éste es el motivo por el que nos aparece una integral impropia.

<sup>95</sup>Esto de dividir una superficie en dos partes y sumar las integrales lo haremos a menudo en los problemas y en las aplicaciones. Para justificarla nos apoyaremos en el teorema 2.28.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\sqrt{2+\delta}}^{\sqrt{2-\delta}} \int_0^2 \frac{\mp 12}{\sqrt{2-x^2}} dy dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\sqrt{2-\delta}} \frac{\mp 48}{\sqrt{2-x^2}} dx = \mp 48 \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^{\sqrt{2-\delta}} = \\
&= \mp 48 \lim_{\delta \rightarrow 0} \arcsin \left( 1 - \frac{\delta}{\sqrt{2}} \right) = \mp 24\pi.
\end{aligned}$$

Si  $\Sigma^+$  es el cilindro completo con la orientación hacia dentro (para el cilindro tenemos total libertad a la hora de asignar el signo  $+$  o el signo  $-$  a las orientaciones, no como con sus mitades, porque a las mitades las consideramos como superficies dadas en forma explícita) se tiene que  $\Sigma^+ = \Sigma_1^- \cup \Sigma_2^+$ , luego  $\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\Sigma_1^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 48\pi$ . ■

El resultado que hemos obtenido por el segundo método es el correcto, a pesar de que no tenemos una justificación teórica del procedimiento<sup>(96)</sup>. Naturalmente, que hayamos llegado al resultado correcto no nos autoriza a que en otros problemas podamos aplicar el mismo proceso.

**93.** Si disponemos de una “parametrización” de un conjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  que no tenga derivadas finitas en todo o en parte del borde de su dominio, resulta peligroso extender sin más la teoría que hemos construido en este apartado, puesto que, cuando a  $D$  le quitamos su borde, no está garantizada la existencia de las integrales sobre  $D$  que aparecen en las definiciones 3.15 y 3.30. Ni hemos garantizado, aun en el caso de que las integrales existan, que el resultado que se obtenga sea el correcto.

<sup>96</sup>Bajo ciertas condiciones sobre las derivadas parciales de una parametrización de la superficie, que en el problema anterior se cumplen, puede demostrarse que es correcto este cálculo a través de una integral impropia.

### 3.4. Teorema de Stokes (clásico)

El teorema de Stokes clásico es una generalización del de Riemann-Green, consistente en admitir superficies albeadas, en lugar de admitir solamente recintos contenidos en un plano. Igual que ocurre con el de Riemann-Green, las condiciones geométricas de los objetos sobre los que integraremos (la superficie y su borde) son las que concentran todas nuestras dificultades técnicas, más que las propiedades de diferenciabilidad de las funciones a integrar.

Nos limitaremos a probar el teorema en el caso más simple y, a continuación, explicar cómo se extendería el resultado a otros casos, pero sin dar los enunciados formalmente correctos.

**94.** Lo llamaremos teorema de Stokes *clásico* cuando queramos distinguirlo del teorema de Stokes *general* del apartado 5.5.

#### 3.4.1. Fórmula de Stokes para superficies definidas explícitamente

Supóngase que  $\Sigma$  es una superficie dada en forma explícita, con la tercera variable despejada en función de las otras dos,  $z = g(x, y)$  donde  $(x, y) \in D$ , y  $D$  es una región simple en  $\mathbb{R}^2$ , con lo que nos garantizamos que  $\partial D$  es una curva cerrada simple (ver la observación 61). Recordemos que en la definición 3.24 se introdujo para este caso el concepto de superficie orientada positivamente,  $\Sigma^+$ .

**Definición 3.34** Llamaremos *borde de la superficie  $\Sigma$ ,  $\partial\Sigma$* , a la parte de  $\Sigma$  cuya proyección sobre el plano  $XY$  es el borde del dominio de parámetros,  $\partial D$ . Como es una curva cerrada simple (<sup>97</sup>),  $\partial\Sigma$  admite dos orientaciones; llamaremos *orientación positiva de  $\partial\Sigma$*  al sentido de recorrido cuya proyección se corresponda con la orientación positiva de  $\partial D^+$  tal como se define en el teorema 2.38.

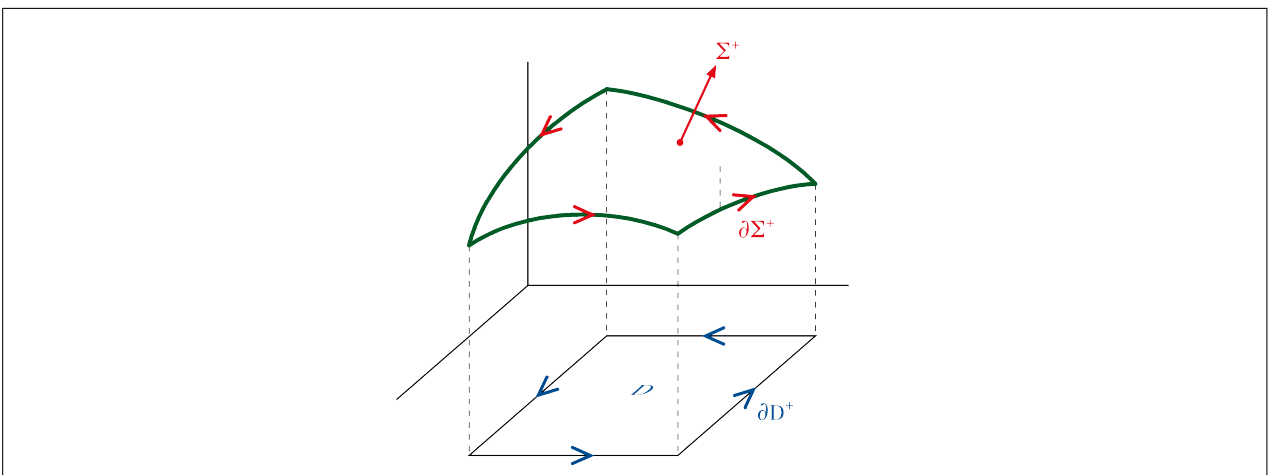


Figura 3.26: Orientación positiva del borde de una superficie que está definida explícitamente

<sup>97</sup>El borde de  $D$  es una curva cerrada simple, así que podemos tomar una parametrización suya  $\mathbf{c}$ . La composición de  $\mathbf{c}$  con la aplicación que a cada  $(x, y) \in D$  hace corresponder  $(x, y, g(x, y))$  es una parametrización de la curva cerrada simple  $\partial\Sigma$ .

**95.** Es importante tener en cuenta que, al contrario con lo que ocurría con las regiones simples bidimensionales (teorema 2.50), para superficies no coinciden los conceptos de borde y frontera (la definición de frontera es la 2.51), puesto que la frontera topológica de cualquier superficie es ella misma,  $\text{Fr } \Sigma = \Sigma$  <sup>(98)</sup>.

La orientación positiva que acabamos de definir sobre  $\partial\Sigma$ ,  $\partial\Sigma^+ = (\partial\Sigma)^+ = \partial(\Sigma^+)$ , y la orientación positiva sobre  $\Sigma$  (definición 3.24) están relacionadas por la “regla del sacacorchos”.

**Teorema 3.35 (Teorema de Stokes para superficies en forma explícita)** *Sea  $\Sigma$  una superficie dada en forma explícita por una función de clase  $\mathcal{C}^2$  sobre una región simple, y  $\mathbf{F}$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $\Sigma$ . Entonces,*

$$\int_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma^+} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  la función de clase  $\mathcal{C}^2$  cuya gráfica  $z = g(x, y)$  es la superficie  $\Sigma$ , y  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , una parametrización de la curva cerrada simple orientada  $\partial D^+$ . Entonces  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t) = g(x(t), y(t)))$ , es una parametrización de  $\partial\Sigma^+$ , luego, llamando  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma^+} P dx + Q dy + R dz &= \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') dt = \\ &= \int_a^b \left[ \left( P + R \frac{\partial g}{\partial x} \right) x' + \left( Q + R \frac{\partial g}{\partial y} \right) y' \right] dt = \\ &= \int_{\partial D^+} \left( P + R \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx + \left( Q + R \frac{\partial g}{\partial y} \right) dy = \\ &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( Q + R \frac{\partial g}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( P + R \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right] dx dy, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos hecho uso del teorema de Riemann-Green.

Aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que al ser  $g \in \mathcal{C}^2(D)$  sus derivadas cruzadas coinciden, la última integral es igual a

$$\begin{aligned} &\iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + R \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + R \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial g}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Sigma^+} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

<sup>98</sup>La última afirmación no es evidente, requiere una demostración.

**96.** Tanto nuestro enunciado como nuestra demostración del teorema de Stokes están íntimamente relacionados con los corolarios 2.41 y 2.43 (la forma vectorial de la fórmula de Riemann-Green puede escribirse como  $\int_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma^+} \mathbf{rot} \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{S}$ ).

### 3.4.2. Fórmula de Stokes para superficies más generales

Un resultado análogo sigue siendo válido sobre superficies mucho más generales, pero aparecen importantes dificultades técnicas:

1. En caso de que la superficie no esté dada en forma explícita pero sea imagen de una parametrización cuyo dominio sea una región simple y que además sea inyectiva y regular sobre la totalidad del dominio, un enunciado análogo es válido, y con una demostración también análoga. Puede consultarse en [2], teorema 9.4.1 (<sup>99</sup>).

Una muestra de estas superficies es la semiesfera dada por  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$  sobre  $x^2 + y^2 \leq 1$ , en cuya definición estamos utilizando una función que no tiene derivadas finitas en el borde del dominio, pero que admite otras parametrizaciones que son regulares en todos los puntos y biyectivas, como la estereográfica ([2], ejercicio 8.1.2).

2. Si no tenemos ninguna parametrización de clase  $\mathcal{C}^2$  pero sí de clase  $\mathcal{C}^1$ , el resultado sigue siendo válido, si bien la demostración se complica extraordinariamente. Una forma de demostrarlo es aproximarse con superficies que sí se describen mediante parametrizaciones de clase  $\mathcal{C}^2$ .
3. Si la parametrización deja de ser inyectiva o regular en el borde de su dominio,  $\partial D$ , entonces la primera dificultad se presenta al identificar el conjunto  $\partial\Sigma$ , que, como se ha señalado más arriba (observación 95), no coincide con la frontera topológica de  $\Sigma$ ,  $\text{Fr } \Sigma$ . Considérese, por ejemplo, el caso de una esfera (cf. ejemplo 3.2) para comprobar que la imagen de  $\partial D$  puede dejar de ser una curva cerrada simple, y puede incluso carecer de significado geométrico dentro de  $\Sigma$ . Aun así, si se interpreta la integral sobre  $\partial\Sigma^+$ , no como una integral sobre una curva orientada (que puede no tener sentido), sino como una integral a lo largo de una trayectoria (la definida por composición de  $\Phi$  con una parametrización de  $\partial D^+$ ), la fórmula de Stokes sigue siendo cierta (<sup>100</sup>). Los comentarios que siguen son aplicación de esta extensión de la fórmula.

<sup>99</sup>Hay que concretar qué es aquí el borde de la superficie  $\Sigma$  y cuáles son las orientaciones a utilizar en la fórmula: usando las notaciones habituales,

- $\Sigma^+$  es la superficie orientada tal como se describe en el ejemplo 3.26;
- $\partial\Sigma$  es la curva cerrada que se obtiene como imagen de la curva  $\partial D$  mediante  $\Phi$ ;
- la orientación de  $\partial\Sigma^+$  es la inducida por la composición de  $\Phi$  con una parametrización de la curva orientada  $\partial D^+$ , donde  $\partial D$  está dotada de la orientación para la que es válida la fórmula de Riemann-Green (ver la demostración del teorema 2.38).

<sup>100</sup>Con una demostración similar a la del teorema 9.4.1 de [2].

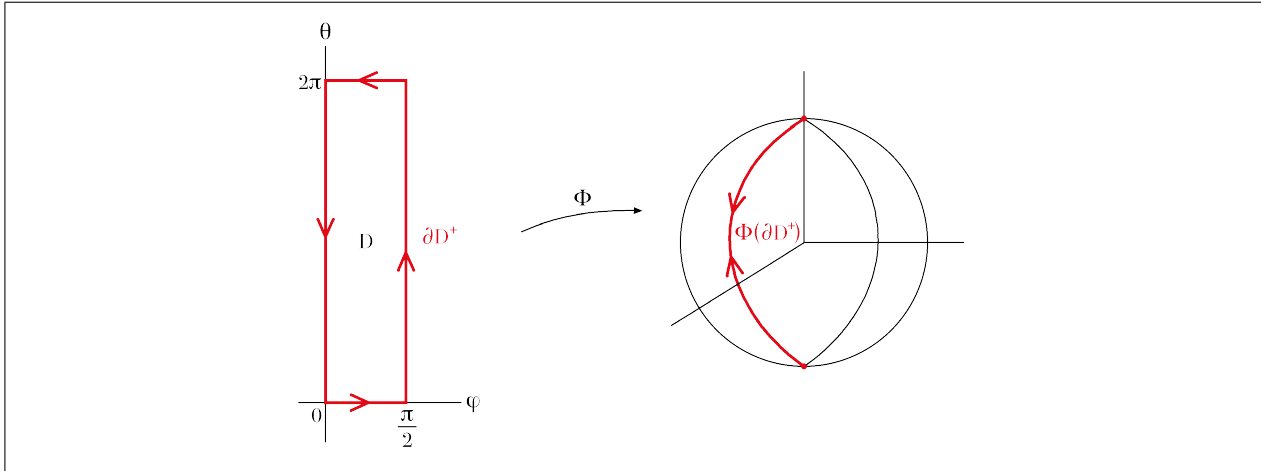


Figura 3.27: Imagen del borde del dominio de parámetros cuando  $\Phi$  es la parametrización de la esfera utilizando las coordenadas esféricas

- a) Así, por ejemplo, la integral sobre una esfera orientada  $\Sigma^+$  del rotacional de cualquier campo de clase  $\mathcal{C}^1$  ha de ser nula, ya que, con esta interpretación, la imagen de  $\partial D^+$  mediante la parametrización es un semimeridiano recorrido dos veces, una vez en cada sentido, por lo que necesariamente la integral a lo largo de una tal trayectoria ha de valer cero, sea cual sea el campo. Por tanto, desde este punto de vista no hay inconveniente en considerar  $\partial \Sigma = \emptyset$ , es decir, que la superficie esférica “no tiene borde”.
- b) La integral del rotacional de un campo a través del cilindro del ejemplo 3.3 es igual a la integral de dicho campo a lo largo de las dos circunferencias que lo limitan (todo ello con las orientaciones adecuadas), ya que el resto de la imagen de  $\partial D$  es una generatriz que se recorre dos veces, una en cada sentido. Se toma

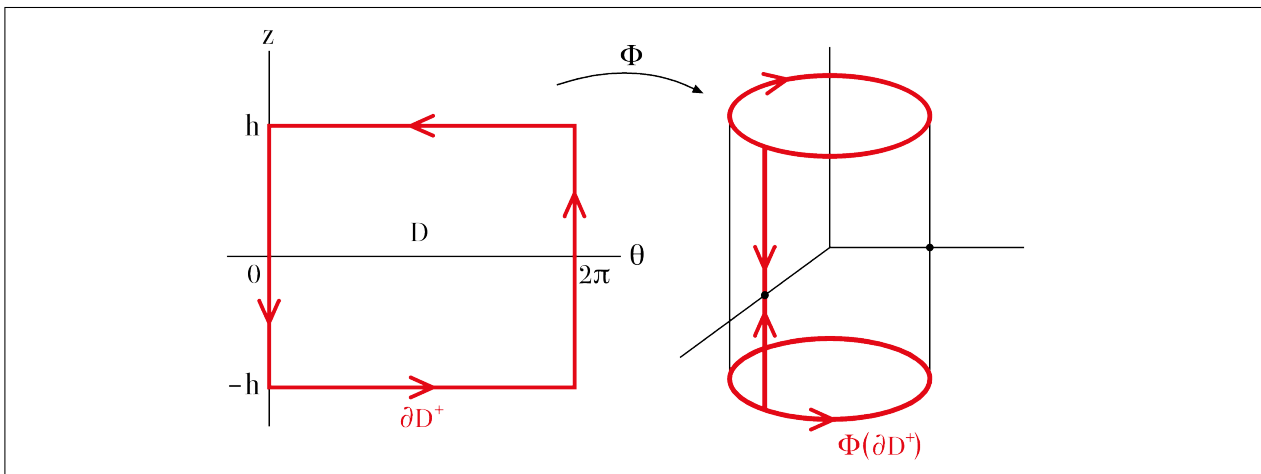


Figura 3.28: Imagen del borde del dominio de parámetros cuando  $\Phi$  es la parametrización del cilindro utilizada en el ejemplo 3.3. En este caso,  $\partial \Sigma^+$  pasa a ser solamente la unión de las dos circunferencias, cada una con su orientación

entonces como “borde” del cilindro la unión de las circunferencias que lo limitan.

- c) Si el dominio de parámetros no es una región simple pero puede descomponerse en unión de regiones simples que no se solapan (cf. 2.6.3(4)), la fórmula de Stokes



sigue siendo cierta, siempre que se sobrentienda que la integral de línea es ahora una suma de las integrales sobre cada uno de los “verdaderos” bordes, como en el caso del cilindro. Bastaría con descomponer las integrales en una suma y aplicar los resultados en cada sumando. Las condiciones de compatibilidad impuestas en la definición 3.25 son ahora cruciales, porque garantizan que los bordes que se recorran más de una vez no contribuyen al valor de la integral. Como consecuencia, razonando como en el caso de la esfera, probaríamos que la integral de un rotacional continuo sobre un cubo (ejemplo 3.5) es siempre nula: la superficie del cubo tampoco tiene borde, como ocurría con la esfera.

4. En los casos más generales, para que la fórmula de Stokes sea válida, la orientación de  $\Sigma^+$  y la de  $\partial\Sigma^+$  han de estar relacionadas por la siguiente “regla de la izquierda” (con todas las cautelas que nos merecen este tipo de reglas, como hemos comentado varias veces): un caminante que recorra  $\partial\Sigma$  en el sentido de  $\partial\Sigma^+$  y que se posicione ortogonalmente a  $\Sigma$  en el sentido de  $\Sigma^+$  (es decir, ocupando con el cuerpo el lugar de la normal y con los pies tocando la superficie  $\Sigma$ ), siempre va dejando la superficie a su izquierda. En cambio, la “regla del sacacorchos” a la que nos hemos referido cuando nuestros objetos sólo tenían dos dimensiones (<sup>101</sup>), nos puede llevar a confusión cuando la apliquemos en el borde de un agujero de  $\Sigma$ .

### 3.4.3. Aplicaciones del teorema de Stokes

Ver el apartado 3.5.6.

---

<sup>101</sup>En dos dimensiones, ambas reglas, la del sacacorchos y la de la izquierda, coinciden.

### 3.5. Notas adicionales

#### 3.5.1. Los vectores tangentes a trayectorias con imagen sobre $\Sigma$ son combinación lineal de las derivadas parciales

**Teorema 3.36** (Notaciones de la página 143.) Sea  $\mathbf{p} = \Phi(u_0, v_0) \in \Sigma$ , donde  $(u_0, v_0)$  es un punto interior a  $D$  para el que el vector normal es no nulo,  $\mathbf{n}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ . Entonces el conjunto de vectores tangentes en  $\mathbf{p}$  a las trayectorias sobre  $\Sigma$  que son imagen mediante  $\Phi$  de las trayectorias diferenciables sobre  $D$ , es el espacio vectorial bidimensional determinado por  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$  y  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ .

DEMOSTRACIÓN: Al ser su producto vectorial distinto de cero, los vectores  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$  y  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$  son linealmente independientes, por lo que generan un espacio vectorial bidimensional.

Cualquier trayectoria diferenciable con valores en  $D$  que pase por el punto  $(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}(t_0) = (u_0, v_0)$ , da lugar a una trayectoria diferenciable en  $\Sigma$  que pasa por el punto  $\mathbf{p}$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = \Phi \circ \mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{p}$ , cuya tangente en  $\mathbf{p}$  es

$$\bar{\mathbf{c}}'(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)c'_1(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)c'_2(t_0),$$

que es combinación lineal de los vectores  $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$  y  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ .

Recíprocamente, si  $\lambda$  y  $\mu$  son dos escalares cualesquiera, la combinación lineal

$$\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

es un vector tangente de los descritos en el enunciado. En efecto, puesto que el punto  $(u_0, v_0)$  es interior a  $D$ , la trayectoria  $\mathbf{c} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{c}(t) = (u_0, v_0) + t(\lambda, \mu)$  toma valores en  $D$  para cierto  $\delta$  positivo, y su imagen mediante  $\Phi$  es una trayectoria sobre  $\Sigma$  cuya tangente en  $\mathbf{p}$  es la combinación lineal.

#### 3.5.2. Una superficie definida paramétricamente es localmente una superficie definida por ecuaciones explícitas

**Teorema 3.37** Sea  $\Sigma = \Phi(D)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y sea  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$  la imagen mediante  $\Phi$  de los parámetros  $(u_0, v_0)$ , con la condición de que el rango de la matriz jacobiana  $J\Phi(u_0, v_0)$  es igual a 2. Entonces en un entorno del punto  $\mathbf{p}_0$ ,  $\Sigma$  puede expresarse en forma explícita.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0)$  es no nulo, puesto que alguno de los tres determinantes  $2 \times 2$  que pueden formarse a partir de la matriz jacobiana ha de ser no nulo. El teorema de la función inversa nos garantiza entonces que en un entorno de  $(x_0, y_0)$  pueden despejarse  $u, v$  en función de  $x, y$ :  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Entonces la función  $g(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$  describe a  $\Sigma$  de forma explícita en un entorno del punto  $\mathbf{p}_0$ .

#### 3.5.3. Acordeón de Schwarz

**Ejemplo 3.38 (Acordeón de Schwarz.)** En 1881 Hermann Schwarz propuso el siguiente contraejemplo para demostrar que un poliedro que se aproxime en todos los puntos a una superficie no necesariamente sirve para aproximar su área.

Sobre la superficie de un cilindro de radio  $R$  y altura  $h$  vamos a elegir una colección de puntos que luego uniremos con segmentos y formarán triángulos que serán las caras de un poliedro “inscrito” en el cilindro (en el sentido de que todos sus vértices están en la superficie cilíndrica) que en este caso quedará situado en la parte de dentro del cilindro. Lo hacemos de la siguiente manera.

Dividimos transversalmente el cilindro con  $n+1$  circunferencias, todas a la misma distancia  $h/n$  entre sí, entre las que están las dos circunferencias que constituyen el borde del cilindro. Sobre cada circunferencia marcamos  $m$  puntos equidistantes (con ángulos  $2\pi/m$ ), de modo que los de dos circunferencias consecutivas están “girados”

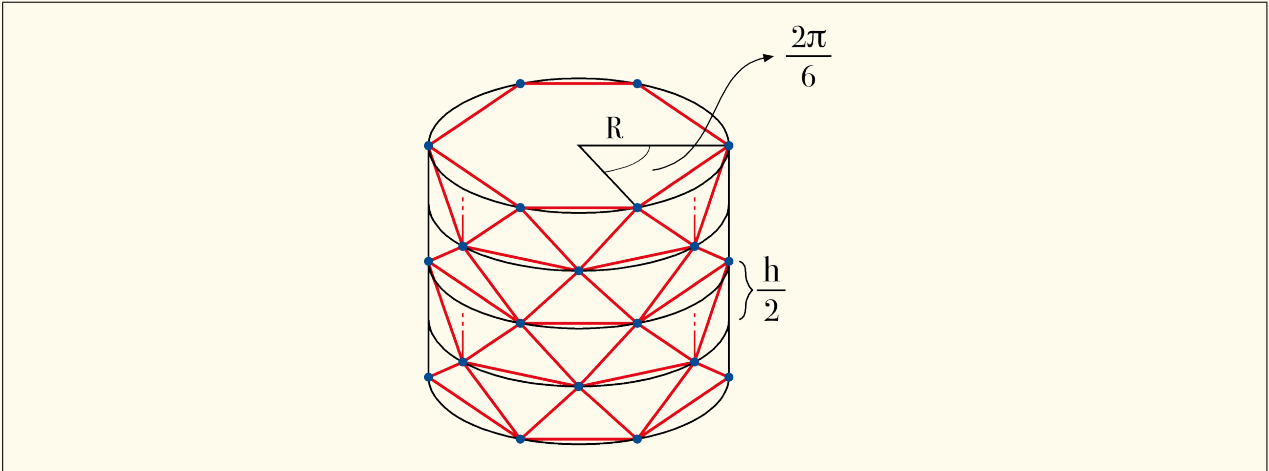


Figura 3.29: Poliedro que aproxima a un cilindro, tomando  $n = 4$  y  $m = 6$ . Los únicos puntos de contacto son los azules

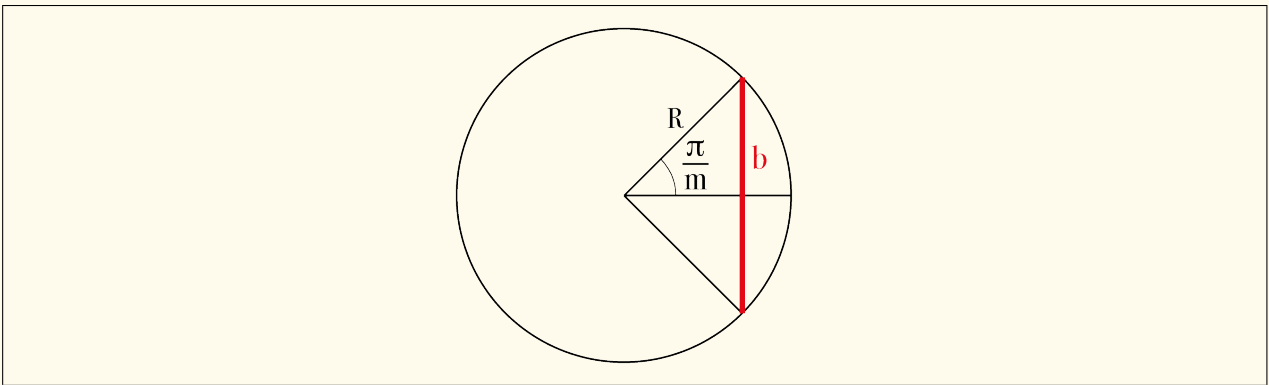


Figura 3.30: Cálculo de la base  $b$  de uno cualquiera de los triángulos (vista desde arriba)

entre sí un ángulo de valor  $\pi/m$ . Por último, construimos los triángulos uniendo cada punto con sus seis vecinos: dos en su misma circunferencia y dos en cada una de las dos circunferencias más próximas.

El poliedro consta entonces de  $2mn$  triángulos isósceles semejantes, de base  $2R \sin \frac{\pi}{m}$  y de altura  $\left[ \frac{h^2}{n^2} + R^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ , por lo que el área del poliedro formado por todos los triángulos es

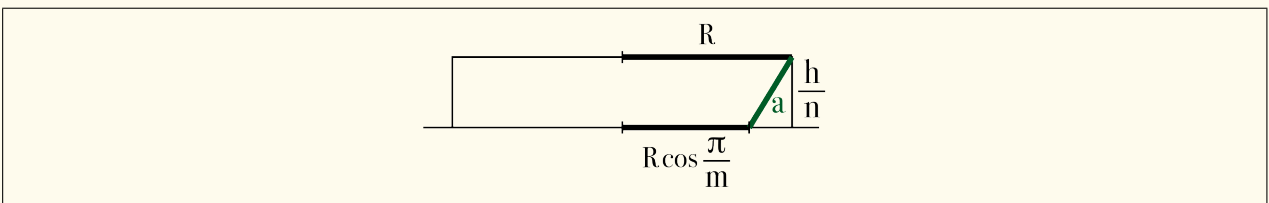


Figura 3.31: Cálculo de la altura  $a$  de uno cualquiera de los triángulos (vista de una sección perpendicular a la generatriz)

$$2Rm \sin \frac{\pi}{m} \left[ h^2 + n^2 R^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

El factor  $2Rm \sin \frac{\pi}{m}$  tiende a  $2\pi R$  cuando  $m$  tiene a infinito, por lo que el comportamiento del límite doble (en  $n$  y  $m$ ) de la expresión anterior viene fijado por el de  $n \left( 1 - \cos \frac{\pi}{m} \right)$ , que a su vez depende de la relación entre  $n$  y  $m$ , como comprobamos a continuación:

- Si  $m = n$ , entonces aplicando la regla de l'Hôpital demostramos que  $n(1 - \cos \frac{\pi}{m})$  tiende a cero,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \left(1 - \cos \frac{\pi}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{t^2} \sin \frac{\pi}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{t} = 0.$$

Así que el área del poliedro tiende a  $2\pi Rh$  (que sería el resultado esperado).

- Pero si, por ejemplo,  $n = m^2$ , entonces utilizamos el desarrollo en serie del coseno para ver que  $n(1 - \cos \frac{\pi}{m})$  tiende a  $\pi^2/2$ ,

$$m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m}\right) \text{ tiene el mismo límite que } m^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{m^2} - \frac{1}{24} \frac{\pi^4}{m^4} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{24} \frac{\pi^4}{m^2} + \dots \rightarrow \frac{\pi^2}{2}.$$

El área del poliedro tiende, sorprendentemente, a  $\pi R \sqrt{R^2 \pi^4 + 4h^2}$ .

- Y si  $n = m^m$  (y lo mismo para otros muchos valores de  $n$ ), entonces tiende a infinito, y el área del poliedro también.

Puede demostrarse que el límite de las áreas de una sucesión de poliedros inscritos en el cilindro es siempre mayor o igual que  $2\pi Rh$ , y que para cualquier número real mayor que  $2\pi Rh$  siempre se puede elegir una sucesión de polígonos inscritos cuyas áreas converjan a él. ■

### 3.5.4. Otras aplicaciones de las integrales de campos escalares sobre superficies

**Teorema 3.39** *Supongamos que la superficie  $\Sigma$ , de revolución alrededor del eje  $X$ , se engendra a partir de una curva simple o cerrada simple,  $C$ , que no corta al eje  $X$ . Entonces*

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_C y \, ds,$$

fórmula que generaliza a la del teorema 3.20.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos una representación paramétrica de  $C$  (definición 1.25)  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular a trozos,  $c(t) = (x(t), y(t))$ , que sin pérdida de generalidad (puesto que  $C$  no corta al eje  $X$ ) puede suponerse contenida en el semiplano superior, es decir, con  $y(t) > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Considérese la **superficie de revolución  $\Sigma$  obtenida al girar  $C$  alrededor del eje  $X$** ,

$$\Sigma = \Phi([a, b] \times [0, 2\pi]), \quad \Phi(t, \theta) = (x(t), y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta),$$

que es una superficie de acuerdo con nuestra definición 3.9, como pasamos a comprobar.

Al ser  $c$  de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos, la parametrización  $\Phi$  puede no ser diferenciable en una colección finita de  $N - 1$  segmentos  $\{t^k\} \times [0, 2\pi]$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Entonces descomponemos el rectángulo  $D = [a, b] \times [0, 2\pi]$  en un número finito de rectángulos  $D_k = [t^{k-1}, t^k] \times [0, 2\pi]$ , que no se solapan y para los cuales se verifican todas las condiciones de la definición 3.9. En efecto, la inyectividad sobre los interiores de los  $D_k$  se sigue de la inyectividad de  $c$  sobre el intervalo abierto  $(a, b)$  <sup>(102)</sup>. Y el vector normal es no nulo, puesto que su longitud es  $y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ , que es no nula (recuérdese la condición de regularidad sobre  $c$ ). Por tanto,

$$A(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \|\mathbf{n}_\Phi(t, \theta)\| \, dt = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b y(t) [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{1}{2}} \, dt = 2\pi \int_C y \, ds.$$

<sup>102</sup>Tomemos  $(t, \theta)$  y  $(t', \theta')$  en el interior de alguno de los  $D_k$  (posiblemente para distintos  $k$ ). Entonces  $t, t' \in (a, b) \setminus \{t^1, \dots, t^{N-1}\}$  y  $0 < \theta, \theta' < 2\pi$ . Supongamos que  $\Phi(t, \theta) = \Phi(t', \theta')$ , es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t') \\ y(t) \cos \theta &= y(t') \cos \theta' \\ y(t) \sin \theta &= y(t') \sin \theta' \end{aligned}$$

Elevando las dos últimas igualdades al cuadrado y sumándolas,  $y(t)^2 = y(t')^2$ , de donde se sigue que  $y(t) = y(t')$ , puesto que  $y(t)$  e  $y(t')$  son positivos. Como además  $x(t) = x(t')$ , la inyectividad de  $c$  sobre el intervalo abierto  $(a, b)$  garantiza que  $t = t'$ .

Una vez que  $y(t) = y(t') \neq 0$ , podemos simplificarlo y deducir que  $\cos \theta = \cos \theta'$ ,  $\sin \theta = \sin \theta'$ , luego  $\theta = \theta'$ , puesto que estamos con ángulos en el intervalo abierto  $(0, 2\pi)$ .

**Corolario 3.40 (Teorema de Pappus para superficies de revolución)** *El área de una superficie engendrada por una curva plana (simple o cerrada simple) al girar en torno a un eje contenido en el mismo plano pero que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud del trayecto recorrido por el centroide de la curva al dar una vuelta completa.*

**97.** El **centroide** de un conjunto es el punto que tiene por coordenadas los promedios de cada coordenada sobre el conjunto. Es una especie de versión geométrica del centro de gravedad, puesto que coincide con éste cuando la densidad es constante.

DEMOSTRACIÓN: *Elegimos los ejes coordenados de manera que el giro se haga en torno al eje  $X$  y que  $C$  se encuentre completamente contenida en el semiplano superior.*

*Si  $(\bar{x}, \bar{y})$  es el centroide de la curva  $C$ , su recorrido al dar una vuelta completa alrededor del eje  $X$  es una circunferencia de radio  $\bar{y}$ , luego mide  $2\pi\bar{y}$ . Por otra parte,  $\bar{y}$ , que es la media de las coordenadas  $y$  de  $C$ , es igual a  $\int_C y ds / \ell(C)$ , así que aplicando el último teorema,*

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_C y ds = 2\pi\bar{y} \ell(C).$$

**Ejemplo 3.41 (Área lateral)** Considérese una curva simple  $C \subset \mathbb{R}^2$  y  $\Sigma$  el conjunto de ordenadas  $\Omega(f)$  de una función  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  positiva y de clase  $\mathcal{C}^1$ , es decir (definición 2.1),

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Entonces  $\Sigma$  es una superficie, y su área coincide con la integral de  $f$  sobre  $C$  (cf. la introducción a las integrales de un campo escalar sobre un camino),

$$A(\Sigma) = \int_C f ds.$$

En efecto. la curva simple  $C \subset \mathbb{R}^2$  (definición 1.25) tiene una parametrización regular a trozos  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ . Entonces  $\Sigma$  es una superficie para la parametrización

$$\begin{aligned} \Phi : [a, b] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, u) &\longmapsto (x(t), y(t), uf(x(t), y(t))) \end{aligned}$$

(mismas observaciones sobre la eventual descomposición del rectángulo  $D = [a, b] \times [0, 1]$  que en la demostración del teorema 3.39). En consecuencia,

$$A(\Sigma) = \int_0^1 du \int_a^b \|\mathbf{n}_\Phi(t, u)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{1}{2}} dt = \int_C f ds. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 3.42 (Área de una superficie de revolución alrededor del eje  $Y$ )** Por un procedimiento parecido al desarrollado en el ejemplo 3.19, se obtiene la fórmula del volumen engendrado al girar en torno al eje  $Y$  la gráfica de una función derivable con continuidad  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $a > 0$ .

La superficie de revolución  $\Sigma$  la definimos ahora mediante  $y = f(t)$ ,  $x^2 + z^2 = t^2$ , con  $t \in [a, b]$ . Y la parametrizamos con

$$\left. \begin{aligned} x &= t \cos \theta \\ y &= f(t) \\ z &= t \sin \theta \end{aligned} \right\}, \quad t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

La parametrización es inyectiva sobre el producto de intervalos abiertos  $(a, b) \times (0, 2\pi)$  gracias a que hemos impuesto la condición de que  $a > 0$  (en realidad, hubiera bastado con exigir que  $0 \notin (a, b)$ ): si los puntos  $(t_1, \theta_1)$  y  $(t_2, \theta_2)$  tienen la misma imagen, entonces  $t_1^2 = t_2^2$ , luego  $t_1 = t_2$ , puesto que ambos son positivos, y entonces

se deduce que  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$  y que  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ , luego  $\theta_1 = \theta_2$ .

Por último, la fórmula para el área es

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

porque el vector normal es

$$\mathbf{n} = (tf'(t) \cos \theta, -t, tf'(t) \sin \theta)$$

y  $\|\mathbf{n}\| = t\sqrt{1 + f'(t)^2}$ . <sup>(103)</sup>

También aquí, igual que en el ejemplo 3.19,

$$A(\Sigma) = \int_C 2\pi x ds,$$

que es la integral a lo largo de la gráfica de la longitud de la circunferencia que genera cada punto de la gráfica. ■

### 3.5.5. La cinta de Möbius no es orientable

**Ejemplo 3.43** Una **cinta de Möbius** es una superficie  $M$  dada por una parametrización  $\Phi$  definida sobre  $D = [0, \pi] \times [-1, 1]$  por

$$\Phi(\theta, v) = ((a - v \sin \theta) \cos 2\theta, (a - v \sin \theta) \sin 2\theta, v \cos \theta),$$

donde  $a$  es un número real estrictamente positivo.

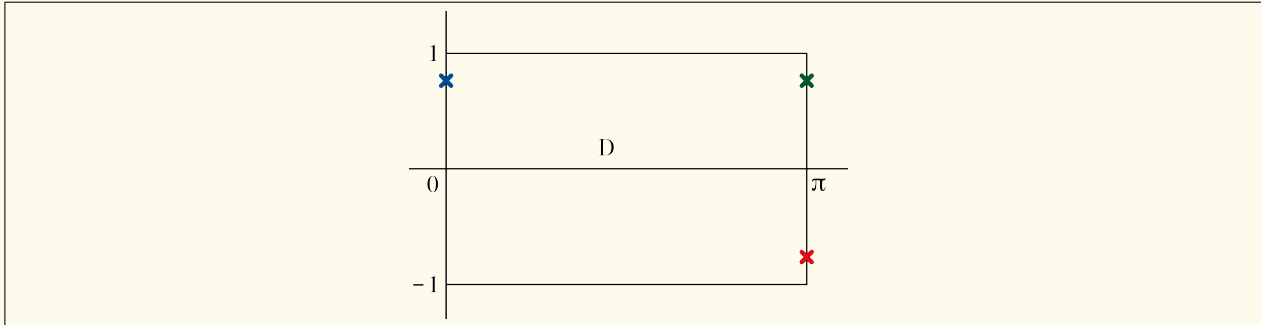


Figura 3.32: Parametrización de la cinta de Möbius: similar a la del cilindro del ejemplo 3.3, pegando los lados verticales de  $D$ , pero tras girar uno de ellos  $180^\circ$ , de modo que el punto azul se une con el rojo en lugar de unirse con el verde

**(1) Observamos en primer lugar que la superficie  $M$  no está orientada por esta parametrización**, puesto que en los puntos de  $\partial M$  que corresponden a la imagen de los segmentos  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , la parametrización les asocia dos vectores tangentes no nulos y con la misma orientación. En efecto, tómesese cualquier parametrización adecuada de  $\partial D$ , como

$$c : [0, \pi] \cup [\pi, 2 + \pi] \cup [2 + \pi, 2 + 2\pi] \cup [2 + 2\pi, 4 + 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

descrita por

$$c(t) = \begin{cases} (t, -1) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ (\pi, t - 1 - \pi) & \text{si } \pi \leq t \leq 2 + \pi \\ (2 + 2\pi - t, 1) & \text{si } 2 + \pi \leq t \leq 2 + 2\pi \\ (0, 3 + 2\pi - t) & \text{si } 2 + 2\pi \leq t \leq 4 + 2\pi \end{cases}$$

<sup>103</sup>En la expresión de la integral hemos cambiado la variable muda  $t$  por  $x$  para mejor compararla con la fórmula del teorema 3.20.

Entonces para  $\mathbf{p} = \Phi(0, 0) = \Phi(\pi, 0)$  resulta  $\mathbf{p} = \alpha_1(1 + \pi) = \alpha_2(3 + 2\pi)$ , donde

$$\alpha_1 : (\pi, 2 + \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha_1(t) = \Phi(\pi, t - 1 - \pi),$$

y

$$\alpha_2 : (2 + 2\pi, 4 + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha_2(t) = \Phi(0, 3 + 2\pi - t).$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos dos vectores tangentes en  $\mathbf{p}$  asociados a  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1'(1 + \pi) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v}(0, 0) = (0, 0, 1), \\ \alpha_2'(3 + \pi) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial v}(\pi, 0) = (0, 0, 1), \end{aligned}$$

que tienen la misma orientación, en contra de lo que exige la definición 3.25.

**(2) Probamos ahora que la parametrización  $\Phi$  es inyectiva y regular sobre todo su dominio.** La matriz jacobiana de  $\Phi$  es

$$J\Phi(\theta, v) = \begin{pmatrix} -v \cos \theta \cos 2\theta - 2(a - v \sin \theta) \sin 2\theta & -\sin \theta \cos 2\theta \\ -v \cos \theta \sin 2\theta + 2(a - v \sin \theta) \cos 2\theta & -\sin \theta \sin 2\theta \\ -v \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Calculamos las tres componentes del vector normal e imponemos la condición de que sean nulas:

$$\left. \begin{aligned} -v \sin 2\theta + 2(a - v \sin \theta) \cos \theta \cos 2\theta &= 0 \\ v \cos 2\theta + 2(a - v \sin \theta) \cos \theta \sin 2\theta &= 0 \\ 2(a - v \sin \theta) \sin \theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la última igualdad se sigue que necesariamente  $\sin \theta = 0$ , porque si  $a - v \sin \theta$  fuese nulo, sustituyéndolo en las dos primeras igualdades tendríamos  $v \sin 2\theta = v \cos 2\theta = 0$ , luego  $v = 0$ , y entonces  $a = 0$ , que es falso. Introduciendo  $\sin \theta = 0$  en la primera ecuación,  $2a \cos^3 \theta = 0$ , lo que es absurdo, pues  $\cos \theta$  no puede valer 0 (puesto que  $\sin \theta = 0$ ) y  $a > 0$  según el enunciado.

**(3) Demostramos finalmente que  $M$  no es orientable por ninguna parametrización.** Nos fijaremos en toda una curva que está contenida en la intersección de  $M$  con el plano  $z = 0$ , identificaremos para los puntos de la curva sus normales unitarias a  $M$  y veremos que no se puede hacer una selección de la normal unitaria que sea continua sobre toda la curva.

Si en la definición de la parametrización  $\Phi$  hacemos  $v = 0$ , describiremos los puntos  $(a \cos 2\theta, a \sin 2\theta, 0)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  es decir, la circunferencia  $C$  contenida en  $z = 0$ , con centro en el origen y radio  $a$ .

Por otra parte, el vector normal en un punto en el que  $v = 0$  es (de acuerdo con los cálculos anteriores)

$$\mathbf{n}(\theta, 0) = 2a(\cos \theta \cos 2\theta, \cos \theta \sin 2\theta, \sin \theta).$$

Imaginemos que tenemos una normal unitaria continua (normal a  $M$ , se entiende) y definida sobre todos los puntos de  $C$ ,  $\mathbf{N} : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$ . Llegaremos a una contradicción.

En cada punto  $\Phi(\theta, 0) \in C$  la normal  $\mathbf{N}$  tiene que coincidir con  $\pm \mathbf{n}(\theta, 0) / \|\mathbf{n}(\theta, 0)\|$ . Suponemos, sin pérdida de generalidad, que para  $\theta = 0$ ,  $\mathbf{N}(\Phi(0, 0)) = +\mathbf{n}(0, 0) / \|\mathbf{n}(0, 0)\|$ . El plan para construir la contradicción va a ser considerar el signo en función del ángulo  $\theta$ . Al variar  $\theta$  desde 0 hasta  $\pi$ , el signo tiene que ser siempre el mismo, por continuidad de  $\mathbf{N}$  (aplíquese el argumento que se utilizó en la demostración del teorema 3.23). Luego también debería ser el mismo para  $\theta = \pi$ , pero resulta que

$$\Phi(0, 0) = \Phi(\pi, 0), \quad \text{y en cambio} \quad \mathbf{N}(0, 0) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{N}(\pi, 0) = (-1, 0, 0),$$

de donde resulta la contradicción. ■

### 3.5.6. Aplicaciones del teorema de Stokes

**CAMPOS CONSERVATIVOS**

Como aplicación del teorema de Stokes podemos dar una justificación (no una demostración, que requeriría de más aparato matemático) de que en caso de que el dominio de un campo vectorial tridimensional de clase  $\mathcal{C}^1$  sea el espacio total menos un conjunto finito, la condición 4 implica la condición 3 (notaciones como en el enunciado del teorema 1.32).

**JUSTIFICACIÓN:** *Supongamos que  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $X$  es un conjunto finito, es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  cuyas derivadas cumplen la condición 4, lo que implica que  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .*

*Sea  $C \subset \mathbb{R}^3$  cualquier curva cerrada simple, sobre la que queremos justificar que la integral de  $\mathbf{F}$  es nula (la orientación de la que dotemos a  $C$  será irrelevante). Considérese una superficie orientable  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \setminus X$  de forma que  $\partial \Sigma^+ = C^+$ . La existencia de una tal superficie puede resultar intuitivamente aceptable, pero es en realidad un problema nada trivial en el que no entraremos (por esto es por lo que no estamos haciendo una demostración sino una justificación).*

*Aplicando el teorema de Stokes concluimos que  $\int_{C^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma^+} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ .*

**INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL ROTACIONAL DE UN VECTOR**

De manera similar a como hicimos en el apartado 2.6.5, nos proponemos interpretar el rotacional de un campo vectorial, ahora en un contexto tridimensional. Sea  $\mathbf{F}$  el resultado de modelizar el campo de las velocidades (que supondremos derivable con continuidad) a las que se mueve un fluido en cierta región del espacio. Tomamos un punto  $\mathbf{p}$  contenido en esa región y nos proponemos conocer la rotación que induce el movimiento del fluido en puntos infinitamente próximos a  $\mathbf{p}$ . Para ello elegimos en primer lugar el plano en el que queremos analizar si  $\mathbf{F}$  hace girar al fluido, no hay que olvidar que estamos en el espacio pero pensamos en un giro alrededor de un eje que pase por  $\mathbf{p}$ , es decir, a lo largo de circunferencias infinitamente próximas a  $\mathbf{p}$  y contenidas en un cierto plano. Elegir el plano sobre el que estarán nuestras circunferencias  $C_\varepsilon$  de centro  $\mathbf{p}$  y radio  $\varepsilon$  equivale a elegir una recta que pase por  $\mathbf{p}$  (el eje del giro). Y elegir un sentido de giro, o una orientación, en la circunferencia  $C_\varepsilon$  equivale a su vez a elegir uno de los dos vectores unitarios sobre la recta. La relación entre la normal unitaria y la orientación de la curva vendrá dada por la "regla del sacacorchos" que hemos comentado en el texto. Sean  $\mathbf{N}$  y  $C_\varepsilon^+$  una normal unitaria y la orientación asociada a ella. Y sea  $B_\varepsilon^+$  el círculo encerrado por  $C_\varepsilon$  y orientado por  $\mathbf{N}$ , que es la misma en todos los puntos de  $B_\varepsilon$ .

Por el teorema de Stokes,

$$\frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int_{C_\varepsilon^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint_{B_\varepsilon^+} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint_{B_\varepsilon^+} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{p} + \mathbf{q}_\varepsilon) \cdot \mathbf{N}$$

para cierto  $\mathbf{q}_\varepsilon$  con  $\|\mathbf{q}_\varepsilon\| < \varepsilon$ , donde la última igualdad se sigue del teorema del valor medio para integrales dobles (la integral de superficie sobre  $B_\varepsilon$  es una integral doble sobre el dominio de una parametrización que describa a  $B_\varepsilon$ ).

Gracias a la continuidad de todas las derivadas parciales de  $\mathbf{F}$ ,

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{p} + \mathbf{q}_\varepsilon) \cdot \mathbf{N} \rightarrow \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{N} \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Como consecuencia de todo lo anterior, *el producto escalar del rotacional de  $\mathbf{F}$  por un vector unitario normal sirve para medir el efecto del giro que induce  $\mathbf{F}$  alrededor del eje que contiene al vector unitario.*

**OBTENCIÓN DEL ROTACIONAL EN COORDENADAS CILÍNDRICAS**

Considérese un campo vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , expresado en coordenadas cartesianas de la forma habitual,

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)),$$

lo cual significa que para la base canónica,  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ ,

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = F_i(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i.$$



La base canónica está formada por unos vectores unitarios que caracterizan cada una de las tres direcciones en las que se mueve un punto al incrementar una de las coordenadas cartesianas. Al cambiar de coordenadas, por ejemplo a cilíndricas  $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ , estamos introduciendo una nueva base  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ , que identifican ahora las direcciones en las que cambiaría un punto al incrementar cada coordenada de las nuevas. Los vectores de la base son por tanto las derivadas parciales (normalizadas) de  $\mathbf{F} \circ \mathbf{T}$  respecto de las coordenadas cilíndricas:  $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ .

Respecto de esta base el campo tiene por componentes, que llamaremos  $F_r, F_\theta, F_z$ , es decir,

$$F_r(r, \theta, z) = (\mathbf{F} \circ \mathbf{T})_r(r, \theta, z) = [(\mathbf{F} \circ \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_r](r, \theta, z),$$

y lo mismo con  $F_\theta$  y  $F_z$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} F_r &= (\mathbf{F} \circ \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_r = F_1(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cos \theta + F_2(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \sin \theta \\ F_\theta &= (\mathbf{F} \circ \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_\theta = -F_1(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \sin \theta + F_2(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cos \theta \\ F_z &= (\mathbf{F} \circ \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_z = F_3(r \cos \theta, r \sin \theta, z). \end{aligned}$$

De estas tres igualdades se pueden deducir relaciones entre las derivadas parciales: derivando y haciendo un uso intensivo de la regla de la cadena obtendremos fórmulas lineales para las (nueve) derivadas parciales respecto de las nuevas variables en función de las (nueve) derivadas parciales  $\partial F_i / \partial x_j$ . Despejando en estas nueve ecuaciones conseguiríamos fórmulas para expresar las nueve derivadas parciales  $\partial F_i / \partial x_j$  en función de las nueve derivadas parciales de las nuevas componentes respecto de las nuevas variables. Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r}{\partial r} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \sin \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \sin \theta \right) \sin \theta \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \sin \theta - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cos \theta \right) r \sin \theta - F_1 \cos \theta + \left( -\frac{\partial F_2}{\partial x_1} \sin \theta + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cos \theta \right) r \sin \theta - F_2 \sin \theta \\ \frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\ &(\text{etc.}), \end{aligned}$$

de donde si despejamos  $\partial F_1 / \partial x_1, \partial F_2 / \partial x_2$  y  $\partial F_3 / \partial x_3$  y sumamos, el resultado será la fórmula de la divergencia en las componentes relativas a las coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{1}{r} \left( F_r + r \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

De modo análogo, si bien bastante más largo, podría obtenerse  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  en términos de las derivadas en las nuevas variables.

**98.** No obstante, existe un procedimiento alternativo para obtener  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  aplicando la Fórmula de Stokes, que exponemos a continuación.

De acuerdo con 4.8.1, en cada punto  $\mathbf{p}_0 \in D$  la componente de  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  en la dirección de  $r$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r$ , es la circulación de  $\mathbf{F}$  por unidad de área en  $\mathbf{p}_0$  en una superficie perpendicular a  $\mathbf{e}_r$ .

Tomamos una superficie de este tipo, construida a partir del punto  $\mathbf{p}_0$  mediante incrementos de las coordenadas  $\theta$  y  $z$ , es decir, una superficie  $\Sigma^+$  descrita mediante las expresiones

$$\Sigma : \quad r = r_0, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \Delta\theta, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta z$$

y orientada mediante la normal  $\mathbf{e}_r$ . Entonces el área de  $\Sigma$  es igual a  $r \Delta\theta \Delta z$ , y su borde es  $\partial\Sigma^+ = C_z^+ + C_{\theta+\Delta\theta}^+ + C_{z+\Delta z}^+ + C_\theta^+$  (los subíndices indican la coordenada que, junto con  $r$ , es constante en cada curva). La integral de

$\mathbf{F}$  a lo largo de este borde se calcula de modo aproximado teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{C_z^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_z} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta ds \approx F_\theta(r, \theta, z) r \Delta\theta, \\ \int_{C_{\theta+\Delta\theta}^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_{\theta+\Delta\theta}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z ds \approx F_z(r, \theta + \Delta\theta, z) \Delta z, \\ \int_{C_{z+\Delta z}^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_{z+\Delta z}} -\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta ds \approx -F_\theta(r, \theta, z + \Delta z) r \Delta\theta, \\ \int_{C_\theta^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{C_\theta} -\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z ds \approx -F_z(r, \theta, z) \Delta z. \end{aligned}$$

La integral  $\int_{\partial\Sigma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  será entonces aproximadamente igual a

$$-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}(r, \theta, z) \Delta z r \Delta\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}(r, \theta, z) \Delta\theta \Delta z,$$

que dividida por el área de  $\Sigma$  da la componente de  $\mathbf{rot} \mathbf{F}$  en la dirección de  $r$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

Con similares argumentos se comprueba que en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

## 4. Integrales de tres variables

## 4.1. Introducción

Consideremos un subconjunto  $W$  de  $\mathbb{R}^3$ , acotado, y una función real definida sobre  $W$  y acotada,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ . El concepto y las propiedades de la **integral (triple) de Riemann de  $f$  sobre  $W$**  son totalmente análogos al caso de dos variables, con el único cambio de introducir una variable adicional. La integral de Riemann de  $f$  sobre  $W$  la denotaremos con  $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$  o con  $\iiint_W f dV$  (leído “diferencial de volumen”).

Los teoremas, definiciones y comentarios de los apartados 2.1 a 2.5 son válidos para tres variables, con adaptaciones que generalmente serán obvias (en lugar de rectángulos consideraremos **paralelepípedos**, que serán producto de tres intervalos cerrados y acotados, etc.). Dedicaremos el siguiente apartado a dar detalles de aquellas adaptaciones que lo merezcan, por no ser tan obvias o porque aporten algo adicional.

Tras estudiar el teorema de la divergencia, finalizaremos el capítulo con algunas consideraciones sobre las integrales de Riemann y sobre sus generalizaciones, aplicables a cualquier número de variables.

## 4.2. Integrabilidad, teorema de Fubini y regiones tridimensionales simples

La condición suficiente de integrabilidad del teorema 2.10 se extiende ahora admitiendo que las discontinuidades de la función puedan estar contenidas en gráficas de funciones continuas de *dos* variables:

**Teorema 4.1** *Es integrable cualquier función de tres variables definida sobre un paralelepípedo, siempre que sea acotada y sus discontinuidades estén contenidas en una unión finita de gráficas de funciones continuas de dos variables.*

Igual que ocurría en el caso de dos variables, un conjunto formado por un solo punto  $(x_0, y_0, z_0)$  podemos considerarlo como la gráfica de una función continua de dos variables,  $\{(x_0, y_0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \rightsquigarrow z_0$ . También una curva parametrizada sobre una de las variables,  $\{(x, \alpha(x), \beta(x)) : x \in [a, b]\}$ , puede ponerse como la gráfica de una función continua de dos variables,  $(x, y) \rightsquigarrow \beta(x)$  sobre el conjunto  $\{(x, \alpha(x)) : x \in [a, b]\}$ .

Para integrales triples se cumplen resultados análogos al teorema de Fubini y su corolario. En este caso la integral triple puede descomponerse en tres integrales sencillas (de  $3! = 6$  maneras diferentes) o en una sencilla y una doble (de otras 6 maneras diferentes), con un total de 12 posibilidades. Por ejemplo, si  $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces se cumplen las siguientes igualdades (donde además está garantizada la existencia de todas la integrales):

$$\begin{aligned} \iiint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x_1, x_2, x_3) dV &= \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dA = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \right) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left[ \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right] dx_1. \end{aligned}$$

También el concepto de integral triple se amplía a funciones que sean acotadas pero que no estén definidas sobre paralelepípedos, con un procedimiento totalmente análogo al de la definición 2.17.

Para definir las regiones simples tridimensionales utilizamos las mismas ideas que para el caso bidimensional: pensamos en conjuntos acotados en  $\mathbb{R}^3$  para los que cuando lanzamos una recta en la dirección de uno de los ejes coordenados, por ejemplo  $x = x_0, y = y_0$ , al recorrerla desde  $-\infty$  a  $+\infty$  entramos y salimos en el conjunto una sola vez (o ninguna). Para la definición formal exigiremos además que la correspondiente proyección sea una región simple bidimensional.

**Definición 4.2** *Diremos que un subconjunto acotado  $W \subset \mathbb{R}^3$  es una **región simple tridimensional en la dirección de las  $z$**  cuando la proyección de  $W$  sobre el plano  $z = 0$  sea una región simple bidimensional y además  $W$  esté limitada verticalmente por dos gráficas de funciones continuas. Es decir, cuando  $W$  pueda expresarse de la siguiente manera:*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

donde  $D$  es una región simple bidimensional y  $\alpha, \beta$  son dos funciones continuas definidas

sobre  $D$  y con la condición de que para todo punto  $(x, y)$  de  $D$ ,  $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$ .

De manera análoga se definen las **regiones tridimensionales simples en la dirección de las  $x$  o de las  $y$** .

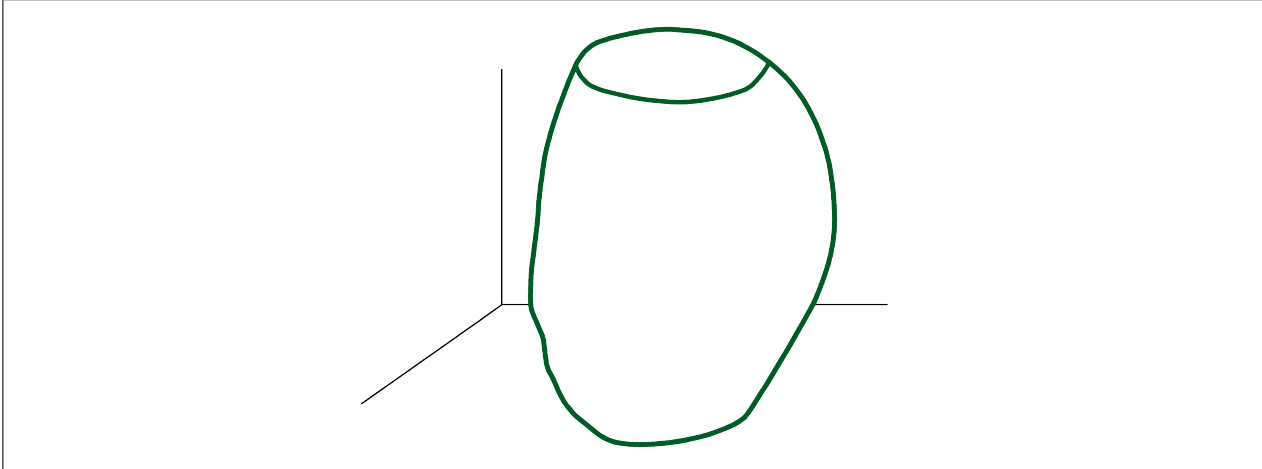


Figura 4.1: Región tridimensional simple en las  $z$

**Teorema 4.3** Sea  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, donde  $W$  es una región tridimensional simple en la dirección de las  $z$ . Entonces

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x, y, z) dV &= \iint_D \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx \end{aligned}$$

(donde estamos utilizando las notaciones de las definiciones 2.18 y 4.2, y suponiendo que  $D$  es simple en dirección de las  $y$ ).

**JUSTIFICACIÓN:** Una demostración de este resultado se obtiene de manera muy similar a la del teorema 2.20.

Naturalmente, todo lo dicho para regiones simples en la dirección de las  $z$  puede adaptarse de manera inmediata a regiones simples en la dirección de las  $y$  o de las  $x$ . De modo que para un región que sea simple en las tres direcciones disponemos de  $3! = 6$  maneras diferentes de plantear el cálculo de una integral triple como tres integrales sucesivas de una variable, siempre que conozcamos o seamos capaces de obtener las desigualdades que expresan la región en cualquier orden. También podemos descomponer la integral triple en una doble y una sencilla, o en una sencilla y una doble, lo que nos da otras 6 posibilidades. Volveremos sobre este tema en los ejemplos.

Nuestra definición de volumen de un conjunto tridimensional admite las mismas explicaciones que las que dimos para definir el área de un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  (definición 2.23):

**Definición 4.4** Llamaremos **volumen de un subconjunto acotado**  $W \subset \mathbb{R}^3$  a  $V(W) = \iiint_W dV$ , cuando exista. Cuando la integral no exista, diremos que  $W$  **no tiene volumen**.

Las fórmulas del teorema 4.3 justifican la validez, bajo ciertas condiciones, del principio enunciado por Cavalieri a mediados del siglo XVII:

**Corolario 4.5 (Principio de Cavalieri)** Si al cortar dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  con todos los planos paralelos a uno fijo se obtienen secciones cuyas áreas están siempre en la misma proporción (para cualquiera de los cortes), entonces los volúmenes de ambos conjuntos están en la misma proporción.

JUSTIFICACIÓN: Llamemos  $W_1$  y  $W_2$  a los dos conjuntos y tomemos los ejes de coordenadas de manera que los cortes sean paralelos al plano  $z = 0$ . Entonces existen dos valores  $a, b$ , de forma que por debajo de  $z = a$  y por encima de  $z = b$  las intersecciones con planos horizontales son vacías, por lo que podemos limitarnos a  $a \leq z \leq b$ .

Aplicando el teorema 4.3,

$$\begin{aligned} V(W_i) &= \iiint_{W_i} dV = \int_a^b \left( \iint_{W_i \cap \text{plano a la altura } z} dx dy \right) dz = \\ &= \int_a^b A(W_i \cap \text{plano a la altura } z) dz. \end{aligned}$$

Y como las áreas de las intersecciones guardan una cierta proporción constante,  $A(W_2 \cap \text{plano a la altura } z) = k A(W_1 \cap \text{plano a la altura } z)$  al integrarlas entre  $a$  y  $b$  la constante  $k$  sale fuera de la integral y los volúmenes están también en la misma proporción,  $V(W_2) = k V(W_1)$ .

En el apartado 4.9.3 puede consultarse una generalización de este principio a los casos en los que los cortes de  $W$  no se hacen con planos paralelos sino con otros haces de superficies (esferas concéntricas, conos con el mismo vértice y con el mismo eje, ...).

El teorema del cambio de variable para integrales de dos variables, 2.32, tiene una réplica para funciones de tres variables en la que solamente hay que añadir una coordenada más.

### 4.3. Ejemplos

**Ejemplo 4.6** Calcular  $\iiint_W z dV$ , donde  $W$  es la región del octante positivo limitada además por el plano  $z = 4$  y el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .

Lo primero es traducir a términos técnicos la descripción que nos da el enunciado del conjunto  $W$ , identificando las desigualdades que describen a  $W$ .

**99.** Cuando la descripción pueda dar lugar a varios subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  (o de  $\mathbb{R}^2$ , si es el caso) y solamente sea acotado uno de ellos, se entenderá que se refiere a ese conjunto acotado.

Como  $W$  está contenido en el octante positivo, todos sus puntos cumplen las inecuaciones  $x \geq 0, y \geq 0$  y  $z \geq 0$ . Además hay dos alternativas, una es  $z \geq 4$  o  $z \leq 4$ ; y la otra  $z \geq x^2 + y^2$  o  $z \leq x^2 + y^2$ . Por tanto hay en principio cuatro casos posibles, conjugando las desigualdades de las dos alternativas. Hay tres de esos casos que no dan conjuntos acotados, lo que puede

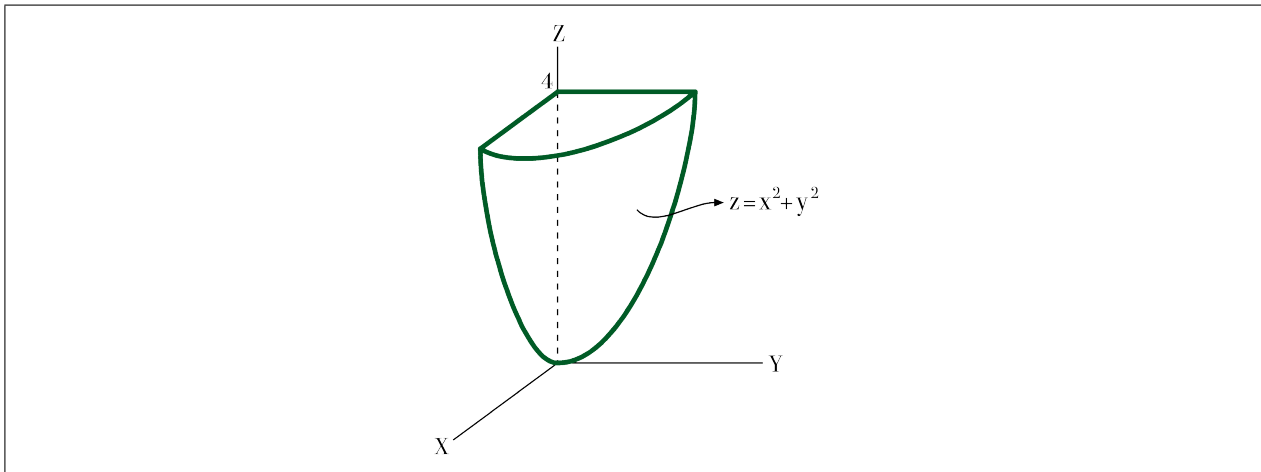


Figura 4.2: El conjunto  $W$  es la parte del octante positivo limitada por el plano  $z = 4$  y el paraboloides  $z = x^2 + y^2$

demonstrarse comprobando que contienen un conjunto que sepamos que no es acotado. Por ejemplo, el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 4, z \geq x^2 + y^2\}$$

contiene a todo el semieje  $x = 0, y = 0, z \geq 4$ . En cambio,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq x^2 + y^2\},$$

es acotado. En efecto,  $z$  está claramente acotada por 0 y por 4; además  $0 \leq x \leq 2$ , puesto que  $x^2 \leq 4$ , y con  $y$  ocurre lo mismo que con  $x$ . Por consiguiente,  $(x, y, z) \in W$  si y sólo si  $x \geq 0, y \geq 0, 4 \geq z \geq x^2 + y^2$ .

Pasamos ahora al cálculo de la integral pedida haciendo uso del teorema 4.3. Tenemos varias posibilidades, concretamente 12. Vamos a elegir dos de ellas para mostrar cómo hacer todos los cálculos.



- Una integral doble y después una sencilla.

Cortamos  $W$  con planos horizontales,  $z = z_0$ , para obtener las secciones

$$W_{z_0} = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z_0, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (\text{para } z_0 \in [0, 4]),$$

que son cuartos de círculo situados en el plano horizontal  $z = z_0$  y de radio igual a  $\sqrt{z_0}$ . Podemos calcular el área de cada uno de estos  $W_{z_0}$ , que nos dará  $\pi z_0/4$ .

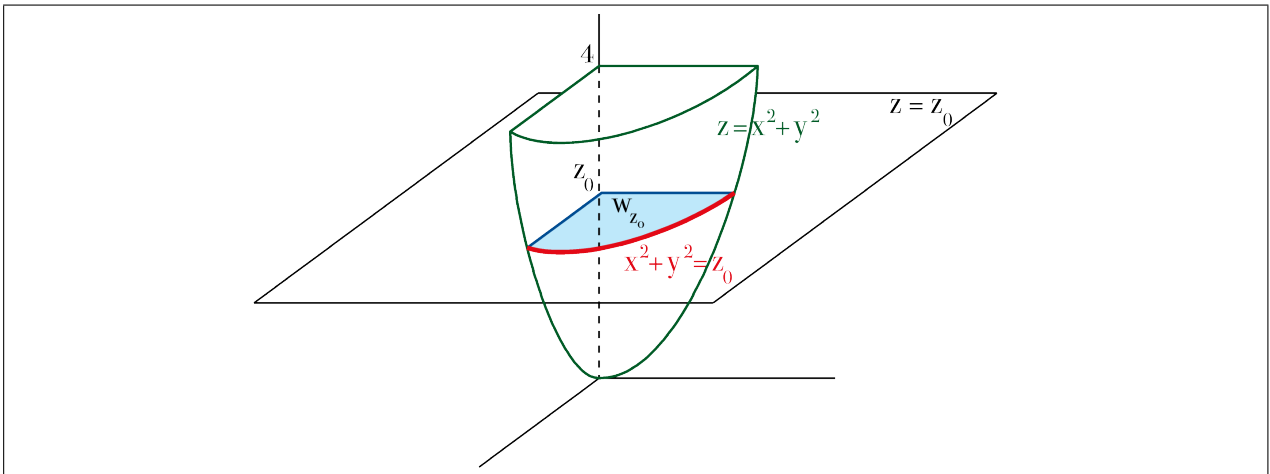


Figura 4.3: La parte curva que limita a  $W_{z_0}$  (en rojo) está contenida en el paraboloides, por lo que sus puntos cumplen la ecuación  $x^2 + y^2 = z_0$

Entonces

$$\iiint_W z \, dV = \int_0^4 \left( \iint_{W_z} z \, dx \, dy \right) dz = \int_0^4 z A(W_z) \, dz = \int_0^4 \frac{\pi z^2}{4} \, dz = \frac{16}{3} \pi.$$

- Tres integrales sencillas.

Pretendemos hacer una descripción de  $W$  mediante desigualdades, tal como establece la definición 4.2. Es claro que una descripción equivalente de  $W$  viene dada por

$$\begin{aligned} a &= 0 \leq x \leq 2 = b \\ \varphi_1(x) &= 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} = \varphi_2(x) \\ \alpha(x, y) &= x^2 + y^2 \leq z \leq 4 = \beta(x, y). \end{aligned}$$

Se comprueba de manera rutinaria que efectivamente este sistema de seis inecuaciones es equivalente al de cuatro inecuaciones que definen a  $W$ ; que las funciones  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son continuas (son polinomios o raíces cuadradas de polinomios); y que  $a \leq b$  (trivial),  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  (trivial),  $\alpha \leq \beta$  ( $\alpha$  y  $\beta$  sólo se aplican a puntos  $(x, y)$  que cumplan las cuatro primeras desigualdades, entre ellas  $y \leq \sqrt{4 - x^2}$ , por lo que  $x^2 + y^2 \leq 4$  es trivial). Entonces

$$\iiint_W z \, dV = \int_0^2 \left[ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left( \int_{x^2+y^2}^4 z \, dz \right) dy \right] dx = \frac{16}{3} \pi,$$

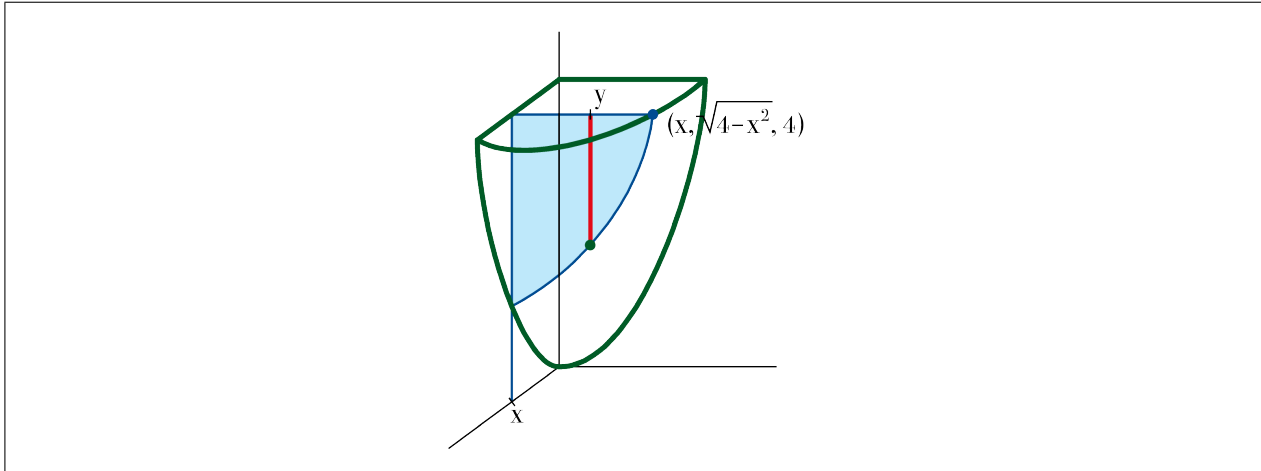


Figura 4.4: Una vez fijado  $x$ , el corte con  $W$  es la región señalada en azul. Entonces el valor mínimo de  $y$  es 0 y el máximo se alcanza en el punto azul. Si a continuación elegimos un  $y$  entre 0 y  $\sqrt{4-x^2}$ , el corte con la región azul es el segmento rojo, luego  $z$ , cuyo máximo es 4, alcanza su mínimo en el punto verde. El punto verde está sobre el paraboloides, luego ha de cumplir la igualdad  $x^2 + y^2 = z$

según cálculo obtenido directamente por Maple 14. Observamos a continuación lo largo que resulta hacer las operaciones a mano, con un considerable consumo de tiempo y el consiguiente riesgo de errores. Al final tenemos que recurrir a las fórmulas de recurrencia para las primitivas de  $\sin^n t \cos^m t$ , tras haber introducido el cambio de variable  $x = 2 \sin t$ :

$$\begin{aligned} \iiint_W z \, dV &= \int_0^2 \left[ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left( \int_{x^2+y^2}^4 z \, dz \right) dy \right] dx = \\ &= \int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2} [16 - (x^2 + y^2)^2] dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[ 8y - \frac{x^4 y}{2} - \frac{x^2 y^3}{3} - \frac{y^5}{10} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \\ &= \int_0^2 \left[ 8(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^4 (4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10} (4-x^2)^{\frac{5}{2}} \right] dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ 32 \cos^2 t - 32 \sin^4 t \cos^2 t - \frac{64}{3} \sin^2 t \cos^4 t - \frac{32}{5} \cos^6 t \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{3} \pi. \quad \blacksquare$$

**100.** Dada una región simple de la que se conocen las ecuaciones que definen sus límites, no siempre es evidente cómo obtener las desigualdades necesarias para calcular una integral sobre ella en un determinado orden.

**Ejemplo 4.7** (Ejemplo 5.6.6 de [11], cambiando los órdenes de integración en todas sus posibilidades.) Calcular el volumen del conjunto  $W$  definido por las desigualdades

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 2.$$

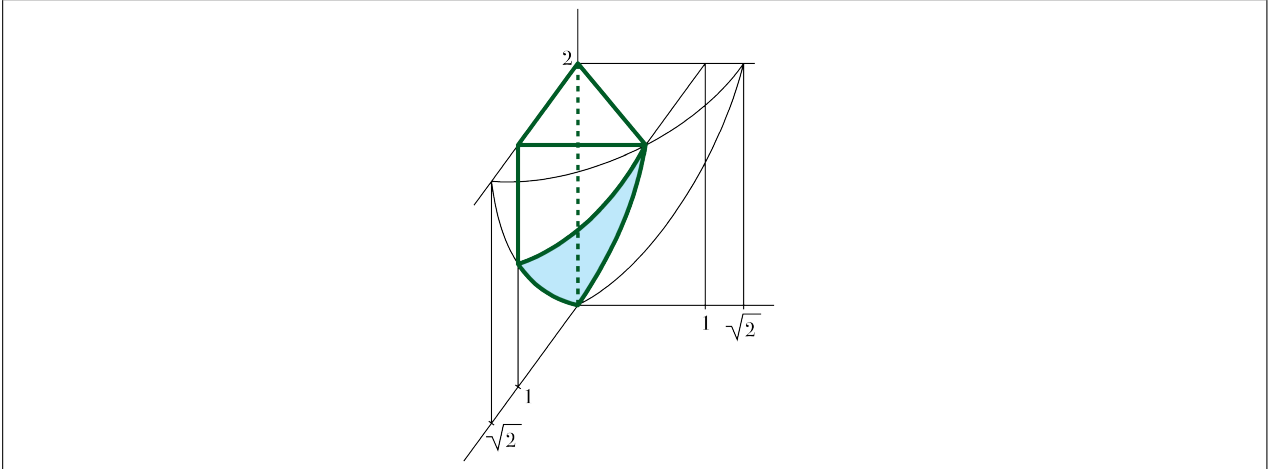


Figura 4.5: Cuatro de las caras del  $W$  son planas. La quinta (en azul) forma parte del paraboloid

Plantearémos el cálculo en varias formas, con todas las ordenaciones posibles de las tres variables.

- orden de integración  $(z, y, x)$ :

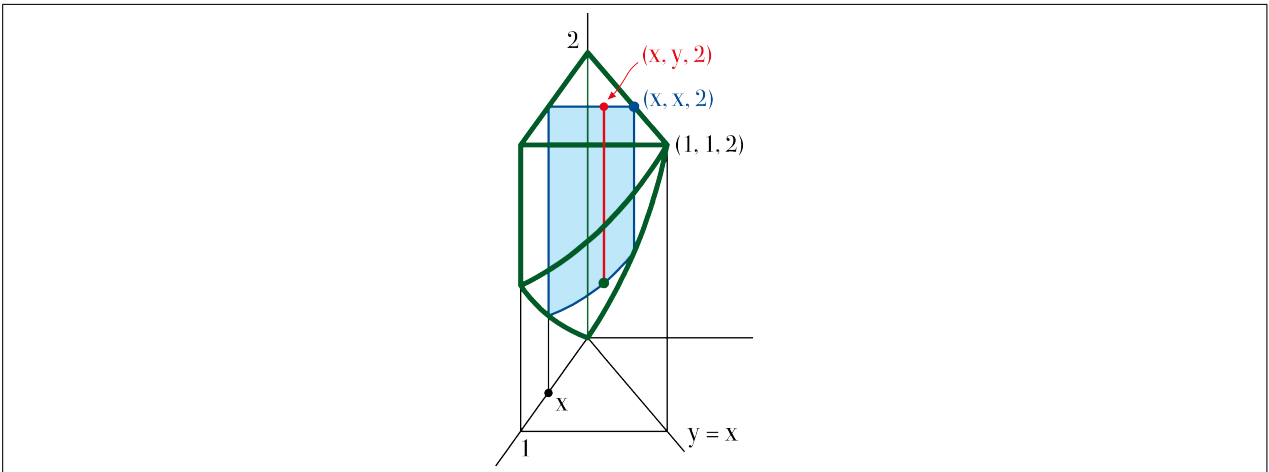


Figura 4.6: Una vez fijado  $x$ , el corte con  $W$  es la región señalada en azul. Entonces el valor mínimo de  $y$  es 0 y el máximo se alcanza en el punto azul ( $y = x$ ). Si a continuación elegimos un  $y$  entre 0 y  $x$ , el corte es el segmento rojo, luego  $z$ , cuyo máximo es 2, alcanza su mínimo en el punto verde. El punto verde está sobre el paraboloid, luego ha de cumplir la igualdad  $x^2 + y^2 = z$

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\} \subset \mathbb{R}^2$  es una región simple 2-dimensional. La integral se calcula fácilmente y se obtiene el valor  $2/3$ .

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x^2+y^2}^2 dz = \int_0^1 dx \int_0^x (2 - x^2 - y^2) dy = \int_0^1 \left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) dx = \frac{2}{3}.$$

- orden de integración  $(x, z, y)$ :

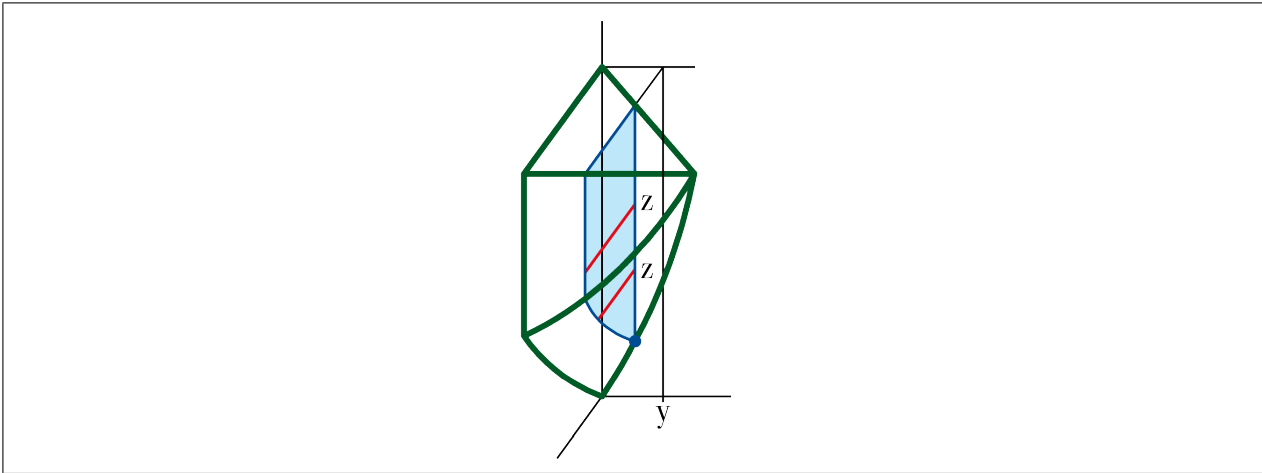


Figura 4.7: Una vez fijado  $y$ , el corte con  $W$  es la región señalada en azul. Entonces el valor máximo de  $z$  es 2 y el mínimo se alcanza en el punto azul ( $y = x$ ,  $z = x^2 + y^2$ , luego  $z = 2y^2$ ). Si a continuación elegimos un  $z$  entre  $2y^2$  y 2, el corte es el segmento rojo, donde el mínimo valor de  $x$  es siempre  $y$ , pero el máximo valor de  $x$  tiene dos posibilidades bien diferenciadas: es o 1 (para los  $z$  altos) o es  $\sqrt{z - y^2}$  (para los  $z$  bajos). El argumento sobre la figura ayuda a encontrar los extremos de integración, pero no constituye una demostración.

Del sistema original de inecuaciones que describe a  $D$  se deduce inmediatamente este otro:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq z \leq 2 \\ y \leq x \leq \sqrt{z - y^2} \end{array} \right.$$

pero del segundo no se recupera el primero: la desigualdad  $x \leq 1$  no se puede obtener.

**101** . Recurrimos a la expresión  $y \leq \min\{\dots, \dots\}$  porque necesitamos obtener una única desigualdad de la forma  $y$  menor o igual que una función continua de  $x$ ,  $z$ , y sabemos que el mínimo de dos funciones continuas es otra función continua.

Por tanto, para tener equivalencia entre los dos sistemas hay que sustituir la última inecuación por  $x \leq \min\{1, \sqrt{z - y^2}\}$ .

**102** . Ahora ambos sistemas son equivalentes, pero todavía queda otro problema si queremos que el nuevo sistema de desigualdades cumpla las condiciones previstas (las de la definición 4.2).

Resulta que sobre la región simple 2-dimensional  $D_1 = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 2\}$  la función  $\varphi_1(y, z) = y$  no es siempre menor o igual que la función  $\varphi_2(y, z) =$

$\min\{1, \sqrt{z - y^2}\}$ . Dicho de otra forma: las desigualdades  $y \leq x \leq \sqrt{z - y^2}$  llevan implícita la desigualdad  $2y^2 \leq z$ , que es más exigente que  $y^2 \leq z$ .

Lo que está ocurriendo es que la proyección de  $W$  sobre el plano  $YZ$  no es toda la región  $D_1$ , sino solamente una parte de ella. En efecto, proyectando la curva

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= z \\ y &= x \end{aligned} \right\}$$

sobre el plano  $YZ$  no se obtiene la curva  $z = y^2$ , sino la curva  $z = 2y^2$ .

Para corregirlo sustituimos  $y^2 \leq z \leq 2$  por  $2y^2 \leq z \leq 2$ , con lo que la definición de la región simple 2-dimensional queda así:  $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq z \leq 2\}$ , y sobre este conjunto sí es cierto que  $\varphi_1 \leq \varphi_2$ .

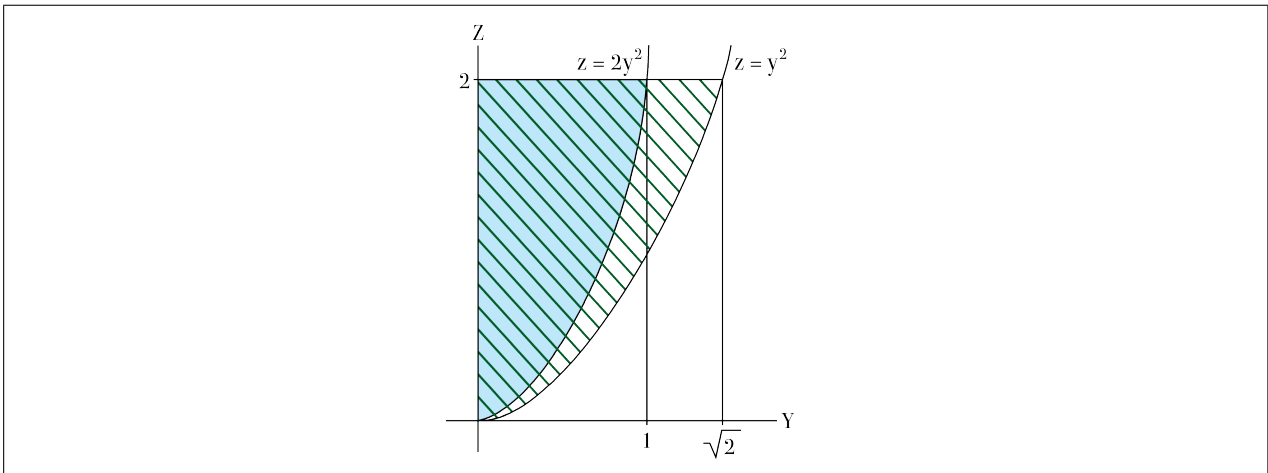


Figura 4.8: Regiones  $D_1$  (trama verde) y  $D$  (en azul), ambas en el plano  $YZ$

El sistema de desigualdades que necesitábamos es, por tanto,

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1 \\ 2y^2 &\leq z \leq 2 \\ y &\leq x \leq \min\{1, \sqrt{z - y^2}\} \end{aligned} \right\}.$$

La figura 4.8 ayuda a visualizar que la proyección de  $W$  sobre el plano  $YZ$  es efectivamente el conjunto  $D$ , y no el que se obtendría con la desigualdad  $y^2 \leq z$  en lugar de la desigualdad  $2y^2 \leq z$ .

Como

$$1 \geq \sqrt{z - y^2} \Leftrightarrow z \leq y^2 + 1 \quad (\text{puesto que } z \geq y^2),$$

la integral dada es igual a (ver la figura)

$$\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{y^2+1} dz \int_y^{\sqrt{z-y^2}} dx + \int_0^1 dy \int_{y^2+1}^2 dz \int_y^1 dx = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{2}{3}.$$

- Consultar los demás casos en la página 213. ■

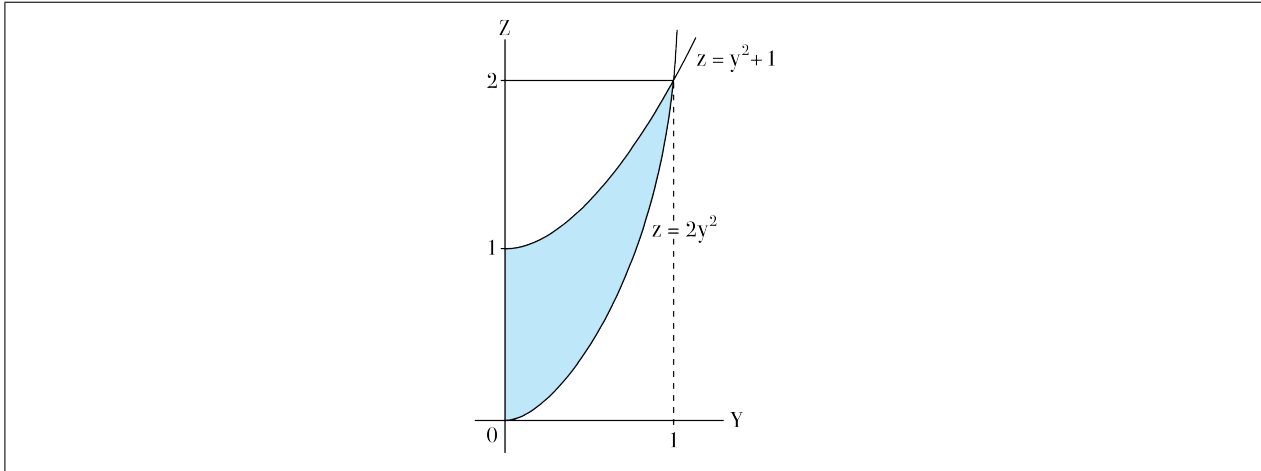


Figura 4.9: El conjunto  $D$  dividido según el valor máximo de  $x$ . La parte coloreada en azul es la proyección de la parte azul de la figura 4.5, en la que  $x$  es menor que 1

### 4.4. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas permiten representar cualquier punto del espacio tridimensional mediante unas nuevas variables inspiradas en la distancia al origen y las coordenadas geográficas sobre la superficie terrestre,

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

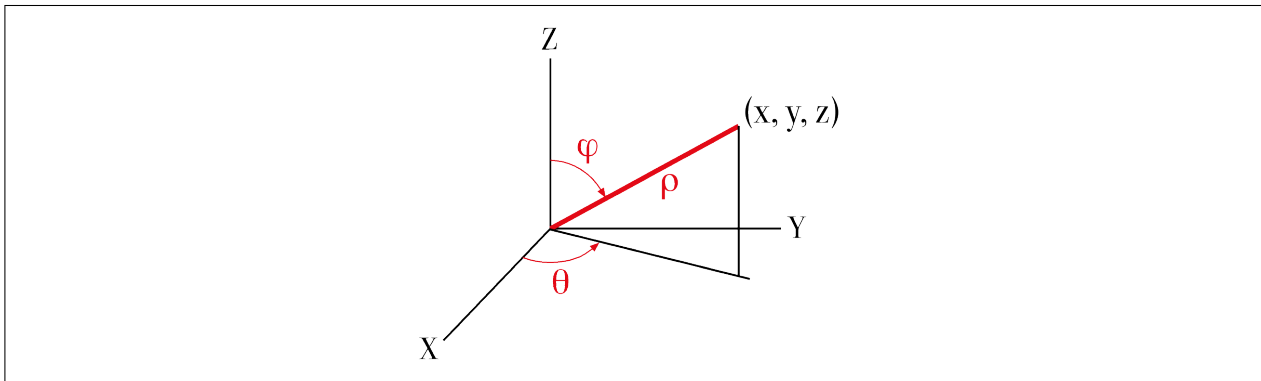


Figura 4.10: Coordenadas esféricas

Hay que advertir que existen algunas variantes, según desde qué ejes se midan los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$ . Al aplicarlas a una situación concreta quizá convenga introducir alguna de esas variantes, como, por ejemplo, cambiar los papeles de  $x$  y  $z$ , o tomar el ángulo  $\varphi$  a partir del eje de las  $z$  negativas, etc.

Por motivos similares a los expuestos para las coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$ , nos limitaremos a valores positivos de  $\rho$  y restringiremos, para empezar, los valores que tomen los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  a intervalos de amplitud  $2\pi$ , tomando por ejemplo  $[0, 2\pi]$ . Pero estas restricciones no son suficientes para evitar duplicidades, todavía hay que reducir más el rango de los ángulos,

puesto que, por ejemplo, las nuevas coordenadas del punto  $(0, -2, 0)$  son  $\rho = 2$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , pero también pueden ser  $\rho = 2$ ,  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Para que estemos en condiciones de aplicar el teorema del cambio de variable será suficiente con que de los dos intervalos donde varían los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ , uno lo reduzcamos a una amplitud  $\pi$ . Convendremos en llamar **cambio a coordenadas esféricas** a una aplicación definida por las fórmulas expuestas más arriba,  $(\rho, \varphi, \theta) \rightsquigarrow (x, y, z)$ , con dominio una región simple  $E \subset [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , y cuya imagen sea una región simple tridimensional. En el apartado 4.9.2 puede consultarse una demostración de que con estas limitaciones se cumplen las hipótesis del teorema del cambio de variable.

**Ejemplo 4.8** Cálculo del volumen de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  (donde  $a$  es un número real positivo) pasando la integral a coordenadas esféricas.

Queremos calcular  $\iiint_W dV$ , donde  $W$  viene definido por la desigualdad del enunciado. Al pasar a coordenadas esféricas la desigualdad equivale a  $\rho^2 \leq a^2$ , lo que a su vez equivale a  $0 \leq \rho \leq a$ , una vez introducida la restricción de que  $\rho$  no sea negativo. En cuanto a  $\theta$  y  $\varphi$ , quedan totalmente libres, lo cual significa (tener siempre presentes estas restricciones para los ángulos) que  $0 \leq \varphi \leq \pi$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

El jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi,$$

que es siempre positivo gracias la elección que hicimos de recortar  $\varphi$  al intervalo  $[0, \pi]$ , con lo que en los cambios a esféricas nos podemos olvidar del valor absoluto del jacobiano, siempre que mantengamos el convenio que hicimos más arriba. Ya estamos en condiciones de terminar el cálculo pedido:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dx \, dy \, dz = \int_0^a \left[ \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin \varphi \, d\theta \right) d\varphi \right] d\rho = \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^a \left[ -\cos \varphi \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi a^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 4.5. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas vienen a ser las polares para uno de los planos coordenados a las que se les ha añadido la tercera variable cartesiana. En esta exposición tomaremos la  $z$  como esa tercera coordenada, en el bien entendido que según cuál sea el problema que queramos modelizar puede convenirnos que sea alguna de las otras dos variables la que juegue el papel de la  $z$ :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z.\end{aligned}$$

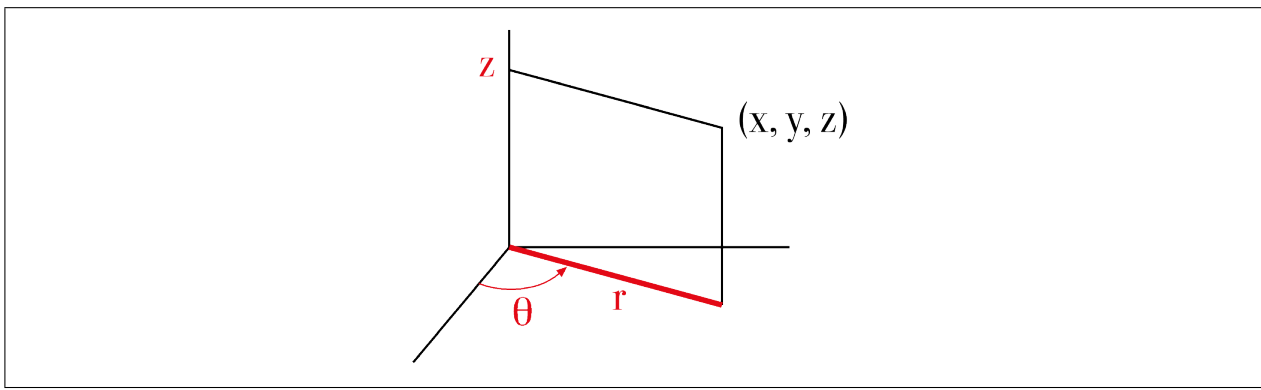


Figura 4.11: Coordenadas cilíndricas

Tal como se explicó al hablar de las coordenadas polares en el plano, utilizaremos algunas restricciones generales en el rango donde varían nuestra nuevas coordenadas. Llamaremos **cambio a coordenadas cilíndricas** a una aplicación definida por las fórmulas de más arriba,  $(r, \theta, z) \rightsquigarrow (x, y, z)$ , con dominio en una región simple  $E \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ , y cuya imagen sea una región simple tridimensional.

El jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

que nunca es negativo. Se demuestra que se satisfacen las hipótesis del teorema del cambio de variable con razonamientos análogos a los utilizados para demostrarlo para los cambios a polares en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 4.9** (Problema 6.2.13 de [11].) Calcular  $\iiint_W z e^{x^2+y^2} dx dy dz$  sobre el cilindro  $W$  definido por las desigualdades  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 3$ .

Al pasar a coordenadas cilíndricas (con las cotas que hemos dicho más arriba), la descripción del cilindro  $W$  es

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 2 \leq z \leq 3,$$

luego la integral es

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 dz \int_0^2 z e^{r^2} r dr = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1). \quad \blacksquare$$



## 4.6. Teorema de la Divergencia

El teorema de la Divergencia, también llamado de Gauss, o de Ostrogradskii, proporciona una fórmula que relaciona una integral triple sobre un subconjunto en  $\mathbb{R}^3$  con una integral de superficie sobre la frontera del conjunto. Es, pues, un resultado del tipo de la regla de Barrow pero en dimensión 3.

La fórmula no es difícil de demostrar. . . una vez que se han precisado las condiciones para que todos los elementos que aparecen en la misma estén correctamente definidos.

Seguiremos un esquema análogo al que aplicamos para el teorema de Riemann-Green. Primero probaremos la fórmula bajo hipótesis que nos faciliten la demostración pero que serán muy restrictivas en cuanto a los dominios de integración, para después ampliar la validez de la fórmula a otras muchas regiones, pero sin hacer las demostraciones, sino dando una referencia o explicando cómo actuar llegado el caso.

### 4.6.1. Fórmula de la Divergencia

Comenzamos considerando un conjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  que sea un paralelepípedo o, más en general, una región simple en las direcciones de los tres ejes coordenados y *cuya frontera*  $\partial W$  *sea una superficie* (en los términos de la definición 3.9) con la condición adicional de que las seis gráficas que limitan a  $W$ , dos en cada dirección, sean superficies dadas en forma explícita, tal como se describen en el ejemplo 3.6.

Como es simple en la dirección de las  $z$ , el conjunto  $W$  puede escribirse de la forma  $W = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^2$  es una región simple bidimensional. Pero  $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ , (con  $\alpha \leq \beta$ ) son funciones no solamente continuas, como exigíamos en la definición 4.2, sino que ahora *estamos suponiendo que son de clase*  $\mathcal{C}^1$ , para que las igualdades  $z = \alpha(x, y)$ ,  $z = \beta(x, y)$  sean superficies en forma explícita por las funciones  $\alpha$  y  $\beta$ . Todavía impondremos una condición más: que *sobre*  $\text{Int } D$  *se tenga siempre*  $\alpha < \beta$ , *estrictamente*.

Entonces la frontera de  $W$  (<sup>104</sup>) o **borde de  $W$** , es  $\partial W = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup \Sigma_0$ , donde

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = \alpha(x, y)\} \\ \Sigma_\beta &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = \beta(x, y)\} \\ \Sigma_0 &= \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},\end{aligned}$$

(se demuestra de manera análoga al teorema 2.50).

Estas tres partes de  $\partial W$  no tienen por qué ser disjuntas, pero sus intersecciones dos a dos son despreciables para la integración de superficies, puesto que son curvas, o subconjuntos de curvas, en  $\mathbb{R}^3$ .

Recordemos que una de las exigentes hipótesis que estamos imponiendo es que los conjuntos  $\Sigma_\alpha$  y  $\Sigma_\beta$  son superficies explícitas descritas por las funciones  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente.

**Definición 4.10** *Con las notaciones anteriores, si  $\mathbf{p}$  es un punto de  $\Sigma_\beta$  la **normal exterior a  $\partial W$  en  $\mathbf{p}$**  es la normal unitaria que tiene la tercera coordenada positiva (es decir, corresponde a la orientación positiva de la definición 3.24). Y si  $\mathbf{p} \in \Sigma_\alpha$ , la **normal exterior a  $\partial W$  en  $\mathbf{p}$**  es la normal unitaria que tiene la tercera coordenada negativa (es decir, corresponde a la orientación negativa de la definición 3.24).*

<sup>104</sup>Definición 2.51.

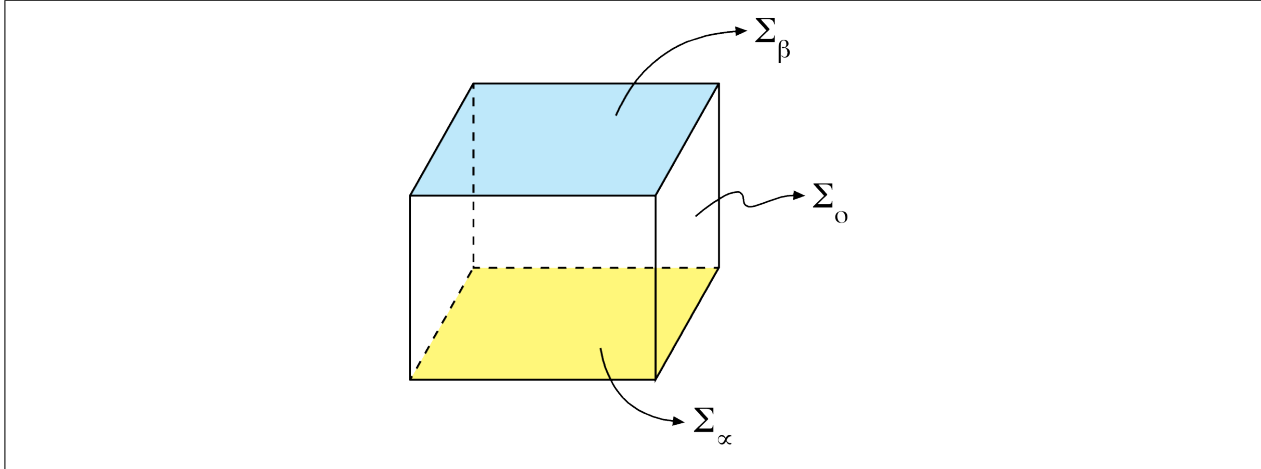


Figura 4.12: Conjunto  $W$ , en el que se han coloreado la cara superior  $\Sigma_\beta$  (en azul) y la cara inferior  $\Sigma_\alpha$  (en amarillo). Las cuatro caras laterales forman  $\Sigma_0$

El nombre de normal “exterior” hace referencia a que desde el punto  $\mathbf{p}$  esta normal unitaria apunta hacia fuera del conjunto  $W$ . Lo mismo ocurría en la definición 2.44, donde introdujimos la normal exterior en el borde de un conjunto bidimensional.

**103.** Supondremos, sin demostrarlo, que la definición 4.10 aplicada sobre las seis superficies, dos en cada dirección, induce una orientación sobre la superficie total  $\partial W$ , que llamaremos **orientación exterior (o positiva) de  $\partial W$ ,  $\partial W^+$** .

El siguiente resultado resulta obvio en una figura, pero no es tan obvio en el razonamiento formal, por lo que necesita ser demostrado.

**Lema 4.11** Si  $\mathbf{p} \in \partial W \setminus (\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta)$  tiene recta normal a la superficie  $\partial W$ , entonces esa recta es horizontal (su última coordenada es constante).

DEMOSTRACIÓN: Ver el apartado 4.9.4.

**104.** Supondremos también sin demostrar que  $\Sigma_0$  es orientable. Elegiremos sobre  $\Sigma_0$  una orientación que sea compatible con la orientación exterior de  $\partial W$ . En realidad, gracias al lema 4.11, la orientación que demos a  $\Sigma_0^+$  será irrelevante.

**Teorema 4.12 (de la Divergencia)** Sea  $W$  una región simple en  $\mathbb{R}^3$  con todas las condiciones descritas en la introducción a este apartado, y sea  $\mathbf{F} : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  definido sobre  $W$ . Entonces

$$\iint_{\partial W^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV .$$

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos en primer lugar que

$$\iint_{\partial W^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dV.$$

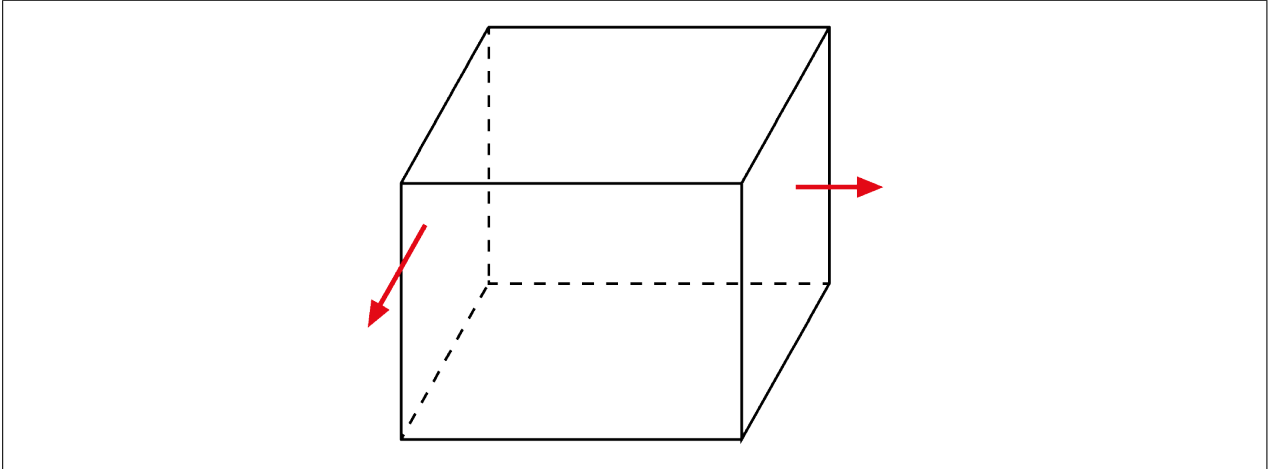


Figura 4.13: Rectas normales en puntos de  $\Sigma_0$ . Siempre son horizontales, pues de lo contrario el punto pertenecería a  $\Sigma_\alpha$  o a  $\Sigma_\beta$

De acuerdo con la descomposición de  $\partial W^+$  que hemos explicado,

$$\iint_{\partial W^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_\beta^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\Sigma_\alpha^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_0^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S},$$

donde la última integral es nula puesto que, como se ha demostrado en el lema 4.11, sobre  $\Sigma_0$  todas las normales son ortogonales a  $(0, 0, F_3)$ . En cuanto a las otras dos integrales, usamos las expresiones explícitas de  $\Sigma_\beta^+$  y de  $\Sigma_\alpha^-$  para obtener

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W^+} (0, 0, F_3) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D [F_3(x, y, \beta(x, y)) - F_3(x, y, \alpha(x, y))] dx dy = \\ &= \iint_D dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

Una vez alcanzado nuestro primer objetivo, observamos que por simetría de las hipótesis, que no distinguen a la coordenada  $z$  de las otras dos, podemos concluir fórmulas análogas para las otras dos coordenadas,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W^+} (0, F_2, 0) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y} dV \\ \iint_{\partial W^+} (F_1, 0, 0) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x} dV, \end{aligned}$$

y sumando las tres fórmulas obtendremos la de la divergencia.

**105.** La tesis del teorema de la divergencia se cumple bajo condiciones mucho menos restrictivas que las del enunciado, varias de las cuales se han introducido aquí con el único objetivo de simplificar la demostración.

La demostración puede adaptarse, con algo de trabajo, al caso de que  $\alpha$  y  $\beta$  sean solamente continuas, igual que hicimos en la demostración del teorema de Riemann-Green (2.38) para cuando  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  fueran solamente continuas, manteniendo, eso sí, la hipótesis de que  $\partial W$  sea una superficie orientada de acuerdo con nuestras definiciones 3.9 y 3.25. Entonces la orientación elegida tiene que seguir siendo la exterior a  $W$ , en el mismo sentido que antes, es decir, si desde un punto de  $\partial W$  nos movemos un infinitésimo siguiendo la normal unitaria exterior a  $W$ , nos saldremos de  $W$ . Para los detalles de la demostración ver [2], teorema 10.5.1.

**106.** Estas hipótesis menos exigentes se dan, por ejemplo cuando  $W$  es una esfera (<sup>105</sup>). O cuando es un cilindro con tapas, como el del ejemplo 3.4.

**107.** Hay muy pocos conjuntos en  $\mathbb{R}^3$  que cumplan todas las hipótesis que hemos puesto en el teorema de la divergencia, mientras que la fórmula es de amplia aplicación.

La situación es muy similar a la que nos encontramos tras probar el teorema de Riemann-Green o el de Stokes. Al igual que hicimos tras demostrar la fórmula de Riemann-Green, nos limitaremos a explicar brevemente cómo actuar cuando queramos aplicar la fórmula y nos encontremos ante un conjunto que no cumpla todas las hipótesis del teorema 4.12:

En el caso de que, mediante un número finito de cortes planos, un subconjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  pueda descomponerse en regiones que verifican las hipótesis del teorema 4.12, se aplica el teorema sobre cada región y sumando se obtiene la fórmula de la divergencia sobre  $W$ , para una cierta orientación de  $\partial W$  que se llama también orientación exterior y que se caracteriza mediante la misma condición que señalamos tras la definición 4.10. El motivo para que el procedimiento funcione es que sobre las superficies que surgen al dar los cortes integraremos dos veces, una en cada sentido, por lo que cuando se sumen todos los términos, se cancelarán (cf. apartado 2.6.3(4)).

#### 4.6.2. Aplicaciones del teorema de la divergencia

Como ocurre con los demás teoremas clásicos del cálculo vectorial, el de la divergencia tiene múltiples aplicaciones. Probaremos algunas y remitimos al apartado 4.9.5 para la exposición de otras más.

#### FÓRMULAS DE VOLÚMENES

Comenzamos con varias fórmulas sobre volúmenes. Si tomamos como campo vectorial la identidad,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ , la divergencia es constantemente igual a 3: puesto que  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

<sup>105</sup>Si  $W$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  son  $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , que no son derivables en los puntos en los que  $x^2 + y^2 = a^2$ . Lo que no quita para que cada semiesfera sea una superficie (usar una parametrización mediante coordenadas esféricas o mediante una proyección estereográfica).

Por consiguiente, si  $W$  es un conjunto sobre el que es válida la fórmula de la divergencia,

$$V(W) = \frac{1}{3} \iint_{\partial W^+} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S},$$

que nos proporciona el volumen de  $W$  a través de un cálculo no sobre  $W$ , sino sobre su frontera. Por ejemplo, para una esfera de centro el origen y radio  $R$ , la normal unitaria exterior en un punto  $(x, y, z)$  de la superficie esférica es  $(x/R, y/R, z/R)$ , luego

$$\begin{aligned} V(\text{esfera de radio } R) &= \frac{1}{3} \iint_{\partial W} (x, y, z) \cdot \left( \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{\partial W} \frac{\|(x, y, z)\|^2}{R} d\sigma = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\partial W} R d\sigma = \frac{R}{3} A(\text{superficie esférica de radio } R). \end{aligned}$$

Otro ejemplo similar al de la esfera, pero más interesante, es el de un cono o una pirámide. Considérese un conjunto  $W \subset \mathbb{R}^3$  que pueda describirse mediante

$$W = \{(tx, ty, th) : 0 \leq t \leq 1, (x, y, h) \in B\},$$

donde  $B$  es un conjunto contenido en el plano  $z = h$  y con un borde  $\partial B$  que es una curva cerrada simple. En estas condiciones, diremos que el conjunto  $W$  es **un cono (o una pirámide) con vértice el origen, con base  $B$  y altura  $h$ .**

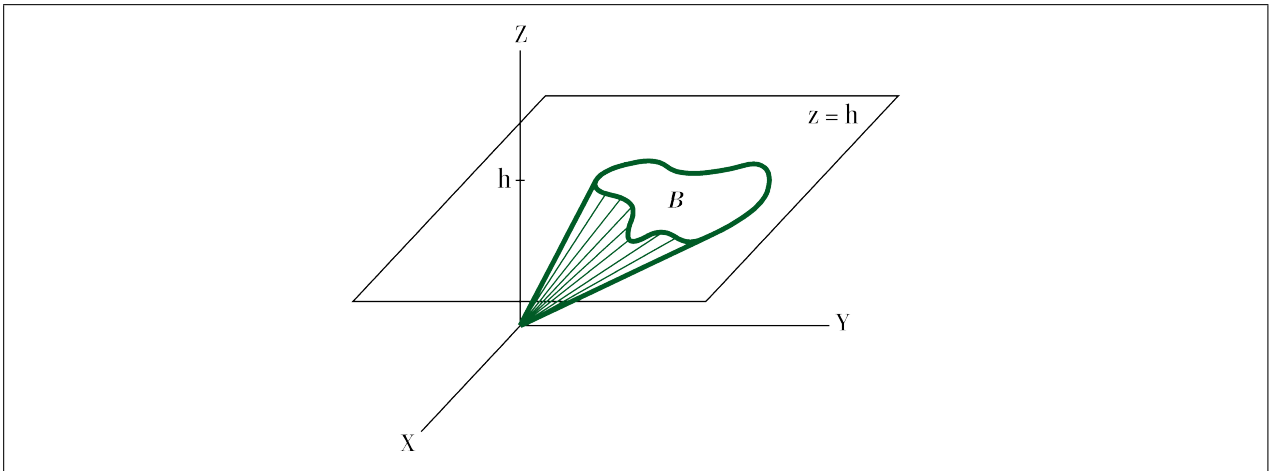


Figura 4.14: Cono de base  $B$  y altura  $h$

Ahora podemos dar un paso más en la igualdad obtenida antes para el volumen, bajo la hipótesis de que la fórmula de la divergencia es válida sobre  $W$ . Para ello observamos que  $\partial W = B \cup L$ ,<sup>(106)</sup> donde  $B$  es la base del cono y  $L$  es la superficie lateral del cono, generada por las rectas que unen el vértice con los puntos del borde de  $B$  como subconjunto del plano  $z = h$ ,  $\partial B$ . Por tanto,

$$\iint_{\partial W^+} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_B (x, y, z) \cdot \mathbf{N} d\sigma + \iint_L (x, y, z) \cdot \mathbf{N} d\sigma,$$

<sup>106</sup> $B$  es una superficie, con fórmula explícita  $z = h$ . Y  $L$  también lo es, al admitir la parametrización  $x(t, s) = tx(s)$ ,  $y(t, s) = ty(s)$ ,  $z(t, s) = th$ , donde  $(x(t), y(t))$  es una parametrización de  $\partial B$  y  $t, s \in [0, 1]$ .

donde  $\mathbf{N}$  es en cada caso la normal unitaria exterior. Ahora bien, sobre un punto  $(x, y, z) \in L$  cualquier normal es ortogonal a la generatriz, <sup>(107)</sup> luego la normal exterior es siempre ortogonal al vector  $(x, y, z)$ , y en consecuencia el segundo sumando es nulo. En cuanto al primero, la normal exterior es perpendicular a  $B$ , y por tanto todos los productos escalares  $(x, y, z) \cdot \mathbf{N}$  coinciden con la distancia que hay desde el vértice hasta el plano  $z = h$ , es decir, son constantemente iguales a la altura del cono,  $h$ . Resumiendo <sup>(108)</sup>,

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} A(\text{base del cono}) \times \text{altura del cono}.$$

### LEMA DE GAUSS

Concluimos esta muestra de aplicaciones del teorema de la divergencia con un resultado que se debe a Gauss y que es útil en electromagnetismo.

**Teorema 4.13 (Lema de Gauss)** *Sea  $W$  una región de  $\mathbb{R}^3$  sobre la que es válida la fórmula de la divergencia y tal que  $\mathbf{0} \notin \partial W$ . Entonces*

$$\iint_{\partial W^+} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathbf{0} \in W \\ 0 & \text{si } \mathbf{0} \notin W \end{cases}$$

**DEMOSTRACIÓN:** *Antes de comenzar propiamente la demostración, nos fijamos en que el campo vectorial que queremos integrar,*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}, z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}),$$

*está definido y es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre todo el espacio menos el origen. Nos interesa también calcular su divergencia:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial z} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}, \end{aligned}$$

luego

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

*Empezamos ahora la demostración, suponiendo que  $\mathbf{0} \notin W$ . Entonces  $\mathbf{F}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $W$ , de modo que puede aplicarse el teorema de la divergencia y como  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ ,*

$$\iint_{\partial W^+} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \text{div } \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3} dV = 0.$$

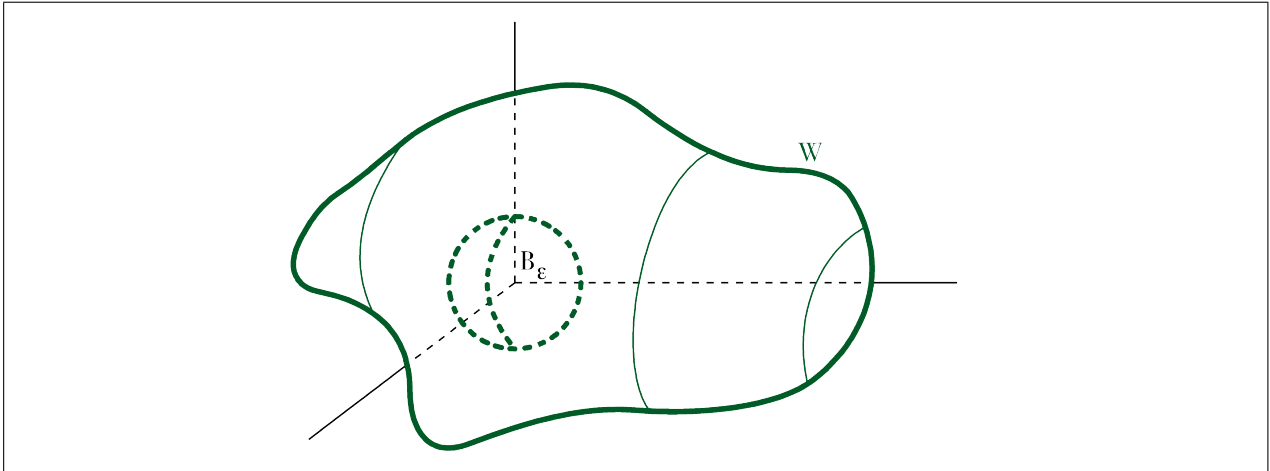


Figura 4.15: Bola cerrada  $B_\epsilon$  contenida en el interior de  $W$

Pasamos al caso de que  $\mathbf{0} \in W$ . Ahora  $\mathbf{F}$  no es de clase  $\mathcal{C}^1(W)$ , así que no podemos aplicarle el teorema de la divergencia. Lo que hacemos es elegir una bola abierta de centro el origen con la condición de que el interior de  $W$  contenga tanto a la bola como a su frontera,  $\text{Int } W \supset B_\epsilon \cup \partial B_\epsilon$ , lo que es posible, puesto que el origen está en  $W$  pero no en su frontera  $\partial W$ . A continuación construimos la diferencia conjuntista  $W_0 = W \setminus B_\epsilon$ . Sobre  $W_0$  el campo  $\mathbf{F}$  sí que es de clase  $\mathcal{C}^1$  (y tiene divergencia nula).

Entonces,  $\partial W_0 = \partial W \cup \partial B_\epsilon$  (argumentando como en la demostración del teorema 2.52) y las orientaciones exteriores son de tal manera que

- sobre los puntos que pertenezcan a  $\partial W$ , la orientación exterior respecto a  $W_0$  es la misma que la orientación exterior respecto a  $W$
- y sobre los puntos  $\mathbf{p}$  que pertenezcan a  $\partial B_\epsilon$ , la orientación exterior respecto a  $W_0$  es la opuesta de la orientación exterior respecto a  $B_\epsilon$ , que no es otra que  $\mathbf{p}/\|\mathbf{p}\|$ .

En consecuencia,

$$\iint_{\partial W_0^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial W^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\partial B_\epsilon^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

A continuación descomponemos  $W_0$  en ocho subconjuntos, a base de cortarlo con los octantes en que los planos coordenados dividen al espacio total. Para cada uno de esos subconjuntos la fórmula de la divergencia es válida, luego lo es también para  $W_0$ , como se explica al final del apartado 4.6.1. Por tanto,

$$\iint_{\partial W_0^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{W_0} \text{div } \mathbf{F} \, dV = 0,$$

luego el valor de la integral de  $\mathbf{F}$  sobre  $\partial W^+$  es el mismo que sobre  $\partial B_\epsilon^+$ , que podemos

<sup>107</sup>Haciendo los cálculos pertinentes se comprueba que el vector normal a  $L$  en el punto  $t(x(s), y(s), h)$  es  $t(-hy'(s), hx'(s), x(s)y'(s) - x'(s)y(s))$ .

<sup>108</sup>Arquímedes solicitó que en su lápida figurase la fórmula de que el volumen de un cono es igual a un tercio del volumen del cilindro circunscrito que tiene la misma base, por considerarla el más importante de sus descubrimientos.

calcular directamente,

$$\iint_{\partial W^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|^3} \cdot \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} d\sigma = \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} A(B_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.$$



## 4.7. Definiciones alternativas de la integral de Riemann

Hay algunas variantes en la definición de función integrable, aparte de las de Riemann y de Darboux que hemos dado más arriba, que dan lugar a la misma integral y que son útiles en algunas demostraciones. Daremos una somera idea de algunas de ellas, limitándonos a las funciones de dos variables, para no hacer más prolija su descripción.

Al hablar de particiones supondremos en todo este apartado que en cada variable la distancia entre dos puntos consecutivos de la partición no es necesariamente la misma, igual que hicimos al hablar de la integral de Darboux. Llamaremos suma de Riemann a  $\sum_{ij} f(\xi_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$  (donde  $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ), y llamaremos **diámetro de la partición**  $\mathcal{P}$  a la máxima diagonal de los rectángulos  $R_{ij}$ ,

$$\text{diam } \mathcal{P} = \max\{[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2]^{1/2} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

Las siguientes variantes de la forma de definir la convergencia de las sumas de Riemann dan lugar a una integral que coincide con la de Riemann (<sup>109</sup>):

1. Hay una sucesión  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k, \dots$ , de particiones con diámetros  $\text{diam } \mathcal{P}_k$  tendiendo a cero, cuyas sumas de Riemann convergen a un número real (la integral) que es el mismo para todas las elecciones de los puntos  $\xi_{ij}$  en cada una de las  $\mathcal{P}_k$ .
2. Si  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k, \dots$  es cualquier sucesión de particiones cuyos diámetros  $\text{diam } \mathcal{P}_k$  tienden a cero, entonces las sumas de Riemann convergen a un número real (la integral) que es el mismo para todas las elecciones de los puntos  $\xi_{ij}$  en cada una de las  $\mathcal{P}_k$ .

Esta afirmación es aparentemente más fuerte que la anterior, pero puede demostrarse que ambas son equivalentes entre sí. Es decir, que en cuanto existe una sucesión de particiones con la condición 1., cualquier otra sucesión de particiones cuyos diámetros tiendan a cero también la cumple.

3. Cuando las particiones tienen diámetro infinitesimal, todas las sumas de Riemann están infinitamente próximas entre sí, independientemente de los puntos donde se evalúa la función.
4. Existe un número real  $\lambda$  (la integral) al que convergen las sumas de Riemann en el siguiente sentido: dado  $\varepsilon > 0$ , existe siempre alguna partición  $\mathcal{P}_\varepsilon$  tal que si  $\mathcal{P}$  es cualquier partición que contenga entre sus puntos de división a todos los puntos de división de  $\mathcal{P}_\varepsilon$ ,  $|\lambda - S| < \varepsilon$ , donde  $S$  es una suma de Riemann de la partición  $\mathcal{P}$ , para cualquier elección de los puntos  $\xi_{ij}$ .

<sup>109</sup>Es decir, la integral que se obtiene de esta manera tiene exactamente las mismas funciones integrables que la de Riemann y, además, para cada función integrable los valores de ambas integrales son el mismo.

## 4.8. Otras integrales diferentes de la de Riemann

### 4.8.1. Integral de Lebesgue

A principios del siglo XX Lebesgue propuso una manera alternativa de aproximar el área de los conjuntos  $\Omega(f)$ . La idea consiste, en palabras del propio Lebesgue, en hacer las particiones en el conjunto imagen de  $f$ , en lugar de hacerlas en el dominio. No entraremos en más detalles, pero sí indicaremos algunas de las novedades que aportó la integral de Lebesgue.

Se demuestra que todas las funciones integrables Riemann son también integrables Lebesgue, y con el mismo valor. Y que hay funciones no integrables en el sentido de Riemann pero sí en el de Lebesgue, entre las cuales está la del ejemplo 2.7, que no es integrable Riemann pero sí que tiene integral de Lebesgue (su valor es cero).

Aparte de servir para integrar más funciones (para medir más conjuntos, si se quiere) que la integral de Riemann, la de Lebesgue sirve también para integrar sobre conjuntos no acotados, de modo que engloba a las integrales impropias de Riemann, aunque sólo las de funciones positivas. También disfruta de cómodas propiedades de paso al límite, mucho mejores que las de la integral de Riemann. Por último, tiene importantes aplicaciones en la teoría de probabilidades.

Existen abundantes publicaciones de varios niveles que explican con detalle la integral de Lebesgue.

### 4.8.2. Integral de Kurzweil-Henstock

La integral de Kurzweil-Henstock, que en algunos textos se denomina integral de Riemann generalizada, es una ligera modificación de la integral de Riemann, introducida por J. Kurzweil en 1957 que permite integrar bastantes más funciones que la de Riemann, en particular muchas funciones no acotadas sin necesidad de pasos al límite como tuvimos que hacer en el apartado 2.5.

Para simplificar la exposición nos limitaremos a funciones de una variable.

Dada una función real definida sobre un intervalo  $[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , considérese una partición de  $[a, b]$ ,  $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  y un punto en cada subintervalo,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . De acuerdo con una de las caracterizaciones enunciadas en el apartado 4.7, para que la integral de  $f$  en el sentido de Riemann tenga el valor  $\lambda$  es necesario y suficiente que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathcal{P}, \forall \xi, \\ (\forall i, x_{i-1} - x_i < \delta \Rightarrow |\lambda - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)| \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Pues bien, si se permite que el  $\delta$  sea variable se obtiene la integral de Kurzweil:

**Definición 4.14** Sean  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función cualquiera (acotada o no). Se dice que  $f$  es **integrable en el sentido de Kurzweil-Henstock, con integral  $\lambda$** , cuando

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta : [a, b] \rightarrow (0, +\infty), \forall \mathcal{P}, \forall \xi, \\ (\forall i, x_i - x_{i-1} < \delta(\xi_i) \Rightarrow |\lambda - \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \xi)| \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Se define también la integral de Kurzweil-Henstock sobre todo tipo de intervalos, cerrados o no, acotados o no.

Es trivial observar que cualquier función integrable Riemann es también integrable Kurzweil-Henstock, y con el mismo valor para la integral. Y que es posible que haya funciones no integrables Riemann pero integrables en el sentido de Kurzweil-Henstock (de hecho, las hay: la función del ejemplo 2.7 es también integrable Kurzweil-Henstock).

#### Otras observaciones:

- La integral de Lebesgue es intermedia entre la de Riemann y la de Kurzweil-Henstock. Ambas coinciden para funciones positivas.
- La de Lebesgue (y por tanto la de Kurzweil-Henstock) tiene aplicaciones importantes en el campo de la probabilidad.
- Ambas pueden integrar algunas funciones no acotadas o sobre conjuntos no acotados.
- Ambas tienen buenas propiedades de paso al límite, pero la de Kurzweil-Henstock las tiene mejores que la de Lebesgue. La de Riemann en cambio tiene un comportamiento muy restrictivo en pasos al límite.
- La de Kurzweil-Henstock incluye a las integrales impropias de Riemann, mientras que la de Lebesgue no las incluye a todas.
- La integral de Kurzweil-Henstock permite la más amplia formulación de la regla de Barrow, sin imponer ninguna condición a la función derivada.

Un estudio detallado y comparado de las distintas teorías de integración, incluyendo las que aquí hemos visto y otras más, puede consultarse en [3] y en [6].

#### 4.8.3. ¿Hasta dónde puede ampliarse el concepto de integral?

Nuestras integrales las introdujimos para medir áreas de conjuntos planos, volúmenes de conjuntos tridimensionales, etc. Con lo que llevamos explicado en este curso, vemos que hay varias formas de dar una definición rigurosa de estos conceptos y que algunas de ellas, aunque aparentemente sean distintas, al final resulta que son equivalentes entre sí. Afortunadamente, todos los procedimientos que hemos descrito asignan el mismo número (área o volumen, según las dimensiones) a un mismo conjunto... en caso de que le asignen alguno. Los métodos de Riemann, de Lebesgue y de Kurzweil-Henstock integran cada vez más funciones, pero tampoco las integran todas.

**108.** ¿Por qué no llegar hasta el final y dotarnos de un concepto de integral que nos permita integrar todas las funciones, así como asignar una medida a cualquier subconjunto?

Pues bien, esta especie de ampliación total del concepto de integral no es posible en algunas dimensiones, ni siquiera limitándonos a conjuntos acotados y funciones acotadas.

Concretamente, en el caso del plano es posible asignar un *área* a cada subconjunto, en el sentido de que sea una función positiva y definida sobre todos sus subconjuntos,  $A : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, +\infty]$ , de modo que (a)  $A([0, 1] \times [0, 1]) = 1$ ; (b) para todo par de conjuntos disjuntos  $S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ,  $A(S \cup T) = A(S) + A(T)$ ; y (c) si podemos pasar desde  $S \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  a

$T \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  mediante giros y traslaciones, entonces  $A(S) = A(T)$  (<sup>110</sup>).

Algo similar ocurre en la recta real, puede definirse una *longitud*  $L$  para todos y cada uno de los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  y de modo que  $L([0, 1]) = 1$ ,  $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$  siempre que  $S \cap T = \emptyset$  y, por último,  $L(S) = L(T)$  siempre que  $T$  sea una traslación de  $S$ . Puede consultarse una construcción en [18], teorema 11.5 (<sup>111</sup>).

En cambio, no es posible hacer algo similar con los volúmenes en el espacio tridimensional, es decir, no existe ninguna función  $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$  de modo que  $V([0, 1]^3) = 1$ , que para todo par de conjuntos disjuntos  $S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ ,  $V(S \cup T) = V(S) + V(T)$  y que  $V(S) = V(T)$  siempre que podamos pasar de  $S$  a  $T$  mediante giros y traslaciones. Que este objetivo es inalcanzable lo demostró en 1924 la *paradoja de Banach-Tarski*, cuyo desarrollo supera ampliamente las posibilidades de este curso. Consultar, por ejemplo, [19] o [20].

---

<sup>110</sup>Pero no existe ninguna tal función área  $A : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, +\infty]$  si sustituimos la propiedad (b) por

$$(b') \quad A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A(S_i) \quad \text{siempre que los } S_i \text{ sean disjuntos dos a dos.}$$

<sup>111</sup>Igual que en el plano, tampoco existe una función longitud  $L$  definida sobre todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  si imponemos la condición de que la longitud de la unión de una cantidad numerable de conjuntos disjuntos sea igual a la suma de la serie de sus longitudes.

## 4.9. Notas adicionales

### 4.9.1. Otros órdenes de integración en el ejemplo 4.7

- Orden de integración  $(y, z, x)$ :

En primer lugar deducimos la equivalencia

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \min\{x, \sqrt{z-x^2}\} \end{array} \right.$$

(observar que en las desigualdades de la derecha no podemos prescindir ni de  $y \leq x$  ni de  $y \leq \sqrt{z-x^2}$ , ambas las necesitamos para demostrar la implicación hacia la izquierda).

Para calcular la integral hemos de descomponerla en una suma y para ello distinguir claramente los casos en que se alcanza el  $\min\{x, \sqrt{z-x^2}\}$  en cada una de sus dos posibilidades. Como  $x \leq \sqrt{z-x^2}$  equivale a  $2x^2 \leq z$  (gracias a que  $x \geq 0$ ), nuestra integral es igual a

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x^2} dz \int_0^{\sqrt{z-x^2}} dy + \int_0^1 dx \int_{2x^2}^2 dz \int_0^x dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La figura de la proyección de  $W$  sobre el plano  $XZ$  ayuda a comprender la descomposición en suma de dos integrales.

- Resto de los órdenes de integración:

Razonando del mismo modo se obtiene los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \min\{1, \sqrt{z}\} \\ 0 \leq y \leq \min\{x, \sqrt{z-x^2}\} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{2}} \\ y \leq x \leq \min\{1, \sqrt{z-y^2}\} \end{array} \right\}.$$

### 4.9.2. Demostración de que los cambios a coordenadas esféricas verifican las hipótesis del teorema del cambio de variable

Seguiremos el mismo planteamiento que en la demostración relativa a las coordenadas polares, página 134.

Nuestra función  $\mathbf{T}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $E$ .

La frontera del conjunto  $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  está formada por la unión de un rectángulo acotado (en el plano  $\rho = 0$ ) y cuatro "rectángulos" no acotados. Cada una de estas partes es la gráfica de una función continua de dos variables:  $\rho = 0, \varphi = 0, \varphi = \pi, \theta = 0, \theta = 2\pi$ .

El jacobiano es  $\det J\mathbf{T}(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \sin \varphi$ , según calculamos en la página 199, luego es no nulo en todos los puntos de  $E \setminus N$ , donde  $N$  es ahora la parte de  $E$  que está en la frontera de  $[0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ .

Queda por demostrar que sobre  $E \setminus N$ , la aplicación  $\mathbf{T}$  es inyectiva, para lo que tomamos dos puntos de  $E \setminus N$ ,  $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$  y probamos que si tienen la misma imagen entonces ambos puntos son el mismo.

Como tienen la misma imagen,

$$\begin{aligned} \rho_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_1 &= \rho_2 \sin \varphi_2 \cos \theta_2, \\ \rho_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 &= \rho_2 \sin \varphi_2 \sin \theta_2, \\ \rho_1 \cos \varphi_1 &= \rho_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las tres igualdades y sumándolas obtenemos  $\rho_1^2 = \rho_2^2$ , y por tanto  $\rho_1 = \rho_2 > 0$ , gracias a que sabemos por una parte que  $\rho_i \geq 0$  (por las restricciones generales sobre las coordenadas esféricas) y por otra que  $\rho_i \neq 0$  (porque los puntos no están en  $N$ ).

A continuación simplificamos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en la tercera igualdad, con lo que  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ . De aquí se sigue que  $\varphi_1 = \varphi_2$ , gracias a que  $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ .

Entonces  $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2 > 0$ , luego podemos simplificarlo de las dos primeras igualdades (al mismo tiempo que cancelamos  $\rho_1$  y  $\rho_2$ ), lo que nos da las igualdades  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ ,  $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ , y de aquí deducimos que  $\theta_1 = \theta_2$ , puesto que ambos están en el intervalo abierto  $(0, 2\pi)$ .

### 4.9.3. Principio de Cavalieri generalizado

Supóngase ahora que un conjunto acotado  $W \subset \mathbb{R}^3$  puede descomponerse en láminas infinitamente próximas pero disjuntas dos a dos (o con intersección que tenga volumen nulo), en otras palabras, que se tiene una colección de superficies dependiente de un parámetro,  $\{\Sigma_t : t \in [a, b]\}$  que “barren” todo  $W$ . Se pretende descomponer el volumen de  $W$  en la suma infinita de las áreas de todas las  $\Sigma_t$ , de manera similar a como hicimos en el teorema de Fubini o en el Principio de Cavalieri.

**Teorema 4.15 (Principio de Cavalieri Generalizado)** Sean  $W \subset \mathbb{R}^3$  una región simple,  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, y  $h : W \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  cuyo gradiente no se anula en ningún punto de  $W$ . Supóngase que los conjuntos  $\Sigma_t = \{(x, y, z) \in W : h(x, y, z) = t\}$  son superficies para todos los valores de  $t$  pertenecientes a un cierto intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Y además que  $W = \cup_{t \in [a, b]} \Sigma_t$ , con la condición adicional de que siempre que  $s, t \in [a, b]$  sean índices distintos,  $\Sigma_t \cap \Sigma_s$  es o vacío o unión finita de puntos y curvas simples. Entonces

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left( \iint_{\Sigma_t} \frac{f(x, y, z)}{\|\nabla h(x, y, z)\|} \, d\sigma \right) dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Una demostración puede consultarse en [13], teorema 108.

Cambiando la función  $h$  a nuestra conveniencia, introducimos diferentes haces de superficies (planos, esferas, cilindros, conos), útiles en algunos contextos, y el anterior teorema proporciona fórmulas variadas, algunas de las cuales ya las hemos obtenido con anterioridad de otras maneras:

**Ejemplo 4.16 (del PCG para cualquier haz de planos paralelos: Principio de Cavalieri)** Si  $h$  es restricción de una función lineal,  $\|\nabla h\|$  es constante (entonces siempre puede elegirse  $h$  de modo que esta constante sea igual a 1) y en este caso  $\Sigma_t$  corresponde a la intersección de  $W$  con cada uno de los planos de un haz. Entonces

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left( \iint_{\Sigma_t} f(x, y, z) \, d\sigma \right) dt.$$

Y para el volumen de  $W$  se obtiene otra vez un resultado equivalente al Principio de Cavalieri (corolario 4.5):

$$V(W) = \int_a^b A(\Sigma_t) \, dt. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4.17 (del PCG para esferas concéntricas)** Tómese  $h(x, y, z) = \|(x, y, z)\|$ . Entonces  $\|\nabla h\|$  vale constantemente 1. Además,  $\Sigma_t = \emptyset$  si  $t < 0$  y  $\Sigma_t$  es la intersección de  $W$  con la esfera de centro el origen y radio  $t$ , si  $t \geq 0$ . Por tanto, eligiendo convenientemente el intervalo  $[a, b]$  <sup>(112)</sup>,

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left( \iint_{\Sigma_t} f(x, y, z) \, d\sigma \right) dt.$$

Y para el volumen de  $W$  se obtiene una fórmula que es similar a la del Principio de Cavalieri, pero ahora cortando con esferas concéntricas:

$$V(W) = \int_a^b A(\Sigma_t) \, dt. \quad \blacksquare$$

<sup>112</sup>Habría que tomar  $a$  y  $b$  igual al mínimo y al máximo (respectivamente) de todos los radios vectores de puntos de  $W$ .

**Ejemplo 4.18 (del PCG para planos perpendiculares al eje  $X$ : volúmenes de revolución al girar en torno al eje  $X$ )** Considérese una función  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $\mathcal{C}^1$  y positiva, y llamemos  $\Omega(g)$  al conjunto de ordenadas de  $g$  (ver definición 2.1), es decir,

$$\Omega(f) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\},$$

y  $W$  al conjunto engendrado por  $\Omega(f)$  al girar alrededor del eje  $X$ , es decir,

$$W = \{(x, y, z) : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq g(x)^2\}.$$

Aplicando el Principio de Cavalieri, tras cortar con los planos  $x = t$ ,  $a \leq t \leq b$ , y teniendo en cuenta que en este caso  $A(\Sigma_t) = \pi g(t)^2$ ,

$$V(W) = \pi \int_a^b g(t)^2 dt. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4.19 (del PCG para un haz de cilindros: volúmenes de revolución al girar en torno al eje  $Y$ )**

Por un procedimiento parecido se obtiene la fórmula del volumen engendrado al girar en torno al eje  $Y$  el mismo conjunto (siempre que la gráfica de la función  $g$  esté en el semiplano vertical positivo, es decir, siempre que  $a \geq 0$ ):

$$W = \{(x, y, z) : (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \in [a, b], 0 \leq y \leq g([x^2 + z^2]^{\frac{1}{2}})\}.$$

Elegiendo  $h(x, y, z) = [x^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$ , los conjuntos  $\Sigma_t$  son cilindros de área  $2\pi t g(t)$ . Por tanto, el volumen buscado es:

$$V(W) = 2\pi \int_a^b x g(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 4.20 (del PCG para un haz de conos: Volúmenes de revolución al girar en torno al eje polar)**

Considérese ahora una función continua y positiva  $r : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  y llamemos  $D$  al conjunto

$$D = \{(u \cos \theta, u \sin \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq u \leq r(\theta)\}.$$

El **sólido engendrado por  $D$  al girar en torno al eje polar** (el **eje polar** es la recta que contiene al conjunto  $\theta = 0$ ) es el conjunto

$$W = \{(u \cos \theta, u \sin \theta \cos \varphi, u \sin \theta \sin \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq u \leq r(\theta), -\pi \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Elegimos a  $\theta$  como parámetro, de modo que ahora  $\Sigma_\theta$  es un cono: para cada  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

$$\Sigma_\theta = \left\{ (x, y, z) \in W : \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos \theta \right\},$$

es decir,  $h(x, y, z) = \arccos \left( x / (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right)$ , luego  $\|\nabla h(x, y, z)\| = 1/u$ , y

$$\iint_{\Sigma_\theta} \frac{1}{\|\nabla h\|} d\sigma = \iint_{\Sigma_\theta} u d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\theta)} u^2 \sin \theta du = \frac{2\pi}{3} r(\theta)^3 \sin \theta,$$

luego

$$V(W) = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} r(\theta)^3 \sin \theta d\theta.$$

A esta misma fórmula se llegaría a través de un cambio de variable  $(u, \theta, \varphi) \rightsquigarrow (x, y, z)$ , que no es más que una variante del cambio a coordenadas esféricas. \blacksquare

**4.9.4. Demostración del lema 4.11**

Sea  $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \partial W \setminus (\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta) \subset \Sigma_0$ , y  $\mathbf{n}$  un vector normal a  $\partial W$  en  $\mathbf{p}$ . Queremos probar que es nula la tercera coordenada de  $\mathbf{n}$ ,  $n_z = 0$  (de esta manera, la tercera coordenada de la recta normal en  $\mathbf{p}$  será constantemente igual a  $z_0$ ).

Obsérvese que  $(x_0, y_0) \in \partial D$  y que  $\alpha(x_0, y_0) < z_0 < \beta(x_0, y_0)$ , luego todo el segmento que va desde el punto  $(x_0, y_0, \alpha(x_0, y_0))$  hasta el punto  $(x_0, y_0, \beta(x_0, y_0))$  está contenido en  $\partial W$  y por tanto el vector diferencia,  $(0, 0, \beta(x_0, y_0) - \alpha(x_0, y_0))$  es ortogonal a  $\mathbf{n}$ . De aquí deducimos que necesariamente  $n_z = 0$  puesto que el producto escalar es  $n_z[\beta(x_0, y_0) - \alpha(x_0, y_0)]$  y  $\mathbf{p} \notin \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta$  implica que  $\alpha(x_0, y_0) < \beta(x_0, y_0)$ .

**4.9.5. Otras aplicaciones del teorema de la Divergencia**

SIGNIFICADO FÍSICO DE LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

El siguiente cálculo justifica que digamos que la divergencia de un campo vectorial en un punto es la tasa del flujo neto hacia el exterior, en el punto, por unidad de volumen:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_\varepsilon)} \iint_{\partial B_\varepsilon^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_\varepsilon)} V(B_\varepsilon) \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{p}_\varepsilon) = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{p}),$$

donde hemos aplicado el teorema del valor medio para integrales triples para utilizar la existencia de un cierto  $\mathbf{p}_\varepsilon \in B_\varepsilon$  en el que se cumple la segunda igualdad.

El razonamiento es muy similar al que sugerimos en el apartado 2.6.5, al hablar de la teorema de la divergencia en el plano. Ver, por ejemplo, [10], página 839, o [11], página 548.

OBTENCIÓN DE LA DIVERGENCIA EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Ver el comienzo de 3.5.6 para una explicación del significado de las derivadas parciales de las componentes de un campo vectorial en diferentes sistemas de coordenadas.

Argumentando de modo análogo a como se hizo en el apartado 3.5.6 y utilizando el apartado anterior (significado físico de la divergencia de un campo vectorial), se obtiene la divergencia en coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi F_\varphi) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

Para más detalles, consultar, por ejemplo, [11], final del apartado 8.4.

IDENTIDADES DE GREEN

Sea  $W \subset \mathbb{R}^3$  una región sobre la que es válido el teorema de la divergencia, y sean  $f, g : W \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones de clase  $\mathcal{C}^2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial W^+} f \nabla g \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_W (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \\ \iint_{\partial W^+} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_W (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f). \end{aligned}$$

Ambas igualdades son consecuencia inmediata del teorema de la divergencia. En cierto modo pueden considerarse como las equivalentes a la fórmula de integración por partes, para varias variables.



Para trasladar al espacio tridimensional un concepto análogo al de un ángulo plano, se sustituye la región plana limitada por dos semirrectas que se unen en el vértice del ángulo por una región limitada en  $\mathbb{R}^3$  por un cono (con un concepto bastante amplio de 'cono', como en el apartado 4.6.2).

La medida, que se llama ángulo sólido, se determina proyectando la región sobre la superficie esférica unidad, del mismo modo que la medida de un ángulo plano es la medida de la longitud del arco de la circunferencia unidad comprendido entre sus lados:

**Definición 4.21** Si  $\Sigma$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3$  que no pasa por el origen y tal que a cada semirrecta que parte del origen la corta en no más de un punto, el **ángulo sólido** determinado por  $\Sigma$  respecto al origen es el área de la proyección radial (es decir, proyección siguiendo las rectas que contienen a los radios) de  $\Sigma$  sobre la esfera unidad.

El teorema de la divergencia proporciona una fórmula para calcular el ángulo sólido determinado por  $\Sigma$  que se aplica sin salir de  $\Sigma$ , no hace falta medir en la proyección sobre la esfera.

**Teorema 4.22** Sea  $\Sigma$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  que no pasa por el origen y tal que a cada semirrecta que parte del origen la corta en no más de un punto. Entonces el ángulo sólido que determina  $\Sigma$  respecto al origen es

$$\iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{p})}{\|\mathbf{p}\|^3} dS,$$

donde  $\mathbf{N}(\mathbf{p})$  es la normal a  $\Sigma$  en el punto  $\mathbf{p}$  que "se aleja del origen".

DEMOSTRACIÓN: Ver [2], problema 10.5.10.



## 5. Otras dimensiones: integración de formas diferenciales sobre cadenas

## 5.1. Introducción

En los bloques anteriores hemos ido exponiendo definiciones y propiedades de las integrales sobre objetos de una, dos o tres variables que estaban sumergidos en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ . Algunas de esas definiciones y propiedades son fácilmente generalizables a más variables, piénsese, por ejemplo, en la definición de integral de Riemann para una función de dos o de tres variables, que no hay dificultad en extender a cualquier número finito de variables. Para otros conceptos, en cambio, resulta más problemático aventurar cómo se van a tratar con más variables, como por ejemplo las integrales sobre conjuntos análogos a las superficies cuando estemos en un ambiente de más de tres dimensiones.

En este capítulo daremos las herramientas matemáticas imprescindibles para definir integrales sobre objetos  $k$ -dimensionales que estén sumergidos en un espacio  $n$ -dimensional, con  $1 \leq k \leq n$ . Estas definiciones recuperarán las dadas para integrales sobre caminos (cuando  $k = 1$ ) o sobre parametrizaciones de superficies (cuando  $k = 2$  y  $n = 3$ ), así como las integrales de una, dos o tres variables (cuando  $k = n = 1, 2, 3$ , respectivamente).

El formalismo que desarrollaremos nos permitirá, además de generalizar a dimensiones cualesquiera el lenguaje, los conceptos, las fórmulas y los resultados más importantes que se han obtenido hasta ahora en una, dos o tres variables, dar una forma unificada a los operadores gradiente, divergencia y rotacional, así como resumir en un solo resultado los teoremas más importantes del cálculo vectorial (el de Riemann-Green, el de Stokes, el de la divergencia y el fundamental del cálculo generalizado).

**109.** El objetivo central de este bloque es dar las definiciones necesarias para poder enunciar el *Teorema General de Stokes*, que engloba en un solo resultado todos los teoremas clásicos del cálculo vectorial.

Usaremos integrales múltiples de más de tres variables, sobre las que no diremos nada nuevo porque no existen diferencias significativas con las integrales de dos o de tres variables, ni en cuanto a definiciones ni en lo relativo a sus propiedades.

## 5.2. Álgebra multilineal

Necesitamos el lenguaje de la parte del álgebra lineal que se denomina *álgebra exterior*. En línea con el espíritu del resto de la asignatura, mantendremos el nivel más elemental posible, limitándonos a dar las definiciones imprescindibles para nuestro objetivo, sin aspirar a una teoría general de tensores.

### 5.2.1. El espacio $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ , de tensores alternados de orden $k$ sobre $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 5.1** Llamaremos *diferencial de  $x_i$ ,  $dx_i$* , a la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada ( $i = 1, \dots, n$ ) definida sobre  $\mathbb{R}^n$ ,

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad dx_i(\mathbf{v}) := v_i, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos el *producto exterior de diferenciales* de la siguiente manera:

- Para cada par de subíndices  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  llamaremos

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}.$$

- Para cada terna de subíndices  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  llamaremos

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix}.$$

- De modo análogo se define el producto de un número finito de  $dx_i$ ,  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ .

**110.** La notación  $dx_i$  adquiere pleno sentido (diferencial de la función  $x_i$ ) a través de la siguiente consideración: La proyección  $\mathbf{x} \rightsquigarrow x_i$ , que siguiendo las notaciones habituales para funciones llamamos simplemente  $x_i$ , es lineal, luego es diferenciable y su diferencial  $dx_i$  es en todos los puntos la propia proyección.

Obsérvese que en  $\mathbb{R}^2$  el área del paralelogramo determinado por los vectores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  es  $|(dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$  (cf. la justificación del teorema 2.31). Por motivos similares, en  $\mathbb{R}^3$  el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  (es decir, el volumen del conjunto de combinaciones lineales de estos tres vectores con todos los coeficientes comprendidos entre 0 y 1) es  $|(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$ . Este es el motivo de que introduzcamos la siguiente definición, válida para cualquier dimensión.

**Definición 5.2** Se llama *elemento de volumen en  $\mathbb{R}^n$ ,  $dV_n$* , a la aplicación  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

De esta forma, para cada dimensión  $n = 1, 2, 3$  los productos de las  $n$  proyecciones  $dx_i$  están relacionados con las integrales simples, dobles, triples. Y también las combinaciones lineales de productos de menos de  $n$  diferenciales nos han salido ya en anteriores capítulos.

Así, bajo la acción del campo vectorial constante  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , el trabajo desarrollado por una partícula al ir en línea recta desde el punto  $\mathbf{p}$  hasta el punto  $\mathbf{q}$ , puede escribirse como el resultado de una combinación de aplicaciones lineales sobre el vector  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ ,

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3)(\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

Y el flujo del mismo campo vectorial al atravesar la superficie del paralelogramo determinado por los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  es

$$\pm \mathbf{F} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \pm (F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2)(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

(el signo depende del sentido en el que se atravesase la superficie del paralelogramo).

**Definición 5.3** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , las combinaciones lineales de las funciones  $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$  forman el espacio vectorial de los **tensores alternados  $n$ -dimensionales de orden  $k$** ,  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ . Definimos además  $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ .

De las propiedades de los determinantes se sigue inmediatamente que  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$  siempre que  $k > n$ .

**111.** Nos interesa mucho analizar con detalle algunos casos particulares, que nos aproximarán a la dimensión del espacio vectorial  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  y más adelante nos permitirán recuperar los campos vectoriales o escalares que integrábamos en capítulos anteriores.

Comenzamos con tensores alternados en dimensión 3:

**Caso  $n = 3$ ,  $k = 1$  (dimensión 3 y orden 1).** Si  $n = 3$ , cada uno de los elementos generadores de  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\{dx, dy, dz\}$ , puede expresarse como un vector básico de tres coordenadas, utilizando su expresión matricial como aplicación lineal. Por ejemplo,

$$dy(\mathbf{v}) = (0, 1, 0) \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Luego cada elemento de  $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$  se corresponde de modo biunívoco con un elemento de  $\{(\lambda, \mu, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$ .

**Caso  $n = 3$ ,  $k = 2$  (dimensión 3 y orden 2).** Siguiendo con  $n = 3$ , el resultado análogo al anterior para  $k = 2$  es la correspondencia de los elementos de  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  con matrices cuadradas  $3 \times 3$  **alternadas** (matrices  $M$  para las que su traspuesta es igual a su opuesta,  $M^t = -M$ ):

$$(dx \wedge dy)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, u_2, u_3) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

y lo mismo con  $dy \wedge dz$ ,  $dx \wedge dz$ . Luego cada elemento de  $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$  se corresponde biunívocamente con uno del conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\},$$

que es también un espacio vectorial de dimensión 3, igual que ocurría cuando  $k = 1$ ,  $n = 3$ .

Más en general, el conjunto  $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$  es una base del espacio vectorial  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  (no demostraremos esta afirmación, ver [15], Teorema 4-5).

Por consiguiente, la dimensión del espacio de tensores alternados  $n$ -dimensionales de orden  $k$  es el número combinatorio  $\binom{n}{k}$ ,  $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$ . En consecuencia, el espacio de tensores alternados  $n$ -dimensionales de orden  $k$  puede identificarse, en cuanto espacio vectorial, con  $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ .

Bajo este isomorfismo, que indicaremos mediante  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ , cada tensor alternado se corresponde biunívocamente con el conjunto ordenado de sus coeficientes en función de la base anterior. En  $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  usaremos siempre la base de los vectores  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ . Salvo indicación expresa en sentido contrario, en los casos  $k = 1$  o  $k = n - 1$  supondremos siempre que el isomorfismo es el que asocia las bases canónicas de ambos espacios del siguiente modo:

- si  $k = 1 \neq n - 1$ ,  $\mathbf{e}_i \rightsquigarrow dx_i$
- si  $k = n - 1$ ,  $\mathbf{e}_i \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$ .

Más adelante veremos el motivo para estas correspondencias.

### 5.2.2. Producto exterior

Definidos los productos exteriores  $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ , extendemos por linealidad la misma operación a tensores alternados cualesquiera:

**Definición 5.4** El **producto exterior** de un tensor alternado  $\omega$  de orden  $k$  por un tensor alternado  $\eta$  de orden  $\ell$  (los dos  $n$ -dimensionales) es el tensor alternado de orden  $k + \ell$  definido por

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \left( \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge \left( \sum \eta_{j_1 \dots j_\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \right) = \\ &= \sum \omega_{i_1 \dots i_k} \eta_{j_1 \dots j_\ell} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}. \end{aligned}$$

**Teorema 5.5** Si  $\omega$  es un tensor de orden  $k$ ,  $\eta$  es un tensor de orden  $\ell$ ,  $\delta$  es un tensor de orden  $h$ , y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

1.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \delta = \omega \wedge (\eta \wedge \delta)$
2.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$
3.  $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \delta = \lambda(\omega \wedge \delta) + \mu(\eta \wedge \delta)$  (en este caso suponemos  $k = \ell$ )
4. Si  $k = 0$ ,  $\omega \wedge \eta = \omega\eta$

DEMOSTRACIÓN: Ver [15], Teorema 4-4.

Haciendo uso de la identificación  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  como se describió más arriba, y escribiendo las coordenadas en el orden adecuado para cada caso, el producto exterior de tensores incluye como casos particulares distintas operaciones de “multiplicación” que hemos manejado a lo largo del curso:

1. Para cualquier  $n$ , si  $k = 0$  y  $\ell = 0, n$ , entonces el producto exterior es la multiplicación de números reales.
2. Para  $n > 1$ , si  $k = 0$  y  $\ell = 1, n - 1$ , entonces el producto exterior es la multiplicación de un escalar por un vector.
3. Para  $n > 1$ , si  $k = 1$  y  $\ell = n - 1$ , entonces el producto exterior es el producto escalar de vectores (tener en cuenta los isomorfismos descritos al final del apartado 5.2.1).
4. Para  $n = 3$ , si  $k = 1$  y  $\ell = 1$ , entonces el producto exterior es el producto vectorial.

Una generalización natural del producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$  corresponde a una operación que en general no es binaria, ver apartado 5.6.1.



### 5.3. Cálculo diferencial

En este apartado introducimos los entes (formas diferenciales) que jugarán el papel de los campos escalares o vectoriales en los capítulos anteriores, y la operación (diferencial exterior) que generalizará las tres que han aparecido en los teoremas clásicos: gradiente, rotacional y divergencia.

**Definición 5.6** Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto <sup>(113)</sup>, una ***k*-forma diferencial sobre  $U$**  es una aplicación  $\omega : U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ . El conjunto de todas las *k*-formas sobre  $U$  lo denotaremos mediante  $\Lambda^k(U)$ .

Utilizando las bases de cada uno de los espacios de tensores alternados, las formas diferenciales pueden escribirse como una combinación lineal

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde todas las  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  son funciones escalares sobre  $U$ , que supondremos siempre que son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

Como funciones que toman valores en un espacio vectorial, las *k*-formas pueden sumarse y multiplicarse por escalares (punto a punto).

Utilizaremos el isomorfismo de espacios vectoriales entre  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  y  $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  para identificar una *k*-forma  $\omega$  con el vector formado por sus funciones componentes  $\omega_{i_1 \dots i_k}$ .

**112.** Así, para  $n = 3$ , tanto  $\Lambda^1(U)$  como  $\Lambda^2(U)$  pueden identificarse con el conjunto de los campos vectoriales sobre  $U$ , mientras que  $\Lambda^0(U)$  y  $\Lambda^3(U)$  pueden identificarse con el conjunto de los campos escalares sobre  $U$ .

Dado un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , la aplicación que a cada función de clase  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $U$  asocia su diferencial,

$$\omega \rightsquigarrow d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} dx_n,$$

podemos escribirla con el lenguaje introducido en este capítulo como

$$\Lambda^0(U) \xrightarrow{d} \Lambda^1(U).$$

Pues bien, la diferenciación exterior generaliza esta aplicación del siguiente modo:

**Definición 5.7** La ***diferencial exterior*** de una *k*-forma  $\omega$  sobre  $U$  es la  $(k + 1)$ -forma sobre  $U$  definida por

$$d \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

**Teorema 5.8** Si  $\omega$  es una *k*-forma y  $\eta$  es una  $\ell$ -forma

<sup>113</sup>Definición 2.51.

- $d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda d(\omega) + \mu d(\eta)$ , donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y suponemos  $k = \ell$ .
- $d^2(\omega) = 0$ .
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k\ell}\omega \wedge d\eta$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [15], Teorema 4-10.

De manera similar a lo que ocurre con el producto exterior, la diferenciación exterior incluye también varias operaciones conocidas en el cálculo vectorial, a través de la identificación  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  (ver lo dicho sobre las bases canónicas al final del apartado 5.2.1). En efecto:

1. Si  $k = 0$ , entonces  $d$  es el operador *gradiente*:  $d\lambda \equiv \nabla\lambda = \mathbf{grad} \lambda$ .

**113.** Con el símbolo  $\equiv$  indicamos la identificación asociada a los isomorfismos  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  descritos en el apartado 5.2.1.

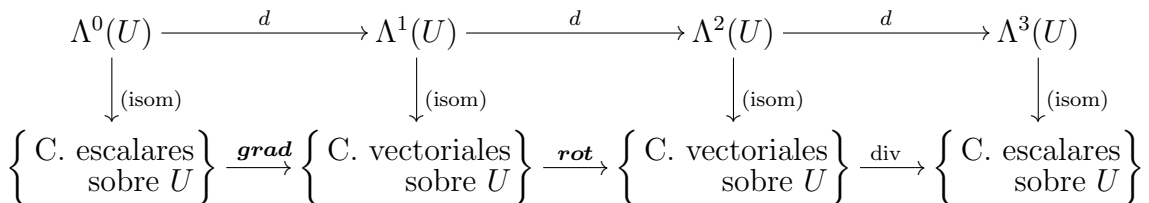
2. Si  $k = n - 1$  (suponiendo previamente que  $n > 1$ ), entonces  $d$  es el operador *divergencia*:

$$d \left( \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \lambda_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \equiv \text{div}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

3. Si  $n = 3$  y  $k = 1$ , entonces  $d$  es el operador *rotacional*:

$$d(\lambda dx + \mu dy + \nu dz) \equiv \mathbf{rot}(\lambda, \mu, \nu).$$

4. De acuerdo con los puntos anteriores y con las identificaciones (o isomorfismos) comentadas en las observaciones 112 y 113, en el caso  $n = 3$  se tiene el siguiente diagrama ilustrativo




---

Figura 5.1: Diagrama para el operador  $d$  y sus correspondencias con los operadores clásicos

5. El caso  $n = 2$  y  $k = 1$  admite una interpretación excepcional debido a que  $n - 1 = 1$  y por consiguiente el isomorfismo entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$  puede hacerse de dos formas distintas de acuerdo con lo descrito al final del apartado 5.2.1. Si se toma la correspondencia

definida por  $\mathbf{e}_i \rightsquigarrow dx_i$ , entonces  $d$  está relacionado con la forma vectorial de la fórmula de Riemann-Green (ver el teorema 2.43):

$$d(\lambda dx + \mu dy) = \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) dx \wedge dy \equiv \mathbf{rot}(\lambda, \mu, 0) \cdot \mathbf{k}.$$

Para la otra correspondencia (tomando  $k$  como  $n - 1$ ),  $d$  es el operador divergencia en dos dimensiones, como se explicó más arriba.

Utilizando estas “traducciones” y las del final del apartado 5.2.2, algunas de las fórmulas del análisis vectorial son casos especiales de propiedades del producto exterior y la diferenciación exterior. Por ejemplo, dados campos escalares  $f$  y  $g$ , y campos vectoriales  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  (todos ellos indefinidamente diferenciables sobre un abierto de  $\mathbb{R}^3$ ), las igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \\ \mathbf{rot}(f\mathbf{F}) &= f \mathbf{rot} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \\ \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{G} \\ \operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{F} &= 0 \\ \mathbf{rot} \nabla f &= 0 \\ \operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) &= 0 \end{aligned}$$

son todas ellas corolarios del teorema 5.8.

En el apartado 5.6.2 damos una interpretación de los campos conservativos trasladada a las formas diferenciales.

## 5.4. Cálculo integral

Considérense un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y una  $k$ -forma  $\omega$  sobre  $U$  (donde  $0 \leq k \leq n$ , y  $1 \leq n$ ). En primer lugar daremos para cada par de valores de  $k$  y  $n$  una definición de integral de  $\omega$  sobre “parametrizaciones” dependientes de  $k$  parámetros y con imágenes en  $U$ . A continuación reinterpretaremos en estos términos y para  $n \leq 3$  las integrales de los capítulos anteriores sobre ciertas clases de subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  (curvas simples orientadas, superficies orientadas, regiones simples tridimensionales, ...). Una generalización genuina de las integrales sobre curvas y sobre superficies en  $\mathbb{R}^3$  a objetos de cualquier dimensión contenidos en  $\mathbb{R}^n$  se obtiene a través de las *variedades diferenciables*, cuyo estudio queda fuera de los objetivos de este curso.

### 5.4.1. Definición de cadena y de integral sobre una cadena

Sean  $k, n$  dos números enteros, con  $1 \leq n$  y  $0 \leq k \leq n$ . El caso  $k = 0$  requerirá un tratamiento algo especial; convendremos en que el intervalo  $[0, 1]$  elevado a cero es igual al conjunto formado solamente por el cero,  $[0, 1]^0 = \{0\}$ .

**Definición 5.9** Se llama **cubo  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$**  a una aplicación del tipo  $\mathbf{c} : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que en los casos en que  $k > 0$  supondremos siempre de clase  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Definición 5.10** Si  $\omega \in \Lambda^k(U)$  es una  $k$ -forma definida sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  que contenga a la imagen de un cubo  $\mathbf{c}$ , se define la **integral de la  $k$ -forma  $\omega$  sobre  $\mathbf{c}$**  mediante una integral de Riemann  $k$ -dimensional,

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \int \cdots \int_{[0,1]^k} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_k}(\mathbf{c}(u_1, \dots, u_k)) \frac{\partial(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(u_1, \dots, u_k) \right) du_1 \dots du_k$$

siempre que  $k > 0$ .

En caso de que  $k = 0$ , resulta que  $\omega$  es un campo escalar sobre  $U$ , y el cubo puede identificarse con un punto  $\mathbf{c}(0) \in U$ . Entonces se define la **integral de la 0-forma  $\omega$  sobre  $\mathbf{c}$**  como la evaluación del campo en el punto:

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \omega(\mathbf{c}(0)).$$

Se comprueba de forma rutinaria que esta definición contiene a las definiciones de integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria o sobre la parametrización de una superficie (y es compatible con el teorema del cambio de variable para integrales dobles y triples).

Dados dos cubos  $k$ -dimensionales en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$ , considérese su **suma formal** o **encañamiento**,  $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ , operación que no definiremos rigurosamente y de la que a los efectos de curso bastará con saber que dota a las sumas cubos de estructura de grupo abeliano: es asociativa y conmutativa, tiene elemento neutro y cada cubo tiene un opuesto.

**114.** Un cubo es una función, pero la suma formal de dos cubos *no es* su suma en el sentido habitual de suma de dos funciones, se parece más a la suma de caminos.

Si  $\mathbf{c}$  es un cubo cualquiera, convendremos en escribir también  $(+1)\mathbf{c}$  en lugar de  $\mathbf{c}$ , y  $(-1)\mathbf{c}$  para el opuesto de  $\mathbf{c}$  para la operación de sumar.

**Definición 5.11** Una **cadena  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$** ,  $c$ , es una suma formal de cubos  $k$ -dimensionales en  $\mathbb{R}^n$ :  $c = \mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_m$ . La **integral de una  $k$ -forma sobre una cadena  $k$ -dimensional** es la suma de las integrales sobre cada uno de los cubos que forman la cadena:

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_m} \omega = \int_{\mathbf{c}_1} \omega + \cdots + \int_{\mathbf{c}_m} \omega$$

**Definición 5.12** Si  $c = \mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_m$  es una cadena  $k$ -dimensional (con  $k > 0$ ), el **borde de  $c$ ,  $\partial c$** , es la cadena  $(k - 1)$ -dimensional definida por la suma

$$\partial c = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \alpha = 0, 1 \\ 1 \leq j \leq k}} (-1)^{j+\alpha} \mathbf{c}_i^{(j,\alpha)},$$

donde en caso de que  $k > 1$ ,  $\mathbf{c}_i^{(j,\alpha)}$  es la aplicación

$$\begin{aligned} [0, 1]^{k-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u_1, \dots, u_{k-1}) &\longmapsto \mathbf{c}_i(u_1, \dots, u_{j-1}, \alpha, u_j, \dots, u_{k-1}), \end{aligned}$$

y en el caso de que  $k = 1$ ,  $\mathbf{c}_i^{(1,\alpha)}(0) = \mathbf{c}_i(\alpha)$ .

### 5.4.2. Los casos de dimensión menor o igual que 3

Vamos a ir usando las definiciones 5.10 y 5.11 en diferentes contextos dimensionales y recuperando como integrales sobre cubos o sobre cadenas las distintas integrales que hemos introducido a lo largo del curso, para  $n = 1, 2, 3$  y  $1 \leq k \leq n$ . Al considerar integrales sobre un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y no sobre una parametrización concreta que describa al subconjunto (como se hizo al integrar sobre cadenas), el recinto de integración aparecerá dotado de una orientación.

Supongamos para empezar que el espacio ambiente es tridimensional, es decir, que  $n = 3$ .

- Si  $k = 1$ , entonces  $\omega = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$ , y tomamos como recinto sobre el cual realizaremos la integración, a una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada,  $C^+$ , donde  $C$  esté contenida en el dominio de  $\omega$ . Entonces tomando una trayectoria  $\mathbf{c}$  que parametrice a  $C^+$  (lo que implica en particular que sea compatible con su orientación), es inmediato comprobar que

$$\int_{\mathbf{c}} \omega = \int_{C^+} (\lambda, \mu, \nu) \cdot d\mathbf{s}.$$

Más en general, la misma igualdad es válida si tomamos como recinto de integración a cualquier unión finita de curvas simples orientadas o curvas cerradas simples orientadas que no se corten entre sí.

Los isomorfismos descritos en el apartado 5.2.1 nos permiten ahora introducir el siguiente concepto:

**Definición 5.13** Si  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una trayectoria de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y con derivada no nula en todos los puntos, que define una curva simple o una curva cerrada simple,  $C$ , su **elemento de longitud  $ds$**  es por definición la 1-forma que corresponde (tomando  $n = 3$ ,  $k = 1$ ) al vector tangente unitario  $\mathbf{c}'/\|\mathbf{c}'\|$ : si  $(T_x, T_y, T_z)$  es un vector tangente unitario y continuo,

$$d\mathbf{s} = T_x dx + T_y dy + T_z dz.$$

**115.** Obsérvese que a pesar de la notación,  $d\mathbf{s}$  no es necesariamente la diferencial de una 0-forma.

La longitud de la curva  $C$  coincide por tanto con la integral sobre  $C^+$  de su elemento de longitud (orientando  $C$  de acuerdo con la misma tangente).

- Si  $k = 2$ , entonces  $\omega = \lambda dy \wedge dz + \mu dz \wedge dx + \nu dx \wedge dy$ . Ahora elegiremos como recinto de integración una superficie,  $\Sigma^+$ , dotada de la orientación asociada a una parametrización  $\Phi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que sea inyectiva y regular sobre todo  $[0, 1]^2$ ; el caso más simple lo constituye una superficie dada en forma explícita sobre  $[0, 1]^2$  y orientada positivamente. Entonces

$$\int_{\Phi} \omega = \iint_{\Sigma^+} (\lambda, \mu, \nu) \cdot d\mathbf{S}.$$

Utilizando ahora el isomorfismo introducido en el apartado 5.2.1 para  $n = 3$  y  $k = 2$ ,

**Definición 5.14** Si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie dotada de una parametrización  $\Phi : D \rightarrow \Sigma$  biyectiva, de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y suave en todos los puntos, la 2-forma que corresponde a la normal unitaria  $\frac{\mathbf{n}_\Phi}{\|\mathbf{n}_\Phi\|} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) / \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|$  es el **elemento de superficie  $d\mathbf{S}$** . En otras palabras, si  $(N_x, N_y, N_z)$  es un vector normal unitario continuo,

$$d\mathbf{S} = N_x dy \wedge dz + N_y dz \wedge dx + N_z dx \wedge dy.$$

**116.** Obsérvese que a pesar de la notación,  $d\mathbf{S}$  no es, en general, la diferencial de ninguna 1-forma.

Entonces el área de  $\Sigma$  es igual a la integral sobre  $\Sigma^+$  de su elemento de superficie (al tomar sobre  $\Sigma$  la orientación determinada por la misma normal).

- Si  $k = 3$ , entonces  $\omega = \lambda dx \wedge dy \wedge dz$  es una 3-forma con una única componente  $\lambda$ . Tomamos como recinto de integración a una región simple tridimensional,  $W$ , que sea una deformación del cubo unidad,  $W = \mathbf{T}([0, 1]^3)$ , donde  $\mathbf{T} : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva y con jacobiano no nulo en todos los puntos. Sobre  $W$  consideraremos una orientación  $\text{sign}(W)$  que valdrá  $+1$  o  $-1$  según que el jacobiano de  $\mathbf{T}$  sea positivo o negativo.

Entonces, según la definición de integral sobre un cubo, 5.10, y el teorema del cambio de variables (análogo al 2.32 pero con 3 variables),

$$\int_{\mathbf{T}} \omega = \text{sign}(W) \iiint_W \lambda(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Supongamos ahora que  $n = 2$ .

- Para  $k = 1$  la situación es totalmente análoga al caso  $k = 1$  y  $n = 3$ .
- Si  $k = 2$ , entonces  $\omega = \lambda \, dx \wedge dy$ , y el recinto de integración es una región simple bidimensional  $D$  que sea la imagen de  $[0, 1]^2$  mediante una transformación  $\mathbf{T} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  inyectiva y con jacobiano no nulo en todos los puntos, y dotada de una orientación  $\text{sign}(D)$ , que es el signo del jacobiano de  $\mathbf{T}$ . Entonces

$$\int_{\mathbf{T}} \omega = \text{sign}(D) \iint_D \lambda(x, y) \, dx \, dy$$

(aplicando el teorema del cambio de variable 2.32).

Por último, el caso  $n = 1$ . Entonces  $k = 1$ , luego  $\omega = \lambda \, dx$ , y el recinto de integración es un intervalo  $I = [a, b]$  dotado de una orientación  $\text{sign}(I)$ . Como “parametrización” de  $[a, b]$  tomamos el cambio de variable  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi(t) = a + t(b - a)$  en caso de que  $\text{sign}(I) = +1$ , y  $\varphi(t) = b + t(a - b)$  si  $\text{sign}(I) = -1$ . Entonces

$$\int_{\varphi} \omega = \text{sign}(I) \int_a^b \lambda(x) \, dx$$

(aplicando el teorema del cambio de variable para integrales de una variable).

## 5.5. Teorema General de Stokes

**Teorema 5.15 (Teorema General de Stokes)** Sean  $1 \leq k \leq n$ . Si  $c$  es una cadena  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  y  $\omega$  es una  $(k-1)$ -forma definida sobre la unión de las imágenes de los elementos que forman  $c$ ,

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

**117.** Haciendo uso reiterado del teorema de Fubini  $k$ -dimensional, la demostración del teorema general de Stokes, que nosotros no desarrollaremos, se reduce con facilidad al teorema fundamental del cálculo en una variable. Ver [15], Teorema 4-13.

Veamos cómo para los distintos valores posibles de las dimensiones  $k$  y  $n$ , con  $1 \leq k \leq n \leq 3$ , el teorema general de Stokes reproduce algunos de los resultados más importantes dados en los capítulos 2, 3 y 4. Para ello utilizaremos las notaciones expuestas en el apartado 5.4.2.

$n = 3$ .  $k$  puede tomar los valores 1, 2, 3.

- Si  $k = 1$ , entonces  $\omega = \lambda$  es una 0-forma y  $c$  es la parametrización de una curva (simple o cerrada simple) orientada. Entonces  $d\omega$  tiene las mismas componentes que el vector  $\nabla\lambda$ , y  $\partial c$  no es más que el conjunto formado por los puntos extremos de la curva, el inicial con orientación negativa y el final con orientación positiva (definición 5.12). Por tanto la fórmula del teorema general de Stokes es ahora la del teorema fundamental del cálculo en su forma generalizada (teorema 1.16).
- Si  $k = 2$ , entonces  $\omega = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$  es una 1-forma luego su diferencial exterior  $d\omega$  puede identificarse con el vector  $\mathbf{rot}(\lambda, \mu, \nu)$ . Tomando como  $c$  la parametrización de una superficie como se describió en el apartado 5.4.2, la fórmula es ahora la del teorema de Stokes clásico.
- Si  $k = 3$ ,  $\omega = \lambda dy \wedge dz + \mu dz \wedge dx + \nu dx \wedge dy$ , luego  $d\omega$  puede identificarse con  $\text{div}((\lambda, \mu, \nu))$ . De acuerdo con el apartado 5.4.2, y tomando el recinto descrito por  $T$  con orientación positiva, la fórmula es ahora la del teorema de la divergencia.

$n = 2$ . Si  $k = 1$ , la situación es totalmente análoga a la del caso  $n = 3, k = 1$ . Si  $k = 2$ , entonces  $c$  corresponde a una transformación  $T : [0, 1]^2 \rightarrow D$  (ver 5.4.2), donde  $D$  es una región simple bidimensional. De acuerdo con las identificaciones descritas al final del apartado 5.2.1, ahora hay dos formas posibles de identificar el campo vectorial  $(\lambda, \mu)$  con una 1-forma  $\omega$ . Utilizando  $e_i \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ , se obtiene la Fórmula de Riemann-Green que se dio como teorema de la divergencia en el plano (teorema 2.45).

Y utilizando  $e_i \rightsquigarrow dx_i$ , se obtiene la igualdad del teorema de Riemann-Green en su formulación inicial (teorema 2.38) <sup>(114)</sup>.

<sup>114</sup>En efecto (en lo que sigue trabajaremos sobre la hipótesis de que el jacobiano de  $T$  es siempre positivo). Supóngase en primer lugar que se considera el isomorfismo  $e_i \rightsquigarrow dx_i$ , de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ .



$n = 1$ . Entonces necesariamente  $k$  también ha de valer 1. Tomando la integral sobre  $([a, b], +1)$  (ver 5.4.2), resulta que  $\partial([a, b], +1)$  es el conjunto de dos puntos orientados  $\{(a, -1), (b, +1)\}$ . Por otra parte,  $\omega = \lambda$  es una función real cuyo dominio contiene a  $[a, b]$ . Por tanto, la fórmula del teorema es ahora

$$\int_a^b \lambda'(t) dt = \lambda(b) - \lambda(a),$$

es decir, la regla de Barrow del cálculo elemental.

En este caso,

$$\int_{\partial T} \omega = \int_{\partial D^+} \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2.$$

Por otra parte, y de acuerdo con lo expuesto en el caso 5. del apartado 5.3,  $d\omega = \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$ , luego

$$\int_T d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2,$$

de modo que la fórmula del teorema general de Stokes reproduce en este caso la del teorema de Riemann-Green.

Considérese ahora el isomorfismo  $e_i \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ . Entonces (cf. nuevamente el apartado 5.3)  $d\omega = \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$ , luego

$$\int_T d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2.$$

Y para interpretar el otro miembro, obsérvese que el isomorfismo que estamos considerando ahora asocia a la 1-forma diferencial  $\omega$  el campo vectorial  $(\omega_2, -\omega_1)$ , luego

$$\int_{\partial T} \omega = \int_{\partial D^+} (\omega_2, -\omega_1) \cdot ds = \int_{\partial D} (\omega_1, \omega_2) \cdot \mathbf{n} ds$$

con lo que se recupera la formulación del teorema de Riemann-Green en términos de la divergencia.

## 5.6. Notas adicionales

### 5.6.1. Producto vectorial en dimensiones mayores que 3

Una generalización natural a  $\mathbb{R}^n$  del producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$  puede hacerse a través del elemento de volumen  $n$ -dimensional, observando lo siguiente: un par de vectores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , dan lugar a una aplicación lineal  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada vector  $\mathbf{w}$  hace corresponder el producto mixto  $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$  (que es, salvo el signo, el volumen del paralelepípedo determinado por  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ ).

Al pasar a un número de dimensiones que no sea 3 y hacer uso de los isomorfismos descritos en la primera parte de este capítulo, lo que se obtiene es una operación que no es binaria y que asigna un vector  $n$ -dimensional al producto de  $n - 1$  vectores  $n$ -dimensionales  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}$  de la siguiente forma: la aplicación  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}, \cdot)$ , que a cada vector  $\mathbf{w}$  asocia  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{w})$ , es de  $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ , luego para ciertos escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  se tiene

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^{n-1}, \cdot) = \lambda_1 dx_1 + \dots + \lambda_n dx_n.$$

El vector  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  es por definición el **producto vectorial**  $\mathbf{v}^1 \times \dots \times \mathbf{v}^{n-1}$ . ¿Qué significa en el caso de que la dimensión sea 2?

### 5.6.2. $k$ -formas exactas

De las propiedades elementales de la diferenciación exterior, se sigue inmediatamente que para que una  $k$ -forma sea la diferencial de una  $(k - 1)$ -forma (se dice entonces que la  $k$ -forma es **exacta**) es necesario que su diferencial sea nula (es decir, que la  $k$ -forma es **cerrada**).

En el apartado 1.4 (teoremas 1.32 y 1.34) hemos visto hipótesis adicionales bajo las cuales esta condición es también suficiente para ciertos casos particulares ( $k = 1$  y  $n = 2, 3$ ;  $k = 2$  y  $n = 3$ ), una de los cuales es generalizable a cualquier dimensión: Pueden utilizarse las mismas ideas que en la demostración del lema de Poincaré (teorema 1.5.2) para probar, si bien con una demostración algo laboriosa, que si  $U$  es un abierto  $n$ -dimensional, para que una  $k$ -forma sobre  $U$  (para cualesquiera  $n$  y  $k$  mayores o iguales que 1) sea la diferencial de una  $(k - 1)$ -forma, es suficiente con que su diferencial exterior sea nula, ver [15], Teorema 4-11.

## 6. Referencias

- [1] Tom M. Apostol. *Análisis matemático*, segunda edición. Editorial Reverté, 1981.
- [2] Peter Baxandall y Hans Liebeck. *Vector calculus*, 2nd edition. Clarendon Press, 1983.
- [3] Frank E. Burk. *A garden of integrals*. Mathematical Association of America, 2007.
- [4] Ronald W. Gatterdam. *The planimeter as an example of Green's theorem*. The American Mathematical Monthly, vol. 88, no. 9 (1981), 701–704.
- [5] Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals*. Springer, 1998.
- [6] Russell Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. American Mathematical Society, 1994.
- [7] José D. Flores. *Applications of Double Integrals*.  
[http://people.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter\\_16/Graphics16/MI5/Html16\\_5/Applications of Double Integrals.htm](http://people.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter_16/Graphics16/MI5/Html16_5/Applications%20of%20Double%20Integrals.htm)
- [8] Ernest Hairer y Gerhard Wanner, Gerhard. *Analysis by its history*. Springer, 2008.
- [9] James M. Henle y Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal calculus*. MIT Press, 1979.
- [10] H. Jerome Keisler. *Elementary calculus. An infinitesimal approach*. On-line edition <http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html>, University of Wisconsin, 2010.
- [11] Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba. *Cálculo vectorial*, quinta edición. Pearson, 2004.
- [12] Louis Narens. *A nonstandard proof of the Jordan curve theorem*. Pacific Journal of Mathematics, vol. 36, no. 1, 1971, 19–229.
- [13] Laurent Schwartz. *Analyse mathématique : Cours professé à l'Ecole Polytechnique, Paris, vol. I*. Hermann, 1967.
- [14] Laurent Schwartz. *Analyse mathématique : Cours professé à l'Ecole Polytechnique, Paris, vol. II*. Hermann, 1967.
- [15] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1972.
- [16] Keith D. Stroyan. *Calculus with infinitesimals*. En *The strength of nonstandard analysis*, 369–394. Springer, 2007.
- [17] Keith D. Stroyan. *Mathematical background. Foundation of infinitesimal calculus*. Academic Press, 1998. 2nd edition (ebook),  
[www.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/FoundInfsmlCalc.pdf](http://www.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/FoundInfsmlCalc.pdf).
- [18] Martin Väth. *Nonstandard analysis*. Birkhäuser, 2007.
- [19] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox*. Cambridge University Press, 1993.

- [20] Wikipedia. *Banach-Tarski paradox*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski\\_paradox](http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox).
- [21] Wikipedia. *Space-filling curve*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve).
- [22] Wikipedia. *Multiple integral. Some practical applications*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple\\_integral#Some\\_practical\\_applications](http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Some_practical_applications).
- [23] Wikipedia. *Buffon's needle*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Buffon's\\_needle](http://en.wikipedia.org/wiki/Buffon's_needle).