UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Fundamentos de Cálculo y Aplicaciones

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Septiembre 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg`

Nota: Este material está disponible en la página web
`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm`
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en el curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

Para los estudiantes de estas licenciaturas que no cursan paralelamente asignaturas de álgebra y geometría se han incorporado los Capítulos 7, 10 y 11.

Los estudiantes de la Licenciatura en Matemática cursan paralelamente asignaturas de álgebra y geometría, por lo tanto podrán leer más rápidamente los capítulos dedicados a estos temas y tendrán la oportunidad de hacer lecturas adicionales. Estas lecturas se encuentran a lo largo del texto y están dedicadas especialmente a los estudiantes que próximamente se iniciarán en las asignaturas de Análisis Matemático. Creemos que estas lecturas podrían ser optativas para los estudiantes de otras licenciaturas y por eso las hemos diferenciado.

Ofrecemos esta versión preliminar con la intención de colaborar con el dictado de la asignatura y de ir recogiendo las observaciones del personal docente para mejorarla y adaptarla.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Septiembre 2005.

CONTENIDO

Parte 1

Ecuaciones Diferenciales.

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos y ecuaciones diferenciales de primer orden.

Este capítulo es un repaso de cursos previos.

Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Revisión de los métodos ya estudiados anteriormente. Ecuaciones con variables separables y reducibles a éstas.

Aplicaciones de la ecuación diferencial de primer orden: Crecimiento de poblaciones (exponencial, logístico, limitado). Epidemias. Desintegración radioactiva. Enfriamiento.

1. Motivación.

> La filosofía [la naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos -el universo- pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello, uno vaga en un obscuro laberinto.
>
> Galileo Galilei (1564-1642).

La cita anterior ilustra la creencia, popular en la época de Galileo, de que buena parte del conocimiento de la naturaleza podía reducirse a matemática. Al final del siglo XVII se reforzó este modo de pensar, cuando Newton enunció la ley de la gravitación y usó el naciente cálculo para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste. A raíz de esto muchos científicos trataron de "matematizar" la naturaleza. La gran cantidad de matemática que hoy se utiliza en las ciencias naturales y, cada vez más, en la economía y las ciencias sociales, es testigo del éxito de estos intentos.

Lo que conocemos como álgebra elemental es suficiente para resolver muchos de los problemas "estáticos" que se nos presentan a diario (problemas de porcentajes, intereses, etc).

Los fenómenos naturales que implican cambios se describen mejor mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables.

La derivada $dy/dt = f'(t)$ de la función f puede ser considerada como la razón con la cual la cantidad $y = f(t)$ cambia con respecto a la variable independiente t, por esto es natural que en las ecuaciones que describen el universo cambiante aparezcan derivadas.

Una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas se llama *ecuación diferencial*. El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene los siguientes fines:

1. Descubrir la ecuación diferencial que describe una situación física.
2. Encontrar la solución apropiada para esa ecuación.

A diferencia del álgebra elemental, en la cual buscamos los números desconocidos que satisfacen una ecuación tal como

$$x^3 + 7x^2 - 11x + 41 = 0,$$

al resolver una ecuación diferencial se nos reta a que encontremos las funciones desconocidas $y = g(x)$ que satisfagan una identidad tal como

$$g'(x) - 2xg(x) = 0.$$

Ejemplo 1.1 (Ley de enfriamiento de Newton). Esta ley establece lo siguiente: La tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre $T(t)$ y la temperatura A del medio ambiente, es decir

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

donde k es una constante positiva.

La ley física se traduce así a una ecuación diferencial. Esperamos que, si se nos dan los valores de A y k, podremos encontrar una fórmula explícita para $T(t)$, que nos permita predecir la temperatura del cuerpo.

Ejemplo 1.2 (Poblaciones). La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población $P(t)$, con índices constantes de nacimiento y mortalidad es, en muchos casos simples, proporcional al tamaño de la población, es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1.3 (Ley de Torricelli). Esta ley establece que la tasa de cambio con respecto al tiempo del volumen V de agua en un tanque que se vacía, a través de un orificio en el fondo, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua del tanque, es decir,

$$\frac{dV}{dt} = -ky^{1/2},$$

donde y es la profundidad del tanque y k es una constante.

Si el tanque es un cilindro y A es el área de su sección transversal, entonces $V = Ay$ y dV/dt = A(dy/dt). En este caso la ecuación toma la forma

$$\frac{dy}{dt} = hy^{1/2},$$

en la que h = k/A.

2. Conceptos básicos

Tal como dijimos una *ecuación diferencial* es una expresión que establece una relación entre una función y algunas de sus derivadas. Como es natural, las *soluciones* de la ecuación son las funciones que satisfacen la relación. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la misma.

Por ejemplo, la ecuación

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

es una ecuación diferencial de orden 2 ó segundo orden. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es solución de esta ecuación.

Se puede probar que cualquier solución de la ecuación (1.1) tiene la forma

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Por eso decimos que la *solución general* de la ecuación es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. También decimos que $y = \operatorname{sen} x$ es una *solución particular* . Si queremos hallar una solución que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1.2}$$

entonces C_1 y C_2 deben satisfacer las ecuaciones

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 1.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (1.1) que satisface la condición (1.2) es

$$y = \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Una condición del tipo (1.2) es lo que se llama una *condición inicial.*

Los conceptos que hemos explicado a través de este ejemplo se extienden de manera natural a cualquier ecuación diferencial: La *solución general* de una ecuación diferencial es la función más general que la satisface, una *solución particular* es una función que satisface la ecuación, una *condición inicial* está dada por igualdades en las que se fijan los valores de la función y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Ejercicios.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Además identificar el orden de cada una de las ecuaciones.
   (a) $y''' = 0$,
   (b) $y' = 9e^{3x}$,
   (c) $y'' = x$.

(2) Verifique, por sustitución, que la función dada y es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

   (a) $y = 2e^{3x} + 1, \quad \dfrac{dy}{dx} = 3y - 3$

   (b) $y = e^{x^2}, \quad \dfrac{dy}{dx} = 2xy$

   (c) $y = x + 3, \quad y' = \dfrac{y-3}{x}$

(3) Hallar la solución de la ecuación diferencial
$$y'' = 0$$
que satisface la condición inicial
$$y(0) = y'(0) = 1.$$

3. Ecuaciones con variables separables y aplicaciones.

La ecuación diferencial de primer orden
$$\frac{dy}{dx} = H(x, y)$$
se llama *separable* si la función $H(x, y)$ puede escribirse como el producto de una función de x y una función de y, o lo que es equivalente, como un cociente
$$H(x, y) = \frac{g(x)}{f(y)}.$$

En este caso las variables pueden ser *separadas* (aisladas en miembros opuestos de una ecuación) escribiendo, de manera informal,

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Esta última expresión debe entenderse como la notación compacta de la ecuación diferencial

$$f(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Para resolver esta ecuación diferencial integramos ambos miembros con respecto a x para obtener

$$\int f(y)\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx + C,$$

es decir,

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Por supuesto, para poder resolver la ecuación, necesitamos poder calcular las primitivas que aparecen en la expresión anterior.

Ejemplo 1.4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = xy.$$

Procedemos de la siguiente manera:

Primero escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y} = x\,dx,$$

integrando obtenemos,

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

donde C_1 es una constante real, por lo tanto,

$$|y| = e^{C_1}\,e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

La igualdad anterior implica que y no se anula y, en consecuencia, no puede cambiar de signo. Así que tenemos que

$$y = C\,e^{\frac{1}{2}x^2},$$

donde C es una constante real que será igual a e^{C_1} ó $-e^{C_1}$ según el signo de y.

Es importante notar lo siguiente: cuando escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y} = x\,dx,$$

estamos suponiendo que y no se anula, sin embargo es inmediato que la función $y \equiv 0$ es solución de la ecuación que estamos resolviendo. Siempre que dividimos entre una variable o una función debemos tener este tipo de cuidado. En este ejemplo la solución $y \equiv 0$ quedó incluida en el caso $C = 0$.

Ejemplo 1.5. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}.$$

La ecuación la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$(3y^2+1)\, dy = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C.$$

Este ejemplo muestra que a veces no es posible o práctico, expresar a y explícitamente como función de x.

Ejemplo 1.6 (Desintegración de sustancias radiactivas). Una sustancia radiactiva se desintegra a una velocidad que es proporcional a la cantidad presente. La *vida media* de una sustancia radiactiva es el tiempo requerido para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad.

Si de 200 gramos de determinada sustancia radiactiva quedan 50 gramos al cabo de 100 años.

(a) Calcular la vida media.
(b) ¿Cuántos gramos de sustancia radiactiva quedarán transcurridos otros cien años?

Sea t el tiempo y $M = M(t)$ la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t. Entonces, de acuerdo a la ley enunciada al principio del ejemplo, tendremos que

$$\frac{dM}{dt} = -kM, \tag{1.3}$$

donde k es una constante positiva.

La ecuación (1.3) es una ecuación con variables separables, para hallar la solución particular que corresponde con nuestro problema procedemos de la siguiente manera:

Paso 1: Separamos las variables

$$\frac{dM}{M} = -k\, dt.$$

Paso 2: Integramos y despejamos a M como función de t

$$\int \frac{dM}{M} = \int -k\,dt,$$

de donde,

$$\ln |M| = -kt + C_1,$$

donde C_1 es una constante, tomando exponencial a ambos miembros de la igualdad y usando que $M > 0$, obtenemos

$$M = e^{C_1} e^{-kt},$$

si tomamos $C = e^{C_1}$, entonces C es una constante y tenemos que

$$M = Ce^{-kt}.$$

Paso 3: Utilizamos la información que tenemos para hallar el valor de las constantes.

Inicialmente tenemos 200 gramos de sustancia radiactiva, esto quiere decir que

$$M(0) = 200,$$

por lo tanto,

$$M = 200\, e^{-kt},$$

nos dicen que $M(100) = 50$, por lo tanto

$$50 = 200\, e^{-100k},$$

de donde obtenemos que,

$$k = \frac{1}{50} \ln 2,$$

por lo tanto,

$$M = 200\, e^{-(\frac{1}{50}\ln 2)t} = 200 \cdot 2^{-\frac{t}{50}}.$$

Una vez que tenemos a la masa M como función del tiempo t ya podemos proceder a responder las preguntas.

Si T es la vida media tendremos que

$$M(T) = 100,$$

por lo tanto,

$$2^{-\frac{T}{50}} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$T = 50 \text{ años}.$$

Finalmente

$$M(200) = 200 \cdot 2^{-4} \text{ gr.} = 12,5 \text{ gr.}$$

En la Sección 7 volveremos a tratar temas relacionados con este ejemplo.

Ejemplo 1.7 (Crecimiento exponencial de poblaciones). A mediados de 1982, la población mundial era de 4,5 miles de millones de habitantes y después creció a razón de un cuarto de millón de personas diarias. Suponiendo que son constantes los índices de natalidad y mortalidad ¿Para cuándo se puede esperar una población mundial de 10 mil millones de habitantes?

Sea $P = P(t)$ el número de miles de millones de habitantes en el mundo en el instante t, el tiempo t lo mediremos en años y tomaremos el año 1982 como el instante $t = 0$.

Comencemos por establecer cuál condición o condiciones debe satisfacer P. Sean $N_a = N_a(t)$ y $M_o = M_o(t)$ la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad respectivamente.

Si Δt es un intervalo de tiempo "pequeño" tendremos que

$$P(t + \Delta t) - P(t) = N_a(t)P(t)\Delta t - M_o(t)P(t)\Delta t.$$

Como estamos suponiendo que la tasa de mortalidad y la tasa de natalidad son constantes tenemos que $N_a(t)$ y $M_o(t)$ son constantes, al dividir entre Δt y tomar límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{dP}{dt} = k\,P, \tag{1.4}$$

donde la constante k, que es igual a $N_a - M_o$, es la tasa de crecimiento neto.

Al resolver la ecuación (1.4) obtenemos

$$P = P(t) = P_o\, e^{kt}.$$

Tenemos que $P_o = 4,5$ ya que la población en el instante $t = 0$ (1982) es de 4,5 miles de millones de habitantes. Además, como la población crece a razón de un cuarto de millón de personas diarias, tenemos que

$$\begin{aligned} P'(0) = 450.000\,\text{personas/día} &= \frac{250.000 \times 10^{-9}}{1/365}\,\text{miles de millones de personas/año} \\ &\approx 0,0913\,\text{miles de millones de personas/año} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0,0913}{4,5} \approx 0,0203.$$

Por lo tanto

$$P(t) = (4,5)\, e^{(0,0203)t}.$$

Si resolvemos la ecuación

$$P(T) = 10,$$

obtenemos

$$T = \frac{\ln(10/4,5)}{0,0203} \approx 39,$$

es decir, deben transcurrir 39 años para que la población llegue a 10 mil millones de habitantes y por lo tanto la respuesta es el año 2021.

Ejemplo 1.8 (Ley de enfriamiento de Newton). La ley de enfriamiento de Newton dice que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante A es proporcional a la diferencia $A - T$. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

donde k es una constante positiva.

Resolvamos el siguiente problema: Una chuleta de 5 lb., originalmente a 50^{o}F, se pone en el horno a 375^{o}F a las 5 : 00p.m. A los 75 minutos se encontró que la temperatura de la carne era de 125^{o}F. ¿A qué hora estará la carne a 150^{o}F?

Sea t el tiempo, medido en minutos, con $t = 0$ correspondiente a las $5:00$ p.m. De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T),$$

de donde,

$$\int \frac{dT}{375 - T} = \int k\,dt,$$

como $T(t) < 375$, tenemos que

$$-\ln(375 - T) = kT + C_1,$$

por lo tanto

$$T = 375 - C\,e^{-kt},$$

donde C es una constante.

Como $T(0) = 50$ tenemos que $C = 325$.

De que $T(75) = 125$ obtenemos que

$$k = -\frac{1}{75}\ln\left(\frac{250}{325}\right) \approx 0,0035.$$

Despejando t de la ecuación $T(t) = 150$ (hacer los detalles), obtenemos

$$t \approx 105 \text{minutos}.$$

Por lo tanto la chuleta estará a 150^oF a las $6:45$ p.m.

3.1. La ecuación $y' = k(y - a)(y - b)$.

Tal como veremos más adelante la ecuación diferencial del tipo

$$y' = k(y - a)(y - b),$$

donde k, a, b son constantes reales, aparece en algunas aplicaciones. Veamos cual es la solución general de esta ecuación con variables separables.

Al separar las variables obtenemos

$$\frac{dy}{(y - a)(y - b)} = k\,dx$$

descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{y-b}-\frac{1}{y-a}\right)dy = k\,dx,$$

luego,

$$\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right| = k(b-a)x + C_1,$$

por la igualdad anterior $(y-b)/(y-a)$ no se anula ni cambio de signo, por lo tanto

$$\frac{y-b}{y-a} = C\,e^{k(b-a)x},$$

despejando obtenemos

$$y = a + \frac{b-a}{1-C\,e^{k(b-a)x}}\,.$$

Ejercicios.

(1) Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x\,y^3.$

(b) $y\,\dfrac{dy}{dx} = x(y^2+1).$

(c) $x^2\,y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2.$

(2) Encontrar la solución particular de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y\,e^x,$$

que satisface $y(0) = 2e$.

(3) La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Supóngase que en una región ha ocurrido un accidente nuclear que ha hecho que el nivel de cobalto radiactivo ascienda a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la región vuelva a ser habitable?

4. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones con variables separables.

4.1. La ecuación $y' = f(x, y)$, donde f es homogénea de grado cero.

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado n* si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

para todo $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.9.
La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2.
La función $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ es homogénea de grado 2.

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 + x^3 y}{x + y}$ es homogénea de grado 3.

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 + x^3 y}{x^4 + y^4 + x^2 y^2}$ es homogénea de grado 0.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

donde f es homogénea de grado 0.

Entonces

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

por lo tanto la ecuación equivale a

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Hacemos el cambio

$$u = \frac{y}{x},$$

nos queda $y = u\, x$ y por lo tanto $y' = x\, u' + u$.

Luego

$$x\, u' + u = f(1, u),$$

es decir

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u,$$

que es una ecuación con variables separables, ya que equivale a

$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

EJEMPLO 1.10. Hallar la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Haciendo $y = u\,x$ obtenemos

$$xu' + u = \frac{x^2\,u}{x^2 - x^2u^2} = \frac{u}{1-u^2},$$

de donde

$$xu' = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2},$$

que equivale a

$$\frac{1-u^2}{u^3}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Ahora resolvemos esta ecuación con variables separables

$$\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C_1,$$

$$\ln|ux| = -\frac{1}{2u^2} - C_1,$$

como $y = u\,x$, tenemos

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2y^2} - C_1,$$

de donde,

$$|y| = C_2\,e^{-\frac{x^2}{2y^2}}.$$

La igualdad anterior implica que y no se anula y, por lo tanto, no cambia de signo. Así que tenemos que

$$y = C\,e^{-\frac{x^2}{2y^2}},$$

donde C es una constante.

4.2. La ecuación $\boldsymbol{y' = \dfrac{a\,x + b\,y + c}{p\,x + q\,y + r}}$.

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$y' = \frac{a\,x + b\,y + c}{p\,x + q\,y + r}, \tag{1.5}$$

donde a, b, c, p, q, r son constantes reales.

Si $c = r = 0$ entonces la ecuación (1.5) es del tipo $y' = f(x, y)$. donde f es homogénea de grado cero y por lo tanto ya sabemos como resolverla.

Supongamos que $c \neq 0$ ó $r \neq 0$.

Veremos que, en este caso, un cambio de variables del tipo

$$\begin{cases} x = x_1 + k, \\ y = y_1 + h, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde h y k son constantes a determinar nos permite reducir a ecuación (1.5) a una del tipo

$$y' = \frac{a_1\,x + b_1\,y}{p_1\,x + q_1\,y}.$$

Haciendo el cambio (1.6) y sustituyendo en la ecuación (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} &= \frac{a\,(x_1 + k) + b\,(y_1 + h) + c}{p\,(x_1 + k) + q\,(y_1 + h) + r} \\ &= \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + a\,k + b\,h + c}{p\,x_1 + q\,y_1 + p\,k + q\,h + r} \end{aligned}$$

Como es natural, debemos elegir h y k de manera que

$$\begin{cases} a\,k + b\,h + c = 0, \\ p\,k + q\,h + r = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Cada una de las ecuaciones anteriores es la ecuación de una recta en el plano kh. Si el sistema no tiene solución entonces las rectas tienen que ser paralelas y por lo tanto tiene que ocurrir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lambda a$, $q = \lambda b$.

Tenemos dos casos.

Caso1: El sistema (1.7) tiene solución (k_o, h_o).

Con el cambio

$$\begin{cases} x = x_1 + k_o, \\ y = y_1 + h_o, \end{cases}$$

la ecuación se reduce a una homogénea, que ya sabemos resolver.

Caso2: El sistema (1.7) no tiene solución.

Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lambda a$, $q = \lambda b$, luego la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,x + b\,y + c}{\lambda(a\,x + b\,y) + r}.$$

Haciendo el cambio de variables

$$z = a\,x + b\,y,$$

obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} = a + b\,\frac{z + c}{\lambda z + r},$$

de donde,

$$\frac{1}{a + b\,\dfrac{z + c}{\lambda z + r}}\,dz = dx,$$

que es una ecuación con variables separables.

Ejemplo 1.11. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Haciendo el cambio

$$\begin{cases} x = x_1 + k, \\ y = y_1 + h, \end{cases}$$

obtenemos

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + k + h - 3}{x_1 - y_1 + k - h - 1}.$$

Por lo tanto debemos considerar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} k+h-3=0, \\ k-h-1=0. \end{cases}$$

Al resolver el sistema obtenemos

$$k=2, \qquad h=1.$$

Luego, con el cambio

$$\begin{cases} x=x_1+2, \\ y=y_1+1, \end{cases}$$

la ecuación se transforma en

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1},$$

que es una ecuación del tipo $y'=f(x,y)$, donde f es homogénea de grado cero.

Para resolver esta ecuación debemos hacer el cambio $u=y_1/x_1$, es decir

$$y_1=u\,x_1.$$

Derivando y sustituyendo

$$x_1\,\frac{du}{dx_1}+u=\frac{1+u}{1-u},$$

de donde,

$$\frac{1-u}{1+u^2}\,du=\frac{dx_1}{x_1},$$

integrando

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x_1|+\ln C,$$

sustituyendo $u=y_1/x_1$,

$$\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)=\ln\left(C\,|x_1|\sqrt{1+\frac{y_1^2}{x_1^2}}\right)=\ln\left(C\,\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right),$$

tomando exponencial,

$$C\,\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\arctan\,\frac{y_1}{x_1}}\,,$$

finalmente, volvemos a la variable original y obtenemos la solución general:

$$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}.$$

OBSERVACIÓN 1.12. El procedimiento anterior también se le puede aplicar a una ecuación diferencial de la forma

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right).$$

Ejercicios.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$,

(b) $y'=\dfrac{y-x-3}{y+x+4}$,

(c) $y'=\dfrac{x+y}{x+y+4}$,

5. Ecuación lineal de primer orden.

Una ecuación diferencial *lineal de primer orden* es una ecuación de la forma

$$y'+p(x)\,y=q(x), \tag{1.8}$$

donde p y q son funciones continuas definidas en un intervalo.

Si $q(x)\equiv 0$ la ecuación se llama homogénea.

Si $q(x)$ no es nula la ecuación se llama no homogénea.

OBSERVACIÓN 1.13. No debemos confundir la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea con la ecuación diferencial de la forma $y'=f(x,y)$, con f homogénea de grado 0, estudiada en la Sección 4.

Solución de la homogénea.

La ecuación homogénea tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0.$$

Esta ecuación es de variable separables, para hallar su solución general procedemos de la siguiente manera:

Separamos las variables,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$$

integrando,

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C_1,$$

de donde

$$|y| = C_1\,e^{-\int p(x)\,dx},$$

esta igualdad implica que y no se anula y por lo tanto no puede cambiar de signo, luego,

$$y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Solución de la no homogénea.

En este caso la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x),$$

multiplicando ambos miembros por $e^{\int p(x)\,dx}$, obtenemos

$$e^{\int p(x)\,dx}\,\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx}\,p(x)\,y = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\,y\right) = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

integrando,

$$e^{\int p(x)\,dx}\,y = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C,$$

de donde,

$$y = \left(\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Ejemplo 1.14. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - x\,y = x.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $e^{-x^2/2}$ obtenemos

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\,y\right)' = x\,e^{-\frac{x^2}{2}},$$

de donde,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,y = -\,e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = -1 + C\,e^{\frac{x^2}{2}},$$

donde C es una constante.

6. Ecuación de Bernoulli.

Una ecuación de Bernoulli es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde $n \neq 0, 1$ (notar que si $n = 0$ ó $n = 1$ se trata de una ecuación lineal de primer orden).

El procedimiento para resolver esta ecuación es como sigue.

Primero reescribimos la ecuación de la siguiente manera

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{-n+1} = q(x),$$

haciendo el cambio $z = y^{-n+1}$, tenemos que

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx},$$

de donde,

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto la ecuación queda

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x),$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

7. Aplicaciones

7.1. Desintegración radiactiva y determinación de la antigüedad de un fósil.

Consideremos una muestra de sustancia que contiene $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo en el instante t. Durante cada unidad de tiempo una fracción constante de estos átomos se desintegra espontáneamente, transformándose en átomos de otro elemento o en otro isótopo del mismo elemento; por lo tanto la velocidad de desintegración de la sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia presente. En términos de una ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -k\,N,$$

donde k es una constante positiva, que depende de la sustancia.

Al resolver esta ecuación diferencial obtenemos

$$N(t) = N_o\,e^{-kt}, \tag{1.9}$$

donde N_o es la cantidad de sustancia en el instante $t = 0$ (ver Ejemplo 1.6).

Sea T tal que $N(T) = N_o/2$, es decir, transcurrido el tiempo T, de la cantidad de sustancia N_o queda $N_o/2$. Entonces tenemos que

$$\frac{N_o}{2} = N_o\,e^{-kT}.$$

Despejando obtenemos

$$k = \frac{1}{T}\,\ln 2,$$

sustituyendo en la fórmula (1.6)

$$N(t) = N_o\,2^{-\frac{t}{T}}.$$

Es importante notar lo siguiente:

$$2^{-\frac{t_o+T}{T}} = \frac{1}{2}\,2^{-\frac{t_o}{T}},$$

por lo tanto, si en el instante t_o tenemos cierta cantidad de sustancia, en el instante $t_o + T$ esta cantidad se habrá reducido a la mitad. Por esto se define la *vida media* de una sustancia radiactiva como el tiempo requerido para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad. Los cálculos previos sirven para demostrar que la vida media está bien definida y además, si T es la vida media

$$N(t) = N_o\,2^{-\frac{t}{T}}. \tag{1.10}$$

La clave del método de determinación de la antigüedad o *fechado mediante radiocarbono* de fósiles estriba en que una proporción constante de átomos de carbono de cualquier organismo viviente está formada por el isótopo radiactivo C^{14} del carbono y una vez que el organismo muere estos isótopos radiactivos comienzan a desintegrarse.

Más en detalle: La concentración de C^{14} en la atmósfera se conserva casi constante, ya que, aunque C^{14} es radiactivo y se desintegra lentamente, se repone mediante la conversión de nitrógeno en C^{14} por los rayos cósmicos de la atmósfera superior. Durante la larga historia de nuestro planeta, esta declinación y reposición se ha convertido en un estado cercano a la estabilidad. La materia viva está tomando carbono del aire continuamente, o está consumiendo otras materias vivientes que contienen la misma concentración constante de átomos de carbono C^{14}. La misma concentración perdura toda la vida, debido a que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción entre los dos isótopos. Cuando un organismo vivo muere, cesa su metabolismo de carbono y el proceso de desintegración radiactiva comienza a agotar su contenido de C^{14} y, en consecuencia, la concentración de C^{14} comienza a decrecer. Midiendo esa concentración, puede estimarse el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo.

Para el C^{14} se sabe que, midiendo el tiempo en años, la constante de decaimiento k vale aproximadamente 0,0001216.

Nota: Al aplicar la técnica de determinación de antigüedad mediante radiocarbono debe tomarse extremo cuidado para evitar la contaminación de la muestra con materia orgánica o aun aire fresco ordinario. Además, parece ser que los niveles de rayos cósmicos no han sido constantes durante la historia de la tierra, por lo que la proporción de carbono radiactivo en la atmósfera ha variado en los siglos pasados. Mediante el uso de métodos independientes de fechado de muestras, los investigadores de esta área han compilado tablas de factores de corrección que han acrecentado la exactitud del proceso.

Ejemplo 1.15 (Fechado por radiocarbono). El carbono extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono C^{14} extraído de un hueso de los tiempos actuales. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo?

Tomemos como instante $t = 0$ el momento de la muerte del individuo, entonces, si t_1 es el tiempo transcurrido desde la muerte, tenemos que

$$N(t_1) = \frac{N(0)}{6},$$

donde $N(t)$ es el número de átomos de carbono C^{14} en el cráneo en el instante t.

Por otra parte sabemos que

$$N(t) = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t},$$

luego,

$$\frac{N(0)}{6} = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t_1},$$

de donde,

$$t_1 = \frac{\ln 6}{0,0001216} = 1473,86.$$

Por lo tanto el tiempo transcurrido es de aproximadamente 1.474 años.

Ejercicio 1.16. Utilizar que, midiendo el tiempo en años, el valor de la constante de decaimiento k del carbono 14 vale aproximadamente $0,0001216$, para establecer que la vida media del carbono 14 es de aproximadamente 5.700 años.

7.2. Dilución en un tanque con flujo de entrada y salida constantes.

Consideremos un tanque que contiene una solución (una mezcla de soluto y solvente, tal como sal y agua). Supondremos que hay un flujo tanto de entrada como de salida y queremos calcular la cantidad $x(t)$ de soluto que hay en el tanque en el instante t.

Supóngase además que:

(a) La solución que entra al tanque tiene una concentración de c_e gramos de soluto por litro de solución
(b) El flujo de entrada F_e de solución al tanque es constante.
(c) En el tanque hay agitación continua, por lo que la solución que se encuentra en el tanque es homogénea.
(d) El flujo de salida F_s de solución al tanque es constante.

Para establecer una ecuación diferencial para $x(t)$, estimemos el cambio Δx en x durante un intervalo de tiempo pequeño $[t, t + \Delta t]$.

La cantidad de soluto que entra al tanque durante Δt segundos es $F_e\, c_e\, \Delta t$.

La cantidad de soluto que fluye hacia afuera del tanque depende de la concentración $c(t)$ de la solución que se encuentra en el tanque en el instante t y es igual a $F_s\, c(t)\, \Delta t$. Si $V(t)$ es el volumen de solución en el tanque en el instante t, entonces $c(t) = x(t)/V(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta x &= [\text{gramos que ingresan}] - [\text{gramos que salen}]\\ &\approx F_e\, c_e\, \Delta t - F_s\, c(t)\, \Delta t\\ &= F_e\, c_e\, \Delta t - F_s\, \frac{x(t)}{V(t)}\, \Delta t.\end{aligned}$$

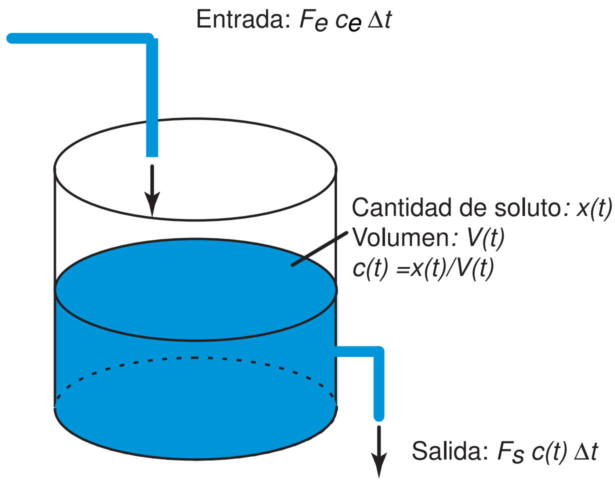


FIGURA 1.1. Dilución en un tanque con flujo de entrada y salida constantes

Dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = F_e\, c_e - \frac{F_s}{V(t)}\, x(t). \tag{1.11}$$

Si $V_o = V(0)$, entonces $V(t) = V_o + (F_e - F_s)t$. Por lo tanto, la ecuación (1.11) es una ecuación diferencial lineal de primer orden para la cantidad $x(t)$ de soluto en el tanque en el instante t.

EJEMPLO 1.17. Un tanque de 120 galones (gal) inicialmente contiene 90 lb de sal disueltas en 90 gal de agua. Hacia el tanque fluye salmuera que contiene 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y la mezcla fluye hacia afuera a razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?

El volumen de solución $V(t)$, que se encuentra en el tanque en el instante t, es igual a $90 + t$ galones.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal que se encuentra en el tanque en el instante t. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = 4 \cdot 2 - \frac{3}{90 + t}\, x(t),$$

es decir

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{90+t}\, x(t) = 8.$$

Resolviendo la ecuación y utilizando que $x(0) = 90$, obtenemos

$$x(t) = 2\,(90+t) - \frac{90^4}{(90+t)^3}.$$

De la fórmula para $V(t)$ sigue que el tanque se llena en 30 min, por lo tanto la respuesta es $x(30) \approx 202$ lb de sal.

7.3. Modelos de poblaciones.

En el Ejemplo 1.7 consideramos un modelo de población cuyo crecimiento está gobernado por una ecuación de la forma $dP/dt = k\,P$. Este modelo es válido cuando los índices de natalidad y mortalidad son constantes. En esta sección estudiaremos modelos más generales, que contemplan la posibilidad de que los índices de natalidad y mortalidad sean variables.

Sea $P(t)$ el número de individuos de una población en el instante t. Supongamos que la población cambia exclusivamente por la ocurrencia de nacimientos y muertes, es decir, suponemos que no hay inmigración ni emigración. Sean $N(t)$ y $M(t)$ el número de nacimientos y muertes, respectivamente, que han ocurrido desde el instante $t = 0$ hasta el instante t. El *Índice de natalidad es*

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{P(t)\,\Delta t} = \frac{1}{P}\,\frac{dN}{dt},$$

y el *Índice de mortalidad es*

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{P(t)\,\Delta t} = \frac{1}{P}\,\frac{dM}{dt}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} P'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[N(t+\Delta t) - N(t)] - [M(t+\Delta t) - M(t)]}{\Delta t} \\ &= N'(t) - M'(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P'(t) = (\alpha(t) - \beta(t))\, P(t). \tag{1.12}$$

Crecimiento exponencial.

Si los índices de natalidad y mortalidad $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son constantes tenemos una ecuación del tipo

$$\frac{dP}{dt} = k\,P,$$

cuya solución es

$$P(t) = P_o\, e^{kt},$$

donde P_o es el número de individuos en el instante $t = 0$.

En la siguiente figura observamos los gráficos de P en función de t para los casos $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$.

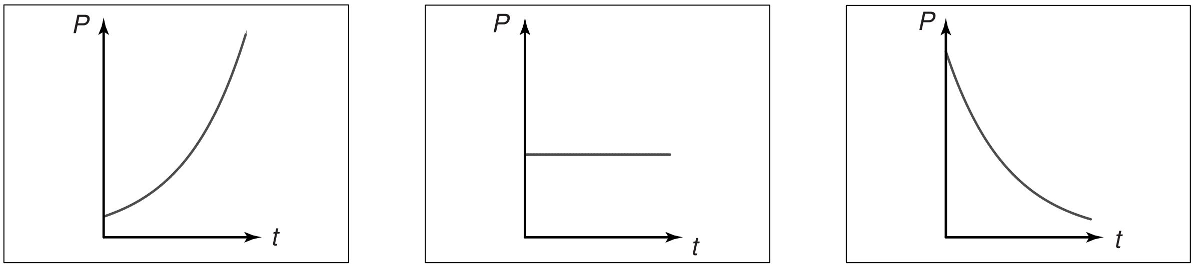


FIGURA 1.2. Distintos casos de crecimiento con tasas de natalidad y mortalidad constantes

El primer gráfico ($k > 0$) corresponde con el caso en que el índice de natalidad es mayor que el de mortalidad. La población crece muy rápidamente, llega un momento en que el modelo pierde validez, ya que el medio ambiente comienza a poner restricciones sobre el número de individuos.

El segundo gráfico ($k = 0$) corresponde con el caso en que el índice de natalidad es igual al de mortalidad. La población permanece constante.

El tercer gráfico ($k < 0$) corresponde con el caso en que el índice de mortalidad es mayor que el de natalidad. La población disminuye hasta extinguirse.

Crecimiento logístico.

En situaciones tan diversas como la población humana de una nación y la población de la mosca de la fruta en un recipiente cerrado, a menudo se observa que el índice de natalidad disminuye cuando la población aumenta. Las razones pueden variar, incluyendo desde el refinamiento cultural hasta la limitación en los recursos alimenticios.

Supongamos que

(a) El índice de nacimientos α es una función lineal decreciente de P, es decir

$$\alpha(t) = \alpha_o - \alpha_1 P(t),$$

donde α_o y α_1 son constantes positivas.

(b) El índice de mortalidad permanece constante.

Entonces la ecuación (1.12) toma la forma $dP/dt = (\alpha_o - \alpha_1 P - \beta) P$, es decir,

$$\frac{dP}{dt} = k\, P\, (M - P).$$

Supondremos que $\alpha_o > \beta$, así que $M > 0$. Al resolver esta (ecuación ver Subsección 3.1) obtenemos

$$P(t) = \frac{M\, P_o}{P_o + (M - P_o)\, e^{-kMt}},$$

donde P_o es la población inicial.

Se observa que si $t \to \infty$, entonces $P(t) \to M$, es decir el número de individuos tiende a estabilizarse.

A continuación observamos los gráficos de P en los casos $P_o < M$ y $P_o > M$.

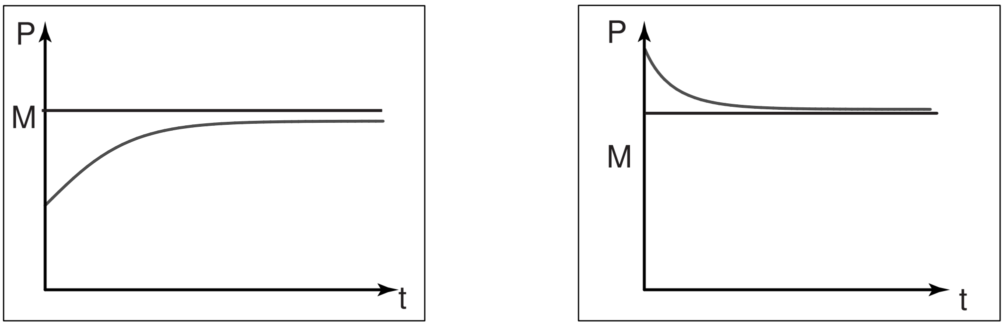


Figura 1.3. Crecimiento logístico

Ejercicios.
Nociones básicas y ecuaciones diferenciales de primer orden.

(1) Verifique, por sustitución, que la función dada y (explícita o implícitamente) es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

(a) $y' = 2x; \quad y = x^2 + 3.$

(b) $y\,y' = e^{2x}; \quad y^2 = e^{2x} + 1.$

(c) $xy' + y = y'\sqrt{1 - x^2y^2}; \quad y = \operatorname{arcsen} xy.$

(d) $(y\cos y - \operatorname{sen} y + x)y' = y; \quad y + \operatorname{sen} y = x.$

(e) $y'' + y = 3\cos 2x; \quad y = \cos x - \cos 2x.$

(f) $y'' + y = 3\cos 2x; \quad y = \operatorname{sen} x - \cos 2x.$

(g) $x^2\,y'' - xy' + 2y = 0; \quad y = x\cos(\ln x).$

(h) $x^2\,y'' + 5xy' + 4y = 0; \quad y = \dfrac{1}{x^2}.$

(2) En los siguientes problemas se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ cuya solución (o una de sus soluciones) sea $g(x)$.

(a) La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x e y.

(b) La recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) interseca al eje de las x en el punto $(x/2, 0)$.

(c) Toda línea recta, perpendicular a la gráfica de g, pasa por el punto $(0, 1)$.

(3) En los siguientes problemas escribir una ecuación diferencial, que sea un modelo matemático de la situación descrita.

(a) La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P es proporcional a la raíz cuadrada de P.

(b) La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad v de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de v.

(c) La aceleración dv/dt de cierto automóvil deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 kilómetros por hora y la velocidad v del automóvil.

(d) En una ciudad que tiene una población fija de K personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han oído un cierto rumor es proporcional al número de personas que todavía no lo han oído.

(4) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables.

(a) $y' = e^{3x} - x$.

(b) $x\,y' = 1$.

(c) $y' = x\,e^{x^2}$.

(d) $y' = \operatorname{arcsen} x$.

(e) $(1+x)\,y' = x$.

(f) $(1+x^3)\,y' = x$.

(g) $x\,y\,y' = y - 1$.

(h) $x\,y' = (1-2x^2)\tan y$.

(i) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + 1 + y^2 = 0$.

(j) $y \ln y\,dx - x\,dy = 0$.

(k) $y' + y\tan x = 0$.

(l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$.

(m) $\sec^2 x\,dy + \operatorname{cosec} y\,dx = 0$.

(n) $2\,\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$.

(o) $(1 + x^2 + y^2 + x^2\,y^2)\,dy = y^2\,dx$.

(p) $y \ln x \, \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2.$

(q) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+x^2)^{-1/2}}{(1+y^2)^{1/2}}.$

(r) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2\,y^2}{y \operatorname{sen} x}.$

(s) $\dfrac{dy}{dx} = 3\,y.$

(t) $\dfrac{dy}{dx} = 3\,x.$

(u) $(1+x^4)\,y' = x^3.$

(v) $(1+x^4)\,y' = 1.$
(Ayuda: $1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2$).

(5) Determine si la función dada es homogénea. En caso de que sea homogénea, indique su grado de homogeneidad.

(a) $f(x,y) = 2\,x^3 + 2\,x\,y^2 - \dfrac{y^4}{x}.$

(b) $f(x,y) = (3x+2y)\sqrt{x+y}.$

(c) $f(x,y) = x + \dfrac{x^3}{y}$

(d) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x^2}{x+y}\right).$

(e) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{x^3}{y}$

(f) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x+y}\right).$

(6) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0.$

(b) $(y^2+xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$

(c) $2\,x^2\,y\,dx = (3\,x^3+y^3)\,dy.$

(d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\,dx = x\,dy.$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right).$

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{3x+y}.$

(7) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y' = \dfrac{2x-5y}{2x+4y}$.

(b) $y' = \dfrac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$.

(c) $y' = \dfrac{2x-5y+3}{2x-5y-6}$.

(d) $y' = \dfrac{2\,x+y}{x-y}$.

(8) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

(a) $3y' + 12y = 4$.

(b) $x\,\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$.

(c) $x\,dy = (x\ \operatorname{sen} x - y)\,dx$.

(d) $(1+e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x\,y = 0$.

(e) $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$.

(f) $y' - y = 2\,x\,e^{x^2+x}$.

(g) $x\,y' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

(h) $y' - y\tan x = \sec x$.

(9) Hallar la solución que satisface la condición inicial indicada.

(a) $y' - 2\,x\,y = 2\,x\,e^{-x^2}, \qquad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $y' + 2\,y = x^2 + 2\,x, \qquad y(1) = e^{-4}$.

(c) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

(d) $x\,y' - y = x^2\ \operatorname{sen} x, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

(e) $2\,x\,y' - y = 3\,x^2, \qquad y(1) = 1$.

(f) $y' - y = 2\,x\,e^{x^2+x}, \qquad y(\sqrt{2}) = e^2$.

(g) $y' - y\tan x = \sec x, \qquad y(\pi) = 0$.

(10) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales (indique cuál o cuáles son de Bernoulli).

(a) $y' = 3 - 4\,y + y^2$.

(b) $y' = (2 - y)\,(5 - y)$.

(c) $y' = -\dfrac{y}{2}\,(3 - y)$.

(d) $y' = 4 - y^2$.

(11) Utilizando el método más apropiado, halle la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y''' = 17$.

(b) $y' = y^2 - y - 12$.

(c) $x(\operatorname{sen} x)\,y' + (\operatorname{sen} x - x\cos x)\,y = \operatorname{sen} x \cos x - x$.

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,x\,y^2 - x^3}{y^3 - 3\,x^2\,y}$.

(e) $x^2 + x\,y' = 3\,x + y'$.

(f) $\dfrac{dx}{x^2 - x\,y + y^2} = \dfrac{dy}{2\,y^2 - x\,y}$.

(g) $(x - y + 2)\,dx + (x - y + 3)\,dy = 0$.

(h) $e^{-y}\,(1 + y') = 1$.

(i) $(x - y^2\,x)\,dx + (y - x^2\,y)\,dy = 0$.

(j) $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$.

(k) $y' = (y - 1)(y - 2)$.

(l) $y' = \dfrac{2\,x^2 - y^2}{2\,x^2 + y^2}$.

(m) $(x + y - 1)\,dx + (x - y)\,dy = 0$.

(n) $xy' + y = y^2\,x$.

(12) $\star$ Sean a y λ números reales positivos y b un número real. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$y' + a\,y = b\,e^{-\lambda\,x}$$

tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$.

(13) Demostrar que la curva para la cual, la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto de la tangente con la curva, es una parábola.

(14) Un termómetro se encontraba guardado en una habitación cuya temperatura era de $75°$ F. Cinco minutos después de haberlo sacado al exterior el termómetro marcó $65°$ F y otros cinco minutos después marcó $60°$ F. Calcular la temperatura exterior.

(15) Una sustancia radioactiva se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Si un gramo de esta sustancia se reduce a $1/4$ de gramo en 4 horas, determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que un gramo se reduzca a $1/10$ de gramo. Encuentre la vida media de la sustancia (recuerde que la vida media es el tiempo necesario para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad).

(16) El carbono 14 es una sustancia radioactiva que tiene una vida media de aproximadamente 5.700 años. Es importante en arqueología porque el carbono 14 existente en un ser vivo permanece constante durante la vida del ser. Determinar el tiempo transcurrido desde la muerte de un animal si la concentración de carbono 14 en sus restos es igual a la tercera parte de la que corresponde con un animal que vive actualmente.

(17) El número de bacterias en cierto cultivo crece a una velocidad que es igual a la mitad del número de bacterias presente. Si inicialmente hay 10.000 bacterias, hallar el número de bacterias en el instante t.

(18) En una población sana de 100 individuos, igualmente susceptibles a una enfermedad infecciosa, se introduce un individuo infectado.

Supongamos lo siguiente:

(i) Una vez que un individuo es infectado, permanecerá así durante todo el proceso y no será eliminado (no muere).

(ii) Si $x(t)$ es el número de individuos sanos y $y(t)$ es el número de individuos infectados en el instante t, entonces la velocidad a la que se propaga la infección es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$.

Si en diez días hay 20 individuos infectados, determinar en cuántos días habrá 50 individuos infectados.

(19) (Crecimiento limitado) Supongamos que en una población la velocidad de crecimiento es proporcional a una constante menos el número de individuos presentes. Describir y analizar el modelo matemático correspondiente.

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Solución general de la ecuación homogénea. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = f(x)$ en los casos en que f es un polinomio, $f(x) = a^x$ y $f(x) = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$. Aplicaciones: Caída libre, movimiento oscilatorio, caída libre en un medio resistente.

1. Solución general de la ecuación homogénea.

Una ecuación diferencial *lineal de segundo orden con coeficientes constantes* es una ecuación de la forma

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x), \tag{2.1}$$

donde a, b, c son constantes reales, $a \neq 0$ y f es una función continua definida en un intervalo.

Si $f(x) \equiv 0$ se dice que la ecuación es *homogénea*, en otro caso se dice *no homogénea*.

Primero vamos a considerar la ecuación la homogénea, es decir vamos a comenzar con la ecuación

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0. \tag{2.2}$$

En este caso se cumple lo siguiente: Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación (2.2) y C_1 y C_2 son constantes reales entonces $C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ también es solución de la ecuación (2.2) (verificarlo como ejercicio).

Supongamos que una función de la forma

$$y = e^{\lambda x}$$

(λ es una constante a determinar) es solución de la ecuación. Tenemos que

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2\, e^{\lambda x},$$

por lo tanto debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 0 &= a\,y'' + b\,y' + c\,y \\ &= (a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c)\,e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Así que tenemos que la función $y = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación (2.2) si y sólo si

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0.$$

Al polinomio

$$p(\lambda) = a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c$$

se le llama *polinomio característico* de la ecuación (2.2).

Sean λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico. Para hallar la solución general de la ecuación (2.2) debemos considerar tres casos.

Primer caso: Si λ_1 y λ_2 son reales y distintas ($b^2 - 4ac > 0$).

La solución general tiene la forma

$$y = C_1\,e^{\lambda_1 x} + C_2\,e^{\lambda_2 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Segundo caso: Si λ_1 y λ_2 son reales e iguales ($b^2 - 4ac = 0$).

La solución general tiene la forma

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{\lambda_1 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Tercer caso: Si λ_1 y λ_2 son complejas ($b^2 - 4ac < 0$).

En este caso tendremos que existen números reales α y β tales que

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

donde i s la unidad imaginaria ($i^2 = -1$).

La solución general tiene la forma

$$y = (C_1\,\operatorname{sen}\beta x \;+\; C_2\,\cos\beta x)\,e^{\alpha x}.$$

EJEMPLO 2.1.

(1) Hallar la solución general de

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda - 2$ y sus raíces son 1 y -2, por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\, e^x + C_2\, e^{-2x}.$$

(2) Hallar la solución general de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ y sus raíces son

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\,i}{2} = -1 \pm 2\,i,$$

por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1\ \mathrm{sen}(2x) + C_2\ \cos(2x)\,)\, e^{-x}.$$

(3) Hallar la solución general de

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2$ y tiene una raíz doble en $\lambda = 2$, por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{2x}.$$

2. Solución general de la ecuación no homogénea.

En esta sección vamos a estudiar cómo resolver la ecuación (2.1) para algunos casos particulares de f, más precisamente, vamos a considerar la ecuación

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x), \tag{2.3}$$

en los casos en que $f(x) = k_1 \mathrm{sen}\, x + k_2 \cos x$ ó $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, donde P es un polinomio.

OBSERVACIÓN 2.2. Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación no homogénea (2.3) entonces $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$, por esto tenemos el siguiente resultado: *La solución general de la ecuación no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación no homogénea.*

Por la observación anterior, para hallar la solución general de la ecuación no homogénea (2.3) basta hallar una solución particular de la no homogénea; después a esta solución particular le sumamos la solución general de la homogénea, que aprendimos a hallar en la sección previa.

Vamos a estudiar caso por caso.

Caso 1: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, donde P_n es un polinomio de grado n.
Es necesario considerar tres subcasos.

(i) α no es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

(ii) α es raíz simple de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x\, Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

(iii) α raíz doble de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x^2\, Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

Caso 2: $f(x) = k_1 \operatorname{sen}(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$, donde k_1, k_2 y β son constantes.
Es necesario considerar dos subcasos.

(i) $\beta\, i$ no es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\beta x) + B \cos(\beta x),$$

donde A y B son constantes.

(ii) $\beta\, i$ es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x\,(A \operatorname{sen}(\beta x) + B \cos(\beta x)\,),$$

donde A y B son constantes.

OBSERVACIÓN 2.3. En el Caso 1 están contenidos el caso en que $f(x)$ es un polinomio (tomar $\alpha = 0$) y el caso en que $f(x) = a^x$ (tomar $P_n(x) \equiv 1$, $\alpha = \ln a$).

OBSERVACIÓN 2.4. Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x) + f_2(x)$$

basta sumar una solución particular de la ecuación $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x)$ con una solución particular de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_2(x)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de superposición*.

EJEMPLO 2.5.

(1) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

El polinomio característico de la ecuación es $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ y tiene raíces -1 y -3, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x}$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = A\,x + B.$$

En este caso $y' = A$, $y'' = 0$, sustituyendo en la ecuación

$$4A + 3(Ax + B) = x,$$

de donde

$$3Ax + 4A + 3B = x,$$

igualando los coeficientes y resolviendo el sistema lineal correspondiente, obtenemos

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{4}{9},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\,x - \frac{4}{9}.$$

(2) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 9y = xe^{3x}.$$

El polinomio característico de la ecuación es $\lambda^2 + 9$ y tiene raíces $3\,i$ y $-3\,i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $C_1\,\operatorname{sen}(3x) + C_2\,\cos(3x)$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = (A\,x + B)\,e^{3x}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= A\,e^{3x} + (A\,x + B)\,3\,e^{3x} = (3Ax + A + 3B)\,e^{3x},\\ y'' &= 3A\,e^{3x} + (3Ax + A + 3B)\,3\,e^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)\,e^{3x}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= (9Ax + 6A + 9B + 9Ax + 9B)\,e^{3x}\\ &= (18Ax + 6A + 18B)\,e^{3x}, \end{aligned}$$

por lo tanto, debe cumplirse la igualdad

$$(18Ax + 6A + 18B)\,e^{3x} = x\,e^{3x},$$

o, lo que es lo mismo

$$18Ax + 6A + 18B = x.$$

Igualando los coeficientes y resolviendo el sistema lineal correspondiente, obtenemos

$$A = \frac{1}{18}, \qquad B = -\frac{1}{54},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\,\operatorname{sen}(3x) + C_2\,\cos(3x) + \left(\frac{1}{18}\,x - \frac{1}{54}\right)\,e^{3x}.$$

(3) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ y sus raíces son

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\,i}{2} = -1 \pm 2\,i,$$

por lo tanto la solución general de la homogénea es $y = (C_1\,\operatorname{sen}(2x) + C_2\,\cos(2x)\,)\,e^{-x}$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = A\,\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{1}{5},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)\,)\,e^{-x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x.$$

3. Aplicaciones

3.1. Caída libre en el vacío.

Supongamos que dejamos caer un cuerpo desde cierta altura h, con velocidad inicial 0. Sea m es la masa del cuerpo, g la aceleración de gravedad y $x(t)$ la altura del cuerpo en el instante t. Si despreciamos la resistencia del aire, entonces x satisface la ecuación

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

con condición inicial $x(0) = h$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$.

La solución de la ecuación anterior (verificarlo como ejercicio) es

$$x(t) = h - \frac{g}{2}\,t^2.$$

Se observa que la velocidad del cuerpo es igual a

$$\frac{dx}{dt} = -g\,t,$$

por lo tanto el valor absoluto de la velocidad se mantiene incrementándose de manera lineal, hasta que el cuerpo llega al suelo.

3.2. Caída libre en un medio resistente.

Nuevamente supongamos que dejamos caer un cuerpo desde cierta altura h, con velocidad inicial 0. Sea m es la masa del cuerpo, g la aceleración de gravedad y $x(t)$ la altura del cuerpo en el instante t. En muchos casos la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo, por lo tanto x satisface la ecuación

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\,\frac{dx}{dt},$$

con condición inicial $x(0) = h$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$.

Analicemos la ecuación. Si dividimos entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K\,\frac{dx}{dt} = -g,$$

donde $K = \dfrac{k}{m}$ es una constante positiva.

La solución que satisface la condición inicial es (verificarlo como ejercicio)

$$x(t) = h - \frac{g}{K^2} + \frac{g}{K^2}\, e^{-Kt} - \frac{g}{K}\, t.$$

Se observa que la velocidad del cuerpo, que es igual a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{K}\,(e^{-Kt} + 1)$$

está acotada y tiende a estabilizarse a medida que t se incrementa..

3.3. Oscilaciones de un resorte.

Supongamos que tenemos un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo al que se le sujeta un cuerpo de masa m al extremo inferior. En este caso el peso $P = m\,g$ de la masa estirará el resorte una distancia s_o. Esto da la posición de equilibrio del sistema.

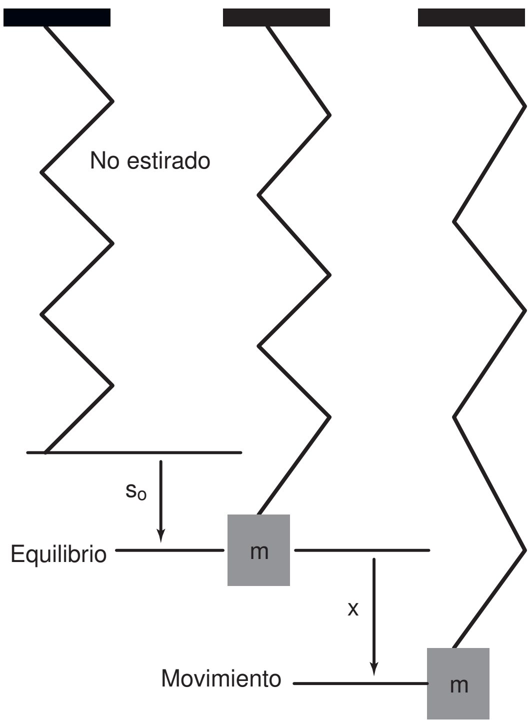


Figura 2.1. Resorte

Si la masa se desplaza de su posición de equilibrio y después se le suelta, en ciertas condiciones ideales, el desplazamiento x satisface la ecuación diferencial

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x, \tag{2.4}$$

donde k es una constante positiva que depende del resorte (este hecho se conoce como ley de Hooke).

Si dividimos la ecuación (2.4) entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2.5}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

Las raíces del polinomio característico de esta ecuación son $\omega\, i$ y $-\omega\, i$, por lo tanto su solución general es de la forma

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Las constantes C_1 y C_2 se pueden calcular en función de la posición inicial $x(0)$ y la velocidad inicial $x'(0)$.

El gráfico de la solución luce así.

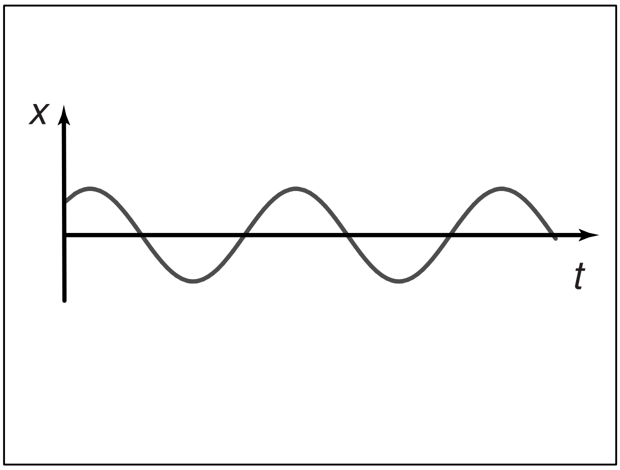


Figura 2.2.

El modelo anterior es un tanto irreal, ya que según el mismo el resorte no se detiene jamás, obteniéndose un movimiento periódico perpetuo. Por la experiencia práctica sabemos que esto no puede ser.

Una forma simple de mejorar el modelo es suponer que sobre el resorte actúa una fuerza que se opone al movimiento y que es proporcional a dx/dt. En este caso debemos modificar la ecuación (2.4) de la siguiente manera

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \beta\,\frac{dx}{dt}. \tag{2.6}$$

Dividiendo entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dx}{dt} + \omega^2\,x = 0, \tag{2.7}$$

donde $2\,\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$ (se escoge $2\,\lambda$ para simplificar las operaciones).

Por supuesto existen otros tipos de modelo, en los que se supone que la resistencia proporcional al cuadrado de dx/dt y que nos lleva a ecuaciones más complicadas.

Las raíces del polinomio característico de la ecuación (2.7) son

$$\alpha_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \qquad \alpha_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Dependiendo del signo de $\lambda^2 - \omega^2$ podemos distinguir tres casos.

Caso 1: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1\,e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2\,e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\,).$$

En este caso se produce un movimiento suave no oscilatorio y se dice que el sistema está *sobreamortiguado.*

Caso 2: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1 + C_2\,t\,).$$

En este caso se produce un movimiento similar al del caso sobreamortiguado y se dice que el sistema está *críticamente amortiguado.*

Caso 3: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1\,\cos\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t + C_2\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t\,).$$

En este caso se produce un movimiento oscilatorio, cuyas amplitudes de oscilación tienden a 0 cuando t tiende a ∞. En esta caso se dice que el sistema está *subamortiguado.*

Las constantes C_1 y C_2 se pueden calcular en función de las condiciones iniciales del problema.

Las siguientes tres gráficas corresponden con los casos 1, 2 y 3 respectivamente

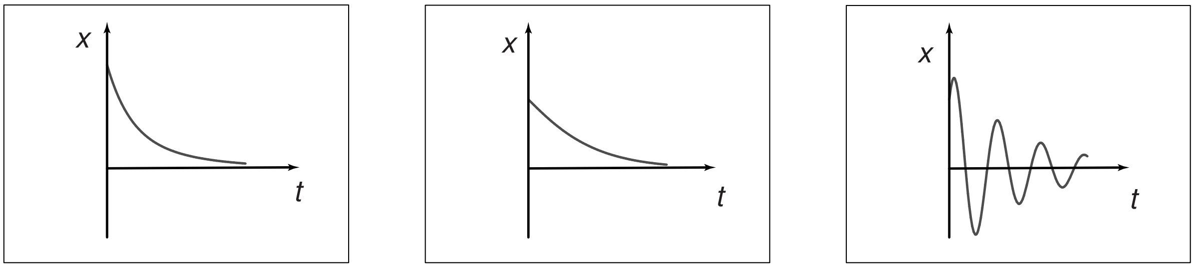


FIGURA 2.3.

Ejercicios.
Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' = y$.

(b) $y'' - 4y = 0$.

(c) $y'' + 4y = 0$.

(d) $4y'' + y = 0$.

(e) $y'' - y' = 0$.

(f) $y'' + y' = 0$.

(g) $y'' + 3y' - 10y = 0$.

(h) $2y'' - 7y' + 3y = 0$.

(i) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

(j) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

(k) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

(l) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

(m) $3y'' + 2y' + y = 0$.

(n) $2y'' + 2y' + y = 0$.

(2) Para cada una de las siguientes funciones, encontrar una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, tal que la función dada es solución de la ecuación.

(a) $f(x) = 3\,e^{2x}$.

(b) $f(x) = \cos x + 3 \operatorname{sen} x$.

(c) $f(x) = C_1\,e^{x} + C_2\,x\,e^{x}$.

(d) $f(x) = 3\,e^{2x} + 5\,e^{-x}$.

(3) Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, hallar la solución que satisface la condición inicial dada.

(a) $y'' = y$; $y'(0) = y(0) = 1$.

(b) $9y'' + 6y' + 4y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 7.$

(c) $y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 7, y'(0) = 11.$

(d) $y'' - 6y' + 25y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 1.$

(4) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' = y + e^x.$

(b) $y'' - 4y = e^x + e^{2x} + \operatorname{sen} 2x.$

(c) $y'' + 4y = x^3 + 5.$

(d) $4y'' + y = \cosh x.$

(e) $y'' - y' = x^2\, e^x.$

(f) $y'' + 16y = e^{3x}.$

(g) $y'' - y' - 2y = 3x + 4.$

(h) $y'' - y' - 6y = 2\operatorname{sen} 3x + \cos 5x.$

(i) $4y'' + 4y' + y = xe^{3x}.$

(j) $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x.$

(k) $2y'' + 4y' + 7y = x^2.$

(l) $y'' - 4y = \cosh 2x.$

(5) Resuelva e interprete (en términos del movimiento de un resorte) el problema a valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16\,x = 0$$

$$x(0) = 10 \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

CAPÍTULO 3

Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden.

Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, utilizando el método de eliminación. Aplicación: competencia entre especies.

1. Motivación.

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones diferenciales donde la incógnita (o variable dependiente) es una función a valores reales. Al modelar situaciones de la vida real aparecen, de manera natural, ecuaciones diferenciales con dos o más funciones incógnitas, siendo cada una función de una misma variable dependiente (por lo general, el tiempo). Tales problemas conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales. Vamos a ilustrar esta situación considerando un ejemplo muy sencillo.

Supongamos que lanzamos un proyectil de masa m, desde el suelo, con rapidez inicial v y ángulo de lanzamiento α. Este proyectil se va a mover en un plano. Para describir el movimiento consideraremos un sistema de coordenadas xy en este plano, tal como se ilustra en la siguiente figura.

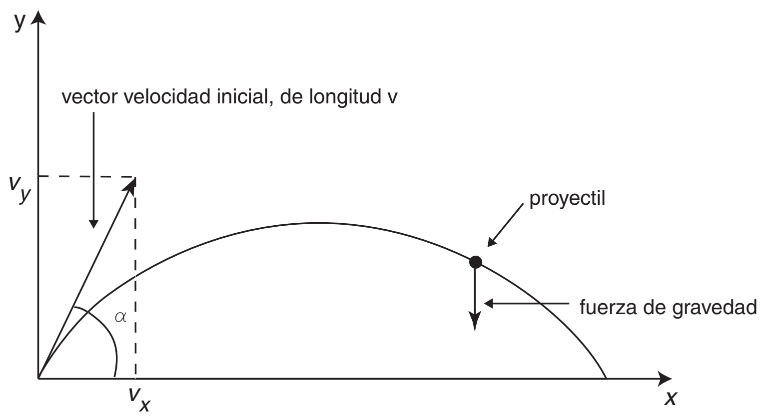


FIGURA 3.1. Lanzamiento de un proyectil

En nuestro modelo vamos a despreciar la resistencia del aire. Denotaremos por t el tiempo transcurrido desde el instante en que se lanza el proyectil, $x(t)$ denotará la primera coordenada del proyectil en el instante t e $y(t)$ la segunda.

Como en la dirección horizontal no actúa ninguna fuerza tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

En la dirección vertical actúa la fuerza de gravedad, por lo tanto tenemos que

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -m\,g,$$

donde g es la aceleración de gravedad.

Además, ya que hemos colocado el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento tenemos que

$$x(0) = y(0) = 0.$$

La velocidad inicial en la dirección horizontal es la componente horizontal del vector velocidad inicial y con la componente vertical la situación es análoga.

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_x = v\cos\alpha\,, \qquad \frac{dy}{dt}(0) = v_y = v\operatorname{sen}\alpha.$$

El análisis anterior nos permite concluir que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\,g, \end{cases} \tag{3.1}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0, \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = v\cos\alpha, \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = v\operatorname{sen}\alpha. \end{cases}$$

Por lo que ya hemos estudiado de ecuaciones lineales de segundo orden tenemos que

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} x(t) = (v \cos \alpha) t \\[2mm] y(t) = (v \operatorname{sen} \alpha) t - \dfrac{1}{2} \, g \, t^2 \end{cases}
$$

A continuación vamos a hacer un análisis detallado de la solución en el caso particular en que la rapidez inicial es de 100 metros/segundos, el ángulo de lanzamiento de 60° y la masa del proyectil es de 10 gramos (por simplicidad supondremos que la aceleración de gravedad es de 10 metros/segundos^2).

De la ecuación (3.2) obtenemos que, en este caso,

$$
(3.3) \qquad x(t) = 50 \, t,
$$

$$
(3.4) \qquad y(t) = 50 \sqrt{3} \, t - 5 \, t^2.
$$

Las dos ecuaciones anteriores nos dan una descripción detallada del movimiento del proyectil, ya que para cada instante t, nos indican la posición $(x(t), y(t))$ del proyectil.

Para averiguar la forma de la trayectoria del proyectil procedemos de la siguiente manera: primero despejamos t de la ecuación (3.3) y obtenemos

$$
t = \frac{x}{50},
$$

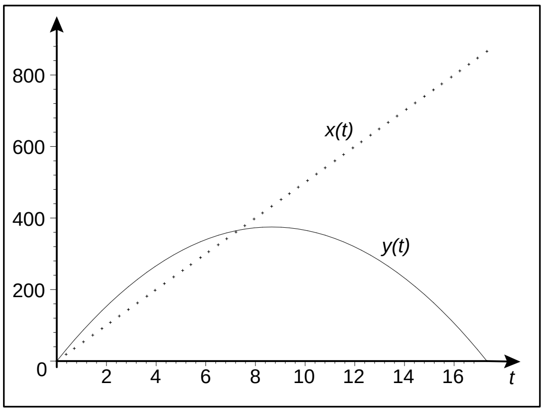
después substituimos este valor de t en la ecuación (3.4) y obtenemos

$$
y = \sqrt{3} \, x - \frac{5 \, x^2}{2500} = (\sqrt{3} - \frac{x}{500}) \, x.
$$

De esta última fórmula, que nos expresa la altura y del proyectil, en función de su coordenada horizontal x, podemos deducir que la trayectoria del proyectil tiene forma de parábola. Esta parábola corta al eje x en los puntos 0 y $x = 500 \sqrt{3} \approx 866,02$ y su valor máximo es de 375. Por lo tanto podemos concluir que el proyectil vuelve a tocar tierra a $866,02$ metros del punto de donde fue lanzado y alcanza una altura máxima de 375 metros.

Si resolvemos la ecuación $y(t) = 0$ (ver fórmula (3.4)) obtenemos $t = 10 \sqrt{3} \approx 17,32$, por lo tanto el proyectil permaneció en el aire durante 17,32 segundos.

En la primera de las siguientes figuras mostramos el gráfico de x e y en función de t, observamos que x es una función lineal de t y que el gráfico de y en función de t es una parábola que corta al eje x en aproximadamente el punto $17,32$. La segunda figura corresponde con el gráfico de y como función de x, observamos que es un trozo de parábola, que corta al eje x en 0 y en $866,02$ y alcanza una altura máxima de 375.



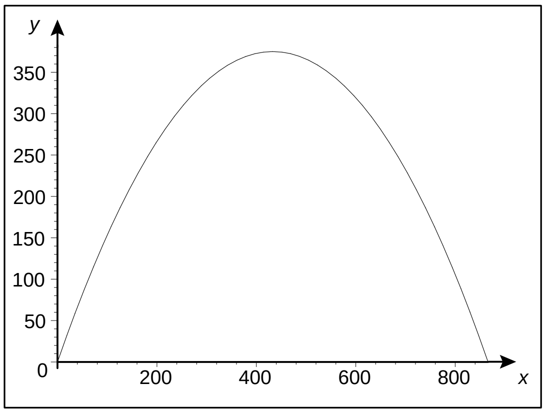


Figura 3.2.

2. El método de eliminación.

En la sección anterior resolvimos un sistema de dos ecuaciones lineales de segundo orden. Fue muy fácil resolverlo, ya que el problema se redujo a resolver por separado dos ecuaciones lineales de segundo orden, debido a que las ecuaciones eran independientes.

El enfoque más elemental para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes consiste en la eliminación de variables dependientes mediante combinaciones adecuadas de parejas de ecuaciones. El objeto de este procedimiento es eliminar sucesivamente las variables dependientes hasta que quede solamente una ecuación con una única variable dependiente. En general esta ecuación será lineal y de orden superior y podrá resolverse con los métodos del capítulo anterior. Después de que se tenga la solución, las otras variables dependientes se determinarán a su vez usando las ecuaciones diferenciales originales o aquellas que hayan aparecido durante el proceso de eliminación. Este método de eliminación para sistemas diferenciales lineales se parece bastante al que se emplea para resolver sistemas algebraicos por eliminación de variables, hasta que queda sólo una. Es de lo más conveniente para el caso de sistemas pequeños y manejables.

Para grandes sistemas de ecuaciones diferenciales, así como para análisis teóricos, son preferibles los métodos matriciales, que están más allá de los objetivos de este curso.

En esta sección vamos a estudiar como resolver sistemas que constan de dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, utilizando el método de eliminación. Después veremos algunos problemas en los que aparecen este tipo de sistemas.

Vamos a fijar y a explicar la notación que usaremos en lo que resta de este capítulo.

Cuando consideramos sistemas de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas es usual denotar a la variable independiente por t y a las funciones incógnitas (o variables dependientes) por x e y ó $x(t)$ e $y(y)$. Es importante notar la diferencia con el capítulo anterior en el que x denotaba la variable independiente y la incógnita (o variable dependiente) la denotábamos por y.

También es usual usar $\dot{x}$ para denotar la derivada primera de $x(t)$ con respecto a t y $\ddot{x}$ para la segunda. Análogamente se usan $\dot{y}$ y $\ddot{y}$. Con esta notación el sistema (3.1) queda así:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -m\, g. \end{cases}$$

2.1. Un ejemplo sencillo. Para ilustrar el método de eliminación vamos a comenzar resolviendo un ejemplo sencillo. Supongamos que queremos hallar la solución general del siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Si derivamos la primera ecuación del sistema obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{y},$$

si usamos la segunda ecuación del sistema y substituimos, obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + x - y. \tag{3.6}$$

Si de la primera ecuación del sistema despejamos y obtenemos

$$y = \dot{x} - x. \tag{3.7}$$

Si substituimos en la ecuación (3.6), obtenemos

$$\ddot{x} = 2\, x, \tag{3.8}$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, que ya sabemos como resolver.

El polinomio característico de la ecuación es (3.8) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$, tiene dos raíces reales que son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, por lo tanto, su solución general es

$$x = C_1\, e^{\sqrt{2}\, t} + C_2\, e^{-\sqrt{2}\, t},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Substituyendo en (3.7) obtenemos

$$y = (\sqrt{2} - 1)\, C_1\, e^{\sqrt{2}\, t} - (\sqrt{2} + 1)\, C_2\, e^{-\sqrt{2}\, t}.$$

En conclusión, la solución general de la ecuación (3.5) es

$$\begin{aligned} x &= C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t}, \\ y &= (\sqrt{2}-1)\, C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - (\sqrt{2}+1)\, C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Si además nos hubiesen dado una condición inicial, debemos resolver un sistema de ecuaciones para determinar C_1 y C_2. Mas precisamente, supongamos que nos hubiesen pedido la solución del sistema (3.5) que satisface

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = -2.$$

Procedemos de la siguiente manera: substituimos en (3.9) y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ (\sqrt{2}-1)\, C_1 - (\sqrt{2}+1)\, C_2 = -2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $C_1 = C_2 = 1$, por lo tanto la solución particular que satisface la condición inicial dada es

$$\begin{aligned} x &= e^{\sqrt{2}\,t} + e^{-\sqrt{2}\,t}, \\ y &= (\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{2}\,t} - (\sqrt{2}+1)\, e^{-\sqrt{2}\,t}, \end{aligned}$$

2.2. El caso general. A continuación vamos a explicar cómo proceder con un sistema general

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x + b\,y, \\ \dot{y} = c\,x + d\,y, \end{cases} \tag{3.10}$$

donde a, b, c y d son constantes reales.

Caso 1: $b = 0$. En este caso la primera ecuación del sistema es

$$\dot{x} = a\,x,$$

que es lineal de primer orden. Su solución general es

$$x = C_1\, e^{a\,t}.$$

Al substituir en la segunda ecuación obtenemos

$$\dot{y} = c\,C_1\, e^{a\,t} + d\,y,$$

es decir

$$\dot{y} - d\,y = c\,C_1\, e^{a\,t}.$$

Esta última ecuación es lineal de primer orden y ya sabemos como resolverla.

Caso 2: $b \neq 0$. El primer paso es derivar con respecto a t la primera ecuación, para obtener

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,\dot{y}.$$

Después substituimos la segunda ecuación del sistema en la ecuación anterior y obtenemos

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,c\,x + b\,d\,y.$$

Despejamos y de la primera ecuación del sistema (notar que en el caso anterior esto no era posible) y obtenemos

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - a\,x).$$

Finalmente substituimos en la ecuación anterior y obtenemos

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,c\,x + b\,d\,\frac{1}{b}(\dot{x} - a\,x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (a\,d - b\,c)\,x = 0.$$

Esta última ecuación es lineal, homogénea, de segundo orden y con coeficientes constantes, por lo tanto podemos hallar su solución general, utilizando el método estudiado en el capítulo anterior. Después que tenemos esta solución general utilizamos la igualdad $y = \dfrac{1}{b}(\dot{x} - a\,x)$, para hallar y.

Si el problema incluya una condición inicial del tipo

$$\begin{cases} x(t_o) = x_o, \\ y(t_o) = y_o, \end{cases} \tag{3.11}$$

después de obtener la solución general resolvemos el sistema (3.11) para hallar el valor que deben tener las constantes que aparecen en la solución general.

Ejemplo 3.1. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3\,y, \\ \dot{y} = -6\,x - y, \end{cases} \tag{3.12}$$

Derivando la primera ecuación obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + 3\,\dot{y},$$

sustituyendo $\dot{y}$ de la segunda ecuación,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - 3\,y,$$

despejando y de la primera ecuación y sustituyendo,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - 3\,\frac{\dot{x} - x}{3},$$

es decir,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - \dot{x} + x,$$

simplificando,

$$\ddot{x} + 17\,x = 0.$$

Luego

$$x(t) = C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) + C_2\,\cos(\sqrt{17}\,t).$$

Usando que

$$\dot{y} = \frac{\dot{x} - x}{3},$$

obtenemos

$$y(t) = \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_1\,\cos(\sqrt{17}\,t)\; - \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_2\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_2\cos(\sqrt{17}\,t).$$

En conclusión la solución general del sistema es

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) + C_2\,\cos(\sqrt{17}\,t)\\
y(t) &= \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_1\,\cos(\sqrt{17}\,t)\; - \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_2\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_2\cos(\sqrt{17}\,t),
\end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

3. Competencia e interacción entre especies.

Consideremos un área cerrada en la que conviven dos especies de seres vivos (animales o vegetales). Sea t el tiempo y sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ el número de individuos de cada una de las especies, expresado como función de t.

Vamos a suponer que existe cierta interacción entre ambas especies, por ejemplo:

(i) Tenemos dos especies animales y una de las especies es alimento de la otra, tal como es el caso de zorros que devoran conejos, tiburones que devoran otros peces, escarabajos que devoran pulgones.

(ii) Especies de insectos que favorecen la polinización de plantas.

(iii) Especies de árboles que le dan sombra a otra especie de árbol, impidiendo y limitando su crecimiento.

Es de mucho interés encontrar modelos matemáticos que permitan describir y predecir el comportamiento de las especies que interactúan. Vamos a trabajar con modelos muy simples, la primera simplificación es que supondremos que el crecimiento de cada una de las dos especies que interactúan depende solamente de ellas dos, es decir, ignoraremos los factores externos (factores ambientales, interacción con otras especies diferentes, abundancia o escasez de alimento para la presa, etc).

También vamos a suponer que, en un intervalo de tiempo Δt, el proceso de cambio en el número de individuos de cada especie se rige por las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta x = \text{variación}\\ \text{en la especie 1}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{variación en la}\\ \text{especie 1 sin}\\ \text{interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{cambios debidos}\\ \text{a la interacción}\\ \text{con la especie 2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta y = \text{variación}\\ \text{en la especie 2}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{variación en la}\\ \text{especie 2 sin}\\ \text{interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{cambios debidos}\\ \text{a la interacción}\\ \text{con la especie 1}\end{array}\right\}$$

Si dividimos entre Δt y hacemos tender t a 0, obtenemos

$$\dot{x} = \left\{\begin{array}{c}\text{tasa de cambio}\\ \text{en la especie 1}\\ \text{sin interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{tasa de cambio debido}\\ \text{a la interacción con}\\ \text{la especie 2}\end{array}\right\}$$

$$\dot{y} = \left\{\begin{array}{c}\text{tasa de cambio}\\ \text{en la especie 2}\\ \text{sin interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{tasa de cambio debido}\\ \text{a la interacción con}\\ \text{la especie 1}\end{array}\right\}$$

Como simplificación adicional vamos a suponer lo siguiente:

(a) La tasa de cambio de individuos en cada especie, sin interacción, es proporcional al número de individuos de la especie.

(b) La tasa de cambio en la especie 1 debido a la interacción con la especie 2 es proporcional al número de individuos de la especie 2 y viceversa.

Con esta suposición llegamos al siguiente sistema:

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x} &= a\,x + b\,y,\\ \dot{y} &= c\,x + d\,y,\end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

donde a, b, c y d son números reales, cuyo valor y signo depende del tipo de interacción entre las especies.

A continuación vamos a estudiar un ejemplo basados en este modelo.

Ejemplo 3.2. Supongamos que tenemos dos especies de animales, una de las cuales es presa y la otra es depredadora. Tal como antes t es el tiempo, que lo mediremos en años.

El número de presas en el instante t, contadas en miles de individuos, lo denotaremos por $x(t)$.

El número de depredadores en el instante t, contados en miles de individuos, lo denotaremos por $y(t)$.

Vamos a suponer que x e y satisfacen el siguiente sistema.

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x} &= 3\,x - \,y,\\ \dot{y} &= 3\,x + \,y,\end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

con condición inicial

$$x(0) = 3 \qquad\qquad y(0) = 2.$$

Es decir, de acuerdo con la discusión previa, estamos suponiendo lo siguiente:

(a) La tasa de cambio de individuos en cada especie, sin interacción, es proporcional al número de individuos de la especie. La constante de proporcionalidad para las presas es 3 y para los depredadores es 1.

(b) La tasa de disminución en la especie presa, debido a su interacción con la especie depredadora, es proporcional al número de depredadores, la constante de proporcionalidad es 1 (que aparece con signo negativo porque es disminución).

(c) La tasa de aumento en la especie depredadora, debido a su interacción con la especie presa, es proporcional al número de presas y la constante de proporcionalidad es 3.

(d) Inicialmente hay 3.000 presas y 2.000 depredadores.

La solución de esta ecuación es (hacerlo a manera de ejercicio)

$$x(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t) + 3\,\cos(\sqrt{2}\,t) \right) e^{2t},$$

$$y(t) = \left(\frac{7\,\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t) + 2\,\cos(\sqrt{2}\,t) \right) e^{2t}.$$

Examinemos el comportamiento del modelo en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. La primera de las siguientes figuras nos muestra los gráficos de x e y en función de t, la segunda nos muestra los puntos de la forma $(x(t), y(t))$, para $0 \leq t \leq 1$ (esto es lo que se llama una trayectoria del sistema).

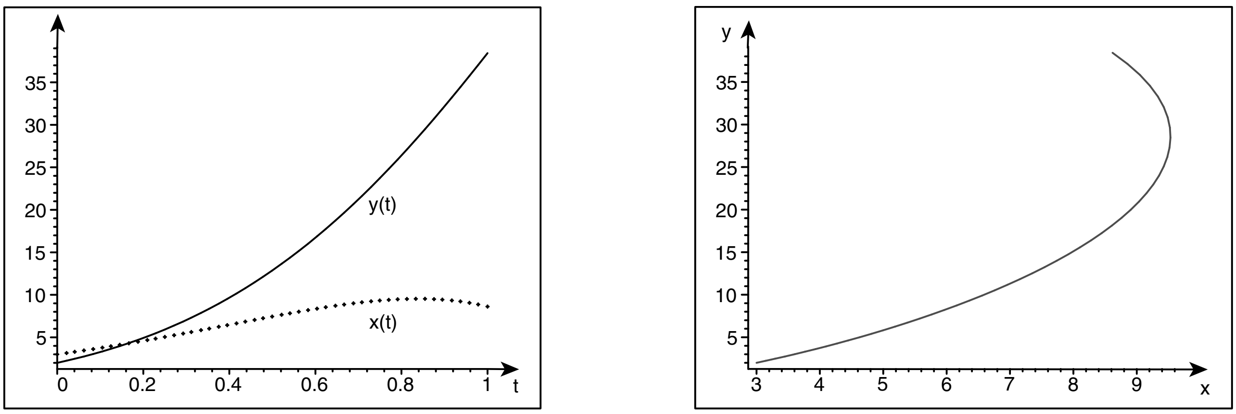


FIGURA 3.3. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 1$

Lo que se observa es bastante natural, al principio ambas especies comienzan a aumentar en número y después, cuando hay un aumento significativo del número de depredadores, comienza a disminuir el número de presas. La trayectoria del sistema refleja claramente esta situación.

Veamos ahora que ocurre si consideramos un intervalo de tiempo mayor, por ejemplo $0 \leq t \leq 2$. En la siguiente figura tenemos los gráficos de x e y en función de t.

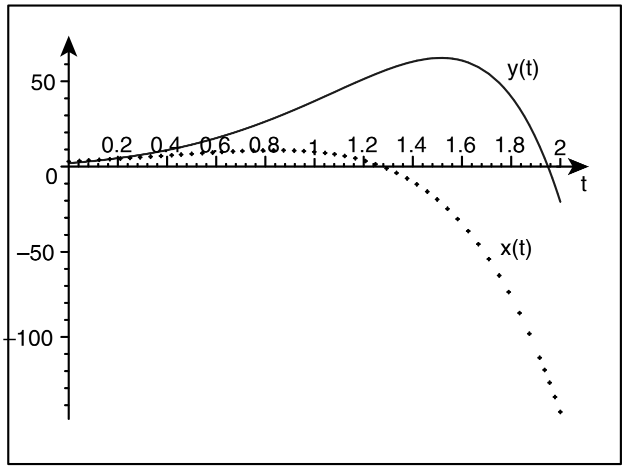


Figura 3.4. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 2$

Aquí comenzamos a observar una situación que no se corresponde con nuestro problema: ¡el número de individuos comienza a tomar valores negativos!

Esta situación se nos presenta porque, para obtener un sistema de ecuaciones cuya solución estuviese a nuestro alcance, hemos simplificado excesivamente el modelo y esto introduce errores. Por ejemplo en el sistema (3.14), observamos que $\dot{y}$ puede ser positiva aunque x sea igual a cero, es decir los depredadores se pueden reproducir sin alimento.

Lo anterior no quiere decir que debamos desechar nuestro modelo sencillo por malo, lo que realmente ocurre es que este modelo resulta adecuado para un intervalo pequeño de tiempo. Notemos que si los depredadores logran almacenar algo de alimento podrían seguirse reproduciendo durante un tiempo en ausencia de presas, pero esta situación está limitada en el tiempo.

Podemos hacer una analogía con el crecimiento exponencial y el logístico: la ecuación diferencial que corresponde con el crecimiento exponencial la podemos ver como una simplificación, para valores pequeños de la función, de la ecuación logística y el crecimiento exponencial es similar al logístico cerca de cero.

4. Las ecuaciones predador-presa de Lotka y Volterra.

En esta sección vamos a estudiar un modelo clásico para una situación depredador presa. Este modelo fue ideado alrededor del año 1920 por el matemático italiano Vito Volterra, (1860-1940) y, desarrollado independientemente en la misma época, por el biofísico austriaco Alfred James Lotka, (1880-1940).

Volterra estudiaba las variaciones periódicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces-alimento en el Mar Adriático.

Tal como antes, sea $x(t)$ el número de presas y sea $y(t)$ el número de depredadores en el instante t. En este modelo se supone lo siguiente:

(a) En ausencia de depredadores la población de presas crecería a una tasa natural proporcional al número de individuos.

(b) En ausencia de presas la población de depredadores disminuye a una tasa proporcional al número de individuos.

(c) Cuando tanto las presas como los depredadores están presentes, ocurre una combinación de estas tasas de crecimiento y decrecimiento, en la que la población de presas disminuye y la de los depredadores aumenta, en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Se supone además que la frecuencia de encuentros es proporcional al producto $x\,y$, ya que al aumentar cualquiera de las dos poblaciones aumenta el número de encuentros.

Al interpretar todo lo anterior, en términos de derivadas, obtenemos que x e y satisfacen un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x - B\,x\,y, \\ \dot{y} = -C\,y + D\,x\,y, \end{cases} \tag{3.15}$$

donde A, B, C y D son constantes positivas.

Este sistema de ecuaciones, que a simple vista se parece a los que hemos estudiado, no es nada sencillo. No es posible hallar sus solución de manera explícita, mediante métodos numéricos es posible aproximar sus soluciones.

Consideremos el siguiente caso particular

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x\,y, \\ \dot{y} = (0,3)\,x\,y - (0,3)\,y, \end{cases} \tag{3.16}$$

con condición inicial

$$x(0) = 2 \qquad\qquad y(0) = 2.$$

Suponemos que x e y representan al número de presas y depredadores, contadas en miles de individuos y t es el tiempo medido en semanas.

En la siguiente figura tenemos los gráficos de las soluciones.

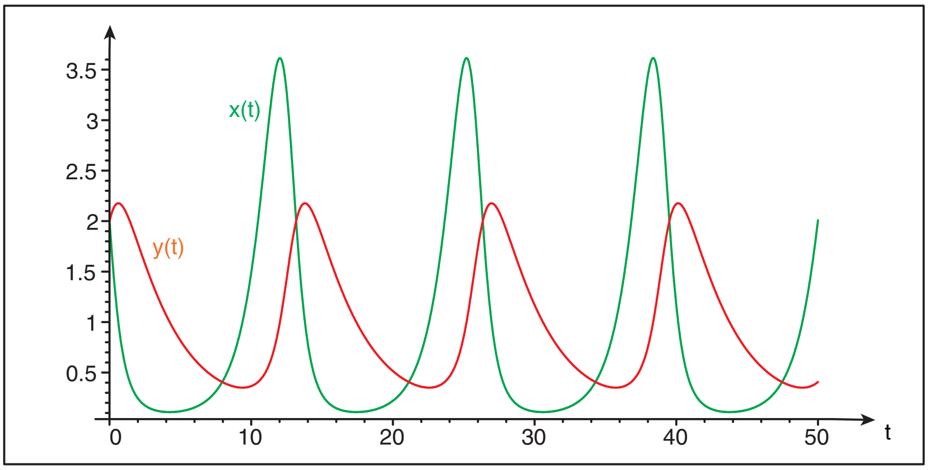


FIGURA 3.5. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 50$

Se observa que el número de presas y de depredadores comienza a disminuir muy rápidamente hasta casi extinguirse, con cierto desfase entre presas y depredadores. En el momento en que hay muy pocos depredadores comienza a aumentar el número de presas y después el número de depredadores alcanzándose valores máximos con desfase y entrando en un ciclo que se repite.

La siguiente figura muestra la trayectoria correspondiente.

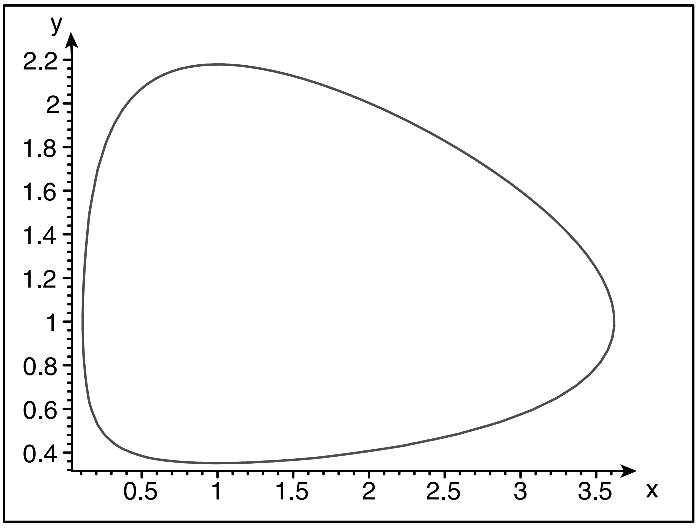


FIGURA 3.6. Trayectoria del sistema

5. Sección optativa: Uso del computador para resolver y analizar ecuaciones diferenciales.

Hoy en día existen paquetes tales como el "Maple" que dan directamente la solución de una ecuación diferencial y también de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, si estamos usando el programa Maple y queremos hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3\,y, \\ \dot{y} = -6\,x - y, \end{cases} \tag{3.17}$$

(ver Ejemplo 3.1) debemos colocar la siguiente instrucción:

```
sys1 := [diff(x(t),t) = x(t)+3*y(t), diff(y(t),t) = -6*x(t)-y(t)];
soll := dsolve(sys1);
```

Una vez que hemos colocado la instrucción y pulsamos la tecla "Enter", obtenemos

$$sys1 := [\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + 3\,\mathrm{y}(t),\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = -6\,\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)]$$

$$sol1 := \{\mathrm{x}(t) = \mathit{C1}\,\sin(\sqrt{17}\,t) + \mathit{C2}\,\cos(\sqrt{17}\,t),$$

$$\mathrm{y}(t) = \frac{1}{3}\,\mathit{C1}\,\cos(\sqrt{17}\,t)\,\sqrt{17} - \frac{1}{3}\,\mathit{C2}\,\sin(\sqrt{17}\,t)\,\sqrt{17} - \frac{1}{3}\,\mathit{C1}\,\sin(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,\mathit{C2}\,\cos(\sqrt{17}\,t)\}$$

Igualmente el Maple nos permite obtener gráficos de funciones y los gráficos de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Muchos de los gráficos que aparecen en esta guía han sido elaborados usando este programa.

En este punto es importante hacer énfasis en lo siguiente: Aunque contamos con herramientas muy poderosas que permiten obviar cálculos y procedimientos tediosos, es muy importante practicar mucho "a mano" al momento de aprender las técnicas. La destreza así adquirida facilitará el trabajo a la hora de utilizar instrumentos más sofisticados. La siguiente analogía es válida: el uso que puede darle a una calculadora una persona que no domina la aritmética elemental es sumamente pobre, así que quien no domine los conceptos y las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales podrá aprovechar muy poco el computador como herramienta auxiliar.

Ejercicios.
Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden.

(1) Hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -6x - 2y. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{v} = 2v - 2w, \\ \dot{w} = -5w - 2v. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

(k) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

(l) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

(m) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

(n) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 5x - 5y. \end{cases}$

(2) Hallar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales con condición inicial.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 5x - y, & y(0) = 3. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x - y, & y(0) = -1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{v} = 2v - 2w, & v(0) = 0, \\ \dot{w} = 3v + 5w, & w(0) = 2. \end{cases}$

(3) $\star$ Dos envases están inicialmente llenos de agua pura. El envase A tiene una capacidad de $0,5$ litros y el envase B una capacidad de $0,25$ litros. Se comienza a agregar agua con una concentración de sal de 100 g/l en el envase A a una tasa de $0,5$ litros/hora. El agua fluye del envase A al envase B a una tasa de $0,5$ litros/hora. El agua sale del envase B al desagüe a una tasa de $0,5$ litros/hora. Encuentre las cantidades de sal en cada envase como una función del tiempo t.

(4) $\star$ Suponga que una población está formada por dos grupos: adultos y niños. Sean x e y el número de niños y adultos, respectivamente, en el instante t. Suponga que los niños no se reproducen. Estudie la factibilidad de el modelo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(\delta_1 + \alpha)x + \beta y, & x(t_o) = x_o \geq 0, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\delta_2 y + \alpha x, & y(t_o) = y_o \geq 0. \end{cases}$$

donde δ_1, δ_2, α y β son constantes positivas.

(5) $\star$ Se establecen dos cuentas de inversión con \$1.000 iniciales en la cuenta A y \$2.000 iniciales en la cuenta B. La cuenta A, es una cuenta a largo plazo, gana 10%de interés anual compuesto diariamente. La cuenta B gana 5% de interés anual compuesto diariamente. Se hacen depósitos en B a una tasa de \$10 al día. Cada día el Banco transfiere dinero de B a A a una tasa anual de 20% de la diferencia entre B y \$2.000. Establezca las ecuaciones diferenciales que modelan esta situación.

Parte 2

Sucesiones y Series Numéricas.

CAPÍTULO 4

Sucesiones numéricas.

Este capítulo es un repaso de cursos previos.

Concepto de sucesión y ejemplos. Límite de una sucesión. Propiedades del límite. Cálculo de límites de sucesiones.

1. Definiciones y resultados básicos

La idea de sucesión en $\mathbb{R}$ es la de una lista de puntos de $\mathbb{R}$.

Son ejemplos de sucesiones:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

$$1, 4, 9, 25, 36, \ldots$$

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$$

$$1, 10, 100, 1.000, 10.000, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Lo importante acerca de una sucesión es que a cada número natural n le corresponde un punto de $\mathbb{R}$, por esto damos la siguiente definición.

Definición 4.1. Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión en vez de escribir $a(1), a(2), a(3), \ldots$ suele escribirse

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

La misma sucesión suele designarse mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$. También usaremos $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Ejemplo 4.2. La sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ está definida por

$$a_1 = a_2 = 1, \; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Esta sucesión fue descubierta por Fibonacci (1175-1250. aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una pareja nueva.

Una sucesión, al igual que toda función, tiene una representación gráfica.

Por ejemplo, sean

$$\alpha_n = n$$
$$\beta_n = (-1)^n$$
$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

Las gráficas de $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ son las siguientes:

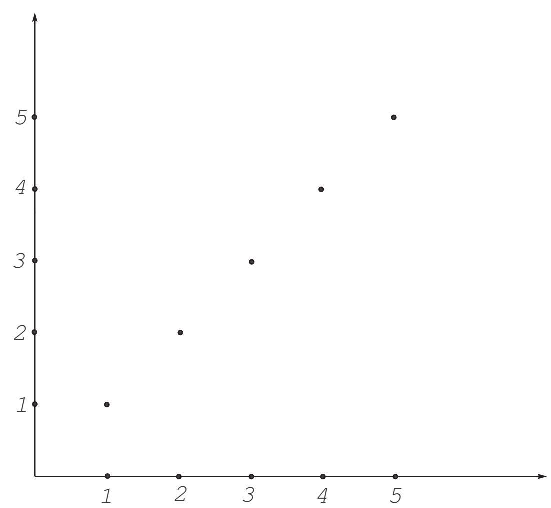


Figura 4.1. $\{\alpha_n\}$

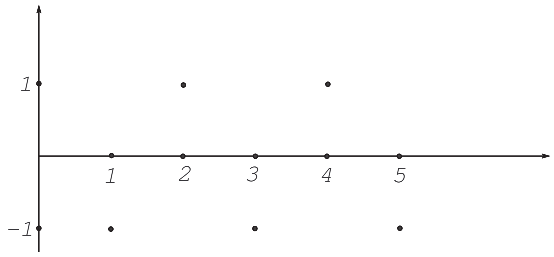


Figura 4.2. $\{\beta_n\}$

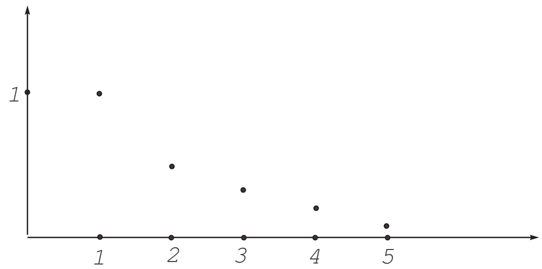


Figura 4.3. $\{\gamma_n\}$

Sin embargo se obtiene una mejor representación de una sucesión marcando los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sobre una recta:

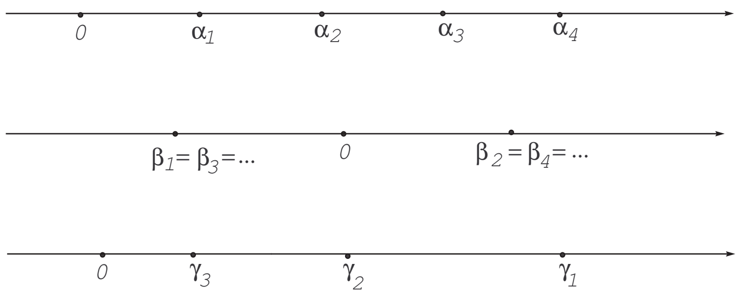


Figura 4.4.

Este tipo de diagramas nos indican “hacia donde va” la sucesión.

Definición 4.3. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es un conjunto acotado. Es decir, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.4. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$.

EJEMPLO 4.5. Sea $a_n = 1/n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente por $M = 1$.

DEFINICIÓN 4.6. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$.

EJEMPLO 4.7. Sea $a_n = n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente por $m = 1$.

PROPOSICIÓN 4.8. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión, $\{a_n\}$ es acotada si y sólo si $\{a_n\}$ es acotada superiormente y $\{a_n\}$ es acotada inferiormente.*

2. Sucesiones convergentes.

En lo que sigue $\{a_n\}$ denotará una sucesión de números reales.

DEFINICIÓN 4.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si:
para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

En este caso se dice que la sucesión $\{a_n\}$ converge a $L \in \mathbb{R}$, o límite de $\{a_n\}$ es L.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{a_n\}$ converge a L; se dice que es divergente (o que diverge) si no es convergente.

EJEMPLO 4.10. Sea $a_n = 1/n$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4.11. Sea $a_n = n!$ entonces $\{a_n\}$ es divergente.

TEOREMA 4.12 (unicidad del límite). *Una sucesión convergente tiene uno y sólo un límite.*

PROPOSICIÓN 4.13. *si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge a cero y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada entonces la sucesión $\{a_n b_n\}$ converge a cero.*

TEOREMA 4.14. *Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

3. El número e.

Se puede probar que la siguiente sucesión converge:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Su límite es único y es conocido como el número e:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

También se puede probar:

(a) $2 < e < 3$
(b) el número e es irracional.

4. Sucesiones monótonas.

Definición 4.15. Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.16. Sea $a_n = n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente.

Definición 4.17. Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.18. Sea $a_n = 1/n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

Teorema 4.19.

(i) *Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.*
(ii) *Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

5. Operaciones con sucesiones

Teorema 4.20. *Sean* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. *Entonces:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = x + y.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$.
(b) si $n \geq N_2$ entonces $|y_n - y| < \varepsilon/2$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n) - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = x + y.$$

□

Teorema 4.21. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y.$$

Teorema 4.22. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Si $y_n \neq 0$ para todo n, $y \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

A los lectores interesados en el Análisis Matemático se les recomienda consultar en algunos de los libros de la bibliografía las demostraciones de estos dos últimos teoremas.

6. Repaso de la regla de L'Hôpital.

La regla de L'Hôpital permite calcular límites indeterminados para funciones de variable real.

Las principales indeterminaciones las agruparemos en tres grupos:

(a) $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$,
(b) $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$,
(c) 0^0, 1^∞, ∞^0.

6.1. Indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$.

Teorema 4.23 (Regla de L'Hopital). *Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$ $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Supongamos que*

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
(b) $g'(x) \neq 0$ *para todo x en $(a - r, a + r)$, $x \neq a$.*
(c) $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Entonces
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

La demostración del teorema anterior se puede ver en [**6**]. En este momento no estamos en capacidad de dar la prueba, pero podemos dar una justificación.

Como f y g son diferenciables en a, entonces f y g son continuas en a. Luego $f(a)=0$ y $g(a)=0$. Por lo tanto
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Si $x\longrightarrow a$ entonces la expresión de la derecha tiende a
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Luego
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Ejemplo 4.24.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{12x^2-1}=\frac{3}{11}.$$

El primer límite es de la forma $\frac{0}{0}$.

Observación 4.25. La regla de L'Hopital también es válida cuando se consideran

(a) límites laterales ($x\longrightarrow a^+$ ó $x\longrightarrow a^-$),
(b) límites infinitos ($x\longrightarrow +\infty$ ó $x\longrightarrow -\infty$),
(c) límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Observación 4.26. El resultado anterior permite calcular límites de la forma $0.\infty$, tomando en cuenta que si $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{h(x)}=0$. En este caso la regla de L'Hopital se aplica a $g(x)=\dfrac{1}{h(x)}$ para obtener un límite de la forma $\frac{0}{0}$. También se puede llevar a la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 4.27.
$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

El primer límite es de la forma $0.(-\infty)$, el segundo límite es de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$, el tercer límite se simplifica algebraicamente dando origen al cuarto límite que no es una indeterminación.

6.2. Indeterminaciones de la forma $\infty - \infty, \quad -\infty + \infty$.

Estas indeterminaciones se resuelven haciendo operaciones algebraicas para llevarlo a alguna de las formas consideradas antes, es decir, $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty$.

EJEMPLO 4.28.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(4x+1)\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{4\operatorname{sen} x + (4x+1)(\cos x) - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos x + 4\cos x - (4x+1)\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{4+4}{2} = 4.
\end{aligned}$$

El primer límite es de la forma $\infty - \infty$, el segundo límite es de la forma $\frac{0}{0}$, el tercer límite es de la forma $\frac{0}{0}$ y el cuarto límite ya no es una indeterminación.

6.3. Indeterminaciones de la forma $0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$.

Estos límites se calculan usando la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 4.29. *Si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe, entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

OBSERVACIÓN 4.30. Esta Proposición también es válida cuando se consideran

(a) límites laterales ($x \to a^+$ ó $x \to a^-$),
(b) límites infinitos ($x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$).

EJEMPLO 4.31. Calcularemos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$$

Este límite es de la forma 0^0.

Tenemos que

$$(\operatorname{sen} x)^x = e^{\ln((\operatorname{sen} x)^x)} = e^{x\ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Comenzaremos calculando

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x).$$

que es un límite de la forma $0.\infty$. Luego aplicaremos la exponencial.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\cos x + x^2\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.\end{aligned}$$

El primer límite es de la forma $0.\infty$, el segundo límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, el tercer límite se simplifica algebraicamente dando origen al cuarto límite que es de la forma $\frac{0}{0}$, el quinto límite no es una indeterminación.

Ahora aplicamos la exponencial

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen} x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)} = e^0 = 1.$$

7. Límite infinito

Definición 4.32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n \geq \lambda$.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n \leq \lambda$.

Es importante notar que las sucesiones que tienen límite infinito **no son convergentes**.

Proposición 4.33. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y $\{b_n\}$ es una sucesión tal que $b_n \neq 0$ para todo n y $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Entonces $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$.*

7.1. Cálculo de límite de sucesiones usando la regla de L'Hopital.

Para calcular el límite de una sucesión usando la regla de L'Hopital se deben usar una funciones auxiliares de variable real.

Por ejemplo, si la sucesión está dada por $a_n = n^2$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = x^2$. Otro ejemplo: si la sucesión está dada por $a_n = \ln n$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = \ln x$. Estas funciones auxiliares son sencillas y en estos casos se calcula el límite cuando $x \to +\infty$.

Ejemplo 4.34. Consideremos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

Este es un límite de sucesiones, de la forma $0.(-\infty)$.

Para hallarlo, en lugar de n colocamos x y calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1/x}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

A veces no conviene usar estas funciones auxiliares sencillas. Puede ser más conveniente considerar como funciones auxiliares algo aparentemente un poco más complicado. Por ejemplo, si la sucesión está dada por $a_n = n^2$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = (1/x)^2$. Otro ejemplo: si la sucesión está dada por $a_n = \operatorname{sen}(1/n)$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = \operatorname{sen} x$. En estos casos se calcula el límite cuando $x \to 0+$.

Ejemplo 4.35. Consideremos

$$\lim_{n\to+\infty} n - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)}.$$

Este es un límite de sucesiones, de la forma $\infty - \infty$.

Para hallarlo, podríamos calcular el siguiente límite auxiliar.

$$\lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/x)}.$$

En lugar de n hemos colocado x. Este es un límite de funciones, de la forma $\infty - \infty$. Usted podría tratar de calcularlo. Hemos hecho una cambio sencillo, pero el límite que se debe calcular no es sencillo.

Sin embargo si hacemos un cambio un poco más complicado el límite que tendremos que calcular es más sencillo. En efecto, en lugar de n colocamos $1/x$ y obtenemos

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Este también es un límite de funciones, de la forma $\infty - \infty$. A continuación lo calcularemos.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} n - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)} = 0.$$

8. Sumas finitas y el símbolo sumatorio.

Cuando queremos referirnos a una suma con n sumandos, en la que tenemos una fórmula para cada sumando a_k usamos la siguiente expresión

$$a_1 + \cdots + a_n$$

que también se escribe de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Ejemplo 4.36.

(1) Sumar el número 1, n veces:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(2) La suma de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n.$$

(3) La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Se puede probar que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{4.2}$$

Ejercicio Adicional: Usando el método de inducción completa demuestre las fórmulas 4.1 y 4.2.

Una propiedad importante de las sumas finitas es la llamada propiedad telescópica que afirma que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Estas sumas son denominadas sumas telescópicas.

Ejercicios.
Sucesiones.

(1) Sugiera el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

(b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $1, 8, 27, 64, \ldots$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{5}, \ldots$

(e) $0, 5, 0, 5, 0, 5, \ldots$

(f) $\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}, \ldots$

(2) Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre la losa de concreto. Cada vez que rebota alcanza una altura equivalente a 2/3 de la altura anterior. Determine la altura que alcanza en el tercer rebote y en el n-ésimo rebote.

(3) Un objeto se deja caer desde una gran altura, de tal manera que recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre el objeto durante el sexto segundo?

(4) Sea $\{a_n\}$ una sucesión (infinita) con término general a_n. Estudie la sucesión: Diga si es acotada superiormente, acotada inferiormente, acotada, no acotada, monótona creciente, monótona decreciente, no monótona. Dibuje el gráfico de la sucesión. Determine si converge o diverge, y en caso de que converja halle su límite.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(b) $a_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{n+1}{n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(d) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

(e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$

(f) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$

(g) $a_n = \cos(n\pi)$

(h) $a_n = 1 + (-1)^n$

(i) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n-1}$

(j) $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}$

(k) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^7$

(l) $a_n = n^4$

(m) $a_n = (1/n)^3$

(n) $a_n = 8^{1/n}$

(o) $a_n = (1/2)^n$

(p) $a_n = 6^n$

(5) La sucesión de Fibonacci:

(a) Suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja, que es fértil al mes. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos y a_n representa el número de parejas nacidas en el n-ésimo mes demuestre que

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si } n \geq 3$$

(la igualdad de la derecha es una fórmula recurrente).

(b) Verifique que el término general de la sucesión de Fibonacci es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

demostrando que esta expresión satisface la fórmula recurrente dada en (a).

(6) Sean c, r constantes reales. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = cr^{n-1}$. Se define la sucesión $\{S_n\}$ por

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Probar que

(a) $S_n = \dfrac{c - cr^n}{1 - r}$

(b) $\{S_n\}$ converge si y sólo si $|r| < 1$.

(c) Si $|r| < 1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{c}{1-r}.$$

(7) Dar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,$$

pero

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ no existe.

(8) EL propósito de este ejercicio es recordar la fórmula para la derivada de un cociente, que no debe confundirse con el cociente de derivadas.

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, en los puntos en los que son derivables:

(a) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\ln x}$

(b) $f(x) = \dfrac{a^x}{\csc x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sec x}{\sqrt{x}}$

(9) Calcular los siguientes límites de funciones:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\left(\frac{1}{\ln x}\right)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(3x))^{\operatorname{sen}(5x)}$

(10) Sea $\{a_n\}$ una sucesión (infinita) con término general a_n. Para cada uno de los siguientes casos determine si $\{a_n\}$ converge o diverge, y en caso de que converja halle su límite.

(a) $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+4}$

(b) $a_n = \sqrt{n}$

(c) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

(d) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

(e) $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$

(f) $a_n = n^{\left(\frac{1}{\ln n}\right)}$

(g) $a_n = (1/n)^{1/n}$

(h) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{1+n^3}$

(i) $a_n = \dfrac{4n^3+3n^2+1}{5n^3+3}$

(j) $a_n = n2^{-n}$

(k) $a_n = n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$

(l) $a_n = 1+(-1)^n$

(m) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

(n) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n^2}{n}$

(o) $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

(p) $a_n = \sqrt{n+8}-\sqrt{n}$

(q) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$

(r) $a_n = \dfrac{5-2^{-n}}{6+4^{-n}}$

(s) $a_n = \dfrac{\ln(2+e^n)}{3n}$

(t) $a_n = \ln(n+1)-\ln(n)$

(u) $a_n = \left(1-\dfrac{4}{n}\right)^n$

(v) $a_n = 5+\dfrac{5^n}{3^n}$

(w) $a_n = 10^{(n+1)/n}$

(x) $a_n = n^{2/(n+1)}$

(y) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(z) $a_n = n\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(11) * Demostrar que:

(a) Si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) La sucesión $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \dots$ es convergente.

(c) Hallar el límite de la sucesión anterior.

(12) * Demostrar que si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge a cero y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada entonces la sucesión $\{a_nb_n\}$ converge a cero.

(13) * Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

(14) * Sean $\{a_n\}$ una sucesión convergente y $\{b_n\}$ una sucesión tal que $b_n \neq 0$ para todo n y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

CAPÍTULO 5

Series numéricas.

Definición y ejemplos. Criterios de convergencia para series de términos positivos: comparación, límites, raíz, razón, integral. Series alternadas: criterio de Leibnitz.

¿Las expresiones indefinidamente largas, tales como

$$x + x^2 + x^3 \dots$$

(lo que los matemáticos llaman series infinitas) pueden ser tratadas por medio de las reglas de la aritmética, o son necesarias técnicas especiales para poder abarcar su infinidad?

Enfrentada con tales dificultades conceptuales, la mente de los matemáticos del siglo XVIII empezó a titubear. Lagrange se desesperó tanto que abandonó las matemáticas durante un período de varios años, y, en una carta a su amigo y colega Jean Baptiste D'Alembert, en 1.781, expresó la opinión de que las matemáticas estaban ahondando demasiado, con peligro de ser destruidas. D'Alembert, en cambio, no sosegó a sus alumnos, sino que les exhortó:

"Seguid adelante y la fe vendrá a vosotros".

1. Series.

Las series permiten entender la idea de querer hacer sumas en las que hay una cantidad infinita de sumandos (tantos sumandos como números naturales).

Para dar la idea de una *serie* debemos considerar dos tipos de números reales:

(1) la expresión para cada sumando: a_n

(2) la expresión para la suma finita de los primeros n sumandos:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La siguiente terminología es usual:

(1) A a_n se le llama término general de la serie.

(2) A s_n se le llama la suma parcial de la serie.

Por lo tanto una serie está relacionada con dos sucesiones:

(1) la sucesión $\{a_n\}$ de los términos generales de la serie.
(2) la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la serie.

La siguiente notación es usual: En vez de referirse a la serie como un par de sucesiones es usual hablar de la serie como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Ejemplo 5.1. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

tenemos que

$$a_n = n$$

$$s_n = 1 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para obtener la última expresión hemos usado la ecuación 4.1.

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una *serie de términos positivos* cuando $a_n > 0$ para cada n.

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una *serie alternada* cuando

$$a_n = (-1)^n c_n$$

para alguna sucesión $\{c_n\}$ tal que $c_n > 0$ para cada n.

Ejemplo 5.2. La *serie armónica* es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Para esta serie

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Entonces se trata de una serie de términos positivos. Además

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Una cuenta interesante es la siguiente:

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En conclusión, para la serie armónica:

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 5.3. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

tenemos que

$$a_n = (-1)^n.$$

Entonces se trata de una serie alternada. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo 5.4. La *serie geométrica* (de razón r) es:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Para esta serie

$$a_n = r^n.$$

Si $r > 0$ entonces se trata de una serie de términos positivos. Si $r < 0$ entonces se trata de una serie alternada. Además

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k.$$

Un hecho curioso es que para eta serie: Entonces

$$rs_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (1-r)s_n &= s_n - rs_n \\ &= (1 + r + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

En conclusión, si $r \neq 1$ para la serie geométrica:

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

A veces se puede decir con exactitud cuánto da la suma finita (la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$), pero en general es muy difícil decir cuánto da la suma infinita (la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Ejemplo 5.5. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \cos(n^3)}{2^n + n}.$$

tenemos que

$$a_n = \frac{2 + \cos(n^3)}{2^n + n}$$

Esta serie es de términos positivos. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 + \cos(k^3)}{2^k + k}$$

2. Convergencia y divergencia de series.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge o es una *serie convergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite finito.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge o es una *serie divergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no converge (ya sea porque el límite da $+\infty$, da $-\infty$ ó no existe).

Sea $s \in \mathbb{R}$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a s se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

En otras palabras, la expresión anterior quiere decir:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} s_n = s.$$

En esto último debe quedar claro que s no se obtiene simplemente por adición, s es el límite de una sucesión de sumas.

Ejemplo 5.6. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

ya vimos que

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ no existe tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

Ejemplo 5.7. La serie armónica es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Anteriormente vimos que

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} - s_n. \tag{5.1}$$

Supongamos que existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$. Usando la ecuación (5.1) tenemos que

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = s$ tenemos que

$$\frac{1}{2} \leq s - s = 0.$$

Y esta es una contradicción (porque $0 < \frac{1}{2}$).

La contradicción proviene de haber supuesto que existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

Por el método de reducción al absurdo concluimos que no existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

Es decir, la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Criterio 5.8 (Criterio del término general).
Dada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(i) *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(ii) *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*, no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Note que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, este criterio no permite llegar a ninguna conclusión. En este caso debe recurrir a otro criterio.

Ejemplo 5.9. Consideremos la serie geométrica (de razón r):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Si $|r| \geq 1$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n \neq 0$. Por el criterio del término general. $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Por otro lado se probó que si $r \neq 1$ entonces

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

En conclusión, si $|r| < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Más adelante estudiaremos qué ocurre cuando $|r| \geq 1$.

Este caso de la serie geométrica es uno de los pocos casos en los que se puede decir a qué valor converge la serie. En general no podemos decir cuánto vale.

Para saber si estamos trabajando con un número o no. Es conveniente dar varios criterios de convergencia de series.

3. Criterios de convergencia para series de términos positivos.

Vamos a estudiar las series de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ donde $a_n > 0$. En estas condiciones

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n > 0.$$

Para indicar que una serie de términos positivos es convergente se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Esta notación <u>no</u> se usa para otro tipo de series.

Criterio 5.10 (Criterio de acotación).

Dada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *con* $a_n > 0$. *Si la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}$ *es acotada entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

El criterio de acotación es muy usado por los matemáticos para demostrar teoremas. Muchas de las demostraciones de los criterios siguientes se basan en éste. Por otro lado, la demostración del criterio de acotación requiere una comprensión bien profunda del conjunto de los números reales, especialmente del axioma del supremo.

CRITERIO 5.11 (Criterio de comparación).
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n.

(i) *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge.*
(ii) *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ también diverge.*

EJEMPLO 5.12. Estudiar la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}.$$

Sabemos que

$$0 \leq \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} \leq \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sean

$$a_n = \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}.$$

$$b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

entonces $0 \leq a_n \leq b_n$.

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n < +\infty$$

porque la serie de la derecha es una geométrica de razón $1/2 < 1$. Es decir, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

Por el criterio de comparación, obtenemos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} < +\infty.$$

EJEMPLO 5.13. Estudiar la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

usando que

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

(Los estudiantes de la Licenciatura en Matemática deberían ser capaces de probar esta desigualdad usando el método de inducción completa).

Se sigue que,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sean

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad b_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Además

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < +\infty,$$

porque la serie de la derecha es una geométrica de razón $1/2 < 1$.

Por el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

Criterio 5.14 (Criterio del límite).

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $0 \leq a_n$, $0 < b_n$ y sea

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

(i) *Si λ es finito y $\lambda \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
(ii) *Si $\lambda = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge .*
(iii) *En los otros casos no hay información.*

Ejemplo 5.15. Estudiaremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Recuerde que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Sean $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ y $b_n = \frac{1}{n}$. Usando el límite anterior tenemos que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Como λ es finito y $\lambda \neq 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por el criterio del límite tenemos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Criterio 5.16 (Criterio de la raíz).
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *y sea* $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Entonces*

(i) *Si* $\alpha < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\alpha > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\alpha = 1$, *no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Cuando se aplica un criterio y se llega al caso en que éste no da información, se deja este criterio de lado y se trabaja con otro criterio.

Ejemplo 5.17. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Tenemos

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n}.$$

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Por el criterio de la raíz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} < +\infty.$$

Criterio 5.18 (Criterio del cociente o de la razón).
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *y sea* $\beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Entonces*

(i) *Si* $\beta < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\beta > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\beta = 1$, *no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Ejemplo 5.19. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Tenemos

$$a_n = \frac{n!}{n^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
\beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!\, n^n}{n!\,(n+1)\,(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

(porque $e > 1$).

Por el criterio del cociente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty.$$

Para dar el próximo criterio de series usaremos integrales impropias de la forma

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Se dice que la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

cuando el límite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\, dx \text{ existe y es finito.}$$

Ejemplo 5.20. Estudiaremos la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx.$$

Tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} [(\ln x)]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \text{ diverge}$$

Criterio 5.21 (Criterio de la integral).

Sea f una función positiva y estrictamente decreciente definida en $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo n natural.

La integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

Cuando queremos usar este criterio para estudiar una serie procedemos así a partir de a_n escogemos f, revisamos que f cumpla las condiciones dadas en el criterio. Calculamos la integral y luego aplicamos lo siguiente:

(1) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 5.22. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Es claro que f es positiva. Por otro lado,

$$f'(x) = -2x^{-3} < 0$$

si $x > 0$ de donde f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.

Estudiaremos la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1.$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ converge}$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

4. Criterios de convergencia para series de términos alternadas.

CRITERIO 5.23 (Criterio de Leibnitz).
Sea $\{c_n\}$ una sucesión tal que

(a) $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0$.
(b) $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n c_n$ converge.

Recuerde que como la serie no es de términos positivos para decir que la serie converge no se usa la notación $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$..

EJEMPLO 5.24. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}.$$

En este caso el término general es

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Sea

$$c_n = \frac{1}{n}.$$

Entonces $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por el criterio de Leibnitz tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

5. Series telescópicas.

Las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tales que el término general se puede representar como una diferencia de la forma:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

se denominan series telescópicas y su comportamiento está garantizado por el siguiente teorema.

TEOREMA 5.25. *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones de números reales tales que*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

para $n = 1, 2, \dots$. *Entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge si y sólo si la sucesión* $\{b_n\}$ *converge, en cuyo caso tenemos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - L,$$

donde $L = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

EJEMPLO 5.26. Queremos determinar si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Sea

$$a_n = \frac{1}{n^2+n}.$$

Se tiene que

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tomando $b_n = 1/n$ tenemos que

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Además sabemos que $b_1 = 1$ y

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} 1/n = 0.$$

Aplicando el teorema anterior obtenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1.$$

Ejercicios.
Series.

(1) Verifique que las siguientes series son divergentes

(a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+3}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

(e) $3-\frac{9}{2}+\frac{27}{4}-\frac{81}{8}+\dots$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(2) Verifique que las siguientes series son convergentes

(a) $2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\dots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(0.9)^n$

(c) $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\dots$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-0.6)^n$

(3) Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ diverge.

(4) ¿Qué está mal en la siguiente "demostración" de que la serie geométrica divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ tiene por suma cero?

"Demostración":

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} &= [1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots+[1+(-1)]+\dots\\ &= 0+0+\cdots+0+\cdots=0\end{aligned}$$

(5) Demuestre que

(a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge y determine su suma.

(b) Se cumple la siguiente igualdad $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}$.

Sugerencia: use la parte (a).

(6) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}}$ converge y determine su suma.

(7) Encuentre una fórmula para S_n y demuestre que la serie converge o diverge usando $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{n+1})$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{9n^2+3n-2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

(Sugerencia: racionalice el denominador).

(8) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n}\right)$ converge o diverge.

(9) Demuestre o dé un contraejemplo:

"Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergen entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + b_n$ diverge".

(10) Supongamos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ existe. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}) = a_0 - a_1 + \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n).$$

(11) Determine si las siguientes series telescópicas convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln((1+1/n)^n(1+n))}{\ln(n^n)\ln((n+1)^{n+1})}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$

Ayuda: use la fórmula:

$$\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha\beta}\right).$$

(12) Aplique el criterio más conveniente para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2} - \frac{5}{n+3}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right)$

(13) *** Determine los valores positivos de p, para los cuales converge la serie indicada

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, p^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{p}\right)^n$

(14) *** Determine los valores reales de p, para los cuales converge la serie indicada

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

(15) Sea $\{a_n\}$ la sucesión de Fibonacci. Sea

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Demuestre que

(a) $b_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{b_{n-2}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) La serie

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

es convergente.

(16) Use el criterio de series alternadas para determinar si las siguientes series son convergentes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-1}{n+5}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{4^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+3}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n^{10}}{n^2}$

CAPÍTULO 6

Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

Justificación elemental de la fórmula de Stirling y producto de Wallis.

La fórmula de Stirling da un estimado para $n!$ y el producto de Wallis da una expresión para $\pi/2$ como límite de un cociente de números parecidos a los factoriales.

1. La fórmula de Stirling.

Comenzamos dando un estimado para $\sqrt[n]{n!}$.

PROPOSICIÓN 6.1. *Se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Demostración.

El gráfico de la función logaritmo ayuda a entender las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\ln((n-1)!) &= \ln(1.2.\dots.(n-1)) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-1) \\
&\leq \int_1^n \ln x dx \leq \ln 2 + \dots + \ln n = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \\
&= \ln(1.2.\dots.(n-1).n) = \ln n!
\end{aligned}$$

Pero

$$\int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln(n^n) - n + 1.$$

De donde

$$\ln((n-1)!) \leq \ln n^n - n + 1 \leq \ln n!.$$

Por lo tanto

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n}\, e \leq n!. \tag{6.1}$$

De la segunda desigualdad en (6.1) obtenemos

$$\frac{1}{e}\,\sqrt[n]{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}. \tag{6.2}$$

Por otro lado, multiplicando por n en la fórmula (6.1) tenemos que

$$n! \leq n^n\, e^{-n}\, e\, n.$$

Luego

$$\sqrt[n]{n!} \leq n\,\frac{1}{e}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e}.$$

Y así

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e}. \tag{6.3}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = 1$, de las desigualdades (6.2) y (6.3) obtenemos:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\,\sqrt[n]{e} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{e} = \frac{1}{e}.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Esta fórmula da un estimado para $n!$.

Varios refinamientos del método que acabamos de usar para estimar $\sqrt[n]{n!}$ permiten dar un estimado para $n!$. Más precisamente, se puede demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n}{n!} = 1$$

y ésta es la conocida fórmula de Stirling.

Para no caer en aspectos demasiado técnicos no damos la prueba. Sin embargo, el lector interesado en ver una demostración de esta fórmula puede hallarla en: Introduction to Calculus and Analysis de R. Courant, F. John. Vol. I.

2. El producto de Wallis.

El producto de Wallis permite aproximar a $\frac{\pi}{2}$ y es el siguiente:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\ldots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\ldots 7.5.5.3.3.1}.$$

Para los estudiantes de la Licenciatura en Matemática damos la demostración. Recordemos que

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Integrando entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x dx. \tag{6.4}$$

Aplicando esta fórmula varias veces se obtienen las siguientes igualdades:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-2} x\,dx = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-4} x\,dx$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} x\,dx = \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-3} x\,dx$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}.$$

Resumiendo, llegamos a que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}.$$

De las fórmulas anteriores

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2m(2m-2)\dots 4.2}{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx, \tag{6.5}$$

$$1 = \frac{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}{(2m)(2m-2)\dots 4.2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx. \tag{6.6}$$

Dividiendo la fórmula (6.5) entre la fórmula (6.6), obtenemos que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\dots 4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\dots 5.3.3.1}\,\frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \tag{6.7}$$

A continuación estudiaremos el cociente de estas dos integrales.

En $[0, \pi/2]$ así que $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Luego

$$\operatorname{sen}^{2m+1} x \leq \operatorname{sen}^{2m} x \leq \operatorname{sen}^{2m-1} x.$$

Integrando

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx \leq \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} xdx.$$

Dividiendo entre $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx$ se obtiene

$$1 = \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} = \frac{2m+1}{2m}$$

(para la última igualdad hemos usado la ecuación (6.4)).

Entonces
$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x dx} \leq \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m}.$$
De donde
$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x dx} = 1$$
Volviendo a la ecuación (6.7) obtenemos que
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\ldots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\ldots 7.5.5.3.3.1},$$
y este es el conocido producto de Wallis.

Ejercicios.
Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

A continuación indicamos tres fórmulas que permiten calcular límites bastante complicados.

- Estimado para $\sqrt[n]{n!}$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$
- Fórmula de Stirling:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n}{n!} = 1$$
- Producto de Wallis
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\dots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\dots 7.5.5.3.3.1},$$

Deducir los siguientes límites con la ayuda de las fórmulas anteriores

(1) * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$

(2) * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$

(3) * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

donde
$$\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}.$$

Nota: EL producto $t(t-1)\dots(t-n+1)$ es un polinomio en t de grado n llamado polinomio factorial n-ésimo. Se representa con el símbolo $t^{(n)}$, así pues
$$t^{(n)} = t(t-1)\dots(t-n+1).$$

Parte 3

Nociones de Geometría en el Plano y en el Espacio. Curvas.

CAPÍTULO 7

Nociones de geometría plana y del espacio.

Subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Vectores. Producto escalar y vectorial. Ecuación paramétrica de la recta. Representación de subconjuntos definidos mediante ecuaciones y desigualdades sencillas. Superficies en $\mathbb{R}^3$: plano, esfera, elipsoide, cilindro, cono, paraboloide, hiperboloide. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Idea de abierto, cerrado y frontera.

Distintos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$: polares, cilíndricas y esféricas. Transformación de coordenadas. Parametrización de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ en estas coordenadas.

1. El plano $\mathbb{R}^2$.

Comenzaremos recordando algunos conceptos de cursos previos de matemática y de física.

El espacio unidimensional $\mathbb{R}$ se identifica con una recta.

Es importante notar que para un número real x, la distancia de x al origen de la recta es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Esta distancia se conoce como el módulo o la norma de x.

Consideremos el espacio bidimensional

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

El espacio $\mathbb{R}^2$ puede ser representado, de manera natural, mediante un plano: Trazamos una recta horizontal y una vertical, que llamaremos eje x y eje y respectivamente. Determinamos una escala en cada una de estas rectas (no es imprescindible que sean iguales). Para cada punto P del plano trazamos rectas paralelas a los ejes que pasen por P. De acuerdo a la identificación de la recta con el conjunto de los números reales, sea a el punto de corte de la paralela al eje y con el eje x y sea b el punto de corte de la paralela al eje x con el eje y. Al punto P le hacemos corresponder el par ordenado de números reales $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Cuando $x > 0$, $y > 0$ decimos que el punto (x, y) se encuentra en el *primer cuadrante.*
Cuando $x < 0$, $y > 0$ decimos que el punto (x, y) se encuentra en el *segundo cuadrante.*
Cuando $x < 0$, $y < 0$ decimos que el punto (x, y) se encuentra en el *tercer cuadrante.*
Cuando $x > 0$, $y < 0$ decimos que el punto (x, y) se encuentra en el *cuarto cuadrante.*

Al punto $(0, 0)$ se le suele llamar el *origen de coordenadas*, o simplemente, el *origen.*

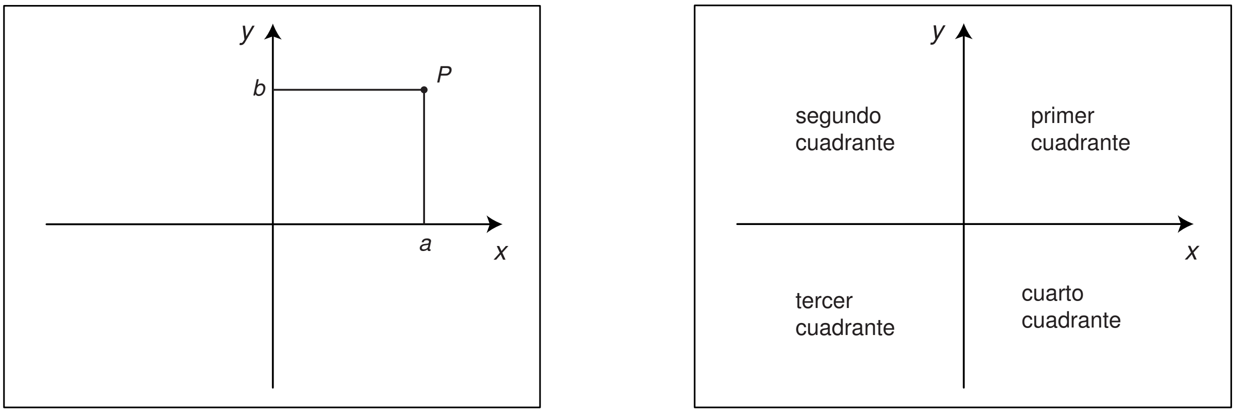


FIGURA 7.1. Identificación de $\mathbb{R}^2$ y el plano

Tomando en cuenta esta identificación es usual hablar de puntos del plano $\mathbb{R}^2$, o simplemente, puntos de $\mathbb{R}^2$.

Existe una identificación natural entre los puntos de $\mathbb{R}^2$ y los vectores en el plano: Al punto (x, y) le hacemos corresponder el vector de extremo inicial el origen y de extremo final el punto (x, y).

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos la *suma de vectores* de la siguiente manera:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Definimos el *producto* de un vector por un escalar de la siguiente manera: si $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y).$$

Si $\lambda > 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ tienen el mismo sentido. Si $\lambda < 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ tienen sentido contrario.

Como es natural la diferencia de vectores $\vec{u} - \vec{v}$ se define como $\vec{u} + (-1)\vec{v}$.

La suma y la diferencia de vectores se puede hacer geométricamente, de acuerdo con la ley del paralelogramo, que se ilustra en la siguiente figura.

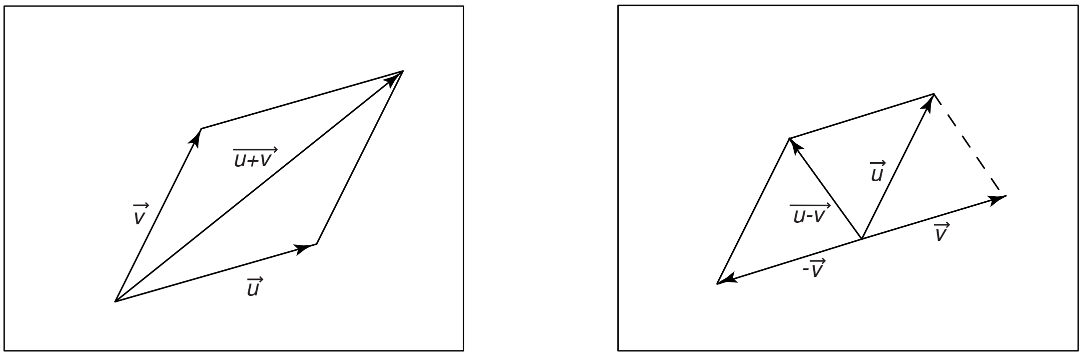


FIGURA 7.2. Ley del paralelogramo

Se dice que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *paralelos* cuando existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

Distancia entre dos puntos del plano y norma.

Supongamos que queremos hallar la distancia d entre dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del plano.

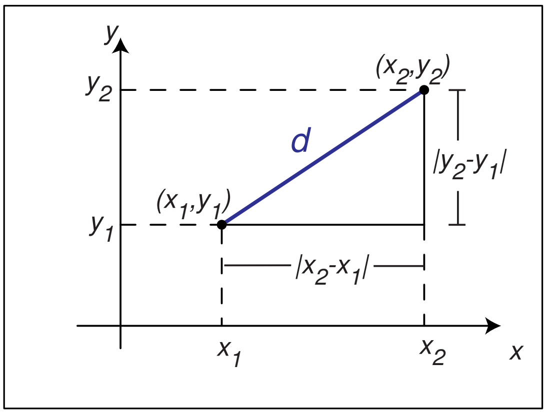


FIGURA 7.3. Distancia entre dos puntos del plano

Analizando la figura anterior y usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

es decir

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Dado un vector $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos la *norma* de $\vec{u}$ como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Notemos que $\|\vec{u}\|$ es la distancia del punto (x_1, x_2) al origen, es decir, la longitud del vector $\vec{u}$.

Circunferencias y círculos en el plano.

Sea $r > 0$, recordemos que la *circunferencia* con centro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y radio r es el conjunto de los puntos (x, y) del plano tales que la distancia de (x, y) al punto (a, b) es r, es decir, el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \}.$$

Otra manera equivalente de expresar este conjunto es

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| = r\}.$$

Recordemos también que, el *círculo* con centro $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y radio r es el conjunto de los puntos (x, y) del plano tales que la distancia de (x, y) al punto (a, b) es menor o igual que r, es decir, el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \}.$$

o, equivalentemente

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| \leq r\}.$$

Si en vez de tomar considerar el conjunto con "menor o igual", tomamos la desigualdad estricta, o sea, consideramos el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < r\}.,$$

obtenemos el conjunto de los puntos que están dentro de la circunferencia, sin incluir la circunferencia.

2. El espacio $\mathbb{R}^3$.

Consideremos el espacio tridimensional

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Al igual que $\mathbb{R}^2$ se identifica con el plano, $\mathbb{R}^3$ se identifica con el espacio ambiente. Para establecer la correspondencia debemos considerar un eje adicional, usualmente llamado eje z, perpendicular al plano formado por el eje x y el eje y. Cada punto P del espacio está en correspondencia con un elemento (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

El siguiente dibujo nos ilustra esta correspondencia, en el mismo vemos, de manera gráfica, como el punto P corresponde con la terna (a, b, c).

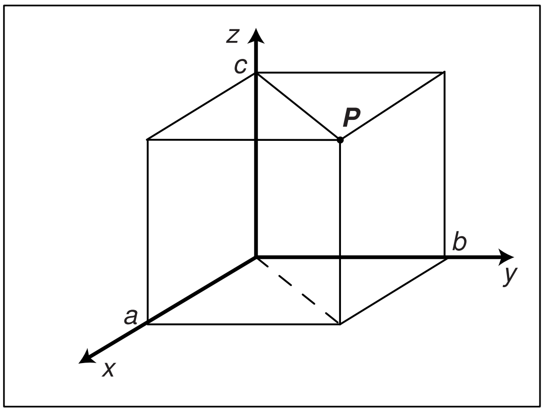


Figura 7.4. Correspondencia entre puntos del espacio y elementos de $\mathbb{R}^3$

Al igual que en el plano, al punto $(0, 0, 0)$ se le suele llamar el *origen de coordenadas*, o simplemente, el *origen*.

Existen tres planos que resaltan en este espacio, que son: el plano "xy", el plano "yz" y el plano "xz".

Al igual que en el caso bidimensional, existe una identificación natural entre los puntos de $\mathbb{R}^3$ y los vectores en el espacio: Al punto (x, y, z) le hacemos corresponder el vector de extremo inicial el origen y de extremo final el punto (x, y, z). El origen de coordenadas se identifica con el vector $(0, 0, 0)$.

Cuando $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ decimos que el punto (o el vector) (x, y, z) se encuentra en el primer octante.

La suma de vectores y el producto por un escalar se definen de manera natural:

Si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Si $\lambda > 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ tienen el mismo sentido. Si $\lambda < 0$ entonces $\lambda\vec{u}$ y $\vec{u}$ tienen sentido contrario.

Se dice que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *paralelos* cuando existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\vec{v} = \lambda\vec{u}.$$

También en el caso tridimensional, la suma y diferencia de vectores se puede hacer, de manera geométrica, siguiendo la ley del paralelogramo.

Distancia entre dos puntos del espacio y norma.

Supongamos que queremos hallar la distancia d entre dos puntos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ del espacio.

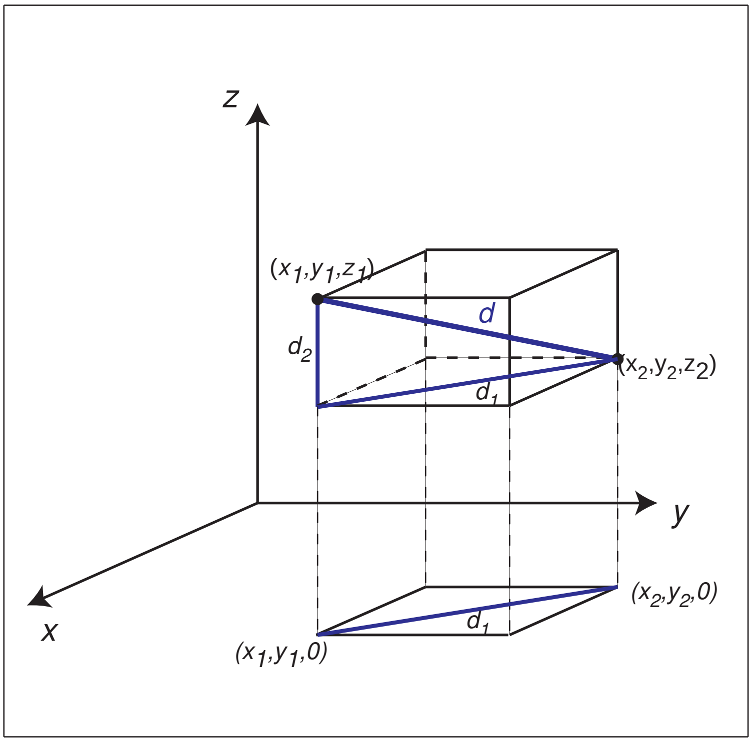


FIGURA 7.5. Distancia entre dos puntos del plano

Sea d_1 la distancia entre los puntos $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$. Por la fórmula de la distancia en el plano tenemos que

$$d_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Si d_2 es la diferencia de alturas entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces

$$d_2 = |z_2 - z_1|,$$

Analizando la figura anterior y usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2,$$

es decir

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Al igual que en el caso bidimensional, dado un vector $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, definimos la *norma* de $\vec{u}$ como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se tiene que $\|\vec{u}\|$ es la distancia del punto (x, y, z) al origen, es decir, la longitud del vector $\vec{u}$.

Esferas en el espacio.

Sea $r > 0$, recordemos que la *esfera* con centro $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y radio r es el conjunto de los puntos (x, y, z) del espacio tales que la distancia de (x, y, z) al punto (a, b, c) es r, es decir, el conjunto

$$\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \,\}.$$

Otra manera equivalente de expresar este conjunto es

$$\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a, b, c)\| = r\}.$$

Note que la parte de adentro de esta esfera es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x, y, z) - (a, b, c)|| < r\}.$$

3. Producto escalar, norma y distancia.

A lo largo de esta sección por $\mathbb{R}^n$ denotaremos el espacio $\mathbb{R}^2$ o al espacio $\mathbb{R}^3$.

3.1. Producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. El *producto escalar* de estos vectores es

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

De manera abreviada,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

3.2. Producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. El *producto escalar* de estos vectores es

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

De manera abreviada,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Es muy importante notar que, tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional, el producto escalar siempre es igual a la suma del producto de las coordenadas.

3.3. Propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 7.1. *Para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y para todo número $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:*

(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ *(Ley conmutativa).*
(ii) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
(iii) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *(Ley distributiva).*
(iv) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ *donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*

La demostración de las partes (i), (ii) y (iii) queda como ejercicio. Debe tratar de justificar geométricamente la propiedad (iv).

Si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ se dice que $\vec{u}$, $\vec{v}$ son *perpendiculares* u *ortogonales* .

3.4. Propiedades de la norma y la distancia en $\mathbb{R}^n$.

OBSERVACIÓN 7.2. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

PROPOSICIÓN 7.3. *Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$,
(ii) $\vec{u} = \vec{0}$ *implica* $\|\vec{u}\| = 0$,
(iii) $\|\vec{u}\| = 0$ *implica* $\vec{u} = \vec{0}$,
(iv) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \, \|\vec{u}\|$,
(v) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Decimos que $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$.

Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ si consideramos

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

obtenemos que $\vec{v}$ es unitario.

OBSERVACIÓN 7.4. Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

PROPOSICIÓN 7.5. *Sean* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

(i) $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$,
(ii) $\vec{u} = \vec{v}$ *implica* $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$,
(iii) $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ *implica* $\vec{u} = \vec{v}$,
(iv) $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{d}(\vec{v}, \vec{u})$,
(v) $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{w}) \leq \mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) + \mathrm{d}(\vec{v}, \vec{w})$.

La demostración de estas proposiciones queda como ejercicio.

3.5. Lectura adicional: La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROPOSICIÓN 7.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea* $\langle\, , \rangle$ *el producto escalar en* $\mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|$$

para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Además se cumple la igualdad si y sólo si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$, *es decir,* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *están en la misma línea.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\langle x\vec{v} - \vec{u}, x\vec{v} - \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle x^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle x + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\|\vec{v}\|^2 x^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle x + \|\vec{u}\|^2 \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\|\vec{v}\| = 0$ entonces $\vec{v} = 0$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz es trivialmente cierta.

Si $\|\vec{v}\| > 0$, tenemos una parábola que se abre hacia arriba. Usando el discriminante se concluye que

$$4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

y de esto último se deduce inmediatamente la desigualdad.

El resto de la demostración se deja como ejercicio. □

4. Producto cruz o producto vectorial.

Sean $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. El *producto cruz o producto vectorial* de estos vectores es

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left((y_1 z_2 - z_1 y_2), (z_1 x_2 - x_1 z_2), (x_1 y_2 - y_1 x_2) \right).$$

Sean $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$, entonces tenemos que $\vec{u} \times \vec{v}$ es igual al determinante formal

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Este determinante de tercer orden está desarrollado por la primera fila.

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ se puede hallar geométricamente de la siguiente manera:

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son colineales entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector ortogonal al plano generado por $\vec{u}$ y por $\vec{v}$, de longitud igual $\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\operatorname{sen} \theta\|$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y cuya dirección se obtiene de acuerdo a la ley de la mano derecha. En los siguientes dibujos, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se ubican en el plano correspondiente a esta hoja, en el primer caso $\vec{u} \times \vec{v}$ sale de la hoja apuntando hacia el lector mientras que en el segundo caso apunta en sentido contrario.

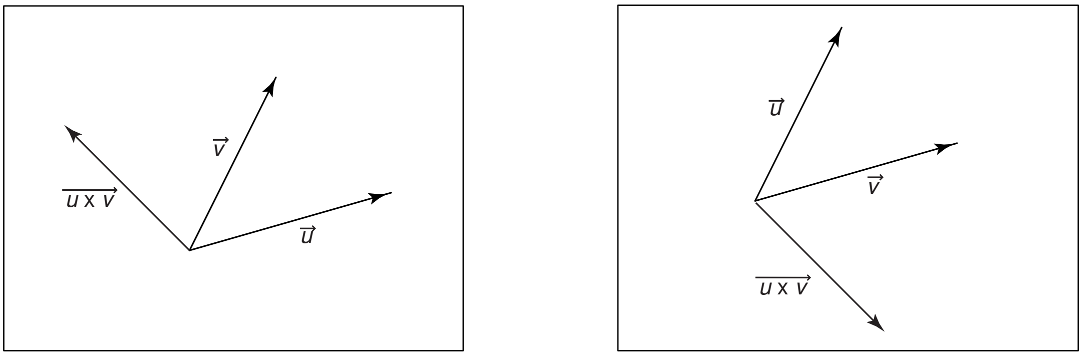


Figura 7.6. Dirección del producto vectorial

También se tienen los siguientes resultados.

Proposición 7.7.

(i) $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$,

(ii) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$,

(iii) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

(iv) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$,

(v) $\vec{u}\times\vec{v}$ *es ortogonal a* $\vec{u}$*,* $\vec{u}\times\vec{v}$ *es ortogonal a* $\vec{v}$*. Es decir,* $\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{u}\rangle = 0$ *y* $\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\rangle = 0$*,*

(vi) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ *(propiedad distributiva).*

Además,

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} = -\vec{j}\times\vec{i},$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} = -\vec{k}\times\vec{j},$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} = -\vec{i}\times\vec{k}.$$

Proposición 7.8. *Si* $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ *entonces* $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ *es el área del paralelogramo determinado por* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$*.*

Proposición 7.9. *Si* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ *entonces* $|\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle|$ *es el volumen del paralelepípedo formado por ellos. El volumen es cero si los vectores están en el mismo plano.*

5. Rectas y planos en el espacio.

5.1. Rectas en el espacio.

La definición de una *recta* en $\mathbb{R}^3$ nace de la idea intuitiva de que una recta está determinada por un punto $\vec{p}_o$ y una dirección $\vec{u}$ (donde $\vec{u}$ es un vector no nulo). El vector $\vec{u}$ es llamado el *vector director* de la recta.

Los puntos $\vec{p}$ sobre la L que pasa por $\vec{p}_o$ en la dirección de $\vec{u}$ son todos los puntos de la forma

$$\vec{p} = \vec{p}_o + t\,\vec{u},$$

donde $t\in\mathbb{R}$. Esta ecuación se llama *ecuación vectorial de la recta.*

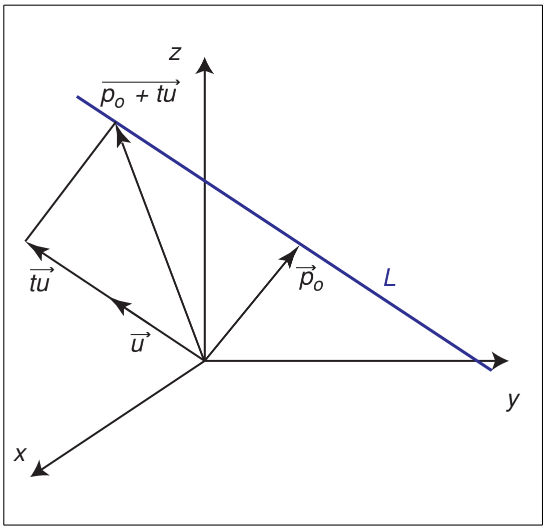


Figura 7.7. Recta que pasa por $\vec{p}_o$ en la dirección de $\vec{u}$

Si $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{p} = (x, y, z)$ tenemos

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(u_1, u_2, u_3).$$

Luego

$$x = x_o + tu_1, \quad y = y_o + tu_2, \quad z = z_o + tu_3.$$

Estas son las ecuaciones correspondientes entre las componentes y se llaman *ecuaciones paramétricas de la recta* .

Si $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$ se puede eliminar t y la ecuación se expresa en su forma cartesiana

$$\frac{x - x_o}{u_1} = \frac{y - y_o}{u_2} = \frac{z - z_o}{u_3}$$

Una recta está determinada si damos dos puntos por los que pasa.

Supongamos que L es una recta que pasa por los puntos (diferentes) $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$ y $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Sea $\vec{u} = \vec{p}_1 - \vec{p}_o$. Entonces L es la recta de dirección $\vec{u}$ que pasa por cualquiera de los puntos $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$ ó $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$.Por lo tanto la ecuación de L es:

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}$$

Dos rectas son *perpendiculares* si sus vectores directores lo son.

Dos rectas son *paralelas* si sus vectores directores son paralelos.

En $\mathbb{R}^3$, si dos rectas son paralelas, entonces son iguales o no se intersectan.

En $\mathbb{R}^3$, si dos rectas no son paralelas, entonces no se cortan o su intersección es un punto.

5.2. Planos en el espacio.

Existen varias maneras de determinar un *plano.* Algunas de ellas son las siguientes:

(1) Un plano está determinado si damos un punto por el que pasa el plano y un vector perpendicular a él.

Sea $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$un punto del plano y $\vec{u} = (a, b, c)$ un vector perpendicular al plano.

Si $\vec{p} = (x, y, z)$ es otro punto del plano entonces $\vec{p} - \vec{p}_o = (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)$ es perpendicular a $\vec{u} = (a, b, c)$, es decir,

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o) \rangle = 0.$$

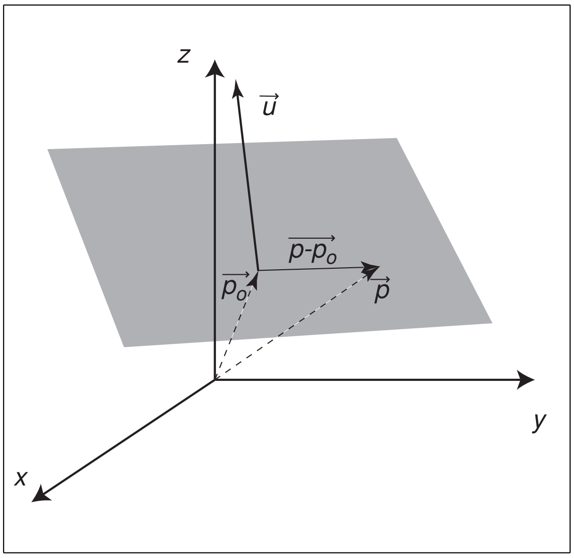


Figura 7.8. Plano que pasa por $\vec{p}_o$ y es perpendicular a $\vec{u}$

Por lo tanto

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Y así

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -ax_o - by_o - cz_o$. Esta ecuación se llama *ecuación cartesiana del plano.*

(2) Un plano está determinado por dos rectas no paralelas que se cortan.

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas de direcciones respectivas $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se cortan en un punto $\vec{p}_o$. Los puntos $\vec{p}$ sobre el plano determinado por L_1 y L_2 son todos los puntos de la forma

$$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u} + s\vec{v},$$

donde $t, s \in \mathbb{R}$.

Esta ecuación se llama también *ecuación vectorial del plano* y las ecuaciones correspondientes entre las componentes se llaman las *ecuaciones paramétricas del plano*, éstas son:

$$x = x_o + tu_1 + sv_1, \qquad y = y_o + tu_2 + sv_2, \qquad z = z_o + tu_3 + sv_3.$$

(3) Un plano está determinado si damos tres puntos por los que pasa el plano.

Sean $\vec{p}_o, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ tres puntos diferentes y no alineados por los que pasa el plano. Sean $\vec{u} = \vec{p}_1 - \vec{p}_o$ y $\vec{v} = \vec{p}_2 - \vec{p}_o$. Sean L_1 y L_2 dos rectas de direcciones respectivas $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pasan por $\vec{p}_o$. Entonces L_1 y L_2 se cortan en el punto $\vec{p}_o$. Estas dos rectas no paralelas que se cortan, determinan un plano.

6. Relaciones entre subconjuntos y desigualdades sencillas

Recordemos que en $\mathbb{R}$ desigualdades tales como $x \geq 4$ delimitan intervalos:

$$[4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x\}.$$

En el plano $\mathbb{R}^2$ ocurre algo semejante, que se precisa al despejar la variable y.

Ejemplo 7.10. Si se nos pide dibujar la región A de $\mathbb{R}^2$ determinada por la desigualdad

$$-3x + 5y \geq 2$$

debemos dibujar el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3x + 5y \geq 2\}.$$

Este conjunto está dado por los puntos del plano que se encuentran por encima de la recta

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

incluyendo a ésta. Haga el dibujo correspondiente.

Ejercicio 7.11. Representar gráficamente

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 1 > 0 \quad \text{y} \quad 5x + 2y \leq 0\}.$$

En el espacio $\mathbb{R}^3$ también ocurre algo semejante, que se precisa al despejar la variable z (o alguna de las otras).

Ejemplo 7.12. Si se nos pide dibujar la región A de $\mathbb{R}^3$ determinada por la desigualdad

$$-3x + 5y + 2z \geq 2$$

debemos dibujar el conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 5y + 2z \geq 2\}.$$

Este conjunto está dado por los puntos del plano que se encuentran por encima del plano

$$z = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + 1$$

incluyendo a éste. Haga el dibujo de este plano.

7. Superficies en $\mathbb{R}^3$.

Daremos varios ejemplos de superficies en $\mathbb{R}^3$.

Los gráficos que presentamos fueron hechos con la ayuda del programa Maple. Este programa es muy útil para visualizar superficies, ya que permite visualizarlas, rotarlas, verlas desde diferentes ángulos, etc.

La instrucción que hace falta para construir el primer gráfico que mostramos es

```
with(plots): cylinderplot([(1-z^2)^(1/2),theta,z],theta=0..2*Pi,z=-1..1,
shading = ZGREYSCALE, style = PATCH, axes=normal, tickmarks=[0,0,0],
numpoints=220, orientation=[55,70], scaling=constrained );
```

Notar que en la instrucción no usamos coordenadas cartesianas (x, y, z). Las coordenadas usadas fueron las cilíndricas (r, θ, z), que se estudiarán más adelante.

Ejemplo 7.13. La ecuación de la esfera de centro (x_o, y_o, z_o) y radio r es

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2.$$

Es decir,

$$||(x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)|| = r.$$

En los siguientes gráficos vemos una esfera con centro $(0, 0, 0)$. En el primero está completa y en el segundo la parte que se ubica en el primer octante.

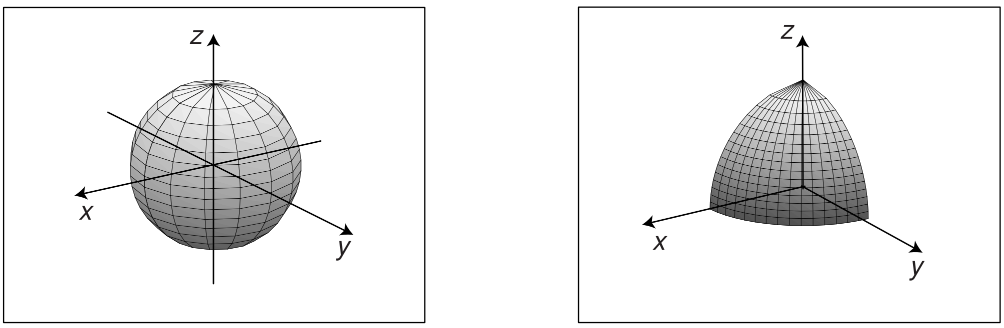


Figura 7.9. Esfera

Ejemplo 7.14. Sea $z = x^2 + y^2$. Esta igualdad representa un paraboloide de revolución, obtenido al rotar $z = y^2$ alrededor del eje z (justifique).

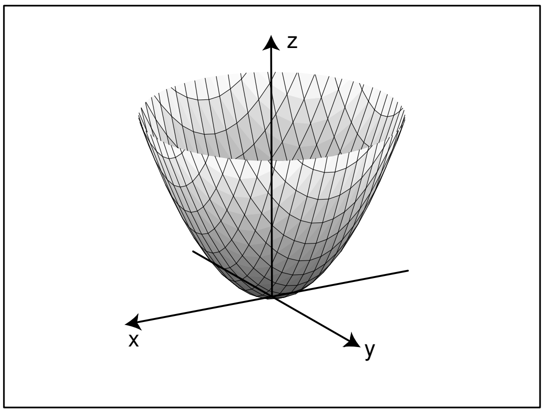


Figura 7.10. Paraboloide

Ejemplo 7.15. El elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

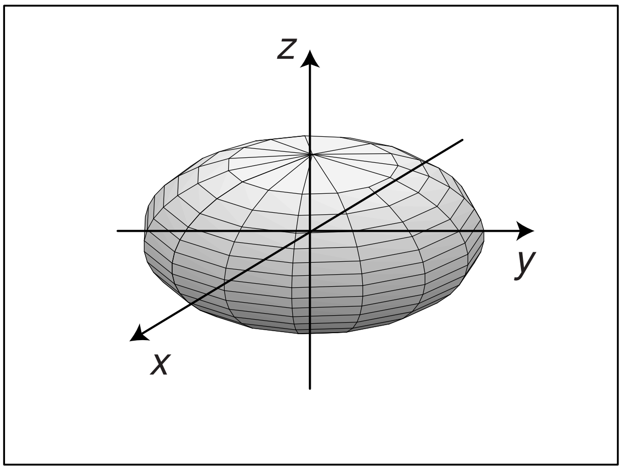


Figura 7.11. Elipsoide

Ejemplo 7.16. El cilindro $x^2 + y^2 = c^2$ (en $\mathbb{R}^3$)

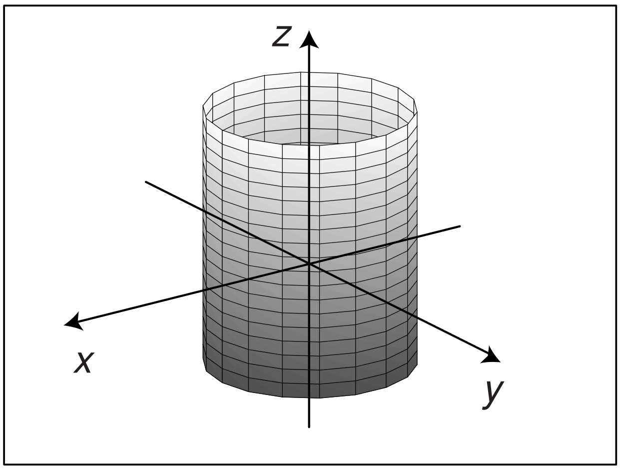


Figura 7.12. Cilindro

Ejemplo 7.17. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

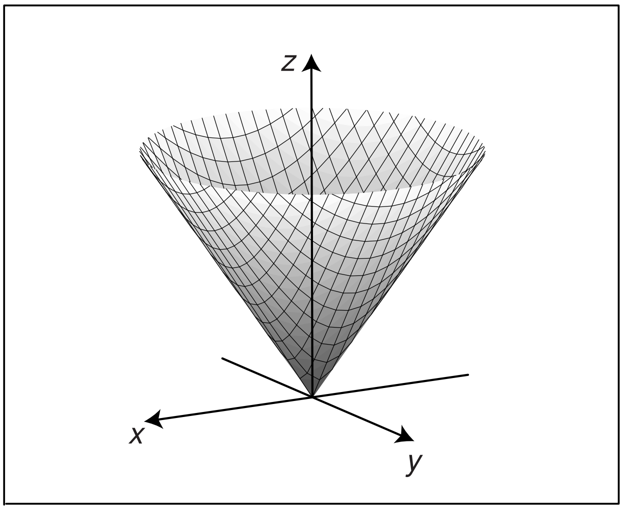


Figura 7.13. Cono

Ejemplo 7.18. El hiperboloide de una hoja es

$$x^2 + y^2 - z^2 = c.$$

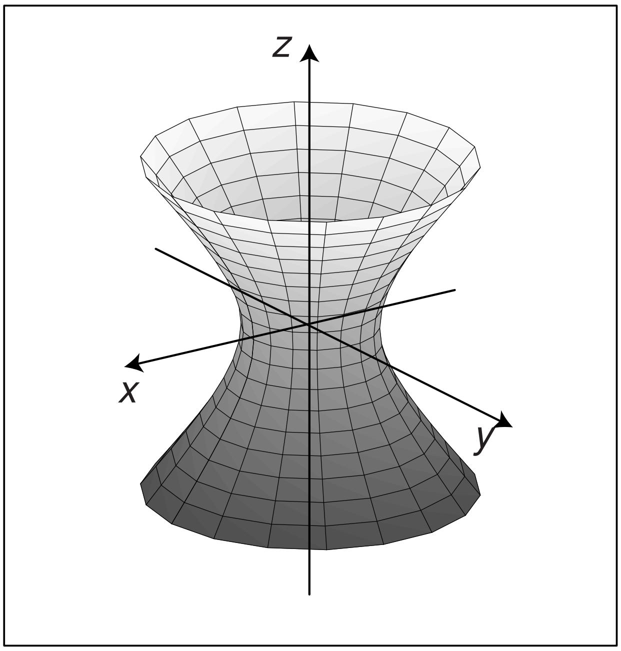


Figura 7.14. Hiperboloide de una hoja

Ejemplo 7.19. El hiperboloide de dos hojas es

$$x^2 - y^2 - z^2 = c.$$

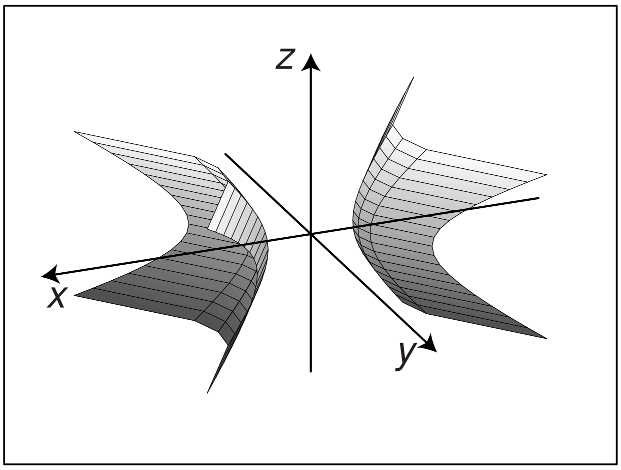


Figura 7.15. Hiperboloide de dos hojas

EJEMPLO 7.20. El paraboloide hiperbólico o "silla de montar". es

$$z = x^2 - y^2.$$

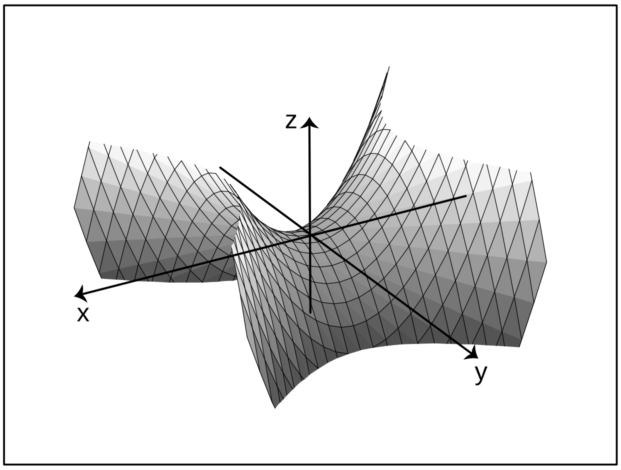


FIGURA 7.16. Paraboloide hiperbólico

8. Lectura adicional: Abiertos y cerrados.

8.1. Motivación e idea principal.

El intervalo

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

es abierto.

El intervalo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

es cerrado.

El calificativo abierto que usamos para el intervalo indica que no contiene los puntos extremos a y b. El calificativo cerrado que usamos para el intervalo indica que contiene los puntos extremos a y b.

Recordemos que en $\mathbb{R}$ dados un punto $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, un intervalo abierto de centro a y radio r es el conjunto

$$D(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Este intervalo se conoce como entorno o vecindad de a.

A continuación vamos a tratar de extender estas ideas a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Tenemos la noción de distancia en estos espacios, con esta noción vamos a definir entornos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

8.2. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^2$.

Definición 7.21. El *disco abierto* en $\mathbb{R}^2$ con centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y radio r es el conjunto

$$D(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y) - (a_1,a_2)|| < r\}$$

(simplemente el interior de una circunferencia con centro a y radio r).

Definición 7.22. El *disco cerrado* en $\mathbb{R}^2$ con centro $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ y radio r es el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y) - (a_1,a_2)|| \leq r\}.$$

El disco abierto no incluye el borde, el disco cerrado sí lo incluye.

A las curvas que limitan un conjunto las llamaremos la *frontera* . Si esta frontera está contenida en el conjunto diremos que el conjunto es *cerrado*.

Los puntos interiores de un conjunto son los que satisfacen la siguiente propiedad: tienen un entorno con centro en el punto y radio r (para algún $r > 0$) tal que el entorno está contenido en el conjunto.

Un conjunto es *abierto* si todos sus puntos son interiores..

8.3. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^3$.

Definición 7.23. La *bola abierta* en $\mathbb{R}^3$ con centro $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y radio r es el conjunto

$$B(a,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x,y,z) - (a_1,a_2,a_3)|| < r\}.$$

(simplemente el interior de una esfera con centro a y radio r).

Definición 7.24. La *bola cerrada* en $\mathbb{R}^3$ con centro $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ y radio r es el conjunto

$$B_C(a,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ||(x,y,z) - (a_1,a_2,a_3)|| \leq r\}.$$

La bola abierta no incluye el borde, la bola cerrada sí lo incluye.

8.4. Definición de conjunto abierto, conjunto cerrado y frontera.

Definición 7.25. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, se dice que A es un *conjunto abierto* si para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Definición 7.26. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, se dice que A es un *conjunto cerrado* si su complemento $\mathbb{R}^3 - A$ es abierto.

Definición 7.27. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, la *frontera* de A se define así:
$\partial A = \{u \in \mathbb{R}^3 :$ toda bola con centro u intersecta a A y al complemento de $A\}$.

En $\mathbb{R}^2$ todas las definiciones son análogas, cambiando bolas por discos.

Ejemplo 7.28. El disco abierto de centro a y radio r es abierto, no es cerrado. Su frontera es la circunferencia con centro a y radio r.

Ejemplo 7.29. El disco cerrado de centro a y radio r es cerrado, no es abierto. Su frontera es la circunferencia con centro a y radio r.

Ejemplo 7.30. Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

A no es abierto, no es cerrado y su frontera es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ejemplo 7.31. $\mathbb{R}^2$ es abierto, también es cerrado y su frontera es $\emptyset$.

Ejemplo 7.32. Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

El conjunto A es cerrado, no es abierto, su frontera es el mismo.

Ejemplo 7.33. La bola abierta de centro a y radio r es abierta, no es cerrada. Su frontera es la circunferencia con centro a y radio r.

Ejemplo 7.34. La bola cerrada de centro a y radio r es cerrada, no es abierta. Su frontera es la esfera con centro a y radio r.

Ejemplo 7.35.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

es abierto, no es cerrado. La frontera es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ejemplo 7.36. Sea

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < 1\}.$$

A no es abierto, no es cerrado. La frontera es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

9. Distintos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas Polares.

El punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas polares (r, θ) si

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

En este caso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = y/x.$$

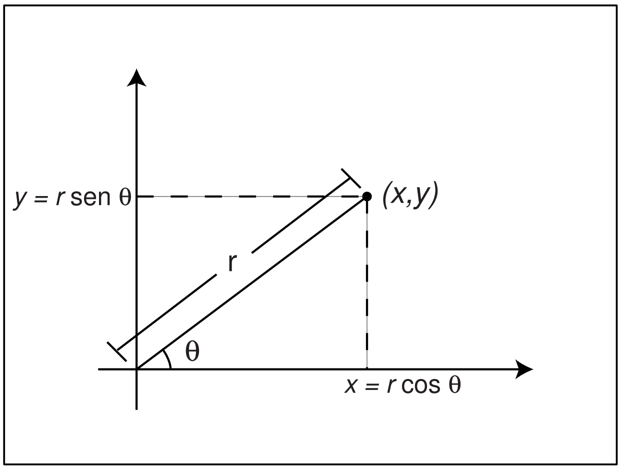


Figura 7.17. Coordenadas polares

Es usual suponer $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Más generalmente, se restringe θ a un intervalo semiabierto de longitud 2π.

Explícitamente

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

donde $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Ejemplo 7.37.

(a) Hallar las coordenadas polares del punto $(6,6)$.

Tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan(6/6) = \arctan 1 = \pi/4.$$

(b) Si un punto tiene coordenadas polares $(8, 2\pi/3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$x = r\cos\theta = 8\cos(2\pi/3) = -8/2 = -4,$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 8\operatorname{sen}(2\pi/3) = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3},$$

Observación 7.38.

Sea θ_o fijo. La gráfica de $\theta = \theta_o$ está formada por los puntos de una semirrecta que forma un ángulo θ_o con la recta $y = 0$.

Sea r_o fijo. La gráfica de $r = r_o$ es una circunferencia con centro en el origen y radio r_o. En coordenadas cartesianas este conjunto se escribe así:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r_o^2\}.$$

Ejercicio 7.39. Considere el siguiente conjunto dado en coordenadas cartesianas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Dibújelo. Indique en qué conjuntos varían las coordenadas polares r, θ.

Ejercicio 7.40. Expresar en coordenadas polares r y θ, el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

9.1. Coordenadas Cilíndricas.

El punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) si

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

es decir, representamos la primera y la segunda coordenada en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera.

En general se toma $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Además

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

Note que

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

Ejemplo 7.41. Si un punto tiene coordenadas cilíndricas $(8, 2\pi/3, -3)$, ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$x = r\cos\theta = 8\cos 2\pi/3 = -8/2 = -4,$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 8\operatorname{sen} 2\pi/3 = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3},$$

$$z = -3.$$

Observación 7.42.

Sea z_o fijo. El conjunto $z = z_o$ está formada por todos los puntos de un plano paralelo al plano xy.

Sea θ_o fijo. El conjunto $\theta = \theta_o$ está formada por todos los puntos de un semiplano que contiene al eje z y que forma un ángulo θ_o con el plano $y = 0$.

En particular $\theta = 0$ corresponde al plano xz.

Sea r_o fijo. El conjunto $r = r_o$ está formada por todos los puntos de un cilindro circular recto cuyo eje central es el eje z y que tiene radio r_0.

Ejemplo 7.43. El conjunto dado en coordenadas cilíndricas por $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,h]$ es un cilindro de radio 1 y altura h. En coordenadas cartesianas este conjunto se escribe así:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq h\}.$$

Ejemplo 7.44. Sea A el cono circular recto de radio R y altura h. En coordenadas cartesianas tenemos que A está dado por

$$0 \leq z \leq h, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z.$$

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$0 \leq z \leq h, \qquad 0 \leq r \leq z.$$

Ejemplo 7.45. Sea B el sólido dado por

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La representación de B en coordenadas cilíndricas es: $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, r]$.

Dibuje el sólido B.

Coordenadas Esféricas.

Recordemos que el punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas esféricas (ρ,θ,φ) si

$$x=\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\qquad y=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\qquad z=\rho\cos\varphi.$$

En general se toma

$$\rho\geq 0,\qquad 0\leq\theta<2\pi,\qquad 0\leq\varphi\leq\pi.$$

Además,

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2,\qquad \tan\theta=\frac{y}{x},\qquad \cos\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

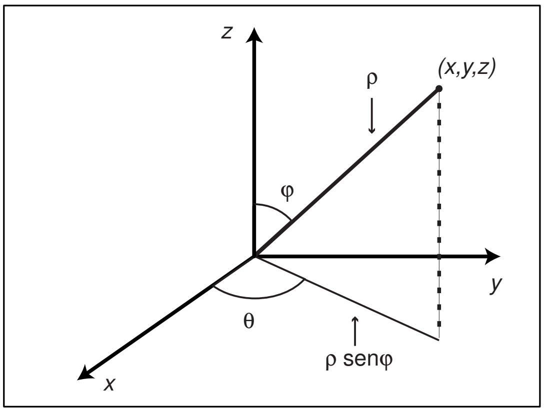


FIGURA 7.18. Coordenadas esféricas

Note que:

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}, &\qquad \operatorname{sen}\theta&=\frac{y}{r},\\ \cos\varphi&=\frac{z}{\rho}, &\qquad \operatorname{sen}\varphi&=\frac{r}{\rho}.\end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 7.46. Sea ρ_0 fijo. La gráfica de $\rho=\rho_0$ es una esfera con centro en el origen y radio ρ_0.

Sea θ_0 fijo. La gráfica de $\theta=\theta_0$ es un semiplano que contiene al eje z.

Sea φ_0 fijo. La gráfica de $\varphi=\varphi_0$ es un cono con vértice en el origen y una abertura angular 2φ.

OBSERVACIÓN 7.47.

(1) Si ρ es constante, las cantidades (ρ,θ,φ) forman un sistema de coordenadas en la superficie de una esfera.
(2) La latitud y la longitud en la superficie de la tierra también forman un sistema de coordenadas.

(3) Si restringimos θ de modo que $-\pi < \theta < \pi$, entonces se llama la longitud del punto en coordenadas esféricas.
(4) φ se llama colatitud del punto y la latitud del punto es $\pi/2 - \varphi$.

Ejercicios.
Geometría plana y del espacio.

(1) Representar gráficamente el conjunto de los puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ que satisfacen las siguientes desigualdades.

(a) $|x| \leq 1$,

(b) $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$,

(c) $|x| < 1$ y $|y| < 1$,

(d) $|x| < 1$ y $|y| \leq 1$,

(e) $3x^2 + 2y^2 < 6$,

(f) $|x - 3| < 1$ y $|y| < |$,

(g) $y > x^2$ y $|x| < 2$,

(h) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$,

(i) $x < y < x^2$,

(j) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 \geq 0$,

(k) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 \leq 0$,

(l) $9x^2 - 4y^2 > 36$.

(2) Identificar cada uno de los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$.

(a) Todos los puntos cuya distancia al plano yz es 5.

(b) Todos los puntos cuya distancia al eje z es 4.

(c) Todos los puntos cuya distancia al plano xy es 7.

(d) Todos los puntos cuya distancias al plano xz y al plano yz son iguales.

(e) Todos los puntos cuyas distancias a los puntos $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$ son iguales.

(3) Hallar las coordenadas (x, y) del vector (o vectores) $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ que cumplen:

(a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ y $\vec{v}$ forma un ángulo de $45°$ con el eje x.

(b) $\|\vec{v}\| = 1$ y $\vec{v}$ es perpendicular al vector $(1,0)$.

(c) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ y $\vec{v}$ es paralelo a $(-2,2)$.

(d) $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ y $\vec{v}$ forma un ángulo de $30°$ con el vector $(\sqrt{3},1)$.

(4) Calcular $\vec{a} \times \vec{b}$, donde

$$\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} \qquad \vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}.$$

(5) Calcular $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ donde $\vec{a}$, $\vec{b}$ son los vectores del ejercicio anterior y

$$\vec{c} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}.$$

(6) Hallar el volumen del paralelepípedo con lados

$$2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}, \qquad 5\vec{\imath} - 3\vec{k}, \qquad \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}.$$

(7) Hallar el volumen del paralelepípedo con lados

$$\vec{\imath}, \qquad 3\vec{\jmath} - \vec{k}, \qquad 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

(8) Describir todos los vectores unitarios que son ortogonales a los siguientes vectores.

(a) $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}$

(b) $-5\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 4\vec{k},\ 7\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 9\vec{k}$

(c) $-5\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} - 4\vec{k},\ 7\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 9\vec{k},\ \ \vec{0}$

(d) $2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k},\ -4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 6\vec{k}$

(9) Sean $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Calcular

$$\vec{u} + \vec{v},\ \ \langle \vec{u},\ \vec{v} \rangle,\ \ \|\vec{u}\|,\ \ \|\vec{v}\|,\ \ \vec{u} \times \vec{v}.$$

(10) Hallar una ecuación para el plano que

(a) es perpendicular a $\vec{v} = (1,1,1)$ y pasa por $(1,0,0)$;

(b) es perpendicular a $\vec{v} = (1,2,3)$ y pasa por $(1,1,1)$;

(c) es perpendicular a la recta de ecuación $l(t) = (5,0,2)t + (3,-1,1)$ y pasa por $(5,-1,0)$;

(d) es perpendicular a la recta de ecuación $l(t) = (-1,-2,3)t + (0,7,1)$ y pasa por $(2,4,-1)$;

(e) pasa por el punto $(1,2,-3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $l(t) = (0,-2,1) + (1,-2,3)t$.

(11) (a) Demostrar que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$, si y sólo si, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0}$.

(b) Demostrar que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}+(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}+(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v} = \vec{0}$ (*identidad de Jacobi*).

(12) Los puntos siguientes están dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas rectangulares y en coordenadas esféricas.

(a) $(1, 45^\circ, 1)$,

(b) $\left(2, \frac{\pi}{2}, -4\right)$,

(c) $(0, 45^\circ, 0)$,

(d) $\left(3, \frac{\pi}{6}, 4\right)$,

(e) $\left(1, \frac{\pi}{6}, 0\right)$,

(f) $\left(2, \frac{3\pi}{4}, -2\right)$.

(13) Cambiar los puntos siguientes de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y a coordenadas cilíndricas.

(a) $(2,1,-2)$,

(b) $(0,3,4)$,

(c) $(\sqrt{2},1,1)$,

(d) $(-2\sqrt{3},-2,3)$.

(14) Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas.

(a) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$

(b) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, -z)$

(c) $(r, \theta, z) \longrightarrow \big(-r, \theta - \frac{\pi}{4}, z\big)$

(15) Representar gráficamente la región del plano cuyas coordenadas polares satisfacen:

(a) $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi,\ 1 \leq r \leq 2$

(b) $r\,\mathrm{sen}\theta \leq 1,\ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{4}$

(c) $r \leq 1,\ |\theta| \leq \dfrac{\pi}{4}$

(d) $r \leq 4\cos\theta,\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

(16) Representar gráficamente el conjunto de los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 - 15 = 0.$$

(17) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, 4, 5)$ y es ortogonal al vector $(1, 0, 0)$.

(18) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(5, 2, 4)$ y es ortogonal al vector $(1, 2, 3)$.

(19) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 3, 0)$ y es paralelo al plano de ecuación $x + 5y - 10z = 8$.

(20) Hallar la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio R en coordenadas cilíndricas.

(21) Representar gráficamente cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ y expresarlos en coordenadas cilíndricas.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\}$,

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$,

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 9\}$,

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9,\ -1 \leq z \leq 1\}$.

(22) Opcional: Decir cuáles de los conjuntos que aparecen en el Ejercicio 1 son abiertos, cuáles son cerrados y hallar su frontera.

CAPÍTULO 8

Curvas en el plano y en el espacio.

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Ejemplos y motivación: movimiento circular uniforme, parabólico, etc. Vector tangente a una curva en términos de las funciones coordenadas. Recta tangente a una curva en términos del vector tangente a dicha curva. Reparametrización y longitud de arco. Trayectoria y forma de la trayectoria de una partícula en movimiento. (Interpretar la reparametrización de una curva como una forma de movimiento a lo largo de esa curva).

1. Motivación.

Descripción del movimiento de un proyectil, despreciando la resistencia del aire.

Supongamos que se lanza un proyectil, con velocidad inicial 10 m/seg. y un ángulo de 45°. ¿Cómo describir el movimiento del proyectil?

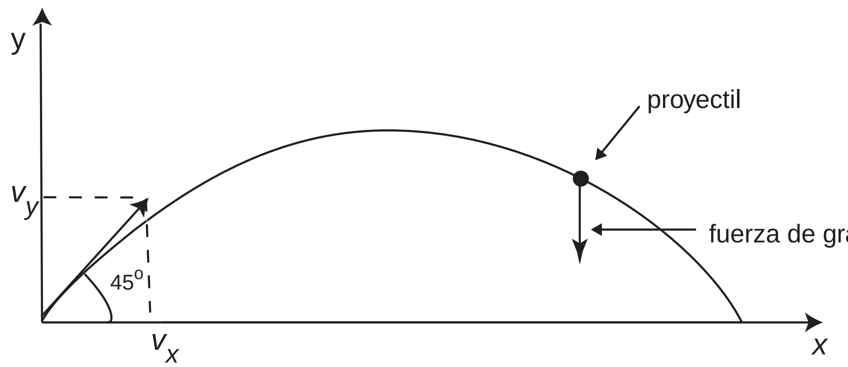


FIGURA 8.1. Lanzamiento de un proyectil

Tenemos que

$$v_x = 10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2},$$
$$v_y = 10 \,\mathrm{sen}\, 45^\circ = 5\sqrt{2}.$$

Tomaremos $g = -10$ m/seg^2. Así que tenemos que

$$
\begin{aligned}
y &= y_o + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 = 5\sqrt{2}t - 5t^2 = 5t(\sqrt{2} - t) \\
x &= x_o + v_x t = 5\sqrt{2}t
\end{aligned}
$$

El proyectil vuelve a tocar tierra cuando $t = \sqrt{2}$, ya que y se anula cuando $t = 0$ y cuando $t = \sqrt{2}$.

Queremos averiguar qué forma tiene la trayectoria y cuál es la altura máxima, $y_{\max}$, que alcanza el proyectil.

Como $x = 5\sqrt{2}t$ entonces $t = \dfrac{x}{5\sqrt{2}}$, luego

$$y = 5\sqrt{2}t - 5t^2 = x - \frac{x^2}{10}.$$

De donde sigue que la trayectoria del proyectil es una parábola.

Para hallar la altura máxima resolvemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{5} = 0.$$

Tenemos que $\dfrac{dy}{dx} = 0$ si y sólo si $x = 5$. De donde

$$y_{\max} = 5 - \frac{25}{10} = 2,5.$$

Este ejemplo nos muestra que, para describir el movimiento de un proyectil, debemos considerar cada una de sus coordenadas como una función del tiempo. Es decir, tenemos un par de funciones $x(t)$, $y(t)$, tales que el proyectil se encuentra ubicado en el punto $(x(t), y(t))$ en el instante t.

Esta es una de las razones por las que es muy natural considerar funciones a valores vectoriales.

Sea $D \subset \mathbb{R}$. Si tenemos un par de funciones $g_1 : D \to \mathbb{R}$ y $g_2 : D \to \mathbb{R}$, podemos considerar el par $(g_1(t), g_2(t))$ y definir

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Así obtenemos una función $g : D \to \mathbb{R}^2$.

Análogamente se definen funciones a valores en $\mathbb{R}^3$.

Sea $D \subset \mathbb{R}$. Si tenemos $g_1 : D \to \mathbb{R}$, $g_2 : D \to \mathbb{R}$ y $g_3 : D \to \mathbb{R}$, podemos definir $g : D \to \mathbb{R}^3$ mediante la fórmula

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)).$$

2. Curvas y trayectorias.

Con frecuencia se piensa en una curva como una línea, de diferentes formas, trazada en el papel o en el espacio. Debe quedar claro que para describir el movimiento de una partícula esto es bastante impreciso.

La definición precisa de curva y de trayectoria las daremos a continuación.

Sea $n = 2$ ó $n = 3$. Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Definición 8.1. Una *trayectoria* es una función $g : I \to \mathbb{R}^n$.

El concepto de trayectoria tiene una interpretación muy natural: Si queremos describir el movimiento de una partícula en el plano o en el espacio, debemos indicar en que posición se encuentra la partícula en cada instante. En otras palabras, a cada instante t, debemos asignarle un punto $g(t)$ en el plano o en el espacio. Por lo tanto, podemos pensar en una trayectoria como una función que nos permite describir el movimiento de una partícula en el espacio n-dimensional.

Definición 8.2. Una *curva* es la imagen de una trayectoria. Es decir, $G \subset \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una trayectoria $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $G = g([a, b])$.

Los puntos $g(a)$ y $g(b)$ se llaman los *extremos* de la trayectoria, $g(a)$ es el extremo inicial y $g(b)$ el extremo final. Si indicamos cual es la curva G, cual es su extremo inicial y cual es su extremo final, estamos indicando la dirección en que fue recorrida G. Por esto a la terna

$$(g([a, b]), g(a), g(b))$$

se le suele llamar *curva orientada.* A la trayectoria g se le suele llamar *parametrización* de la curva G.

También es usual considerar trayectorias cuyo dominio es toda la recta $\mathbb{R}$. En este caso no tenemos punto inicial, ni punto final, pero sí un sentido de recorrido. Se dice que una curva G es *cerrada* cuando su extremo final coincide con su extremo inicial.

Ejemplo 8.3.

(1) Sean $\vec{p}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$g(t) = \vec{p} + t\vec{v}.$$

Entonces g es una trayectoria, la curva correspondiente es la recta que pasa por $\vec{p}$ en la dirección de $\vec{v}$.

(2) Sean $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t).$$

Entonces g es una trayectoria, la curva correspondiente es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r.

(3) Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t) = (t, f(t)).$$

Entonces g es una trayectoria, la curva correspondiente es la gráfica de f.

(4) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$h(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, t).$$

Entonces h es una trayectoria, la curva correspondiente es una *hélice*.

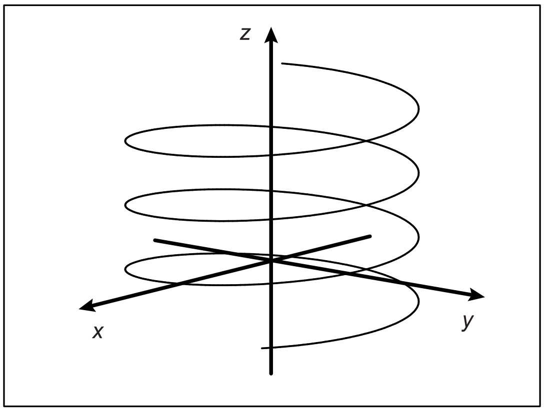


Figura 8.2. Hélice

Es importante notar que dos trayectorias diferentes pueden dar origen a la misma curva.

Podemos interpretar la existencia de dos trayectorias asociadas a la misma curva como dos formas diferentes de movimiento a lo largo de la curva dada.

3. Límites y continuidad de las trayectorias.

Nuevamente sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $n = 2$ ó 3.

Definición 8.4. Sean $t_o \in I$, $L \in \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Decimos que

$$\lim_{t \to t_o} g(t) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |t - t_o| < \delta$ entonces $\|g(t) - L\| < \varepsilon$.

Definición 8.5. Sean $t_o \in I$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Decimos que g es continua en t_o si

$$\lim_{t \to t_o} g(t) = g(t_o).$$

Sea $g : I \to \mathbb{R}^n$ una función, entones

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)),$$

donde $g_k : I \to \mathbb{R}$.

Las funciones g_k se llaman funciones coordenadas y, en este caso, escribiremos

$$g = (g_1, \dots, g_n).$$

Proposición 8.6. *Sean $t_o \in I$, $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria.*

(a) $\lim_{t \to t_o} g(t) = L$ *si y sólo si* $\lim_{t \to t_o} g_k(t) = L_k$ *para* $k = 1, \dots, n$.
(b) g *es continua en* t_o *si y sólo si* g_k *es continua en* t_o *para* $k = 1, \dots, n$.

4. Vector tangente a una curva.

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Definición 8.7. Sean $t_o \in I$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Decimos que g derivable en t_o si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t_o + h) - g(t_o)}{h}.$$

Decimos que g es derivable en I cuando g es derivable en todo punto de I.

Proposición 8.8. *Sean $t_o \in I$, $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. g es derivable en t_o si y sólo si g_k es derivable en t_o para $k = 1, \dots, n$.*

En este caso,

$$g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t)).$$

Esta última igualdad nos proporciona una manera de calcular derivadas de trayectorias.

Definición 8.9. Sea $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria derivable. El vector velocidad en $g(t)$ es

$$g'(t) = (g_1'(t), \dots, g_n'(t)).$$

Definición 8.10. Sea $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria derivable. La rapidez en $g(t)$ es la longitud del vector velocidad, es decir

$$||g'(t)|| = \sqrt{(g_1'(t))^2 + \dots + (g_n'(t))^2}.$$

Ejemplo 8.11. Sea

$$g(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{si } t \geq 0 \\ (-t, t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$g'(t) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } t > 0 \\ (-1, 1) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notar que $g'(t)$ no está definida para $t = 0$.

Por lo tanto

$$||g'(t)|| = \sqrt{2} \qquad t \neq 0.$$

4.1. Interpretación geométrica de la derivada.

El vector derivada es paralelo a la recta tangente a la curva g en el punto $g(t_o)$. Esto se expresa diciendo que $g'(t)$ es un vector tangente a la curva g en el punto $g(t)$. A manera de ejercicio, justificar este hecho de manera geométrica.

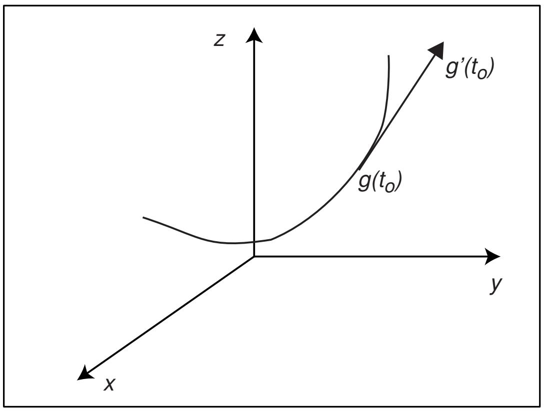


FIGURA 8.3. Vector tangente a una curva

La ecuación de la tangente a la curva g en $g(t_o)$ en términos del vector tangente a dicha curva es:

$$\vec{u} = g(t_o) + tg'(t_o),$$

donde $\vec{u} = (x, y)$ o $\vec{u} = (x, y, z)$, según n sea 2 ó 3.

EJEMPLO 8.12. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Entonces g es una trayectoria, la curva correspondiente es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1.

Como ejercicio, verificar que el vector $g'(t)$ es ortogonal a $g(t)$, e interpretar geométricamente.

EJEMPLO 8.13. Sea

$$g(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{si } t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notar que la curva que corresponde con la trayectoria g es el gráfico de la función valor absoluto.

Entonces

$$g'(t) = \begin{cases} (2t, 2t) & \text{si } t > 0 \\ (-2t, 2t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notemos que $g'(0)$ está definido y $g'(0) = (0, 0)$.

Tenemos que $g'(t)$ es el vector tangente a la curva g en el punto $g(t)$. Además

$$\|g'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = 2\sqrt{2}t.$$

Observación 8.14. Puede ocurrir que una trayectoria g sea diferenciable y sin embargo la curva $G = g(I)$ tenga "picos". En ese caso no está definida una dirección tangente en el punto donde hay un "pico".

En la función del Ejemplo 8.13 tenemos que $g'(0) = (0,0)$. Sin embargo g tiene un pico en $g(0) = (0,0)$. Por supuesto, no está definida una dirección tangente en $(0,0)$. La interpretación física es la siguiente: Una partícula se mueve sobre la curva en dirección al origen, va disminuyendo su velocidad, se detiene en el origen y cambia la dirección del movimiento.

Ejemplo 8.15. La cicloide es la trayectoria descrita por un punto moviéndose sobre una circunferencia que comienza a rodar, con velocidad constante. En el instante t el centro de la circunferencia está en el punto $(t,1)$.

A manera de ejercicio, verificar que la siguiente trayectoria corresponde con una cicloide.

$$g(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) = (t,1) - (\operatorname{sen} t, \cos t).$$

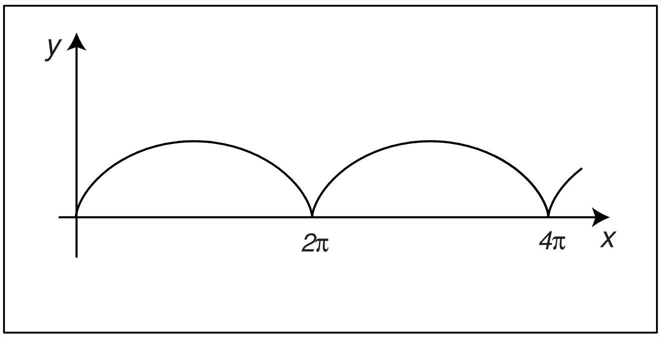


Figura 8.4. Cicloide

La cicloide tiene un "pico" en el punto $(2\pi, 0)$, sin embargo es derivable en ese punto.

Observación 8.16. Para poder garantizar que una trayectoria diferenciable g no tenga "picos" es necesario pedirle $g'(t) \neq 0$ para todo t en el dominio de g.

Definición 8.17. Se dice que una función es de clase C^1 cuando es diferenciable y su derivada es continua.

De ahora en adelante consideraremos trayectorias g, que son diferenciables y tales que su derivada es continua, es decir, son de clase C^1 .

5. Reparametrización.

EJEMPLO 8.18. Sean $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

y consideremos la curva cerrada $G = g([0, 2\pi])$.

Sea $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Las dos trayectorias g y h dan origen a la misma curva, que es una circunferencia en el plano, con centro $(0, 0)$ y radio 1. La trayectoria g recorre la circunferencia en sentido antihorario, comenzando en el punto $(1, 0)$. La trayectoria h también recorre la circunferencia en sentido antihorario, también comenzando en el punto $(1, 0)$.

Note que si definimos $\alpha : [0, 2\pi] \to [-\pi, \pi]$ por $\alpha(t) = t - \pi$ tenemos $g = h \circ \alpha$.

En este caso se dice que h es una reparametrización de la curva G y que las trayectorias g y h son equivalentes.

En general, si tenemos dos trayectorias $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $h : [c, d] \to \mathbb{R}^n$,diremos que g y h *son equivalentes* si existe una función $\alpha : [a, b] \to [c, d]$ tal que

(i) $\alpha(a) = c$, $\alpha(b) = d$.
(ii) α es derivable y $\alpha'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$.
(iii) $g = h \circ \alpha$, esto es $g(t) = h(\alpha(t))$ para todo $t \in [a, b]$.

En este caso se dice que h es una *reparametrización* de la curva $g[a, b]$.

6. Longitud de arco.

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado y sea $g : I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Supongamos que $P = \{t_o, t_1, \ldots, t_N\}$ es una partición de I, entonces P da origen a una poligonal, que se obtiene uniendo los puntos $g(t_o)$, $g(t_1)$, $\ldots$, $g(t_N)$ en ese orden.

La longitud de esta poligonal es

$$\sum_{k=1}^{N} \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|.$$

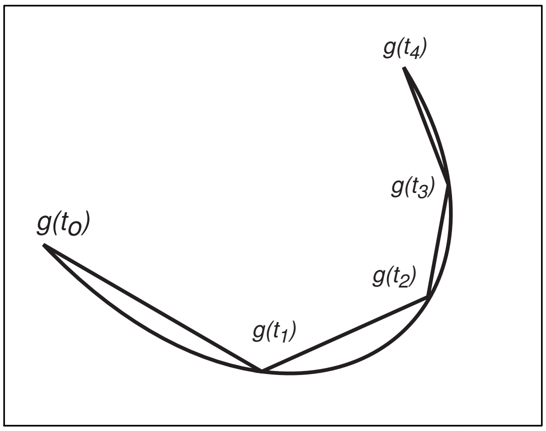


Figura 8.5. Poligonal

Definición 8.19. Se dice que una trayectoria $g : I \to \mathbb{R}^n$ es *rectificable* si

$$\sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^{N} \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|$$

existe y es finito.

Diremos que la curva G es rectificable si existe una parametrización de G que es rectificable.

Definición 8.20. Si g es una trayectoria rectificable, se define su *longitud* por

$$l(g) = \sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^{N} \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|$$

Vamos a considerar cierta clase muy especial de trayectorias: las trayectorias lisas. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Se dice que g es *lisa* si g es de clase $\mathcal{C}^1$. Es decir, cuando existe un intervalo abierto V, que contiene a $[a, b]$ y una extensión de g a V que tiene derivada continua.

Tenemos el siguiente resultado, que no vamos a demostrar. Sin embargo daremos una justificación intuitiva.

Teorema 8.21. *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria lisa. Entonces g es rectificable y*

$$l(g) = \int_a^b \|g'(t)\|dt.$$

Justificación intuitiva.
Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria lisa.

Sea $a = t_o < t_1 < \ldots < t_N = b$ entonces

$$\|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \sqrt{(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1}))^2 + (g_2(t_k) - g_2(t_{k-1}))^2 + (g_3(t_k) - g_3(t_{k-1}))^2}\ .$$

Por el teorema del valor medio tenemos que

$$\begin{aligned} g_1(t_k) - g_1(t_{k-1}) &= g_1'(t_k^1)(t_k - t_{k-1}), \\ g_2(t_k) - g_2(t_{k-1}) &= g_2'(t_k^2)(t_k - t_{k-1}), \\ g_3(t_k) - g_3(t_{k-1}) &= g_3'(t_k^3)(t_k - t_{k-1}), \end{aligned}$$

donde t_k^1, t_k^2 y t_k^3 son puntos que se encuentran entre t_{k-1} y t_k.

Por lo tanto

$$\|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \left(\sqrt{(g_1'(t_k^1))^2 + (g_2'(t_k^2))^2 + (g_3'(t_k^3))^2}\ \right)(t_k - t_{k-1}).$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{N} \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{N} \left(\sqrt{(g_1'(t_k^1))^2 + (g_2'(t_k^2))^2 + (g_3'(t_k^3))^2}\ \right)(t_k - t_{k-1}).$$

Si hacemos tender N a $+\infty$ y la separación entre los t_k la hacemos cada vez más pequeña esta suma se parece a

$$\sum_{k=1}^{N} \|g'(t_k)\| \,(t_k - t_{k-1}),$$

que a su vez tiende a

$$\int_a^b \|g'(t)\| \, dt.$$

□

Observación 8.22. En la justificación anterior tenemos que

$$\int_a^b \|g'(t)\| \, dt \approx \sum_{k=1}^{N} \|g'(t_k)\| \,(t_k - t_{k-1}),$$

siempre que N sea “grande” y la separación entre los t_k “pequeña”.

Esto es porque $\|g'(t_k)\| \,(t_k - t_{k-1})$ aproxima muy bien a la longitud de un pedazo “pequeño” de curva y al sumar aproximamos la longitud de la curva.

En Física y otras aplicaciones prácticas es usual pensar en

$$\|g'(t)\|\, dt$$

como la longitud de un parte muy pequeña de la curva, se le suele llamar *elemento de longitud de arco* y es usual hacer razonamientos y deducciones sobre estos elementos, que después se extienden a toda la curva a través de la integral.

En el siguiente capítulo veremos un ejemplo, al estudiar trabajo mecánico.

Definición 8.23. Diremos que una curva G es *lisa* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa. En este caso definimos la *longitud* de G como $l(G) = l(g)$ donde g es una parametrización lisa de G.

Se puede probar que la longitud de una curva es independiente de su parametrización.

Ejemplo 8.24. La función $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$ es una parametrización de la circunferencia de radio R y su longitud es:

$$\int_0^{2\pi} \|g'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$

Ejercicio 8.25. Demostrar que la longitud del gráfico de una función diferenciable, con derivada continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\;\; dt.$$

Indicación: considerar la parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t, f(t))$.

Ejercicios.
Curvas en el plano y en el espacio.

(1) Sea

$$g(t) = \left(t^3, [t], \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right).$$

(a) Halle el dominio de g.

(b) Determine cuáles de los siguientes límites existen

$$\lim_{t \to o+} g(t),$$

$$\lim_{t \to o-} g(t),$$

$$\lim_{t \to o} g(t).$$

(c) Indique los puntos de continuidad de g.

(d) Indique los puntos de discontinuidad de g.

(2) Demostrar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ si está definida por

$$g(t) = (c_1, c_2, c_3),$$

donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, entonces

$$g'(t) = (0, 0, 0).$$

Interpretar desde el punto de vista físico.

(3) Sea $n = 2$ ó $n = 3$. Sea I un intervalo abierto y sean $f : I \to \mathbb{R}^n$ y $g : I \to \mathbb{R}^n$ funciones diferenciables.

Demuestre que

(a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y g es derivable en t, entonces λg es derivable en t y

$$(\lambda g)'(t) = \lambda g'(t).$$

(b) Si f y g son derivables en t entonces $f+g$ es derivable en t. Además

$$(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t).$$

(c) Si f y g son derivables en t entonces $\langle f, g\rangle$ es derivable en t. Además

$$\langle f, g\rangle'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.$$

(d) Si f y g son derivables en t entonces $\langle f, g\rangle$ es derivable en t. Además

$$(f \times g)'(t) = (f'(t) \times g(t)) + (f(t) \times g'(t)).$$

(e) Si g es derivable en t entonces

$$\frac{d}{dt}\|g(t)\| = \frac{\langle g(t), g'(t)\rangle}{\|g(t)\|}.$$

(f) Si $\|g(t)\|$ es constante entonces $g(t)$ es perpendicular a $g'(t)$.

(4) Hallar una parametrización de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

recorrida en sentido anti-horario.

(5) Hallar la rapidez de la trayectoria $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(t) = (R\cos\omega t, R\,\mathrm{sen}\,\omega t)$, ($R$ y ω son constantes).

Encontrar una reparametrización que tenga rapidez 1.

(6) Hallar la rapidez de la trayectoria $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(t) = (R\cos\omega t, R\,\mathrm{sen}\,\omega t, bt)$, ($R$, ω y b son constantes).

Encontrar una reparametrización que tenga rapidez 1.

(7) Parametrizar el segmento de recta que une los puntos $(1,3)$ y $(4,5)$

(8) Hallar la longitud de cada una de las siguientes curvas.

(a) $y = \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{2}\,\ln x, \quad 1 \leq x \leq 2.$

(b) $y = 2\,x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

(c) $y = \sqrt{36 - x^2}\,, \quad 0 \leq x \leq 4.$

(d) $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$

(e) $x = 3t$, $y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

(9) Una partícula se mueve en el plano, de manera que en el instante t se encuentra ubicada en el punto

$$\left(\frac{4t}{t^2+4}, \frac{t^2-4}{t^2+4} \right).$$

Demostrar que la partícula se mueve en una circunferencia con centro en el origen.

(10) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la trayectoria definida por $g(t) = (e^t, t)$.

(a) Representar gráficamente la curva g.

(b) Representar gráficamente los vectores tangentes $g'(0)$ y $g'(1)$.

(11) Representar gráficamente la curva asociada a la trayectoria $(x, y) = (t^4, t^8)$. Verificar que esta parametrización no define un vector tangente en el origen. ¿Será posible encontrar otra parametrización que sí defina un vector tangente en el origen?

CAPÍTULO 9

Integrales de línea.

Integrales de línea. Interpretación como trabajo mecánico.

1. Definición y ejemplos de integrales de línea.

Un campo vectorial es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial, entonces

$$F = (F_1, \dots, F_m),$$

donde $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo $F(x,y) = (x^2, \operatorname{sen}(x+y))$ es un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición 9.1. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y G una curva lisa orientada. La *integral de línea* de F a lo largo de G es

$$\int_G F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n = \int_a^b (\ F_1(g(t))\, g_1'(t) + \cdots + F_n(g(t))\, g_n'(t)\ )\ dt.$$

donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de G y $F_1, \dots, F_n$ son las funciones coordenadas de F.

La integral de línea mide el comportamiento de F a lo largo de G.

Observación 9.2. En el caso $n = 2$ es usual utilizar (x, y) en vez de (x_1, x_2), así que, para $n = 2$ se suele escribir

$$\int_G F_1\, dx + F_2\, dy = \int_a^b (\ F_1(g(t))\, g_1'(t) + F_2(g(t))\, g_2'(t)\ )\ dt.$$

Análogamente, para $n = 3$ se suele escribir

$$\int_G F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b (\ F_1(g(t))\, g_1'(t) + F_2(g(t))\, g_2'(t) + F_3(g(t))\, g_3'(t)\ )\ dt.$$

EJEMPLO 9.3. Calcular

$$\int_G (x^2 + y)\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz,$$

donde $g(t) = (t, t^2, t^3)$ para $0 \leq t \leq 1$ y $G = g[0, 1]$

Sea $F(x, y, z) = (x^2 + y, y^2, z^2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_G (x^2 + y)\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz &= \int_G F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \\
&= \int_0^1 \big(\, F_1(t, t^2, t^3) \cdot 1 + F_2(t, t^2, t^3)\,2t + F_3(t, t^2, t^3)\,3t^2 \,\big)\; dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + t^2 + t^4\,2\,t + t^6\,3\,t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 (2t^2 + 2t^5 + 3t^8)\,dt = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Es importante notar que, para calcular la integral de línea, formalmente consideramos $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$. Así

$$F_k(x, y, z) = F_k(g(t)) = F_k(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

y $dx = g_1'(t)\,dt$, $dy = g_2'(t)\,dt$, $dz = g_3'(t)\,dt$.

1.1. Independencia de la Trayectoria.

Tenemos que la integral de línea sobre una curva orientada G es independiente de la trayectoria, más precisamente.

Sean $g : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria lisa y sea $h : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de g. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, entonces

$$\int_a^b (F_1(g(t))\,g_1'(t) + \ldots + F_n(g(t))\,g_n'(t))\; dt = \int_c^d (F_1(h(t))\,h_1'(u) + \ldots + F_n(h(u))\,h_n'(u))\; du.$$

EJEMPLO 9.4. Sea $F(x, y) = (x, -y)$ y G el segmento de la circunferencia de centro $\vec{0}$ y radio 1 que está en el primer cuadrante, orientado en sentido antihorario. Calcular

$$\int_G F_1\,dx + F_2\,dy.$$

Sea $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $0 \leq t \leq \pi/2$, así $G = g[0, \pi/2]$. Luego

$$
\begin{aligned}
\int_G F_1\, dx + F_2\, dy &= \int_0^{\pi/2} (\ F_1(\cos t, \operatorname{sen} t)\,(-\operatorname{sen} t) + F_2(\cos t, \operatorname{sen} t)\ \cos t\ )\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\cos t\,(-\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen} t \cos t)\, dt \\
&= -\int_a^{\pi/2} \operatorname{sen}(2t)\, dt \\
&= \left.\frac{\cos(2t)}{2}\right|_0^{\pi/2} = -1.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.5. Sea G la curva dada por $g(t) = (t, t^2, t)$ para $0 \leq t \leq 1$. Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2 + 2, xz + y - 1)$$

sobre la trayectoria g.

Lo que debemos calcular es

$$\int_G x^2\, dx + (y^2 + 2)\, dy + (xz + y - 1)\, dz.$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_G x^2\, dx + (y^2 + 2)\, dy + (xz + y - 1)\, dz &= \int_0^1 \big(\ F_1(t, t^2, t) + F_2(t, t^2, t)\, 2t + F_3(t, t^2, t)\ \big)\, dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + (t^4 + 2)\, 2\, t + (t\, t + t^2 - 1))\, dt \\
&= \int_0^1 (2t^5 + 3t^2 + 4t - 1)\, dt = \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 9.6. Sea G la curva dada por $g(t) = (t, -t, t^2, -t^2)$ para $0 \leq t \leq 1$. Calcular

$$\int_G (x - y)\, dx + (y - z)\, dy + (z - w)\, dz + (w - x)\, dw.$$

Tenemos que

$$\int_G (x-y)\,dx + (y-z)\,dy + (z-w)\,dz + (w-x)\,dw =$$

$$= \int_0^1 [2t - (-t-t^2) + 2t^2 2t - (-t^2-t)2t]\,dt = \cdots = 4.$$

Otra notación para las integrales de línea.

Es usual denotar la integral de línea del campo vectorial F a lo largo de la curva G por

$$\int_G F \cdot d\vec{x}.$$

Esta notación se justifica por el siguiente formalismo:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es otra notación para $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,

(b) $\vec{x} = (x, y, z)$, de manera que $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$,

(c) como $F = (F_1, F_2, F_3)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F \cdot d\vec{x} &= (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \langle (F_1, F_2, F_3), (dx, dy, dz) \rangle \\ &= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz. \end{aligned}$$

Cambio de orientación en una curva.

Si G es una curva orientada, por $-G$ denotaremos la misma curva orientada en sentido contrario. Tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 9.7. *Sea G una curva lisa entonces*

$$\int_{-G} F \cdot d\vec{x} = -\int_G F \cdot d\vec{x}.$$

2. Interpretación como trabajo mecánico.

A continuación veremos la interpretación física de la integral de línea.

Notemos primero que

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle\,dt = \int_a^b \langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \rangle \|g'(t)\|\,dt$$

si la curva G corresponde con la trayectoria g.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria g y que está sometida a un campo de fuerzas F.

Recordemos que, en movimiento unidimensional y cuando la fuerza es constante, el trabajo es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, es decir, el trabajo es el producto de la longitud de la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento, multiplicado por la longitud del desplazamiento.

Cuando consideramos un elemento de longitud de arco, como el desplazamiento es tan pequeño, podemos aproximar el movimiento por un movimiento unidimensional en la dirección de la tangente a la curva, que es $\dfrac{g'(t)}{\|g'(t)\|}$.

Tenemos que

$$\langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}\rangle$$

es la proyección del vector $F(g(t))$ (la fuerza), en la dirección de $g'(t)$ (que es la dirección del desplazamiento),

$$\|g'(t)\|dt$$

es el elemento de longitud de arco.

Por lo tanto, el trabajo realizado al mover la partícula a lo largo del elemento de longitud de arco es

$$\langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}\rangle \|g'(t)\|\, dt.$$

Para obtener el trabajo total debemos "sumar" los trabajos correspondientes a cada uno de los elementos de longitud de arco, para esto integramos y obtenemos que la integral de línea es el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria g, que está sometida al campo de fuerzas F.

3. Lectura adicional: Integrales de línea sobre curvas lisas a trozos.

Definición 9.8. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Diremos que g es *lisa a trozos* si g es continua y si existe una partición $P = \{t_o, \dots, t_N\}$ de $[a,b]$ tal que, para $i = 1, \dots, N$,

$$g|_{[t_{i-1},t_i]}$$

es una trayectoria lisa

Se dice que una curva G es *lisa a trozos* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa a trozos.

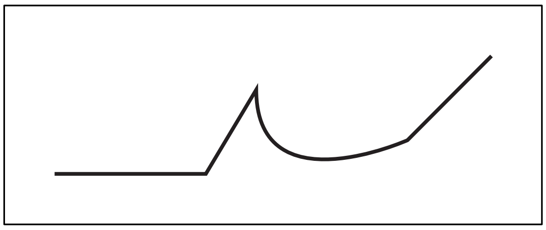


FIGURA 9.1. Curva lisa a trozos

En este caso

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_N,$$

donde cada G_i es una curva lisa y la integral de línea de F sobre G se define de la siguiente manera

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_{G_1} F \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} F \cdot d\vec{x}.$$

Ejercicios.
Integrales de línea.

(1) En los siguientes casos, calcular

$$\int_C -y\,dx + x\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_C x\,dx + y\,dy.$$

(a) C es la circunferencia con centro $(0,0)$ y radio 5, recorrida en sentido antihorario.

(b) C es la circunferencia con centro $(0,0)$ y radio 5, recorrida en sentido horario.

(c) C es el segmento que une a $(0,1)$ con $(3,5)$.

(d) C es el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ recorrido en sentido antihorario.

(e) C es la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, recorrida en sentido horario.

(2) Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria

$$x = t+1, \quad y = 2t^2 + t + 3, \quad z = 2t, \qquad 0 \leq t \leq 5,$$

sometida al campo de fuerzas

$$F(x,y,z) = (x+y, 3y, 2z).$$

Hallar el trabajo realizado.

(3) Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\displaystyle\int_L x\,dx + x\,dy + y\,dz$, donde L está dada por $g(t) = (t,t,t)$ para $2 \leq t \leq 1$.

(b) $\displaystyle\int_P (x+y)\,dx + dy$, donde P está dada por $g(t) = (t,t^2)$ para $1 \leq t \leq 3$.

(c) $\displaystyle\int_G e^x\,dx + z\,dy + \operatorname{sen} z\,dz$, donde G es $(x,y,z) = (t,t^2,t^6)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Parte 4

Álgebra Lineal.

CAPÍTULO 10

Matrices y Sistemas lineales.

Matrices. Producto de matrices. Inversa de una matriz. Autovectores y autovalores. Determinantes 2×2 y 3×3. Diagonalización de matrices. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

1. Matrices.

1.1. Matrices $m \times n$.

Una *matriz* $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m.n$ números dispuestos en m filas y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La igualdad anterior la abreviaremos mediante $A = (a_{ij})$. Los números de este arreglo se denotan mediante a_{ij} donde $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Aclaratoria: una matriz es una función de $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ en $\mathbb{R}$, la imagen de (i,j) se denota mediante a_{ij}.

Tenemos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Dos matrices A y B son iguales si son del mismo tamaño y sus componentes correspondientes son iguales. Es decir, $A = B$ cuando

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

El arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

se denomina la *fila* i o el *renglón* i.

El arreglo

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

se denomina la *columna* j.

Casos particulares:

Un *vector fila* (o *vector renglón*) es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Un *vector columna* es una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

Un vector fila 1×3 es una matriz 1×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

y un vector columna 3×1 es una matriz 3×1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

La matriz que tiene todas sus componentes iguales a cero, se denomina *matriz nula* .

Por ejemplo, la matriz nula 3×2 es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz nula 4×4 es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una *matriz cuadrada* es una matriz en la que el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$).

Veamos primero las matrices cuadradas: 1×1, 2×2 y 3×3 respectivamente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.1.

(1)

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 6 & 1/3 & \pi \\ -4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices 2×3 y 3×2 son:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.2.

(1)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ 6 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1/5 \\ \pi \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

1.2. Suma de matrices.

La suma de matrices se realiza sumando componente a componente.

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices $m \times n$ entonces la suma de A y B es una matriz $m \times n$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

es decir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1/2 \\ 6 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

1.3. Producto de una matriz por un escalar.

El producto de una matriz por un escalar se realiza multiplicando el escalar por cada componente.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ entonces

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

es decir

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.4.

$$4\begin{bmatrix}3 & -1 & 1/2\\ 6 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & -4 & 2\\ 24 & 4\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

Proposición 10.5. *Si A y B son matrices $m \times n$ entonces*

$$-A = (-1)A,$$

$$A - B = A + (-1)B.$$

Ejemplo 10.6. Si

$$A = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

entonces

$$-A = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

1.4. Producto de matrices.

El producto de matrices *producto de matrices* se realiza multiplicando filas por columnas.

Más precisamente, fijemos una fila en la primera matriz y una columna en la segunda matriz. Se multiplican las entradas de la fila de la primera matriz por las entradas de la columna de la segunda matriz, luego se suman. El valor obtenido se coloca en la entrada de la matriz producto correspondiente a esa fila y esa columna.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el producto de A y B es una matriz $C = (c_{ij})$ de tamaño $m \times p$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Note que para poder hacer esto: el número de entradas de una fila en la primera matriz debe ser igual al número de entradas de una columna de la segunda matriz. Esto lo podemos decir más fácilmente: el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

El producto de una matriz $1 \times n$ por una matriz $n \times 1$ da una matriz 1×1. Además el valor que aparece en la única entrada de esta matriz producto es básicamente el producto escalar del vector fila por el vector columna correspondientes.

Observe los siguientes casos:

(1) Una matriz 1×1 por una matriz 1×1 da una matriz 1×1.

$$\begin{bmatrix}a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11}\end{bmatrix}$$

(2) Una matriz 1×2 por una matriz 2×1 da una matriz 1×1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \end{bmatrix}$$

(3) Una matriz 1×3 por una matriz 3×1 da una matriz 1×1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.7.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + (-1)5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.8. Producto de un vector demanda y un vector de precios.

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el vector de demanda

$$d = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

(una matriz 1×4). El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el vector de precios

$$p = \begin{bmatrix} 2000Bs \\ 1500Bs \\ 1800Bs \\ 4000Bs \end{bmatrix}$$

(una matriz 4×1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución: La demanda del primer artículo es 30 y el fabricante recibe 2000 Bs por cada artículo vendido. Entonces recibe 60000 Bs de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de bolívares que recibe es

$$30 \cdot 2000 + 20 \cdot 1500 + 40 \cdot 1800 + 10 \cdot 4000 = 202000$$

Este resultado se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 1800 \\ 4000 \end{bmatrix} = 202000.$$

Es decir, se multiplicó un vector fila por un vector columna y se obtuvo un escalar.

Una matriz $n \times n$ por una matriz $n \times n$ da una matriz $n \times n$. Tal como se indica en los siguientes casos:

(1) Una matriz 2×2 por una matriz 2×2 da una matriz 2×2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

(2) Una matriz 3×3 por una matriz 3×3 da una matriz 3×3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.9. Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$AB = \begin{bmatrix} 2+1-1 & 0+1-1 & 2+1+1 \\ 2+3-4 & 0+3-4 & 2+3+4 \\ -1-1+2 & 0-1+2 & -1-1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Le sugerimos al estudiante que analice los productos generales, para matrices $m \times n$ con $n, m \leq 3$ que damos a continuación

(1) Una matriz 2×1 por una matriz 1×2 da una matriz 2×2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix}$$

(2) Una matriz 3×1 por una matriz 1×3 da una matriz 3×3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{bmatrix}$$

(3) Una matriz 3×2 por una matriz 2×3 da una matriz 3×3.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

(4) Una matriz 2×3 por una matriz 3×2 da una matriz 2×2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.10.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ \pi \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\cdot 3 & 8\cdot 2 & 8\cdot(-1) \\ \pi\cdot 3 & \pi\cdot 2 & \pi\cdot(-1) \\ \sqrt{5}\cdot 3 & \sqrt{5}\cdot 2 & \sqrt{5}\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 16 & -8 \\ 3\pi & 2\pi & -\pi \\ 3\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.11.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & e & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\cdot(-2)+2\cdot 1+\sqrt{2} & 6\cdot 0+2\cdot 0+\sqrt{2}\cdot 1 \\ 1\cdot(-2)+e\cdot 1+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 0+e\cdot 0+(-4)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -6+e & -4 \end{bmatrix}$$

Con el siguiente ejemplo se puede observar claramente que el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo 10.12.

(1)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 2 & 3\cdot(-1)+1\cdot 0 \\ 5\cdot 1+2\cdot 2 & 5\cdot(-1)+2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+(-1)\cdot 5 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 3+0\cdot 5 & 2\cdot 1+0\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo el producto de matrices sí es asociativo, es decir:

Proposición 10.13. *Sean A una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y C una matriz $p \times q$ entonces*

$$A(BC) = (AB)C$$

y esta matriz es $m \times q$.

Con el siguiente ejemplo veremos una aplicación en la que aparecen matrices mas grandes que las dadas en los ejemplos anteriores.

Ejemplo 10.14. *Contacto directo* e *indirecto* con una enfermedad contagiosa.

En este ejemplo se muestra cómo se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa.

Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo hace contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados contactos directos, se pueden representar por una matriz 4×6.

La matriz de contacto directo entre el primer y el segundo grupo es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo hace contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el $a_{24} = 1$ significa que la segunda del primer grupo (infectada) hizo contacto con la cuarta persona del segundo grupo.

Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar por una matriz.

La matriz de contacto directo entre el segundo y el tercer grupo es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos indirectos entre los individuos del primero y tercer grupos se representan por la matriz $C = AB$.

Observe que una persona del tercer grupo puede quedar contagiada por alguien del segundo grupo, quien a su vez fue contagiado por alguien del primer grupo. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$, se ve que, indirectamente la quinta persona del tercer grupo tuvo contacto (a través de la cuarta persona del segundo grupo) con la segunda persona del primer grupo. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona en el primer grupo y la quinta persona del tercer grupo está dado por

$$c_{25} = a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + a_{23}b_{35} + a_{24}b_{45} + a_{25}b_{55} + a_{26}b_{65} = 2.$$

La matriz de contacto indirecto entre el primer y el tercer grupo es:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que sólo la segunda persona en el tercer grupo no tiene contactos indirectos con la enfermedad. La quinta persona de este grupo tiene $2 + 1 + 1 = 4$ contactos indirectos.

1.5. Matrices diagonales. La matriz identidad.

En esta sección consideraremos solamente matrices cuadradas.

Entre los tipos sencillos de matrices están las diagonales.

Decimos que una matriz $A = (a_{ij})$ es *diagonal* cuando todos los elementos son cero excepto los de la diagonal que va desde el vértice superior izquierdo al inferior derecho. Es decir, cuando $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.15.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Entre las matrices diagonales hay unas más sencillas, que son las que tienen 1 en todas las componentes de la diagonal principal.

Observemos que para matrices 2×2:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Análogamente para matrices 3×3 tenemos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A continuación definimos la *matriz identidad* . Ella puede ser de diferentes tamaños, pero siempre es una matriz cuadrada.

Para matrices 1×1 la matriz identidad es:

$$I_1 = I = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Para matrices 2×2 la matriz identidad es:

$$I_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para matrices 3×3 la matriz identidad es:

$$I_3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6. Inversa de una matriz.

En esta sección consideraremos solamente matrices cuadradas.

Dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, su *inversa* es una matriz cuadrada B tal que $AB = BA = I$, donde I es la matriz identidad $n \times n$.

A esta matriz B la llamaremos A^{-1}, es decir, $A^{-1} = B$ donde $AB = BA = I$.

De donde

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Ejemplo 10.16. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4/20 & -8/20 & 4/20 \\ 3/20 & 4/20 & -2/20 \\ -6/20 & 12/20 & 4/20 \end{bmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = BA = I_3.$$

Se sigue que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/20 & -8/20 & 4/20 \\ 3/20 & 4/20 & -2/20 \\ -6/20 & 12/20 & 4/20 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Es importante observar que si A es una matriz 2×2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

su inversa es la matriz dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\[2ex] \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

esta matriz se abrevia mediante

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10.17. Verifique que

(1)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\[2ex] \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\[2ex] \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 10.18. *Sean A y B matrices $n \times n$, invertibles. Entonces la matriz AB es invertible y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.7. Reducción y diagonalización de matrices.

Vamos a introducir un método que nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método es muy útil cuando hay muchas ecuaciones y muchas incógnitas.

Comenzamos analizando si una matriz cumple las siguientes condiciones:

(i) Todas las filas (si las hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.
(ii) El primer número diferente de cero (a partir de la izquierda) en cualquier fila, que no contiene sólo ceros, es 1.
(iii) Si dos filas sucesivas no contienen solamente ceros, entonces el primer 1 en la fila inferior ocurre más a la derecha que el primer 1 en el renglón superior.
(iv) Cualquier columna que contenga el primer 1 de un renglón tiene ceros en las demás posiciones.

Una matriz es *escalonada por filas* si satisface (i), (ii) y (iii).

Una matriz es *escalonada reducida* si satisface (i), (ii), (iii) y (iv).

El primer número diferente de cero (si lo hay) se llama *pivote* de esa fila.

Operaciones elementales con filas:

- Multiplicar (o dividir) una fila por un número diferente de cero.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.
- Intercambiar dos filas.

Notación: para $c \neq 0$ tenemos que

- $R_i \to cR_i$ significa "sustituye la i-ésima fila por esa misma fila multiplicada por c".
- $R_i \to R_i + cR_j$ significa "sustituye la i-ésima fila por la suma de la fila i más la fila j multiplicada por c".
- $R_i \leftrightarrow R_j$ significa "intercambia las filas i y j".

El proceso de aplicar estas operaciones elementales con filas para simplificar una matriz se llama reducción por filas.

Principales métodos de reducción por filas de matrices:

- Método de Gauss: permite llevar una matriz a una matriz escalonada por filas, usando las operaciones elementales con filas.
- Método de Gauss-Jordan: permite llevar una matriz a una matriz escalonada reducida, usando las operaciones elementales con filas.

Técnica de cálculo en el método de Gauss:

- El primer paso es obtener un 1 en el vértice superior izquierdo de la matriz.
- El paso siguiente es convertir todos los elementos restantes de la primera columna en ceros, dejando el primero intacto.
- A continuación se repite el proceso para la matriz que se obtiene si se eliminan la primera fila y la primera columna.

Ejemplo 10.19. Usamos el método de Gauss para obtener la matriz escalonada por filas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 5 & 11 & 23 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 11 & 23 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si queremos obtener la matriz escalonada reducida debemos continuar el procedimiento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Técnica de cálculo en el método de Gauss-Jordan:

- Se aplica el método de Gauss para obtener una matriz escalonada por filas.
- Se convierten en ceros todos los elementos por encima de la diagonal de unos. Siguiendo este orden: a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, etc.

Ejemplo 10.20. Usamos el método de Gauss-Jordan para obtener la matriz escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando el método De Gauss-Jordan se aplica a matrices cuadradas puede ser que aparezca una matriz diagonal, o una matriz que tiene solamente ceros en las filas inferiores y que es diagonal en el recuadro superior izquierdo.

Diagonalización de matrices : cuando se llega a una matriz diagonal se dice que se diagonalizó la matriz.

EJEMPLO 10.21.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Conceptos y resultados básicos.

Un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases} \tag{10.1}$$

se llama un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Algunas reglas conocidas para resolver sistemas de ecuaciones son las siguientes:

- Si se intercambian dos ecuaciones no se altera la solución.
- Cuando se multiplican o se dividen ambos lados de una ecuación por un número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente.
- Si se suma el múltiplo de una ecuación a otra del mismo sistema se obtiene una ecuación equivalente.

Estas reglas son muy útiles para resolver sistemas de pocas ecuaciones con pocas incógnitas. Pero cuando aumenta el número de ecuaciones o aumenta el número de incógnitas la situación se complica. Sin embargo, usando la teoría de matrices se puede desarrollar una técnica que permite resolver estos casos más complicados.

Consideramos $x_1, \ldots, x_n$ como incógnitas. Una solución del sistema es una n-upla cualquiera de números $(x_1, \ldots, x_n)$ para los cuales se satisfacen todas las ecuaciones.

Si $c_1 = 0, \ldots, c_m = 0$ se dice que el sistema es homogéneo.

Si existe un $c_j \neq 0$ se dice que el sistema es no homogéneo.

El sistema homogéneo siempre tiene la solución $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, pero puede tener otras. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo es el núcleo.

Puede ocurrir que un sistema no homogéneo no tenga solución.

Ejemplo 10.22. Un sistema sin solución. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

no tiene solución porque la suma de dos números no puede ser a la vez 1 y 2.

Ejemplo 10.23. Un sistema con solución única. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

tiene exactamente una solución: $x = 1/2$, $y = 1/2$.

Ejemplo 10.24. Un sistema con más de una solución. El sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones porque dos números cualesquiera cuya suma sea igual a 1 es una solución.

A cada sistema lineal no homogéneo de la forma (10.1) le podemos asociar otro sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

obtenido reemplazando cada c_i por 0.

La solución general del sistema no homogéneo se obtiene sumando la solución general del sistema homogéneo más una solución particular del sistema no homogéneo. Más precisamente:

Proposición 10.25. *Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ y $(d_1, \ldots, d_n)$ son soluciones del sistema no homogéneo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

entonces $(d_1 - b_1, \ldots, d_n - b_n)$ es una solución del correspondiente sistema homogéneo.

Proposición 10.26. *Sea* $(b_1, \dots, b_n)$ *una solución particular del sistema no homogéneo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases}$$

si $(v_1, \dots, v_n)$ *es una solución del sistema homogéneo entonces*

$$(x_1, \dots, x_n) = (v_1 + b_1, \dots, v_n + b_n)$$

es una solución del sistema no homogéneo.

Ejemplo 10.27. El sistema

$$x + y = 2$$

tiene como sistema homogéneo asociado la ecuación

$$x + y = 0.$$

Por consiguiente el núcleo está formado por todos los vectores de la forma $(t, -t)$ donde t es un número real cualquiera. Es decir, todas las soluciones del sistema homogéneo asociado son de la forma $(t, -t)$ donde $t \in \mathbb{R}$.

Una solución particular del sistema no homogéneo es $(0, 2)$. Por lo tanto la solución general del sistema no homogéneo viene dada por

$$(x, y) = (t, 2 - t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 10.28. Un problema de navegación.

Un bote navega a velocidad constante por un río. Recorre 15 kilómetros en una hora y media a favor de la corriente y recorre 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

Solución:

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{velocidad del bote} \\ y &= \text{velocidad del río} \\ v_f &= \text{velocidad del bote a favor de la corriente} \\ v_c &= \text{velocidad del bote contra la corriente} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{cases} x + y = v_f, \\ x - y = v_c. \end{cases}$$

Mediremos el tiempo en horas y la velocidad en kilómetros por hora. Tenemos que

$$v_f = 15/1,5 = 10$$
$$v_c = 12/2 = 6$$

Luego

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema hallamos $x = 8$, $y = 2$.

Luego la velocidad del bote en agua tranquila es 8 kilómetros por hora y la velocidad del río es 2 kilómetros por hora.

2.2. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.

Vamos a relacionar los sistemas de ecuaciones lineales con las matrices.

Consideremos el sistema (10.1). La matriz $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es llamada la *matriz de coeficientes del sistema.*

Agregando los m números $c_1, \ldots, c_m$. Obtenemos la *matriz ampliada del sistema* es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & c_1 \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & c_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10.29. Para el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

la matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 10.30. Para el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

la matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 10.31. Para el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$$

la matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 3 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Nuevamente usamos los métodos de reducción de matrices. Ellos permiten llevar un sistema de ecuaciones lineales a otro más sencillo que es equivalente (es decir el conjunto de soluciones es el mismo).

Reducción de sistemas de ecuaciones:

- Método de Gauss (matriz escalonada por filas).
- Método de Gauss-Jordan (matriz escalonada reducida).

EJEMPLO 10.32. Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z + u - v &= -3 \\ x - 2y + z - u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10 \end{cases}$$

La correspondiente matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & | & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & | & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & | & 10 \end{bmatrix}$$

Se pueden hacer operaciones elementales con filas hasta llegar a la matriz escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & | & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & | & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & | & 31 \end{bmatrix}$$

El correspondiente sistema de ecuaciones puede resolverse respecto a x, y, z en función de u y v:

$$\begin{cases} x = 124 + 16u - 19v \\ y = 75 + 9u - 11v \\ z = 31 + 3u - 4v \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma

$$(124 + 16u - 19v, 75 + 9u - 11v, 31 + 3u - 4v, u, v).$$

Ejemplo 10.33. Un problema de administración de recursos.

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces.

(i) Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3.
(ii) Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 unidades del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3.
(iii) Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del alimento 3.
(iv) Cada semana se proporcionan al lago 25.000 unidades de alimento 1, se proporcionan 20.000 unidades del alimento 2 y 55.000 del alimento 3.

Si se supone que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución:

Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Utilizando la información del problema se observa que:

(i) x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades de alimento 1.

(ii) x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades de alimento 1.

(iii) x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades de alimento 1.

Entonces

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25.000.$$

Análogamente se pueden obtenerlas ecuaciones para los otros dos alimentos.

Se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 25.000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = 20.000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = 55.000 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25.000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20.000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55.000 \end{bmatrix}$$

Usamos el método de Gauss-Jordan para obtener la matriz escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25.000 \\ 1 & 4 & 1 & | & 20.000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55.000 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25.000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5.000 \\ 2 & 5 & 5 & | & 55.000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 25.000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5.000 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5.000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40.000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5.000 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5.000 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 40.000 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5.000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Hemos logrado una reducción del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 & = 40.000 \\ x_2 - x_3 & = -5.000 \end{cases}$$

Si x_3 se elige arbitrariamente se tiene un número infinito de soluciones dadas por:

$$\begin{cases} x_1 & = 40.000 - 5x_3 \\ x_2 & = x_3 - 5.000 \\ x_3 & \end{cases}$$

Pero debemos tomar en cuenta otras restricciones: Por supuesto se debe tener

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

De $x_2 \geq 0$ se sigue que $x_3 \geq 5.000$.

De $0 \leq x_1 = 40.000 - 5x_3$ se sigue que $x_3 \leq 8.000$.

Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido deben satisfacer:

$$\begin{cases} x_1 = 40.000 - 5x_3 \\ x_2 = x_3 - 5.000 \\ 5.000 \leq x_3 \leq 8.000 \end{cases}$$

Nota: El sistema de ecuaciones lineales que hemos resuelto tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3.001 enteros en el intervalo [5.000, 8.000].

3. Determinantes

3.1. Determinantes 2×2.

El *determinante de una matriz* 2×2 se define mediante:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Ejemplo 10.34.

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = 6(-1) - 2 \cdot 4 = -14.$$

Ejemplo 10.35. Sean r, θ fijos

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta\,(r\cos\theta) - (-r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

Note que si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

su inversa es la matriz dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.2. Determinantes 3×3.

El *determinante de una matriz* 3×3 se define mediante:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\ &= \left(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\right) - \left(a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}\right) \\ &\quad + \left(a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\right) \end{aligned}$$

De donde

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Ejemplo 10.36.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ \sqrt{3} & 4 & 1/2 \\ 3 & \pi & -1 \end{bmatrix} &= -4 + 5 \cdot (1/2) \cdot 3 + 0 - 1 \cdot (1/2) \cdot \pi - 0 - 5 \cdot \sqrt{3} \cdot (-1) \\ &= 7/2 - \pi/2 + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 10.37. Dados r, θ fijos, sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como tenemos una fila en la que todas las entradas son cero, salvo una entrada, las cuentas se simplifican (lo mismo se puede decir para las columnas).

Tenemos que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta\,(r\cos\theta) - (-r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

EJEMPLO 10.38. Dados ρ, θ, φ fijos, sea

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$$

Como $a_{32} = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta(-\rho\operatorname{sen}\varphi) + (-\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\
&- \rho\cos\varphi\cos\theta\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\varphi - (-\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta(-\rho\operatorname{sen}\varphi) \\
&= -\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta\operatorname{sen}\varphi - \rho^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi \\
&- \rho^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\operatorname{sen}\varphi - \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi \\
&= -\rho^2\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta) \\
&= -\rho^2\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \cos^2\varphi(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)) \\
&= -\rho^2\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= -\rho^2\operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}$$

3.3. Autovalores de matrices.

En esta sección consideraremos matrices cuadradas. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n \leq 3$.

Sea A una matriz $n \times n$.
El *polinomio característico* de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Sea λ un número real, decimos que λ es un *autovalor* de A cuando λ es una raíz del polinomio característico de A, es decir, cuando

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

3.4. Polinomio característico y autovalores de matrices 2×2.

En el caso 2×2 tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21})$$
$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 10.39. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Como este polinomio no tiene raíces reales, A no tiene autovalores (reales).

3.5. Polinomio característico y autovalores de matrices 3×3.

En el caso 3×3 tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- (\lambda - a_{11})a_{23}a_{32} - (\lambda - a_{22})a_{13}a_{31} - (\lambda - a_{33})a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 10.40. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda - 4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 4)(\lambda + 4) + 6 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 6 \\ &+ (\lambda - 5) \cdot 2 \cdot 6 + (\lambda - 4) \cdot 6 \cdot 3 - (\lambda + 4) \cdot 6 \cdot 1 = \\ &= (\lambda - 5)(\lambda^2 - 16) + 72 + (\lambda - 5) \cdot 12 + (\lambda - 4) \cdot 18 - (\lambda + 4) \cdot 6 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 - 16\lambda + 80 + 72 + 12\lambda - 60 + 18\lambda - 72 - 6\lambda - 24 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 - 16\lambda + 12\lambda + 18\lambda - 6\lambda + 80 + 72 - 60 - 72 - 24 \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{aligned}$$

Verificar, como ejercicio, que las raíces de p son 1 y 2, y que p se factoriza de la siguiente manera

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Por lo tanto los autovalores de A son 1 y 2. Notar que 2 es raíz doble del polinomio, en este caso se dice que 2 es un autovalor de *multiplicidad* 2.

Observación 10.41. Se puede probar que λ es un autovalor de A cuando la matriz $\lambda I - A$ no es invertible. Generalmente esto se demuestra en los cursos de álgebra lineal.

3.6. Autovectores de matrices.

En esta sección consideraremos matrices cuadradas. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n \leq 3$.

Sea A una matriz $n \times n$ y sea λ un autovalor de A. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}$ no nulo, decimos que $\vec{x}$ es un autovector de A correspondiente a λ cuando considerando a $\vec{x}$ como una matriz X, $n \times 1$, se satisface la ecuación matricial

$$(\lambda I - A)X = 0.$$

Note que la ecuación matricial anterior es equivalente a esta otra

$$AX = \lambda X.$$

Por otro lado esta última ecuación matricial puede ser vista como un sistema de n ecuaciones lineales para los componentes $x_1, \ldots, x_n$ donde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Cuando se tiene un autovalor λ conocido, se pueden hallar sus autovectores resolviendo este sistema. A continuación veremos varios ejemplos, en uno de ellos la matriz tiene todos sus autovalores distintos, en otra la matriz tiene autovalores repetidos.

Ejemplo 10.42. Una matriz con todos sus autovalores distintos.

Hallaremos los autovectores de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 2) + 4 + 2 \\ &- (\lambda - 2)(-4) - (\lambda - 3)(-1) - (\lambda + 2) \cdot 2 \\ &= (\lambda^2 - 4)(\lambda - 3) + 6 + 4(\lambda - 2) + (\lambda - 3) - 2(\lambda + 2) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 + 6 + 4\lambda - 8 + \lambda - 3 - 2\lambda - 4 \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = \lambda^2(\lambda - 3) - 1(\lambda - 3) \\ &= (\lambda^2 - 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto A tiene tres autovalores distintos: 1, -1 y 3.

Para hallar los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda = 1$ debemos resolver el sistema $AX = X$. Esto es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices de la izquierda obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

De donde

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = x_1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = x_2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = x_3. \end{cases}$$

Para poder plantear el sistema correctamente debemos colocar a x_1, x_2, x_3 del mismo lado de la igualdad. Así obtenemos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones primera y tercera encontramos $-2x_3 = 0$. De donde $x_3 = 0$. Y las tres ecuaciones se reducen a

$$x_1 + x_2 = 0.$$

De donde $x_2 = -x_1$. Luego los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda = 1$ son de la forma $(t, -t, 0)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Mediante cálculos parecidos encontramos los autovectores de $\lambda = -1$, ellos son de la forma $(0, t, -t)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. También podemos hallar los autovectores de $\lambda = 3$, ellos son de la forma $(2t, 3t, -t)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Ejemplo 10.43. Una matriz con autovalores repetidos.

Hallaremos los autovectores de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tenemos que

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 3) - 2 \\ &- (\lambda - 2)(-1) - (\lambda - 3)(-1)(-2) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) - 2 + (\lambda - 2) - 2(\lambda - 3) \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 2\lambda^2 + 12\lambda - 18 - 4 + \lambda - 2\lambda + 6 \\ &= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

Los autovalores son 4 y 2, además 2 aparece dos veces.

Para hallar los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda = 2$ debemos resolver el sistema $AX = 2X$. Esto es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices de la izquierda obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_2 + -x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

que se reduce a

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

De donde $x_2 = x_2 = -x_1$. Luego los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda = 2$ son de la forma $(-t, t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Mediante cálculos parecidos encontramos los autovectores de $\lambda = 4$, ellos son de la forma $(t, -t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Ejercicios.
Matrices y Sistemas lineales.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \sqrt{2} & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Hallar

$$A+B, \quad A-B, \quad 5A+2B, \quad AB, \quad A^2.$$

(2) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Halle, si es posible, valores para las constantes x, y, z de manera que se tenga:

$$A+B = C.$$

(3) Una matriz de probabilidades es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades
   (a) todos sus elementos son mayores o iguales que cero.
   (b) la suma de los elementos en cada fila es igual a 1.
   Las siguientes matrices son de probabilidades.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

   Pruebe que la matriz producto PQ es una matriz de probabilidades.

(4) Determine si la matriz dada es invertible o no. Si la matriz es invertible, halle su inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 1/6 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) Diga para cuáles pares de matrices de tamaño $n \times n$ se cumple que:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

Justifique su respuesta. (Ayuda: tome en cuenta que el producto de matrices tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de matrices, pero no tiene la propiedad conmutativa.)

(6) Un torneo de tenis se puede organizar de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de tamaño $n \times n$ de la siguiente manera:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (R^2)_{ij}$$

(donde $(R^2)_{ij}$ es la componente ij de la matriz R^2.

(a) Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

(b) Interprete el significado de la calificación.

(7) Para las siguientes matrices halle su matriz escalonada reducida:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(8) * Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

(9) Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

una matriz diagonal tal que sus componentes en la diagonal principal son todas diferentes de cero. Calcule A^{-1}.

(10) Indicar si el siguiente sistema de ecuaciones se puede resolver. Si tiene solución encuéntrela.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 1, \\ 2x + 2y - 3z & = 4, \\ -x - y + z & = 0. \end{cases}$$

(11) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 2, \\ 2x - y + 3z & = 2, \\ 5x - y + rz & = 6. \end{cases}$$

Hallar el valor de r para que el siguiente sistema:
(a) Tenga una única solución. Hállela.
(b) Tenga infinitas soluciones. Hállelas.
(c) No tenga soluciones.

(12) Encuentre el determinante de las siguientes matrices:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \sqrt{2} & -7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & \sqrt{7} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(13) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que los autovalores de A son 7 y 1.

(b) Demuestre que los autovectores de A correspondientes a $\lambda = 7$ son de la forma $(t, 2t, 3t)$ para $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

(c) Demuestre que los autovectores de A correspondientes a $\lambda = 1$ son de la forma $(t, 0, -t) + (0, s, -s)$ para $t, s \in \mathbb{R}$, no ambos nulos.

CAPÍTULO 11

Transformaciones Lineales.

Concepto de transformación lineal (considerar los casos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n, m \leq 3$). Concepto de base. Matriz asociada a una transformación lineal.

1. Transformación lineal

Trabajaremos principalmente en los espacios $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Una *transformación lineal* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que

(a) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,
(b) $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$, para todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A lo largo de esta sección a_{ij} denotará un número real, para cualquier par de números naturales i y j.

A continuación veremos las transformaciones lineales que toman valores en $\mathbb{R}$.
Una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de la forma

$$T(x) = a_{11}x.$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de la forma

$$T(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2.$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de la forma

$$T(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3.$$

Seguidamente veamos las transformaciones lineales que toman valores en $\mathbb{R}^2$.
Una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función:

$$T(x) = (a_{11}x,\ a_{21}x).$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función:

$$T(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2).$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una función:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_3 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3).$$

Finalmente, las transformaciones lineales que toman valores en $\mathbb{R}^3$ se dan a continuación.

Una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una función:

$$T(x) = (a_{11}x,\ a_{21}x,\ a_{31}x).$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función:

$$T(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2).$$

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una función:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_3 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Tal como lo habrán notado, se hace necesario dar una representación general para las funciones que acabamos de considerar. A continuación se da la forma general para las transformaciones lineales.

Sean n, m tales que $1 \leq n \leq 3$ y $1 \leq m \leq 3$. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \quad \ldots, \quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n). \tag{11.1}$$

Ejemplo 11.1.

(1) Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x) = (5\sqrt{6}x,\ (\operatorname{sen} 3)\ x).$$

(2) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + e^6 x_3.$$

(3) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1, x_2) = (5x_1 + \sqrt{2}x_2,\ \pi x_1 + 1/3\, x_2,\ 8x_2).$$

(4) Para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r > 0$, fijos, sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x_1, x_2) = ((\cos\theta)\ x_1 - r(\operatorname{sen}\theta)\ x_2,\ (\operatorname{sen}\theta)\ x_1 + r(\cos\theta)\ x_2).$$

2. Bases.

En $\mathbb{R}^2$, una *base* es un conjunto formado por dos vectores tales que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede obtener a partir de éstos dos de la siguiente manera: se multiplica cada uno de los vectores de la base por un escalar (un número) apropiado y sumándolos (posteriormente) se obtiene el vector dado.

Ejemplo 11.2. La *base canónica* de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\{(1,0)\,,\,(0,1)\}.$$

Note que si damos un vector cualquiera (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ entonces

$$x_1(1,0) + x_2(0,1) = (x_1,0) + (0,x_2) = (x_1,x_2).$$

El escalar x_1 se multiplicó por $(1,0)$ y el escalar x_2 se multiplicó por $(0,1)$. Los resultados de estas multiplicaciones son $(x_1,0)$ y $(0,x_2)$. La suma es el vector dado: (x_1,x_2).

Ejemplo 11.3. Otra base de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\{(1,0)\,,\,(1,1)\}.$$

Si damos un vector cualquiera (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ entonces

$$(x_1 - x_2)(1,0) + x_2(1,1) = (x_1 - x_2, 0) + (x_2, x_2) = (x_1, x_2).$$

El escalar $x_1 - x_2$ se multiplicó por $(1,0)$ y el escalar x_2 se multiplicó por $(1,1)$. Los resultados de estas multiplicaciones son $(x_1 - x_2, 0)$ y (x_2, x_2). La suma es el vector dado: (x_1,x_2).

Ejemplo 11.4. El conjunto dado por

$$\{(1,0)\,,\,(3,0)\}$$

no es una base de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^3$, una *base* es un conjunto formado por tres vectores tales que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede obtener a partir de éstos dos de la siguiente manera: se multiplica cada uno de los vectores de la base por un escalar (un número) apropiado y sumándolos (posteriormente) se obtiene el vector dado.

Ejemplo 11.5. La *base canónica* de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\{(1,0,0)\,,\,(0,1,0)\,,\,(0,0,1)\}.$$

Dado un vector cualquiera (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ entonces

$$x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = (x_1,0,0) + (0,x_2,0) + (0,0,x_3) = (x_1,x_2,x_3).$$

El escalar x_1 se multiplicó por $(1,0,0)$, el escalar x_2 se multiplicó por $(0,1,0)$ y el escalar x_3 se multiplicó por $(0,0,1)$. Los resultados de estas multiplicaciones son $(x_1,0,0)$, $(0,x_2,0)$ y $(0,0,x_3)$. La suma es el vector dado: (x_1,x_2,x_3).

EJEMPLO 11.6. Otra base de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\{(1,0,0)\,,\,(1,1,0)\,,\,(1,1,1)\}.$$

EJEMPLO 11.7. El conjunto dado por

$$\{(1,0,0)\,,\,(-1,0,0)\,,\,(0,0,1)\}$$

no es una base de $\mathbb{R}^3$.

2.1. Matriz asociada a una transformación lineal.

Existe una correspondencia natural entre las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y las matrices $m\times n$.

Para estudiar esta correspondencia resulta más conveniente representar a los elementos de $\mathbb{R}^n$ y de $\mathbb{R}^m$ como vectores columna. El operador $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ está en correspondencia con la matriz $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ cuando se cumple la siguiente relación:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{11.2}$$

es decir,

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

OBSERVACIÓN 11.8. La correspondencia entre transformaciones lineales y matrices depende de las bases que escojamos en los espacios. La correspondencia que hemos descrito corresponde con las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

EJEMPLO 11.9. Sea

$$A=\begin{bmatrix} 7 & \cos(3\pi) \\ e^4 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

La transformación lineal asociada a la matriz A es $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x_1,x_2) = (7\,x_1 - \cos(3\pi)\,x_2,\; e^4\,x_1 - \sqrt{2}\,x_2).$$

Ejemplo 11.10. Para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r > 0$, fijos, sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

En este caso A depende de r y de θ.

La transformación lineal asociada a la matriz A es $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x_1, x_2) = ((\cos\theta)\ x_1 - r(\operatorname{sen}\theta)\ x_2,\ (\operatorname{sen}\theta)\ x_1 + r(\cos\theta)\ x_2).$$

En este caso T depende de r y de θ.

Ejemplo 11.11. Sean $D \subset \mathbb{R}$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x \in D$ tal que f es derivable en x. Sea

$$A = \begin{bmatrix} f'(x) \end{bmatrix}$$

En este caso A depende de x.

La transformación lineal asociada a la matriz A es $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(h) = f'(x)h.$$

En este caso T depende de x. Note que estamos usando h para la variable de la transformación lineal ya que la x tiene otro significado.

Este ejemplo es importante para el estudio del cálculo diferencial en varias variables.

Ejercicios.
Transformaciones Lineales.

(1) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

(2) Demuestre que las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no son transformaciones lineales.

(a) $f(x) = 3$.
(b) $f(x) = x^2$.
(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(3) Demuestre que las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son transformaciones lineales.

(a) $f(x) = 3x$.
(b) $f(x) = (\operatorname{sen} \alpha)\, x$.

(4) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x - 2y, z - x, x)$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

(5) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestre que la imagen del vector nulo es el vector nulo. Es decir,

$$T \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{m}.$$

(6) Use el ejercicio anterior para demostrar que las siguientes funciones no son transformaciones lineales.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \cos x.$$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 5).$$

(7) Encuentre la fórmula para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,0,0) = (2,1), \qquad T(0,1,0) = (-1,5), \qquad T(0,0,1) = (4,3)$$

(8) Encuentre la fórmula para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0) = (3,2,1), \qquad T(0,1) = (1,-1,0)$$

(9) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal. Demuestre que el rango de T es un plano en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen.

Sugerencia: tome en cuenta que las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se pueden escribir como

$$T(t,s) = (u_1 t + v_1 s,\ u_2 t + v_2 s,\ u_3 t + v_3 s).$$

(10) En el plano uv sea B el rectángulo acotado por

$$v = 0, \quad v = -2, \quad u = 0, \quad u = 1.$$

En el plano xy sea P el paralelogramo acotado por

$$y = 2x, \quad y = 2x - 2, \quad y = x + 1, \quad y = x.$$

Sea

$$T(u,v) = (u - v, 2u - v).$$

Demuestre que

(a) $T(0,0) = (0,0)$,
(b) $T(1,0) = (1,2)$,
(c) $T(0,-2) = (2,2)$,
(d) $T(1,-2) = (3,4)$,
(e) $T(B) = P$.
(f) Hallar la matriz de T (con respecto a las bases canónicas) y calcular su determinante.
(g) ¿Qué relación existe entre el área de B y el área de P.

(11) Sea B el rectángulo considerado en el ejercicio anterior. Sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$S(x, y) = (2x + y, y).$$

(a) Hallar $S(B)$.
(b) Hallar la matriz de S (con respecto a las bases canónicas) y calcular su determinante.
(c) ¿Qué relación existe entre el área de B y el área de $S(B)$?

Parte 5

Cálculo Diferencial en Varias Variables.

CAPÍTULO 12

Campos escalares.

Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Dominio y rango de estas funciones. Gráfico y representación gráfica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Curvas y superficies de nivel.

1. Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$

Queremos darle sentido a expresiones tales como

$$f(x+y), \quad f(xy), \quad f(x^2+y^2), \quad f(x/y),$$

donde f es identidad, seno, coseno, ln. También queremos darle sentido a expresiones como

$$f(x-y+z), \quad f(xy-z), \quad f(x^2+y^2+z^2), \quad f(xz/y),$$

donde f es como antes.

Sea $n=2$ ó $n=3$. Consideraremos funciones f definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y que toman valores en $\mathbb{R}$. D podría ser todo $\mathbb{R}^n$.

Definición 12.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Un *campo escalar* o función $f : D \to \mathbb{R}$ es una asociación que a cada vector $\vec{u}$ de D le asigna un número real $f(\vec{u})$ y ese número es único (a ese número se le llama la imagen del vector).

El conjunto D se llama el *dominio* de la función f y a veces lo denotaremos mediante $\mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo 12.2.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En este caso f es el cuadrado de la norma (o distancia al origen) del punto (x,y,z).

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \cos(x + y) + z$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = c$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (función constante).

(d) El área de un rectángulo de lados x e y es la función de (x, y) dada por

$$f(x, y) = xy.$$

(e) El volumen de una caja de medidas x, y, z es la función de (x, y, z) dada por

$$f(x, y, z) = xyz.$$

(f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sqrt{xy},$$

es decir, la media geométrica.

(g) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = (3x + 4y - ln(y))/5z$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z \neq 0$.

(h) La expresión $\int_x^y f(t)dt$ depende de x y de y, por lo tanto define una función de (x, y), dada por

$$g(x, y) = \int_x^y f(t)dt.$$

2. Dominio y rango de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (con $n = 2$ ó $n = 3$). A partir de la fórmula que las definen indicaremos cuál es el dominio más grande en el que pueden ser consideradas.

Ejemplo 12.3.

(a) La fórmula

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

(b) La fórmula
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$
define una función en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

(c) La fórmula
$$f(x,y) = \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$$
define una función en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$.

(d) La fórmula
$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2-25}$$
define una función en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 25\}$.

Ejercicio 12.4. Dibuje el dominio de $z = \sqrt{y \cos x}$.

El *rango o imagen* de f es el conjunto de todos los números reales $w \in \mathbb{R}$ tales que $w = f(\vec{u})$ para algún $\vec{u} \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 12.5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$
para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces
$$\text{Rango}(f) = \{w \in \mathbb{R} : w \geq 0\}.$$

3. Gráfico y representación gráfica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Consideraremos funciones que toman valores en $\mathbb{R}$. Igual que con funciones de una variable, se puede definir la gráfica de una función de dos variables. La gráfica de una función de una variable es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, y la gráfica de una función de dos variables es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Definición 12.6. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El *gráfico* de f es el conjunto
$$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \text{Dom}f,\ z = f(x,y)\},$$
Observemos que
$$\text{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$
El gráfico de f es una superficie que puede ser visualizada en casos particulares.

Ejemplo 12.7.

(a) Sea $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Veamos que su gráfico es la parte de arriba de una esfera de radio 1.

El domino de f es el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Si consideramos $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ para $x^2+y^2 \leq 1$ entonces

$$z \geq 0 \qquad\qquad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

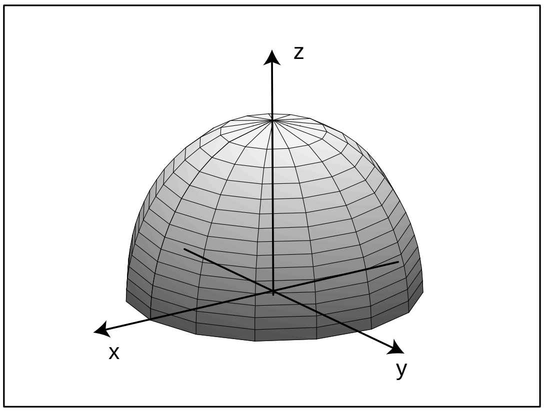


Figura 12.1. gráfico de $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(b) Sea $f(x,y) = x^2+y^2$. El gráfico de f es un paraboloide de revolución, obtenido al rotar $z = y^2$ alrededor del eje z (justifique).

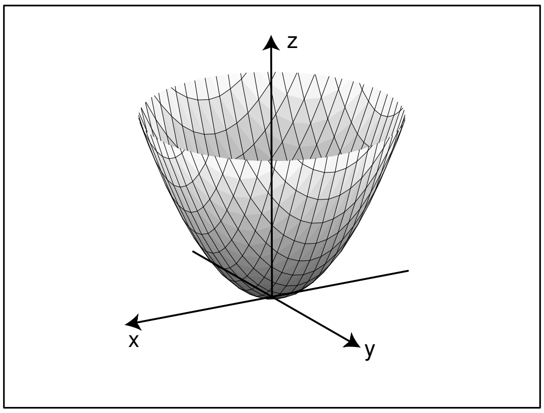


Figura 12.2. gráfico de $f(x,y) = x^2+y^2$

Si una función tiene dominio contenido en $\mathbb{R}^3$, no podemos representarla gráficamente.

4. Curvas de nivel y superficies de nivel.

Existe otro método útil para representar geométricamente una función de dos variables. Esto es un método semejante al de representar un paisaje tridimensional por un mapa topográfico bidimensional.

Definición 12.8. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La *curva de nivel* de f, correspondiente al valor c es:

$$\gamma_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}.$$

La curva de nivel γ_c de f no es más que el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ para los cuales f toma el mismo valor c.

Al considerar diferentes valores de c : $c_1, c_2, \ldots$ obtenemos un conjunto de curvas de nivel, que llamaremos *mapa de contorno*.

Si tratamos con funciones de tres variables la noción análoga a la de curva de nivel es la de superficie de nivel.

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nos da la distribución de temperaturas en un espacio tridimensional, entonces las superficies de nivel satisfacen $f(x, y, z) = c$ y se llamarían superficies isotérmicas.

Definición 12.9. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. La *superficie de nivel* de f, correspondiente al valor c es:

$$S_c = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}.$$

Ejemplo 12.10.

(a) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel de f son circunferencias con centro en el origen.

Tenemos que

$$f(x, y) = c \quad \text{si y sólo si} \quad c \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 = c.$$

Por lo tanto, debe ser $c \geq 0$.

La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

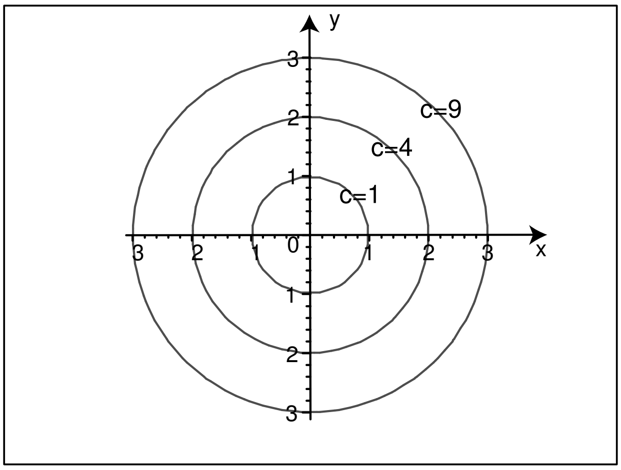


Figura 12.3. curvas de nivel de $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) Si $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces las superficies de nivel son esferas (justifique).

(c) Sea $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Como no se define el dominio explícitamente, se entiende que es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para el cual la fórmula tiene sentido.

Sea $c \geq 0$. Tenemos que

$$f(x,y) = c \quad \text{si y sólo si} \quad x^2 + y^2 = 1 - c^2.$$

Por lo tanto, debe ser $0 \leq c \leq 1$. La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $1 - c^2$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

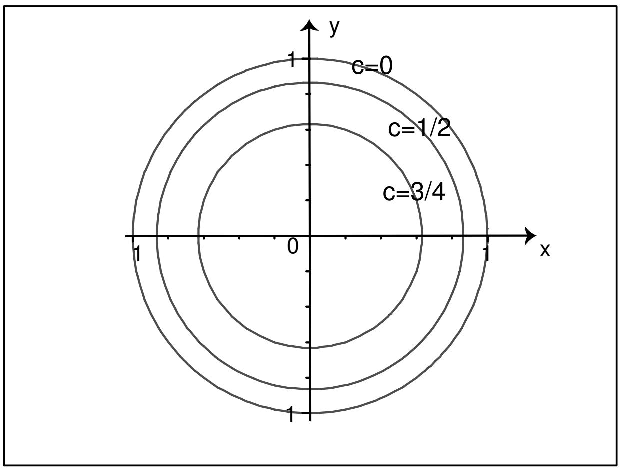


Figura 12.4. curvas de nivel de $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$ entonces las curvas de nivel de f son los conjuntos en los que $x^2 - y^2 = c$. Estos conjuntos nos dan una idea de como es el gráfico de f.

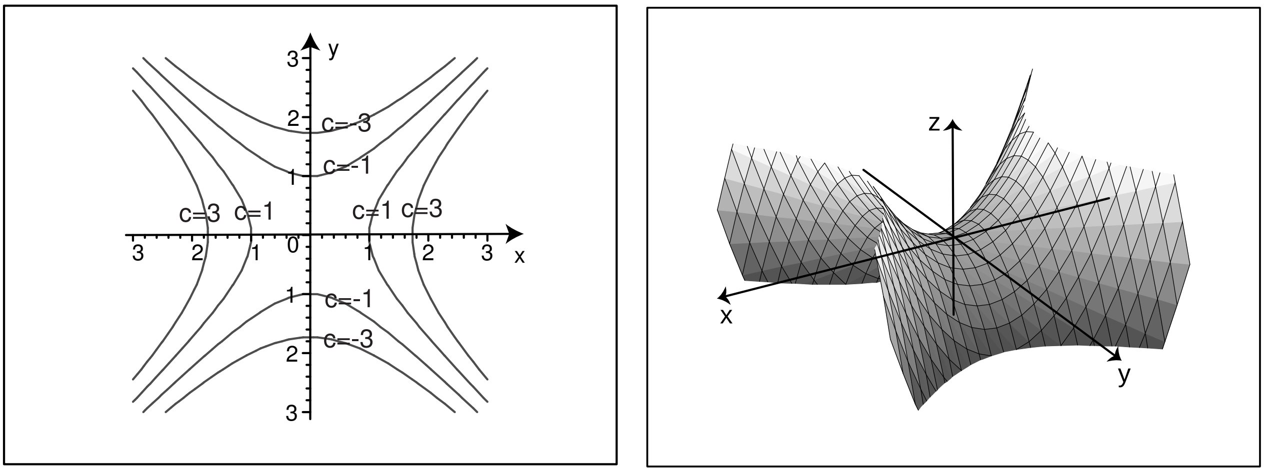


Figura 12.5. curvas de nivel y gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$

Esta superficie es el paraboloide hiperbólico o "silla de montar"

El conocimiento de las curvas de nivel ayuda a resolver muchos problemas interesantes en el plano y en el espacio.

Ejercicios.
Campos escalares.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x + y + 2$.
   (a) Describa el gráfico de f.
   (b) Dado $c \in \mathbb{R}$ describa la curva de nivel correspondiente a c.

(2) Determinar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x - y + 2$.
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy$.

(3) Dibujar las curvas de nivel (en el plano xy) para la función dada f y los valores de f dados.
   (a) $f(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ para $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ para $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
   (c) $f(x,y) = 3x - 7y$ para $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
   (d) $f(x,y) = x/y$ para $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

(4) Determinar las superficies de nivel de f
   (a) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$.
   (b) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$.
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

CAPÍTULO 13

Límites de campos escalares.

Límite a lo largo de una curva de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Introducción al concepto de límite en un punto a través del concepto de límite a lo largo de una curva. Noción de continuidad. Límites iterados.

1. Límite a lo largo de curvas para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

1.1. Punto de acumulación en $\mathbb{R}^2$.

Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$ y $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando en cada disco de centro $\vec{x_o}$ hay al menos un punto de D, distinto de $\vec{x_o}$.

En forma más precisa se tiene:

Definición 13.1. Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando para cada $r > 0$ se tiene que existe $\vec{v} \in D$ tal que $\vec{v} \neq \vec{x_o}$ y $\|\vec{v} - \vec{x_o}\| < r$.

Ejemplo 13.2.

(a) Los vectores $(4,5)$, $(4,4)$ y $(2,4)$ son puntos de acumulación de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 6, 4 \leq y < 7\}.$$

(b) El vector $(1,\pi)$ es un punto de acumulación de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 2 < y < \pi\}.$$

(c) El vector $(0,0)$ es un punto de acumulación de

$$\{(1/n, 1/n^2) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

(d) EL vector $(0,-1)$ es un punto de acumulación de

$$\{(0, (-1)^n + 1/n) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

1.2. Límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Recordemos que si se tiene una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en un punto se puede calcular el límite por la derecha y por la izquierda. Y al hacer esto estamos considerando todas las maneras posibles de acercarse a ese punto. Para que el límite exista debe ocurrir que el límite por la derecha sea igual al límite por la izquierda.

El procedimiento que vamos a desarrollar a continuación, en el plano, es análogo. Pero debemos tomar en cuenta que en un punto del plano no existen sólo dos maneras de acercarse, existen infinitas maneras de acercarse, además puede hacerse a través de diferentes curvas.

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ y (x_o, y_o) un punto de acumulación de D. Sea I un intervalo abierto, sea $g : I \to D$ una curva tal que

(a) existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = (x_o, y_o)$,
(b) $g(t) \neq (x_o, y_o)$ si $t \neq t_o$,
(c) g es continua.

Consideremos una función $f : D \to \mathbb{R}$, el *límite de f cuando (x, y) tiende a (x_o, y_o) a lo largo de la curva g* es

$$\lim_{t \to t_o} f(g(t)).$$

Ejemplo 13.3. Sea

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Supongamos que queremos averiguar si existe el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. Notemos que $(0, 0)$ está en esta recta.

Lo primero que debemos hacer es dar una parametrización de esta recta. Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t) = (t, mt).$$

Luego averiguamos si existe $\lim_{t\to 0} f(g(t))$.

Tenemos que

$$f(g(t)) = f(t, mt) = \frac{mt^2}{t^2 + m^2t^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Luego

$$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, mt) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Note que en este ejemplo esta expresión depende de m.

EJEMPLO 13.4. Sea
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$
Vamos a averiguar si existe el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$. Notemos que $(0,0)$ está en esta parábola.

Lo primero que debemos hacer es dar una parametrización de esta parábola. Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$g(t) = (t, t^2).$$
Averiguaremos si existe $\lim_{t\to 0} f(g(t))$.

Tenemos que
$$f(g(t)) = f(t,t^2) = \frac{t^3}{t^2+t^4} = \frac{t}{1+t^2}.$$
$$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t^2} = 0.$$

EJEMPLO 13.5. Sea
$$f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}.$$
Vamos a averiguar si existe el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de las parábolas (a) $y = x^2$, (b) $x = y^2$. Notemos que $(0,0)$ está en ambas parábolas.

(a) Damos una parametrización de la parábola $y = x^2$. Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$g_1(t) = (t, t^2).$$
Tenemos que
$$f(g_1(t)) = f(t,t^2) = \frac{2t^5}{t^2+t^8} = \frac{2t^3}{1+t^6}.$$
$$\lim_{t\to 0} f(g_1(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{1+t^6} = 0.$$

(b) Damos una parametrización de la parábola $x = y^2$. Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$g_2(t) = (t^2, t).$$
Tenemos que
$$f(g_2(t)) = f(t^2,t) = \frac{2t^2t^2}{t^4+t^4} = \frac{2t^4}{2t^4} = 1.$$
$$\lim_{t\to 0} f(g_2(t)) = \lim_{t\to 0} f(t^2,t) = 1.$$

1.3. Comparación de límites a lo largo de varias curvas para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

En diversas situaciones uno puede querer acercase a un punto por varias rectas, por parábolas o por cualquier otra curva.

Ejemplo 13.6. Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Calcularemos el límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.

Tomemos la recta $y = mx$. Tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

En este ejemplo el límite que hemos encontrado depende claramente de la pendiente de la recta: m. Es decir el resultado es diferente si colocamos diferentes valores de m. En otras palabras si nos acercamos por diferentes rectas obtenemos diferentes resultados.

Ejemplo 13.7. Sea

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Calcularemos

(1) el límite a lo largo de la recta $y = mx$.
(2) el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

En este ejemplo el límite buscado no depende de la pendiente de la recta: m.

Pero si nos acercamos por la parábola $y = x^2$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = 1.$$

2. Límite en $\mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 13.8. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de D, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que *el límite de $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ tiende al punto $\vec{x_o}$ es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$.

Abreviado:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) = L.$$

Las propiedades del límite, ya conocidas para funciones reales de variable real se extienden de manera natural a las funciones reales de variable en el plano, más precisamente:

TEOREMA 13.9 (Propiedades del límite para campos escalares).

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

(a) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$.

(b) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$.

(c) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}))\,(\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}))$.

(d) *Si* $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos (a) y (b). Las pruebas de las propiedades (c) y (d) están en la lectura adicional.

Como $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

(a) Si $\lambda = 0$ se cumple la igualdad. Supongamos $\lambda \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/|\lambda|$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$.

Entonces

$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| = |\lambda|\, |f(\vec{x}) - L_1| < |\lambda| \gamma = \varepsilon.$$

De donde

$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda L_1$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/2$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que:
Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$
Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces

$$|(f(\vec{x})+g(\vec{x}))-(L_1+L_2)| = |f(\vec{x})-L_1+g(\vec{x}))-L_2| \leq |f(\vec{x})-L_1|+|g(\vec{x}))-L_2| = 2\gamma = 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

De donde

$$|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = L_1 + L_2.$$

$\square$

3. Relación entre límite en $\mathbb{R}^2$ y límite a lo largo de curvas.

En esta sección veremos la relación entre límite en $\mathbb{R}^2$ y límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 13.10. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, I un intervalo abierto y $g : I \to D$ tales que:*

(a) *existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = \vec{x_o}$,*
(b) *$g(t) \neq \vec{x_o}$ si $t \neq t_o$,*
(c) *g es continua.*

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ entonces

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}).$$

Es decir: Si $\vec{x}$ se acerca al punto $\vec{x_o}$ a lo largo de g entonces $f(\vec{x})$ se tiene que acercar a $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$.

Tal como muestran los siguientes ejemplos, esta Proposición es muy útil para demostrar que un límite no existe.

Ejemplo 13.11.

(a) Supongamos que queremos averiguar si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ponemos $y = mx$ para

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Entonces tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}.$$

Pero esta expresión varía con m, así que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe.

(b) Estudiemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

A lo largo de la recta $y = mx$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Claramente el límite depende de la recta, por lo tanto no existe el límite.

4. Límites iterados

Los límites iterados son:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)), \qquad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

Ejemplo 13.12. Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1,$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1.$$

Así que

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -1.$$

Teorema 13.13. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que existe un entorno de (a,b) contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

si existen los siguientes límites unidimensionales

$$\lim_{x\to a} f(x,y) \qquad y \qquad \lim_{y\to b} f(x,y)$$

entonces

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = L.$$

El Teorema 13.13 puede ser útil para demostrar que ciertos límites en $\mathbb{R}^2$ no existen, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.14. Consideremos nuevamente la función

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0,$$

ya estudiada en el ejemplo previo.

Se observa que los límites iterados son diferentes, el teorema anterior nos permite asegurar que $f(x,y)$ no tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

Las hipótesis del Teorema anterior pueden ser debilitadas.

El recíproco del Teorema 13.13 no es cierto. Puede ocurrir que los límites iterados existan y sean iguales, y que no exista el límite en $\mathbb{R}^2$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 13.15. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Usando límite a lo largo de una curva ya probamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. Sin embargo

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$

También

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0.$$

5. Límite a lo largo de curvas para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

5.1. Punto de acumulación en $\mathbb{R}^3$.

Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$ y $D \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando en cada esfera de centro $\vec{x_o}$ hay al menos un punto de D, distinto de $\vec{x_o}$.

En forma más precisa se tiene:

Definición 13.16. Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando para cada $r > 0$ se tiene que existe $\vec{v} \in D$ tal que $\vec{v} \neq \vec{x_o}$ y $\|\vec{v} - \vec{x_o}\| < r$.

5.2. Límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

El procedimiento que vamos a desarrollar a continuación, en el espacio, es análogo a lo hecho para la recta y para el plano. Pero debemos tomar en cuenta que en un punto del espacio existen infinitas maneras de acercarse, además puede hacerse a través de diferentes curvas que podrían no estar contenidas en ningún plano.

En diversas situaciones uno puede querer acercase a un punto por varias rectas, por parábolas o por cualquier otra curva. Lo más sencillo es tratar de acercarse por curvas que estén contenidas en los planos generados por los ejes cartesianos.

Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ y (x_o, y_o, z_o) un punto de acumulación de D. Sea I un intervalo abierto, sea $g : I \to D$ una curva tal que

(a) existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$,
(b) $g(t) \neq (x_o, y_o, z_o)$ si $t \neq t_o$,
(c) g es continua.

Consideremos una función $f : D \to \mathbb{R}$, el *límite de f cuando (x, y, z) tiende a (x_o, y_o, z_o) a lo largo de la curva g* es

$$\lim_{t \to t_o} f(g(t)).$$

Ejemplo 13.17. Sea

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calcularemos el límite en $(0, 0, 0)$ a lo largo de algunas rectas que pasan por el origen.

La intersección del plano $z = mx$ con el plano $y = 0$ da una recta. Sobre esa recta tenemos que

$$f(x, 0, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}.$$

Luego

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

En este ejemplo el límite que hemos encontrado depende claramente de la pendiente de la recta: m. Es decir el resultado es diferente si colocamos diferentes valores de m. En otras palabras si nos acercamos por diferentes rectas obtenemos diferentes resultados.

Por supuesto que también podríamos acercarnos por parábolas y por otras curvas.

6. Límite en $\mathbb{R}^3$.

Para $\mathbb{R}^3$ la definición es análoga a la que dimos para $\mathbb{R}^2$.

Definición 13.18. Sean $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$ un punto de acumulación de D, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que *el límite de $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ tiende al punto $\vec{x_o}$ es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$.

Abreviado:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) = L.$$

Las propiedades del límite, ya conocidas para funciones reales de variable real y para funciones reales de variable en el plano se extienden para funciones reales de variable en el espacio, más precisamente:

Teorema 13.19 (Propiedades del límite para campos escalares).

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

(a) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$.

(b) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$.

(c) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}))$.

(d) *Si* $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})} .$$

La demostración para $\mathbb{R}^3$ es análoga a la de $\mathbb{R}^2$.

7. Relación entre límite en $\mathbb{R}^3$ y límite a lo largo de una curva.

En el espacio también hay una relación entre límite y límite por curvas. Es decir, existe un relación entre límite en $\mathbb{R}^3$ y límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 13.20. *Sean $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, I un intervalo abierto y $g : I \to D$ tales que:*

(a) *existe* $t_o \in I$ *tal que* $g(t_o) = \vec{x_o}$,
(b) $g(t) \neq \vec{x_o}$ *si* $t \neq t_o$,
(c) g *es continua.*

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *una función. Si existe* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ *entonces*

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}).$$

Es decir: Si $\vec{x}$ *se acerca al punto* $\vec{x_o}$ *a lo largo de* g *entonces* $f(\vec{x})$ *se tiene que acercar a* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$.

Esta Proposición es muy útil para demostrar que un límite no existe.

8. Continuidad.

Definición 13.21. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o} \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f *es continua en* $\vec{x_o}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $\|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - f(\vec{x_o})| < \varepsilon$.

Observación 13.22. Notar que si $\vec{x_o}$ es un punto de acumulación de D entonces f es continua en $\vec{x_o}$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_o})$.

Definición 13.23. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función . Decimos que f es *continua en* D cuando f es continua en $\vec{x_o}$ para todo $\vec{x_o} \in D$.

Observación 13.24. Una función de dos variables puede ser continua en cada variable separadamente y, sin embargo, no ser continua como función de dos variables, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.25. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tenemos que para un y fijo

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0+y^2} = 0 = f(0,y)$$

así que f es continua en la primera variable.

Tenemos que para un x fijo

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2+0} = 0 = f(x,0)$$

así que f es continua en la segunda variable.

Sin embargo, tal como ya lo probamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. Así que f no es continua en $(0,0)$ (como función de dos variables).

Las propiedades ya conocidas de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se extienden de manera natural a las funciones de varias variables. Como ejercicio demostrar los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 13.26.

(a) *La suma de funciones continuas es una función continua.*
(b) *El producto de funciones continuas es una función continua.*
(c) *El cociente de una función continua entre otra función continua que no se anula también es una función continua.*

PROPOSICIÓN 13.27. *Sea $n=2$ ó $n=3$. Sean $A\subset\mathbb{R}^n$ y $B\subset\mathbb{R}$. Si $f:A\to\mathbb{R}$ y $g:B\to\mathbb{R}$ son continuas y $f(A)\subset B$ entonces la función $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ es una función continua.*

EJEMPLO 13.28. Las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(x,y)=(x+y)^2$.
(b) $f(x,y)=\operatorname{sen}^2(x+y)+xy\cos y$.
(c) $f(x,y)=e^{x+y^2+z^3}$.

PROPOSICIÓN 13.29. *Sea $D\subset\mathbb{R}^n$. Si $f:D\to\mathbb{R}^m$ es continua entonces la función $g:D\to\mathbb{R}$ definida por $g(\vec{x})=\|f(\vec{x})\|$ es continua.*

9. Lectura adicional: Demostraciones de algunos teoremas de límites.

Sea $n=2$ ó $n=3$.

LEMA 13.30. *Sean $D\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$ una función y $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ existe entonces existe $\delta_o>0$ tal que f es acotada en $D\cap(B(\vec{x_o},\delta_o)\setminus\{\vec{x_o}\})$. Donde $B(\vec{x_o},\delta_o)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\|\vec{x}-\vec{x_o}\|<\delta_o\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{L}=\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$. Considerando $\varepsilon=1$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta_o>0$ tal que si $\vec{x}\in D$ y $0<\|\vec{x}-\vec{x_o}\|<\delta_o$ entonces

$$\|f(\vec{x})-\vec{L}\|<1.$$

Como

$$\|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| \leq |\, \|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|\, | \leq \|f(\vec{x}) - \vec{L}\|,$$

tenemos que

$$\|f(\vec{x})\| < \|\vec{L}\| + 1$$

para $\vec{x} \in D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$ y $\vec{x} \neq \vec{x_o}$. □

Teorema 13.31 (Producto de límites).
Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})).$$

Demostración.
Como $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

Por el lema 13.30 existe $\delta_o > 0$ tal que f es acotada en $D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$. Sea M la cota, es decir, $|f(\vec{x})| \leq M$ si $\vec{x} \in D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/(M + |L_2|)$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que:
Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$
Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_o, \delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
|f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1 L_2| &= |f(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x})L_2 + f(\vec{x})L_2 - L_1 L_2| \\
&\leq |f(\vec{x})||g(\vec{x})) - L_2| + |L_2||f(\vec{x}) - L_1| \\
&\leq M\gamma + |L_2|\gamma = (M + |L_2|)\gamma = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde

$$|f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1 L_2| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1 L_2| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = L_1 L_2.$$

□

LEMA 13.32. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D.*

Si $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) = \vec{L} \neq \vec{0}$ entonces existen $m > 0$ y $\delta_o > 0$ tales que $|g(\vec{x})| \geq m$ para todo $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$. Donde $B(\vec{x_o}, \delta_o) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_o\}$.

DEMOSTRACIÓN. Considerando $\varepsilon = \|\vec{L}\|/2$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta_o > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_o$ entonces

$$\|g(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

Supongamos que $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$ entonces

$$|\|g(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|| \leq \|g(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

por lo tanto

$$-\frac{\|\vec{L}\|}{2} < \|g(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

de donde

$$\|g(\vec{x})\| > \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

□

TEOREMA 13.33 (Cociente de límites).

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

Si $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ entonces

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})}.$$

Demostración.

Como $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

Por el lema 13.32 existen $m > 0$ y $\delta_o > 0$ tales que si $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$ entonces $|g(\vec{x})| \geq m$ y por lo tanto

$$\frac{1}{|g(\vec{x})|} \leq \frac{1}{m}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea

$$\gamma = \frac{m|L_2|}{|L_2| + |L_1|}\,\varepsilon$$

entonces $\gamma > 0$.

Usando la definición de límite se sigue que:

Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$

Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_o, \delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{f(\vec{x})L_2 - g(\vec{x})L_1}{g(\vec{x})L_2}\right| \\
&= \frac{|f(\vec{x})L_2 - L_1L_2 + L_1L_2 - g(\vec{x})L_1|}{|g(\vec{x})L_2|} \\
&\leq \frac{|L_2||f(\vec{x}) - L_1| + |L_1||L_2 - g(\vec{x}))|}{m|L_2|} \\
&\leq \frac{|L_2|\gamma + |L_1|\gamma}{m|L_2|} \\
&= \frac{|L_2| + |L_1|}{m|L_2|}\,\gamma = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde

$$\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| < \varepsilon.$$

□

10. Lectura adicional: Continuidad de la norma y del producto interno.

Si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ la norma de $\vec{a}$ es:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

TEOREMA 13.34 (Continuidad de la norma). *Sea $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \|\vec{x}\| = \|\vec{x_o}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon$. Si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{x_o}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \|\vec{x}\| = \|\vec{x_o}\|.$$

□

Si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ el producto interno usual es:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz sigue siendo cierto para cualquier número natural n y la demostración es la misma que en el caso de $n = 2$ ó $n = 3$.

(1) Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

Es decir, si $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ son números reales arbitrarios entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$

(2) Si algún $a_i \neq 0$ entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

si y sólo si existe $x_o \in \mathbb{R}$ tal que $a_k x_o + b_k = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

Teorema 13.35 (Continuidad del producto interno). *Sean* $\vec{x_o}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle.$$

Demostración. Si $\|\vec{v}\| = \vec{0}$ entonces $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos $\|\vec{v}\| \neq \vec{0}$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon / \|\vec{v}\|$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle\| = \|\langle \vec{x} - \vec{x_o}, \vec{v} \rangle\| \leq \|\vec{x} - \vec{x_o}\| \|\vec{v}\| < \delta \|\vec{v}\| = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle.$$

$\square$

Ejercicios.
Límites de campos escalares.

En lo que sigue usaremos $[x]$ para denotar a la parte entera de x.

(1) Para las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dibuje su gráfica e indique los puntos en los que no es continua.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = [-x]$

(c) $f(x) = [x] + [-x]$

(d) $f(x) = [\operatorname{sen} x]$

(2) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{x^3 - x_o^3}{x - x_o}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

(3) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^3, \cos x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x, [-x])$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^3 - 7, \tan x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x, [\operatorname{sen} x])$

(4) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

(5) Calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + 3y^2}{x + 1}$$

(6) Determinar si el siguiente límite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

(7) Demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

(8) Demuestre que:

(a) $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} < 1$

(c) $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < |y|$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

(9) Para $(x,y) \neq (0,0)$ sea

$$f(x,y) = \frac{7\,x\,y^2}{x^2+y^2}.$$

(a) Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$.

(b) Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la curva $y = x^2$.

(c) ¿Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(d) Diga si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$.

(10) Para $(x,y) \neq (0,0)$ sea

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. Diga si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$.

CAPÍTULO 14

Diferenciación de campos escalares.

Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto. Derivadas parciales y direccionales. Concepto de gradiente. Interpretación geométrica del gradiente: Dirección de máximo crecimiento para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Condición suficiente de diferenciabilidad. Regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Diferenciación de funciones definidas en forma implícita.

1. Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto.

Motivación.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_o \in \mathbb{R}$. Recordemos que f es diferenciable en x_o si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Este límite se llama *la derivada de f en el punto x_o* y se denota por $f'(x_o)$.

La generalización de este concepto a funciones de dos o tres variables no es nada inmediato. La primera dificultad que encontramos al tratar de extenderlo es que no podemos dividir entre un vector, sin embargo, vamos a tratar de reescribir la definición de derivada de manera tal que podamos generalizarla a funciones de varias variables.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_o \in \mathbb{R}$ y sea $a = f'(x_o)$, es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = a.$$

Entonces tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) \; - a\,h}{h} = 0,$$

o, lo que es equivalente

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\, f(x_o + h) - f(x_o) \; - a\,h\,|}{|h|} = 0.$$

La función $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(h) = a\,h$ es una transformación lineal. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_o \in \mathbb{R}$. f es diferenciable en x_o si y sólo si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\,f(x_o+h) - f(x_o)\; - T(h)\,|}{|h|} = 0.$$

Concepto de diferenciabilidad.

La discusión previa motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 14.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$.

Decimos que f es *diferenciable* en $\vec{x}_o$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0. \tag{14.1}$$

OBSERVACIÓN 14.2. Se puede demostrar (ver [**8**]) que si f es diferenciable en x_o entonces existe una única transformación lineal T que satisface (14.1).

DEFINICIÓN 14.3. Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, el *diferencial* de f en $\vec{x}_o$ es la única transformación lineal que satisface (14.1), y se denota por $df_{\vec{x}_o}$.

Resumiendo:

Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, entonces existe una única transformación lineal, que denotaremos por $df_{\vec{x}_o}$, tal que $$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Al igual que en el caso de una variable, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 14.4. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, entonces f es continua en $\vec{x}_o$.*

Demostración. Por ser f diferenciable en $\vec{x}_o$, existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0,$$

como toda transformación lineal es continua, tenemos que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} T(\vec{h}) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} |f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o)| &= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| \left(\frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h}) + T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} \right) \\
&\leq \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| \left(\frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \right) + \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} |T(\vec{h})| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_o+\vec{h}) = f(\vec{x}_o).$$

$\square$

Observación 14.5. Tal y cómo era de esperarse en el caso $n = 1$, la definición que hemos dado de diferenciabilidad, coincide con la definición usual de derivada. En efecto, en este caso la transformación lineal T es de la forma

$$T(h) = a\,h$$

para algún $a \in \mathbb{R}$.

Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_o+h) - f(x_o) - a\,h|}{|h|} = 0,$$

de donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} = a.$$

Es muy importante notar que, en este caso, el diferencial de f en x_o es la función lineal definida por

$$T(h) = f'(x_o)h.$$

OBSERVACIÓN 14.6. Tal como ocurre en el caso de una variable, se cumple lo siguiente:

(1) Si f y g son funciones diferenciables en $\vec{x}_o$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f + g$ es diferenciable en $\vec{x}_o$ y
$$d_{\vec{x}_o}(\lambda f + g) = \lambda\, d_{\vec{x}_o} f + d_{\vec{x}_o} g.$$

(2) Si f es diferenciable en un abierto "conexo" D (de manera informal conexo quiere decir que está formado por una sola pieza) y $d_{\vec{x}} f = 0$ para todo $\vec{x} \in D$, entonces f es constante en D.

2. Derivadas parciales y direccionales.

Caso $\mathbf{n = 2}$.

DEFINICIÓN 14.7. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a x en (x_o, y_o) se define por
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (t, 0)) - f(x_o, y_o)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t, y_o) - f(x_o, y_o)}{t},\end{aligned}$$
en caso de que el límite exista.

Esta derivada se calcula de la siguiente manera: se considera la variable y como constante y se deriva con respecto a x usando las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 14.8. Sea $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x$. Entonces
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x + e^{x+y} \cos x.$$
Si $(x_o, y_o) = (\pi/3, 2)$ tenemos que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3, 2) = e^{\pi/3+2} \operatorname{sen}(\pi/3) + e^{\pi/3+2} \cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\, e^{2+\pi/3}.$$

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_o, y_o) la podemos interpretar geométricamente de la siguiente manera: Intersectamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_o$ y obtenemos la curva señalada en el dibujo, la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es igual a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$.

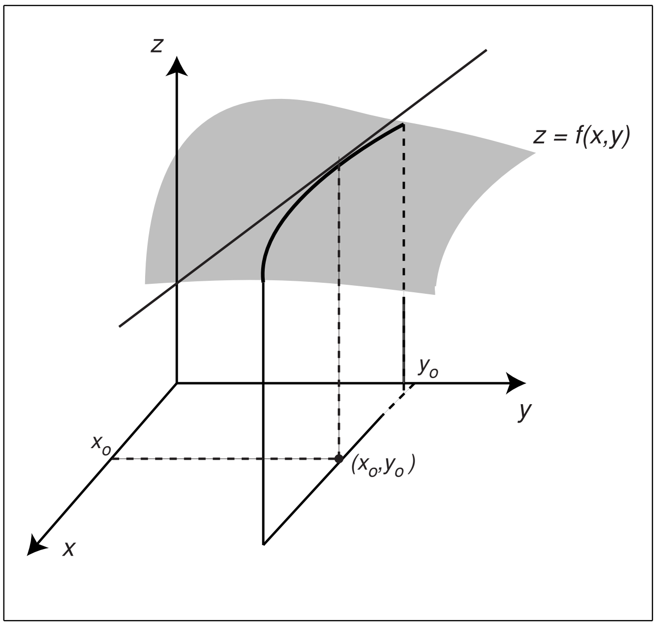


FIGURA 14.1. Interpretación geométrica de la derivada parcial

DEFINICIÓN 14.9. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a y en (x_o, y_o) se define por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (0,t)) - f(x_o, y_o)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o, y_o + t) - f(x_o, y_o)}{t},\end{aligned}$$

en caso de que el límite exista.

Esta derivada se calcula de la siguiente manera: se considera la variable x como constante y se deriva con respecto a y usando las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 14.10. Sea $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x.$$

Como ejercicio halle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(4, \pi)$.

DEFINICIÓN 14.11. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma uno y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada direccional del campo escalar* f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto (x_o, y_o) es

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o) + t\vec{v}) - f(x_o, y_o)}{t}$$

siempre que el límite exista.

De la definición sigue que $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o)$ mide la variación de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto (x_o, y_o).

OBSERVACIÓN 14.12. Notar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = D_{(1,0)} f(x_o, y_o),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = D_{(0,1)} f(x_o, y_o).$$

EJERCICIO 14.13. Hacer dibujos, similares a la Figura 14.1, representado geométricamente la derivada parcial con respecto a y y con respecto a un vector $\vec{v}$.

Caso $\mathbf{n = 3}$.

DEFINICIÓN 14.14. Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o, z_o) \in D$.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a x en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (t, 0, 0)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{t}, \end{aligned}$$

en caso de que el límite exista.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a y en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (0, t, 0)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t},$$

en caso de que el límite exista.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a z en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (0,0,t)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t},$$

en caso de que el límite exista.

Ejemplo 14.15. Sea $f(x,y,z) = y(x^2 + y^3 x + \cos z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y(2x + y^3), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= (x^2 + y^3 x + \cos z) + y(3y^2 x), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -y \operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

La derivada direccional se define de manera análoga y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) &= D_{(1,0,0)} f(x_o, y_o, z_o), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) &= D_{(0,1,0)} f(x_o, y_o, z_o), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) &= D_{(0,0,1)} f(x_o, y_o, z_o). \end{aligned}$$

Derivadas de orden superior.

Si tenemos una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto y f tiene derivadas parciales, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ también es una función de D en $\mathbb{R}$, por lo tanto tiene sentido considerar sus derivas parciales.

Los siguientes ejemplos ilustran la notación usual

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial z^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Bajo ciertas hipótesis se cumple que una derivada parcial de orden superior es independiente del orden de derivación. Más precisamente, si todas las derivadas parciales hasta el orden n son continuas, entonces las derivadas parciales de orden menor o igual que n son independientes del orden.

Por ejemplo si las derivadas parciales de primer y segundo orden de f son continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

En capítulos posteriores estudiaremos más en detalle las derivadas de orden superior.

3. Concepto de gradiente.

Caso n = 2.

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_o, y_o) \in D$. Entonces existe una transformación lineal (que es única), que denotamos por $df_{(x_o,y_o)}$, tal que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{|f((x_o, y_o) + \vec{h}) - f((x_o, y_o)) - df_{(x_o,y_o)}(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

En particular, si tomamos $\vec{h} = t(1,0)$ y hacemos t tender a 0, obtenemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f((x_o, y_o) + t(1,0)) - f((x_o, y_o)) - df_{(x_o,y_o)}(t(1,0))|}{\|t(1,0)\|} = 0,$$

como $\|t(1,0)\| = |t|$ y $df_{(x_o,y_o)}(t(1,0)) = t\, df_{(x_o,y_o)}(1,0)$, tenemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f((x_o, y_o) + (t,0)) - f((x_o, y_o)) - t\, df_{(x_o,y_o)}(1,0)|}{|t|} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f((x_o, y_o) + (t,0)) - f((x_o, y_o))}{t} - df_{(x_o,y_o)}(1,0) = 0 \right|.$$

Este cálculo nos muestra que si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (t,0)) - f((x_o, y_o))}{t}$$

y es igual a $df_{(x_o,y_o)}(1,0)$, o, dicho de otra manera, si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe la derivada parcial de f con respecto a x en (x_o, y_o) y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(1,0).$$

De igual manera se prueba que si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe la derivada parcial de f con respecto a y en (x_o, y_o) y además

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(0, 1),$$

y más generalmente, considerando $\vec{h} = t\vec{v}$, se prueba que si f es diferenciable en (x_o, y_o) y $\vec{v}$ es un vector de norma 1, entonces existe la derivada de f en la dirección de $\vec{v}$ y además

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(\vec{v}).$$

Por otra parte, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, tenemos que

$$\vec{v} = v_1\,(1, 0) + v_2\,(0, 1)$$

y, por la linealidad de $df_{(x_o,y_o)}$,

$$\begin{aligned} df_{(x_o,y_o)}(\vec{v}) &= v_1\, df_{(x_o,y_o)}((1, 0)) + v_2\, df_{(x_o,y_o)}((0, 1)) \\ &= v_1\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + v_2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right), (v_1, v_2) \right\rangle . \end{aligned}$$

Definición 14.16. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. El *gradiente* de f en (x_o, y_o) es

$$\nabla f(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right),$$

en caso de que las derivadas parciales existan.

El símbolo ∇ que aparece en el gradiente se llama nabla.

Los cálculos que hemos hecho los resume el siguiente resultado.

Teorema 14.17. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $(x_o, y_o) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces*

(a) *Existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.*

(b) *La derivada direccional, $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o)$, existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de norma uno y*

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = \langle \nabla f(x_o, y_o), \vec{v} \rangle.$$

Caso n = 3.

Definición 14.18. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o, z_o) \in D$.

El *gradiente* de f en (x_o, y_o, z_o) es

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o), \frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \right),$$

en caso de que las derivadas parciales existan.

Ejemplo 14.19. Sea $f(x, y, z) = y(x^2 + y^3 x + \cos z)$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (y(2x + y^3), (x^2 + y^3 x + \cos z) + y(3y^2 x), -y \operatorname{sen} z).$$

Al igual que en el caso bidimensional, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.20. *Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable en (x_o, y_o, z_o) entonces*

(a) *Existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)$.*

(b) *La derivada direccional, $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o, z_o)$, existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma uno y*

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o, z_o) = \langle \nabla f(x_o, y_o, z_o), \vec{v} \rangle.$$

4. Dirección de máximo crecimiento.

De la definición de derivada direccional sigue que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ es una medida del crecimiento de f en $\vec{x}_o$, en la dirección del vector $\vec{v}$. Además tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.21. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_o$. Si $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o)$ es un vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.*

Demostración. Sea $\vec{v}$ un vector de norma 1. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)| = |\langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle| \leq \|\nabla f(\vec{x}_o)\| \|\vec{v}\| = \|\nabla f(\vec{x}_o)\|.$$

Además la igualdad ocurre si y sólo si $\vec{v}$ es paralelo a $\nabla f(\vec{x}_o)$.

Queremos hallar un vector $\vec{v}$ tal que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ sea lo más grande posible. Estos valores están acotados por $\|\nabla f(\vec{x}_o)\|$.

Como $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$, el vector

$$\vec{v_o} = \frac{1}{\|\nabla f(\vec{x}_o)\|} \nabla f(\vec{x}_o)$$

nos da la dirección de máximo crecimiento de f.

$\square$

5. Condición suficiente de diferenciabilidad.

Hemos visto que si f es diferenciable en un punto, entonces existen las derivadas parciales de f en dicho punto. El recíproco no es cierto, puede ocurrir que existan las derivadas parciales en un punto dado y que la función no sea diferenciable en dicho punto. Sin embargo si las derivadas parciales satisfacen ciertas condiciones adicionales, podemos garantizar la diferenciabilidad, mas precisamente, se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 14.22. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $\vec{x}_o$ entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*

Este resultado permite probar que algunas funciones son diferenciables.

EJEMPLO 14.23. Demostrar que la función definida por $f(x, y) = 3x^2y - xy^2$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 2xy.$$

Las dos derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por el teorema f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

OBSERVACIÓN 14.24. Es importante notar que del Teorema anterior sigue que si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función, tal que todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en D, entonces f es diferenciable en todo punto de D.

Lectura adicional: funciones continuamente diferenciables.

Definición 14.25. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$, se dice que f es *continuamente diferenciable* en $\vec{x}_o$ si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $\vec{x}_o$.

Por eso en muchos libros el teorema anterior aparece enunciado de la siguiente manera:

Teorema 14.26. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si f es continuamente diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*

La demostración de este resultado está por encima del alcance de estas notas. Una demostración detallada se puede encontrar en [**8**].

6. Regla de la cadena.

La regla de la cadena se extiende para la composición de una campo escalar con una trayectoria de la siguiente manera.

Teorema 14.27 (Regla de la cadena). *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una función y sea $t \in (a, b)$ tal que $\alpha(t) \in D$. Supongamos que:*

(a) *α es diferenciable en t,*
(b) *f es diferenciable en $\alpha(t)$.*

Entonces $f \circ \alpha$ es diferenciable en t y se tiene

$$(f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

No daremos la demostración de este teorema, una versión más general se puede encontrar en [**8**]. Es importante adquirir destreza operativa en lo que se refiere al manejo de la regla de la cadena.

En los siguientes ejemplos supondremos que las funciones involucradas son diferenciables y que las composiciones están todas bien definidas, de manera que aplicaremos la regla de la cadena sin tener que preocuparnos por las hipótesis.

Ejemplo 14.28.

Supongamos que tenemos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

La función α está dada por tres funciones coordenadas, es decir, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ donde $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
(f\circ\alpha)'(t) &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t))\right), (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))\right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))\,\alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))\,\alpha_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t))\,\alpha_3'(t).
\end{aligned}$$

Es usual utilizar la siguiente notación, que aunque es menos explícita y puede resultar confusa, nos ayuda a entender mejor cómo hacer los cálculos.

Sea $w = f(x,y,z)$ y $x = \alpha_1(t)$, $y = \alpha_2(t)$, $z = \alpha_3(t)$, entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}.$$

Ejemplo 14.29. Si tenemos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ entonces $f\circ\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Veamos cómo calcular las derivadas parciales de $f\circ\psi$ en términos de las derivadas parciales de f y de ψ.

Las variables que están en el dominio de f las vamos a denotar por (x,y,x) y las variables que están en el dominio de ψ las vamos a denotar por (s,t), es decir f depende de (x,y,z) y ψ depende de (s,t), además $\psi(s,t) = (\psi_1(s,t), \psi_2(s,t), \psi_3(s,t))$.

Tenemos que

$$\frac{\partial (f\circ\psi)}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_2}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial z}\psi(s,t)\,\frac{\partial \psi_3}{\partial s}(s,t),$$

$$\frac{\partial (f\circ\psi)}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_2}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial z}\psi(s,t)\,\frac{\partial \psi_3}{\partial t}(s,t).$$

En la práctica se suele usar la siguiente notación, que aunque es menos explícita porque no nos indica donde debemos evaluar cada función, nos ayuda a aplicar la regla de la cadena.

Sea $w = f$, es decir w es una función de (x,y,z), lo que se suela abreviar de la siguiente manera

$$w = w(x,y,z).$$

Al hacer la composición $f \circ \psi$ estamos poniendo (x, y, z) en función de (s, t), lo que se suele abreviar así

$$x = x(s,t) \qquad y = y(s,t) \qquad z = z(s,t).$$

Las fórmulas para las derivadas parciales quedan así

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ejemplo 14.30. Si $f(x, y) = x^3 - y^3$ y $F(u, v) = f(u\,v, u - v)$, hallar $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

Estamos haciendo el cambio

$$x = u\,v \qquad y = u - v,$$

por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 3\,x^2\,v - 3\,y^2\,1\\ &= 3(u\,v)^2\,v - 3(u-v)^2\\ &= 3\,u^2\,v^3 - 3(u-v)^2.\end{aligned}$$

A manera de ejercicio, hallar explícitamente la expresión para $F(u, v)$, derivar directamente y verificar que se obtiene el mismo resultado. Hacer lo mismo con la variable v.

Ejemplo 14.31. En cierto instante la altura de un cono recto circular es de 30 cm y está creciendo a razón de 2 cm/seg. En el mismo instante el radio de la base es de 20 cm y está creciendo a razón de 1 cm/seg. ¿A qué velocidad está creciendo el volumen del cono en ese instante?

Si $r = r(t)$ y $h = h(t =$ son el radio y la altura del cono en el instante t, respectivamente, tenemos que

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial t}\\ &= \frac{2}{3}\,\pi\,r\,h\,\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,\frac{\partial h}{\partial t}\,.\end{aligned}$$

En el instante dado

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\,\pi\,(20)\,(30)\,(1) + \frac{1}{3}\,\pi\,(20)^2\,(2) = \frac{2000}{3}\,\pi.$$

Ejemplo 14.32. Si $f = f(x,y)$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, con derivadas parciales de primero y segundo orden continuas y

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

expresar $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}$ en términos de las derivadas parciales de f.

Estamos haciendo el cambio

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial\theta}\\ &= -r\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta.\end{aligned}$$

Nuevamente, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} =& -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta - r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right)\mathrm{sen}\,\theta\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta + r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta,\end{aligned}$$

substituyendo $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta$ y usando que las derivadas mixtas de orden 2 son iguales, obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta + r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta).$$

7. Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

Teorema 14.33. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Sean $\vec{x}_o$ y $\vec{x}_1$ dos puntos de D y sea $G \subset D$ una curva lisa a trozos con extremo inicial $\vec{x}_o$ y extremo final $\vec{x}_1$. Entonces*

$$\int_G \nabla f \cdot d\vec{x} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_o).$$

Demostración. Supongamos primero que la curva G es lisa. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ de G. Entonces

$$\begin{aligned}\int_G \nabla f \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(f(g(t)) \right) \, dt \\ &= f(g(b)) - f(g(a)).\end{aligned}$$

Supongamos ahora que G es lisa a trozos, entonces $G = G_1 \cup \cdots \cup G_N$ donde cada una de las curvas G_i es lisa y el extremo inicial de G_i es el extremo final de G_{i-1}. Si por $\vec{y}_i$ denotamos el extremo final de G_i tenemos que

$$\begin{aligned}\int_G \nabla f \cdot d\vec{x} &= \int_{G_1} \nabla f \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} \nabla f \cdot d\vec{x} \\ &= f(\vec{y}_1) - f(\vec{x}_o) + f(\vec{y}_2) - f(\vec{y}_1) + \cdots + f(\vec{y}_N) - f(\vec{x}_{N-1}) \\ &= f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_o).\end{aligned}$$

□

Recordemos que se dice que una curva G es *cerrada* cuando su extremo final coincide con su extremo inicial.

Corolario 14.34. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. La integral de línea de ∇f sobre cualquier curva cerrada es igual a* 0.

Ejemplo 14.35. Calcular

$$\int_G x \, dx + y \, dy,$$

donde G es el segmento de recta que va del punto $(1, 2)$ al punto $(3, 3)$.

Debemos calcular

$$\int_G F \cdot d\vec{x},$$

donde $F(x, y) = (x, y)$, como $F = \nabla f$, donde $f(x, y) = x^2/2 + y^2/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_G x\,dx + y\,dy &= \int_G \nabla f \cdot d\vec{x} \\
&= f(3, 3) - f(1, 2) \\
&= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

8. Diferenciación de funciones definidas en forma implícita.

Lo que sigue a continuación debe entenderse intuitivamente, pues para que sea correcto hace falta agregar ciertas hipótesis de continuidad y de diferenciabilidad pedir que ciertos valores no sean nulos para poder dividir entre ellos.

Consideremos la ecuación definida por $f(x, y) = 0$ donde y es una función definida implícitamente por la variable x.

Si $f(x, y(x)) = 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0,$$

luego, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ejemplo 14.36. Si tenemos $x^2 + y^2 = 1$ y queremos hallar la derivada de y con respecto a x podemos usar el resultado anterior.

En efecto sin necesidad de despejar y tenemos la fórmula para la derivada de y.

Consideramos la función f dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Note que para esta f particular se cumple que $f(x, y) = 0$. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Es decir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y(x)}.$$

Podemos considerar también una ecuación definida por $f(x, y, z) = 0$ donde z es una función definida implícitamente por las variables x, y. En este caso

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\,.$$

Ejemplo 14.37. Calcularemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para z definida implícitamente como una función de x y de y, mediante la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Para hallar la derivada con respecto a x, vemos a y como constante y consideramos a z como función de x. Procedemos así:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Luego

$$(3z^2 + 6xy)\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 - 6yz.$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6xy} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

Por otro lado, para hallar la derivada con respecto a y, vemos a x como constante y consideramos a z como función de y. Obtenemos:

$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Luego

$$(3z^2 + 6xy)\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 6xz.$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2 - 6xz}{3z^2 + 6xy} = \frac{-y^2 - 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Los teoremas que dan un marco teórico apropiado a lo que hemos estado haciendo son los siguientes:

TEOREMA 14.38. *Si $f(x, y)$ es continua en una región que incluye un punto (x_o, y_o) para el cual $f(x_o, y_o) = 0$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en esa región y si*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$$

entonces existe un entorno de (x_o, y_o) sobre el que se puede despejar en $f(x, y) = 0$ la y como una función continua diferenciable de variable x, esto es $y = \phi(x)$, con $y_o = \phi(x_o)$ y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Extendiendo este teorema se tiene:

TEOREMA 14.39. *Si $f(x, y, z)$ es continua en una región que incluye un punto (x_o, y_o, z_o) para el cual $f(x_o, y_o, z_o) = 0$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ son continuas en esa región y si*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$$

entonces existe un entorno de (x_o, y_o, z_o) sobre el que se puede despejar en $f(x, y, z) = 0$ la z como una función continua diferenciable de variables x e y, esto es $z = \phi(x, y)$, con $z_o = \phi(x_o, y_o)$ y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ejercicios.
Diferenciación de campos escalares.

(1) Calcular todas las derivadas parciales de primer orden

(a) $f(x,y) = \tan(x^2/y)$ para $y \neq 0$.

(b) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ para $x \neq 0$.

(c) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ para $xy \neq 1$.

(d) $f(x,y) = x^{(y^2)}$ para $x > 0$.

(e) $f(x,y) = \arccos\sqrt{x/y}$ para $y \neq 0$.

(f) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$ para $x+y+z \neq 0$.

(2) Demostrar que cada una de las siguientes funciones es diferenciable en su dominio.

(a) $f(x,y) = xy\cos(xy)$.

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$.

(c) $f(x,y,z) = x^y + z^5$.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hallar el conjunto de los puntos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ en los que f es diferenciable.

(4) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1,1)$.

(5) Hallar la derivada en la dirección del vector $(1,4)$ de la función $f(x,y) = x^4 + ye^y$ en el punto $(2,1)$.

(6) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x^4 + x\,y^3$ en el punto $(2,3)$.

(7) Hallar la derivada en la dirección del vector $(1,1)$ de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el punto (π,π).

(8) Si $w = f(x,y,z)$ y

$$x = s + t, \qquad y = s - t, \qquad z = s\,t,$$

expresar $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, en términos de las derivadas parciales de f.

Después aplicar la fórmula obtenida para el caso particular

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

(9) El cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ transforma $f(x,y)$ en $g(r,\theta)$, es decir $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Hallar las derivadas parciales de primero y segundo orden de g en términos de las derivadas parciales de f (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas).

El operador Laplaciano: El *Laplaciano* de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

análogamente, el *Laplaciano* de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Al describir el movimiento del electrón del átomo de hidrógeno alrededor de su núcleo, aparece una ecuación en derivadas parciales que, salvo ciertas constantes, es la siguiente:

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\psi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \psi,$$

es decir

$$-\nabla^2\psi + \frac{\psi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \psi.$$

En esta ecuación ψ es una función de las variables (x, y, z) y ψ es la incógnita a determinar.

El primer paso para resolver esta ecuación es cambiar de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, por eso la importancia práctica de los siguientes ejercicios.

(10) $\star$ *Laplaciano bi-dimensional en coordenadas polares.* La introducción de coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, transforma $f(x, y)$ en $g(r, \theta)$. Demostrar las siguientes fórmulas (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas):

(a) $\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}.$

Indicación: Utilizar el ejercicio anterior.

(11) $\star$ *Laplaciano tri-dimensional en coordenadas esféricas.* La introducción de coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

transforma $f(x, y, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$. Este ejercicio indica como hay que proceder para expresar el laplaciano $\nabla^2 f$ en función de las derivadas parciales de F (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas).:

(a) Introducir primero las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar $f(x, y, z)$ en $g(r, \theta, z)$. Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(b) Luego transformar $g(r, \theta, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$ tomando $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\operatorname{sen}\varphi$. Observar que, salvo un cambio de notación, esta es la misma transformación

que se utilizó en la parte (a). Deducir que
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

(12) Suponga que $u = f(x + at, y + bt)$, donde a y b son constantes. Demostrar que
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(13) Una caja rectangular cambia de forma de manera tal que su largo crece a razón de 3 cm/seg, su ancho decrece a razón de 2 cm/seg y su altura crece a razón de 1 cm/seg. ¿A qué velocidad crece el volumen de la caja cuando el largo es de 15 cm, el ancho de 10 cm y la altura de 8 cm? ¿A qué velocidad crece el área de la caja en ese mismo instante?

(14) Si $z = f(y/x)$, demostrar que
$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(15) Calcular
$$\int_G F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy,$$
en los siguientes casos:

(a) $F_1(x, y) = y\,\cos(xy)$, $F_2(x, y) = x\,\cos(xy)$ y G es el segmento de recta que va del punto $(0, 0)$ al punto $(1, \pi/2)$.

(b) $F_1(x, y) = y\,\cos(xy)$, $F_2(x, y) = x\,\cos(xy)$ y G es una curva cerrada.

(c) $F_1(x, y) = y$, $F_2(x, y) = x$ y G es una curva con extremo inicia $(0, 1)$ y extremo final $(3, 3)$.

(16) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si

(a) $z^3 + x^3 + y^3 + z^2 y^2 = 0$.

(b) $z + \cos(xyz) = 1$

CAPÍTULO 15

Plano tangente a algunas superficies.

Plano tangente a una superficie dada en la forma: (a) $F(x,y,z)=0$ y (b) $z=f(x,y)$. Ecuación del plano tangente en cada uno de estos casos en términos de las derivadas parciales de F y f.

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ puede estar dada como un conjunto de nivel, como el gráfico de un campo escalar en dos variables y también en forma paramétrica. Estudiaremos cómo son los planos tangentes a los dos primeros tipos de superficies, las superficies dadas en forma paramétrica también pueden ser estudiadas (ver [**8**]).

Dados $(a,b,c),(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sabemos que el producto escalar de estos vectores es

$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = ax+by+cz.$$

Estos dos vectores son ortogonales cuando este producto escalar es igual a 0, es decir, cuando

$$ax+by+cz=0.$$

En lo que acabamos de indicar (a,b,c) y (x,y,z) eran dos vectores fijos de $\mathbb{R}^3$. A continuación (a,b,c) seguirá fijo pero (x,y,z) variará en $\mathbb{R}^3$.

Sabemos que la ecuación del plano es:

$$ax+by+cz=d \tag{15.1}$$

donde (x,y,z) es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto

$$ax+by+cz=0$$

es la ecuación de un plano que pasa por el origen y tal que todos sus vectores son ortogonales al vector (a,b,c), esto lo abreviamos diciendo que el plano es ortogonal al vector (a,b,c).

Trasladándonos podemos considerar planos que no pasan por el origen.

En efecto

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$$

es la ecuación de un plano que pasa por el punto (x_o, y_o, z_o) y tal que todos sus vectores son ortogonales al vector (a, b, c), es decir, el plano es ortogonal al vector (a, b, c).

Si tomamos

$$d = ax_o + by_o + cz_o$$

obtenemos la ecuación 15.1.

1. Plano tangente a una superficie dada como un conjunto de nivel.

Consideraremos el plano tangente a una superficie dada en la forma: $F(x, y, z) = 0$ y daremos la ecuación de este plano tangente en términos de las derivadas parciales de F.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas y sea S_0 la superficie de nivel de F dada por $F(x, y, z) = 0$. El *plano tangente a la superficie dada como un conjunto de nivel,* en el punto (x_o, y_o, z_o) es el plano de ecuación:

$$(x - x_o)\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) + (y - y_o)\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = 0.$$

Es decir

$$\langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), (x - x_o, y - y_o, z - z_o)\rangle = 0,$$

siempre que $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq \vec{0}$.

Y la ecuación de la recta normal en (x_o, y_o, z_o) es:

$$\frac{x - x_o}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)} = \frac{y - y_o}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)} = \frac{z - z_o}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)}.$$

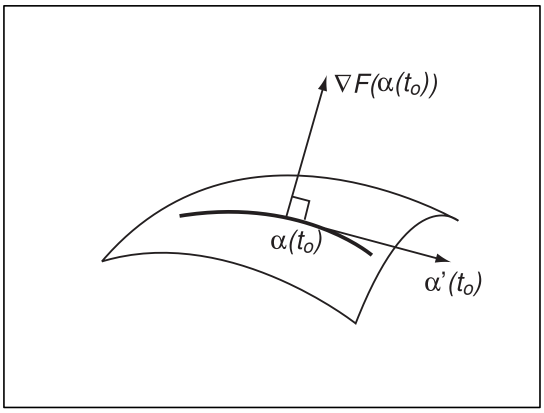


FIGURA 15.1.

1.1. Lectura adicional: Justificación.

Definición 15.1. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $(x_o, y_o, z_o) \in S$. Decimos que el vector $\vec{v}$ es ortogonal a S en (x_o, y_o, z_o) si para cada curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I) \subset S$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$ se tiene que $\vec{v}$ es ortogonal a $\alpha'(t_o)$.

Proposición 15.2. *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas. Sea S_c la superficie de nivel de F dada por*

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = c\}.$$

Si $(x_o, y_o, z_o) \in S_c$ y $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ entonces $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal a S_c en (x_o, y_o, z_o).

Demostración. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva tal que $\alpha(I) \subset S_c$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$. Entonces tenemos que $F \circ \alpha \equiv c$ y por lo tanto $(F \circ \alpha)'(t) = 0$.

De la regla de la cadena sigue que

$$(F \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle,$$

para todo $t \in I$. En particular

$$1 = \langle \nabla F(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = \langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), \alpha'(t_o) \rangle.$$

$\square$

2. Plano tangente a una superficie dada como un gráfico.

Consideraremos el plano tangente a una superficie dada en la forma: $z = f(x, y)$ y daremos la ecuación del plano tangente en términos de las derivadas parciales de f.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas, entonces el gráfico de f define una superficie en $\mathbb{R}^3$.

A partir de esta función f construimos una nueva función F de la siguiente manera, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x, y, z) = -z + f(x, y).$$

Notemos que decir $z = f(x, y)$ es lo mismo que decir $F(x, y, z) = 0$.

Tal como ya lo hemos indicado la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ es:

$$0 = (x - x_o)\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) + (y - y_o)\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o).$$

Si buscamos la relación entre las derivadas parciales de F y las derivadas parciales de f encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= -1. \end{aligned}$$

Usando que

$$z_o = f(x_o, y_o)$$

y reemplazando en la ecuación del plano tangente obtenemos

$$z = f(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Esta última es la *ecuación del plano tangente a la superficie dada por el gráfico* $z = f(x, y)$ en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Este plano es ortogonal al vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o), -1\right).$$

Hemos dado la ecuación del plano tangente en términos de las derivadas parciales de f.

Ejercicios.
Plano tangente a algunas superficies.

(1) Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada en el punto que se indica.

(a) $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$ en $(2, 1, 3)$.

(b) $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$ en $(1, -2, 1)$.

(2) Probar que la ecuación del plano tangente a la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ es

$$\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} - \frac{zz_o}{c^2} = 1.$$

(3) Demostrar que las superficies dadas por

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

y

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$$

son tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

Sugerencia: (a) Halle los vectores direccionales de las rectas normales de cada una de las superficies y vea que éstos son proporcionales. (b) Pruebe que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado.

(4) Probar que las superficies dadas por

$$F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$$

y

$$G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$$

se cortan en ángulo recto en el punto $(1, 2, 1)$.

Sugerencia: pruebe que los vectores direccionales de las rectas normales de cada una de las superficies son perpendiculares.

CAPÍTULO 16

Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor.

Derivadas de orden superior. Polinomio de Taylor para funciones de una variable. Desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

1. Derivadas de orden superior para funciones de una variable.

Si bien es cierto que la derivada de una función f en un punto a es un número real al que llamamos $f'(a)$, también es cierto que si variamos el punto obtenemos una función. A esa función la llamamos f'.

A veces se puede derivar f'.

Si evaluamos en a obtenemos el número real $(f')'(a)$. A este valor se le llama la *segunda derivada* de f en a y se denota por $f^{(2)}(a)$, es decir,

$$f^{(2)}(a) = (f')'(a).$$

Note que derivamos primero y evaluamos después, si lo hubiésemos hecho al revés estaríamos derivando a la constante $f'(a)$, cuya derivada es evidentemente igual a 0.

Repitamos el razonamiento: Si bien es cierto que la segunda derivada de una función f en un punto a es un número real al que llamamos $f^{(2)}(a)$, también es cierto que si variamos el punto obtenemos una función. A esa función la llamamos $f^{(2)}$. Esto es

$$f^{(2)}(x) = (f')'(x)$$

A veces se puede derivar $f^{(2)}$.

Así aparecen las derivadas de orden superior.

En general se usa la siguiente notación:

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$f^{(1)}(x) = f'(x)$$

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$$

Cuando evaluamos en un punto a obtenemos las constantes $f(a), f'(a), \ldots, f^{(k)}(a)$.

EJEMPLO 16.1. Sea

$$f(x) = e^x.$$

Entonces $f'(x) = e^x$. Además $f^{(2)}(x) = e^x$. En general se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO 16.2. Sea

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Entonces $f'(x) = \cos x$. Además $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f^{(3)}(x) = -\cos x$. En general se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } k = 4j \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ \cos x & \text{si } k = 4j+1 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } k = 4j+2 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ -\cos x & \text{si } k = 4j+3 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Derivadas de orden superior para funciones de dos variables.

Sea f una función de dos variables.

Las *derivadas parciales de primer orden* son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Las *derivadas parciales de segundo orden* son

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Así sucesivamente las *derivadas parciales de orden* N son de la forma

$$f_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_N}$$

donde a_i puede ser x o y. Vamos a ver que, bajo ciertas condiciones de regularidad, una derivada parcial de orden N es independiente del orden de derivación. Bajo estas condiciones de regularidad una derivada de orden N tiene la forma

$$f_{x\ y}^{k\ N-k} = \frac{\partial^N f}{\partial y^{N-k} \partial x^k} = \frac{\partial^{N-k}}{\partial y^{N-k}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right).$$

Teorema 16.3. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si las derivadas parciales de primero y segundo orden de f existen y son continuas en D entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

2.1. Lectura adicional: demostración del teorema que da una condición suficiente para poder cambiar el orden de derivación.

Demostración. Sea $\vec{x} = (x, y) \in D$. Como D es abierto existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset D$. Sea $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{h}\| < r$. Entonces $\vec{x} + \vec{h} \in B(\vec{x}, r) \subset D$.

Para $\|\vec{h}\| < r$ sea

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y)) - f(x, y + h_2) + f(x, y).$$

(a) Sea $G(t) = f(t, y + h_2) - f(t, y)$. Entonces $F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x)$.

Por el teorema del valor medio existe $c_1 = c_1(\vec{h}) \in (x, x + h_1)$ tal que

$$F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x) = h_1 G'(c_1) = h_1(f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y)).$$

De la misma manera, existe $c_2 = c_2(\vec{h}) \in (y, y + h_2)$ tal que

$$f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y) = h_2 f_{xy}(c_1, c_2).$$

Luego

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1, c_2) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} (c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

(b) Análogamente, invirtiendo el orden y usando que

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)) - f(x + h_1, y) + f(x, y)$$

se puede demostrar que

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} (d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

De lo hecho en (a) y (b) obtenemos:

$$f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})).$$

Haciendo $\vec{h} \to \vec{0}$ y usando la continuidad de f_{xy} y f_{yx} se obtiene

$$f_{xy}(\vec{x}) = f_{yx}(\vec{x}).$$

$\square$

Observación 16.4. El teorema anterior se extiende de manera natural a funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y a derivadas de orden superior.

3. Desarrollo de Taylor para funciones de una variable.

Recordemos que para funciones de una variable se cumple el siguiente resultado.

Teorema 16.5 (Taylor). *Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función tal que f', f'', ..., $f^{(N+1)}$ están definidas en $[\alpha, \beta]$, (N un entero positivo).*

Sean a y x distintos puntos del intervalo $[a, b]$.

Entonces existe un punto c entre a y x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}.$$

El polinomio

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se llama el polinomio de Taylor de grado N de f en a.

Si a las hipótesis del Teorema anterior agregamos que existe $M > 0$ tal que

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq M$$

para todo $x \in [\alpha, \beta]$, entonces tendremos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_N(x)}{(x-a)^N} = 0. \tag{16.1}$$

En particular, (16.1) se cumple si suponemos que $f^{(N+1)}$ es continua.

4. Desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

Para poder introducir el desarrollo de Taylor en el caso de una función de dos variables debemos recordar el *coeficiente binomial*:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

El coeficiente binomial aparece en la fórmula algebraica conocida como el *binomio de Newton*:

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k}.$$

Definición 16.6. Sean $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ un entorno de (x_o, y_o). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^N$ en D, *el desarrollo de Taylor* de f de grado N alrededor de (x_o, y_o) es el polinomio

$$\begin{aligned} P_N(x,y) = {} & f(x_o,y_o) \\ & + \frac{1}{1!}((x-x_o)f_x(x_o,y_o) + (y-y_o)f_y(x_o,y_o)) \\ & + \frac{1}{2!}((x-x_o)^2 f_{xx}(x_o,y_o) + 2(x-x_o)(y-y_o)f_{xy}(x_o,y_o) + (y-y_o)^2 f_{yy}(x_o,y_o)) \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(x-x_o)^k(y-y_o)^{N-k} f_{x\,y}^{k\,N-k}(x_o,y_o) \end{aligned}$$

Ejemplo 16.7. Sea $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Calcularemos el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de $(0,0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - x^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= -xy(1+x^2+y^2)^{-3/2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - y^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & f(0,0) = 1, \\ & f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0, \\ & f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad y \quad f_{yy}(0,0) = 1. \end{aligned}$$

De donde

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

5. Cálculos aproximados y errores.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea g la función cuya gráfica es una recta que pasa por $(x_o, f(x_o))$ con pendiente $f'(x_o)$. Esto es

$$g(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Resulta que g aproxima bien a f en un entorno de x_o. Es decir, si $\|x - x_o\| \approx 0$ entonces

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tendremos que $\|\vec{x} - \vec{x}_o\| \approx \vec{0}$ entonces

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_o) + \langle \nabla f(\vec{x}_o), (\vec{x} - \vec{x}_o) \rangle.$$

Estas expresiones son muy útiles para hacer aproximaciones, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.8. Hallar aproximadamente el valor de $\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2}$.

Sea

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

queremos hallar $f(5.98, 8.01)$. Es fácil ver que

$$f(6, 8) = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Por lo tanto se aproximará el punto $(5.98, 8.01)$ por el punto $(6, 8)$.

Sean $\vec{x} = (5.98, 8.01)$ y $\vec{x}_o = (6, 8)$ entonces

$$\vec{x} - \vec{x}_o = (5.98, 8.01) - (6, 8) = (-0.02, 0.01)$$

Además

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Luego $\nabla f(6, 8) = (6/10, 8/10)$. De donde

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}_o}(\vec{x} - \vec{x}_o) &= \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{x} - \vec{x}_o \rangle \\ &= \langle (6/10, 8/10), (-0.02, 0.01) \rangle = -0.004. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2} \approx 10 - 0.004 = 9.996.$$

5.1. Lectura adicional. Sea $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Supongamos que tenemos una función que es dos veces derivable y que sus segundas derivadas son continuas

$$f : B((x_o, y_o), r) \to \mathbb{R}.$$

Sea $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(h_1, h_2)\| < r$ y, para $t \in [0, 1]$, sea

$$\varphi(t) = f((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)).$$

Entonces φ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ y, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)),\\
\varphi''(t) &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2))\\
&\quad + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Aplicando el Teorema de Taylor en el caso $N = 1$ a φ obtenemos que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi). \tag{16.2}$$

Si $(c, d) = (x_o, y_o) + \xi(h_1, h_2)$ tenemos que $(c, d) \in B((x_o, y_o), r)$ y de (16.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x_o + h_1, y_o + h_2) &= f(x_o, y_o) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}((x_o, y_o)) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}((x_o, y_o))\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, d) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c, d)\right).
\end{aligned} \tag{16.3}$$

Si suponemos que f es de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$, obtenemos que φ es también de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Por lo tanto podemos considerar los análogos de (16.2) y (16.3), pero derivando hasta el orden $N + 1$. Esto nos lleva a una generalización del teorema de Taylor para funciones de dos variables. Esta generalización la vamos a describir a continuación sin demostraciones.

Teorema 16.9. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Sean $(x_o, y_o), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que el segmento que los une está contenido en D. Entonces existe un punto $(c, d) \in D$ tal que*

$$f(x, y) = P_N(x, y) + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (x - x_o)^k (y - y_o)^{N+1-k} f_{x\ y}^{k\ N+1-k}(c, d).$$

COROLARIO 16.10. *Con las mismas hipótesis que el* Teorema *anterior tenemos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y) - P_N(x,y)}{\|(x,y) - (x_o,y_o)\|^N} = 0.$$

El caso de varias variables. Los casos de tres variables o más son bastante complicados. Para una lectura sobre estos temas remitimos al lector a [**8**].

Ejercicios.
Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor.

(1) Calcular todas las derivadas parciales de primer orden y las derivadas parciales de segundo orden mixtas, es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Comprobar que las derivadas parciales mixtas son iguales.

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{y} \cos x^2$ para $y \neq 0$.

(2) Dada $z = u(x, y)e^{ax+by}$ donde u es tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Hallar valores de a y b de manera que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

(3) Sea

$$v(r, t) = t^u e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

Hallar un valor de la constante u tal que v satisfaga la siguiente ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

(4) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(0, 0)$, para la función $f(x, y) = e^{x+y}$.

(5) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(0, 0)$, para la función $f(x, y) = x + y + xy + x^2 + x^4 + y^8$.

(6) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(\pi/2, 0)$, para la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y^2)$.

CAPÍTULO 17

Máximos y mínimos.

Máximos y mínimos. Criterio del Hessiano en dos variables. Método de los multiplicadores de Lagrange.

1. Máximos y mínimos locales.

Sea $n = 2$ ó $n = 3$.

DEFINICIÓN 17.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que $\vec{x}_o$ es un *punto crítico* para f cuando $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.

DEFINICIÓN 17.2. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *máximo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \geq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

DEFINICIÓN 17.3. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *mínimo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \leq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

PROPOSICIÓN 17.4. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ y f alcanza un máximo o un mínimo local en $\vec{x}_o$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Solamente lo probaremos cuando f alcanza un máximo local en $\vec{x}_o$, para un mínimo local la demostración es análoga.

Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\alpha(t) = \vec{x}_o + t\vec{v}.$$

Entonces $\alpha(0) = \vec{x}_o$ y $\alpha'(t) = \vec{v}$.

Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\beta = f \circ \alpha$. Como f tiene un máximo local en $\vec{x}_o$, resulta que β tiene un máximo local en $t = 0$. Así que

$$0 = \beta\,'(0) = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle.$$

Como $\vec{v}$ es arbitrario, tenemos que $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.

$\square$

OBSERVACIÓN 17.5. Al igual que en el caso de una variable puede ocurrir que $\nabla f(\vec{x}_o)$ sea igual a $\vec{0}$ y sin embargo en $\vec{x}_o$ no se alcance ni máximo ni mínimo para f.

DEFINICIÓN 17.6. Un punto crítico en el que f no alcanza ni máximo ni mínimo se llama *punto de ensilladura.* para f.

OBSERVACIÓN 17.7. La Proposición 17.4 tiene una interpretación geométrica muy clara en el caso $n = 2$:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sabemos que el gráfico de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$ y el plano tangente a esa superficie en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ tiene ecuación

$$z = f(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Este plano es ortogonal al vector

$$\vec{v} = \left(\frac{df}{dx}(x_o, y_o), \frac{df}{dy}(x_o, y_o), -1\right).$$

Si suponemos que f alcanza un máximo en (x_o, y_o) entonces

$$\nabla f(x_o, y_o) = (0, 0).$$

Luego

$$\vec{v} = (0, 0, -1).$$

Obviamente el plano también es ortogonal al vector $(0, 0, 1)$.

De donde, el plano tangente a la superficie dada por el gráfico de f en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es paralelo al plano $z = 0$.

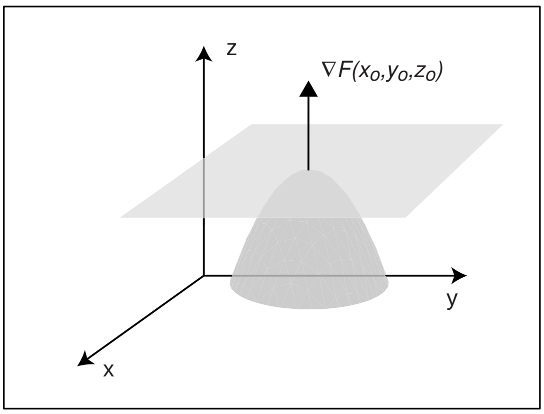


FIGURA 17.1.

2. Criterio del Hessiano en dos variables.

El criterio del Hessiano en dos variables nos permite clasificar los puntos críticos en el caso $n = 2$.

Consideraremos la matriz

$$A_{(x,y)} = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

y su determinante

$$\Delta(x,y) = det A_{(x,y)} = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2.$$

TEOREMA 17.8 (Criterio del hessiano). *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $(x_o, y_o) \in D$ un punto crítico de f y sea*

$$\Delta(x_o, y_o) = f_{xx}(x_o, y_o) f_{yy}(x_o, y_o)) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2$$

(i) *Si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.*
(ii) *Si $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un máximo.*
(iii) *Si $\Delta(x_o, y_o) < 0$ entonces (x_o, y_o) es un punto de ensilladura.*
(iv) *Si $\Delta(x_o, y_o) = 0$, el criterio no decide nada.*

EJEMPLO 17.9.

(a) Sea

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Ya vimos que el gráfico de f es un paraboloide de revolución.Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Entonces

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0)) - (f_{xy}(0,0))^2 = 4 > 0.$$

Luego f alcanza un mínimo en $(0,0)$.

(b) Sea

$$f(x,y) = xy.$$

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (y,x).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Luego f posee un punto de ensilladura en $(0,0)$.

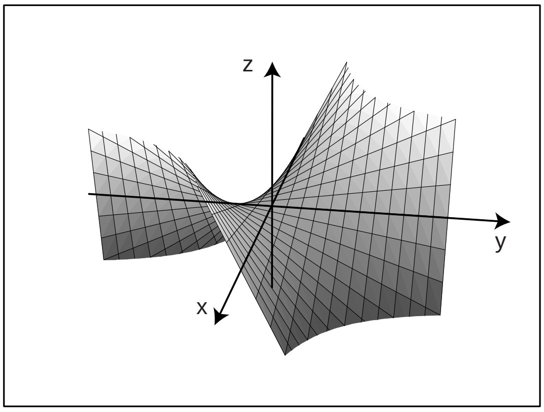


FIGURA 17.2. Gráfico de $f(x,y) = xy$.

(c) Sea

$$f(x,y) = 1 - y^2.$$

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (0, -2y).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $y = 0$. Luego todos los puntos de la forma $(x,0)$ son un puntos críticos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0) = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0.$$

El criterio del hessiano no es aplicable en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un máximo en cada punto de la forma $(x,0)$.

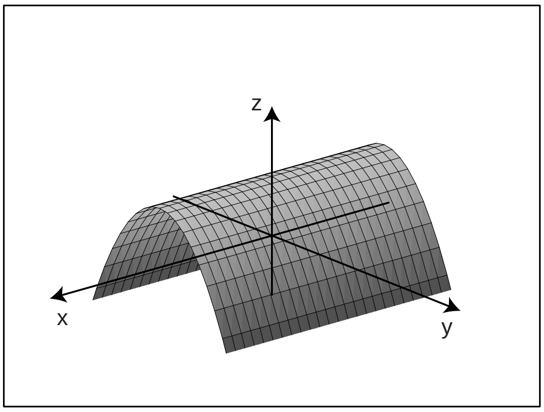


FIGURA 17.3. Gráfico de $f(x,y) = 1 - y^2$.

(d) Sea
$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

Tenemos que
$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

El criterio del hessiano no da información en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un punto de ensilladura en $(0,0)$

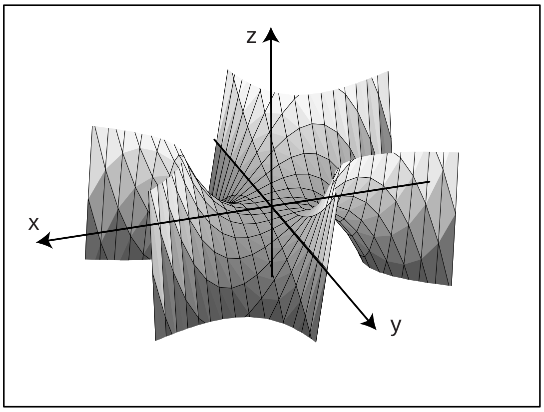


FIGURA 17.4. Gráfico de $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

EJEMPLO 17.10. Encontrar las dimensiones de una caja rectangular sin tapa de volumen máximo, si se conoce que el área superficial es igual a $144\,m^2$.

La función a maximizar es

$$v(x, y, z) = xyz.$$

Esta es una función de tres variables. Sin embargo el dato adicional nos va a permitir expresarla como una función de dos variables. Como $xy + 2xz + 2yz = 144$ se sigue que

$$z = \frac{144 - xy}{2x + 2y}$$

(si $x + y \neq 0$).

Sea

$$f(x, y) = xy\frac{144 - xy}{2x + 2y}.$$

Debemos hallar los máximos de esta función de dos variables.

Se puede probar que

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2y^2(144 - 2xy - x^2)}{(2x + 2y)^2}, \frac{2x^2(144 - 2xy - y^2)}{(2x + 2y)^2}\right).$$

Por lo tanto $(0, 0)$ es un punto crítico, pero carece de interés para resolver el problema planteado. Para buscar otro punto crítico resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 144 - 2xy - x^2 = 0, \\ 144 - 2xy - y^2 = 0. \end{cases}$$

De este sistema se deduce que $x^2 = y^2$. Luego $y = x$ ó $y = -x$. Pero como deben ser medidas positivas eliminamos $y = -x$ y sólo queda $y = x$.

Por lo tanto

$$3x^2 = 144.$$

De donde $x = 4\sqrt{3}$. Luego $y = 4\sqrt{3}$. Finalmente

$$z = \frac{144 - (4\sqrt{3})(4\sqrt{3})}{2(4\sqrt{3}) + 2(4\sqrt{3})} = \frac{144 - 16 \cdot 3}{16\sqrt{3}} = \frac{96}{16\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2.1. Lectura adicional: Justificación del criterio del hessiano.

DEMOSTRACIÓN. Solamente probaremos la parte (i), el resto queda como ejercicio. Es decir, probaremos que: Si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.

Usando argumentos algebraicos se puede probar (ver [**8**]) que si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces

$$h_1^2 f_{xx}(x_o, y_o) + 2h_1h_2 f_{xy}(x_o, y_o) + h_2^2 f_{yy}(x_o, y_o) \geq 0. \tag{17.1}$$

Como (x_o, y_o) es un punto crítico tenemos que $\nabla f(x_o, y_o) = \vec{0}$ y por lo tanto

$$f_x(x_o, y_o) = f_y(x_o, y_o) = 0.$$

Usando la fórmula (16.3) de los resultados de Taylor sigue que si $r > 0$ es tal que

$$B((x_o, y_o), r) \subset D, \qquad \|(h_1, h_2)\| < r$$

entonces existe un vector (c, d) que está en el segmento que une (x_o, y_o) y $(x_o + h_1, y_o + h_2)$ tal que

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) = f(x_o, y_o) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(c, d) + 2h_1h_2 f_{xy}(c, d) + h_2^2 f_{yy}(c, d)\right).$$

Por hipótesis las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Luego para $\|(h_1, h_2)\|$ pequeño tenemos que

$$h_1^2 f_{xx}(c, d) + 2h_1h_2 f_{xy}(c, d) + h_2^2 f_{yy}(c, d)$$

y

$$h_1^2 f_{xx}(x_o, y_o) + 2h_1h_2 f_{xy}(x_o, y_o) + h_2^2 f_{yy}(x_o, y_o)$$

tienen el mismo signo.

Por la fórmula 17.1 tenemos que ambos son mayores o iguales que 0. De donde

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) \geq 0$$

para todo $(h, k) \in V$.

Por lo tanto en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.

□

OBSERVACIÓN 17.11. Usando resultados de álgebra lineal y el teorema de Taylor es posible establecer criterios análogos al anterior para funciones de tres o más variables.

3. Método de los multiplicadores de Lagrange.

3.1. Máximos y mínimos con restricciones. En los problemas de búsqueda de máximos y mínimos puede ocurrir que estos valores se alcancen en puntos interiores del dominio. En ese caso se hallan los puntos críticos usando las primeras derivadas (el gradiente), luego usando segundas derivadas (el hessiano) se trata de determinar cuáles son máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

Sin embargo, cuando el punto en el que se alcanza un máximo o un mínimo se encuentra en la frontera la situación es muy distinta. La determinación de esos puntos es un típico problema de multiplicadores de Lagrange.

Los griegos antiguos propusieron el problema de hallar la curva cerrada plana de longitud dada que encerrara mayor área. Este problema es llamado el problema isoperimétrico, y ellos fueron capaces de demostrar en una manera más o menos rigurosa que la respuesta correcta es: el círculo (para más información sobre este aspecto histórico ver Simmons, Differential Equations, pág 367).

Consideremos el siguiente problema: Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$, sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

Supongamos que $g(x, y) = 0$ define una curva C en el plano y que f alcanza un máximo (o un mínimo) en $(x_o, y_o) \in C$.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria diferenciable de una parte de C que contiene a (x_o, y_o). Sea $t_o \in (a, b)$ tal que $\alpha(t_o) = (x_o, y_o)$ entonces $f \circ \alpha$ tiene un máximo (o un mínimo) en t_o. Por lo tanto

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_o) = \langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = \langle \nabla f(x_o, y_o), \alpha'(t_o) \rangle.$$

Es decir, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\alpha'(t_o)$ son ortogonales.

Por otro lado, ya sabemos que $\nabla g(x_o, y_o)$ es ortogonal a C. Así que, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\nabla g(x_o, y_o)$ están en la misma recta. Esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Ejemplo 17.12. De todos los rectángulos de perímetro cuatro ¿Cuál tiene área máxima? Para resolver este problema tendremos que considerar las funciones

$$f(x, y) = xy,$$

$$g(x, y) = 2x + 2y - 4.$$

Entonces

$$\nabla f(x,y) = (y,x),$$

$$\nabla g(x,y) = (2,2).$$

Debemos hallar los puntos (x,y) tales que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Esto es, los puntos (x,y) tales que

$$(y,x) = \lambda(2,2).$$

Tenemos pues: $y = 2\lambda$, $x = 2\lambda$. Y por lo tanto $y = x$.

Pero

$$0 = g(x,y) = 2x + 2y - 4 = 2x + 2x - 4 = 4x - 4.$$

De donde

$$y = x = 1.$$

Así que de todos los rectángulos de perímetro cuatro el cuadrado (de lado uno) es el de mayor área.

3.2. La función de Lagrange.

Cuando hay una restricción: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pensemos ahora en el caso de hallar los máximos o los mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$.

Definimos la función de Lagrange como

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z).$$

Luego buscamos los puntos críticos de F. Entre estos puntos están los máximos y los mínimos de f sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$.

Cuando hay dos restricciones: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pensemos ahora en el caso de hallar los máximos o los mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

Definimos la función de Lagrange como

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z).$$

Luego buscamos los puntos críticos de F. Entre estos puntos están los máximos y los mínimos de f sujeta a las restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

EJEMPLO 17.13. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeta a las condiciones $x^2 + y^2 = 2$, $x + z = 1$.

Sean

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 2, \\ g_2(x,y,z) &= x + z - 1. \end{aligned}$$

La función de Lagrange es

$$F(x,y,z) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1).$$

Tenemos que

$$\nabla F(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(1,0,1).$$

Debemos buscar los puntos en los que $\nabla F(x,y,z) = (0,0,0)$.

Por lo tanto debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1,1,1) + \lambda_1(2x,2y,0) + \lambda_2(1,0,1) = (0,0,0), \\ x^2 + y^2 = 2, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 y = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Así que

$$\lambda_2 = -1, \quad 2\lambda_1 x = 0 \quad \text{y} \quad 2\lambda_1 y = -1.$$

De donde $\lambda_1 \neq 0$. Y por lo tanto $x = 0$, $z = 1$.

Se sigue que $y = \sqrt{2}$ ó $y = -\sqrt{2}$.

Tenemos pues que $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ son los puntos a considerar.

Sustituyendo en la fórmula para f observamos que el primero es un máximo y el segundo es un mínimo.

3.3. Lectura adicional: Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

En general vale el siguiente resultado.

Teorema 17.14 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange con una restricción).
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto y sea* $g : D \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$*.*
Sea S *la superficie definida implícitamente por la ecuación* $g(\vec{x}) = 0$*, es decir,*

$$S = \{\vec{x} \in D : g(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, si* $f|_S$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\vec{x_o}$ *entonces existe constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda \nabla g(\vec{x_o}).$$

Teorema 17.15 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones).
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto y sea* $g : D \to \mathbb{R}^2$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que para* $g = (g_1, g_2)$ *los vectores* $\nabla g_1(\vec{x}), \nabla g_2(\vec{x})$ *son linealmente independientes para todo* $\vec{x} \in D$*.*
Sea C *la curva definida implícitamente por las ecuaciones* $g_1(\vec{x}) = 0$*,* $g_2(\vec{x}) = 0$*, es decir,*

$$C = \{\vec{x} \in D : g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, si* $f|_C$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\vec{x_o}$ *entonces existen constantes* λ_1*,* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_o}).$$

Idea de la demostración en el caso de dos restricciones.

Sea $\vec{x_o} \in C$ tal que f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$. Usando la independencia lineal de los gradientes, se puede probar que existe una parametrización derivable de la curva C alrededor de $\vec{x_o}$, es decir, existen un intervalo abierto I, una función derivable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t_o) = \vec{x_o}$ para algún $t_o \in I$ y la intersección de C con un entorno de $\vec{x_o}$ es $\alpha(I)$.

Entonces el campo escalar ψ, definido en un entorno de 0 por

$$\psi(t) = f(\alpha(t_o + t))$$

alcanza un máximo o un mínimo en 0. Por lo tanto $\psi'(0) = 0$, de donde sigue que

$$\langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = 0,$$

es decir, el vector $\nabla f(\alpha(t_o)) = \nabla f(\vec{x_o})$ es ortogonal al espacio (recta) tangente a S en $\vec{x_o}$. Por lo tanto $\nabla f(\vec{x_o})$ está en el subespacio generado por $\nabla g_1(\vec{x_o})$ y $\nabla g_2(\vec{x_o})$.

□

3.4. Lectura adicional: Caso en el que el método de Lagrange no es aplicable. Si ∇g_1 y ∇g_2 son linealmente dependientes el método de Lagrange puede fallar, tal como lo ilustra el ejemplo que desarrollaremos a continuación.

Supongamos que intentamos la aplicación del método de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ en la curva de intersección de las dos superficies $z = 0$, $z^2 - (y-1)^3 = 0$.

Sean

$$g_1(x,y,z) = z,$$
$$g_2(x,y,z) = z^2 - (y-1)^3.$$

Las dos superficies, un plano y un cilindro, se cortan a lo largo de la recta C dibujada en la figura.

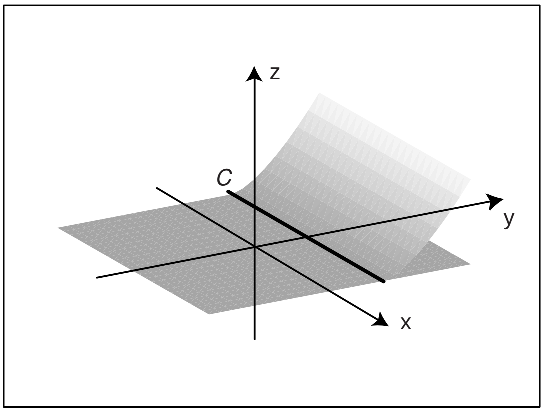


Figura 17.5.

El problema tiene evidentemente una solución, debido a que $f(x,y,z)$ representa la distancia del punto (x,y,z) al eje z y esta distancia es un mínimo sobre C cuando el punto es $\vec{x_0} = (0,1,0)$.

Sin embargo, en este punto los vectores gradientes son

$$\nabla g_1(\vec{x_0}) = (0,0,1),$$
$$\nabla g_2(\vec{x_0}) = (0,0,0),$$
$$\nabla f(\vec{x_0}) = (0,2,0).$$

y está claro que no existen escalares λ_1 y λ_2 que satisfagan la ecuación

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_0}).$$

Ejercicios.
Máximos y mínimos.

(1) Hallar los puntos críticos de las superficies que tienen las ecuaciones cartesianas que se dan

(a) $z = x^2 + (y-1)^2$.

(b) $z = x^2 - (y-1)^2$.

(c) $z = 1 + x^2 - y^2$.

(d) $z = (x - y + 1)^2$.

(e) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.

(f) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

(g) $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

(h) $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

(i) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

(j) $z = \operatorname{sen} x \cosh y$.

(k) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

(l) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

(m) $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$, para $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

(n) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\dfrac{y}{x}$, para $x > 0$.

(o) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

(2) Sea
$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

(a) Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = mx$ la función tiene un mínimo en $(0,0)$,

(b) Demostrar que f no tiene mínimo relativo en ningún entorno bidimensional del origen.

(c) Hacer un dibujo indicando el conjunto de puntos (x,y) en los que $f(x,y) > 0$ y el conjunto de puntos en los que $f(x,y) < 0$.

(3) Sea
$$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3).$$

(a) Trazar una figura indicando el conjunto de puntos (x, y) en los que $f(x, y) \geq 0$.

(b) Hallar todos los puntos (x, y) del plano en los que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$
Indicación: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ contiene $(3 - y)$ como factor.

(c) Diga cuáles puntos críticos son máximos relativos, cuáles son máximos relativos y cuáles no son ni una cosa ni la otra. Razone sus respuestas.

(d) Diga si f tiene un máximo absoluto o un máximo absoluto en todo el plano. Razone su respuestas.

(4) Determinar todos los valores extremos (absolutos y relativos) y los puntos de ensilladura para la función
$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$
en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(5) Hallar los valores extremos de $z = xy$ con la condición $x + y = 1$.

(6) Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

(7) Supongamos que a y b son números positivos fijos.

(a) Hallar los valores extremos de $z = x/a + y/b$ con la condición $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Hallar los valores extremos de $z = x^2 + y^2$ con la condición $x/a + y/b = 1$.

En cada caso interpretar geométricamente el problema.

(8) Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

(9) Hallar los valores extremos del campo escalar $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(10) Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

(11) Hallar la mínima distancia desde el punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

Parte 6

Cálculo Integral en Varias Variables.

CAPÍTULO 18

Integrales dobles.

Integrales dobles de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a polares. Aplicación a cálculo de áreas. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

1. El caso de una dimensión.

En esta sección recordaremos algunos resultados y definiciones relacionados con la integral de Riemann en una dimensión.

El enfoque usual de la integral de Riemann, es como sigue.

Definición 18.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden ser numerados como $x_0, x_1, \dots, x_k$, de forma tal que el conjunto quede ordenado de la siguiente manera

$$a = x_o < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Al hablar de una partición siempre supondremos que está ordenada de la forma anterior.

Definición 18.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{x_o, x_1, \dots, x_k\}$ una partición del intervalo $[a, b]$.

Para $1 \leq i \leq n$, sean

$$m_i = \inf\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.$$

La *suma inferior* de f correspondiente a P, se denotará por $L(f, P)$ y es

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

La *suma superior* de f correspondiente a P, se denotará por $U(f, P)$ y es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Es importante notar que la hipótesis f acotada es esencial para poder garantizar que tanto M_i como m_i están definidos. También es necesario definirlos como supremo e ínfimo y no como máximos y mínimos, ya que f no se supone continua.

El siguiente dibujo nos ilustra la suma superior para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 10]$, con la partición $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

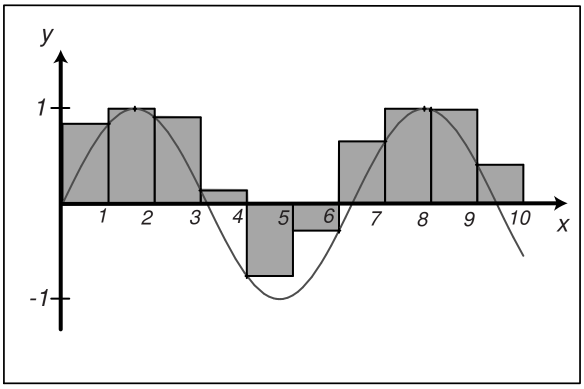


FIGURA 18.1. Suma superior para $f(x) = \operatorname{sen} x$

El siguiente dibujo nos ilustra la suma inferior para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el mismo intervalo $[0, 10]$, con la misma partición $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

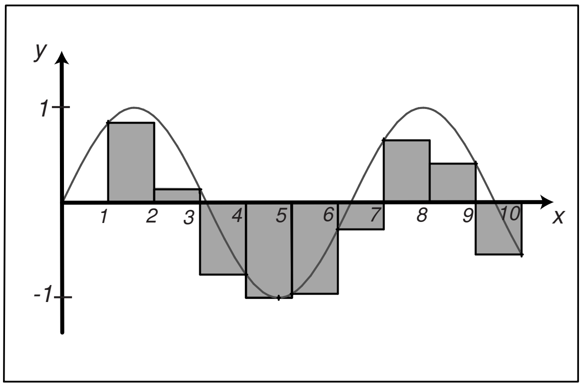


FIGURA 18.2. Suma inferior para $f(x) = \operatorname{sen} x$

Es importante notar que cada una de estas sumas representa el área algebraica de los rectángulos sombreados (área algebraica se refiere a lo siguiente: si el rectángulo está por encima del eje x, el área se toma como positiva, si está por debajo, se toma negativa).

Definición 18.3. Una función acotada f definida en $[a, b]$ es *integrable Riemann* o *integrable* sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de integral de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Si la función f es no negativa, la integral de f sobre $[a, b]$ representa el área de la región plana limitada por el gráfico de f, el eje x y las verticales $x = a$ y $x = b$.

Tenemos que si f es continua en $[a, b]$, salvo en una cantidad finita de puntos, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

Además, para funciones continuas tenemos lo siguiente.

Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, la norma de P se define por

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}.$$

Teorema 18.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \ - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots x_k\}$ de $[a, b]$ tal que $|P| < \delta$ y para cualquier conjunto de puntos $\{c_i\}$ tales que $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

El resultado anterior se suele expresar de la siguiente manera:

Si f es continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Las sumas que aparecen en la fórmula anterior se conocen con el nombre de *sumas de Riemann de f*.

Es muy importante recordar el siguiente resultado, que establece una conexión entre el cálculo diferencial y el cálculo integral, y que es sumamente útil en el momento de calcular integrales.

Teorema 18.5 (Teorema fundamental del cálculo). *Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

2. Integrales dobles sobre rectángulos.

Definición 18.6. Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo contenido en $\mathbb{R}^2$. Sea P una colección de subrectángulos de Q. Se dice que P es una *partición* de Q si existen una partición $P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\}$ de $[a,b]$ y una partición $P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$ de $[c,d]$ tales que

$$P = \{\, [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] : 1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2\}.$$

El par (P_1, P_2) lo usaremos para denotar a P.

Notar que si P_1 divide el intervalo $[a,b]$ en N_1 intervalos y P_2 divide el intervalo $[c,d]$ en N_2 intervalos entonces P contiene $N_1 \cdot N_2$ subrectángulos.

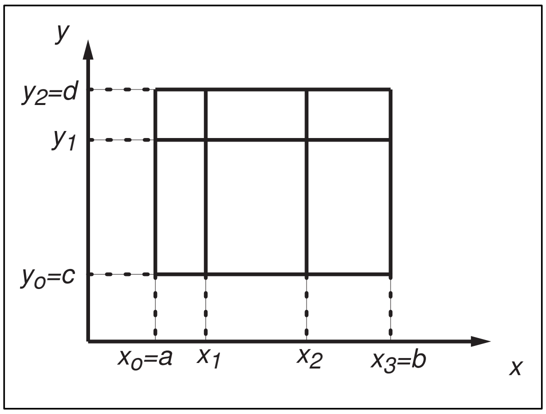


Figura 18.3. Partición de $[a,b] \times [c,d]$

Consideremos ahora una función acotada f definida en el rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$. Sea $P = (P_1, P_2)$ una partición de Q donde

$$P_1 = \{x_0, \dots, x_{N_1}\} \qquad P_2 = \{y_0, \dots, y_{N_2}\}$$

son particiones de $[a,b]$ y $[c,d]$ respectivamente.

Para $1 \leq i \leq N_1$ y $1 \leq j \leq N_2$, sean

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) :\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) :\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}.$$

La *suma inferior* de f correspondiente a P, se denotará por $L(f,P)$ y es

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La *suma superior* de f correspondiente a P, se denotará por $U(f,P)$ y es

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Es importante notar que la hipótesis f acotada es esencial para poder garantizar que tanto M_{ij} como m_i están definidos.

Definición 18.7. Una función acotada f definida en Q es *integrable Riemann* o *integrable* sobre Q si

$$\sup\{L(f,P) :\ P \text{ es una partición de } Q\} = \inf\{U(f,P) :\ P \text{ es una partición de } Q\}.$$

Definición 18.8. En caso de que f sea integrable el número común de la definición anterior recibe el nombre de *integral doble* de f sobre Q y se denota por

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy,$$

o simplemente por

$$\iint\limits_Q f.$$

Al igual que en el caso unidimensional, tenemos que toda función continua en un rectángulo es integrable. Más generalmente se cumple lo siguiente: si f es acotada en un rectángulo y continua, salvo en un conjunto de "área nula", entonces f es integrable sobre el rectángulo (los segmentos y las curvas lisas son ejemplos de conjuntos de área nula).

También se cumple el siguiente resultado.

Teorema 18.9. *Sea $Q \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, sea $f : Q \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $P = (Q_{ij}) = (P_1, P_2)$ una partición de Q. Si $c_{ij} \in Q_{ij}$, entonces*

$$\iint_Q f dV = \lim_{|P1|\to 0,\, |P_2|\to 0} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} f(c_{ij}) \operatorname{Area}(Q_{ij}).$$

2.1. Interpretación geométrica de la integral doble.

Sea f una función continua y no negativa definida en el rectángulo Q.

Cada sumando de la forma

$$M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

que aparece en la suma superior $U(f, P)$ es el volumen de un paralelepípedo con base el rectángulo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y altura M_{ij}. Además, por definición, M_{ij} es el supremo de f en el rectángulo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

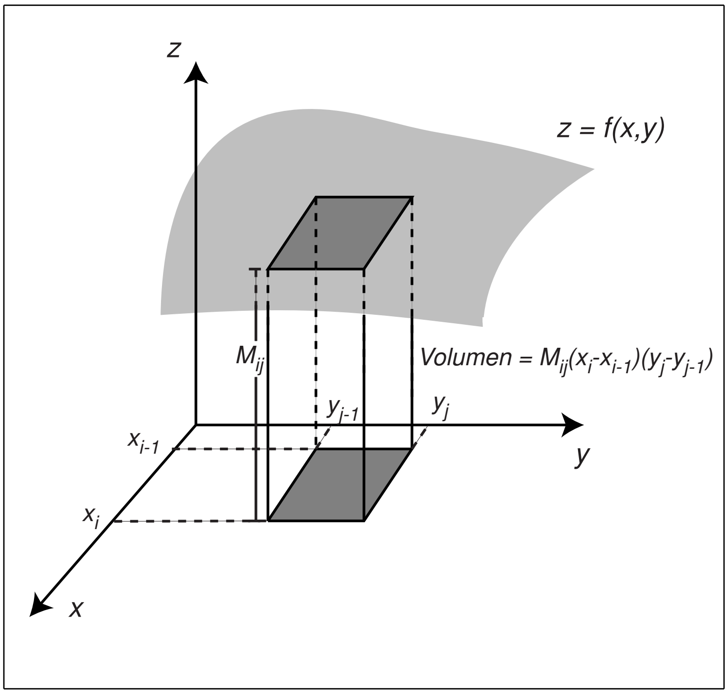


Figura 18.4.

Por lo tanto, la suma superior $U(f, P)$ es igual al volumen de un sólido, formado por paralelepípedos cuyas bases son los rectángulos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y cuyas alturas son M_{ij}, $i = 1, \ldots, N_1$, $j = 1, \ldots, N_2$.

De lo anterior concluimos que la suma superior es una aproximación por exceso del volumen del sólido dado por $0 \le z \le f(x, y)$, $(x, y) \in Q$.

De forma análoga tenemos que la suma inferior $L(f, P)$ es una aproximación por defecto del volumen del mismo del sólido $0 \leq z \leq f(x, y)$, $(x, y) \in Q$.

Por otra parte, por ser f integrable sobre Q, tenemos que $\iint\limits_Q f$ es el único número real que está entre $U(f, P)$ y $L(f, P)$ para toda partición P de Q.

Luego, para una función continua y no negativa f, tenemos que

$$\iint\limits_Q f(x, y)\, dxdy$$

es igual al volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\,\}.$$

2.2. Cálculo de la integral doble mediante integración iterada.

Sea $f : Q \to \mathbb{R}$ continua y no negativa.

El volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\,\},$$

lo podemos calcular integrando el área de su sección transversal. En la figura

$$A(x_o) = \int_c^d f(x_o, y)\, dy.$$

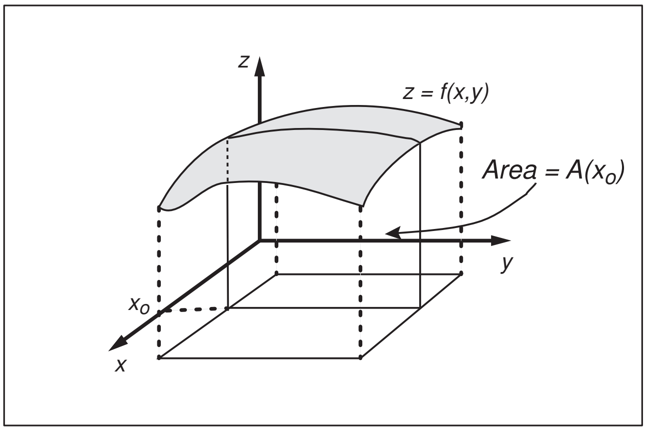


FIGURA 18.5.

De manera que si $Q = [a, b] \times [c, d]$, tenemos que

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx.$$

De manera análoga podemos ver que también

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy.$$

En general, si $Q = [a,b] \times [c,d]$ y f es una función continua entonces

$$\boxed{\iint\limits_{Q} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right)\,dy.}$$

Observación 18.10. El resultado anterior se conoce como Teorema de Fubini . El resultado se cumple bajo ciertas condiciones más generales que las que hemos considerado y su justificación rigurosa está fuera del alcance de estas notas. Para más detalles ver [**9**].

Ejemplo 18.11. Calcular

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y)\,dxdy.$$

$$\int_0^1 (x^2+y)\,dx = \frac{x^3}{3} + yx \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + y,$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y)\;dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy \\
&= \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

A manera de ejercicio, calcular la integral iterada en el otro orden y verificar que se obtiene el mismo resultado.

2.3. Propiedades de las integrales dobles en rectángulos.

Sea Q un rectángulo contenido en $\mathbb{R}^2$ entonces la integral sobre Q tiene las siguientes propiedades

(1) Linealidad: Si f y g son dos funciones integrables sobre Q, si c_1, c_2 son números reales, entonces $c_1 f + c_2 g$ es integrable sobre Q y

$$\iint\limits_{Q} (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))\; dxdy = c_1 \iint\limits_{Q} f(x,y)\, dxdy + c_2 \iint\limits_{Q} g(x,y)\, dxdy.$$

(2) Si f es una función integrable sobre Q y se tiene que $Q = Q_1 \cup Q_2$, donde Q_1 y Q_2 son rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenados, tales que $Q_1 \cap Q_2$ es un segmento de recta, entonces f es integrable sobre cada Q_i, $i = 1, 2$ y

$$\iint\limits_{Q_1 \cup Q_2} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{Q_1} f(x,y)\, dxdy + \iint\limits_{Q_2} f(x,y)\, dxdy.$$

(3) Monotonía: Si f y g son funciones integrables sobre Q y $g(x,y) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Q$, entonces

$$\iint\limits_{Q} g(x,y)\, dxdy \leq \iint\limits_{Q} f(x,y)\, dxdy.$$

En particular, si $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in Q$, entonces

$$\iint\limits_{Q} f(x,y)\, dxdy \geq 0.$$

3. Integrales dobles sobre conjuntos más generales.

En esta sección extenderemos el concepto de integral doble a conjuntos más generales que rectángulos y veremos cómo calcularlas.

Supongamos que tenemos una región acotada $R \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : R \to \mathbb{R}^2$.

Sea $Q \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo tal que $R \subset Q$, definimos

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{Q} \tilde{f}(x,y)\, dxdy,$$

donde

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in R, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in Q \setminus R. \end{cases}$$

A continuación veremos cómo calcular esta integral, dependiendo del tipo de región.

DEFINICIÓN 18.12. Una *región del tipo I* es una región de la forma

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a,b]$, tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

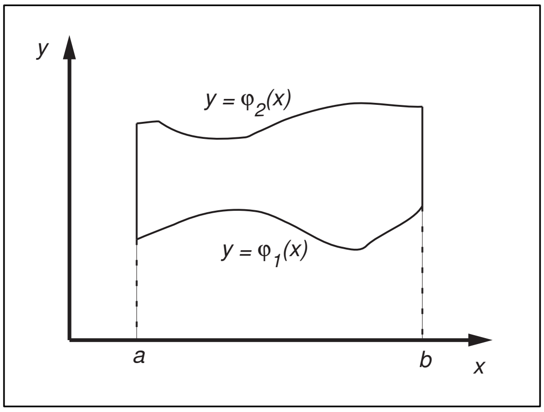


FIGURA 18.6. Región tipo I

Em este caso

$$\iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

DEFINICIÓN 18.13. Una *región del tipo II* es una región de la forma

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c,d]$ tales que $\psi_1 \leq \psi_2$.

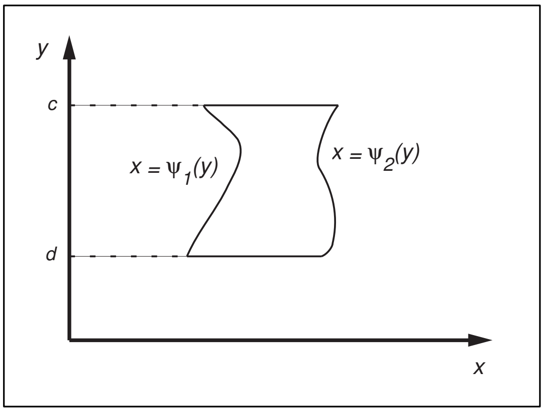


Figura 18.7. Región tipo II

En este caso

$$\int\limits_{R_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Ejemplo 18.14. Sea R la región representada en la siguiente figura. Veamos cómo escribir

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dxdy$$

como una integral iterada.

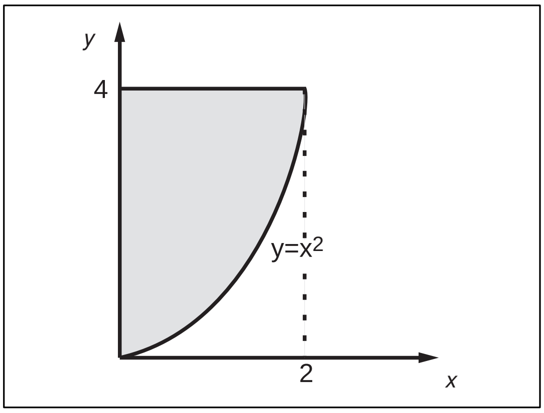


Figura 18.8.

La región de integración está dada por $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 4$, por lo tanto,

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^4 f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Notemos que otra manera de describir la región es $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, por lo tanto también tenemos que

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Finalmente, para calcular una integral sobre una región arbitraria, descomponemos la región como una unión de regiones tipo I y tipo II y sumamos las integrales sobre cada una de estas regiones.

Observación 18.15. La siguiente notación es muy utilizada. En vez de escribir

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

se suele escribir

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy.$$

De igual manera se usa la notación análoga en el otro orden. Así que las expresiones

$$\int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy$$

y

$$\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

tienen exactamente el mismo significado.

Ejemplo 18.16. Sea R la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Escribir

$$\iint_R f\, dxdy$$

en términos de integrales iteradas.

R es la unión de cuatro regiones tipo I, que son

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\},$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\},$$
$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq -\sqrt{1-x^2}\},$$
$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

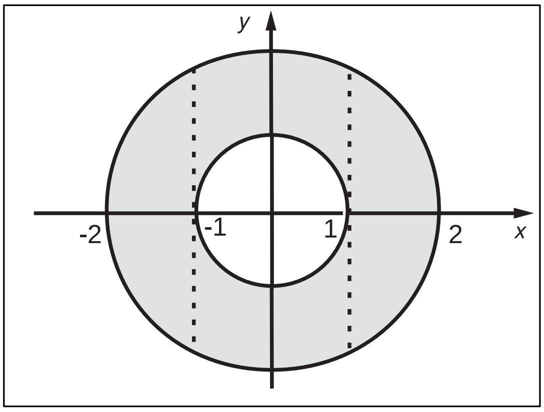


FIGURA 18.9.

Tenemos que

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

EJEMPLO 18.17. Considerar la siguiente integral iterada

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)\,dx.$$

Identificar la región de integración, representarla gráficamente e intercambiar el orden de integración.

Tenemos que la región de integración está dada por

$$1 \leq y \leq e \qquad 0 \leq x \leq \ln y$$

y gráficamente corresponde con la región sombreada en la siguiente figura.

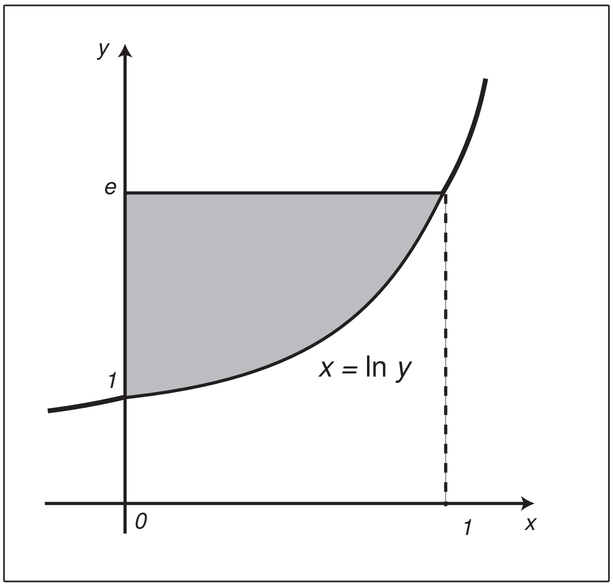


FIGURA 18.10. Región de integración

Para cambiar el orden de integración, notemos que la curva $x = \ln y$ es la misma curva que $y = e^x$, por lo tanto la región también la podemos expresar de la siguiente manera

$$0 \leq x \leq 1 \qquad e^x \leq y \leq e.$$

Al cambiar el orden de integración obtenemos

$$\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} f(x,y)\, dy.$$

EJEMPLO 18.18. Sea R la región acotada del plano limitada por el gráfico de la función $y = |x|$ y la recta $3y = x + 4$. Representar gráficamente R y expresar $\iint\limits_R f(x,y)\, dxdy$ en términos de integrales iteradas en ambos órdenes.

Para representar gráficamente la región trazamos el gráfico de la función $y = |x|$ y de la recta $3y = x+4$. Los puntos de corte de las curvas son $(-1, 1)$ y $(2, 2)$. La región corresponde con el área sombreada en la siguiente figura.

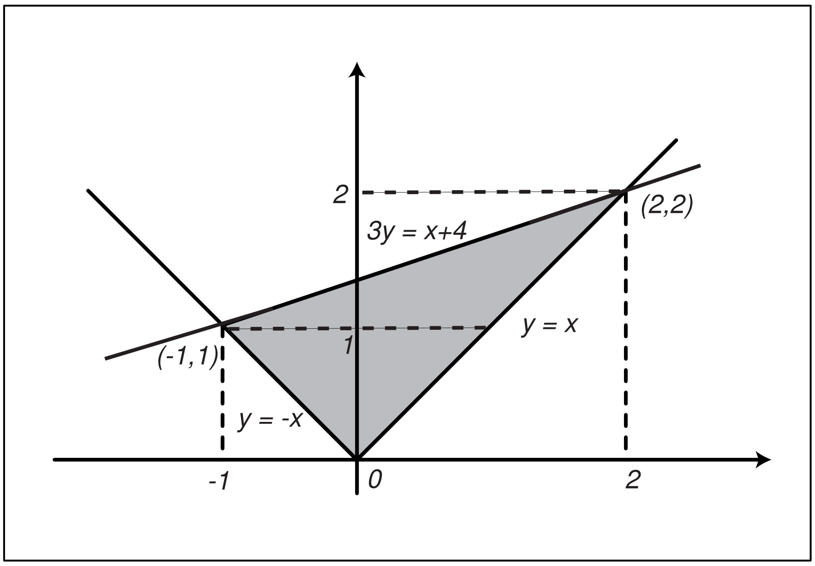


Figura 18.11. Región de integración

La región la podemos escribir de la siguiente manera

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 0, -x\le y\le (x{+}4)/3\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2, x\le y\le (x{+}4)/3\}$,

por lo tanto $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$ es igual a

$$\int_{-1}^{0} dx\int_{-x}^{(x+4)/3} f(x,y)\,dy \;+\; \int_{0}^{2} dx\int_{x}^{(x+4)/3} f(x,y)\,dy.$$

Procedamos ahora con el otro orden. La región también la podemos escribir de la siguiente manera

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ \ -y\le x\le y\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 2,\ \ 3y-4\le x\le y\},$$

por lo tanto la integral también es igual a

$$\int_{0}^{1} dy\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx \;+\; \int_{1}^{2} dy\int_{3y-4}^{y} f(x,y)\,dx.$$

Observación 18.19. Para regiones generales valen resultados análogos a los enunciados en la Subsección 2.3.

3.1. Lectura adicional: justificación de la definición de integral doble sobre regiones de tipo I y regiones de tipo II.

Sea R_1 la región de tipo I dada por

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Si

$$c = \inf\{\varphi_1(x) : a \leq x \leq b\}, \qquad d = \sup\{\varphi_2(x) : a \leq x \leq b\}$$

entonces $R_1 \subset [a, b] \times [c, d]$.

Luego

$$\iint\limits_{R_1} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \tilde{f}(x, y)\, dxdy,$$

donde

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in R_1, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus R_1. \end{cases}$$

Por ser f continua tenemos que, para cada $x \in [a, b]$, la función $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$ es integrable sobre $[c, d]$ y de la definición de $\tilde{f}$ sigue que

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Por el Teorema de Fubini

$$\iint\limits_{R_1} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Para regiones de tipo II se hace un razonamiento análogo.

4. Cálculo de áreas y volúmenes usando integrales dobles.

Sea R una región contenida en $\mathbb{R}^2$ que es unión finita de regiones de tipo I y de tipo II. Sea $f : R \to \mathbb{R}$, si $f \geq 0$ entonces

$$\iint\limits_{R} f$$

es el volumen de la región limitada por el gráfico de f y el plano xy, es decir el volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\,\}.$$

Si tomamos $f \equiv 1$ entonces el volumen de S es igual al área de R, por lo tanto el área de una región R del plano es igual a

$$\iint\limits_R 1\, dx\, dy.$$

Ejemplo 18.20. Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El elipsoide es la región comprendida entre los gráficos de las funciones

$$f_1(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \qquad \text{y} \qquad f_2(x,y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

para $(x,y) \in S$, donde

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto, denotando por V al volumen del sólido, tenemos que

$$V = \iint\limits_S (f_1(x,y) - f_2(x,y))\, dxdy.$$

Tomado en cuenta las simetrías del sólido tenemos que

$$V = 8c \iint\limits_{S_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy,$$

donde

$$S_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto

$$V = 8c \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy \right) dx.$$

Dejamos al lector verificar que la integral anterior es igual a

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

(ver Ejercicio 9).

Luego

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

5. Cambio de coordenadas cartesianas a polares.

Recordemos que el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tiene coordenadas polares (r, θ) si

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.$$

En este caso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = y/x.$$

Es usual suponer $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Más generalmente, se restringe θ a un intervalo semiabierto de longitud 2π.

Explícitamente

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

donde $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Teorema 18.21 (Cambio de variables a Coordenadas Polares).
Sea $B \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ un conjunto acotado y sea

$$T_P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

la transformación de coordenadas polares.

Sea $T_P(B)$ la imagen de B por T_P y sea $f : T_P(B) \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces

$$\iint\limits_{T_P(B)} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{B} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, drd\theta.$$

Observación 18.22. El factor r que aparece en la integral de la derecha es $\det T_P'(r, \theta)$. En efecto, la matriz jacobiana para el cambio a coordenadas polares es:

$$T_P'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\det T_P'(r, \theta) = r.$$

Ejemplo 18.23. Calcular

$$\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$$

donde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Sean $T_P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $B = [1,2]\times[0,2\pi]$, entonces

$$T_P(B) = R.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy &= \iint\limits_B \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2}\ r\, drd\theta \\
&= \iint\limits_B r^2\, drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2\, dr = 2\pi\int_1^2 r^2\, dr \\
&= 2\pi \frac{r^3}{3}\bigg|_{r=1}^{r=2} = \frac{2\pi}{3}(8-1) \\
&= \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 18.24. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2+y^2$, el cilindro $x^2+y^2 = 1$ y el plano xy.

Debemos calcular

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy,$$

donde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. ¿Por qué?

Sean $T_P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ y $B = [0,1]\times[0,2\pi]$, entonces

$$T_P(B) = D.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dxdy &= \iint\limits_{B} \left((r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2\right) \ r\,drd\theta \\
&= \iint\limits_{B} r^3\,drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = 2\pi\int_0^1 r^3\,dr \\
&= 2\pi\frac{r^4}{4}\bigg|_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

A continuación damos el resultado general para el cambio de variables en integrales dobles.

Teorema 18.25 (Cambio de variables para integrales dobles).

Sea R_{uv} un subconjunto acotado del plano. Sean $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ funciones con derivadas parciales continuas y sea T la transformación definida por

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

Sea $R_{xy} = T(R_{uv})$ y sea $f : R_{xy} \to \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$$

Observación 18.26. El factor $|J(u,v)|$ que aparece en la integral de la derecha es el módulo de $J(u,v)$. Donde $J(u,v)$ es el siguiente determinante

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Es bueno saber que $J(u,v)$ también se designa con

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

6. Lectura adicional: Justificación de la fórmula del cambio de variables para coordenadas polares.

A continuación vamos a justificar, de manera intuitiva y usando argumentos geométricos sencillos, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares.

Tal como antes sea $T_P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Es un hecho básico de geometría (ver figura) que si $B_o = [0, q] \times [0, \alpha]$, donde $\alpha \in [0, \pi/2]$ y $q \geq 0$, entonces

$$\mathrm{Area}\,(T_P(B_o)) = q^2\,\frac{\alpha}{2}.$$

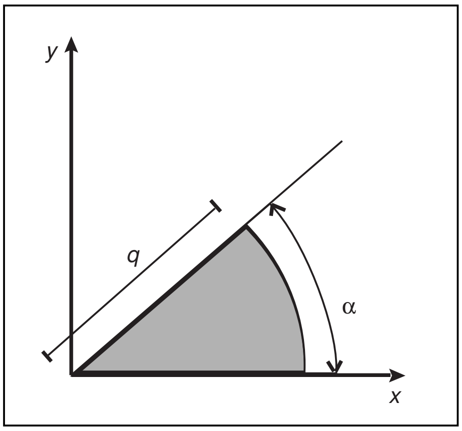


FIGURA 18.12. $T_P(B_o)$

PROPOSICIÓN 18.27. *Si*

$$B_1 = [q_1, q_2] \times [\alpha_1, \alpha_2],$$

donde $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2\pi$ *y* $0 \leq q_1 < q_2$, *entonces*

$$\mathrm{Area}\,(T_P(B_1)) = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Del comentario previo a esta Proposición podemos concluir que (ver figura)

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}\,(T_P(B_1)) &= q_2^2\,\frac{\alpha_2}{2} - q_2^2\,\frac{\alpha_1}{2} - (q_1^2\,\frac{\alpha_2}{2} + q_1^2\,\frac{\alpha_1}{2})\\ &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(q_2 - q_1)(q_2 + q_1)}{2}.\end{aligned}$$

□

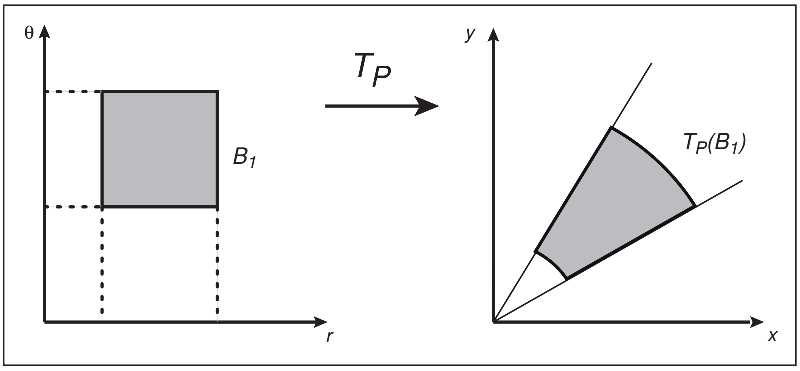


FIGURA 18.13. $T_P(B_1)$

Consideremos ahora una región B en el plano $r\theta$. Supongamos $B \subset [a,b] \times [\gamma, \delta]$ y sea $T_P(B)$ la imagen de B por T_P.

Sean $P_1 = \{r_o, r_1, \dots, r_{n_1}\}$ una partición de $[a,b]$ y $P_2 = \{\theta_o, \theta_1, \dots, \theta_{n_2}\}$ una partición de $[\gamma, \delta]$.

Sean $B_{ij} = [r_{i-1}, r_i] \times [\theta_{j-1}, \theta_j]$ y $d_{ij} \in B_{ij}$.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces basándonos en el Teorema 18.9 podemos justificar, de manera informal, la fórmula para el cambio de variables a coordenadas polares de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{T_P(B)} f(x,y)\,dxdy &= \lim_{(|P_1|,|P_2|)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij}))\text{Area}\,(T_p(B_{ij})) \\
&= \lim_{(|P_1|,|P_2|)\to(0,0)} \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} f(T_P(d_{ij}))\frac{r_i + r_{i-1}}{2}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= \iint\limits_{B} f(T_p(r,\theta))r\,drd\theta \\
&= \iint\limits_{B} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)r\,drd\theta.
\end{aligned}$$

7. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Lo haremos en dos partes.

PROPOSICIÓN 18.28.

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\,.$$

Demostración.

En este caso la región de integración es el primer cuadrante.

Aunque se trata de una región no acotada, se puede dar una versión del teorema del cambio de variables para coordenadas polares.

Aplicando este resultado se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

Pero

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = -\frac{1}{2}\, e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{1}{2}\,.$$

Luego

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

□

Proposición 18.29.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Demostración. Sea

$$a = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Por supuesto que

$$a = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy.$$

y así tenemos que

$$a^2 = a\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, a\, dy.$$

Pero

$$e^{-y^2}\, a = e^{-y^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx.$$

De donde

$$a^2 = a\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Usando la Proposición 18.28 tenemos que

$$a^2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Luego
$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$
$\square$

OBSERVACIÓN 18.30. Del cálculo anterior también se concluye que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Ejercicios.
Integrales dobles.

(1) Calcular las integrales iteradas que se indican, representar gráficamente la región de integración y describirla utilizando notación conjuntista.

(a) $\displaystyle\int_1^4 dy \int_2^5 (x^2 - y^2 + xy - 3)\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{-3}^2 (x^3 + 2x^2y - y^3 + xy)\,dy,$

(c) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy,$

(d) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy,$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^3 - xy)\,dy\right) dx,$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 - xy)\,dy\right) dx,$

(g) $\displaystyle\int_2^3 \left(\int_{1+y}^{\sqrt{y}} (x^2y + xy^2)\,dy\right) dx,$

(h) $\displaystyle\int_{-3}^3 dy \int_{-\sqrt{18-2y^2}}^{\sqrt{18-2y^2}} x\,dx,$

(i) $\displaystyle\int_{-3}^3 dx \int_{x^2}^{18-x^2} xy^3\,dy,$

(j) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{x^3}^{4x^3} \frac{1}{y}\,dy.$

(2) Calcular la integral doble indicada y representar gráficamente la región R.

(a) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\,dxdy, \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2\},$

(b) $\displaystyle\iint_R x \cos y\,dxdy, \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{\pi/2},\ 0 \le y \le x^2\},$

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\,dxdy, \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{3},\ 0 \le y \le x\},$

(d) $\displaystyle\iint_R \ln y\,dxdy, \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 3,\ 1 \le y \le x - 1\},$

(e) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{y^2}\, e^{(x/\sqrt{y})}\,dxdy, \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{2},\ x^2 \le y \le 2\}.$

(f) $\displaystyle\iint_R xy\,dxdy, \qquad$ R es la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$.

(3) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

(4) Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^3$.

(5) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = 0$, $z = x$, $y^2 = 2 - x$.

(6) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $x + y + z = 3$.

(7) Deducir la fórmula para el volumen de un cono recto de base circular, cuya base tiene radio R y cuya altura es h.

(8) En cada uno de los siguientes problemas calcular la integral iterada dada, expresándola primero como una integral doble y pasando luego a coordenadas polares. ¿Se simplifican los cálculos en todos los casos?

(a) $\displaystyle\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy,$

(d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dy \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dx,$

(e) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^x (x^2+y^2)\, dy\right) dx,$

(f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dx.$

(g) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\, y\, dx.$

(h) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\, y\, dx.$

(9) El propósito del siguiente ejercicio es calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

El primer paso es notar que el elipsoide es la región comprendida entre los gráficos de las funciones

$$f_1(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \qquad \text{y} \qquad f_2(x,y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

para $(x, y) \in S$, donde

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Por lo tanto, denotando por V al volumen del sólido, tenemos que

$$V = \iint\limits_S (f_1(x, y) - f_2(x, y))\, dxdy = 2c \iint\limits_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy.$$

(a) Introducir coordenadas polares generalizadas

$$T_{PG}(r, \theta) = (ar \cos \theta, br \operatorname{sen} \theta).$$

Demostrar que el determinante jacobiano de esta transformación es igual a

$$abr$$

y que

$$S = T_{PG}(B),$$

donde $B = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

(b) Utilizar la fórmula del cambio de variables para integrales dobles para concluir que

$$V = 2c \iint\limits_B abr\sqrt{1 - r^2}\, drd\theta.$$

(c) Finalmente, calcular la integral anterior para obtener

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

(10) Utilizar el cambio a coordenadas polares para hallar el volumen del sólido formado por los puntos que están por encima del cono $z = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(11) Utilizar el cambio a coordenadas polares para hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

CAPÍTULO 19

Integrales triples.

Integrales triples de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas. Aplicación a cálculo de volúmenes.

1. Definiciones y resultados básicos.

La integral triple se define de manera análoga a la doble.

Consideramos un paralelepípedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_2, b_3]$ contenido en $\mathbb{R}^3$ y una función $f : Q \to \mathbb{R}$.

Una partición $P = \{Q_{ijk}\}$ de Q estará dada por tres particiones P_1, P_2 y P_3 de $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ y $[a_2, b_3]$ respectivamente.

Las definiciones y los resultados son completamente análogos, cambiando de manera adecuada y donde corresponda, rectángulo por paralelepípedo.

De manera análoga al caso bi-dimensional, podemos calcular integrales triples sobre regiones generales.

Por ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \alpha_1(x, y) \leq z \leq \alpha_2(x, y)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a, b]$ siendo $\varphi_1 \leq \varphi_2$, α_1 y α_2 son funciones continuas con $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Si f es integrable en R entonces

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\alpha_1(x,y)}^{\alpha_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

Otro ejemplo, si

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq z \leq h_2(y),\ \beta_1(y, z) \leq x \leq \beta_2(y, z)\}$$

entonces

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dz \int_{\beta_1(y,z)}^{\beta_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

Una región arbitraria debe descomponerse en la unión de regiones análogas a las anteriores para poder así colocar los límites de integración.

Ejemplo 19.1. Sea R el sólido limitado por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$. Escribir

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

como una integral iterada.

La representación gráfica de R es la siguiente.

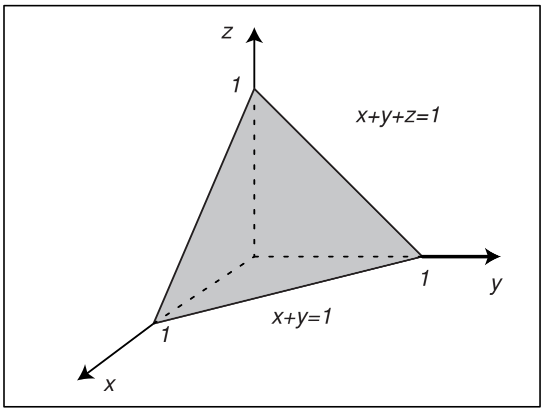


Figura 19.1. Sólido R

Tenemos que

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

Por lo tanto

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\ dz \right) dy \right) dx.$$

Observación 19.2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Entonces

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dxdydz$$

representa la masa de un sólido que ocupa la región R y cuya densidad en cada punto es f.

Si tomamos $f \equiv 1$ obtenemos que

$$\iiint\limits_R dxdydz$$

es igual al volumen de R.

2. Cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Recordemos que el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) si

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

es decir, representamos la primera y la segunda coordenada en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera.

En general se toma $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Además

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

Sea

$$T_C(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$$

la transformación de coordenadas cilíndricas, entonces su jacobiano es:

$$T_C'(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\det T_c'(r, \theta, z) = r$.

Del teorema general de cambio de variables obtenemos.

Teorema 19.3 (Cambio de variables a Coordenadas Cilíndricas).

Sean $B \subset \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$ *acotado,* $T_C(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ *y* $f : T_C(B) \to \mathbb{R}$ *continua y acotada. Entonces*

$$\iiint\limits_{T_C(B)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) r\, drd\theta dz.$$

Ejemplo 19.4. Sea S el sólido dado por $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Hallar

$$\iiint_S z dxdydz.$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\begin{aligned}\iiint_S z\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r rz\,dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\left.\frac{rz^2}{2}\right|_{z=0}^{z=r} \right) drd\theta = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^3}{2}\,drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. Cambio de coordenadas cartesianas a esféricas.

Recordemos que el punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas esféricas (ρ,θ,φ) si

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\varphi.$$

En general se toma

$$\rho \geq 0, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Además,

$$\rho^2 = x^2+y^2+z^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

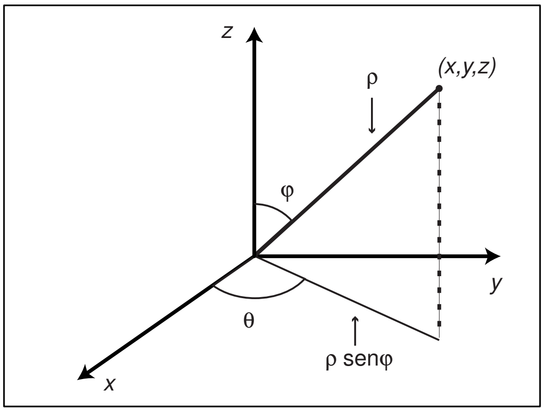


Figura 19.2. Coordenadas esféricas

Sea

$$T_E(\rho,\theta,\varphi) = (\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi).$$

El jacobiano para el cambio a coordenadas esféricas es:

$$T_E'(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

Luego $\det T_E'(\rho,\theta,\varphi) = -\rho^2\operatorname{sen}\varphi$. Y así

$$|\det T_E'(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\operatorname{sen}\varphi.$$

Teorema 19.5 (Cambio de variables a Coordenadas Esféricas).
Sean

$$B \subset \{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : \rho\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi\}$$

acotado, $T_E(\rho,\theta,\varphi) = (\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$ *y* $f : T_E(B)\to\mathbb{R}$ *continua y acotada, entonces*

$$\iiint\limits_{T_E(B)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{B} f(\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho d\theta d\varphi$$

Ejemplo 19.6. Sea D la esfera de radio a y centro $(0,0,0)$, hallar el volumen de D.

$$\begin{aligned} Vol(D) = \iiint\limits_{D} 1\,dxdydz &= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi\,d\theta d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}(-\cos\pi+\cos 0) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

4. Aplicación a cálculo de volúmenes.

Ejemplo 19.7. Calcular el volumen del sólido R limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

Ya en el ejemplo 19.1 vimos cómo colocar los límites de integración para la región R. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(R) &= \iiint_R dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 1\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dx,\end{aligned}$$

por otra parte

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = (1-x)y - \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=o}^{y=1-x} = (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2},$$

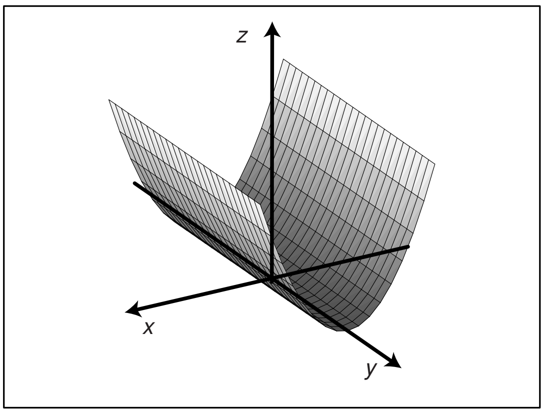
de donde

$$\operatorname{Vol}(R) = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x)^3}{3}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 19.8. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

$$z = x^2 \qquad \text{y} \qquad z = 4 - x^2 - y^2.$$

Veamos primero el gráfico de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.



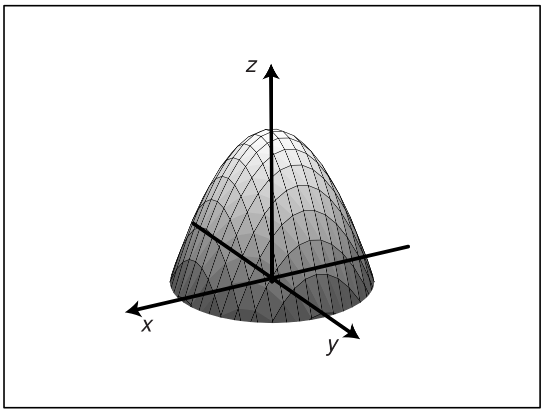


Figura 19.3. Gráfico de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

Al colocar las dos superficies juntas obtenemos lo siguiente

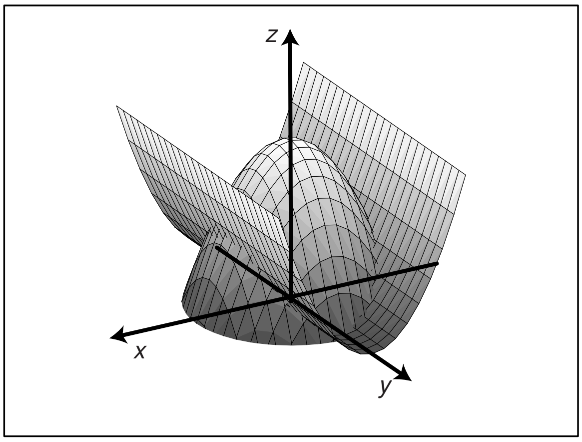


FIGURA 19.4.

De este gráfico ya podemos concluir que, en nuestra región, $x^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Nos falta hallar el conjunto donde varía (x, y). Para esto debemos hallar la intersección de las dos superficies y proyectar sobre el plano xy. En las siguientes figuras hemos ido rotando las superficies, de manera que en la última las vemos desde arriba; se observa que la intersección de las superficies proyecta una curva con forma de elipse, sobre el plano xy.

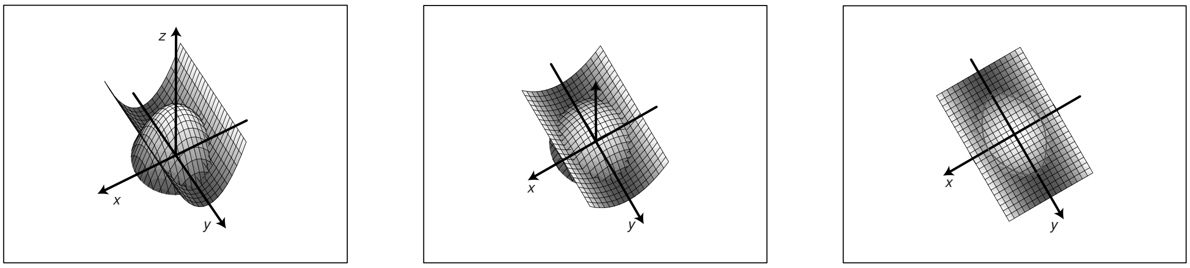


FIGURA 19.5. Intersección de las superficies $z = x^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

Para hallar la proyección de la intersección de las dos superficies sobre el plano xy igualamos las ecuaciones que definen ambas superficies y obtenemos

$$x^2 = 4 - x^2 - y^2,$$

es decir

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse, centrada en el origen y con semiejes de longitud $\sqrt{2}$ y 2 respectivamente.

La representación gráfica de esta elipse es la siguiente,

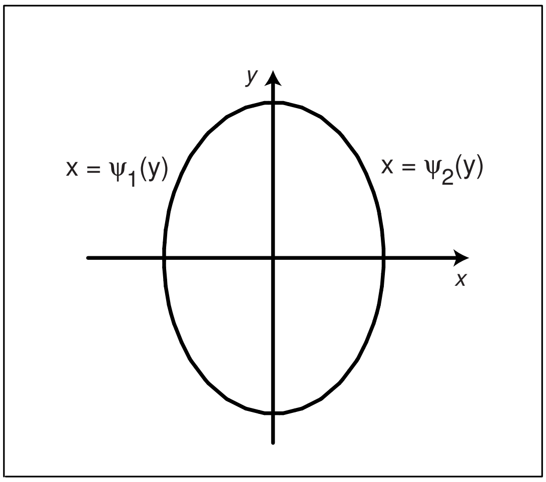


Figura 19.6. Elipse $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

donde

$$\psi_1(y) = -\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}, \qquad \psi_2(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto nuestro sólido está dado por

$$x^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,$$

$$-\frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{2}},$$

$$-2 \leq y \leq 2.$$

El volumen del sólido será igual a (los detalles de los cálculos se los dejamos al lector)

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}^{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2-y^2} dz \\
&= \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}^{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}} (4-2x^2-y^2)\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{2\sqrt{2}}{3}(4-y^2)^{3/2}\, dy = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{0}^{2} (4-y^2)^{3/2}\, dy \\
&= \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_{0}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_{0}^{\pi/2} (1+2\cos 2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} + \left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\operatorname{sen} 2\theta\right]_{0}^{\pi/2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 4\theta\, d\theta \\
&= 4\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 19.9. Calcular el volumen del sólido S que está encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

Este cono está dado por $\varphi = \pi/4$ y la ecuación de la esfera dada es

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2,$$

es decir tiene centro $(0, 0, a)$ y radio a.

Sea (x, y, z) un punto de la esfera, entonces

$$\begin{aligned}
a^2 &= x^2 + y^2 + (z-a)^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 \\
&= \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\varphi - 2a\rho\cos\varphi + a^2 \\
&= \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \rho^2\cos^2\varphi - 2a\rho\cos\varphi + a^2 \\
&= \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi - 2a\rho\cos\varphi + a^2 \\
&= \rho^2(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) - 2a\rho\cos\varphi + a^2 \\
&= \rho^2 - 2a\rho\cos\varphi + a^2.
\end{aligned}$$

Luego $\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$ y por lo tanto

$$\rho = 2a\cos\varphi.$$

Cómo los puntos de S están por encima del cono tenemos que $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ y cómo están dentro de la esfera tenemos que $0 \leq \rho \leq 2a\cos\varphi$.

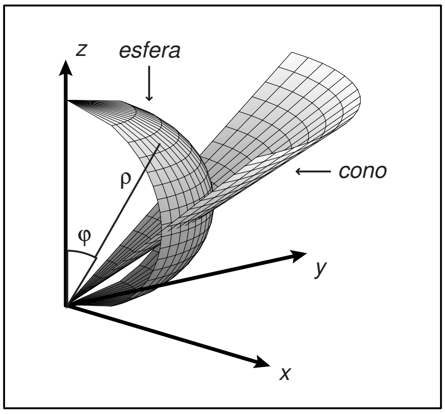


FIGURA 19.7. Corte de las superficies que limitan a S

Por lo tanto S está dado por $0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Utilizando el cambio a coordenadas esféricas obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(R) &= \iiint_S dxdydz \\
&= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \, d\rho d\theta \right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{8a^3}{3} \cos^3\varphi \, d\theta \right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi.
\end{aligned}$$

el resto de los cálculos se los dejamos al lector.

Ejercicios.
Integrales triples.

(1) Calcular las integrales iteradas que se indican, expresar la región de integración en notación conjuntista y dar una idea de cómo luce la región de integración en $\mathbb{R}^3$.

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x-y} x\,dz,$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-y^2} \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2y^2\sqrt{x}\,dz \right) dx \right) dy,$

(c) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} (x+y+z)\,dz,$

(2) Calcular

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz,$$

donde S está limitada por las superficies indicadas y f es la función dada.

(a) $z=0$, $y=0$, $y=x$, $x+y=2$, $x+y+z=3$; $f(x,y,z)=x$,

(b) $x=0$, $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$; $f(x,y,z)=y$,

(c) $x^2+z^2=4$, $y=0$, $y=4$; $f(x,y,z)=z$.

(d) $x^2+y^2+z^2=9$; $f(x,y,z)=z$.

(3) Expresar la integral iterada

$$\int_0^2 dz \int_0^z dx \int_0^x f(x,y,z)\,dy$$

en los otros cinco órdenes posibles.

(4) Calcular

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dxdydz,$$

donde

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 9\}.$$

(5) Calcular

$$\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\; dxdydz,$$

donde

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4,\;\; 0 \leq z \leq 3\}.$$

(6) $\star$ Calcular

$$\iiint\limits_S \sqrt{y^2+z^2}\; dxdydz,$$

donde

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 16,\;\; -1 \leq x \leq 1\}.$$

CAPÍTULO 20

Lectura adicional: El teorema de Green.

Este capítulo es una introducción al teorema de Green que es, en cierto sentido, similar al Teorema Fundamental del Cálculo.

Comenzaremos definiendo lo que llamaremos región simple.

Recordemos que una región del tipo I es una región de la forma

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[a, b]$, tales que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ y que una región del tipo II es una región de la forma

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c, d]$ tales que $\psi_1 \leq \psi_2$.

Definición 20.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ decimos que D es una *región simple* si D es una región tanto de tipo I como de tipo II y además ∂D es una curva lisa a trozos.

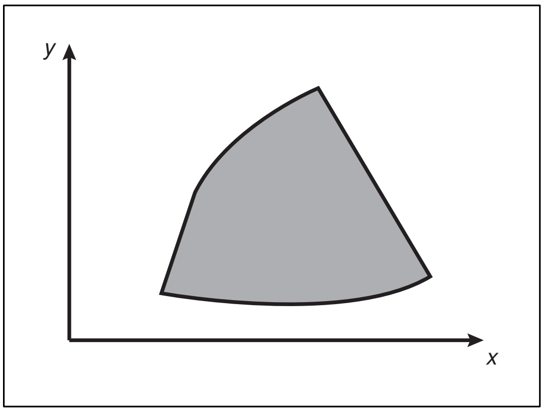


Figura 20.1. Región simple

Definición 20.2. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$. Decimos que ∂D está positivamente orientada con respecto a D si al "caminar" por ∂D con esa orientación, la región D queda a la izquierda de ∂D.

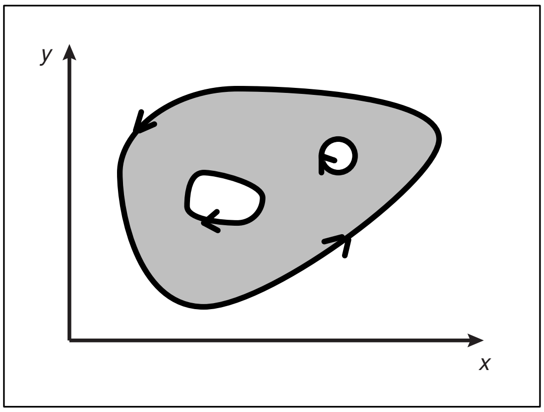


FIGURA 20.2. ∂D positivamente orientada con respecto a D

TEOREMA 20.3 (Green). *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ acotado y unión finita de regiones simples. Sean P y Q campos escalares de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto que contiene a D. Entonces*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy$$

donde ∂D está orientada positivamente con respecto a D.

OBSERVACIÓN 20.4. Tal como es natural, la integral sobre dos curvas disjuntas se define como la suma de las integrales sobre cada una de las curvas.

EJEMPLO 20.5.

(a) Sea G la circunferencia de centro en el origen y radio 1, recorrida en sentido antihorario y sea $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calcular

$$\int\limits_G y \cos(xy)\, dx + x \cos(xy)\, dy.$$

Por el teorema de Green, tenemos que esta integral de línea es igual a

$$\iint\limits_D (\cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy) - \cos(xy) + xy \operatorname{sen}(xy))\, dxdy = 0.$$

(b) Calcular

$$\int\limits_G (-y + 1)\, dx + x\, dy$$

donde G es la curva orientada positivamente que limita el triángulo τ de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

Aplicamos el teorema de Green con $P(x,y) = -y+1$, $Q(x,y) = x$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Luego

$$\int_G (-y+1)\,dx + x\,dy = \iint_\tau (1+1)\,dxdy = 2\text{Area}(\tau) = 1.$$

(c) Calcular

$$\frac{1}{2}\int_G -y\,dx + x\,dy$$

donde G es la circunferencia de centro el origen y radio 1 recorrida en sentido antihorario.

Sea $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_G -y\,dx + x\,dy &= \frac{1}{2}\iint_D (1-(-1))\,dxdy \\ &= \iint_D 1\,dxdy \\ &= \text{Area}(D) = \pi.\end{aligned}$$

Proposición 20.6. *Sea D una región simple de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera ∂D es una curva lisa a trozos. Si ∂D está positivamente orientada con respecto a D, entonces el área de D es*

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

La demostración de esta Proposición queda como ejercicio. Sugerencia: Utilizar el teorema de Green.

Ejemplo 20.7. Calcular el área de la región D limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sea $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t).$$

Entonces

$$g'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \operatorname{sen} t(-a \operatorname{sen} t) + a \cos t b \cos t)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\, dt = \pi ab.
\end{aligned}$$

Ejercicios.
El teorema de Green.

(1) Comprobar, calculando las integrales correspondientes, el teorema de Green para

$$\int_G (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

donde G es un cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ y $(0,2)$.

(2) Hallar el área encerrada por la hipocicloide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

donde a es una constante positiva. (Sugerencia: la curva se puede parametrizar de la siguiente manera $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

(3) Calcular

$$\int_G x\,dx + y\,dy,$$

donde G es un cuadrado con vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$ y $(0,4)$, recorrido en sentido antihorario.

(4) Calcular

$$\int_G y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy,$$

donde G es una circunferencia con centro en (1,3) y radio 5, recorrida en sentido horario.

Bibliografía

[1] Alson, P. *Cálculo Básico.* Editorial Erro.

[2] Apostol, T. *Calculus Volumen 1.* Editorial Reverté.

[3] Apostol, T. *Calculus Volumen 2.* Editorial Reverté.

[4] Batschelet, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist.* Springer Verlag.

[5] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[6] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 77

[7] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo integral en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[8] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en varias variables.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 246, 256, 269, 282, 291

[9] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo integral en varias variables.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 308

[10] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.

[11] Edwards, C. H. y Penney, D.E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones.* Prentice Hall.

[12] Hoffman, K. y Kunze, R. *Linear algebra.* Prentice Hall.

[13] Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Editorial MIR.

[14] Kreider, D., Kuller, R., Ostberg, D. y Perkins, F. *Introducción an análisis lineal, Parte 1.* Editorial fondo educativo interamericano.

[15] Marsden, J. y Tromba, A. *Cálculo Vectorial* Fondo Educativo Interamericano. Addison-Wesley.

[16] Miranda, Guillermo *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.

[17] Olivares, M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[18] Pérez, A. *Guía de problemas de Matemática III para Biología y Química.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[19] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[20] Quintana, Y. *Guía de problemas de Matemática III.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[21] Salas, J. y Suárez, J. *Guía de problemas de Matemática III para Computación.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[22] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.

[23] Williamson, Crowell, Trotter. *Cálculo de Funciones Vectoriales.* Editorial Prentice/Hall Internacional.

Índice