SCHAUM

Problema Resuelto

Cálculo

Quinta edición

- Más de mil problemas resueltos
- Explicaciones concisas de todos los conceptos del cálculo
- Consejos sobre el uso de graficadores

Frank Ayres, Jr. • Elliott Mendelson

McGraw Hill

Cálculo

Quinta edición

Frank Ayres Jr.

Ex profesor y director del departamento de
matemáticas del Dickinson College

Elliot Mendelson

Profesor de matemáticas del Queens College

Traducción

Yelka María García
Profesional en Lenguas Modernas
Especialización en traducción
Universidad de los Andes

Revisión técnica

Verónica Córdoba Morales
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM)

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Publisher de división escolar: Jorge Rodríguez Hernández
Director editorial y de ventas de la división bachillerato: Ricardo Martín del Campo Mora
Editor sponsor: Sergio G. López Hernández
Supervisora de producción: Marxa de la Rosa Pliego
Ilustraciones: Edwin Guzmán
Iconografía: Liliana Vázquez
Formación tipográfica: Overprint, S.A. de C.V.

Cálculo

Quinta edición

McGraw Hill Educación

Punta Santa Fe,
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-0357-2
(ISBN: Edición anterior: 978-958-41-0131-0)

Traducido de la quinta edición en inglés de *Schaum's Outlines of Calculus. Copyright © 2009 by the McGraw-Hill Companies Inc. All rights reserved.*
ISBN 007-150861-9

1234567890 109876543210
Impreso en México *Printed in Mexico*

Prefacio

El propósito de este libro es ayudar a los estudiantes a comprender y utilizar el cálculo. Todo se ha hecho con el fin de facilitar la comprensión del mismo, especialmente a los estudiantes con antecedentes limitados en matemáticas o para aquellos que han olvidado su entrenamiento en matemáticas. Los temas incluyen todos los materiales de los cursos estándar en cálculo elemental e intermedio.

La exposición directa y concisa típicas de las Series de Schaum se han ampliado en un gran número de ejemplos, seguidos por muchos problemas resueltos cuidadosamente. Al seleccionar estos problemas se ha intentado anticipar las dificultades que normalmente afronta el principiante. Además, cada capítulo concluye con un grupo de ejercicios complementarios con sus soluciones.

En esta quinta edición se han incrementado el número de los problemas resueltos y de los complementarios. Además, se ha hecho un gran esfuerzo por tratar puntos delicados del álgebra y de la trigonometría que pueden confundir al estudiante. El autor considera que una gran parte de los errores que los estudiantes cometen en el curso de cálculo no se deben a una deficiencia en la comprensión de los principios del cálculo sino a su debilidad en el álgebra o en la geometría que estudiaron en bachillerato.

Se recomienda a los estudiantes a que no pasen al siguiente capítulo sino hasta estar seguros de dominar los temas del capítulo que están estudiando. Una buena prueba para determinar ese dominio es resolver adecuadamente los problemas complementarios.

El autor agradece a todas las personas que le han escrito para enviarle correcciones y sugerencias, en particular a Danielle Cing-Mars, Lawrence Collins, L. D. De Jonge, Konrad Duch, Stephanie, Happs Lindsey Oh y Stephen T. B. Soffer. También se agradece al editor, Charles Wall, por su apoyo y paciencia en la elaboración de esta edición.

Elliot Mendelson

Índice de contenido

1

Sistemas de coordenadas lineales. Valor absoluto. Desigualdades

Un sistema de coordenadas lineales

Un sistema de coordenadas lineales es una representación gráfica de los números reales (R) como puntos en una línea recta. A cada número le corresponde uno y sólo un punto, y a cada punto le corresponde uno y sólo un número.

Para establecer un sistema de coordenadas lineales en una recta es necesario: **1.** seleccionar cualquier punto de la recta como el *origen* y asignar a ese punto el número 0; **2.** determinar una dirección positiva en la recta e indicarla mediante una flecha; **3.** tomar una distancia fija como unidad de medida. Si x es un número positivo, el punto correspondiente a x se obtiene avanzando una distancia de x unidades a partir del origen en dirección positiva. Si x es negativo, el punto correspondiente a x se halla desplazándose una distancia de $-x$ unidades desde el origen en dirección negativa (fig. 1.1.) Por ejemplo, si $x = -2$, entonces $-x = 2$ y el punto correspondiente queda a 2 unidades del origen en dirección negativa.

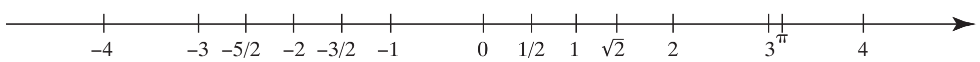


Fig. 1.1.

El número asignado a un punto por un sistema de coordenadas se denomina *coordenada* de ese punto. En adelante, se hablará como si no hubiera distinción entre un punto y su coordenada. Así, al mencionar, por ejemplo, el "punto 3" se entenderá el "punto con coordenada 3".

El valor absoluto $|x|$ de un número x se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es cero o un número positivo} \\ -x & \text{si } x \text{ es un número negativo} \end{cases}$$

Por ejemplo, $|4| = 4$, $|-3| = -(-3) = 3$ y $|0| = 0$. Observe que si x es un número negativo, entonces $-x$ es positivo. Así, $|x| \geq 0$ para todo x.

Las propiedades siguientes se cumplen para cualesquiera números x y y.

(1.1) $|-x| = |x|$
Cuando $x = 0$, $|-x| = |-0| = |0| = |x|$.
Cuando $x > 0$, $-x < 0$ y $|-x| = -(-x) = x = |x|$.
Cuando $x < 0$, $-x > 0$ y $|-x| = -x = |x|$.

(1.2) $|x - y| = |y - x|$
Esto se sigue de **(1.1)**, ya que $y - x = -(x - y)$.

(1.3) $|x| = c$ implica que $x = \pm c$.
Por ejemplo, si $|x| = 2$, entonces $x = \pm 2$. Para la demostración se supone que $|x| = c$.
Si $x \geq 0$, $x = |x| = c$. Si $x < 0$, $-x = |x| = c$; entonces $x = -(-x) = -c$.

(1.4) $|x|^2 = x^2$
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y $|x|^2 = x^2$. Si $x \leq 0$, $|x| = -x$ y $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

(1.5) $|xy| = x \cdot |y|$
Por **(1.4)**, $|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$.
Como los valores absolutos son no negativos, al obtener la raíz cuadrada queda $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(1.6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

Por **(1.5)**, $|y|\left|\frac{x}{y}\right| = \left|y \cdot \frac{x}{y}\right| = |x|$. Se divide entre $|y|$.

(1.7) $|x| = |y|$ implica que $x = \pm y$

Suponga que $|x| = |y|$. Si y = 0, $|x| = |0| = 0$ y por **(1.3)** se obtiene $x = 0$. Si $y \neq 0$, entonces por **(1.6)** se tiene que

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} = 1$$

Así, por **(1.3)** $x/y = \pm 1$. Por tanto, $x = \pm y$.

(1.8) Sea $c \geq 0$. Entonces, $|x| \leq c$ si y sólo si $-c \leq x \leq c$ (fig. 1.2).

Suponga que $x < 0$; entonces $|x| = x$. Asimismo, puesto que $c < 0$, $-c \leq 0 \leq x$. En consecuencia, $|x| \leq c$ si y sólo si $-c \leq x \leq c$. Ahora suponga que $x < 0$. Entonces $|x| = -x$. También, $x < 0 \leq c$. Además, $-x \leq c$ si y sólo si $-c \leq x$. (Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo se invierte la desigualdad.) Por ende, $|x| \leq c$ si y sólo si $-c \leq x \leq c$.

(1.9) Sea $c \geq 0$. Entonces $|x| < c$ si y sólo si $-c < x < c$ (fig. 1.2). En este caso el razonamiento es similar al de **(1.8)**.

Fig. 1.2

(1.10) $-|x| \leq x \leq |x|$

Si $x \geq 0$, $x = |x|$. Si $x < 0$, $|x| = -x$ y, por tanto, $x = -|x|$.

(1.11) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

Por **(1.8)**, $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$. Al sumar se obtiene $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Entonces, por **(1.8)** $|x + y| \leq |x| + |y|$. [En **(1.8)** se remplaza c por $|x|+ |y|$ y x por $x + y$.]

En un sistema de coordenadas dado sobre una recta, sean P_1 y P_2 los puntos sobre ésta que tienen coordenadas x_1 y x_2 (fig. 1.3). Entonces

(1.12) $|x_1 - x_2| = \overline{P_1P_2}$ = distancia entre P_1 y P_2.

Esto resulta claro cuando $0 < x_1 < x_2$ y cuando $x_1 < x_2 < 0$. Cuando $x_1 < 0 < x_2$ y además se representa el origen con la letra O, entonces $P_1P_2 = P_1O + OP_2 = (-x_1) + x_2 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$.

Como caso especial de **(1.12),** cuando P_2 es el origen y ($x_2 = 0$):

(1.13) $|x_1|$ = distancia entre P_1 y el origen.

Fig. 1.3

Intervalos finitos

Sea $a < b$.

El *intervalo abierto* (a, b) se define como el conjunto de todos los números que hay entre a y b, es decir, el conjunto de todos los x tales que $a < x < b$. Se usará el término *intervalo abierto* y la notación (a, b) también para todos los puntos entre los puntos con coordenadas a y b en una recta. Observe que el intervalo abierto (a, b) no contiene los *puntos extremos* a y b (fig. 1.4).

El *intervalo cerrado* $[a, b]$ se define como el conjunto de todos los números que hay entre a y b o iguales a a o b, es decir, el conjunto de todos los x tales que $a \leq x \leq b$. Como en el caso de los intervalos abiertos, se utiliza la misma terminología y notación de los puntos en una recta. Observe que el intervalo cerrado $[a, b]$ sí contiene ambos puntos extremos (terminales) a y b (fig. 1.4).

Intervalo abierto (a, b): $a < x < b$;

Intervalo cerrado $[a, b]$: $a \le x \le b$

Fig. 1.4

Por *intervalo semiabierto* se entiende un intervalo abierto (a, b) junto con uno de sus puntos extremos. Hay dos de esos intervalos: $[a, b)$ es el conjunto de todos los x tales que $a \le x < b$ y $(a, b]$ es el conjunto de todos los x tales que $a < x \le b$

Intervalos infinitos

Sea (a, ∞) el conjunto de todos los x tales que $a < x$.
Sea $[a, \infty)$ el conjunto de todos los x tales que $a \le x$.
Sea $(-\infty, b)$ el conjunto de todos los x tales que $x < b$.
Sea $(-\infty, b]$ el conjunto de todos los x tales que $x \le b$.

Desigualdades

Toda desigualdad —como $2x - 3 > 0$ o $5 < 3x + 10 \le 16$— determina un intervalo. Resolver una desigualdad significa determinar el intervalo correspondiente de los números que la satisfacen.

EJEMPLO 1.1. Resuelva $2x - 3 > 0$.

$$2x - 3 > 0$$
$$2x > 3 \qquad \text{(Sumando 3)}$$
$$x > \tfrac{3}{2} \qquad \text{(Dividiendo entre 2)}$$

Así, el intervalo correspondiente es $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

EJEMPLO 1.2. Resuelva $5 < 3x + 10 \le 16$.

$$5 < 3x + 10 \le 16$$
$$-5 < 3x \le 6 \qquad \text{(Restando 10)}$$
$$-\tfrac{5}{3} < x \le 2 \qquad \text{(Dividiendo entre 3)}$$

Así, el intervalo correspondiente es $\left(-\frac{5}{3}, 2\right]$.

EJEMPLO 1.3. Resuelva $-2x + 3 < 7$

$$-2x + 3 < 7$$
$$-2x < 4 \qquad \text{(Restando 3)}$$
$$x > -2 \qquad \text{(Dividiendo entre } -2\text{)}$$

(Observe que cuando se divide entre un número negativo la desigualdad se invierte.) Así, el intervalo correspondiente es $(-2, \infty)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Describa y represente los intervalos siguientes y exprese su notación de intervalos: *a*) $-3 < x < 5$; *b*) $2 \le x \le 6$; *c*) $-4 < x \le 0$; *d*) $x > 5$; *e*) $x \le 2$; *f*) $3x - 4 \le 8$; *g*) $1 < 5 - 3x < 11$.

a) Todos los números mayores que -3 y menores que 5; la notación de intervalos es $(-3, 5)$:

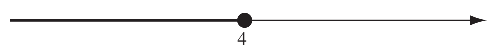
b) Todos los números iguales o mayores que 2 y menores o iguales que 6: [2, 6]:

c) Todos los números mayores que −4 y menores o iguales que 0: (−4, 0]:

d) Todos los números mayores que 5: (5, ∞):

e) Todos los números menores o iguales que 2: (–∞, 2]:

f) $3x - 4 \leq 8$ equivale a $3x \leq 12$ y, por consiguiente, a $x \leq 4$. Así, se obtiene (–∞, 4]:



g)

$$1 < 5 - 3x < 11$$

$$-4 < -3x < 6 \quad \text{(restando 5)}$$

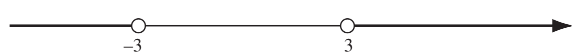
$$-2 < x < \tfrac{4}{3} \quad \text{(dividiendo entre –3; observe que las desigualdades se invierten).}$$

Por ende, se obtiene $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$:

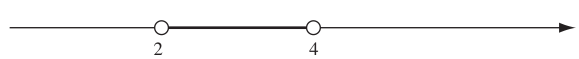
2. Describa y represente los intervalos determinados por las desigualdades siguientes: *a)* $|x| < 2$; *b)* $|x| > 3$; *c*) $|x - 3| < 1$; *d*) $|x - 2| < \delta > 0$; *e*) $|x + 2| \leq 3$; *f)* $0 < |x - 4| < \delta > 0$.

a) Por la propiedad **(1.9)**, esto equivale a $-2 < x < 2$, que define el intervalo abierto (–2, 2).

b) Por la propiedad **(1.8)**, $|x| \leq 3$ equivale a $-3 \leq x \leq 3$. Al tomar las negaciones, $|x| > 3$ equivale a $x < -3$, o bien, $x > 3$, lo que define la unión de los intervalos (–∞, –3) y (3, ∞).

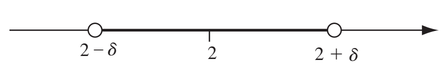


c) Por la propiedad **(1.12)**, se dice que la distancia entre x y 3 es menor que 1, lo que equivale a $2 < x < 4$. Esto define el intervalo abierto (2, 4).



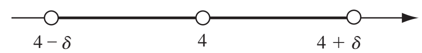
Cabe también observar que $|x - 3| < 1$ equivale a $-1 < x - 3 < 1$. Al sumar 3 se obtiene $2 < x < 4$.

d) Esto indica que la distancia entre x y 2 es menor que δ, o que $2 - \delta < x < 2 + \delta$, lo que define el intervalo abierto (2 – δ, 2 + δ). Este intervalo se denomina *vecindad* δ de 2:



e) $|x + 2| < 3$ equivale a $-3 < x + 2 < 3$. Al restar 2 se obtiene $-5 < x < 1$, lo que define el intervalo abierto $(-5, 1)$:

f) La desigualdad $|x - 4| < \delta$ determina el intervalo $4 - \delta < x < 4 + \delta$. La condición adicional $0 < |x - 4|$ dice que $x \neq 4$. Por tanto, se obtiene la unión de los dos intervalos $(4 - \delta, 4)$ y $(4, 4 + \delta)$. El resultado se denomina *vecindad* δ de 4:



3. Describa y trace un diagrama de los intervalos determinados por las desigualdades siguientes: *a*) $|5 - x| \leq 3$; *b*) $|2x - 3| < 5$; *c*) $|1 - 4x| < \frac{1}{2}$.

a) Como $|5 - x| = |x - 5|$, se tiene que $|x - 5| \leq 3$, equivalente a $-3 \leq x - 5 \leq 3$. Sumando 5 se obtiene $2 \leq x \leq 8$, que define el intervalo $[2, 8]$:

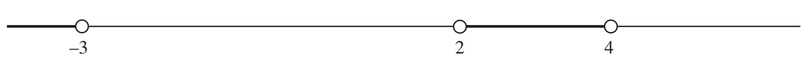
b) $|2x - 3| < 5$ equivale a $-5 < 2x - 3 < 5$. Sumando 3 se obtiene $-2 < 2x < 8$; entonces, al dividir entre 2 resulta $-1 < x < 4$, lo que define el intervalo abierto $(-1, 4)$:

c) Como $|1 - 4x| = |4x - 1|$, se tiene que $|4x - 1| \leq \frac{1}{2}$, que equivale a $-\frac{1}{2} < 4x - 1 < \frac{1}{2}$. Al sumar 1 se obtiene $\frac{1}{2} < 4x < \frac{3}{2}$. Dividiendo entre 4 se obtiene $\frac{1}{8} < x < \frac{3}{8}$, que define el intervalo $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$:

4. Resuelva las desigualdades siguientes y trace la gráfica de las soluciones: *a*) $18x - 3x^2 > 0$; *b*) $(x + 3)(x - 2)(x - 4) < 0$; *c)* $(x + 1)^2(x - 3) > 0$.

a) Sea $18x - 3x^2 = 3x(6 - x) = 0$; se obtiene $x = 0$ y $x = 6$. Hay que determinar el signo de $18x - 3x^2$ en cada uno de los intervalos $x < 0$, $0 < x < 6$ y $x > 6$ para establecer dónde $18x - 3x^2 > 0$. Observe que es negativo cuando $x < 0$ (ya que x es negativo y $6 - x$ es positivo). Se vuelve positivo cuando se pasa de izquierda a derecha por 0 (puesto que x cambia de signo, pero $6 - x$ sigue siendo positivo) y se vuelve negativo cuando pasa por 6 (ya que x sigue siendo positivo, pero $6 - x$ cambia a negativo). Por ende, es positivo cuando y sólo cuando $0 > x < 6$.

b) Los puntos críticos son $x = -3$, $x = 2$ y $x = 4$. Advierta que $(x + 3)(x - 2)(x - 4)$ es negativo para $x < -3$ (pues cada uno de los factores es negativo) y que cambia de signo cuando pasa por cada uno de los puntos cruciales. Por tanto, es negativo para $x < -3$ y para $2 < x < 4$:



c) Observe que $(x + 1)^2$ siempre es positivo (salvo en $x = -1$, donde es 0). Por tanto, $(x + 1)^2(x - 3) > 0$ cuando y sólo cuando $x - 3 > 0$, es decir, para $x > 3$:

5. Resuelva $|3x - 7| = 8$.

Por **(1.3)**, $|3x - 7| = 8$ si y sólo si $3x - 7 = \pm 8$. Entonces hay que resolver $3x - 7 = 8$ y $3x - 7 = -8$. Se obtiene $x = 5$ o $x = -\frac{1}{3}$.

6. Resuelva $\dfrac{2x+1}{x+3} > 3$.

Caso 1: $x + 3 > 0$. Al multiplicar por $x + 3$ se obtiene $2x + 1 > 3x + 9$, lo que se reduce *a* $-8 > x$. Sin embargo, como $x + 3 > 0$, es probable que $x > -3$. Entonces este caso no tiene solución.

Caso 2: $x + 3 < 0$. Al multiplicar por $x + 3$ se obtiene $2x + 1 > 3 + 9$. (La desigualdad se invierte porque se multiplicó por un número negativo.) Esto resulta $-8 < x$. Puesto que $x + 3 < 0$, se tiene que $x < -3$. Luego, las únicas soluciones son $-8 < x < -3$.

7. Resuelva $\left|\dfrac{2}{x} - 3\right| < 5$.

La desigualdad equivale a $-5 < \frac{2}{x} - 3 < 5$. Se suma 3 para obtener $-2 < 2/x < 8$, y se divide entre 2 para obtener $-1 < 1/x < 4$.

Caso 1: $x > 0$. Se multiplica por x para llegar *a* $-x < 1 < 4x$. Entonces, $x > \frac{1}{4}$ y $x > -1$; estas dos desigualdades son equivalentes a una sola desigualdad: $x > \frac{1}{4}$.

Caso 2: $x < 0$. Se multiplica por x para obtener $-x > 1 > 4x$. (Observe que se invirtieron las desigualdades al multiplicar por un número negativo x.) Entonces, $x < \frac{1}{4}$ y $x < -1$. Estas dos desigualdades equivalen a $x < -1$.

Por ende, las soluciones son $x > \frac{1}{4}$ o $x < -1$, la unión de dos intervalos infinitos $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ y $(-\infty, -1)$.

8. Resuelva $|2x - 5| \geq 3$.

Se soluciona primero la negación $|2x - 5| < 3$, la cual equivale a $-3 < 2x - 5 < 3$. Se suma 5 para obtener $2 < 2x < 8$ y se divide entre 2 para obtener $1 < x < 4$. Como ésta es la solución de la negación, la desigualdad original tiene la solución $x \leq 1$ o $x \geq 4$.

9. Resuelva $x^2 < 3x + 10$.

$$
\begin{aligned}
&x^2 < 3x + 10 \\
&x^2 - 3x - 10 < 0 \qquad \text{(restando } 3x + 10\text{)} \\
&(x - 5)(x + 2) < 0
\end{aligned}
$$

Los números cruciales son -2 y 5. $(x - 5)(x + 2) > 0$ cuando $x < -2$ (ya que tanto $x - 5$ como $x + 2$ son negativas); resulta negativa cuando pasa por -2 (ya que $x + 2$ cambia de signo) y luego se vuelve positiva cuando pasa por 5 (ya que $x - 5$ cambia de signo). Así, las soluciones son $-2 < x < 5$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10. Describa y trace la gráfica del conjunto determinado por cada una de las condiciones siguientes:

a) $-5 < x < 0$
b) $x \leq 0$
c) $-2 \leq x < 3$
d) $x \geq 1$
e) $|x| < 3$
f) $|x| \geq 5$
g) $|x - 2| < \frac{1}{2}$
h) $|x - 3| > 1$
i) $0 < |x - 2| < 1$
j) $0 < |x + 3| < \frac{1}{4}$
k) $|x - 2| \geq 1$

Respuestas: *e*) $-3 < x < 3$; *f*) $x \geq 5$ o bien, $x \leq -5$; *g*) $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$; *h*) $x > -2$ o bien, $x < -4$; *i*) $x \neq 2$ y $1 < x < 3$; *j*) $-\frac{13}{4} < x < -\frac{11}{4}$; *k*) $x \geq 3$ o bien, $x \leq 1$

11. Describa y trace la gráfica del conjunto determinado por cada una de estas condiciones:

a) $|3x - 7| < 2$
b) $|4x - 1| \geq 1$
c) $\left|\frac{x}{3} - 2\right| \leq 4$
d) $\left|\frac{3}{x} - 2\right| \leq 4$
e) $\left|2 + \frac{1}{x}\right| > 1$
f) $\left|\frac{4}{x}\right| < 3$

Respuestas: *a*) $\frac{5}{3} < x < 3$; *b*) $x \geq \frac{1}{2}$ o bien, $x \leq 0$; *c*) $-6 \leq x \leq 18$; *d*) $x \leq -\frac{3}{2}$ o bien, $x \geq \frac{1}{2}$; *e*) $x > 0$ o bien, $x < -1$ o bien, $-\frac{1}{3} < x < 0$; *f*) $x > \frac{4}{3}$ o bien, $x < -\frac{4}{3}$

12. Describa y trace la gráfica del conjunto determinado por cada una de las condiciones siguientes:

a) $x(x - 5) < 0$
b) $(x - 2)(x - 6) > 0$
c) $(x + 1)(x - 2) < 0$
d) $x(x - 2)(x + 3) > 0$
e) $(x + 2)(x + 3)(x + 4) < 0$
f) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3) > 0$
g) $(x - 1)^2(x + 4) > 0$
h) $(x - 3)(x + 5)(x - 4)^2 < 0$
i) $(x - 2)^3 > 0$
j) $(x + 1)^3 < 0$
k) $(x - 2)^3(x + 1) < 0$
l) $(x - 1)^3(x + 1)^4 < 0$
m) $(3x - 1)(2x + 3) > 0$
n) $(x - 4)(2x - 3) < 0$

Respuestas: *a*) $0 < x < 5$; *b*) $x > 6$ o bien, $x < 2$; *c*) $-1 < x < 2$; *d*) $x > 2$ o bien, $-3 < x < 0$; *e*) $-3 < x < -2$ o bien, $x < -4$; *f*) $x > 2$ o bien, $-1 < x < 1$ o bien, $x < -3$; *g*) $x > -4$ y $x \neq 1$; *h*) $-5 < x < 3$; *i*) $x > 2$; *j*) $x < -1$; *k*) $-1 < x < 2$; *l*) $x < 1$ y $x \neq -1$; *m*) $x > \frac{1}{3}$ o bien, $x < -\frac{3}{2}$; *n*) $\frac{3}{2} < x < 4$

13. Describa y trace la gráfica del conjunto determinado por cada una de las condiciones que siguen:

a) $x^2 < 4$
b) $x^2 \geq 9$
c) $(x - 2)^2 \leq 16$
d) $(2x + 1)^2 > 1$
e) $x^2 + 3x - 4 > 0$
f) $x^2 + 6x + 8 \leq 0$
g) $x^2 < 5x + 14$
h) $2x^2 > x + 6$
i) $6x^2 + 13x < 5$
j) $x^3 + 3x^2 > 10x$

Respuestas: *a*) $-2 < x < 2$; *b*) $x \geq 3$ o bien, $x \leq -3$; *c*) $-2 \leq x \leq 6$; *d*) $x > 0$ o bien, $x < -1$; *e*) $x > 1$ o bien, $x > -4$; *f*) $-4 \leq x \leq -2$; *g*) $-2 < x < 7$; *h*) $x > 2$ o bien, $x < -\frac{3}{2}$; *i*) $-\frac{5}{2} < x < \frac{1}{3}$; *j*) $-5 < x < 0$ o $x > 2$

14. Resuelva:

a) $-4 < 2 - x < 7$ *b*) $\dfrac{2x-1}{x} < 3$ *c*) $\dfrac{x}{x+2} < 1$

d) $\dfrac{3x-1}{2x+3} > 3$ *e*) $\left|\dfrac{2x-1}{x}\right| > 2$ *f*) $\left|\dfrac{x}{x+2}\right| \le 2$

Respuestas: *a*) $-5 < x < 6$; *b*) $x > 0$ o bien, $x < -1$; *c*) $x > -2$; *d*) $-\frac{10}{3} < x < -\frac{3}{2}$; *e*) $x < 0$ o bien, $0 < x < \frac{1}{4}$; *f*) $x \le -4$ o bien, $x \ge -1$

15. Resuelva:

a) $|4x - 5| = 3$
b) $|x + 6| = 2$
c) $|3x - 4| = |2x + 1|$
d) $|x + 1| = |x + 2|$
e) $|x + 1| = 3x - 1$
f) $|x + 1| < |3x - 1|$
g) $|3x - 4| \ge |2x + 1|$

Respuestas: *a*) $x = 2$ o bien, $x = \frac{1}{2}$; *b*) $x = -4$ o bien, $x = -8$; *c*) $x = 5$ o bien, $x = \frac{5}{3}$; *d*) $x = -\frac{3}{2}$; *e*) $x = 1$; *f*) $x > 1$ o bien, $x < 0$; *g*) $x > 5$ o bien, $x < \frac{3}{5}$

16. Pruebe:

a) $|x^2| = |x|^2$
b) $|x^n| = |x|^n$ para todo entero n
c) $|x| = \sqrt{x^2}$
d) $|x - y| \le |x| + |y|$
e) $|x - y| \ge ||x| - |y||$

[*Sugerencia:* en *e*), pruebe que $|x - y| \ge |x| - |y|$ y $|x - y| \ge |y| - |x|$.]

2

Sistema de coordenadas rectangulares

Ejes de coordenadas

En un plano P, se escoge un par de rectas perpendiculares. Si una de ellas es horizontal, entonces la otra será vertical. La recta horizontal se designa como *eje x* y la vertical como *eje y* (fig. 2.1).

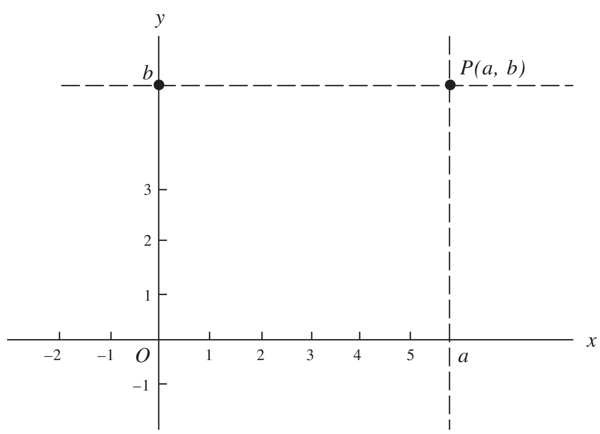


Fig. 2.1

Ahora se toma un sistema de coordenadas lineales sobre el eje x y uno sobre el eje y que satisfacen las condiciones siguientes: el origen de cada sistema de coordenadas es el punto O, donde se cortan los ejes. El eje x está orientado de izquierda a derecha y el eje y de abajo arriba. La parte del eje x con coordenadas positivas se denomina *eje x positivo* y la parte del eje y con coordenadas positivas se designa *eje y positivo.*

Debemos establecer una correspondencia entre los puntos del plano P y pares de números reales.

Coordenadas

Considere el punto P del plano (figura 2.1). La recta vertical que pasa por P corta el eje x en un único punto; sea a la coordenada de este punto sobre el eje x. El número a se denomina *coordenada x* de P (o la *abscisa* de P). La recta horizontal que pasa por P corta el eje y en un solo punto; sea b la coordenada de este punto sobre el eje y. El número b se denomina *coordenada y* de P (o la *ordenada* de P). Así, todo punto P tiene un par único (a, b) de números reales asociado con él. A su vez, cada par (a, b) de números reales está asociado con un punto único en el plano.

Las coordenadas de varios puntos se indican en la figura 2.2. En aras de la simplicidad, se han limitado a enteros.

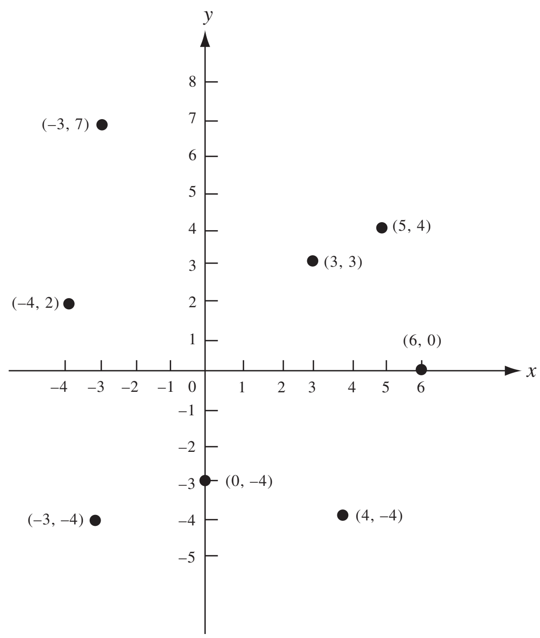


Fig. 2.2

EJEMPLO 2.1. En el sistema de coordenadas de la figura 2.3, para hallar el punto correspondiente a las coordenadas (2, 3) se comienza en el origen, se desplaza dos unidades a la *derecha* y luego tres unidades hacia *arriba*.

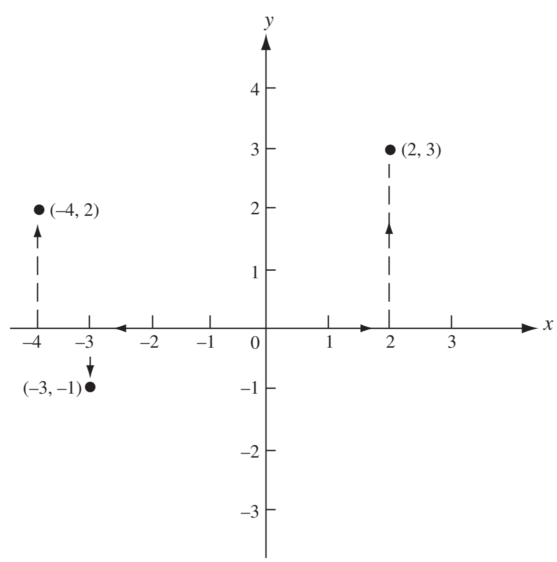


Fig. 2.3

Para encontrar el punto de coordenadas (–4, 2) se empieza en el origen, se desplaza cuatro unidades a la *izquierda* y luego dos unidades hacia *arriba*.

Para hallar el punto con coordenadas (–3, 1) se comienza en el origen y se desplaza tres unidades a la *izquierda* y luego una hacia *abajo*.

El orden de estos desplazamientos no es importante. Por ejemplo, el punto (2, 3) también puede encontrarse empezando en el origen y avanzando tres unidades hacia *arriba* y luego dos a la *derecha*.

Cuadrantes

Suponga que se ha establecido un sistema de coordenadas en el plano $\mathcal{P}$. Entonces todo el plano $\mathcal{P}$, salvo los ejes de coordenadas, puede dividirse en cuatro partes iguales, denominadas *cuadrantes*. Todos los puntos con ambas coordenadas positivas conforman el primer cuadrante, llamado *cuadrante* I, en la esquina superior derecha (fig. 2.4). El *cuadrante* II consta de todos los puntos con coordenada x negativa y coordenada y positiva. Los *cuadrantes* III y IV también se presentan en la figura 2.4.

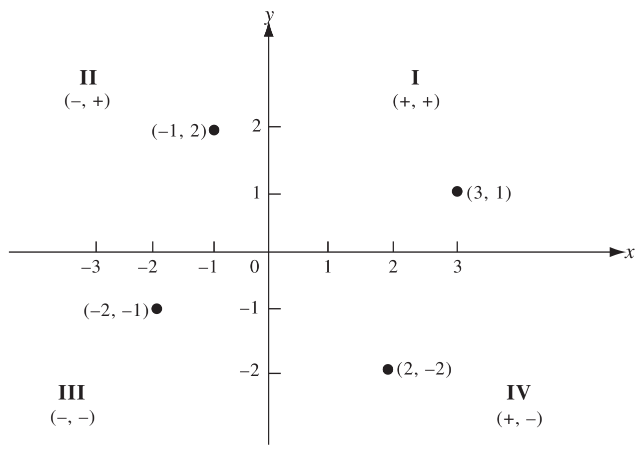


Fig. 2.4

Los puntos sobre el eje x tienen coordenadas de la forma $(a, 0)$. El eje y consta de los puntos con coordenadas de la forma $(0, b)$.

Dado un sistema de coordenadas, es habitual referirse al punto con coordenadas (a, b) como "el punto (a, b)". Por ejemplo, se puede decir que "el punto $(0, 1)$ queda sobre el eje y".

Fórmula de la distancia

La distancia $\overline{P_1P_2}$ que hay entre los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en un sistema de coordenadas (fig. 2.5) se obtiene mediante la siguiente fórmula de la distancia:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1}$$

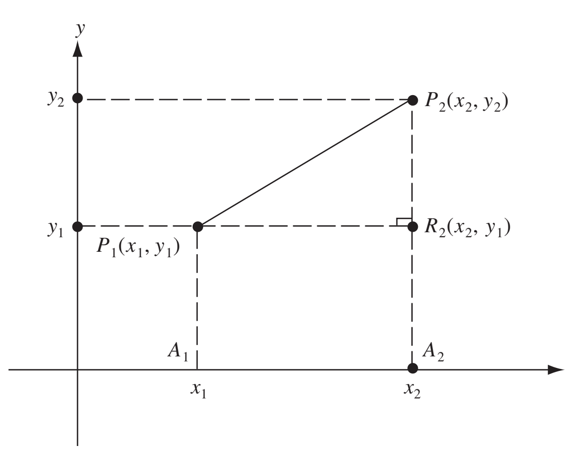


Fig. 2.5

Para observar esto, sea R el punto donde la recta vertical que pasa por P_2 corta la recta horizontal que pasa por P_1. La coordenada x de R es x_2, lo mismo que para la de P_2. La coordenada y de R es y_1, la misma que la de P_1. Por el teorema de Pitágoras, $(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1R})^2 + (\overline{P_2R})^2$. Si A_1 y A_2 son las proyecciones de P_1 y P_2 sobre el eje x, los segmentos P_1R y A_1A_2 son lados opuestos de un rectángulo, de manera que $\overline{P_1R} = \overline{A_1A_2}$. Pero $\overline{A_1A_2} = |x_1 - x_2|$ por la propiedad **(1.12)**; por consiguiente, $\overline{P_1R} = |x_1 - x_2|$. De igual forma $\overline{P_2R} = |y_1 - y_2|$. Por tanto, $(\overline{P_1P_2})^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Mediante la raíz cuadrada se obtiene la fórmula de la distancia. (Puede observarse que la fórmula también es válida cuando P_1 y P_2 quedan en la misma recta vertical u horizontal.)

EJEMPLO 2.2.

a) La distancia entre (2, 5) y (7, 17) es

$$\sqrt{(2-7)^2 + (5-17)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

b) La distancia entre (1, 4) y (5, 2) es

$$\sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\,\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Fórmulas del punto medio

El punto $M(x, y)$, que es el punto medio del segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, tiene las coordenadas

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2.2}$$

Así, las coordenadas de los puntos medios son los promedios de las coordenadas de los puntos extremos o terminales (fig. 2.6).

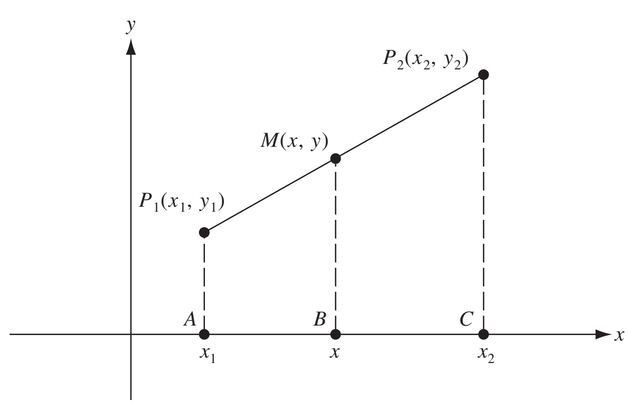


Fig. 2.6

Para observar esto, sean A, B, C las proyecciones de P_1, M y P_2 en el eje x. Las coordenadas x de A, B y C son x_1, x y x_2. En virtud de que las rectas P_1A, MB y P_2C son paralelas, los cocientes $\overline{P_1M}/\overline{MP_2}$ y $\overline{AB}/\overline{BC}$ son iguales. Entonces, $\overline{P_1M} = \overline{MP_2}$ y $\overline{AB} = \overline{BC}$. Como $\overline{AB} = x - x_1$ y $\overline{BC} = x_2 - x$

$$x - x_1 = x_2 - x$$

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(La misma ecuación es válida cuando P_2 está a la izquierda de P_1, caso en el que $\overline{AB} = x_1 - x$ y $\overline{BC} = x - x_2$). De forma similar, $y = (y_1 + y_2)/2$.

EJEMPLO 2.3.

a) El punto medio del segmento que une (2, 9) y (4, 3) es $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{9+3}{2}\right) = (3, 6)$.

b) El punto intermedio entre (–5, 1) y (1, 4) es $\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(-2, \frac{5}{2}\right)$.

Demostraciones o pruebas de los teoremas geométricos

Demostraciones de los teoremas geométricos pueden darse más fácilmente usando las coordenadas que mediante deducciones a partir de axiomas y teoremas derivados con anterioridad. Las pruebas o demostraciones mediante coordenadas se denominan *analíticas*, a diferencia de las pruebas a partir de axiomas, que se llaman *sintéticas*.

EJEMPLO 2.4. Pruebe analíticamente que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo equivale a la mitad de la longitud del tercer lado. Construya un sistema de coordenadas de manera que el tercer lado AB quede en el eje x positivo, A sea el origen y el tercer vértice C quede por encima del eje x como en la figura 2.7.

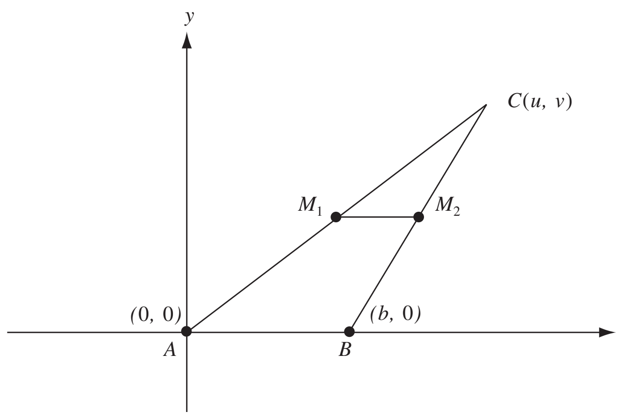


Fig. 2.7

Sea b la coordenada x de B (en otras palabras, sea $b = \overline{AB}$). Tenga C las coordenadas (u, v). Sean M_1 y M_2 los puntos medios de los lados AC y BC, respectivamente. Por las fórmulas del punto medio (2.2), las coordenadas de M_1 son $\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$ y las de M_2 son $\left(\frac{u+b}{2}, \frac{v}{2}\right)$. Mediante la fórmula de la distancia (2.1)

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{\left(\frac{u}{2} - \frac{u+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2} - \frac{v}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2},$$

que es la mitad de la longitud del lado AB.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre que la distancia entre un punto $P(x, y)$ y el origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$.
Como el origen tiene coordenadas (0, 0), la fórmula de la distancia da $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. ¿El triángulo con vértices $A(1, 5)$, $B(4, 2)$ y $C(5, 6)$ es isósceles?

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-5)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, el triángulo es isósceles.

3. ¿El triángulo con vértices $A(-5, 6)$, $B(2, 3)$ y $C(5, 10)$ es un triángulo rectángulo?

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(-5-5)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

Como $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, el inverso del teorema de Pitágoras dice que ΔABC es un triángulo rectángulo, con un ángulo recto en B; de hecho, como $\overline{AB} = \overline{BC}$, ΔABC es un triángulo rectángulo isósceles.

4. Pruebe analíticamente que si las medianas de dos lados de un triángulo son iguales, entonces esos lados son iguales. (La *mediana* de un triángulo es un segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.)

En ΔABC, sean M_1 y M_2 los puntos medios de los lados AC y BC, respectivamente. Construya un sistema de coordenadas de manera que A sea el origen, B se sitúe en el eje x positivo y C quede por encima del eje x (fig. 2.8). Supón que $\overline{AM_2} = \overline{BM_1}$. Debe probar que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sea b la coordenada x de B, y sean (u, v) las coordenadas de C. Entonces, por las fórmulas del punto medio, M_1 tiene coordenadas $\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$ y M_2 tiene las coordenadas $\left(\frac{u+b}{2}, \frac{v}{2}\right)$.
Por tanto,

$$\overline{AM_2} = \sqrt{\left(\frac{u+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} \quad \text{y} \quad \overline{BM_1} = \sqrt{\left(\frac{u}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}$$

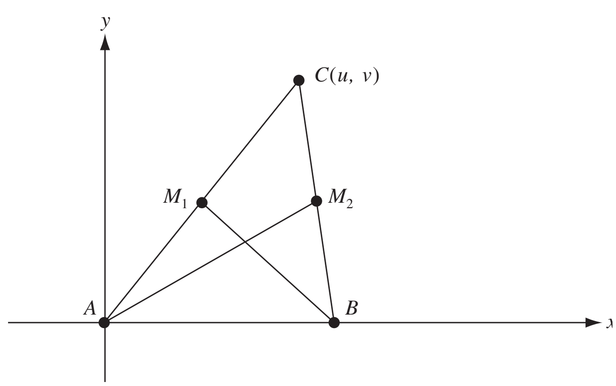


Fig. 2.8

Como $\overline{AM_2} = \overline{BM_1}$,

$$\left(\frac{u+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u-2b}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

Por consiguiente, $\frac{(u+b)^2}{4} + \frac{v^2}{4} = \frac{(u-2b)^2}{4} + \frac{v^2}{4}$ y, en consecuencia, $(u+b)^2 = (u-2b)^2$. Así, $u + b = \pm(u - 2b)$. Si $u + b = u - 2b$, entonces $b = -2b$ y, por tanto, $b = 0$, lo que es imposible porque $A \neq B$. Por tanto, $u + b = -(u - 2b) = -u + 2b$, de donde $2u = b$. Ahora $\overline{BC} = \sqrt{(u-b)^2 + v^2} = \sqrt{(u-2u)^2 + v^2} = \sqrt{(-u)^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$ y $\overline{AC} = \sqrt{u^2 + v^2}$. Por tanto, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

5. Halle las coordenadas (x, y) del punto Q sobre el segmento de recta que une $P_1(1, 2)$ y $P_2(6, 7)$, tal que Q divida el segmento en la razón 2:3, es decir, tal que $\overline{P_1Q}/\overline{QP_2} = \frac{2}{3}$.

Sean las proyecciones de P_1, Q y P_2 sobre el eje x A_1, Q' y A_2, respectivamente, con coordenadas 1, x y 6, correspondientemente (fig. 2.9). Ahora $\overline{A_1Q'}/\overline{Q'A_2} = \overline{P_1Q}/\overline{QP_2} = \frac{2}{3}$. (Cuando dos rectas son cortadas por tres rectas paralelas, los segmentos correspondientes son proporcionales.) Pero $\overline{A_1Q'} = x - 1$ y $\overline{Q'A_2} = 6 - x$. Luego, $\frac{x-1}{6-x} = \frac{2}{3}$, y al multiplicar en cruz se obtiene $3x - 3 = 12 - 2x$. Por ende, $5x = 15$, de donde $x = 3$.

Por un razonamiento similar, $\frac{y-2}{7-y} = \frac{2}{3}$, de donde se sigue que $y = 4$.

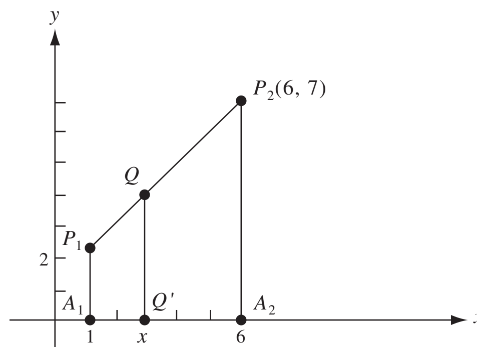


Fig. 2.9

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6. En la figura 2.10 halle las coordenadas de los puntos A, B, C, E y F.

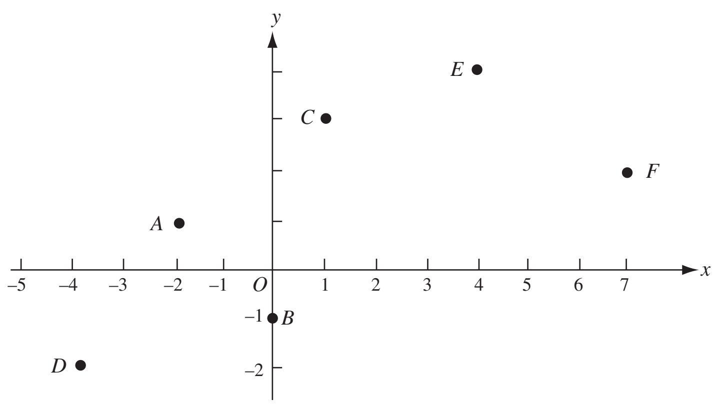


Fig. 2.10

Respuesta: $A = (-2, 1)$; $B = (0, -1)$; $C = (1, 3)$; $D = (-4, -2)$; $E = (4, 4)$; $F = (7, 2)$.

7. Dibuje un sistema de coordenadas y muestre los puntos que corresponden a las coordenadas siguientes: (2, –3), (3, 3), (–1, 1), (2, –2), (0, 3), (3, 0), (–2, 3).

8. Halle la distancia entre estos pares de puntos:

a) (3, 4) y (3, 6) *b*) (2, 5) y (2, –2) *c*) (3, 1) y (2, 1)

d) (2, 3) y (5, 7) *e*) (–2, 4) y (3, 0) *f*) $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ y (4, –1)

Respuestas: *a*) 2; *b*) 7; *c*) 1; *d*) 5; *e*) $\sqrt{41}$; *f*) $\frac{3}{2}\sqrt{17}$

9. Dibuje un triángulo con vértices $A(2, 5)$ $B(2, -5)$ y $C(-3, 5)$, y calcule su área.

Respuesta: Área = 25 unidades cuadradas (u^2)

10. Si (2, 2), (2, – 4) y (5, 2) son tres vértices de un rectángulo, halle el cuarto vértice.

Respuesta: (5, – 4)

11. Si los puntos (2, 4) y (–1, 3) son vértices opuestos de un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas (es decir, a los ejes x y y), halle los otros dos vértices.

Respuesta: (–1, 4) y (2, 3)

12. Determine si los siguientes tríos de puntos son vértices de un triángulo isósceles:

a) (4, 3), (1, 4), (3, 10) *b*) (–1, 1), (3, 3), (1, –1) *c*) (2, 4), (5, 2), (6, 5)

Respuestas: *a*) no; *b*) sí; *c*) no.

13. Determine si los siguientes tríos de puntos son los vértices de un triángulo rectángulo. Con los que formen el triángulo, calcule el área de éste.

a) (10, 6), (3, 3), (6, –4) *b*) (3, 1), (1, –2), (–3, –1) *c*) (5, –2), (0, 3), (2, 4)

Respuestas: *a*) sí, área = 29 u^2; *b*) no; *c*) sí, área = $\frac{15}{2}$ u^2

14. Halle el perímetro del triángulo con vértices $A(4, 9)$, $B(-3, 2)$ y $C(8, 5)$.

Respuesta: $7\sqrt{2} + \sqrt{170} + 2\sqrt{53}$

15. Encuentre el o los valores de y para los que $(6, y)$ equidista de (4, 2) y (9, 7).

Respuesta: 5

16. Halle los puntos medios de los segmentos de recta con los siguientes puntos extremos o terminales:

a) (2, –3) y (7, 4) *b*) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ y (4, 1) *c*) $(\sqrt{3}, 0)$ y (1, 4)

Respuestas: *a*) $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$; *b*) $\left(\frac{17}{6}, \frac{3}{2}\right)$; *c*) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right)$

17. Halle el punto (x, y) tal que (2, 4) sea el punto medio del segmento de recta que une (x, y) y (1, 5).

Respuesta: (3, 3)

18. Determine el punto equidistante de los puntos $A(-1, 7)$, $B(6, 6)$ y $C(5, -1)$.

Respuesta: $\left(\frac{52}{25}, \frac{153}{50}\right)$

19. Pruebe analíticamente que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

20. Demuestre analíticamente que la suma de los cuadrados de la distancia de cualquier punto P a dos vértices de un rectángulo es igual a la suma de cuadrados de sus distancias a los otros vértices.

21. Pruebe analíticamente que la suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

22. Pruebe analíticamente que la suma de los cuadrados de las medianas de un triángulo es igual a tres cuartos de la suma de los cuadrados de los lados.

23. Pruebe analíticamente que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados opuestos del cuadrilátero se bisecan uno a otro.

24. Pruebe que las coordenadas (x, y) del punto Q dividen los segmentos de la recta $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$ en la razón $r_1{:}r_2$ y están determinadas por las fórmulas

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2} \quad \text{y} \quad y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

(*Sugerencia*: use el razonamiento del problema 5.)

25. Halle las coordenadas del punto Q en el segmento P_1P_2 tal que $\overline{P_1Q}/\overline{QP_2} = \frac{2}{7}$, si *a*) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (7, 9)$; *b*) $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 7)$; *c*) $P_1 = (-7, -2)$, $P_2 = (2, 7)$; *d*) $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (4, 2)$.

Respuestas: *a*) $\left(\frac{14}{9}, 2\right)$; *b*) $\left(-\frac{7}{9}, \frac{14}{9}\right)$; *c*) $\left(-5, \frac{28}{9}\right)$; *d*) $\left(\frac{13}{9}, \frac{32}{9}\right)$

3

Rectas

Inclinación de una recta

La inclinación de una recta se mide por un número llamado *pendiente* de la recta. Sea $\mathscr{L}$ una recta y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathscr{L}$. La pendiente de $\mathscr{L}$ se define como el número $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La pendiente es el cociente de un cambio en la coordenada y y el correspondiente cambio en la coordenada x (fig. 3.1).

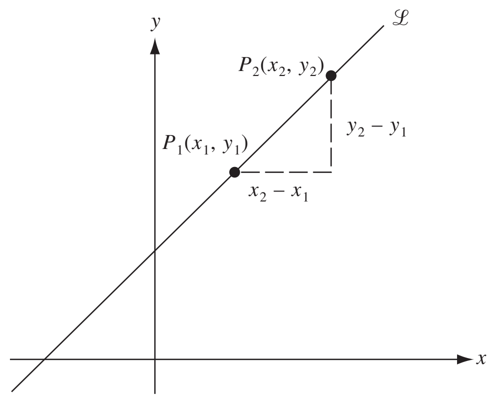


Fig. 3.1

Para que la definición de pendiente cobre sentido es necesario comprobar que el número m es independiente de la elección de los puntos P_1 y P_2. Si se selecciona otro par, digamos $P_3(x_3, y_3)$ y $P_4(x_4, y_4)$, debe resultar el mismo valor de m. En la figura 3.2 (véase pág.19), el triángulo P_3P_4T es semejante al triángulo P_1P_2Q; por tanto,

$$\frac{\overline{QP_2}}{\overline{P_1Q}} = \frac{\overline{TP_4}}{\overline{P_3T}} \quad \text{o} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Así, P_1 y P_2 determinan la misma pendiente que P_3 y P_4.

EJEMPLO 3.1. La pendiente de la recta que une los puntos (1, 2) y (4, 6) de la figura 3.3 (véase pág.19) es $\frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$. Por tanto, cuando el punto sobre la recta se mueve tres unidades a la derecha, avanza cuatro unidades hacia arriba. Además, la pendiente no se ve afectada por el orden en el que se dan los puntos: $\frac{2-6}{1-4} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$. En general, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

El signo de la pendiente

El signo de la pendiente tiene significado. Por ejemplo, considere una recta $\mathscr{L}$ que asciende a medida que va hacia la derecha, como en la figura 3.4(a). Puesto que $y_2 > y_1$ y $x_2 > x_1$, se tiene que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$. *La pendiente de $\mathscr{L}$ es positiva.*

Ahora considere una recta $\mathscr{L}$ que baja a medida que va hacia la derecha, como en la figura 3.4(b). Ahí, $y_2 < y_1$, en tanto que $x_2 > x_1$, por lo que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$. *La pendiente de $\mathscr{L}$ es negativa.*

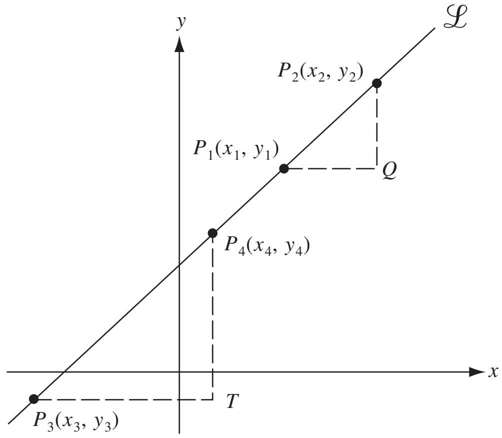


Fig. 3.2

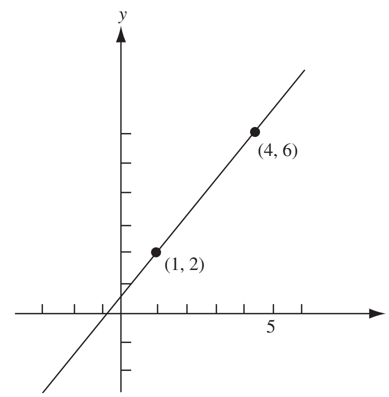


Fig. 3.3

Sea la recta $\mathscr{L}$ horizontal, como en la figura 3.4(c). Ahí $y_1 = y_2$, de manera que $y_2 - y_1 = 0$. Además, $x_2 - x_1 \neq 0$. Por tanto, $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$. *La pendiente de* $\mathscr{L}$ *es cero.*

La recta $\mathscr{L}$ es vertical en la figura 3.4(d), donde se observa que $y_2 - y_1 > 0$, mientras que $x_2 - x_1 = 0$. Por consiguiente, la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ no está definida. *La pendiente no está definida para una recta vertical* $\mathscr{L}$. (A veces esta situación se describe diciendo que la pendiente de $\mathscr{L}$ es "infinita".)

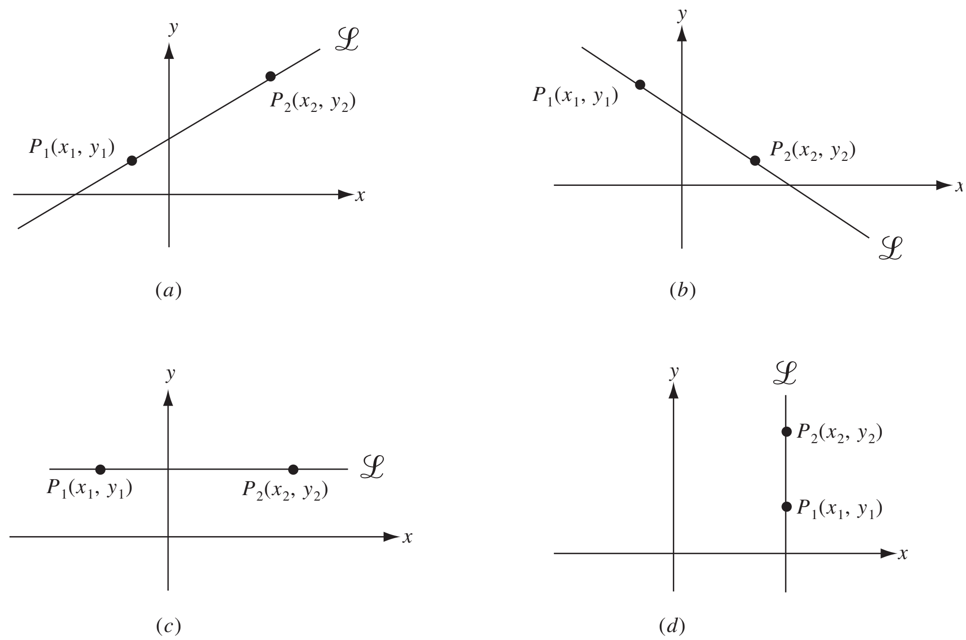


Fig. 3.4

Pendiente e inclinación

Se considera cualquier recta $\mathscr{L}$ con pendiente positiva que pase por un punto $P_1(x_1, y_1)$ como la recta mostrada en la figura 3.5. Se escoge un punto $P_2(x_2, y_2)$ en $\mathscr{L}$ de manera que $x_2 - x_1 = 1$. Entonces, la pendiente m de $\mathscr{L}$ es igual a la distancia $\overline{AP_2}$. A medida que se inclina la recta, $\overline{AP_2}$ aumenta sin límite, como se muestra en la figura 3.6(a). Así, la pendiente de $\mathscr{L}$ aumenta sin límite a partir de 0 (cuando $\mathscr{L}$ es horizontal) $a + \infty$ (cuando la recta es vertical). Mediante un razonamiento similar, en la figura 3.6(b) se muestra que a medida que la pendiente negativa de la recta se inclina, la pendiente decrece a partir de 0 (cuando la recta es horizontal) $a - \infty$ (cuando la recta es vertical).

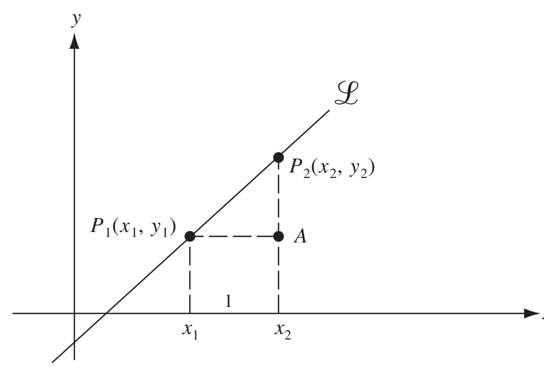


Fig. 3.5

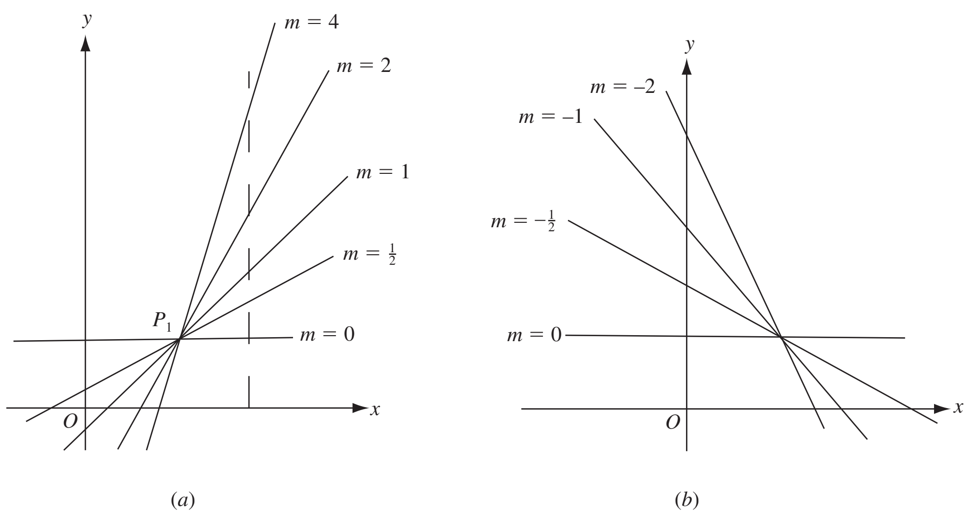


Fig. 3.6

Ecuaciones de rectas

Sea $\mathscr{L}$ una recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m, como se muestra en la figura 3.7(a). Para cualquier otro punto $P(x, y)$ sobre la recta, la pendiente m es, por definición, el cociente de $y - y_1$ y $x - x_1$. Así, para todo punto (x, y) en $\mathscr{L}$,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{3.1}$$

A la inversa, si $P(x, y)$ no está en la recta $\mathscr{L}$, como se presenta en la figura 3.7(b), entonces la pendiente $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ de la recta PP_1 es diferente de la pendiente m de $\mathscr{L}$; por tanto, la ecuación (3.1) no es válida para los puntos que no están en $\mathscr{L}$. Así, la recta $\mathscr{L}$ consta sólo de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación (3.1). En este caso se dice que $\mathscr{L}$ es la gráfica de la ecuación (3.1).

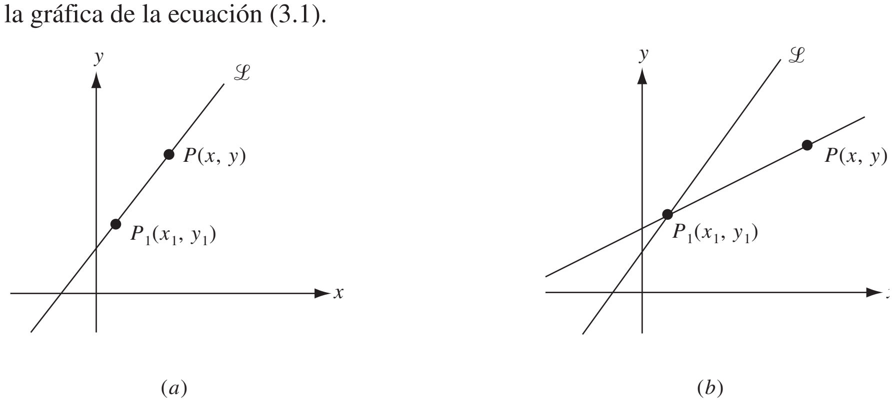


Fig. 3.7

La ecuación punto–pendiente

La ecuación punto–pendiente de una recta $\mathscr{L}$ es toda ecuación de la forma (3.1). Si la pendiente m de $\mathscr{L}$ es conocida, entonces cada punto (x_1, y_1) de $\mathscr{L}$ da una ecuación punto–pendiente de $\mathscr{L}$. Por tanto, hay infinitas ecuaciones punto–pendiente para $\mathscr{L}$. La ecuación (3.1) equivale a $y - y_1 = m(x - x_1)$.

EJEMPLO 3.2. *a*) La recta que pasa por el punto (2, 5) con pendiente 3 tiene una ecuación punto–pendiente $\frac{y-5}{x-2} = 3$.
b) Sea $\mathscr{L}$ la recta que pasa por los puntos (3, –1) y (2, 3). Su pendiente es $m = \frac{3-(-1)}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$. Dos ecuaciones punto–pendiente de $\mathscr{L}$ son $\frac{y+1}{x-3} = -4$ y $\frac{y-3}{x-2} = -4$.

Ecuación punto–intersección

Si se multiplica la ecuación (3.1) por $x - x_1$ se obtiene la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, que puede reducirse primero a $y - y_1 = mx - mx_1$ y luego a $y = mx + (y_1 - mx_1)$. Sea b el número $y_1 - mx_1$. Entonces, la ecuación para la recta $\mathscr{L}$ se vuelve

$$y = mx + b \qquad (\mathbf{3.2})$$

La ecuación (3.2) produce el valor $y = b$ cuando $x = 0$, así que el punto $(0, b)$ está en $\mathscr{L}$. Por ende, b es la coordenada y de la intersección de $\mathscr{L}$ y el eje y, como se muestra en la figura 3.8. El número b se denomina *la intersección de $\mathscr{L}$ con el eje y*, y la ecuación (3.2) recibe el nombre de *ecuación punto–intersección de $\mathscr{L}$*.

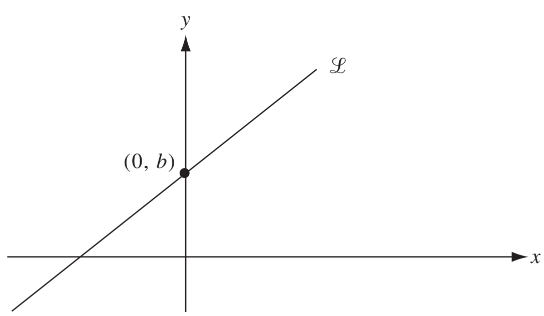


Fig. 3.8

EJEMPLO 3.3. La recta que pasa por los puntos (2, 3) y (4, 9) tiene pendiente

$$m = \frac{9-3}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

Su ecuación punto–intersección tiene la forma $y = 3x + b$. Como el punto (2, 3) está sobre la recta, (2, 3) debe satisfacer esta ecuación. La sustitución da $3 = 3(2) + b$, de la que resulta que $b = -3$. Así, la ecuación punto–intersección es $y = 3x - 3$.

Otro método para hallar esta ecuación consiste en escribir una ecuación punto–pendiente de la recta, como $\frac{y-3}{x-2} = 3$. Luego se multiplica por $x - 2$ y se suma 3, con lo que resulta $y = 3x - 3$.

Rectas paralelas

Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ rectas paralelas no verticales y A_1 y A_2 los puntos en los que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ cortan el eje y, como en la figura 3.9(*a*). Además, sea B_1 una unidad a la derecha de A_1 y B_2 una unidad a la derecha de A_2. Sean C_1 y C_2 las intersecciones de las verticales que pasan por B_1 y B_2 con $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Ahora, el triángulo $A_1B_1C_1$ es congruente con el triángulo $A_2B_2C_2$ (por el teorema de congruencia ángulo–lado–ángulo). Por ende, $\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ y

$$\text{Pendiente de } \mathscr{L}_1 = \frac{\overline{B_1C_1}}{1} = \frac{\overline{B_2C_2}}{1} = \text{ pendiente de } \mathscr{L}_2$$

Así, *las rectas paralelas tienen pendientes iguales*.

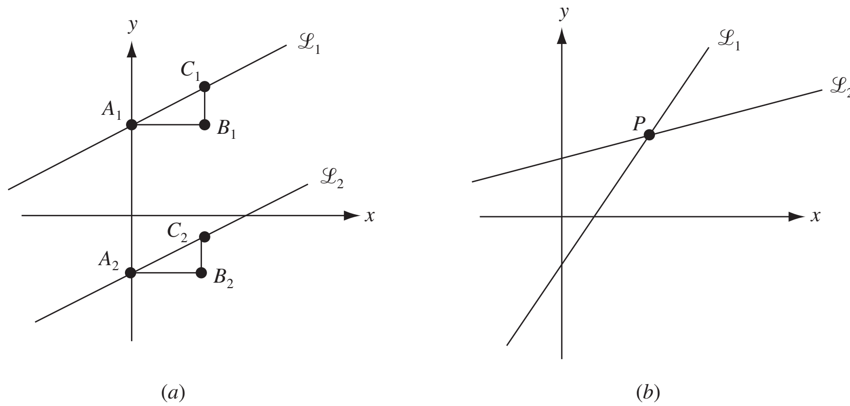


Fig. 3.9

Recíprocamente, supón que dos rectas diferentes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no son paralelas y se hallan en el punto P, como en la figura 3.9(*b*). Si $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tuvieran igual pendiente entonces serían la misma recta. Por tanto, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen pendientes diferentes.

Teorema 3.1. Dos rectas no verticales distintas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

EJEMPLO 3.4. Halle la ecuación punto–intersección de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por (4, 1) y es paralela a la recta $\mathscr{M}$ que tiene por ecuación $4x - 2y = 5$.

Al despejar y en la última ecuación se observa que $\mathscr{M}$ tiene la ecuación punto–intersección $y = 2x - \frac{5}{2}$. Por tanto, $\mathscr{M}$ tiene pendiente 2. La pendiente de la recta paralela $\mathscr{L}$ también debe ser 2, de manera que la ecuación punto–intersección de $\mathscr{L}$ presenta la forma $y = 2x + b$. Puesto que (4, 1) queda en $\mathscr{L}$, se puede escribir $1 = 2(4) + b$. Por ende, $b = -7$ y la ecuación punto–intersección de $\mathscr{L}$ es $y = 2x - 7$.

Rectas perpendiculares

En el problema 5 se debe probar lo siguiente.

Teorema 3.2. Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es –1.

Si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas perpendiculares, entonces $m_1m_2 = -1$. Esto equivale a $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$; por tanto, las pendientes de rectas perpendiculares son cada una la recíproca negativa de la otra.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle la pendiente de la recta de ecuación $3x - 4y = 8$. Trace la recta. ¿Los puntos (6, 2) y (12, 7) están en ella?

Al resolver para y en la ecuación se obtiene $y = \frac{3}{4}x - 2$. Esta es la ecuación punto–intersección; la pendiente es $\frac{3}{4}$ y la intersección con el eje y es –2.

Al sustituir 0 por x se observa muestra que la recta pasa por el punto (0, –2). Para trazar la recta se necesita otro punto. Si se remplaza x por 4 en la ecuación punto–intersección resulta $y = \frac{3}{4}(4) - 2 = 1$, de manera que (4, 1) también queda sobre la recta, como se presenta en la figura 3.10. (También es posible hallar otros puntos sobre la recta si se sustituye x por un número diferente de 4.)

Para probar si (6, 2) queda sobre la recta, se sustituye x por 6 y y por 2 en la ecuación original $3x - 4y = 8$. Los dos lados resultan diferentes; por tanto, (6, 2) no está sobre la recta. El mismo procedimiento demuestra que (12, 7) queda en la recta.

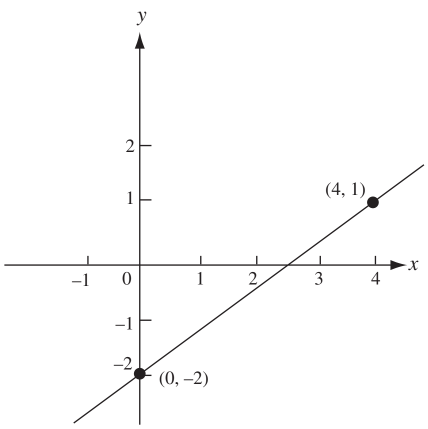


Fig. 3.10

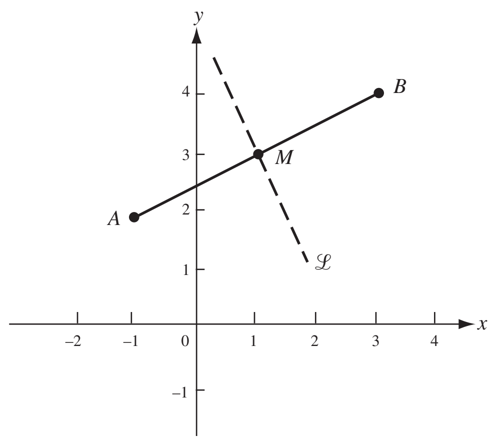


Fig. 3.11

2. La recta $\mathscr{L}$ es la mediatriz del segmento de recta que une los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 4)$, como se muestra en la figura 3.11. Halle una ecuación para $\mathscr{L}$.

$\mathscr{L}$ pasa por el punto medio M del segmento AB. Por las fórmulas del punto medio (2.2), las coordenadas de M son (1, 3). La pendiente de la recta que pasa por A y B es $\frac{4-2}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Sea m la pendiente de $\mathscr{L}$. Por el teorema 3.2, $\frac{1}{2}m = -1$, donde $m = -2$.

La ecuación punto–intersección para $\mathscr{L}$ tiene la forma $y = -2x + b$. Como $M(1, 3)$ queda en $\mathscr{L}$, se tiene que $3 = -2(1) + b$. Por ende, $b = 5$ y la ecuación punto–intersección de $\mathscr{L}$ es $y = -2x + 5$.

3. Determine si los puntos $A(1, -1)$, $B(3, 2)$ y $C(7, 8)$ son colineales, es decir, si se hallan en la misma recta.

A, B y C son colineales si y sólo si la recta AB es idéntica a la recta AC, lo que significa que la pendiente de AB es igual a la de AC. Las pendientes de AB y AC son $\frac{2-(-1)}{3-1} = \frac{3}{2}$ y $\frac{8-(-1)}{7-1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Por tanto, A, B y C son colineales.

4. Pruebe analíticamente que la figura obtenida al unir los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero es un paralelogramo.

Coloque el cuadrilátero con vértices consecutivos A, B, C y D en un sistema de coordenadas de manera que A sea el origen, B quede en el eje x positivo y C y D queden por encima del eje x (fig. 3.12 en la siguiente página). Sea b la coordenada x de B, (u, v) las coordenadas de C, y (x, y) las coordenadas de D. Entonces, por la fórmula del punto medio (2.2), los puntos medios M_1, M_2, M_3 y M_4 de los lados AB, BC, CD y DA tienen coordenadas $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{u+b}{2}, \frac{v}{2}\right)$, $\left(\frac{x+u}{2}, \frac{y+v}{2}\right)$ y $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, respectivamente. Hay que mostrar que M_1, M_2, M_3 y M_4 es un paralelogramo. Para hacerlo, basta probar que las rectas M_1M_2 y M_3M_4 son paralelas y que las rectas M_2M_3 y M_1M_4 también lo son. Se calcula entonces las pendientes de tales rectas:

$$\text{Pendiente } (M_1M_2) = \frac{\frac{v}{2} - 0}{\frac{u+b}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{u}{2}} = \frac{v}{u} \qquad \text{Pendiente } (M_3M_4) = \frac{\frac{y}{2} - \frac{y+v}{2}}{\frac{x}{2} - \frac{x+u}{2}} = \frac{-\frac{v}{2}}{-\frac{u}{2}} = \frac{v}{u}$$

$$\text{Pendiente } (M_2M_3) = \frac{\frac{y+v}{2} - \frac{v}{2}}{\frac{x+u}{2} - \frac{u+b}{2}} = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{x-b}{2}} = \frac{y}{x-b} \qquad \text{Pendiente } (M_1M_4) = \frac{\frac{y}{2} - 0}{\frac{x}{2} - \frac{b}{2}} = \frac{y}{x-b}$$

Puesto que la pendiente de (M_1M_2) = pendiente de (M_3M_4), M_1M_2 y M_3M_4 son paralelas. Como la pendiente (M_2M_3) = pendiente de (M_1M_4), M_2M_3 y M_1M_4 también son paralelas. Por tanto, $M_1M_2M_3M_4$ es un paralelogramo.

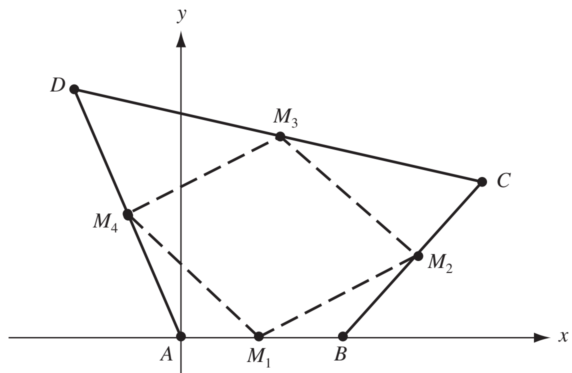


Fig. 3.12

5. Pruebe el teorema 3.2.

Suponga primero que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son rectas perpendiculares no verticales con pendientes m_1 y m_2. Debe demostrar que $m_1m_2 = -1$. Sean M_1 y M_2 las rectas que pasan por el origen O y que son paralelas a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ como se observa en la figura 3.13(*a*). La pendiente de M_1 es m y la pendiente de M_2 es m_2 (por el teorema 3.1). Además, M_1 y M_2 son perpendiculares, ya que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son perpendiculares.

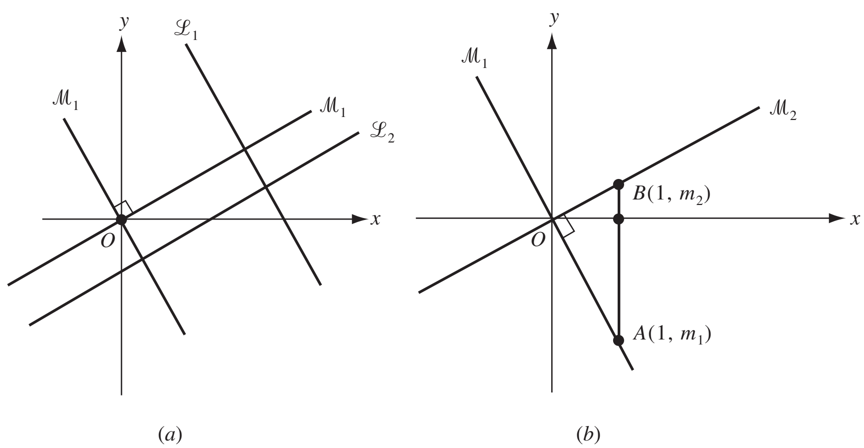


Fig. 3.13

Ahora, sea A el punto M_1 con coordenada x igual a 1, y sea B el punto en M_2 con coordenada x igual a 1, como se presenta en la figura 3.13(*b*). La ecuación punto–intersección de M_1 es $y = m_1x$; por tanto, la coordenada y de A es m_1, ya que su coordenada x es 1. De igual forma, la coordenada y de B es m_2. Por la fórmula de la distancia (2.1),

$$\overline{OB} = \sqrt{(1-0)^2 + (m_2 - 0)^2} = \sqrt{1 + m_2^2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{(1-0)^2 + (m_1 - 0)^2} = \sqrt{1 + m_1^2}$$

$$\overline{BA} = \sqrt{(1-1)^2 + (m_2 - m_1)^2} = \sqrt{(m_2 - m_1)^2}$$

Entonces, por el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo BOA,

$$\overline{BA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2$$

o

$$(m_2 - m_1)^2 = (1 + m_2^2) + (1 + m_1^2)$$

$$m_2^2 - 2m_2m_1 + m_1^2 = 2 + m_2^2 + m_1^2$$

$$m_2m_1 = -1$$

Ahora, recíprocamente, suponga que $m_1m_2 = -1$, donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas no verticales $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Entonces, $\mathscr{L}_1$ no es paralela a $\mathscr{L}_2$. (De lo contrario, por el teorema 3.1, $m_1 = m_2$ y, por tanto, $m_1^2 = -1$, lo que contradice el hecho de que el cuadrado de un número real nunca es negativo.) Debe mostrarse que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son perpendiculares. Sea P la intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ (fig. 3.14). Sea $\mathscr{L}_3$ la recta que pasa por P que es perpendicular a $\mathscr{L}_1$. Si m_3 es la pendiente de $\mathscr{L}_3$, entonces, por la primera parte de la demostración, $m_1m_3 = -1$ y, por consiguiente, $m_1m_3 = m_1m_2$. Como $m_1m_3 = -1$, entonces $m_1 \neq 0$; por tanto, $m_3 = m_2$. Como $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ pasan por el mismo punto P y tiene la misma pendiente, entonces deben coincidir. Puesto que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_3$ son perpendiculares, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ también lo son.

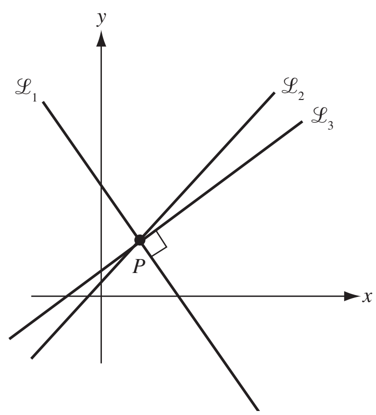


Fig. 3.14

6. Pruebe que si a y b no son ambos cero, entonces la ecuación $ax + by = c$ es la ecuación de una recta y, recíprocamente, toda recta tiene una ecuación de esa forma.

Suponga que $b \neq 0$. Entonces, si se despeja y en la ecuación $ax + by = c$ se obtiene la ecuación punto–intersección $y = (-a/b)\,x + c/b$ de una recta. Si $b = 0$, en consecuencia $a \neq 0$, y la ecuación $ax + by = c$ se reduce a $ax = c$; esto equivale a $x = c/a$, la ecuación de una recta vertical.

Recíprocamente, toda recta no vertical tiene una ecuación punto–intersección $y = mx + b$, la cual equivale a $-mx + y = b$, una ecuación de la forma deseada. Una recta vertical tiene una ecuación de la forma $x = c$, la cual también es una ecuación de la forma requerida con $a = 1$ y $b = 0$.

7. Demuestra que la recta $y = x$ forma un ángulo de 45° con el eje x positivo; es decir, el ángulo BOA en la figura 3.15 tiene 45°.

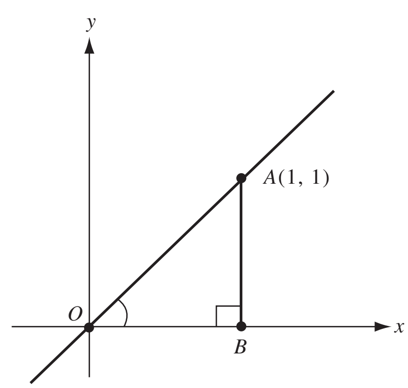


Fig. 3.15

Sea A el punto sobre la recta $y = x$ con coordenadas (1, 1). Se traza una perpendicular AB al eje x positivo. Entonces, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OB} = 1$. Por tanto, el ángulo OAB = ángulo BOA, ya que son los ángulos de la base del triángulo isósceles BOA. Por consiguiente, el ángulo OBA es recto:

$$\text{Ángulo } OAB + \text{ángulo } BOA = 180° - \text{ángulo } OBA = 180° - 90° = 90°$$

Puesto que el ángulo BOA = ángulo OAB, cada uno tiene 45°.

8. Pruebe que la distancia d de un punto $P(x_1, y_1)$ a una recta $\mathscr{L}$ con una ecuación $ax + by = c$ está dada por la fórmula $d = \frac{|ax+by-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Sea $\mathscr{M}$ la recta que pasa por P y es perpendicular a $\mathscr{L}$. Entonces, $\mathscr{M}$ corta a $\mathscr{L}$ en algún punto Q de coordenadas (u, v) como se muestra en la figura 3.16. Claramente, d es la longitud $\overline{PQ}$, de manera que si se puede hallar u y v, entonces resulta posible calcular d mediante la fórmula de la distancia. La pendiente de $\mathscr{L}$ es $-a/b$. Por el teorema 3.2, la pendiente de $\mathscr{M}$ es b/a. Así, la ecuación punto–pendiente de $\mathscr{M}$ es $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{b}{a}$. Luego, u y v son las soluciones del par de ecuaciones $au + bv = c$ y $\frac{v-y_1}{u-x_1} = \frac{b}{a}$. Tediosos cálculos matemáticos ofrecen la solución

$$u = \frac{ac + b^2x_1 + aby_1}{a^2+b^2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{bc - abx_1 - a^2y_1}{a^2+b^2}$$

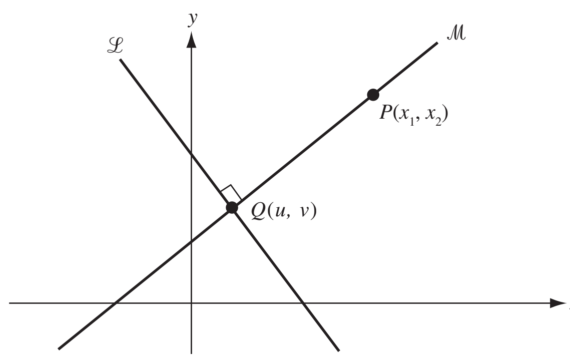


Fig. 3.16

La fórmula de la distancia junto con cálculos adicionales da,

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x_1-u)^2 - (y_1-v)^2} = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Halle una ecuación punto–pendiente para la recta que pasa por cada uno de los siguientes pares de puntos: *a*) (3, 6) y (2, –4); *b*) (8, 5) y (4, 0); *c*) (1, 3) y el origen; *d*) (2, 4) y (–2, 4).

Respuestas: *a*) $\frac{y-6}{x-3} = 10$; *b*) $\frac{y-5}{x-8} = \frac{5}{4}$; *c*) $\frac{y-3}{x-1} = 3$; *d*) $\frac{y-4}{x-2} = 0$.

10. Halle la ecuación punto–intersección de cada recta que:

a) Pasa por los putos (4, –2) y (1, 7)
b) Tiene pendiente 3 e intersección con el eje y igual a 4
c) Pasa por los puntos (–1, 0) y (0, 3)
d) Pasa por (2, –3) y es paralela al eje x
e) Pasa por (2, 3) y sube 4 unidades por cada unidad que aumenta en x
f) Pasa por (–2, 2) y baja 2 unidades por cada unidad que aumenta en x
g) Pasa por (3, –4) y es paralela a la recta con ecuación $5x - 2y = 4$
h) Pasa por el origen y es paralela a la recta con ecuación $y = 2$
i) Pasa por (–2, 5) y es perpendicular a la recta de ecuación $4x + 8y = 3$
j) Pasa por el origen y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y = 1$
k) Pasa por (2, 1) y es perpendicular a la recta de ecuación $x = 2$
l) Pasa por el origen y es bisectriz del ángulo entre los ejes positivos x y y

Respuestas: *a*) $y = -3x + 10$; *b*) $y = 3x + 3$; *c*) $y = 3x + 3$; *d*) $y = -3$; *e*) $y = 4x - 5$; *f*) $y = -2x - 2$; *g*) $y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2}$; *h*) $y = 0$; *i*) $y = 2x + 9$; *j*) $y = -\frac{2}{3}x$; *k*) $y = 1$; *l*) $y = x$

11. *a*) Describa las rectas que tienen ecuaciones de la forma $x = a$.
b) Describa las rectas que tienen ecuaciones de la forma $y = b$.
c) Describa la recta de la ecuación $y = -x$.

12. *a*) Halle las pendientes y las intersecciones con el eje y de las rectas que tienen las ecuaciones siguientes: *i*) $y = 3x - 2$; *ii*) $2x - 5y = 3$; *iii*) $y = 4x - 3$; *iv*) $y = -3$; *v*) $\frac{y}{2} + \frac{x}{3} = 1$.
b) Encuentre las coordenadas de un punto distinto de $(0, b)$ en cada una de las rectas del inciso *a*).

Respuestas: *ai*) $m = 3$, $b = -2$; *ii*) $m = \frac{2}{5}$; *iii*) $m = 4$, $b = -3$; *iv*) $m = 0$, $b = -3$; *v*) $m = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; *bi*) (1, 1); *ii*) (–6, –3); *iii*) (1, 1); *iv*) (1, –3); *v*) (3, 0)

13. Si el punto $(3, k)$ está en la recta con pendiente $m = -2$ y pasa por el punto (2, 5), halle k.

Respuesta: $k = 3$

14. ¿El punto (3, –2) está en la recta que pasa por los puntos (8, 0) y (–7, –6)?

Respuesta: sí.

15. Utilice las pendientes para determinar si los puntos (7, –1), (10, 1) y (6, 7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Respuesta: sí lo son.

16. Utilice las pendientes para determinar si (8, 0), (–1, –2), (–2, 3) y (7, 5) son los vértices de un paralelogramo.

Respuesta: sí lo son.

17. ¿En qué condiciones son colineales los puntos $(u, v + w)$, $(v, u + w)$ y $(w, u + v)$?

Respuesta: siempre.

18. Halle k de manera que los puntos $A(7, 3)$, $B(-1, 0)$ y $C(k, -2)$ sean los vértices de un triángulo rectángulo con ángulo recto en B.

Respuesta: $k = 1$

19. Determine si los pares de rectas siguientes son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

a) $y = 3x + 2$ y $y = 3x - 2$
b) $y = 2x - 4$ y $y = 3x + 5$
c) $3x - 2y = 5$ y $2x + 3y = 4$
d) $6x + 3y = 1$ y $4x + 2y = 3$
e) $x = 3$ y $y = -4$
f) $5x + 4y = 1$ y $4x + 5y = 2$
g) $x = -2$ y $x = 7$.

Respuestas: *a*) paralelas; *b*) ninguna de las dos; *c*) perpendiculares; *d*) paralelas; *e*) perpendiculares; *f*) ninguna de las dos; *g*) paralelas

20. Trace la recta determinada por la ecuación $2x + 5y = 10$. Establezca si los puntos (10, 2) y (12, 3) pertenecen a esa recta.

21. ¿Para qué valores de k tendrá la recta $kx - 3y = 4k$ las propiedades siguientes: *a*) pendiente 1; *b*) intersección con el eje y de 2; *c*) pasa por el punto (2, 4); *d*) es paralela a la recta $2x - 4y = 1$; *e*) es perpendicular a la recta $x - 6y = 2$?

Respuestas: *a*) $k = 3$; *b*) $k = -\frac{3}{2}$; *c*) $k = -6$; *d*) $k = \frac{3}{2}$; *e*) $k = -18$.

22. Describa geométricamente las familias de rectas *a*) $y = mx - 3$ y *b*) $y = 4x + b$, donde m y b son números reales cualesquiera.

Respuesta: *a*) rectas con intersección con el eje $y = 3$; *b*) rectas con pendiente 4.

23. En el triángulo con vértices $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C(3, 3)$, halle las ecuaciones para *a*) la mediana de B al punto medio del lado opuesto; *b*) la mediatriz del lado BC, y *c*) la altura de B al lado opuesto.

Respuestas: *a*) $y = -3x + 6$; *b*) $x + 3y = 7$; *c*) $y = -x + 2$

4

Círculos

Ecuaciones de los círculos

Para que un punto $P(x, y)$ esté en el círculo con centro $C(a, b)$ y radio r, la distancia $\overline{PC}$ debe ser igual a r (fig. 4.1). Por la fórmula de la distancia (2.1),

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Por consiguiente, P está en el círculo si y sólo si

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) se denomina *ecuación estándar* del círculo con centro en (a, b) y radio r.

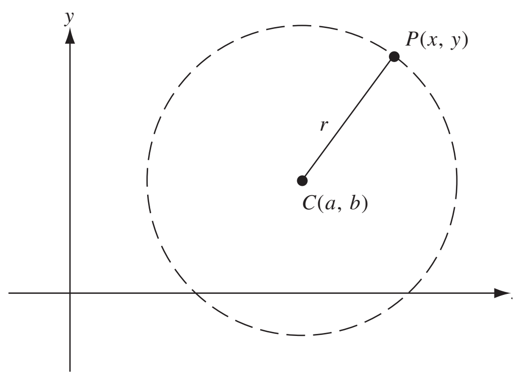


Fig. 4.1

EJEMPLO 4.1.

a) El círculo con centro (3, 1) y radio 2 tiene la ecuación $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

b) El círculo con centro (2, –1) y radio 3 tiene la ecuación $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

c) ¿Cuál es el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $(x - 4)^2 + (y - 5) = 25$?

Por (4.1), ésta es la ecuación del círculo con centro en (4, 5) y radio 5. Se dice que ese círculo es *la gráfica* de la ecuación dada, es decir, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación.

d) La gráfica de la ecuación $(x + 3)^2 + y^2 = 2$ es el círculo con centro en (–3, 0) y radio $\sqrt{2}$.

Ecuación estándar de un círculo

La ecuación estándar de un círculo con centro en el origen (0, 0) y radio r es

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.2}$$

Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación del círculo con centro en el origen y radio 1. La gráfica de $x^2 + y^2 = 5$ es el círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{5}$.

La ecuación de un círculo algunas veces aparece disfrazada. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0 \tag{4.3}$$

resulta ser equivalente a

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4 \tag{4.4}$$

La ecuación (4.4) es la ecuación estándar de un círculo con centro en (–4, 3) y radio 2.

La ecuación (4.4) se desarrolla a partir de (4.3) mediante un proceso denominado *completar el cuadrado*. En términos generales, el proceso implica hallar el número que debe agregarse a la suma $x^2 + Ax$ para obtener un cuadrado.

Aquí se observa que $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2$. Por tanto, en general, *se debe agregar* $\left(\frac{A}{2}\right)^2$ *a* $x^2 + Ax$ *para obtener el cuadrado* $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2$. Por ejemplo, para obtener un cuadrado de $x^2 + 8x$ se suma $\left(\frac{8}{2}\right)^2$, o sea, 16. El resultado, $x^2 + 8x + 16$, es igual a $(x + 4)^2$. Éste es el proceso de completar el cuadrado.

Considere la ecuación (4.3) original: $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$. Con el fin de completar el cuadrado en $x^2 + 8x$ se suma 16. Para completar el cuadrado en $y^2 - 6y$ se suma $\left(-\frac{6}{2}\right)^2$, lo que da 9. Pero como se agregaron 16 y 9 al miembro (lado) izquierdo de la ecuación, también deben sumarse al miembro derecho, con lo que se obtiene

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + 21 = 16 + 9$$

Esto equivale a

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + 21 = 25$$

y al restar 21 de ambos miembros se llega a (4.4).

EJEMPLO 4.2. Considere la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0$. Al completar el cuadrado se obtiene

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) + 20 = 4 + 25$$
$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Entonces, la ecuación original es la de un círculo con centro en (2, 5) y radio 3.

El proceso de completar el cuadrado puede aplicarse a toda ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{4.5}$$

para obtener

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 + C = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$$

o

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \tag{4.6}$$

Hay tres casos que dependen de si $A^2 + B^2 - 4C$ es positivo, cero o negativo.

Caso 1: $A^2 + B^2 - 4C > 0$. Aquí, (4.6) es la ecuación estándar de un círculo con centro en $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$.

Caso 2: $A^2 + B^2 - 4C = 0$. Una suma de cuadrados de dos cantidades es cero si y sólo si cada una de las cantidades es cero. Por tanto, (4.6) equivale a la conjunción de las ecuaciones $x + \frac{A}{2} = 0$ y $y + \frac{B}{2} = 0$ en este caso, y la única solución de (4.6) es el punto $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Así, la gráfica de (4.5) es un solo punto, que puede considerarse un *círculo degenerado* de radio 0.

Caso 3: $A^2 + B^2 - 4C < 0$. La suma de dos cuadrados no puede ser negativa, de manera que en este caso (4.5) no tiene solución.

Se puede demostrar que todo círculo tiene una ecuación de la forma (4.5). Si su centro es (a, b) y su radio es r, entonces su ecuación estándar es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Al desarrollar se obtiene $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$, o

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Identifique las gráficas de *a*) $2x^2 + 2y^2 - 4x + y + 1 = 0$; *b*) $x^2 + y^2 - 4y + 7 = 0$; *c*)$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$.

a) Primero divida entre 2, para obtener $x^2 + y^2 - 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$. Luego complete los cuadrados

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$$

$$(x-1)^2 + (y = \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{2} = \frac{17}{16} - \frac{8}{16} = \frac{9}{16}$$

Por tanto, la gráfica es el círculo con centro $(1, -\frac{1}{4})$ y radio $\frac{3}{4}$.

b) Complete el cuadrado:

$$x^2 + (y - 2)^2 + 7 = 4$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = -3$$

Puesto que el miembro derecho es negativo, no existen puntos en la gráfica.

c) Complete el cuadrado:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 10 = 9 + 1$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

La única solución es el punto (3, 1).

2. Halle la ecuación estándar del círculo con centro en $C(2, 3)$ que pasa por el punto $P(-1, 5)$.
El radio del círculo es la distancia

$$\overline{CP} = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

de manera que la ecuación estándar es $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.

3. Halle la ecuación estándar del círculo que pasa por los puntos $P(3, 8)$, $Q(9,6)$ y $R(13, -2)$.
Primer método: el círculo tiene una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Sustituya los valores de x y y en el punto P para obtener $9 + 64 + 3A + 8B + C = 0$ o

$$3A + 8B + C = -73 \tag{1}$$

Un procedimiento similar para los puntos Q y R da las ecuaciones

$$9A + 6B + C = -117 \tag{2}$$

$$13A - 2B + C = -173 \tag{3}$$

Se elimina C de (1) y (2) al restar (2) de (1):

$$-6A + 2B = 44 \quad \text{o} \quad -3A + B = 22 \tag{4}$$

Se elimina C de (1) y (3) al restar (3) de (1):

$$-10A + 10B = 100 \quad \text{o} \quad -A + B = 10 \tag{5}$$

Se elimina B de (4) y (5) al restar (5) menos (4), con lo que se obtiene $A = -6$. Se sustituye este valor en (5) para hallar que $B = 4$. Luego se resuelve para C en (1): $C = -87$.
Así, la ecuación original para el círculo es $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 87 = 0$. Al completar los cuadrados se obtiene

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 87 + 9 + 4 = 100$$

Por ende, el círculo tiene centro $(3, -2)$ y radio 10.
Segundo método: la mediatriz de cualquier cuerda de un círculo pasa por el centro de éste. Por tanto, la mediatriz $\mathscr{L}$ de la cuerda PQ cortará la mediatriz M de la cuerda QR en el centro del círculo (fig. 4.2).

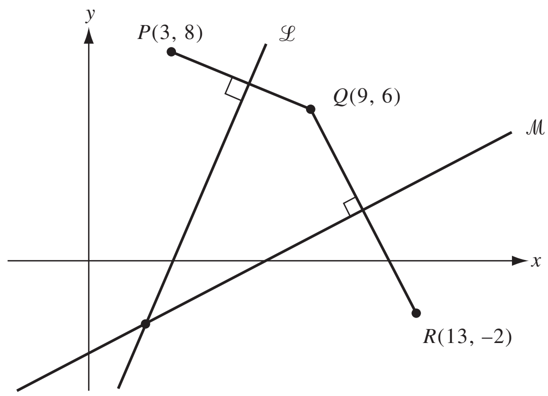


Fig. 4.2

La pendiente de la recta PQ es $-\frac{1}{3}$. Luego, por el teorema 3.2 la pendiente de $\mathscr{L}$ es 3. Asimismo, $\mathscr{L}$ pasa por el punto medio (6, 7) del segmento PQ. Luego, una ecuación punto–pendiente de $\mathscr{L}$ es $\frac{y-7}{x-6} = 3$ y, por tanto, su ecuación punto–intersección es $y = 3x - 11$. De igual forma, la pendiente de la recta QR es –2 y, por consiguiente, la pendiente de $\mathscr{M}$ es $\frac{1}{2}$. Puesto que $\mathscr{M}$ pasa por el punto medio (11, 2) del segmento QR, tiene una ecuación punto–pendiente de $\frac{y-2}{x-11}=\frac{1}{2}$, lo que da la ecuación punto–intersección $y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$ y se puede escribir

$$3x-11=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

de lo que se obtiene que $x = 3$. Por tanto,

$$y = 3x - 11 = 3(3) - 11 = -2$$

Luego, el centro se halla en (3, –2). El radio es la distancia entre el centro y el punto (3, 8):

$$\sqrt{(-2-8)^2+(3-3)^2}=\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=10$$

Así, la ecuación estándar del círculo es $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 100$.

4. Halle el centro y el radio del círculo que pasa por $P(1, 1)$ y es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $Q(3, 3)$ (fig. 4.3).

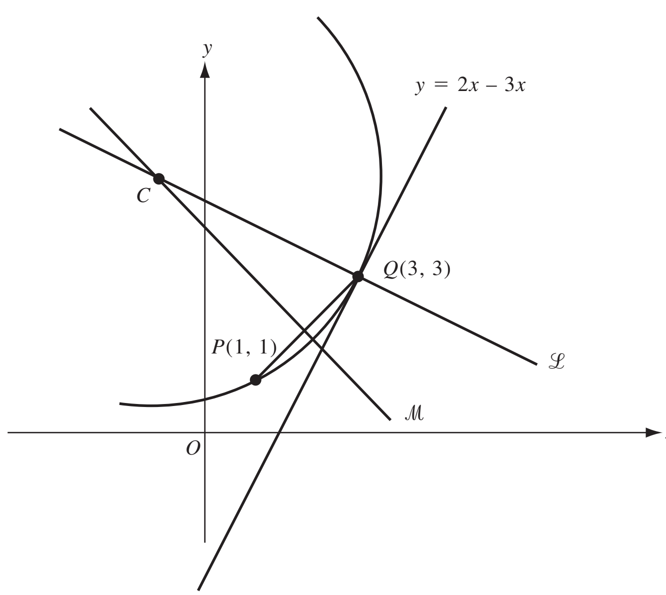


Fig. 4.3

La recta $\mathscr{L}$ perpendicular a $y = 2x - 3$ en (3, 3) debe pasar por el centro del círculo. Por el teorema 3.2, la pendiente de $\mathscr{L}$ es $-\frac{1}{2}$. Por consiguiente, la ecuación punto–intersección de $\mathscr{L}$ tiene la forma $y = -\frac{1}{2}x + b$. Como (3, 3) está en $\mathscr{L}$, tenemos que $3 = -\frac{1}{2}(3) + b$; por ende, $b = \frac{9}{2}$ y la ecuación *de* $\mathscr{L}$ es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

La mediatriz $\mathscr{M}$ de la cuerda PQ de la figura 4.3 también pasa por el centro del círculo, de manera que la intersección de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ será el centro del círculo. La pendiente de $\overline{PQ}$ es 1. Entonces, por el teorema 3.2 la pendiente de $\mathscr{M}$ es –1. Luego, $\mathscr{M}$ tiene la ecuación punto–intersección $y = -x + b'$. Como el punto medio (2, 2) de la cuerda PQ es un punto en $\mathscr{M}$, se tiene que $2 = -(2) + b'$; por ende, $b' = 4$ y la ecuación de $\mathscr{M}$ es $y = -x + 4$. Debes hallar la solución común de $y = -x + 4$ y $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$. Si se establece la igualdad

$$-x + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

resulta $x = -1$. Por tanto, $y = -x + 4 = 5$, y el centro C del círculo es (–1, 5). El radio es la distancia $\overline{PC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$. La ecuación estándar del círculo es, entonces, $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 20$.

5. Halle la ecuación estándar de todo círculo que pase por los puntos $P(1, -1)$ y $Q(3, 1)$ y sea tangente a la recta $y = -3x$.

Sea $C(c, d)$ el centro de uno de los círculos, y sea A el punto de tangencia (fig. 4.4). Entonces, puesto que $\overline{CP} = \overline{CQ}$, se tiene que

$$\overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2 \quad \text{o} \quad (c-1)^2 + (d+1)^2 = (c-3)^2 + (d-1)^2$$

Desarrollado y simplificado se obtiene

$$c + d = 2 \qquad (1)$$

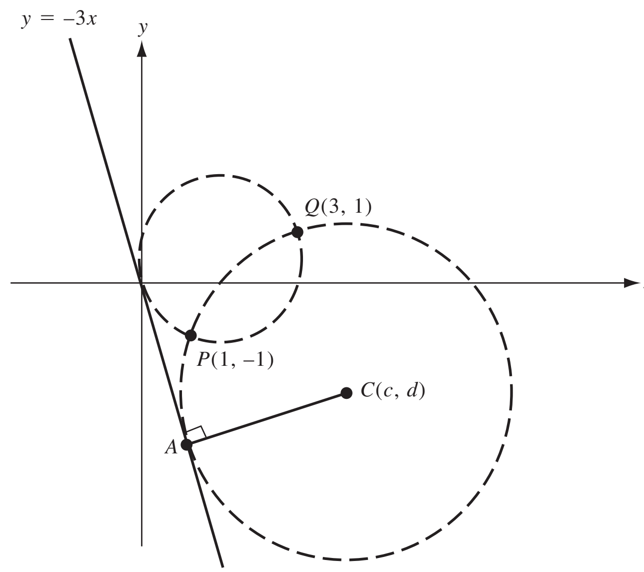


Fig. 4.4

Además, $\overline{CP} = \overline{CA}$ y por la fórmula del problema 8 en el capítulo 3, $\overline{CA} = \frac{3c+d}{\sqrt{10}}$. Si establecemos la igualdad $\overline{CP}^2 = \overline{CA}^2$ resulta $(c-1)^2 + (d+1)^2 = \frac{(3c+d)^2}{10}$. Al sustituir (1) en el miembro derecho y al multiplicarlo por 10 se obtiene

$$10[(c-1)^2 + (d+1)^2] = (2c+2)^2, \qquad \text{de donde} \qquad 3c^2 + 5d^2 - 14c + 10d + 8 = 0$$

Por (1) se puede remplazar d por $2 - c$ para obtener

$$2c^2 - 11c + 12 = 0 \quad \text{o} \quad (2c-3)(c-4) = 0$$

Por tanto, $c = \frac{3}{2}$ o $c = 4$. Entonces (1) da dos soluciones: $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$ y $c = 4$, $d = -2$. Como el radio $\overline{CA} = \frac{3c+d}{\sqrt{10}}$, estas soluciones producen radios de $\frac{10/2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ y $\frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$. Por ende, hay dos círculos de ese tipo y sus ecuaciones estándar son

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad (x-4)^2+(y+2)^2=10$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que satisfagan las condiciones siguientes:

a) Centro en (3, 5) y radio 2.
b) Centro en (4, –1) y radio 1.
c) Centro en (5, 0) y radio $\sqrt{3}$.
d) Centro en (–2, –2) y radio $5\sqrt{2}$.
e) Centro en (–2, 3) y que pasa por (3, –2).
f) Centro en (6, 1) y que pasa por el origen.

Respuestas: *a*) $(x-3)^2+(y-5)^2=4$; *b*) $(x-4)^2+(y+1)^2=1$; *c*) $(x-5)^2+y^2=3$; *d*) $(x+2)^2+(y+2)^2=50$; *e*) $(x+2)^2+(y-3)^2=50$; *f*) $(x-6)^2+(y-1)^2=37$

7. Identifique las gráficas de estas ecuaciones:

a) $x^2+y^2+16x-12y+10=0$.
b) $x^2+y^2-4x+5y+10=0$.
c) $x^2+y^2+x-y+=0$.
d) $4x^2+4y^2+8y-3=0$.
e) $x^2+y^2-x-2y+3=0$.
f) $x^2+y^2+\sqrt{2}x-2=0$.

Respuestas: *a*) círculo con centro en (–8, 6) y radio $3\sqrt{10}$; *b*) círculo con centro en $(2,-\frac{5}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$; *c*) círculo con centro en $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *d*) círculo con centro en (0, –1) y radio $\frac{7}{2}$; *e*) gráfica vacía; *f*) círculo con centro en $(-\sqrt{2}/2,0)$ y radio $\sqrt{5/2}$.

8. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que pasan por *a*) (–2, 1), (1, 4) y (–3, 2); *b*) (0, 1), (2, 3) y $(1, 1+\sqrt{3})$; *c*) (6, 1), (2, –5) y (1, –4); *d*) (2, 3), (–6, –3) y (1, 4).

Respuestas: *a*) $(x+1)^2+(y-3)^2=5$; *b*) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$; *c*) $(x-4)^2+(y+2)^2=13$; *d*) $(x+2)^2+y^2=25$.

9. ¿Para qué valores de k el círculo $(x+2k)^2+(y-3k)^2=10$ pasa por el punto (1, 0)?

Respuesta: $k=\frac{9}{13}$ o $k=-1$

10. Halle las ecuaciones estándar de los círculos de radio 2, tangentes a ambas rectas $x=1$ y $y=3$.

Respuestas: $(x+1)^2+(y-1)^2=4$; $(x+1)^2+(y-5)^2=4$; $(x-3)^2+(y-1)^2=4$; $(x-3)^2+(y-5)^2=4$

11. Halle el valor de k, de manera que $x^2+y^2+4x-6y+k=0$ sea la ecuación de un círculo de radio 5.

Respuesta: $k=-12$

12. Halle la ecuación estándar del círculo que tiene como diámetro el segmento que une (2, –3) y (6, 5).

Respuesta: $(x-4)^2+(y-1)^2=20$

13. Halle la ecuación estándar de todo círculo que pase por el origen, tenga radio 5 y cuya coordenada *y* de su centro sea -4.

Respuesta: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ o $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$

14. Halle la ecuación estándar del círculo que pasa por los puntos $(8, -5)$ y $(-1, 4)$ y cuyo centro se encuentre en la recta $2x + 3y = 3$.

Respuesta: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 41$

15. Halle la ecuación estándar del círculo con centro $(3, 5)$, tangente a la recta $12x - 5y + 2 = 0$.

Respuesta: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$

16. Halle la ecuación estándar del círculo que pasa por el punto $(1, 3+\sqrt{2})$ y es tangente a la recta $x + y = 2$ en $(2, 0)$.

Respuesta: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 18$

17. Pruebe analíticamente que un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto (fig. 4.5).

18. Halle la longitud de una tangente que va de $(6, -2)$ al círculo $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ (fig. 4.6).

Respuesta: 7

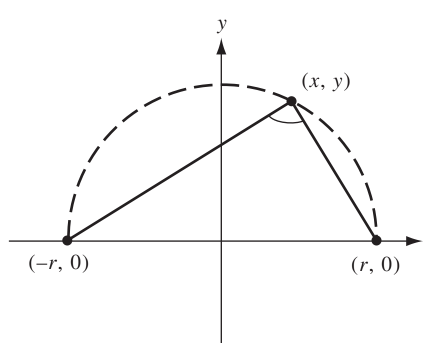


Fig. 4.5

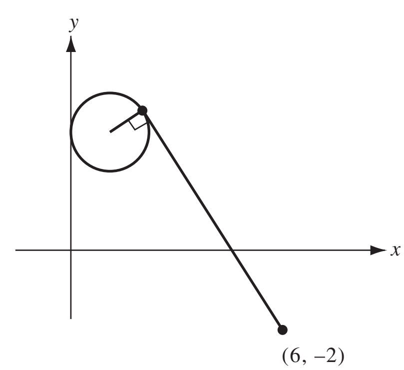


Fig. 4.6

19. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que pasan por $(2, 3)$ y son tangentes a ambas rectas $3x - 4y = -1$ y $4x + 3y = 7$.

Respuesta: $(x-2)^2 + y^2 (y-8) = 25$ y $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1$

20. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que tienen sus centros en la recta $4x + 3y = 8$ y son tangentes a ambas rectas $x + y = -2$ y $7x - y = -6$.

Respuesta: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ y $(x+4)^2 + (y-8)^2 = 18$

21. Halle la ecuación estándar del círculo concéntrico con el círculo $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$ y es tangente a la recta $2x - y = 3$.

Respuesta: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$

22. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que tienen radio 10 y son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4).

Respuesta: $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 100$ y $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 100$

23. Halle las distancias máxima y mínima del punto (7, 12) al círculo $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

Respuestas: 22 y 12

24. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos círculos que se interesecan y están determinados por las ecuaciones $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Para todo número $k \neq -1$, muestra que

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 + k(x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

es la ecuación de un círculo que pasa por los puntos de intersección $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$. Demuestra, recíprocamente, que cada uno de los círculos puede representarse por una de tales ecuaciones para un k conveniente.

25. Halle la ecuación estándar del círculo que pasa por el punto (–3, 1) y que contiene los puntos de intersección de los círculos $x^2 + y^2 + 5x = 1$ y $x^2 + y^2 + y = 7$.

Respuesta (*usa el problema 24*): $(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{569}{100}$

26. Halle las ecuaciones estándar de los círculos que tienen centros en la recta $5x - 2y = -21$ y son tangentes a ambos ejes de coordenadas.

Respuestas: $(x + 7)^2 + (y + 7)^2 = 49$ y $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

27. *a*) Si dos círculos $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ se cortan en dos puntos, halle una ecuación de la recta que pasa por sus puntos de intersección.

b) Pruebe que si dos círculos se cortan en dos puntos, entonces la recta que pasa por sus puntos de intersección es perpendicular a la recta que pasa por sus centros.

Respuestas: *a*) $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$

28. Halle los puntos de intersección de los círculos $x^2 + y^2 + 8y - 64 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.

Respuesta: (8, 0) y $\left(\frac{24}{15}, \frac{24}{5}\right)$.

29. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por (4, 10) y son tangentes al círculo $x^2 + y^2 - 4y - 36 = 0$.

Respuesta: $y = -3x + 22$ y $x - 3y + 26 = 0$.

30. (CG = calculadora graficadora). Utilice una graficadora para dibujar los círculos de los problemas 7(*d*), 10, 14, y 15. (*Nota*: puede ser necesario resolver para y, es decir, despejar y.)

31. (CG) *a*) Utilice una graficadora para sombrear el interior del círculo con centro en el origen y radio 3.

b) Usa una graficadora para sombrear el exterior del círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

32. (CG) Utilice una graficadora para representar las desigualdades siguientes:

a) $(x - 1)^2 + y^2 < 4$; *b*) $x^2 + y^2 - 6x - 8y > 0$.

5

Ecuaciones y sus gráficas

La gráfica de una ecuación

La gráfica de una ecuación que tiene como únicas variables x y y consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación.

EJEMPLO 5.1. *a*) ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$?

La ecuación equivale a $y = 2x - 3$, o sea, la ecuación punto-intersección de la recta con pendiente 2 e intersección con el eje y de -3.

b) ¿Cuál es la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$?

Al completar el cuadro se observa que la ecuación dada equivale a la ecuación $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Por tanto, la gráfica es el círculo con centro $(1, -2)$ y radio 3.

Parábolas

Considere la ecuación $y = x^2$. Si se sustituyen algunos valores de x y se calculan los valores asociados de y se obtienen los resultados tabulados en la figura 5.1. Es posible ubicar los puntos correspondientes como se muestra en la figura. Tales puntos sugieren una curva pronunciada, que pertenece a la familia de curvas llamadas *parábolas.* En especial, las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = cx^2$, donde c es una constante diferente de cero (no nula), son parábolas, igual que otras curvas obtenidas a partir de ellas mediante traslaciones y rotaciones.

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
–1	1
–2	4
–3	9

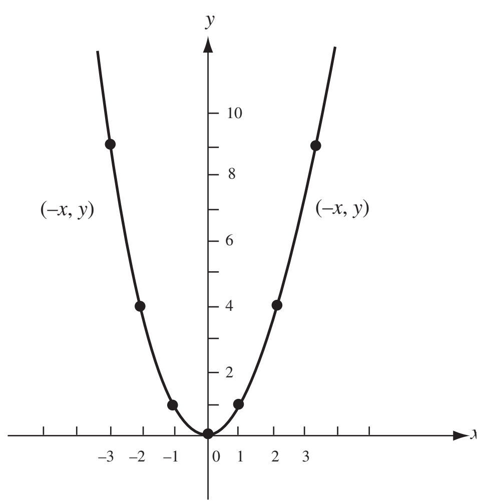


Fig. 5.1

En la figura 5.1 se observa que la gráfica de $y = x^2$ contiene el origen $(0, 0)$, pero sus demás puntos quedan por encima del eje x, ya que x^2 es positivo salvo cuando $x = 0$. Cuando x es positivo y crece, y también crece sin límite. Por tanto, en el primer cuadrante la gráfica se mueve hacia arriba sin límite a medida que avanza hacia la derecha. Como $(-x)^2 = x^2$, se tiene que todo punto (x, y) está en la gráfica en el primer cuadrante; luego, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica en el segundo cuadrante. Así, la gráfica es simétrica respecto al eje y. El eje y se denomina *eje de simetría* de esta parábola.

Elipses

Para trazar la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, de nuevo se calculan algunos valores y se ubican los puntos correspondientes, como se muestra en la figura 5.2. La gráfica sugerida por esos puntos, que también se dibuja en la figura, es un miembro de la familia de curvas denominadas *elipses*.

En particular, la gráfica de una ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es una elipse, igual que toda curva obtenida de ésta mediante traslación o rotación.

Observe que, a diferencia de las parábolas, las elipses están acotadas. De hecho, si (x, y) está en la gráfica de $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, entonces $\frac{x^2}{9} \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, y, por tanto, $x^2 \le 9$. En consecuencia, $-3 \le x \le 3$. Luego, la gráfica queda entre las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$. El punto que se sitúa más a la derecha es (3, 0), y el que queda más a la izquierda es (–3, 0). Con un razonamiento similar se demuestra que la gráfica queda entre las rectas horizontales $y = -2$ y $y = 2$, y que su punto más bajo es (0, –2) y el más alto es (0, 2). En el primer cuadrante, como x crece de 0 a 3, y decrece de 2 a 0. Si (x, y) es cualquier punto en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también está en la gráfica. Por tanto, ésta es simétrica respecto al eje y. De manera similar, si (x, y) está en la gráfica, también lo está $(x, -y)$ y, por ende, la gráfica es simétrica respecto al eje x.

x	y
3	0
2	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{5} \approx \pm 1.5$
1	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{2} \approx \pm 1.9$
0	± 2
–1	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{2}$
–2	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}$
–3	0

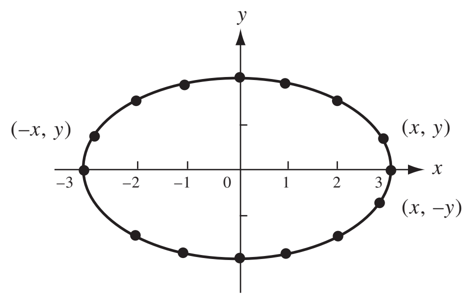


Fig. 5.2

Cuando $a = b$, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es el círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, es decir, un círculo con centro en el origen y radio igual a a. Por ende, los círculos son casos especiales de elipses.

Hipérbolas

Considere la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$. Algunos de los puntos en esta gráfica se tabulan y se ubican en la figura 5.3. Estos puntos sugieren la curva que se muestra en la figura, la cual es un miembro de una familia de curvas denominadas *hipérbolas*. Las gráficas de las ecuaciones de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son hipérbolas, como lo son todas las curvas obtenidas de éstas mediante traslaciones o rotaciones.

x	y
± 3	0
± 4	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{7} \approx \pm 1.76$
± 5	$\pm\frac{8}{3} \approx \pm 2.76$
± 6	$\pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$

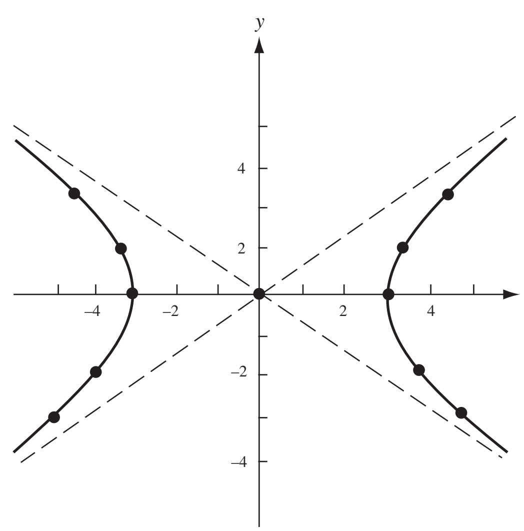


Fig. 5.3

Observe ahora la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ de manera más detallada. Como $\frac{x^2}{9} = 1 + \frac{y^2}{4} \geq 1$, entonces $x^2 \geq 9$ y, por tanto, $|x| \geq 3$. De ello se deduce que no hay puntos en la gráfica entre las rectas verticales $x = -3$ y $x = 3$. Si (x, y) está en la gráfica, entonces $(-x, y)$ también lo está; así, la gráfica es simétrica respecto al eje y. De igual forma lo es respecto al eje x. En el primer cuadrante, al crecer x, y crece sin límite.

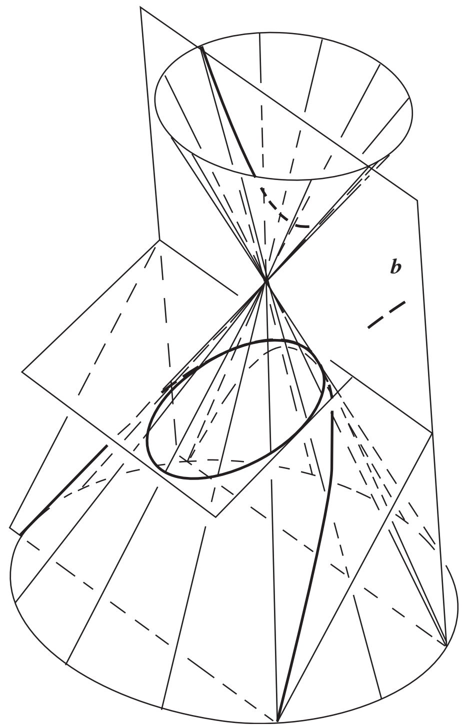


Fig. 5.4

Al observar las líneas punteadas en la figura 5.3 se advierte que éstas son las rectas $y = \frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$, denominadas *asíntotas* de la hipérbola; en este caso, los puntos sobre la hipérbola se acercan cada vez más a estas asíntotas a medida que se alejan del origen. En general, *las asíntotas de la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *son las rectas* $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$.

Secciones cónicas

Las parábolas, las elipses y las hipérbolas forman una clase de curvas llamada *secciones cónicas*. Las cónicas pueden definirse geométricamente como las intersecciones de planos con la superficie de un cono circular recto, como se observa en la figura 5.4.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Trace la gráfica de la curva cúbica $y = x^3$.

La gráfica pasa por el origen (0, 0). También, para cualquier punto (x, y) en la gráfica, x y y tienen el mismo signo; entonces, la gráfica queda en los cuadrantes primero y tercero. En el primer cuadrante, a medida que x aumenta, y aumenta sin límite. Además, si (x, y) está en la gráfica, $(-x, -y)$ también lo está. Como el origen es el punto medio del segmento que une los puntos (x, y) y $(-x, -y)$, la gráfica es simétrica respecto al origen. Se tabulan algunos puntos en ella y se ubican en la figura 5.5; esos puntos sugieren una curva pronunciada en la figura.

x	y
0	0
1/2	1/8
1	1
3/2	27/8
2	8
–1/2	–1/8
–1	–1
–3/2	–27/8
–2	–8

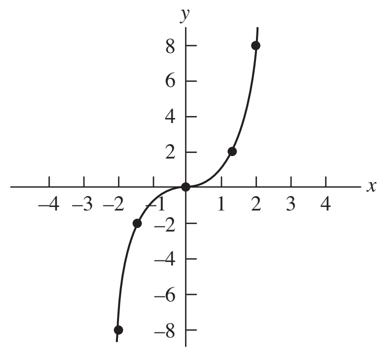


Fig. 5.5

2. Trace la gráfica de la ecuación $y = -x^2$.

Si (x, y) está en la gráfica de la parábola $y = x^2$ (fig. 5.1), entonces $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -x^2$, y viceversa. Así, la gráfica de $y = -x^2$ es el reflejo de la gráfica $y = x^2$ en el eje x. El resultado es la parábola mostrada en la figura 5.6.

3. Trace la gráfica de $x = y^2$.

Esta gráfica se obtiene de la parábola $y = x^2$ al intercambiar los papeles de x y y. La curva resultante es una parábola con el eje x como eje de simetría y su "nariz" en el origen (fig. 5.7). Un punto (x, y) está en la gráfica de $x = y^2$ si y sólo si (y, x) está en la gráfica de $y = x^2$. Como el segmento que une los puntos (x, y) y (y, x) es perpendicular a la recta diagonal $y = x$ (¿por qué?) y el punto medio $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$ de ese segmento está sobre la recta $y = x$ (fig. 5.8), la parábola $x = y^2$ se obtiene de la parábola $y = x^2$ por reflexión en la recta $y = x$.

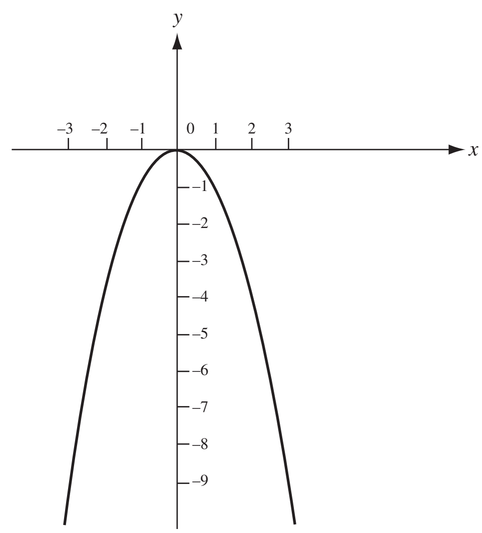


Fig. 5.6

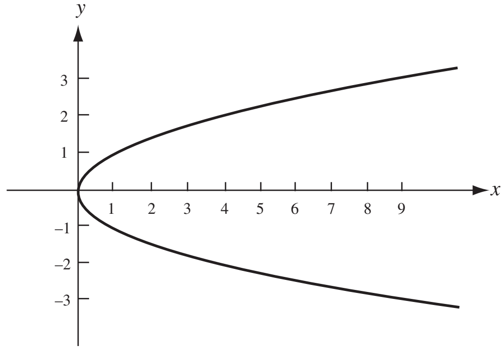


Fig. 5.7

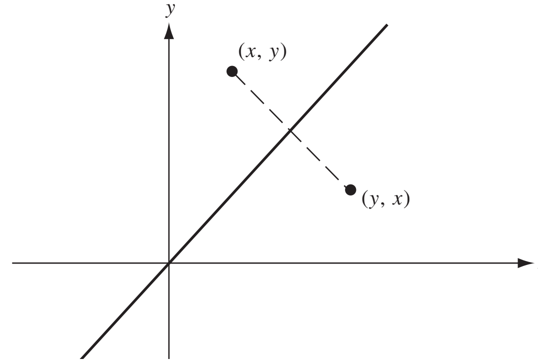


Fig. 5.8

4. Sea $\mathscr{L}$ una recta y F un punto que no está en $\mathscr{L}$. Demuestre que el conjunto de todos los puntos equidistantes de F y $\mathscr{L}$ es una parábola.

Se construye un sistema de coordenadas tal que F quede en el eje y positivo y el eje x sea paralelo a $\mathscr{L}$ y a medio camino entre F y $\mathscr{L}$ (fig. 5.9). Sea $2p$ la distancia entre F y $\mathscr{L}$. Entonces, $\mathscr{L}$ tiene la ecuación $y = -p$ y las coordenadas de F son $(0, p)$.

Considere un punto arbitrario $P(x, y)$. Su distancia a $\mathscr{L}$ es $|y + p|$ y su distancia a F es $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$. Así, para que el punto sea equidistante de F y $\mathscr{L}$ es necesario que $|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$. Al elevar al cuadrado da $(y + p)^2 = x^2 + (y - p)^2$, de donde se obtiene que $4py = x^2$. Ésta es una ecuación de una parábola con el eje y como su eje de simetría. El punto F se denomina *foco* de la parábola, y la recta $\mathscr{L}$ se llama *directriz*. La cuerda AB que pasa por el foco y es paralela a $\mathscr{L}$ se conoce como *lado recto (latus rectum)*. La "nariz" de la parábola en $(0, 0)$ es su *vértice*.

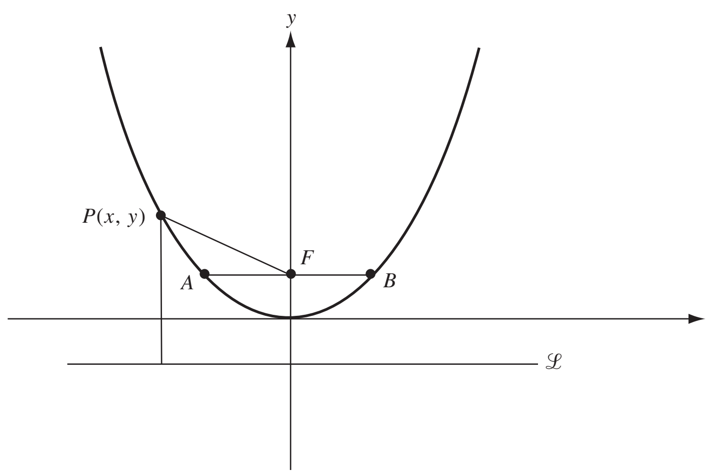


Fig. 5.9

5. Halle la longitud del lado recto de la parábola $4py = x^2$.

La coordenada y de los puntos extremos (terminales) A y B del lado recto (fig. 5.9) es p. Entonces, en estos puntos, $4p^2 = x^2$ y, por tanto, $x = \pm 2p$. Así, la longitud AB del lado recto es $4p$.

6. Halle el foco, la directriz y la longitud del lado recto de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$; también trace su gráfica.

La ecuación de la parábola puede escribirse como $2y = x^2$. Por ende, $4p = 2$ y $p = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, el foco queda en $(0, \frac{1}{2})$, la ecuación de la directriz es $y = -\frac{1}{2}$ y la longitud del lado recto es 2. La gráfica se muestra en la figura 5.10.

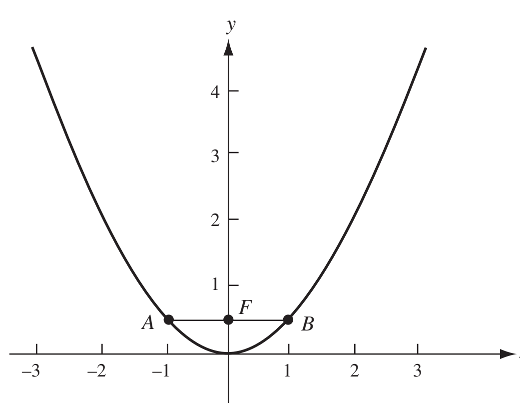


Fig. 5.10

7. Sean F y F' dos puntos distintos a una distancia $2c$ uno del otro. Demuestre que el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$, con $a > c$, forman una elipse.

Construya un sistema de coordenadas tal que el eje x pase por F y F', el origen sea el punto medio del segmento FF' y F quede en el eje positivo x. Entonces, las coordenadas de F y F' son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ (fig. 5.11). Luego, la condición $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ equivale a $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.

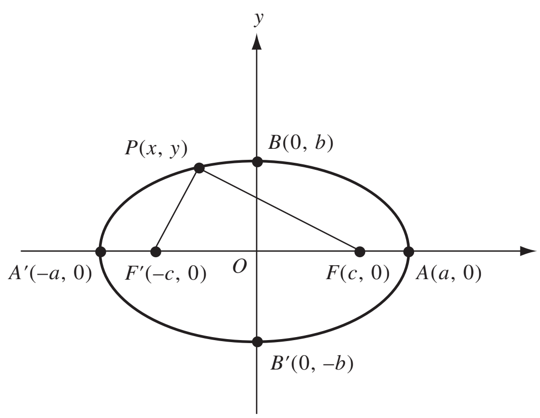


Fig. 5.11

Después de reorganizar y elevar al cuadrado dos veces (para eliminar las raíces cuadradas) y realizar las operaciones indicadas se obtiene

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{5.1}$$

Puesto que $a > c$, $a^2 - c > 0$. Sea $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Entonces (5.1) se transforma en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, lo que puede reescribirse como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, la ecuación de una elipse.

Cuando $y = 0$, $x^2 = a^2$; entonces la elipse corta el eje x en los puntos $A'(-a, 0)$ y $A(a, 0)$, llamados los *vértices* de la elipse (figura 5.11). El segmento $A'A$ se denomina *eje mayor*; el segmento OA se llama *eje semimayor* y tiene una longitud de a. El origen es el *centro* de la elipse. F y F' son los *focos* (cada uno es un foco). Cuando $x = 0$, $y^2 = b^2$. En consecuencia, la elipse corta el eje y en los puntos $B'(0, -b)$ y $B(0, b)$. El segmento $B'B$ se conoce como *eje menor*; el segmento OB recibe el nombre de *eje semimenor* y tiene una longitud de b. Observe que $b = \sqrt{a^2 - c^2} < \sqrt{a^2} = a$. Por ende, el eje semimenor es más pequeño que el semimayor. La relación básica entre a, b y c es $a^2 = b^2 + c^2$.

La *excentricidad* de una elipse se define como $e = c/a$. Advierta que $0 < e < 1$. Además, $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a = \sqrt{1 - (b/a)^2}$. Así, cuando e es muy pequeña b/a está muy cerca de 1, el eje menor se aproxima en tamaño al eje mayor y la elipse está cerca de ser un círculo. Por otra parte, cuando e está próximo a 1, b/a se aproxima a cero, el eje menor es muy pequeño en comparación con el mayor, la elipse resulta muy "plana".

8. Identifique la gráfica de la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$.

La ecuación equivale a $x^2/16 + y^2/9 = 1$. Así, la gráfica es una elipse con eje semimayor de longitud $a = 4$ y eje semimenor de longitud $b = 3$ (fig. 5.12 en la página siguiente). Los vértices son $(-4, 0)$ y $(4, 0)$. Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, la excentricidad e es $c/a = \sqrt{7}/4 \approx 0.6614$.

9. Identifique la gráfica de la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$.

La ecuación equivale a $x^2/4 + y^2/25 = 1$, una elipse. Como el denominador de y^2 es mayor que el denominador de x^2, la gráfica es una elipse con el eje mayor sobre el eje y y el eje menor sobre el eje x (fig. 5.13 en la página siguiente). Los vértices quedan en $(0, -5)$ y $(0, 5)$. Luego, como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$, la excentricidad es $\sqrt{21}/5 \approx 0.9165$.

10. Sean F y F' puntos distintos, a una distancia de $2c$ uno del otro. Halle el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $\left|\overline{PF} - \overline{PF'}\right| = 2a$, para todo $a < c$.

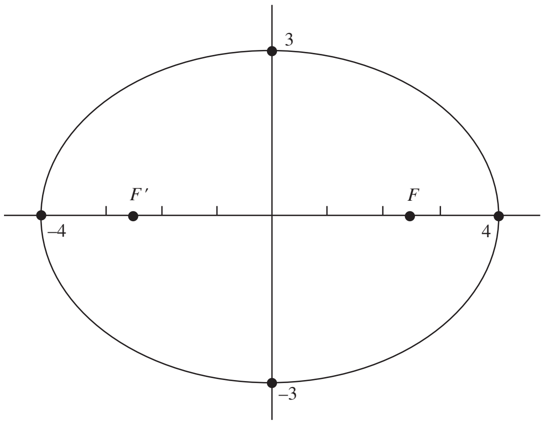


Fig. 5.12

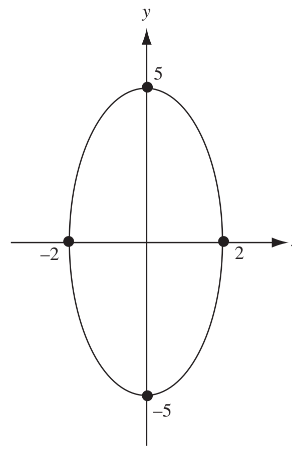


Fig. 5.13

Escoja un sistema de coordenadas tal que el eje x pase por F y F' con el origen como el punto medio del segmento FF' y con F en el eje x positivo (fig. 5.14). Las coordenadas de F y F' son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. Entonces, la condición dada equivale a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$. Después de las operaciones necesarias para eliminar las raíces cuadradas se obtiene

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \tag{1}$$

Como $c > a$, $c^2 - a^2 > 0$. Sea $b=\sqrt{c^2-a^2}$ (observe que $a^2 + b^2 = c^2$). Entonces (1) se vuelve $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, lo que se reescribe como $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, la ecuación de la hipérbola.

Cuando $y = 0$, $x = \pm a$. En este caso la hipérbola corta el eje x en los puntos $A'(-a, 0)$ y $A(a, 0)$, denominados *vértices* de la hipérbola. Las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x$. El segmento $A'A$ se llama *eje transverso*. El segmento que une los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ recibe el nombre de *eje conjugado*. El *centro* de la hipérbola es el origen. Los puntos F y F' se llaman *focos*. La *excentricidad* se define como $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Como $c > a$, $e > 1$. Cuando e está próximo a 1, b es muy pequeño respecto a a y la hipérbola tiene una "nariz" muy puntiaguda; cuando e es muy larga, b es muy larga respecto a a y la hipérbola resulta muy "plana".

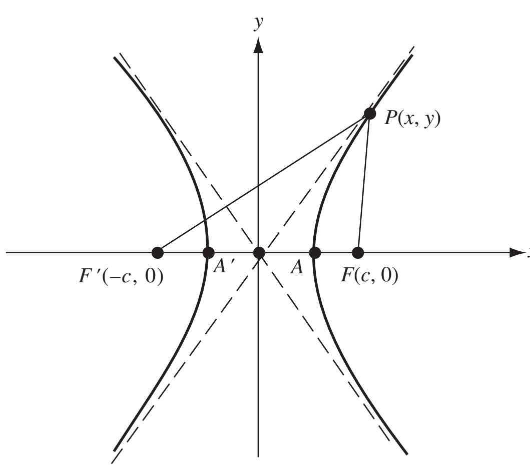


Fig. 5.14

11. Identifique la gráfica de la ecuación $25x^2 - 16y^2 = 400$.

Esta ecuación equivale a $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$, que es la ecuación de una hipérbola con el eje x como su eje transverso, los vértices $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ y las asíntotas $y = \pm\frac{5}{4}x$ (fig. 5.15).

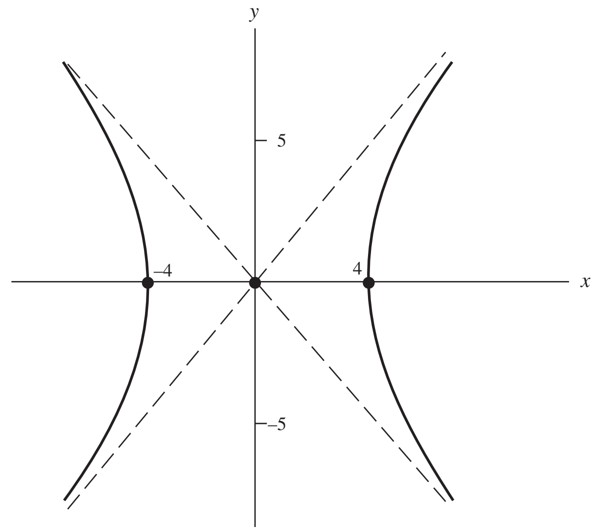


Fig. 5.15

12. Identifique la gráfica de la ecuación $y^2 - 4x^2 = 4$.

La ecuación equivale a $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$, que es la de una hipérbola, con los papeles de x y y intercambiados, de manera que el eje transverso es el eje y, el eje conjugado es el eje x y los vértices son $(0, -2)$ y $(0, 2)$. Las asíntotas son $x = \pm\frac{1}{2}y$ o, de forma equivalente, $y = \pm 2x$ (fig. 5.16).

13. Identifique la gráfica de la ecuación $y = (x - 1)^2$.

Un punto (u, v) está en la gráfica de $y = (x - 1)^2$ si y sólo si $(u - 1, v)$ está en la gráfica de $y = x^2$. Por tanto, la gráfica deseada se obtiene de la parábola $y = x^2$ moviendo cada punto de la parábola una unidad a la derecha (fig. 5.17).

14. Identifique la gráfica de la ecuación $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

Un punto (u, v) está en la gráfica si y sólo si el punto $(u - 1, v - 2)$ está en la gráfica de la ecuación $x^2/4 + y^2/9 = 1$. Entonces la gráfica deseada se obtiene al mover la elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ una unidad a la derecha y dos

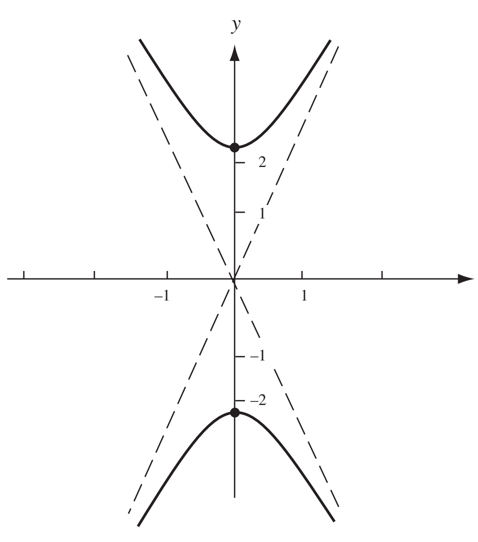


Fig. 5.16

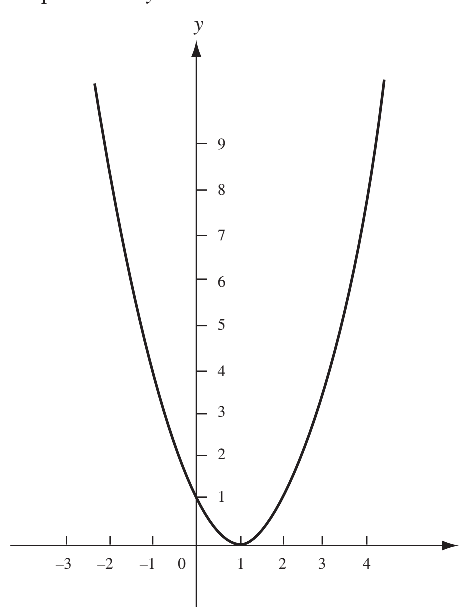


Fig. 5.17

unidades hacia arriba (fig. 5.18). El centro de la elipse queda en (1, 2), el eje mayor se sitúa sobre la recta $x = 1$ y el eje menor queda sobre la recta $y = 2$.

15. ¿Cómo se relaciona la gráfica de una ecuación $F(x - a, y - b) = 0$ con la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$?

Un punto (u, v) está en la gráfica de $F(x - a, y - b) = 0$ si y sólo si el punto $(u - a, v - b)$ está en la gráfica de $F(x, y) = 0$. Entonces, en la gráfica de $F(x - a, y - b) = 0$ se obtiene al mover cada punto de la gráfica de $F(x, y) = 0$ a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. (Si a es negativo, se mueve el punto $|a|$ unidades a la izquierda. Si b es negativo, se mueve el punto $|b|$ unidades hacia abajo.) Tal movimiento se denomina *traslación*.

16. Identifique la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2x$.

Al completar el cuadrado en x se llega a $y + 1 = (x - 1)^2$. Con base en los resultados del problema 15, la gráfica se obtiene mediante una traslación de la parábola $y = x^2$ de manera que el nuevo vértice es $(1, -1)$ [observe que $y + 1$ es $y - (-1)$], como se muestra en la figura 5.19.

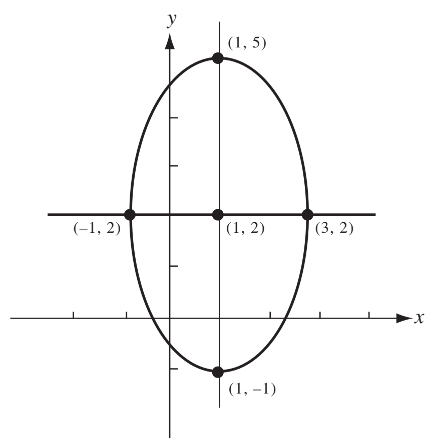


Fig. 5.18

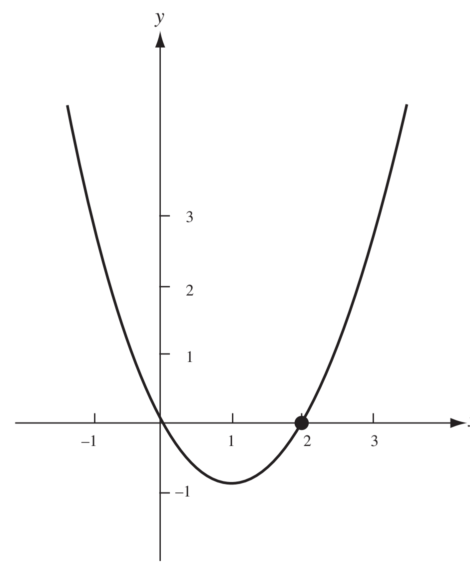


Fig. 5.19

17. Identifique la gráfica de $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$.

Mediante factorización se tiene que $4(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 2y) - 29 = 0$, y luego al completar el cuadrado en x y en y se produce $4(x - 2)^2 - 9(y - 1)^2 = 36$. Al dividir entre 36 se obtiene $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Según los resultados del problema 15, la gráfica de esta ecuación se obtiene trasladando la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ dos unidades a la derecha y una unidad hacia arriba, de manera que el nuevo centro de simetría de la hipérbola sea (2, 1) (fig. 5.20).

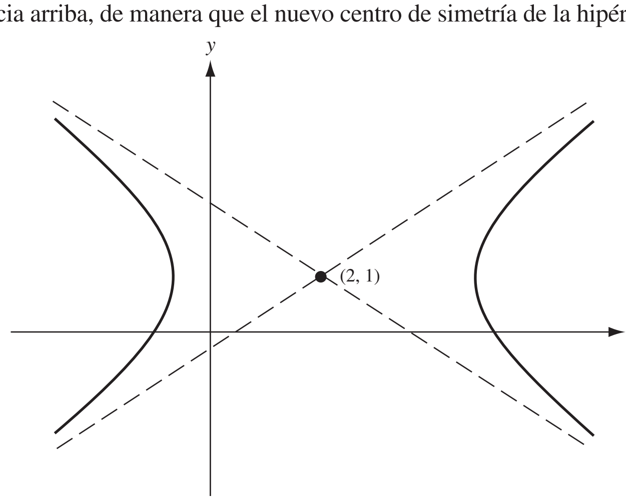


Fig. 5.20

18. Trace la gráfica de la ecuación $xy = 1$.

Algunos puntos de la gráfica se tabulan y se ubican en la figura 5.21. La curva sugerida por esos puntos se muestra como una línea punteada. Puede demostrarse que esta curva es una hipérbola con la recta $y = x$ como eje transverso, la recta $y = -x$ como eje conjugado, los vértices $(-1, -1)$ y $(1, 1)$ y los ejes x y y como asíntotas. De igual forma, la gráfica de toda ecuación $xy = d$, donde d es una constante positiva, es una hipérbola con $y = x$ como eje transverso, $y = -x$ como eje conjugado y con los ejes de coordenadas como asíntotas. Tales hipérbolas se denominan *hipérbolas equiláteras*. Pueden mostrarse como rotaciones de hipérbolas de la forma $x^2/a^2 - y^2/a^2 = 1$.

x	y
3	1/3
2	1/2
1	1
1/2	2
1/3	3
1/4	4
–1/4	–4
–1/3	–3
–1/2	–2
–1	–1
–2	–1/2
–3	–1/3

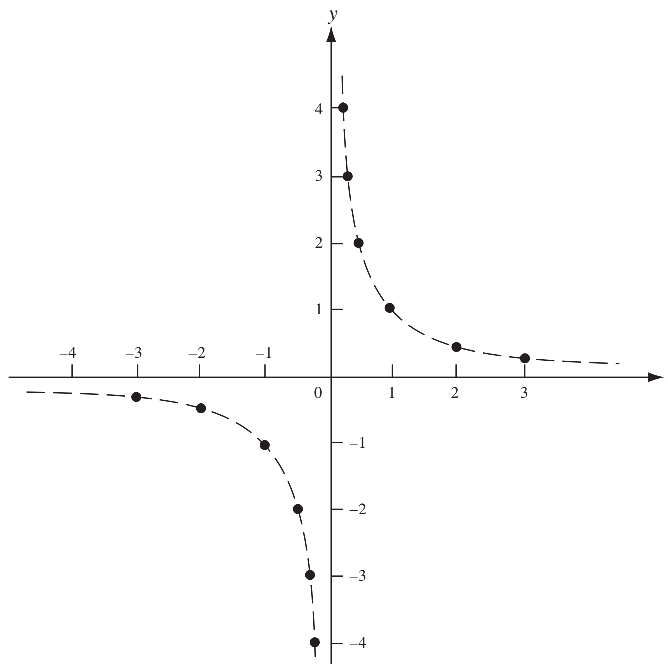


Fig. 5.21

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

19. *a*) En una misma hoja de papel, trace las gráficas de las parábolas siguientes:

i) $y = 2x^2$ *ii*) $y = 3x^2$ *iii*) $y = 4x^2$ *iv*) $y = \frac{1}{2}x^2$ *v*) $y = \frac{1}{3}x^2$

b) (CG = calculadora graficadora) Utilice una graficadora para comparar las respuestas del inciso *a*).

20. *a*) En una misma hoja de papel, trace las gráficas de las parábolas siguientes e indique los puntos de intersección:

i) $y = x^2$ *ii*) $y = -x^2$ *iii*) $x = y^2$ *iv*) $x = -y^2$

b) (CG) Utilice una graficadora para comprobar las respuestas del inciso *a*).

21. Trace las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $y = x^3 - 1$ *b*) $y = (x - 2)^3$ *c*) $y = (x + 1)^3 - 2$

d) $y = -x^3$ *e*) $y = -(x - 1)^3$ *f*) $y = -(x - 1)^3 + 2$

22. (CG) Utilice una graficadora para responder el problema 21.

23. Identifique y trace las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $y^2 - x^2 = 1$ *b*) $25x^2 + 36y^2 = 900$ *c*) $2x^2 - y^2 = 4$
d) $xy = 4$ *e*) $4x^2 + 4y^2 = 1$ *f*) $8x = y^2$
g) $10y = x^2$ *h*) $4x^2 + 9y^2 = 16$ *i*) $xy = -1$
j) $3y^2 - x^2 = 9$

Respuestas: *a*) hipérbola, eje *y* como eje transverso, vértices $(0, \pm 1)$, asíntotas $y = \pm x$; *b*) elipse, vértices $(\pm 6, 0)$ focos $(\pm\sqrt{11}, 0)$; *c*) hipérbola, eje *x* como eje transverso, vértices $(\pm\sqrt{2}, 0)$, asíntotas $y = \pm x\sqrt{2}x$; *d*) hipérbola, $y = x$ como eje transverso, vértices (2, 2) y (–2, –2), ejes *x* y *y* como asíntotas; *e*) círculo, centro (0, 0), radio $\frac{1}{2}$; *f*) parábola, vértice (0, 0), foco (2, 0), directriz $x = -2$; *g*) parábola, vértice (0, 0), foco $(0, \frac{5}{2})$, directriz $y = -\frac{5}{2}$; *h*) elipse, vértices $(\pm 2, 0)$, focos $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5}, 0)$; *i*) hipérbola, $y = -x$ como eje transverso, vértices (–1, 1) y (1, –1), ejes *x* y *y* como asíntotas; *j*) hipérbola, eje *y* como eje transverso, vértices $(0, \pm\sqrt{3})$, asíntotas $y = \pm x\sqrt{3}x/3$.

24. (CG) Utilice una graficadora para trazar las gráficas del problema 23.

25. Identifique y trace las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 4 = 0$ *b*) $5x^2 + y^2 - 20x + 6y + 25 = 0$ *c*) $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$
d) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ *e*) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 15 = 0$ *f*) $(x - 1)(y + 2) = 1$
g) $xy - 3x - 2y + 5 = 0$ [*Sugerencia: compare con el inciso f*)] *h*) $4x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$
i) $2x^2 - 8x - y + 11 = 0$ *j*) $25x^2 + 16y^2 - 100x - 32y - 284 = 0$

Respuestas: *a*) gráfica vacía; *b*) elipse, centro en (2, –3); *c*) parábola, vértice en (3, –1); *d*) un solo punto (1, –2); *e*) gráfica vacía; *f*) hipérbola, centro en (1, –2); *g*) hipérbola, centro en (2, 3); *h*) elipse, centro en (–1, 2); *i*) parábola, vértice en (2, 3); *j*) elipse, centro en (2, 1).

26. (CG) Utilice una graficadora para trazar las gráficas del problema 25.

27. Halle el foco, la directriz y la longitud del lado recto de las parábolas siguientes:

a) $10x^2 = 3y$ *b*) $2y^2 = 3x$ *c*) $4y = x^2 + 4x + 8$ *d*) $8y = -x^2$

Respuestas: *a*) foco en $(0, \frac{3}{40})$, directriz $y = -\frac{3}{40}$, lado recto $\frac{3}{10}$; *b*) foco en $(\frac{3}{8}, 0)$, directriz $x = -\frac{3}{8}$, lado recto $\frac{3}{2}$; *c*) foco en (–2, 2), directriz $y = 0$, lado recto 4; *d*) foco en (0, –2), directriz $y = 2$, lado recto 8.

28. Halle la ecuación para cada parábola que satisfaga estas condiciones:

a) Foco en (0, –3), directriz $y = 3$ *b*) Foco en (6, 0), directriz $x = 2$
c) Foco en (1, 4), directriz $y = 0$ *d*) Vértice en (1, 2), foco en (1, 4)
e) Vértice en (3, 0), directriz $y = 0$
f) Vértice en el origen, eje *y* como eje de simetría; contiene el punto (3, 18)
g) Vértice en (3, 5), eje de simetría paralelo al eje *y*; contiene el punto (5, 7)
h) Eje de simetría paralelo al eje *x*, contiene los puntos (0, 1), (3, 2), (1, 3)
i) Lado recto *(latus rectum)* es el segmento que une (2, 4) y (6, 4), contiene el punto (8, 1)
j) Contiene los puntos (1, 10) y (2, 4), el eje de simetría es vertical, el vértice está en la recta $4x - 3y = 6$

Respuestas: *a*) $12y = -x^2$; *b*) $8(x - 4) = y^2$; *c*) $8(y - 2) = (x - 1)^2$; *d*) $8(y - 2) = (x - 1)^2$; *e*) $8(x - 3) = y^2$; *f*) $y = 2x^2$; *g*) $2(y - 5) = (x - 3)^2$; *h*) $2\left(x - \frac{121}{40}\right) = -5\left(y - \frac{21}{10}\right)^2$; *i*) $4(y - 5) = -(x - 4)^2$; *j*) $y - 2 = 2(x - 3)^2$ o bien, $y - \frac{2}{13} = 26\left(x - \frac{21}{13}\right)^2$.

29. Halle la ecuación para cada elipse que satisfaga las condiciones siguientes:

a) Centro en el origen, un foco en (0, 5) y longitud del eje semimayor, 13
b) Centro en el origen, eje mayor sobre el eje *y*; contiene los puntos $(1, 2\sqrt{3})$ y $(\frac{1}{2}, \sqrt{15})$
c) Centro en (2, 4), foco en (7, 4), contiene el punto (5, 8)
d) Centro en (0, 1), un vértice en (6, 1), excentricidad $\frac{2}{3}$
e) Focos en $\left(0, \ \pm\frac{4}{3}\right)$, contiene el punto $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$
f) Focos (0, ±9), eje semimenor de longitud 12

Respuestas: *a*) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$; *b*) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; *c*) $\frac{(x-2)^2}{45}+\frac{(y-4)^2}{20}=1$; *d*) $\frac{x^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{20}=1$; *e*) $x^2+\frac{9y^2}{25}=1$;
f) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{225}=1$

30. Halle una ecuación para cada hipérbola que satisfaga las condiciones que siguen:

a) Centro en el origen, con *x* como eje transverso; contiene los puntos (6, 4) y (–3, 1)
b) Centro en el origen y un vértice en (3, 0); una asíntota es $y=\frac{2}{3}x$
c) Tiene asíntotas $y=\pm\sqrt{2}x$, contiene el punto (1, 2)
d) Centro en el origen, un foco en (4, 0), un vértice en (3, 0)

Respuestas: *a*) $\frac{5x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$; *b*) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; *c*) $\frac{y^2}{2}-x^2=1$; *d*) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

31. Halle una ecuación de la hipérbola que conste de todos los puntos $P(x, y)$ tales que $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2\sqrt{2}$, donde $F=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y $F'=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Respuesta: $xy = 1$

32. (CG) Utilice una graficadora para trazar la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ y con asíntotas $y=\pm\frac{2}{3}x$.

33. (CG) Use una graficadora para trazar las elipses $x^2 + 4y^2 = 1$ y $(x - 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 1$. ¿Cómo se obtiene la última gráfica a partir del primero?

6

Funciones

Se dice que una cantidad y es una *función* de otra cantidad x si el valor de y queda determinado por el valor de x. Si f simboliza la función, entonces la dependencia de y en x se indica mediante la fórmula $y = f(x)$. La letra x se denomina *variable independiente* y la letra y *variable dependiente*. La variable independiente también recibe el nombre de *argumento* de la función y la variable dependiente *valor* de la función.

Por ejemplo, el área A de un cuadrado es una función de la longitud s de un lado del cuadrado, y esa función puede expresarse mediante la fórmula $A = s^2$. En este caso, s es la variable independiente y A la variable dependiente.

El *dominio* de una función es el conjunto de números al que puede aplicársele la función, es decir, el conjunto de números que se asignan a la variable independiente. El *rango* de una función se refiere al conjunto de números que la función asocia con los números del dominio.

EJEMPLO 6.1. La fórmula $f(x) = x^2$ determina una función f por medio de la cual a cada número real x se asigna su cuadrado. El dominio consta de todos los números reales. Se puede observar que el rango comprende todos los números reales no negativos. De hecho, cada valor x^2 es no negativo. Recíprocamente, si r es cualquier número real no negativo, entonces r aparece como un valor cuando la función se aplica a $\sqrt{r}$, como $r = (\sqrt{r})^2$.

EJEMPLO 6.2. Sea g la función definida por la fórmula $g(x) = x^2 - 4x + 2$ para todos los números reales. Luego,

$$g(1) = (1)^2 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$

y

$$g(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 2 = 4 + 8 + 2 = 14$$

También, para cualquier número a, $g(a + 1)^2 - 4(a + 1) + 2 = a^2 + 2a + 1 - 4a - 4 + 2 = a^2 - 2a - 1$.

EJEMPLO 6.3. *a*) Sea la función $h(x) = 18x - 3x^2$ definida para todos los números reales x. Entonces, el dominio es el conjunto de todos los números reales. *b*) El área A de cierto rectángulo, uno de cuyos lados tiene longitud x, se calcula con $A = 18x - 3x^2$. Tanto x como A deben ser positivas. Ahora, al completar el cuadrado se obtiene

$$A = -3(x^2 - 6x) = -3[(x - 3)^2 - 9] = 27 - 3(x - 3)^2$$

Como $A > 0$, $3(x - 3)^2 < 27$, $(x - 3)^2 < 9$, $|x - 3| < 3$. Por ende, $-3 < x - 3 < 3$, $0 < x < 6$. Luego, la función que determina A tiene en su dominio el intervalo abierto $(0, 6)$. La gráfica de $A = 27 - 3(x - 3)^2$ es la parábola que aparece en la figura 6.1. A partir de la gráfica se observa que el rango de la función es el intervalo semiabierto $(0, 27)$.

Así, la función del inciso *b*) está dada por la misma fórmula que la función del inciso *a*), pero el dominio de la primera es un subconjunto apropiado del dominio de la segunda.

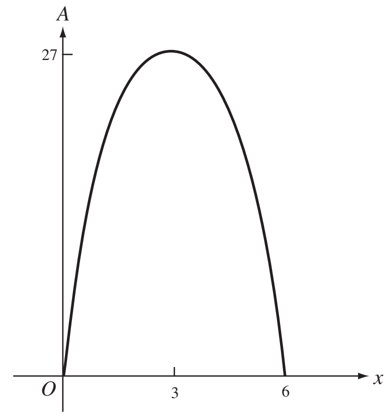


Fig. 6.1

La gráfica de una función f se define como la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

EJEMPLO 6.4. *a*) Considere la función $f(x) = |x|$. Su gráfica es la de la ecuación $y = |x|$ y se indica en la figura 6.2. Observe que $f(x) = x$ cuando $x \geq 0$, mientras que $f(x) = -x$ cuando $x \leq 0$. El dominio de f consta de todos los números reales. (*En general, si una función está dada por una fórmula, si no se dice lo contrario, se supondrá que el dominio consta de todos los números para los que se define la fórmula*.) En la gráfica de la figura 6.2 se observa que el rango de la función consta de todos los números reales no negativos. (*En general, el rango de una función es el conjunto de coordenadas* y *de todos los puntos de la gráfica de una función.*) *b*) La fórmula $g(x) = 2x + 3$ define una función g, cuya gráfica es la de la ecuación $y = 2x + 3$, que es la línea recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en 3. El conjunto de todos los números reales es tanto el dominio como el rango de g.

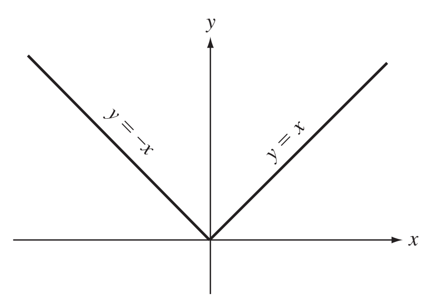


Fig. 6.2

EJEMPLO 6.5. Sea una función g definida de esta manera:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ x + 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Una función expresada de esta forma ¿está *definida por casos*. Observe que el dominio de g es el intervalo cerrado [1, 4].

En una rigurosa aplicación de las matemáticas, una función f se define como un conjunto de pares ordenados tales que si (x, y) y (x, z) están en el conjunto f, entonces $y = z$. Sin embargo, esta definición oscurece el significado intuitivo de la noción de función.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$, halle: *a*) $f(0)$; *b*) $f(-1)$; *c*) $f(2a)$; *d*) $f(1/x)$; *e*) $f(x+h)$.

a) $f(0)=\dfrac{0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$ *b*) $f(-1)=\dfrac{-1-1}{1+2}=-\dfrac{2}{3}$ *c*) $f(2a)=\dfrac{2a-1}{4a^2+2}$

d) $f(1/x)=\dfrac{1/x-1}{1/x^2+2}=\dfrac{x-x^2}{1+2x^2}$ *e*) $f(x+h)=\dfrac{x+h-1}{(x+h)^2+2}=\dfrac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$

2. Si $f(x)=2^x$, demuestre que: *a*) $f(x+3)-f(x-1)=\frac{15}{2}f(x)$, y *b*) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$.

a) $f(x+3)-f(x-1)=2^{x+3}-2^{x-1}=2^x(2^3-\frac{1}{2})=\frac{15}{2}f(x)$ *b*) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=\dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}}=2^4=f(4)$

3. Determine los dominios de las funciones:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$ *b*) $y=\sqrt{x^2-16}$ *c*) $y=\dfrac{1}{x-2}$

d) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$ *e*) $y=\dfrac{x}{x^2+4}$

a) Como y debe ser real, $4-x^2\geq 0$, o bien, $x^2\leq 4$. El dominio es el intervalo $-2\leq x\leq 2$.
b) Aquí, $x^2-16\geq 0$, o bien, $x^2\geq 16$. El dominio consta de los intervalos $x\leq -4$ y $x\geq 4$.
c) La función se define para cada valor de x excepto 2.
d) La función se define para $x\neq \pm 3$.
e) Como $x^2+4\neq 0$ para todo x, el dominio es el conjunto de todos los números reales.

4. Trace la gráfica de la función definida como sigue:

$f(x)=5$ cuando $0<x\leq 1$ $f(x)=10$ cuando $1<x\leq 2$

$f(x)=15$ cuando $2<x\leq 3$ $f(x)=20$ cuando $3<x\leq 4$, etc.

Determine el dominio y el rango de la función.

La gráfica se muestra en la figura 6.3. El dominio es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango es el conjunto de enteros 5, 10, 15, 20, …

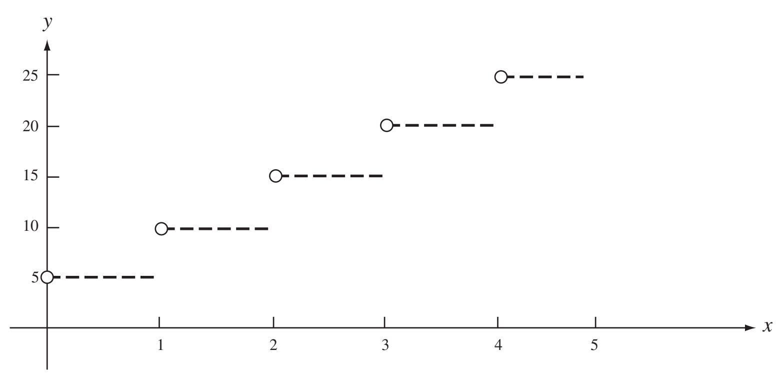


Fig. 6.3

5. Se requieren 2 000 pies de alambre para cercar un terreno rectangular. Si una de las dimensiones del terreno es x (en pies), exprese su área y (en pies cuadrados) como función de x y determine el dominio de la función.

Como una dimensión es x, la otra es $\frac{1}{2}(2000-2x)=1000-x$. Entonces el área es $y=x(1\,000-x)$ y el dominio de esta función es $0<x<1\,000$.

6. Exprese la longitud l de la cuerda de un círculo de radio 8 como función de su distancia x del centro del círculo. Determine el dominio de la función.

En la figura 6.4 se observa que $\frac{1}{2}l = \sqrt{64 - x^2}$, de manera que $l = 2\sqrt{64 - x^2}$. El dominio es el intervalo $0 \le x < 8$.

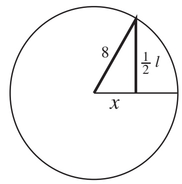


Fig. 6.4

7. De cada esquina de un cuadrado de hojalata de 12 pulgadas de lado se retiran pequeños cuadrados de x (pulgadas) de lado y los extremos se doblan para formar una caja abierta (figura 6.5). Exprese el volumen V de la caja (en pulgadas cúbicas) como función de x y determine el dominio de la función.

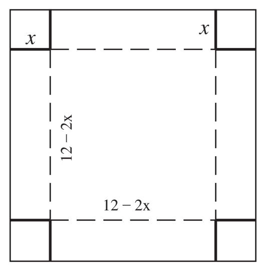


Fig. 6.5

La caja tiene una base cuadrada de lado $12 - 2x$ y una altura de x. Entonces, el volumen de la caja es $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. El dominio es el intervalo $0 < x < 6$.

A medida que x crece sobre su dominio, V aumenta por un tiempo y luego decrece. Por consiguiente, entre las cajas que pueden construirse hay una con un volumen más grande, digamos, M. Para determinar M es necesario ubicar el valor preciso de x en el que V deja de aumentar. Este problema se estudiará en un capítulo posterior.

8. Si $f(x) = x^2 + 2x$, halle $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interprete el resultado.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h} = 2a + 2 + h$$

En la gráfica de la función (fig. 6.6), localice los puntos P y Q cuyas abscisas respectivas son a y $a + h$. La ordenada de P es $f(a)$ y la de Q es $f(a + h)$. Entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}} = \text{pendiente de } PQ$$

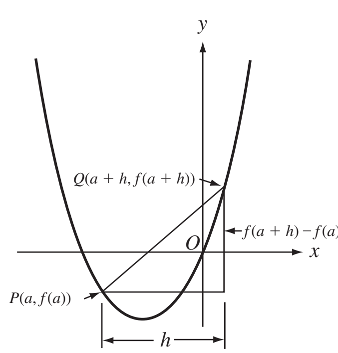


Fig. 6.6

9. Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Evalúe *a)* $f(3)$; *b)* $f(-3)$; *c)* $f(-x)$; *d)* $f(x + 2)$; *e)* $f(x - 2)$; *f)* $f(x + h)$; *g)* $f(x + h) - f(x)$; *h)* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

a) $f(3) = 3^2 - 2(3) + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$

b) $f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18$

c) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$

d) $f(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) + 3 = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 + 3 = x^2 + 2x + 3$

e) $f(x - 2) = (x - 2)^2 - 2(x - 2) + 3 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 + 3 = x^2 - 6x + 11$

f) $f(x + h) = (x + h)^2 - 2(x + h) + 3 = x^2 + 2hx + h^2 - 2x - 2h + 3 = x^2 + (2h - 2)x + (h^2 - 2h + 3)$

g) $f(x + h) - f(x) - [x^2 + (2h - 2)x + (h^2 - 2h + 3)] - (x^2 - 2x + 3) = 2hx + h^2 - 2h = h(2x + h - 2)$

h) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h(2x+h-2)}{h} = 2x + h - 2$

10. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y hace su dominio y su rango.

La gráfica de f es la de la ecuación $y = \sqrt{4 - x^2}$. Para los puntos de esta gráfica, $y^2 = 4 - x^2$; es decir $x^2 + y^2 = 4$. La gráfica de esta última ecuación es el círculo con centro en el origen y radio 2. Como $y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$, la gráfica deseada es la mitad superior de ese círculo. En la figura 6.7 se muestra que el dominio es el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, en tanto que el rango es el intervalo $0 \leq y \leq 2$.

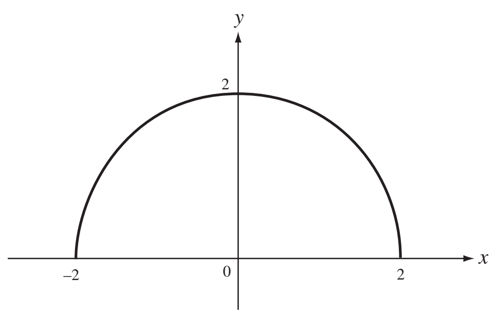


Fig. 6.7

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

11. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, halle *a)* $f(0)$; *b)* $f(3)$; *c)* $f(-2)$. Demuestre que $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{7}{2})$ y $f(2 - h) = f(2 + h)$.

Respuestas: *a)* –6; *b)* 3; *c)* 18

12. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, halla *a)* $f(0)$; *b)* $f(1)$; *c)* $f(-2)$. Demuestre que $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ y $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{f(x)}$.

Respuestas: *a)* –1; *b)* 0; *c)* 3

13. Si $f(x) = x^2 - x$, pruebe que $f(x + 1) = f(-x)$.

14. Si $f(x) = 1/x$, demuestre que $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$.

15. Si $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$, pruebe que $x = f(y)$

16. Determine el dominio de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = x^2 + 4$ *b*) $y = \sqrt{x^2+4}$ *c*) $y = \sqrt{x^2-4}$ *d*) $y = \dfrac{x}{x+3}$

e) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ *f*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ *g*) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ *h*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

Respuestas: *a*), *b*) y *g*) todos los valores de x; *c*) $|x| \geq 2$; *d*) $x \neq -3$; *e*) $x \neq -1, 2$; *f*) $-3 < x < 3$; *h*) $0 \leq x < 2$

17. Calcule $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ en estos casos:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ cuando $a \neq 2$ y $a + h \neq 2$

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ cuando $a \geq 4$ y $a + h \geq 4$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ cuando $a \neq -1$ y $a + h \neq -1$

Respuestas: *a*) $\dfrac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$; *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{a+h-4}+\sqrt{a-4}}$; *c*) $\dfrac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

18. Trace las gráficas de las funciones siguientes y halle sus dominios y rangos:

a) $f(x) = -x^2 + 1$ *b*) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = [x]$ = el mayor entero menor o igual que x

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *e*) $f(x) = 5 - x^2$ *f*) $f(x) = -4\sqrt{x}$

g) $f(x) = |x - 3|$ *h*) $f(x) = 4/x$ *i*) $f(x) = |x|/x$

j) $f(x) = x - |x|$ *k*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Respuestas: *a*) dominio, todos los números; rango, $y \leq 1$
b) dominio, $x > 0$; rango, $-1 < y < 0$ o bien, $y \geq 2$
c) dominio, todos los números; rango, todos los enteros
d) dominio, $x \neq 2$; rango, $y \neq 4$
e) dominio, todos los números; rango, $y \leq 5$
f) dominio, $x \geq 0$; rango, $y \leq 0$
g) dominio, todos los números; rango, $y \geq 0$
h) dominio, $x \neq 0$; rango, $y \neq 0$
i) dominio, $x \neq 0$; rango, $\{-1, 1\}$
j) dominio, todos los números; rango, $y \leq 0$
k) dominio, todos los números; rango, $y \geq 0$

19. (CG) Utilice una graficadora para comprobar las respuestas del problema 18.

20. Evalúe la expresión $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para las funciones f que siguen:

a) $f(x) = 3x - x^2$ *b*) $f(x) = \sqrt{2x}$
c) $f(x) = 3x - 5$ *d*) $f(x) = x^3 - 2$

Respuestas: *a*) $3 - 2x - h$; *b*) $\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}}$; *c*) 3; *d*) $3x^2 + 3xh + h^2$

21. Halle una fórmula para la función f cuya gráfica conste de todos los puntos que satisfacen cada una de las ecuaciones siguientes (es decir, resuelva para y en cada ecuación):

a) $x^5y + 4x - 2 = 0$ *b*) $x = \dfrac{2+y}{2-y}$ *c*) $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$

Respuestas: *a*) $f(x)=\dfrac{2-4x}{x^5}$ *b*) $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ *c*) $f(x) = 2x$

22. Trace la gráfica de estas funciones y halle su dominio y su rango:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } -1<x<0 \\ x & \text{si } 0\le x<1 \end{cases}$ *b*) $g(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } 0<x<2 \\ x-1 & \text{si } 3\le x<4 \end{cases}$ *c*) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\ne 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$

Respuestas: *a*) dominio = (–1, 1], rango = [0, 2)
b) dominio = $(0, 2) \cup [3, 4)$, rango = (0, 3)
c) dominio y rango = conjunto de todos los números reales

23. (CG) Compruebe las respuestas del problema 22 con una graficadora.

24. En cada uno de los casos que siguen, defina una función que tenga el conjunto $\mathscr{D}$ como dominio y el conjunto $\mathscr{R}$ como rango: *a*) $\mathscr{D} = (0, 2)$ y $\mathscr{R} = (1, 7)$; *b*) $\mathscr{D} = (0, 1)$ y $\mathscr{R}$ $(1, \infty)$.

Respuestas: *a*) una de las funciones es $f(x) = 3x + 1$; *b*) una de las funciones es $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

25. *a*) Pruebe el criterio de la recta vertical: un conjunto de puntos en el plano *xy* es la gráfica de una función si y sólo si el conjunto interseca toda recta vertical, a lo sumo, en un punto.

b) Determine si cada conjunto de puntos en la figura 6.8 es la gráfica de una función.

Respuesta: Sólo (*b*) es la gráfica de una función.

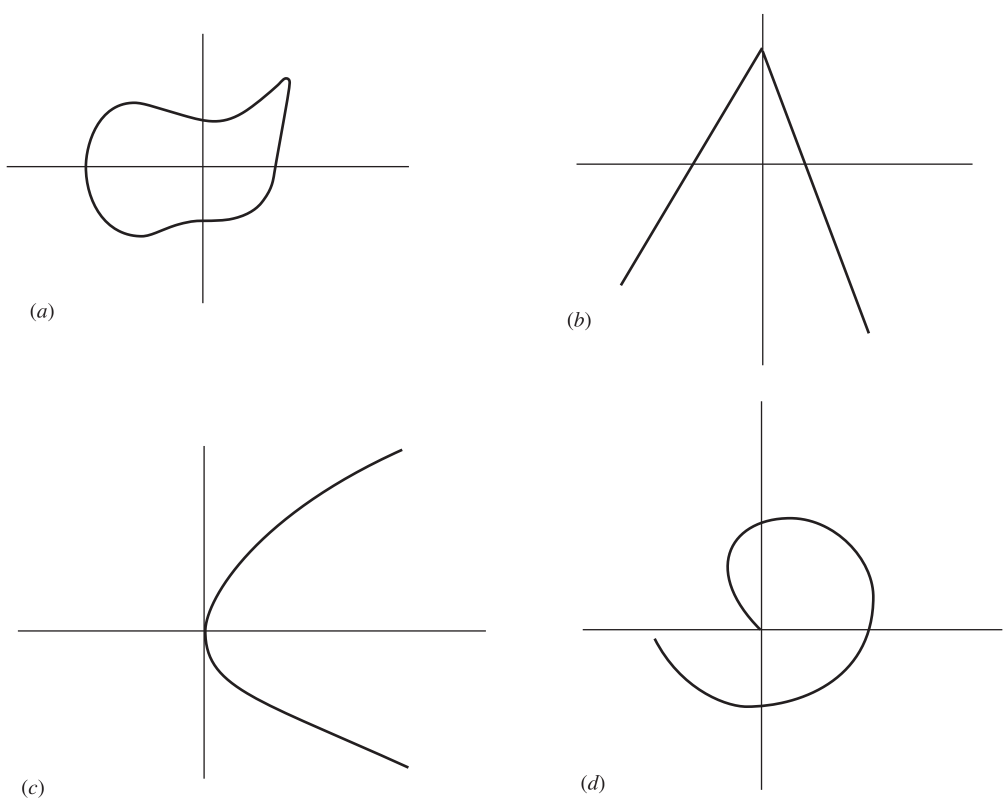


Fig. 6.8

7

Límites

Límite de una función

Si f es una función, entonces se dice que

A *es el límite de* f(x) *cuando* x *se aproxima a a*

si el valor de $f(x)$ se acerca arbitrariamente a A cuando x se aproxima a a. En notación matemática esto se expresa así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Por ejemplo, $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, ya que x^2 se aproxima arbitrariamente a 9 a medida que x se aproxima a 3 tanto como se desee. La definición puede plantearse en lenguaje matemático más preciso de la manera siguiente: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ si y sólo si, para cualquier número positivo seleccionado δ, aunque sea pequeño, existe un número positivo $\in$ tal que siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - A| < \in$.

Lo fundamental de la definición se ilustra en la figura 7.1. Después que se ha seleccionado $\in$ [es decir, después de seleccionar el intervalo *ii*)], δ se puede hallar [o sea, el intervalo *i*) puede determinarse] de modo que siempre que $x \uparrow a$ está en el intervalo *i*), por ejemplo en x_0, entonces $f(x)$ está en el intervalo *ii*), en $f(x_0)$. Es importante señalar que el que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ sea verdad no depende del valor de $f(x)$ cuando $x = a$. De hecho, $f(x)$ ni siquiera necesita estar definida cuando $x = a$.

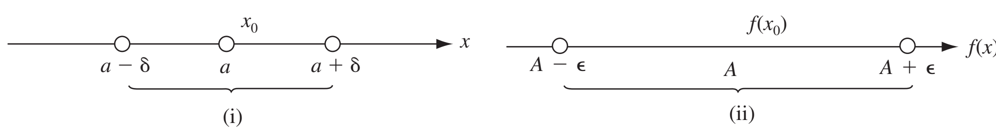


Fig. 7.1

EJEMPLO 7.1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, aunque $\frac{x^2-4}{x-2}$ no está definida cuando $x = 2$. Como

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

se observa que $\frac{x^2-4}{x-2}$ se aproxima a 4 cuando x se aproxima a 2.

EJEMPLO 7.2. Usemos la definición precisa de límite para demostrar que $\lim_{x\to 2}(4x-5) = 3$ $\lim_{x\to 2}(4x-5) = 3$. Sea $\in > 0$. Se debe producir un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|(4x - 5) - 3| < \in$.

En primer lugar, observe que $|(4x - 5) - 3| = |4x - 8| = 4\,|x - 2|$.

Si se toma δ como $\in/4$, entonces siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, $(4x - 5) - 3 = 4|x - 2| < 4\delta = \in$.

Límites por la derecha y por la izquierda

A continuación se explicará qué son los límites laterales de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por el lado derecho o por el izquierdo. Por $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$ se entiende que f está definida en algún intervalo abierto (c, a) y $f(x)$ se aproxima a A cuando x se acerca a a por valores menores que a, es decir, cuando x tiende hacia *a por la izquierda*. De igual forma, $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$ significa que f está definida en algún intervalo (a, d) y $f(x)$ tiende a A cuando x se aproxima a *a por la derecha*. Si f está definida en un intervalo a la izquierda de a y en un intervalo a la derecha de a, entonces la afirmación $\lim_{x\to a} f(x) = A$ equivale a la conjunción de las dos afirmaciones $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$. Más adelante verá ejemplos donde la existencia del límite por la izquierda no implica la existencia del límite por la derecha y a la inversa.

Cuando una función está definida sólo en un lado de un punto a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = A$ es idéntico al límite lateral, si existe. Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces f está definida sólo a la derecha de cero. Por tanto, como $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ también escribimos $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$. Claro que $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0$ no existe, ya que $\sqrt{x}$ no está definida cuando $x < 0$. Éste es un ejemplo en que la existencia de un límite lateral no implica la existencia de un límite del otro lado. Como otro ejemplo interesante, considere la función $g(x) = \sqrt{1/x}$, que está definida sólo para $x > 0$. En este caso, $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1/x}$ no existe, ya que $1/x$ aumenta más y más sin límite cuando x tiende a cero por la derecha. Por consiguiente, $\lim_{x\to 0} \sqrt{1/x}$ no existe.

EJEMPLO 7.3. La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ tiene el intervalo $-3 \le x \le 3$ como dominio. Si a es cualquier número del intervalo $(-3, 3)$, entonces $\lim_{x\to a} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Ahora considere $a = 3$. Sea x que tiende a 3 por la izquierda; entonces $\lim_{x\to 3} \sqrt{9 - x^2}$. Para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ no está definida, ya que $9 - x^2$ es negativa. Por tanto, $\lim_{x\to 3} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$. De igual forma, $\lim_{x\to 3} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$.

Teoremas sobre límites

Los teoremas siguientes son intuitivamente claros. Las demostraciones de algunos de ellos están dadas en el problema 11.

Teorema 7.1. Si $f(x) = c$, una constante, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

Para los cinco teoremas siguientes, se supone que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.

Teorema 7.2. $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cA.$

Teorema 7.3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B.$

Teorema 7.4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B.$

Teorema 7.5. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, si $B \ne 0$.

Teorema 7.6. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, si $\sqrt[n]{A}$ está definida.

Infinito

Sea

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

que significa que cuando x tiende a a, a la postre $f(x)$ poco a poco se vuelve mayor que cualquier número positivo previamente determinado, por grande que fuere. En este caso, $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x se aproxima a a. Más exactamente $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si y sólo si para cualquier número positivo M existe un número positivo δ tal que siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

De igual modo,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

significa que, cuando x tiende a a, a la postre $f(x)$ se vuelve menor que cualquier número negativo previamente asignado. En tal caso, se dice que $f(x)$ tiende a $-\infty$ cuando x tiende a a.

Sea

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

lo cual significa que cuando x tiende a a, $|f(x)|$ progresivamente se vuelve mayor que todo número positivo previamente asignado. Por tanto, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

Estas definiciones se extienden a los límites por la derecha y por la izquierda.

EJEMPLO 7.4. *a)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ *b)* $\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

EJEMPLO 7.5.

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Cuando x tiende a 0 por la derecha (es decir, por medio de números positivos), $1/x$ es positivo y poco a poco se vuelve mayor que cualquier número previamente asignado.

b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Cuando x tiende a 0 por la izquierda (es decir, mediante números negativos), $1/x$ es negativo y poco a poco se vuelve menor que cualquier número previamente asignado.

Los conceptos de límite ya mencionados pueden extenderse de forma obvia al caso en que la variable tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$$

significa que $f(x)$ tiende a a cuando $x \to +\infty$, o, en términos más exactos, dado cualquier $\in$ positivo, existe un número N tal que siempre que $x > N$, entonces $|f(x) - A| < \in$. Se pueden dar definiciones similares para las afirmaciones $\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

EJEMPLO 7.6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2.$

Advertencia: cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, los teoremas 7.3 a 7.5 no tienen sentido y no pueden utilizarse.

Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$, pero

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/x^2}{1/x^4} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Nota: se afirma que un límite, como $\lim_{x\to a} f(x)$ o $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, existe cuando el límite es un número real, pero no cuando el límite es $+\infty$, $-\infty$ o ∞. Por ejemplo, como $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$, se dice que $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ existe. Sin embargo, aunque $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, no se dice que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ existe.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Compruebe los siguientes cálculos sobre límites:

a) $\lim_{x\to 2} 5x = 5 \lim_{x\to 2} x = 5 \cdot 2 = 10$

b) $\lim_{x\to 2} (2x+3) = 2 \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

c) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)}=\dfrac{1}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4}=\dfrac{4-4}{4+4}=0$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(25-x^2)}=\sqrt{9}=3$

[*Nota*: de estos problemas no infiera que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ siempre sea $f(a)$.]

g) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}=\lim\limits_{x\to -5}(x-5)=-10$

2. Compruebe los cálculos siguientes sobre límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x+3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{7}$

La división entre $x-4$ antes de pasar al límite es válida porque $x\neq 4$ cuando $x\to 4$; por tanto, $x-4$ nunca es cero.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}=\dfrac{9}{2}$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2hx+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

Aquí, y de nuevo en los problemas 4 y 5, h es una variable, de manera que puede pensarse que se está tratando con funciones de dos variables. Sin embargo, el hecho de que x sea variable no tiene relevancia en estos problemas; por el momento, x puede considerarse una constante.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})=6$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}=\infty$; no existe límite

3. En los siguientes problemas *a*) a *c*), puede interpretar $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ como $\lim\limits_{x\to+\infty}$ o $\lim\limits_{x\to-\infty}$, sin importar cuál de los dos sea. Compruebe los límites.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x-2}{9x+7}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-2/x}{9+7/x}=\dfrac{3-0}{9+0}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6+2/x+1/x^2}{5-3/x+4/x^2}=\dfrac{6+0+0}{5-0+0}=\dfrac{6}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x-2}{4x^3-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3}=\dfrac{0}{4}=0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1+1/x^2}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1+1/x^2}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-7x^4-2x+5)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\left(1-\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}\right)=+\infty$ ya que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}\right)=(1-0-0+0)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-2x+5)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(1-\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}\right)=-\infty$, ya que

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}\right)=(1-0-0+0)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$

4. Dado $f(x)=x^2-3x$, halla $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Como $f(x)=x^2-3x$, se tiene que $f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)$ y

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2-3h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-3)=2x-3$$

5. Dado $f(x)=\sqrt{5x+1}$, halla cuando $x>-\frac{1}{5}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}\,\frac{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

6. *a*) En cada uno de los casos siguientes, de *a*) a *e*), determine los puntos $x = a$ para los cuales cada denominador es cero. Luego observe qué pasa con y cuando $x \to a^-$ y cuando $x \to a^+$ y comprueba las soluciones dadas.

b) (CG = calculadora graficadora) Compruebe las respuestas del inciso anterior) con una graficadora.

a) $y = f(x) = 2/x$; el denominador es cero cuando $x = 0$. Cuando $x \to 0^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

b) $y = f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$: El denominador es cero para $x = -3$ y $x = 2$. Cuando $x \to -3^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -3^+$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 2^+$, $y \to +\infty$.

c) $y = f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$: el denominador es cero para $x = -2$ y $x = 1$. Cuando $x \to -2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -2^+$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 1^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 1^+$, $y \to -\infty$.

d) $y = f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$: el denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$.

e) $y = f(x) = \frac{(x+2)(1-x)}{x-3}$: el denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to -\infty$.

7. Para cada una de las funciones del problema 6, determine qué sucede con y cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

a) Cuando $x \to \pm\infty$, $y = 2/x \to 0$. Cuando $x < 0$, $y < 0$. Por tanto, cuando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$. De igual forma, cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$.

b) Al dividir el numerador y el denominador de $\frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ entre x^2 (la más alta potencia de x en el denominador) se obtiene

$$\frac{1/x-1/x^2}{(1+3/x)(1-2/x)}$$

Por tanto, cuando $x \to \pm\infty$,

$$y\to\frac{0-0}{(1+0)(1-0)}=\frac{0}{1}=0$$

Cuando $x \to -\infty$, los factores $x - 1$, $x + 3$ y $x - 2$ son negativos y, por consiguiente, $y \to 0^-$. Cuando $x \to +\infty$, tales factores son positivos, por lo que $y \to 0^+$.

c) Similar a *b*).

d) $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2-6x+9}=\frac{1+1/x-2/x^2}{1-6/x+9/x^2}$, después de dividir el numerador y el denominador entre x^2 (la potencia más alta de x en el denominador). Por consiguiente, como $x \to \pm\infty$, $y \to \frac{1+0-0}{1-0+0}=\frac{1}{1}=1$. El denominador $(x-3)^2$ siempre es no negativo. Cuando $x \to -\infty$, tanto $x + 2$ como $x - 1$ son negativos y su producto es positivo; por tanto, $y \to 1^+$. Cuando $x \to +\infty$, tanto $x + 2$ como $x - 1$ son positivos, igual que su producto; por ende, $y \to 1^+$.

e) $\frac{(x+2)(1-x)}{x-3}=\frac{-x^2-x+2}{x-3}=\frac{-x-1+2/x}{1-3/x}$, después de dividir el numerador entre x (la potencia más alta de x en el denominador). Cuando $x \to \pm\infty$, $2/x$ y $3/x$ tienden a 0, y $-x - 1$ se aproxima a $\pm\infty$. Luego, el denominador se acerca a 1 y el numerador tiende a $\pm\infty$. Cuando $x \to -\infty$, $x + 2$ y $x - 3$ son negativos y $1 - x$ es positivo; entonces, $y \to +\infty$. Cuando $x \to +\infty$, $x + 2$ y $x - 3$ son positivos y $1 - x$ es negativo; por ende, $y \to -\infty$.

8. Analice la función del problema 4 del capítulo 6 cuando $x \to a^-$ y cuando $x \to a^+$ cuando a es cualquier entero positivo.

Considere, como caso típico, $a = 2$. Cuando $x \to 2^-$, $f(x) \to 10$; cuando $x \to 2^+$, $f(x) \to 15$. Entonces, $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe. En general, el límite no existe para todos los enteros positivos. (Sin embargo, observe que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$, ya que $f(x)$ no está definida para $x \le 0$.)

9. Utilice la definición precisa para demostrar que $\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x) = 10$.

Sea $\epsilon > 0$. Observe que $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, y entonces $x^2 + 3x - 10 = (x-2)^2 + 7x - 14 = (x-2)^2 + 7(x-2)$. Por tanto, $|(x^2+3x) - 10| = |(x-2)^2 + 7(x-2)| \le |x-2|^2 + 7|x-2|$. Si se selecciona δ como el mínimo de 1 y $\epsilon/8$, entonces $\delta^2 \le \delta$ y, por consiguiente, $0 < |x-2| < \delta$ implica $|(x^2+3x) - 10| < \delta^2 + 7\delta \le \delta + 7\delta = 8\delta \le \epsilon$.

10. Si $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, demuestre que existe un número positivo δ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$.

Con $\epsilon = |B|/2$ se obtiene un δ positivo tal que $0 < |x-a| < \delta$, y entonces $|g(x) - B| < |B|/2$. Ahora, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|B| = |g(x) + (B - g(x))| \le |g(x)| + |B|/2$ y, por consiguiente, $|B|/2 < |g(x)|$.

11. Suponga que *i*) $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y *ii*) $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Pruebe:

a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B$ *b*) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$ *c*) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, si $B \neq 0$

a) Sea $\epsilon > 0$. Entonces, $\epsilon/2 > 0$. Por *i*) y *ii*), existen δ_1 y δ_2 positivos tales que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica que $|f(x) - a| < \epsilon/2$ y $0 < |x-a| < \delta_2$ implica que $|g(x) - B| < \epsilon/2$. Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Entonces, para $0 < |x-a| < \delta$, $|f(x) - A| < \epsilon/2$ y $|g(x) - B| < \epsilon/2$. Por consiguiente, para $0 < |x-a| < \delta$,

$$|f(x) + g(x) - (A+B)| = |(f(x) - A)| + (g(x) - B)|$$
$$\le |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

b) Sea $\epsilon > 0$. Escoja $\epsilon*$ como el mínimo de $\epsilon/3$ y 1 y $\epsilon/(3|B|)$ (si $B \neq 0$), y $\epsilon/(3|A|)$ (si $A \neq 0$). Observe que $(\epsilon*)^2 \le \epsilon*$, ya que $\epsilon* \le 1$. Además $|B|\epsilon* \le \epsilon/3$ y $|A|\epsilon* \le \epsilon/3$. Por *i*) y *ii*), existe un δ_1 y un δ_2 positivos tales que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica que $|f(x) - A| < \epsilon*$ y $0 < |x-a| < \delta_2$ implica que $|g(x) - B| < \epsilon*$. Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Ahora, para $0 < |x-a| < \delta$.

$$|f(x)g(x) - AB| = |(f(x) - A)(g(x) - B) + B(f(x) - A) + A(g(x) - B)|$$
$$\le |(f(x) - A)(g(x) - B)| + |B(f(x) - A)| + |A(g(x) - B)|$$
$$= |(f(x) - A)||(g(x) - B)| + |B||(f(x) - A)| + |A||(g(x) - B)|$$
$$\le (\epsilon^*)^2 + |B|\epsilon^* + |A|\epsilon^* \le \epsilon^* + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

c) Por el inciso *b*), basta mostrar que $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, $B^2\epsilon/2 > 0$, por lo cual existe un δ_1 positivo tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica que $|g(x) - B| < \frac{|B|^2\epsilon}{2}$.

Por el problema 10, existe un δ_2 positivo tal que $0 < |x-a| < \delta_2$ implica que $|g(x)| > |B|/2$. Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2; entonces $0 < |x-a| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g(x)|}{|B||g(x)|} < \frac{|B|^2\epsilon}{2} \cdot \frac{2}{|B|^2} = \epsilon$$

12. Pruebe que para cualquier función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Esto se deduce de los teoremas 7.1-7.4 y el hecho obvio de que $\lim_{x\to a} x = a$.

13. Pruebe las generalizaciones siguientes de los resultados del problema 3. Sean $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ dos polinomios

a) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_k}$ si $n = k$

b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si $n < k$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ si $n > k$. (Es $+\infty$ si y sólo si a_n y b_k tienen el mismo signo.)

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ si $n > k$ [El signo correcto es el de $a_n b_k (-1)^{n-k}$.]

14. Pruebe que *a*) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$; *b*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$; *c*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

a) Sea M cualquier número negativo. Se selecciona δ positivo e igual al mínimo de 1 y $\frac{1}{|M|}$. Suponga que $x < 2$ y $0 < |x-2| < \delta$. Entonces, $|x-2|^3 < \delta^3 \le \delta \le \frac{1}{|M|}$. Por tanto, $\frac{1}{|x-2|^3} > |M| = -M$. Pero $(x-2)^3 < 0$. Por consiguiente, $\frac{1}{(x-2)^3} = -\frac{1}{|x-2|^3} < M$.

b) Sea $\in$ cualquier número positivo, y sea $M = 1/\in$. Suponga que $x > M$. Por ende,

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x+1}\right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \in$$

c) Sea M cualquier número positivo. Suponga que $x > M + 1$. Entonces, $\frac{x^2}{x-1} \ge \frac{x^2}{x} = x > M$.

15. Evalúe: *a*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$; *b*) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$; *c*) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

a) Cuando $x > 0$, $|x| = x$; por ende, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$

b) Cuando $x < 0$, $|x| = -x$; por tanto, $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe, ya que $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} \ne \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

16. Evalúe los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x)$

b) $\lim_{x\to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2-1}$

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

g) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

h) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

i) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

k) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

l) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

Respuestas: *a*) –4; *b*) 0; *c*) $\frac{1}{2}$; *d*) 0; *e*) $\frac{1}{3}$; *f*) –4; *g*) $\frac{1}{2}$; *h*) $\frac{1}{4}$; *i*) 0; *j*) ∞, no existe el límite; *k*) $3x^2$; *l*) 2.

17. Evalúe los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^9-4x^5+2x-13}{-3x^9+x^8-5x^2+2x}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{14x^3-5x+27}{x^4+10}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5+12x+5}{7x^3+6}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+7}{5x^2-3x-4}$

e) $\lim_{x\to+\infty} (3x^3-25x^2-12x-17)$

f) $\lim_{x\to-\infty} (3x^3-25x^2-12x-17)$

g) $\lim_{x\to-\infty} (3x^4-25x^3-8)$

Respuestas: *a*) $-\frac{7}{3}$; *b*) 0; *c*) +∞; *d*) –∞; *e*) +∞; *f*) –∞; *g*) +∞

18. Evalúe estos límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{4x-5}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+5}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2+5x+6}$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Respuestas: *a*) $\frac{1}{2}$; *b*) $-\frac{2}{3}$; *c*) 0; *d*) +∞; *e*) 0; *f*) 1; *g*) –1

19. Halle $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para las funciones *f* de los problemas 11, 12, 13, 15 y 16*a*, *b*, *d*, *g*) del capítulo 6.

Respuestas: 11) $2a-4$; 12) $\frac{2}{(a+1)^2}$; 13) $2a-1$; 15) $-\frac{27}{(4a-5)^2}$; 16*a*) $2a$, *b*) $\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$, *d*) $\frac{3}{(a+3)^2}$, *g*) $\frac{4a}{(a^2+1)^2}$.

20. (CG) Investigue el comportamiento de

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$$

cuando $x \to 0$. Trace una gráfica y compruébela con una graficadora.

Respuesta: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$; $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

21. Utilice el teorema 7.4 y la inducción matemática con el fin de probar que $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ para todos los enteros positivos *n*.

22. Para $f(x) = 5x - 6$, halle $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 > |x - 4| < \delta$, entonces $|f(x) - 14| < \in$, cuando *a*) $\in = \frac{1}{2}$ y *b*) $\in = 0.001$.

Respuestas: *a*) $\frac{1}{10}$; *b*) 0.0002.

23. Utilice la definición precisa de límite para probar que:

a) $\lim\limits_{x \to 3} 5x = 15$

b) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$

24. Use la definición para probar:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$

25. Sean $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que 1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todos los valores en ciertos intervalos a la izquierda y a la derecha de a, y 2) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$. Pruebe que $\lim_{x \to a} g(x) = A$. (*Sugerencia*: para $\in > 0$, existe $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - A| < \in$ y $|h(x) - A| < \in$ y, por consiguiente, $A - \in < f(x) \le g(x) \le h(x) < A + \in$).

26. Pruebe que si $f(x) \le M$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a a y que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, entonces $a \le M$. (*Sugerencia*: suponga que $a > M$. Escoja $\in = \frac{1}{2}(A - M)$ y llegue a una contradicción.)

27. (CG) Utilice una graficadora para confirmar los límites encontrados en los problemas 1*d*, *e*, *f*), 2*a*, *b*, *d*), 16 y 18.

28. *a*) Demuestre que $\lim\limits_{x \to +\circ} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$. (*Sugerencia*: multiplique y divida entre $x + \sqrt{x^2 - 1}$.)

b) Demuestre que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se aproxima arbitrariamente a la asíntota $y = \frac{b}{a}x$ cuando x tiende a ∞.

29. *a*) Halle $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$. (*Sugerencia*: multiplique el numerador y el denominador por $\sqrt{x+3} + \sqrt{3}$.)

b) (CG) Utilice una graficadora para confirmar el resultado del inciso *a*).

30. Sea $f(x) = \sqrt{x} - 1$ si $x > 4$ y $f(x) = x^2 - 4x + 1$ si $x < 4$. Halle

a) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Respuestas: *a*) 1; *b*) 1; *c*) 1

31. Sea $g(x) = 10x - 7$ si $x > 1$ y $g(x) = 3x + 2$ si $x < 1$. Halla

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ *b*) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ *c*) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

Respuestas: *a*) 3; *b*) 5; *c*) no existe

8

Continuidad

Función continua

Una función se define como continua en x_0 si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(x_0)$ está definida
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 1$ es continua en 2 ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$. La primera condición implica que una función puede ser continua sólo en los puntos de su dominio. Entonces, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no es continua en 3 porque $f(3)$ no está definida.

Sea f una función definida en un intervalo (a, x_0) a la izquierda de x_0 y un intervalo (x_0, b) a la derecha de x_0, o ambos intervalos. Se dice que f es discontinua en x_0 si f no es continua en x_0, es decir, si fallan una o más condiciones de las tres condiciones indicadas no se cumple.

EJEMPLO 8.1. *a*) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ es discontinua en 2 porque $f(2)$ no está definida y también porque $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe (ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$), como se muestra en la figura 8.1.

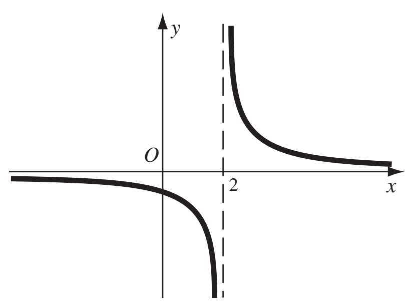


Fig. 8.1

b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es discontinua en 2 porque $f(2)$ no está definida. Sin embargo, $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$, de manera que se cumple la segunda condición.

Se dice que la discontinuidad en 2 del ejemplo 8.1*b*) es *removible* porque si se redefiniera la función f en $x = 2$ como 4, entonces la función redefinida g sería continua en 2. Observe que $g(x) = x + 2$ para todo x. Las gráficas de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x + 2$ son idénticas salvo en $x = 2$, donde la primera tiene un "hueco" (fig. 8.2). Eliminar la discontinuidad consiste simplemente en llenar ese "hueco".

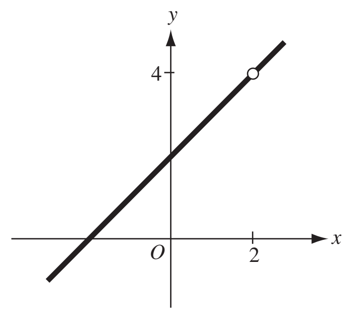


Fig. 8.2

La discontinuidad en 2 en el ejemplo 8.1*a*) no es removible. Al redefinir el valor de f en 2 no cambia el hecho de que $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$ no existe.

También se dice que la discontinuidad de una función f en x_0 es *removible* cuando $f(x_0)$ está definida y al cambiar el valor de la función en x_0 produce una función que es continua en x_0.

EJEMPLO 8.2. Defina una función f de la manera siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

En este caso $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, pero $f(2) = 0$. Por tanto, la tercera condición no se cumple, de modo que f tiene una discontinuidad en 2. Pero si se cambia el valor de f en 2 por 4, entonces se obtiene una función h tal que $h(x) = x^2$ para todo x, y h es continua en 2. Por consiguiente, la discontinuidad de f en 2 es removible.

EJEMPLO 8.3. Sea f la función tal que $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para todo $x \neq 0$. La gráfica de f se muestra en la figura 8.3. f es discontinua en 0 porque $f(0)$ no está definida. Además,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Luego $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Por tanto, la discontinuidad de f en 0 no es removible.

La clase de discontinuidad que aparece en el ejemplo 8.3 se denomina *discontinuidad de salto*. En general, una función f tiene una discontinuidad de salto en x_0 si tanto $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ como $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existen y $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Tal discontinuidad no es removible.

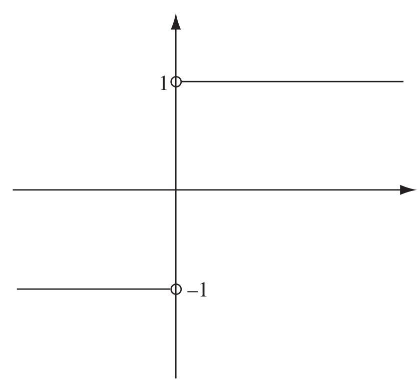


Fig. 8.3.

EJEMPLO 8.4. La función del problema 4 del capítulo 6 tiene una discontinuidad de salto en cada entero positivo.

Las propiedades de los límites conducen a las propiedades correspondientes de continuidad.

Teorema 8.1. Suponga que f y g son continuas en x_0. Entonces:

a) La función constante $h(x) = c$ para todo x es continua en todo x_0.
b) cf es continua en x_0, para cualquier constante c. (*Recuerde:* cf tiene el valor $c \cdot f(x)$ para cada argumento x.)
c) $f + g$ es continua en x_0.
d) $f - g$ es continua en x_0.
e) fg es continua en x_0.
f) f/g es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.
g) $\sqrt[n]{f}$ es continua en x_0 si $\sqrt[n]{f(x_0)}$ está definida.

Estos resultados provienen de los teoremas 7.1 a 7.6. Por ejemplo, *c*) se cumple porque

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

Teorema 8.2. La función identidad $I(x) = x$ es continua en todo x_0.

Esto se deduce del hecho de que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Se dice que una función f es continua en un conjunto A si f es continua en todo punto A. Además, si tan sólo se dice que f es continua, significa que f es continua en todo número real.

La idea intuitiva original tras la noción de continuidad suponía que la gráfica de una función continua era "continua" en el sentido intuitivo de que era posible trazarla sin levantar el lápiz del papel. Por consiguiente, la gráfica no podría contener ningún "hueco" o "salto". Sin embargo, la definición precisa de continuidad va más allá de tal noción intuitiva original; algunas funciones continuas muy complicadas no podrían dibujarse en una hoja de papel.

Teorema 8.3. Toda función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

es continua.

Ésta es una consecuencia del teorema 8.1(*a-e*) y del teorema 8.2.

EJEMPLO 8.5. Como un caso del teorema 8.3, considere la función $x^2 + 2x + 3$. Observe que, por el teorema 8.2, la función identidad x es continua y, por tanto, por el teorema 8.1(*e*), x^2 es continua, y por el teorema 8.1*b*), $-2x$ es continua. Por el teorema 8.1*a*), la función constante 3 es continua. Finalmente, por el teorema 8.1*c*), $x^2 - 2x + 3$ es continua.

Teorema 8.4. Toda función racional $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, es continua en el conjunto de todos los puntos en los que $g(x) \neq 0$.

Esto proviene de los teoremas 8.1(*f*) y 8.3. Como ejemplos, la función $H(x) = \frac{x}{x^2-1}$ es continua en todos los puntos excepto 1 y –1, y la función $G(x) = \frac{x-7}{x^2+1}$ es continua en todos los puntos (ya que $x^2 + 1$ nunca es 0).

Se debe utilizar una noción especial de continuidad respecto a un intervalo cerrado $[a, b]$. En primer lugar, se dice que una función *f es continua a la derecha en a* si $f(a)$ está definida, existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Se dice que *f es continua a la izquierda en b* si $f(b)$ está definida, existe $\lim_{x \to b^-} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

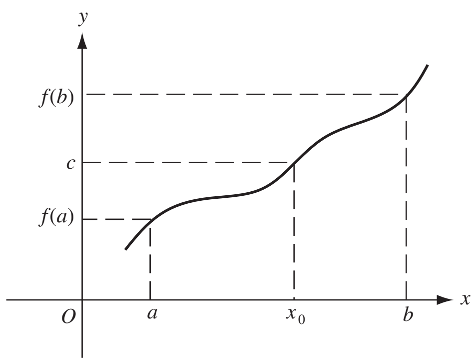
Definición. f es continua en $[a, b]$ si f es continua en cada punto de un intervalo abierto (a, b), f es continua a la derecha en a y es continua a la izquierda en b.

Observe que si f es continua en $[a, b]$, no depende de ningún valor de f, fuera de $[a, b]$. También advierta que cada función continua (es decir, una función continua en todos los números reales) debe serlo en cualquier intervalo cerrado. En especial, toda función polinomial es continua en todo intervalo cerrado.

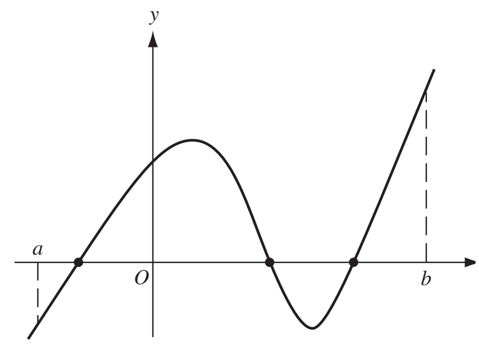
Se pretende analizar en profundidad ciertas propiedades sobre las funciones continuas que se utilizarán, pero esas demostraciones van más allá del objetivo de esta obra.

Teorema 8.5. Teorema del valor intermedio. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces, para todo número c entre $f(a)$ y $f(b)$, existe por lo menos un número x_0 en el intervalo abierto (a, b) para el cual $f(x_0) = c$.

La figura 8.4*a*) es una ilustración del teorema 8.5, ya que en ella se muestra que la continuidad a lo largo del intervalo es esencial para la validez del teorema. El resultado siguiente es un caso especial del teorema del valor intermedio.

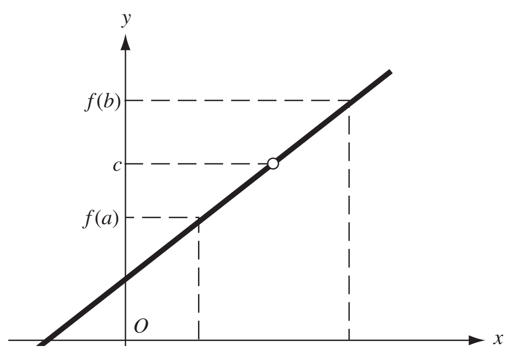


a)

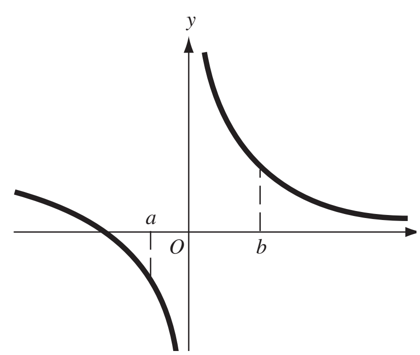


b) $f(x) = 0$ tiene tres raíces entre $x = a$ y $x = b$

Fig. 8.4



a)



b) $f(x) = 0$ no tiene raíz entre $x = a$ y $x = b$

Fig. 8.5

Corolario 8.6. Si f es continua en $[a, b]$ y $f(b)$ tiene signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo abierto (a, b) y, por consiguiente, la gráfica de f corta el eje x por lo menos una sola vez entre a y b (fig. 8.4*b*)).

Teorema 8.7. Teorema del valor extremo. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f toma un valor mínimo m y un valor máximo M en el intervalo.

Como ilustración del teorema del valor extremo observa la figura 8.6*a*), donde el valor mínimo m ocurre en $x = c$ y el valor máximo M en $x = d$. En este caso, tanto c como b están dentro del intervalo. Por otra parte, en la figura 8.6*b*) el valor mínimo m ocurre en el punto extremo $x = a$ y el valor máximo M dentro del intervalo. Para comprobar que la continuidad es necesaria para que el teorema del valor extremo sea verdadero, considere la función cuya gráfica se presenta en la figura 8.6*c*). Existe discontinuidad en c dentro del intervalo; la función tiene un valor mínimo en el punto extremo izquierdo $x = a$, pero la función no tiene valor máximo.

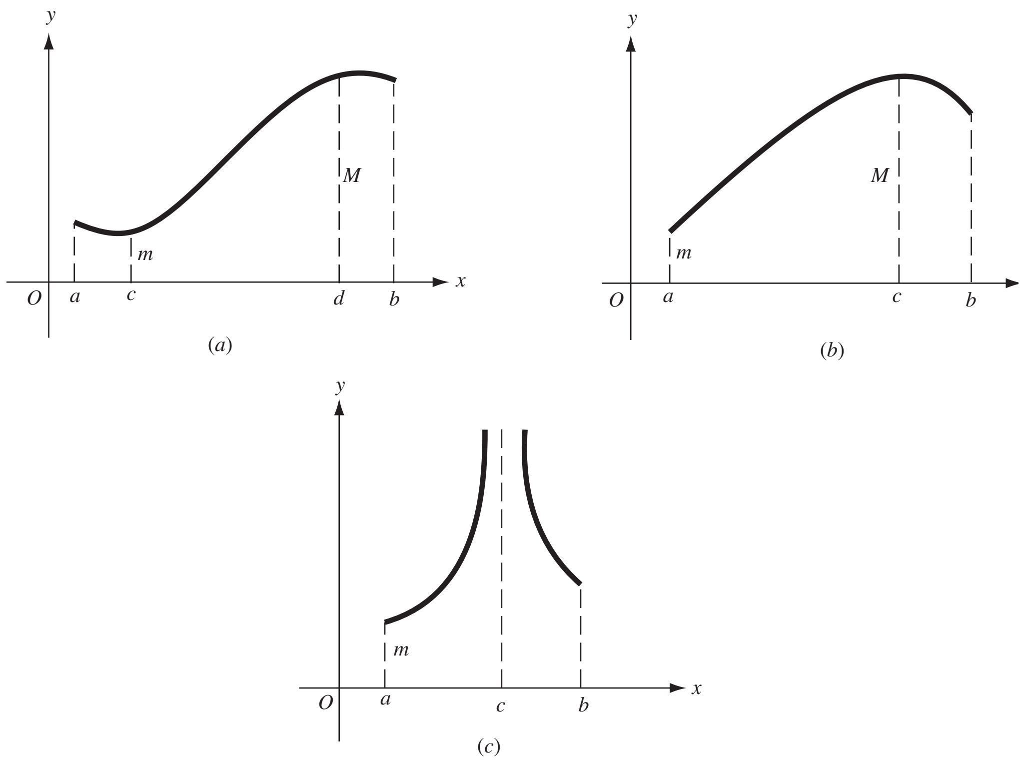


Fig. 8.6

Otra propiedad útil de las funciones de continuidad está dada por el resultado siguiente.

Teorema 8.8. Si f es continua en c y $f(c) > 0$, entonces existe un número positivo δ tal que, cuando $c - \delta < x < c + \delta$, entonces $f(x) > 0$.

Este teorema se ilustra en la figura 8.7. Para ver una demostración, consulte el problema 3.

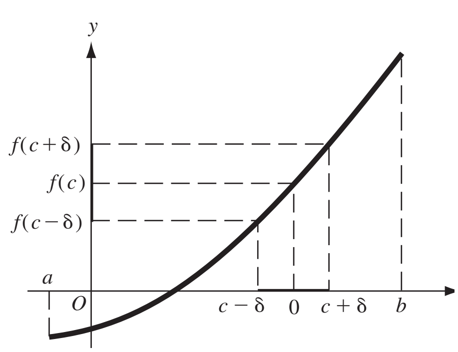


Fig. 8.7

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle las discontinuidades de las funciones siguientes. Determine si son removibles. Si no lo son, establezca si son discontinuidades de salto. (CG = calculadora graficadora) Compruebe las respuestas mostrando la gráfica de la función en una graficadora.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ — Discontinuidad no removible en $x = 0$

b) $f(x)=\dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ — Discontinuidades no removibles en $x = -3$ y $x = 2$

c) $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ — Discontinuidad no removible en $x = 3$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ — Tiene una discontinuidad removible en $x = 3$. [Observe que $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.] También tiene una discontinuidad no removible en $x = -3$

e) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ — Tiene una discontinuidad removible en $x = \pm 2$. Observe que
$$\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\,\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}=3+\sqrt{x^2+5}$$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ — Tiene una discontinuidad no removible en $x = 1$

g) $f(x) = [x]$ = el mayor entero $\le x$ — Tiene una discontinuidad de salto en cada entero

h) $f(x) = x - [x]$ — Tiene una discontinuidad no removible en cada entero

i) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 2$ — Un polinomio no tiene discontinuidades

j) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 2 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$ — Discontinuidad removible en $x = 0$

k) $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le 0\\ x^2 & \text{si } 0<x<1\\ 2-x & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ — Sin discontinuidades

2. Demuestre que la existencia de $\lim\limits_{x\to h} f(x)\,\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ implica que f es continua en $x = a$.

$$\lim_{x\to h} f(x)(f(a+h)-f(a))=\lim_{x\to h}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right)=$$
$$\lim_{x\to h}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{x\to h} h=\lim_{x\to h}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot 0=0$$

Pero

$$\lim_{x\to h}(f(a+h)-f(a))=\lim_{x\to h} f(a+h)-\lim_{x\to h} f(a)=\lim_{x\to h} f(a+h)-f(a).$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to h} f(a+h)=f(a)$. Observe que $\lim\limits_{x\to h} f(a+h)=\lim\limits_{x\to h} f(x)$. Así, $\lim\limits_{x\to h} f(x)=f(a)$.

3. Pruebe el teorema 8.8.

Por la continuidad de f en c, $\lim\limits_{x\to h} f(x)=f(c)$. Si se toma $\in = f(c)/2 > 0$, existe un δ positivo tal que $0 < |x - c| < \delta$ implica que $|f(x) - f(c)| < f(c)/2$. La última desigualdad también es verdadera cuando $x = c$. Luego, $|x - c| < \delta$ implica $|f(x) - f(c)| < f(c)/2$. Esta última implica que $-f(c)/2 < f(x) - f(c) < f(c)/2$. Al sumar $f(c)$ a la desigualdad de la izquierda se obtiene $f(c)/2 < f(x)$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4. Determine las discontinuidades de las funciones siguientes y establezca por qué la función no es continua en tales puntos. (CG) Compruebe las respuestas representando la función en una graficadora.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$ *b*) $f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\ge 2\\ x^2+1 & \text{si } x<2\end{cases}$

c) $f(x) = |x| - x$

d) $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<3 \\ x-2 & \text{si } 0<x<3 \\ x-1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-17x+15}{x^2+2x-15}$

g) $f(x) = x^3 - 7x$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

i) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

j) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

k) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

Respuestas:

a) Discontinuidad removible en $x = -2$. [Observe que $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.]

b), *c*), *g*) Ninguna

d) Discontinuidad de salto en $x = 0$

e) Discontinuidades removibles en $x = \pm 1$

f) Discontinuidades removibles en $x = 3$, $x = -5$. [Observe que $x^2 + 2x - 5 = (x + 5)(x - 3)$ y $x^3 + x^2 - 17x + 15 = (x + 5)(x - 3)(x - 1)$.]

h) Discontinuidad removible en $x = 2$ y discontinuidad no removible en $x = 3$

i) Discontinuidad removible en $x = -1$ y discontinuidad no removible en $x = -3$

j) Discontinuidad removible en $x = 2$ y discontinuidad no removible en $x = -2$

k) Discontinuidad removible en $x = 1$ y discontinuidad no removible en $x = -1$

5. Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua.

6. Si la figura 8.5*a*) es la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$, demuestre que existe una discontinuidad removible en $x = 7$ y que allí $c = 10$.

7. Pruebe: si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y c es un número en (a, b) tal que $f(c) < 0$, entonces existe un número positivo δ tal que, siempre que $c - \delta < x < c + \delta$, entonces $f(x) < 0$.
(*Sugerencia:* aplique el teorema 8.8*a -f*.)

8. Trace las gráficas de las funciones siguientes y determine si son continuas en el intervalo cerrado [0, 1]:

a) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

d) $f(x) = 1$ si $0 < x \le 1$

e) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 0 \\ 0 & \text{si } 0<x<1 \\ x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Respuestas: *a*) Sí; *b*) No, no es continua a la derecha en 0; *c*) Sí; *d*) No, no está definida en 0; *e*) No, no es continua a la izquierda en 1.

9

La derivada

Notación delta

Sea f una función. Es usual asignarle a x cualquier argumento de f, y a y el valor correspondiente de f. Por tanto, $y = f(x)$. Considere cualquier número x_0 en el dominio de f. Sea Δx (se lee "delta x") un pequeño cambio en el valor de x, de x_0 a $x_0 + \Delta x$, y sea Δy (se lee "delta y") el cambio correspondiente en el valor de y, por lo que $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Entonces la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se denomina *tasa* o *razón de cambio promedio de la función* f en el intervalo que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

EJEMPLO 9.1. Sea $y = f(x) = x^2 + 2x$. Se empieza en $x_0 = 1$, cambia x a 1.5. Entonces $\Delta x = 0.5$. El cambio correspondiente en y es $\Delta y = f(1.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$. Por tanto, la tasa de cambio promedio de y en el intervalo que hay entre $x = 1$ y $x = 1.5$ es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5$.

La derivada

Si $y = f(x)$ y x_0 está en el dominio de f, entonces, por *la tasa de cambio instantánea de* f en x_0 se entiende el límite de la tasa promedio de cambio entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ cuando Δx se aproxima a 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista. Tal límite se denomina *derivada* de f en x_0.

Notación para derivadas

Considere la derivada de f en un punto arbitrario x en su dominio:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El valor de la derivada es una función de x y se indicará mediante cualquiera de las expresiones siguientes:

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El valor $f'(a)$ de la derivada de f en un punto específico a en ocasiones se indica mediante

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Diferenciabilidad

Una función es diferenciable en un punto x_0 si la derivada de la función existe en ese punto. El problema 2 del capítulo 8 demuestra que la diferenciabilidad implica continuidad y que lo contrario es falso, como se muestra en el problema 11.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, halle Δy y $\Delta y/\Delta x$ cuando x cambia *a*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$, y *b*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0.8$.

a) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$ y $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$. Entonces, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1.44}{0.2} = 7.2$

b) $\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2$ y $\Delta y = f(0.8) - f(1) = 3.36 - (-2) = -1.36$. Luego, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1.36}{-0.2} = 6.8$.

Geométricamente, $\Delta y/\Delta x$ en *a*) es la pendiente de la recta secante que une los puntos (1, –2) y (1.2, –0.56) de la parábola $y = x^2 + 5x - 8$. En *b*), es la pendiente de la recta secante que une los puntos (0.8, –3.36) y (1, –2) de la misma parábola.

2. Las leyes de la física indican que si un cuerpo (es decir, un objeto material) cae libremente a una distancia de s pies en t segundos, entonces $s = 16t^2$. Halle $\Delta s/\Delta t$ cuando t cambia de t_0 a $t_0 + \Delta t$. Utilice el resultado para encontrar $\Delta s/\Delta t$ cuando t cambia: *a*) de 3 a 3.5, *b*) de 3 a 3.2, y *c*) de 3 a 3.1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + \Delta t)^2 - 16t_0^2}{\Delta t} = \frac{32t_0\Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = 32t_0 + 16\,\Delta t$$

a) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.5$ y $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.5) = 104$ pies/segundo

b) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.2$ y $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.2) = 99.2$ pies/segundo

c) Aquí, $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.1$, y $\Delta s/\Delta t = 97.6$ pies/segundo

Como Δs es el desplazamiento del cuerpo del tiempo $t = t_0$ hasta $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \text{ velocidad promedio del cuerpo en el intervalo de tiempo}$$

3. Halle dy/dx, con $y = x^3 - x^2 - 4$. Encuentre también el valor de dy/dx cuando *a*) $x = 4$, *b*) $x = 0$, *c*) $x = -1$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$$
$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4$$
$$\Delta y = (3x^2 - 2x)\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2 - 2x$$

a) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$ *b*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0$ *c*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

4. Halle la derivada de $y = f(x) = x^2 + 3x + 5$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5] - [x^2 + 3x + 5]$$
$$= [x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 5] - [x^2 + 3x + 5] = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$
$$= (2x + \Delta x + 3)\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

Por tanto, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3) = 2x + 3.$$

5. Encuentre la derivada de $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 1$ y $x = 3$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x+\Delta x)-2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x-2)(x+\Delta x-2)}$$
$$= \frac{-\Delta x}{(x-2)(x+\Delta x-2)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)}$$

Entonces, $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

En $x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1-2)^2} = -1$. En x = 3, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3-2)^2} = -1$.

6. Halle la derivada de $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+4}$.

$$f(x+\Delta x) = \frac{2(x+\Delta x)-3}{3(x+\Delta x)+4}$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2x+2\Delta x-3}{3x+3\Delta x+4} - \frac{2x-3}{3x+4}$$
$$= \frac{(3x+4)[(2x-3)+2\Delta x]-(2x-3)[(3x+4)+3\Delta x]}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$
$$= \frac{(6x+8-6x+9)\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}$$

7. Halle la derivada de $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$.

$$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2}$$
$$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}$$
$$= [(2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}]\frac{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$
$$= \frac{(2x+2\Delta x+1)-(2x+1)}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$$

8. Encuentre la derivada de $f(x) = x^{1/3}$. Analice $f'(0)$.

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{1/3}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}$$

$$= \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

La derivada no existe en $x = 0$ porque allí el denominador es cero. Observe que la función f es continua en $x = 0$.

9. Interprete dy/dx geométricamente.

En la figura 9.1 se observa que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la recta secante que une un punto arbitrario pero fijo $P(x, y)$ y un punto próximo $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la curva. Cuando $\Delta x \to 0$, P permanece fijo mientras Q se mueve a lo largo de la curva hacia P, y la recta PQ gira alrededor de P hacia su posición límite, la recta tangente PT a la curva en P. Así, dy/dx da la pendiente de la recta tangente en P a la curva $y = f(x)$.

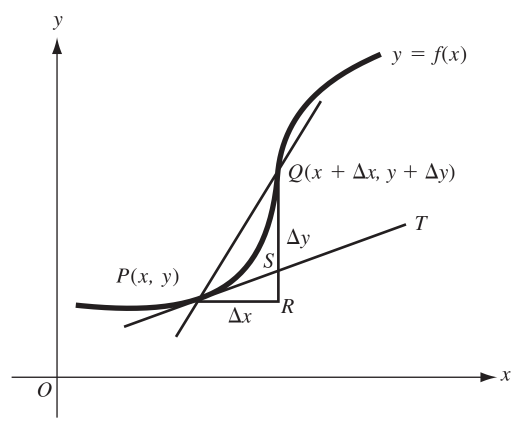


Fig. 9.1

Por ejemplo, el problema 3 señala que la pendiente de la cúbica $y = x^3 - x^2 - 4$ es $m = 40$ en el punto $x = 4$; esto es, $m = 0$ en el punto $x = 0$; y $m = 5$ en el punto $x = -1$.

10. Halle ds/dt para la función del problema 2 e interprete el resultado.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t_0 + 16\Delta t.\text{ Por tanto, } \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}(32t_0 + 16\Delta t) = 32t_0$$

Cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta s/\Delta t$ da la velocidad promedio del cuerpo para intervalos de tiempo Δt cada vez más cortos. Entonces puede ds/dt considerarse como la *velocidad instantánea* v del cuerpo en el tiempo t_0.

Por ejemplo, en $t = 3$, $v = 32(3) = 96$ pies/segundo. En general, si un objeto se mueve en línea recta y su posición sobre la recta tiene la coordenada s en el tiempo t, entonces su velocidad instantánea en el tiempo t es ds/dt (consulte el capítulo 19).

11. Halle $f'(x)$ cuando $f(x) = |x|$.

La función es continua para todos los valores de x. Para $x < 0$, $f(x) = -x$ y

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -1 = -1$$

De igual forma, para $x > 0$, $f(x) = x$, y

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

En $x = 0$, $f(x) = 0$ y $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Cuando $\Delta x \to 0^-$, $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \to -1$. Pero cuando $\Delta x \to 0^+$, $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \to -1$. Por tanto, la derivada no existe en $x = 0$.

Puesto que la función es continua en 0, se demuestra que la continuidad no implica diferenciabilidad.

12. Calcule $\in = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$ para la función de *a*) problema 3 y *b*) problema 5. Compruebe que $\in \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

a) $\in = [3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2] - (3x^2 - 2x) = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x$

b) $\in = \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2)+(x+\Delta x-2)}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)} = \frac{1}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)}\Delta x$

Ambos tienden a cero cuando $\Delta x \to 0$.

13. Interprete geométricamente $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \in \Delta x$ del problema 12.

En la figura 9.1, $\Delta y = RQ$ y $\frac{dy}{dx}\Delta x = PR \tan \angle TPR = RS$; así, $\in \Delta x = SQ$. Para el cambio Δx en x a partir de $P(x, y)$, Δy es el cambio correspondiente en y a lo largo de la curva, mientras que $\frac{dy}{dx}\Delta x$ es el cambio correspondiente en y a lo largo de la tangente PT. Como su diferencia $\in \Delta x$ es un múltiplo de $(\Delta x)^2$, tiende a cero más rápido que Δx, y $\frac{dy}{dx}\Delta x$ puede utilizarse como una aproximación de Δy cuando $|\Delta x|$ es pequeño.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

14. Halle Δy y $\Delta y/\Delta x$, dado

a) $y = 2x - 3$ y x cambia de 3.3 a 3.5
b) $y = x^2 + 4x$ y x cambia de 0.7 a 0.85
c) $y = 2/x$ y x cambia de 0.75 a 0.5

Respuestas: *a*) 0.4 y 2; *b*) 0.8325 y 5.55; *c*) $\frac{4}{3}$ y $-\frac{16}{3}$

15. Halle Δy, dado $y = x^2 - 3x + 5$, $x = 5$ y $\Delta x = -0.01$. Entonces, ¿cuál es el valor de y cuando $x = 4.99$?

Respuesta: $\Delta y = -0.0699$; $y = 14.9301$.

16. Indique la velocidad promedio (repase el problema 2), dado *a*) $s = (3t^2 + 5)$ pies y t cambia de 2 a 3 segundos. *b*) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ pies y t cambia de 2 a 5 segundos.

Respuestas: *a*) 15 pies/segundo; *b*) 19 pies/segundo

17. Encuentre el incremento en el volumen de un balón esférico cuando su radio se incrementa: *a*) de r a $r + \Delta r$ pulgadas; *b*) de 2 a 3 pulgadas. (Vale la pena recordar que el volumen de una esfera se obtiene con la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

Respuestas: *a*) $\frac{4}{3}\pi\left[3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2\right]\Delta r$ pulg^3; *b*) $\frac{76}{3}\pi$ pulg^3

18. Halle la derivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = 4x - 3$ *b*) $y = 4 - 3x$ *c*) $y = x^2 + 2x - 3$
d) $y = 1/x^2$ *e*) $y = (2x - 1)/(2x + 1)$ *f*) $y = (1 + 2x)/(1 - 2x)$
g) $y = \sqrt{x}$ *h*) $y = 1/\sqrt{x}$ *i*) $y = \sqrt{1+2x}$
j) $y = 1/\sqrt{2+x}$

Respuestas: *a*) 4; *b*) –3; *c*) $2(x + 1)$; *d*) $-2/x^3$; *e*) $\frac{4}{(2x+1)^2}$; *f*) $\frac{4}{(1-2x)^2}$; *g*) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; *h*) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$; *i*) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$; *j*) $-\frac{1}{2(2+x)^{3/2}}$

19. Halle la pendiente tangente a las curvas siguientes en el punto $x = 1$ (repase el problema 9):

a) $y = 8 - 5x^2$ *b*) $y = \frac{4}{x+1}$ *c*) $\frac{2}{x+3}$

Respuestas: *a*) –10; *b*) –1; *c*) $-\frac{1}{8}$

20. (CG) Utilice una graficadora para comprobar las respuestas al problema 19. (Trace la curva y la tangente que se encontró.)

21. Busque las coordenadas del vértice (es decir, el punto crítico) de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$, aprovechando que, en el vértice, la pendiente de la tangente es cero (relea el problema 9). (CG) Compruebe la respuesta con una graficadora.

Respuesta: (2, –3)

22. Halle la pendiente m de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en sus puntos de intersección con el eje x.

Respuestas: en $x = 2$, $m = 1$; en $x = 3$, $m = -1$

23. Cuando un objeto se mueve en línea recta y su coordenada sobre dicha recta es s en un tiempo t (donde s se mide en pies y t en segundos), halle la velocidad en el tiempo $t = 2$ en los casos siguientes:

a) $s = t^2 + 3t$ *b*) $s = t^3 + 3t^2$ *c*) $s = \sqrt{t+2}$

Respuestas: *a*) 7 pies/segundos; *b*) 0 pies/segundos; *c*) $\frac{1}{4}$ pies/segundos

24. Demuestre que la tasa instantánea de cambio de volumen V de un cubo respecto a su lado x (medido en pulgadas) es 12 pulg^3/pulg cuando $x = 2$ pulgadas.

10

Reglas para derivar funciones

Derivación

Recuérdese que una función f es *diferenciable* (o *derivable*) en x_0 si existe la derivada $f'(x_0)$. Se dice que una función es diferenciable en un conjunto si lo es en cada punto de ese mismo conjunto. Si se afirma que una función es diferenciable significa que lo es en todo número real. El proceso de hallar la derivada de una función se denomina *diferenciación.*

Teorema 10.1. Fórmulas de derivación. En las fórmulas siguientes se presupone que u, v y w son funciones diferenciables en x; también se presupone que c y m son constantes.

1. $\dfrac{d}{dx}(c)=0$ (La derivada de una constante es cero.)

2. $\dfrac{d}{dx}(x)=1$ (La derivada de la función identidad es 1.)

3. $\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$ (Derivada de una constante por una función.)

4. $\dfrac{d}{dx}(u+v+\ldots)=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}+\ \ldots$ (Regla de la suma.)

5. $\dfrac{d}{dx}(u-v)=\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dx}$ (Regla de la diferencia.)

6. $\dfrac{d}{dx}(uv)=u\dfrac{dv}{dx}+v\dfrac{du}{dx}$ (Regla del producto.)

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ siempre que $v\neq 0$ (Regla del cociente.)

8. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$ siempre que $x\neq 0$.

9. $\dfrac{d}{dx}\left(x^m\right)=mx^{m-1}$ (Regla de potencias.)

Observe que la fórmula 8 es un caso especial de la fórmula 9 cuando $m = -1$. Las demostraciones aparecen en los problemas 1 a 4.

EJEMPLO 10.1.

$$\begin{aligned} D_x(x^3+7x+5) &= D_x(x^3)+D_x(7x)+D_x(5) && \text{(Regla de la suma.)}\\ &= 3x^2+7D_x(x)+0 && \text{(Reglas de potencias y fórmulas 3 y 1.)}\\ &= 3x^2+7 && \text{(Fórmula 2.)}\end{aligned}$$

Todo polinomio es diferenciable, y su derivada puede calcularse mediante la regla de la suma, la regla de potencias y las fórmulas 1 y 3.

Funciones compuestas. La regla de la cadena

La *función compuesta* $f \circ g$ de las funciones g y f se define así: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. La función g se aplica primero y luego $f \cdot g$ se denomina *función interna* y f *función externa.* $f \circ g$ se conoce como la *función compuesta* de g y f.

EJEMPLO 10.2. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)^2 = x^2 + 1$$

Así, en este caso, $f \circ g \neq g \circ f$.

Cuando f y g son diferenciables también lo es su compuesta $f \circ g$. Hay dos procedimientos para hallar la derivada de $f \circ g$. El primer método consiste en calcular una fórmula explícita para $f(g(x))$ y derivarla.

EJEMPLO 10.3. Si $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x + 1$, entonces:

$$y = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

Por tanto, $D_x(f \circ g) = 8x + 4$.

El segundo método para calcular la derivada de una función compuesta se basa en la regla siguiente.

Regla de la cadena

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Entonces, la derivada de $f \circ g$ es el producto de la derivada de la función externa f (evaluada en $g(x)$) y la derivada de la función interna (evaluada en x). Se presupone que g es diferenciable en x y que f es diferenciable en $g(x)$.

EJEMPLO 10.4. En el ejemplo 10.3, $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 2$. Así, por la regla de la cadena,

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot 2 = 4g(x) = 4(2x + 1) = 8x + 4$$

Formulación alternativa de la regla de la cadena

Sea $u = g(x)$ y $y = f(u)$. Entonces, la función compuesta de g y f es $y = f(u) = f(g(x))$, y se tiene la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{(Regla de la cadena.)}$$

EJEMPLO 10.5. Sea $y = u^3$ y $u = 4x^2 - 2x + 5$. Así, la función compuesta $y = (4x^2 - 2x + 5)^3$ tiene la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2(8x - 2) = 3(4x^2 - 2x + 5)^2(8x - 2)$$

Advertencia: en la formulación alternativa de la regla de la cadena, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, la y de la izquierda representa la función compuesta de x, mientras que la y de la derecha señala la función original de u. Asimismo, las dos ocurrencias de u tienen significados diferentes. Esta confusión de notación se compensa con la simplicidad de la formulación alternativa.

Funciones inversas

Dos funciones f y g tales que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ son *funciones inversas*. Estas funciones invierten el efecto una de la otra. Dada una ecuación cualquiera $y = f(x)$, se puede hallar una fórmula para la inversa de f despejando x en la ecuación en términos de y.

EJEMPLO 10.6.

a) Sea $f(x) = x + 1$. Al despejar x en la ecuación $y = x + 1$ se obtiene $x = y - 1$. Entonces la inversa g de f está dada por la fórmula $g(y) = y - 1$. Se observa que g invierte el efecto de f y f invierte el efecto de g.

b) Sea $f(x) = -x$. Al despejar x en $y = -x$ se obtiene $x = -y$. Por tanto, $g(y) = -y$ es la inversa de f. En este caso, la inversa de f es la misma función que f.

c) Sea $f(x) = \sqrt{x}$. La función f está definida sólo para números no negativos, y su rango es el conjunto de los números no negativos. Si se despeja x en $y = \sqrt{x}$ se obtiene $x = y^2$, de manera que $g(y) = y^2$. Como g es la inversa de f, g está definida sólo para números no negativos, ya que los valores de f son los números no negativos. [Puesto que $y = f(g(y))$, si se permitiera que g se definiera para números negativos, se tendría $-1 = f(g(-1)) = f(1) = 1$, que es una contradicción.]

d) La inversa de $f(x) = 2x - 1$ es la función $g(y) = \frac{y+1}{2}$.

Notación

La inversa de f se denota f^{-1}.

Esta notación no debe confundirse con la notación exponencial para elevar un número a la potencia -1. El contexto generalmente indica cuál es el significado específico.

No toda función tiene función inversa. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ no posee una inversa. Como $f(1) = 1 = f(-1)$, una función inversa g tendría que satisfacer $g(1) = 1$ y $g(1) = -1$, lo cual es imposible. [Sin embargo, si se restringe la función $f(x) = x^2$ al dominio $x \geq 0$, entonces la función $g(y) = \sqrt{y}$ sería una función inversa de f.]

La condición que una función f debe satisfacer para tener una inversa es que sea *uno a uno*, es decir, que para todo x_1 y x_2, si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. De manera equivalente, f es uno a uno si y sólo si, para todo x_1 y x_2, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

EJEMPLO 10.7. Demostremos que la función $f(x) = 3x + 2$ es uno a uno. Suponga que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces, $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, $3x_1 = 3x_2$, $x_1 = x_2$. Por tanto, f es uno a uno. Para hallar la inversa de dicha función, se despeja x en $y = 3x + 2$, y se obtiene $x = \frac{y-2}{3}$. Así, $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$. (En general, si se puede despejar x en $y = f(x)$ en términos de y, entonces se sabe que f es uno a uno.)

Teorema 10.2. Fórmula de la diferenciación para funciones inversas. Sea f uno a uno y continua en el intervalo (a, b). Entonces:

a) El rango de f es intervalo I (posiblemente infinito) y f es creciente o decreciente. Además, f^{-1} es continua en I.

b) Si f es diferenciable en x y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Esta última ecuación a veces se escribe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

donde $x = f^{-1}(y)$.

Para la demostración, véase el problema 69.

EJEMPLO 10.8.

a) Sea $y = f(x) = x^2$ para $x > 0$. Entonces, $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Como $\frac{dy}{dx} = 2x$, entonces $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. Por ende, $D_y(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. [Observe que éste es un caso especial del teorema 8.1(9) cuando $m = \frac{1}{2}$.]

b) Sea $y = f(x) = x^3$ para todo x. Entonces, $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$ para todo y. Como $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, entonces $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3y^{2/3}}$. Esto se cumple para todo $y \neq 0$. [Advierta que $f^{-1}(0) = 0$ y $f'(0) = 3(0)^2 = 0$.]

Derivadas superiores

Si $y = f(x)$ es diferenciable, su derivada y' también se denomina *primera derivada* de f. Si y' es diferenciable, su derivada se llama *segunda derivada* de f. Si esta segunda derivada es diferenciable, entonces su derivada se denomina *tercera derivada* de f, y así sucesivamente.

Notación

Primera derivada	y',	$f'(x)$,	$\frac{dy}{dx}$,	$D_x y$
Segunda derivada	y'',	$f''(x)$,	$\frac{d^2y}{dx^2}$,	$D_x^2 y$
Tercera derivada	y''',	$f'''(x)$,	$\frac{d^3y}{dx^3}$,	$D_x^3 y$
n-ésima derivada	$y^{(n)}$,	$f^{(n)}(x)$,	$\frac{d^ny}{dx^n}$,	$D_x^n y$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre el teorema 10.1 (1 a 3): 1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$; 2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$; 3. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$.

Recuerde que $\frac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

1. $\frac{d}{dx}c = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

2. $\frac{d}{dx}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$

3. $\frac{d}{dx}(cu) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{cu(x+\Delta x) - cu(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} c\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$

$$= c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = c\frac{du}{dx}$$

2. Demuestre el teorema 10.1 (4, 6 y 7):

4. $\frac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \cdots$

6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ siempre que $v \neq 0$

4. Basta probar esto sólo para dos sumandos, u y v. Sea $f(x) = u + v$; entonces,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$ se obtiene $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

6. Sea $f(x) = uv$. Entonces,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - v(x)u(x+\Delta x)] + [v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}(uv) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Se observa que $\lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) = u(x)$ porque la diferenciabilidad de u implica su continuidad.

7. Sea entonces, $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}$,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x\{v(x)v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)] - [u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)]}{\Delta x[v(x)v(x+\Delta x)]}$$

$$= \frac{v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

y para $\Delta x \to 0$, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{[v(x)]^2} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

3. Demuestre el teorema 10.1 (9): $D_x(x^m) = mx^{m-1}$, cuando m es un entero no negativo.
Aplique inducción matemática. Cuando $m = 0$,

$$D_x(x^m) = D_x(x^0) = D_x(1) = 0 = 0 \times x^{-1} = mx^{m-1}$$

Se presupone que la fórmula es verdadera para m. Entonces, por la regla del producto,

$$D_x(x^{m+1}) = D_x(x^m \times x) = x^m D_x(x) + xD_x(x^m) = x^m \times 1 + x \times mx^{m-1}$$

$$= x^m + mx^m = (m+1)x^m$$

Por tanto, la fórmula se cumple para $m + 1$.

4. Demuestre el teorema 10.1 (9): $D_x(x^m) = mx^{m-1}$, cuando m es un entero negativo.
Sea $m = -k$, donde k es un entero positivo. Entonces, por la regla del cociente y el problema 3,

$$D_x(x^m) = D_x(x^{-k}) = D_x\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

$$= \frac{x^k D_x(1) - 1 \cdot D_x(x^k)}{(x^k)^2} = \frac{x^k \cdot 0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}$$

$$= -k\frac{x^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1} = mx^{m-1}$$

5. Derive $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$$

6. Derive $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$.

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

7. Derive $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}$$

8. Derive $y = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$

$$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

9. Derive $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3}(6x) - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}(5) = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

10. Demuestre la regla de la cadena de potencias: $D_x(y^m) = my^{m-1}D_xy$.

Ésta es sencillamente la regla de la cadena, donde la función externa es $f(x) = x^m$ y la función interna es y.

11. Derive $s = (t^2 - 3)^4$.

Por la regla de la cadena de potencias, $\frac{ds}{dt} = 4(t^2-3)^3(2t) = 8t(t^2-3)^3$.

12. Derive *a)* $z = \frac{3}{(a^2 - y^2)^2} = 3(a^2 - y^2)^{-2}$; *b)* $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$.

a) $\frac{dz}{dy} = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}\frac{d}{dy}(a^2 - y^2) = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3)}}$

13. Derive $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$.

Utilice la regla del producto y la regla de la cadena de potencias:

$$y' = (x^2+4)^2\frac{d}{dx}(2x^3-1)^3 + (2x^3-1)^3\frac{d}{dx}(x^2+4)^2$$

$$= (x^2+4)^2(3)(2x^3-1)^2\frac{d}{dx}(2x^3-1) + (2x^3-1)^3(2)(x^2+4)\frac{d}{dx}(x^2+4)$$

$$= (x^2+4)^2(3)(2x^3-1)^2(6x^2) + (2x^3-1)^3(2)(x^2+4)(2x)$$

$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$$

14. Derive $y = \frac{3-2x}{3+2x}$.

Utilice la regla del cociente:

$$y' = \frac{(3+2x)\frac{d}{dx}(3-2x) - (3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2} = \frac{(3+2x)(-2) - (3-2x)(2)}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

15. Derive $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - (x^2)(\frac{1}{2})(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}\,\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

16. Halle $\frac{dy}{dx}$, dado $x = y\sqrt{1-y^2}$.

La regla del producto,

$$\frac{dx}{dy} = y\cdot\frac{1}{2}(1-y^2)^{-1/2}(-2y) + (1-y^2)^{1/2} = \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por el teorema 10.2,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$$

17. Halle la pendiente de la recta tangente a la curva $x = y^2 - 4y$ en los puntos donde la curva corta el eje y.

Los puntos de intersección son (0, 0) y (0, 4). Se tiene que $\frac{dx}{dy} = 2y - 4y$, por tanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y-4}$. En (0, 0) la pendiente es $-\frac{1}{4}$, y en (0, 4) la pendiente es $\frac{1}{4}$.

18. Derive la regla de la cadena: $D_x(f(g(x))) = f'(g(x) \cdot g'(x))$.

Sea $H = f \circ g$. Sea $y = g(x)$ y $K = g(x + h) - g(x)$. También, sea $F(t) = \frac{f(y+t)-f(y)}{t} - f'(y)$ para $t \neq 0$. Como $\lim_{t\to 0} F(t) = 0$, sea $F(0) = 0$. Entonces, $f(y + t) - f(y) = t(F(t) + f'(y))$ para todo t. Cuando $t = K$,

$$f(y+K)-f(y)=K(F(K)+f'(y))$$

$$f(g(x+h))-f(g(x))=K(F(K)+f'(y))$$

Por tanto,
$$\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\frac{K}{h}(F(K)+f'(y))$$

Ahora,
$$\lim_{h\to 0}\frac{K}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

Como $\lim_{h\to 0} K = 0$, $\lim_{h\to 0} F(K) = 0$. Entonces,

$$H'(x)=f'(y)g'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

19. Halle $\frac{dy}{dx}$, dado $y=\frac{u^2-1}{u^2+1}$ y $u=\sqrt[3]{x^2+2}$.

$$\frac{dy}{du}=\frac{4u}{(u^2+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=\frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}}=\frac{2x}{3u^2}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{4u}{(u^2+1)^2}\frac{2x}{3u^2}=\frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

20. Un punto se mueve a lo largo de la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de manera que $x=\frac{1}{2}\sqrt{t}+3$, donde t es tiempo. ¿A qué tasa cambia y cuando $t = 4$?

Hay que hallar el valor de dy/dt cuando $t = 4$. Primero, $dy/dx = 3(x^2 - 1)$ y $dx/dt = 1/(4\sqrt{t})$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$, $x=\frac{1}{2}\sqrt{4}+3=4$, y $\frac{dy}{dt}=\frac{3(16-1)}{4(2)}=\frac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

21. Un punto se mueve en el plano de acuerdo con las ecuaciones $x = t^2 + 2t$ y $y = 2t^3 - 6t$. Halle dy/dx cuando $t =$ 0, 2 y 5.

Como en la primera ecuación es posible despejar t y este resultado puede sustituirse por t en la segunda ecuación, y es una función de x. Se tiene $dy/dt = 6t^2 - 6$. Como $dx/dt = 2t + 2$, al aplicar el teorema 8.2 se obtiene $dt/dx = 1/(2t + 2)$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=6(t^2-1)\frac{1}{2(t+1)}=3(t-1)$$

Los valores requeridos de dy/dx son –3 en $t = 0$, 3 en $t = 2$ y 12 en $t = 5$.

22. Sea $y = x^2 - 4x$ y $x=\sqrt{2t^2+1}$. Halle dy/dt cuando $t=\sqrt{2}$.

$$\frac{dy}{dx}=2(x-2) \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Cuando $t=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{5}$ y $\frac{dy}{dt}=\frac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{2}}{5}(5-2\sqrt{5})$.

23. Demuestre que la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ tiene derivadas de todo orden y hállelas.

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 8$, $f''(x) = 6x + 6$, $f'''(x) = 6$ y todas las derivadas de orden superior son cero.

24. Investigue las derivadas sucesivas de $f(x) = x^{4/3}$ en $x = 0$.

$$f'(x) = \tfrac{4}{3}x^{1/3} \quad \text{y} \quad f' = (0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} = \frac{4}{9x^{2/3}} \quad \text{y} \quad f''(0) \text{ no existe}$$

$f^{(n)}(0)$ no existe para $n \geq 2$.

25. Sea $f(x) = \dfrac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$. Halle la fórmula para $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2(1!)(1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(2!)(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2(3!)(1-x)^{-4}$$

lo que sugiere que $f^{(n)}(x) = 2(n!)(1-x)^{-(n+1)}$. Este resultado puede establecerse mediante inducción matemática demostrando que si $f^{(k)}(x) = 2(k!)(1-x)^{-(k+1)}$, entonces

$$f^{(k+1)}(x) = -2(k!)(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2[(k+1)!](1-x)^{-(k+2)}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

26. Demuestre el teorema 10.1 (5): $D_x(u - v) = D_xu - D_xv$.

Respuesta: $D_x(u - v) = D_x(u + (-v)) = D_xu + D_x(-v) = D_xu + D_x((-1)v) = D_xu + (-1)D_xv = D_xu - D_xv$ por el teorema 8.1 (4, 3)

En los problemas 27 a 45, halle la derivada.

27. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

28. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \tfrac{3}{2}\sqrt{x} - 1/x^{3/2}$

29. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^{3/2}}$

30. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ *Respuesta*: $y' = (1 + \sqrt{2})/\sqrt{2x}$

31. $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ *Respuesta*: $f'(t) = -\dfrac{t^{1/2} + 2t^{2/3}}{t^2}$

32. $y = (1 - 5x)^6$ *Respuesta*: $y' = -30(1 - 5x)^5$

33. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ *Respuesta*: $f'(x) = 12(1 - x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

34. $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$ *Respuesta*: $y' = (2 - x)/y$

35. $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ *Respuesta*: $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{5}{(2r+3)^2}$

36. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ *Respuesta*: $y' = \dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

37. $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ *Respuesta*: $y' = \dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

38. $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ *Respuesta*: $f'(x) = \dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

39. $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

40. $z = \dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ *Respuesta*: $\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$

41. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ *Respuesta*: $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

42. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ *Respuesta*: $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

43. $y = (x^2 + 3)^4(2x^3 - 5)^3$ *Respuesta*: $y' = 2x(x^2 + 3)^3(2x^3 - 5)^2(17x^3 + 27x - 20)$

44. $s = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ *Respuesta*: $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$

45. $y = \left(\dfrac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^4$ *Respuesta*: $y' = \dfrac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

46. Para cada una de las funciones siguientes, calcule dy/dx por dos métodos y compruebe que los resultados son iguales:

a) $x = (1 + 2y)^3$ *b*) $x = \dfrac{1}{2+y}$

En los problemas 47 a 50, use la regla de la cadena para hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

47. $y = \dfrac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{x}$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

48. $y = u^3 + 4$, $u = x^2 + 2x$ *Respuesta*: $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^2(x+1)$

49. $y = \sqrt{1+u}$, $u = \sqrt{x}$ *Respuesta*: véase el problema 42.

50. $y = \sqrt{u}$, $u = v(3 - 2v)$, $v = x^2$ *Respuesta*: véase el problema 39.

$\left(\textit{Sugerencia}: \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}.\right)$

En los problemas 51 a 54, halle la derivada indicada.

51. $y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5;\ y'''$ *Respuesta*: $y''' = 72x$

52. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}};\ y^{(4)}$ *Respuesta*: $y^{(4)} = \dfrac{105}{16x^{9/2}}$

53. $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2};\ f''(x)$ *Respuesta:* $f''(x) = -\dfrac{6}{(2-3x^2)^{3/2}}$

54. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}};\ y''$ *Respuesta*: $y'' = \dfrac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

En los problemas 55 y 56, halle una fórmula para la *n*-ésima derivada.

55. $y = \dfrac{1}{x^2}$ *Respuesta*: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n[(n+1)!]}{x^{n+2}}$

56. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ *Respuesta*: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{3^n(n!)}{(3x+2)^{n+1}}$

57. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, demuestre que

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

b) $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3$$

58. A partir de $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, derive $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$ y $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

En los problemas 59 a 64, determine si la función dada tiene inversa; si la tiene, halle una fórmula para la inversa f^{-1} y calcule su derivada.

59. $f(x) = 1/x$ *Respuesta*: $x = f^{-1}(y) = 1/y;\ dx/dy = -x^2 = -1/y^2$

60. $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ *Respuesta*: $x = f^{-1}(y) = 3y - 12;\ dx/dy = 3$.

61. $f(x) = \sqrt{x-5}$ *Respuesta:* $x = f^{-1}(y) = y^2 + 5;\ dx/dy = 2y = 2\sqrt{x-5}$

62. $f(x) = x^2 + 2$ *Respuesta*: no tiene función inversa.

63. $f(x) = x^3$ *Respuesta*: $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y};\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}$

64. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ *Respuesta:* $x = f^{-1}(y) = -\dfrac{2y+1}{y-2};\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{5}{(y-2)^2}$

65. Halle los puntos en los que la función $f(x) = |x + 2|$ es diferenciable.

Respuesta: Todos los puntos excepto $x = -2$

66. (CG) Utilice una graficadora para trazar la gráfica de la parábola $y = x^2$ y la curva $y = |x^2 - 2x|$. Halle todos los puntos de discontinuidad de la última curva.

Respuesta: $x = 0$ y $x = 2$

67. Halle una fórmula de la n-ésima derivada de las funciones siguientes: *a)* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$; *b)* $f(x) = \sqrt{x}$.

Respuestas: *a)* $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{2n!}{(x+2)^{n+1}}$

b) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$

68. Encuentre la segunda derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 2x - 7$

b) $f(x)\ 3x^2 + 5x - 10$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$

d) $f(x) = \sqrt{7-x}$

Respuestas: *a)* 0; *b)* 6; *c)* $\dfrac{2}{(x+4)^3}$; d) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(7-x)^{3/2}}$

69. Demuestre el teorema 10.2.

Respuesta:

a) *Sugerencias:* use el teorema del valor intermedio para demostrar que el rango es un intervalo. Que f es creciente o decreciente se deduce por un argumento que utiliza los teoremas del valor extremo y del valor intermedio. La continuidad de f^{-1} se deriva entonces con facilidad.

b) $$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Por la continuidad de f^{-1}, cuando $y \to y_0$, $x \to x_0$, y se obtiene $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

11

Derivación implícita

Funciones implícitas

Una ecuación $f(x, y) = 0$ define a y como una función *implícita* de x. El dominio de esa función implícitamente definida consta de las x para las que existe una única y tal que $f(x, y) = 0$.

EJEMPLO 11.1.

a) Se puede despejar y en la ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$, para obtener $y = \frac{1-x}{x-2}$. Esta función está definida para $x \neq 2$.

b) La ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ no determina una función y única. Si se despeja y en la ecuación se tiene que $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Hemos de considerar que la ecuación define implícitamente dos funciones, $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ y $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Cada una de estas funciones está definida para $|x| \leq 3$. La elipse determinada por la ecuación original es la unión de las gráficas de las dos funciones.

Si y es una función definida implícitamente por una ecuación $f(x, y) = 0$, la derivada y' puede hallarse de dos formas:

1. Se despeja y en la ecuación y se calcula y' directamente. Salvo para ecuaciones muy sencillas, este método resulta casi siempre imposible o impráctico.
2. Se considera y como función de x, se derivan ambos miembros de la ecuación original $f(x, y) = 0$ y se despeja y' en la ecuación resultante. Este proceso de derivación se conoce como *derivación implícita.*

EJEMPLO 11.2.

a) Halle y', dado $xy + x - 2y - 1 = 0$. Por derivación implícita, $xy' + yD_x(x) - 2y' - D_x(1) = D_x(0)$. Así, $xy' + y - 2y' = 0$. Al despejar y' se obtiene: $y' = \frac{1+y}{2-x}$. En este caso, en el ejemplo 11.1*a*) se demuestra que es posible remplazar y por $\frac{1-x}{x-2}$ y hallar y' en términos sólo de x. Resulta evidente que también hubiera sido fácil derivar $y + \frac{1-x}{x-2}$ mediante la regla del cociente. Sin embargo, en la mayoría de los casos, no se puede despejar y o y' en términos sólo de x.

b) Dado $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, halle y' cuando $x = \sqrt{5}$. Por medio de la derivación implícita se tiene que $4D_x(x^2) + 9D_x(y^2) - D_x(36) = D_x(0)$. Así, $4(2x) + 9(2yy') = 0$. [Observe que $D_x(y^2) = 2yy'$ por la regla de la cadena de potencias.] Al despejar y' queda $y' = -4x/9y$. Cuando $x = \sqrt{5}$, $y = \pm\frac{4}{3}$. Para la función y correspondiente al arco superior de la elipse [consulte el ejemplo 11.1*b*)], $y = -\frac{4}{3}$ y $y' = -\sqrt{5}/3$. Para la función y correspondiente al arco inferior de la elipse, $y = -\frac{4}{3}$ y $y' = -\sqrt{5}/3$.

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior pueden calcularse mediante derivación implícita o por una combinación de derivación directa e implícita.

EJEMPLO 11.3. En el ejemplo 11.2*a*), $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$. Entonces,

$$y'' = D_x(y') = D_x\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' - (1+y)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

EJEMPLO 11.4. Halle el valor de y'' en el punto $(-1, 1)$ de la curva $x^2y + 3y - 4 = 0$.

Se deriva implícitamente respecto a x dos veces. Primero, $x^2y' + 2xy + 3y' = 0$, y luego $x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$. Se podría despejar y' en la primera ecuación y luego despejar y'' en la segunda ecuación. Sin embargo, como sólo se desea evaluar y'' en el punto particular $(-1, 1)$, se sustituye $x = -1$, $y = 1$ en la primera ecuación para hallar $y' = \frac{1}{2}$, y luego se sustituye $x = -1$, $y = 1$ y $y' = \frac{1}{2}$ en la segunda ecuación para llegar a $y'' - 1 - 1 + 2 + 3y'' = 0$, de lo que se obtiene $y'' = 0$. Este método evita cálculos algebraicos confusos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle y', dado que $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$D_x(x^2y) - D_x(xy^2) + D_x(x^2) + D_x(y^2) = 0$$

$$x^2y' + yD_x(x^2) - xD_x(y^2) - y^2D_x(x) + 2x + 2yy' = 0$$

$$x^2y' + 2xy - x(2yy') - y^2 + 2x + 2yy' = 0$$

$$(x^2 - 2xy + 2y)y' + 2xy - y^2 + 2x = 0$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy + 2y}$$

2. Si $x^2 - xy + y^2 = 3$, encuentre y' y y''.

$$D_x(x^2) - D_x(xy) + D_x(y^2) = 0$$

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0$$

Por tanto, $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$. Entonces,

$$y'' = \frac{(x-2y)D_x(2x-y) - (2x-y)D_x(x-2y)}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{2x - xy' - 4y + 2yy' - 2x + 4xy' + y - 2yy'}{(x-2y)^2} = \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3x\left(\dfrac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x(2x-y) - 3y(x-2y)}{(x-2y)^3} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3}$$

$$= \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Dado $x^3y + xy^3 = 2$, halle y' y y'' en el punto $(1, 1)$.

Mediante doble derivación implícita queda

$$x^3y' + 3x^2y + x(3y^2y') + y^3 = 0$$

y

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + y'[6xyy' + 3y^2] + 3y^2y' = 0.$$

Al sustituir $x = 1$ y $y = 1$ en la primera ecuación se obtiene $y' = -1$. Entonces, si se remplaza $x = 1$, $y = 1$ y $y' = -1$ en la segunda ecuación se obtiene $y'' = 0$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4. Halle y'' dado *a)* $x + xy + y = 2$; *b)* $x^3 - 3xy + y^3 = 1$.

Respuestas: *a)* $y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}$; *b)* $y'' = -\frac{4xy}{(y^2-x)^3}$.

5. Encuentre y', y'', y''' en *a)* el punto (2, 1) en $x^2 - y^2 - x = 1$; *b)* el punto (1, 1) en $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

Respuestas: *a)* $\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{45}{8}$; *b)* 1, 0, 0.

6. Halle la pendiente de la tangente en un punto (x_0, y_0) de *a)* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; *b)* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; *c)* $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$.

Respuestas: *a)* $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; *b)* $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$; *c)* $\frac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$.

7. Demuestre que las tangentes a las curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ se cortan en el origen en ángulos rectos.

8. *a)* El área total de la superficie de una caja rectangular con base cuadrada de lado y y altura x está dada por $S = 2y^2 + 4xy$. S es constante. Halle dy/dx sin despejar y.

b) El área total de la superficie de un cilindro recto de radio r y altura h está dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. S es constante. Calcule dr/dh.

Respuestas: *a)* $-\frac{y}{x+y}$; *b)* $-\frac{r}{2r+h}$.

9. En el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, demuestre que $\left|\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\right| = \frac{1}{r}$.

10. Dado $S = \pi x(x + 2y)$ y $V = \pi x^2y$, demuestre que $dS/dx = 2\pi(x - y)$ cuando V es una constante, y $dV/dx = -\pi x(x - y)$ cuando S es una constante.

11. Deduce la fórmula $D_x(x^m) = mx^{m-1}$ del teorema 10.1(9) cuando $m = p/q$, donde p y q son enteros diferentes de cero. Se presupone que $x^{p/q}$ es diferenciable. (*Sugerencia*: sea $y = x^{p/q}$. Entonces, $y^q = x^p$. Ahora puede utilizar la derivación implícita.)

12. (CG) Emplee derivación implícita para hallar una ecuación de la recta tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ en (4, 4) y compruebe su respuesta en una graficadora.

Respuesta: $y = -x + 8$.

12

Rectas tangentes y normales

En la figura 12.1*a*) se presenta un ejemplo de la gráfica de una función continua *f*. Si *P* es un punto de la gráfica que tiene abscisa *x*, entonces las coordenadas de *P* son $(x, f(x))$. Sea *Q* un punto cercano que tiene la abscisa $x + \Delta x$. Entonces las coordenadas de *Q* son $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. La recta *PQ* tiene pendiente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Cuando *Q* se aproxima a *P* a lo largo de la gráfica, las rectas *PQ* se acercan más y más a la recta tangente *T* de la gráfica en *P* (fig. 12.1*b*)). Por tanto, la pendiente de *PQ* se aproxima a la pendiente de la tangente. Así, la pendiente de la tangente es $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, que es la derivada $f'(x)$.

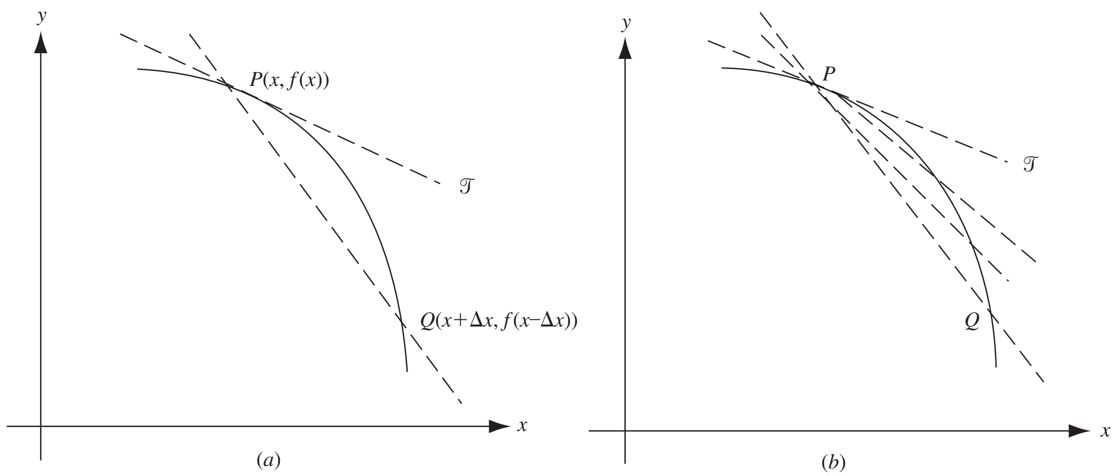


Fig. 12.1

Si la pendiente *m* de la tangente en un punto de la curva $y = f(x)$ es cero, entonces la curva tiene una tangente horizontal en ese punto, igual que en los puntos *A*, *C* y *E* de la figura 12.2. En general, si la derivada de *f* es *m* en un punto (x_0, y_0), la ecuación punto-pendiente de la tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$. Si *f* es continua en x_0, pero $\lim_{\lambda\to x_0} f'(x) = \infty$, entonces la curva tiene una tangente vertical en x_0, así como en los puntos *B* y *D* de la figura 12.2.

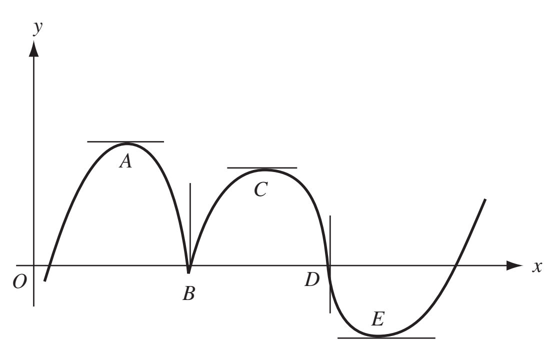


Fig. 12.2

La *recta normal* a una curva en uno de sus puntos (x_0, y_0) es la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la tangente en ese mismo punto. Recuérdese que una perpendicular a una recta con pendiente m diferente de cero tiene pendiente $-1/m$. Por tanto, si $m \neq 0$ es la pendiente de la tangente, entonces $y - y_0 = -(1/m)(x - x_0)$ es una ecuación punto-pendiente de la recta normal. Si la tangente es horizontal, entonces la normal es vertical y tiene la ecuación $x = x_0$. Si la tangente es vertical, entonces la normal es horizontal y tiene la ecuación $y = y_0$.

Ángulos de intersección

Los ángulos de intersección de dos curvas se definen como los ángulos formados por las rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección.

Para determinar los ángulos de intersección de las dos curvas:

1. Se resuelven simultáneamente las ecuaciones de las curvas para hallar los puntos de intersección.
2. Se determinan las pendientes m_1 y m_2 de las rectas tangentes a las dos curvas en cada punto de intersección.
3. Si $m_1 = m_2$, el ángulo de intersección es 0°, y si $m_1 = -1/m_2$, el ángulo de intersección es 90°; de lo contrario, el ángulo de intersección ϕ puede hallarse con la fórmula

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

ϕ es el ángulo agudo de intersección cuando $\tan\phi > 0$, y $180° - \phi$ es el ángulo agudo de intersección cuando $\tan\phi < 0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ en (2, 4).

$f'(x) = 3x^2 - 4x$. Así, la pendiente de la tangente en (2, 4) es $m = f'(2) = 4$, y una ecuación de la recta tangente es $y - 4 = 4(x - 2)$. La ecuación punto-intersección es $y = 4x - 4$.

Una ecuación de la recta normal en (2, 4) es $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$. Su ecuación punto-intersección es $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

2. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en (1, 1).

Por diferenciación implícita, $2x + 3xy' + 3y + 2yy' = 0$, de manera que, $y' = -\frac{2x+3y}{3x+2y}$. Entonces la pendiente de la tangente en (1, 1) es -1. Una ecuación de la tangente es $y - 1 = -(x - 1)$. Su ecuación punto-intersección es $y = -x + 2$. Una ecuación de la recta normal es $y - 1 = x - 1$, o sea, $y = x$.

3. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes con pendiente $m = -\frac{2}{9}$ a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$.

Por derivación implícita, $y' = -4x/9y$, de manera que en el punto de tangencia (x_0, y_0), $m = -4x_0/9y_0 = -\frac{2}{9}$. Entonces, $y_0 = 2x_0$.

Como el punto está en la elipse, $4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$. Entonces, $4x_0^2 + 9(2x_0)^2 = 40$. Por tanto, $x_0^2 = 1$ y $x_0 = \pm 1$. Los puntos requeridos son (1, 2) y (–1, –2).

En (1, 2), una ecuación de la recta tangente es $y - 2 = -\frac{2}{9}(x - 1)$.

En (–1, –2), una ecuación de la recta tangente es $y + 2 = -\frac{2}{9}(x + 1)$.

4. Halle una ecuación de las rectas tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ que pasen por el punto (2, –2).

Por derivación implícita, $2x - 2yy' = 0$ y, por tanto, $y' = x/y$, de manera que en el punto de tangencia (x_0, y_0), la pendiente de la tangente será x_0/y_0. Por otra parte, como la tangente debe pasar por (x_0, y_0) y (2, –2), la pendiente es $\frac{y_0+2}{x_0-2}$.

Así, $\frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0+2}{x_0-2}$. Por tanto, $x_0^2 - 2x_0 = y_0^2 + 2y_0$. Luego, $2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16$, lo que da $x_0 + y_0 = 8$ y, en consecuencia, $y_0 = 8 - x_0$.

Si se sustituye $8 - x_0$ por y_0 en $x_0^2 - y_0^2 = 16$ y se despeja x_0, se obtiene $x_0 = 5$. Luego, $y_0 = 3$; por ende, una ecuación de la recta tangente es $y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$.

5. Halle los puntos de tangencia de las rectas tangentes horizontal y vertical a la curva $x^2 - xy + y^2 = 27$.

Por derivación implícita, $2x - xy' - y + 2yy' = 0$, donde $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$.

Para las tangentes horizontales la pendiente debe ser cero. Entonces, el numerador $y - 2x$ de y' debe ser cero, lo cual da $y = 2x$. Al sustituir $2x$ por y en la ecuación de la curva se tiene $x^2 = 9$, de modo que los puntos de tangencia son (3, 6) y (–3, –6).

Para las tangentes verticales la pendiente debe ser infinita. Así, el denominador $2y - x$ de y' debe ser cero, lo cual da $x = 2y$. Al remplazar x en la ecuación de la curva se obtiene $y^2 = 9$. Por consiguiente, los puntos de tangencia son (6, 3) y (–6, –3).

6. Halle las ecuaciones de las rectas verticales que cortan las curvas *a*) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ y *b*) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$ en puntos donde las tangentes a las dos curvas son paralelas.

Sea $x = x_0$ una de tales rectas. Las tangentes en x_0 tienen pendientes:

Para *a*): $y' = 3x^2 + 4x - 4$; en x_0, $m_1 = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$.

Para *b*): $3y' = 6x^2 + 18x - 3$; en x_0, $m_2 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$.

Como $m_1 = m_2$, $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$. Entonces $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$, $(x_0 - 3)(x_0 + 1) = 0$. Por tanto, $x_0 = 3$ o $x_0 = -1$. Así, las rectas verticales son $x = 3$ y $x = -1$.

7. *a*) Demuestre que la ecuación punto-intersección de la tangente con pendiente $m \neq 0$ a la parábola $y^2 = 4px$ es $y = mx + p/m$.

b) Demuestre que una ecuación de la recta tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ sobre la elipse es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

a) $y' = 2p/y$. Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia. Entonces, $y_0^2 = 4px_0$ y $m = 2p/y_0$; por ende, $y_0 = 2p/m$ y $x_0 = \frac{1}{4}y_0^2/p = p/m^2$. La ecuación de la recta tangente es $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$, lo que se reduce a $y = mx + p/m$.

b) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$. En P_0, $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Una ecuación de la recta tangente es $y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$, la cual se reduce a $b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ [porque (x_0, y_0) satisface la ecuación de la elipse].

8. Demuestre que en el punto $P_0(x_0, y_0)$ de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, la recta tangente biseca el ángulo incluido entre los radios focales de P_0.

En P_0 la pendiente de la tangente a la hipérbola es b^2x_0/a^2y_0 y las pendientes de los radios focales P_0F' y P_0F (fig. 12.3) son $y_0/(x_0 + c)$ y $y_0/(x_0 - c)$, respectivamente. Ahora

$$\tan\alpha = \frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0}{x_0+c}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}} = \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2+b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2+cx_0)}{cy_0(a^2+cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

como $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ y $a^2 + b^2 = c^2$, y

$$\tan\beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_{0-c}} - \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} -}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2x_0}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2+b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Entonces, $\alpha = \beta$ porque $\tan\alpha = \tan\beta$.

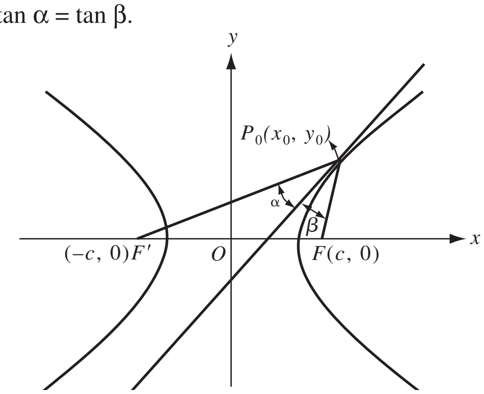


Fig. 12.3

9. Uno de los puntos de intersección de las curvas *a*) $y^2 = 4x$ y *b*) $2x^2 = 12 - 5y$ es (1, 2). Halle el ángulo agudo de intersección de las curvas en ese punto.

Para *a*), $y' = 2/y$. Para *b*) $y' = -4x/5$. Entonces, en (1, 2), $m_1 = 1$ y $m_2 = -\frac{4}{5}$. Luego,

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 9$$

Así, $\phi \approx 83° \; 40'$ es el ángulo agudo de intersección.

10. Halle los ángulos de intersección de las curvas *a*) $2x^2 + y^2 = 20$ y *b*) $4y^2 - x^2 = 8$.

Al despejar simultáneamente se obtiene $y^2 = 4$, $y = \pm 2$. Entonces, los puntos de intersección son $(\pm 2\sqrt{2},\ 2)$ y $(\pm 2\sqrt{2},\ -2)$. Para *a*), $y' = -2x/y$, y para *b*), $y' = x/4y$. En el punto $(2\sqrt{2},\ 2)$, $m_1 = -2\sqrt{2}$ y $m_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Como $m_1 m_2 = -1$, el ángulo de intersección tiene 90° (es decir, las curvas son *ortogonales*). Por simetría, las curvas son ortogonales en cada uno de sus puntos de intersección.

11. El cable de suspensión de un puente está unido a pilares de soporte que distan 250 pies uno de otro, y cuelga en forma de una parábola con el punto más bajo a 50 pies por debajo del punto de suspensión. Halle el ángulo entre el cable y el pilar.

Tome el origen en el vértice de la parábola, como en la figura 12.4. La ecuación de la parábola es $y = \frac{2}{625}x^2$ y $y' = 4x/625$.

En (125, 50), $m = 4(125)/625 = 0.8000$ y $\theta = 38° \; 40'$. Por ende, el ángulo requerido es $\phi = 90° - \theta = 51° \; 20'$.

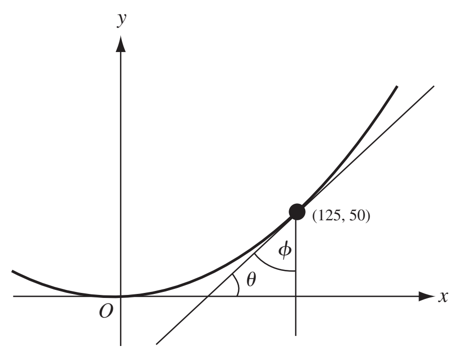


Fig. 12.4

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Examine las rectas tangentes horizontales y verticales de $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$.

Respuestas: tangentes horizontales en $(3,\ -\frac{3}{2})$ y $(-3,\ \frac{3}{2})$. Tangentes verticales en $(6,\ -\frac{3}{4})$ y $(-6,\ -\frac{3}{4})$.

13. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a $x^2 - y^2 = 7$ en el punto (4, –3).

Respuesta: $4x + 3y = 7$ y $3x - 4y = 24$.

14. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 + 5$ es su recta tangente: *a*) paralela a la recta $12x - y = 17$; *b*) perpendicular a la recta $x + 3y = 2$?

Respuestas: *a*) (2, 13), (–2, –3); *b*) (1, 6), (–1, 4).

15. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a $9x^2 + 16y^2 = 52$ que sean paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.

Respuesta: $9x - 8y = \pm 26$.

16. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $xy = 1$ que pasan por el punto $(-1, 1)$.

Respuestas: $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2;\ y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$.

17. Para la parábola $y^2 = 4px$, demuestre que una ecuación de la tangente en uno de sus puntos $P(x_0, y_0)$ es $y_0y = 2p(x + x_0)$.

18. Para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuestre que las ecuaciones de sus rectas tangentes de pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

19. Para la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demuestre que *a*) una ecuación de la recta tangente en uno de sus puntos $P(x_0, y_0)$ es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$; y *b*) las ecuaciones de sus tangentes con pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

20. Demuestre que la recta normal a una parábola en uno de sus puntos P biseca el ángulo formado por el radio focal de P y la recta que pasa por P y es paralela al eje de la parábola.

21. Pruebe que toda tangente a una parábola, con excepción del vértice, corta la directriz y el lado recto (producido si es necesario) en puntos equidistantes del foco.

22. Demuestre que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una parábola trazada desde cualquier punto sobre su directriz pasa por el foco.

23. Pruebe que la recta normal a una elipse en cualquiera de sus puntos P es bisectriz del ángulo comprendido entre los radios focales de P.

24. Demuestre que *a*) la suma de las intersecciones con los ejes coordenados de toda tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ es constante; y que *b*) la suma de los cuadrados de las intersecciones con los ejes coordenados de toda tangente a $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ es constante.

25. Halle los ángulos agudos de intersección de los círculos $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$.

Respuesta: 45°.

26. Demuestre que las curvas $y = x^3 + 2$ y $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0, 2)$ y se cortan en el punto $(2, 10)$ en un ángulo ϕ tal que $\tan \phi = \frac{4}{97}$.

27. Demuestre que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales (es decir, se cortan en ángulo recto).

28. Halle la ecuación de las rectas tangente y normal a la parábola $y = 4x^2$ en el punto $(-1, 4)$.

Respuestas: $y + 8x + 4 = 0$; $8y - x - 33 = 0$.

29. ¿En qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ pasa su tangente por el origen?

Respuesta: $x = -3, -1, \frac{3}{4}$.

13

Teorema del valor medio. Funciones crecientes y decrecientes

Máximo y mínimo relativos

Una función f tiene un *máximo relativo* en x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a x_0 (y para el que $f(x)$ esté definida). En otras palabras, el valor de f en x_0 es mayor o igual a todos los valores de f en los puntos próximos. De la misma forma, f tiene un *mínimo relativo* en x_0 si $f(x) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contenga x_0 (y para el que esté definida $f(x)$). En otras palabras, el valor de f en x_0 es menor o igual que todos los valores de f en los puntos próximos. Por *extremo relativo* de f se entiende un máximo relativo o un mínimo relativo de f.

Teorema 13.1. Si f tiene un extremo relativo en un punto x_0 en el que $f'(x_0)$ está definida, entonces $f'(x_0) = 0$.

De esta manera, si f es diferenciable en un punto en el que tiene un extremo relativo, entonces la gráfica de f tiene una tangente horizontal en ese punto. En la figura 13.1 hay tangentes horizontales en los puntos A y B, donde f logra un valor máximo relativo y un valor mínimo relativo, respectivamente. Repase el problema 5 para obtener una demostración del teorema 13.1.

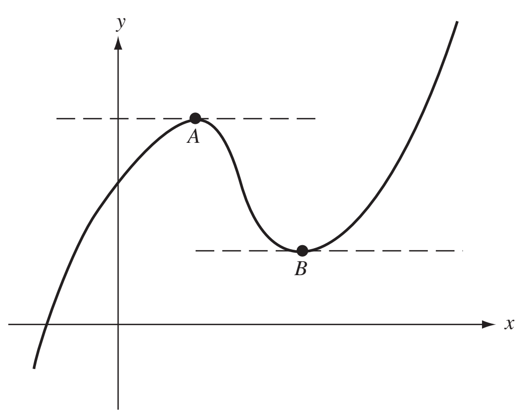


Fig. 13.1

Teorema 13.2. Teorema de Rolle. Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Se presupone que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces $f'(x) = 0$ para al menos un punto x_0 en (a, b).

Lo anterior significa que si la gráfica de una función continua corta el eje x en $x = a$ y $x = b$, y la función es diferenciable entre a y b, entonces existe al menos un punto en la gráfica entre a y b donde la tangente es horizontal. En la figura 13.2 se muestra ese punto. En el problema 6 se demuestra el teorema de Rolle.

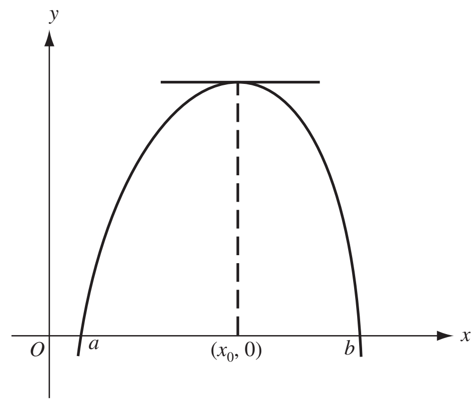


Fig. 13.2

Corolario 13.3. Teorema generalizado de Rolle. Sea g continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Se presupone que $g(a) = g(b)$. Entonces $g'(x_0) = 0$ al menos para un punto x_0 en (a, b).

Observe en la figura 13.3 un ejemplo en el que hay exactamente un punto de éstos. Se advierte que el corolario 13.3 proviene del teorema de Rolle si $f(x) = g(x) - g(a)$.

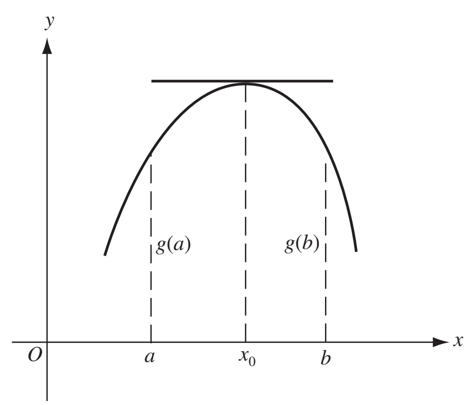


Fig. 13.3

Teorema 13.4. Ley de la media o teorema del valor medio.[1] Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Así, existe al menos un punto x_0 en (a, b) para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \ .$$

Observe la figura 13.4. En el problema 7 se presenta la demostración. En términos geométricos, la conclusión indica que existe algún punto dentro del intervalo donde la pendiente $f'(x_0)$ de la recta tangente es igual a la pendiente $(f(b) - f(a))/(b - a)$ de la recta P_1P_2 que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica. En ese punto la tangente es paralela a P_1P_2, ya que sus pendientes son iguales.

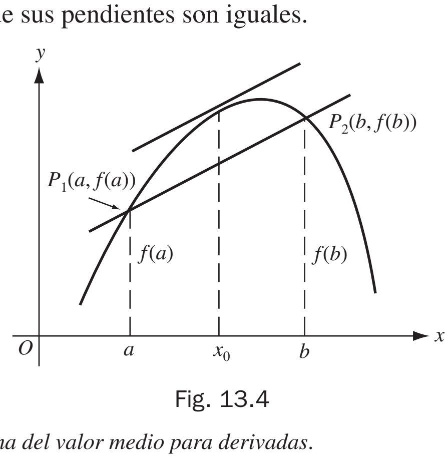


Fig. 13.4

[1] La ley de la media también se denomina *Teorema del valor medio para derivadas*.

Teorema 13.5. Teorema del valor medio extendido. Se presupone que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). También se presupone que $g'(x) \neq 0$, para toda x en (a, b). Entonces, existe al menos un punto x_0 en (a, b) para el que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

Puede ver una demostración en el problema 13. Advierta que el teorema del valor medio es un caso especial cuando $g(x) = x$.

Teorema 13.6. Teorema del valor medio de orden superior. Si f y sus primeras $n - 1$ derivadas son continuas en $[a, b]$ y $f^{(n)}(x)$ existe en (a, b), entonces hay al menos un x_0 en (a, b) tal que

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n \end{aligned} \tag{1}$$

(Para obtener una demostración, repase el problema 14.)

Cuando b se remplaza por x, la fórmula 1 se vuelve

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{2}$$

para algún x_0 entre a y x.

En el caso especial cuando $a = 0$, la fórmula (2) se vuelve

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n \end{aligned} \tag{3}$$

para algún x_0 entre 0 y x.

Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es *creciente* en un intervalo si $u < v$ implica que $f(u) < f(v)$ para toda u y v en el intervalo. De igual forma, f es *decreciente* en un intervalo si $u < v$ implica que $f(u) > f(v)$ para toda u y v en el intervalo.

Teorema 13.7. *a*) Si f' es positiva en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo. *b*) Si f' es negativa en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Para obtener la demostración, repase el problema 9.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle el valor de x_0 enunciado en el teorema de Rolle para $f(x) = x^3 - 12x$ en el intervalo $0 \le x \le 2\sqrt{3}$.
Observe que $f(0) = f(2\sqrt{3}) = 0$. Si $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$, entonces $x = \pm 2$. Luego, $x_0 = 2$ es el valor enunciado.

2. ¿Se aplica el teorema de Rolle a las funciones *a*) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x-2}$, y *b*) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x+2}$ en el intervalo (0, 4)?

a) $f(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 4$. Como f tiene una discontinuidad en $x = 2$, un punto en [0, 4], el teorema no se aplica.

b) $f(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 4$. f tiene una discontinuidad en $x = -2$, un punto que no está en [0, 4]. Además, $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ existe en todo punto excepto cuando $x = -2$. Así, se aplica el teorema y $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$, la raíz positiva de $x^2 + 4x - 8 = 0$.

3. Halle el valor de x_0 enunciado en el teorema del valor medio cuando $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$ y $a = 1$ y $b = 3$.
$f(a) = f(1) = 4$, $f(b) = f(3) = 36$, $f'(x_0) = 6x_0 + 4$ y $b - a = 2$. Así, $6x_0 + 4 = \frac{36-4}{2} = 16$. Por tanto, $x_0 = 2$.

4. Determine un valor x_0 enunciado en el teorema del valor medio extendido cuando $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2 + 1$, en [1, 4].

Se debe hallar x_0 de manera que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{14-5}{17-2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}.$$

Entonces, $x_0 = \frac{5}{2}$.

5. Demuestre el teorema 13.1: si f tiene un extremo relativo en un punto x_0 en el que $f'(x_0)$ está definida, entonces $f'(x_0) = 0$.

Considérese el caso de un máximo relativo. Como f tiene un máximo relativo en x_0, entonces para un $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, de modo que $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Luego, cuando $\Delta x < 0$, $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0$. Así

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Cuando $\Delta x_0 > 0$, $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0$. Por tanto,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

Como $f'(x_0) \geq 0$ y $f'(x_0) \leq 0$, entonces $f'(x_0) = 0$.

6. Demuestre el teorema de Rolle (teorema 13.2): si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y si $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(x_0) = 0$ para algún punto x_0 en (a, b).

Si $f(x) = 0$ a lo largo del intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b). Por otra parte, si $f(x)$ es positivo (negativo) en algún punto en (a, b), entonces, por el teorema del valor extremo (teorema 8.7), f tiene un valor máximo (mínimo) en algún punto x_0 en $[a, b]$. Ese valor máximo (mínimo) debe ser positivo (negativo) y, por consiguiente, x_0 queda en (a, b), ya que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces, f tiene un máximo (mínimo) relativo en x_0. Por el teorema 13.1, $f'(x_0) = 0$.

7. Demuestre el teorema del valor medio (teorema 13.4): sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe por lo menos un punto x_0 en (a, b) para el cual $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Sea $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

De esta manera, $F(a) = 0 = F(b)$. Luego, el teorema de Rolle se aplica a F en $[a, b]$. Por tanto, para algún x_0 en (a, b), $F'(x_0) = 0$.

Pero $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Así, $f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

8. Demuestre que si g es creciente en un intervalo, $-g$ es decreciente en ese mismo intervalo.

Se presupone que $u < v$. Entonces, $g(u) < g(v)$. Por ende, $-g(u) > -g(v)$.

9. Demuestre el teorema 13.7: *a*) si f' es positiva en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo. *b*) Si f' es negativa en un intervalo, f es decreciente en ese intervalo.

a) Sean a y b dos puntos cualesquiera en un intervalo con $a < b$. Por el teorema del valor medio, para $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(x_0)$ algún punto x_0 en (a, b). Como x_0 está en el intervalo, $f'(x_0) > 0$. Entonces, $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} > 0$. Pero $a < b$; por consiguiente, $b - a > 0$. Luego, $f(b) - f(a) > 0$. Así, $f(a) < f(b)$.

b) Sea $g = -f$. Entonces g' es positiva en el intervalo. Por el inciso *a*), g es creciente en el intervalo. Entonces, f es decreciente en el intervalo.

10. Demuestre que $f(x) = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.

$f'(x) = 5x^4 + 20 > 0$ para toda x. Entonces, por el teorema 13.7*a*), f es creciente en todos los puntos.

11. Pruebe que $f(x) = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

$f'(x) = -3x^2 - 7x^6 < 0$ para toda $x \neq 0$. Por tanto, por el teorema 13.7*b*), f es decreciente en todo intervalo que no contenga 0. Observe que si $x < 0$, $f(x) > 1 = f(0)$, y si $x > 0$, $f(0) = 1 > f(x)$. Luego, f es decreciente para todos los números reales.

12. Demuestre que $f(x) = 4x^3 + x - 3 = 0$ tiene exactamente una solución verdadera.

$f(0) = -3$ y $f(1) = 2$. El teorema del valor intermedio extendido establece que $f(x) = 0$ tiene una solución en $(0, 1)$. Como $f'(x) = 12x^2 + 1 > 0$, f es una función creciente. Por tanto, no puede haber dos valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

13. Demuestre el teorema del valor medio extendido (teorema 13.5): si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b), y $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b), entonces existe al menos un punto x_0 en (a, b) para el cual $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Supóngase que $g(b) = g(a)$. Por el teorema generalizado de Rolle, $g'(x) = 0$ para alguna x en (a, b), lo que contradice la hipótesis. Entonces, $g(b) \neq g(a)$.

Sea $F(x) = f(x) - f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(b))$

En consecuencia, $F(a) = 0 = F(b)$ y $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

De acuerdo con el teorema de Rolle, existe x_0 en (a, b) para el cual $f'(x_0) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0) = 0$.

14. Pruebe el teorema del valor medio de orden superior (teorema 13.6): si f y sus primeras $n - 1$ derivadas son continuas en $[a, b]$ y $f^{(n)}(x)$ existe en (a, b), entonces hay al menos una x_0 en (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n \qquad (1)$$

Sea K una constante definida por

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)} + K(b-a)^n \qquad (2)$$

y considere que

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + K(b-x)^n$$

Ahora $F(a) = 0$ por (2), y $F(b) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe x_0 en (a, b) tal que

$$F'(x_0) = f'(x_0) + [f''(x_0)(b - x_0) - f'(x_0)] + \left[\frac{f'''(x_0)}{2!}(b - x_0)^2 - f''(x_0)(b - x_0)\right]$$

$$+ \cdots + \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b - x_0)^{n-2}\right] - Kn(b - x_0)^{n-1}$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - Kn(b - x_0)^{n-1} = 0$$

Entonces, $K = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ y (2) se vuelve (1).

15. Si $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b), entonces f es constante en (a, b).

Sean u y v dos puntos cualesquiera en (a, b), con $u < v$. Por el teorema del valor medio, existe x_0 en (u, v) para el cual $\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(x_0)$. Por hipótesis, $f'(x_0) = 0$. Entonces, $f(v) - f(u) = 0$ y, por consiguiente, $f(v) = f(u)$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

16. Si $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[1, 3]$, halle un valor prescrito por el teorema de Rolle.

Respuesta: $x_0 = 2$.

17. Halle un valor enunciado por el teorema del valor medio, dado:

a) $y = x^3$ en $[0, 6]$. *Respuesta:* $x_0 = 2\sqrt{3}$.

b) $y = ax^2 + bx + c$ en $[x_1, x_2]$. *Respuesta:* $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

18. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en (a, b), demuestre que existe una constante K tal que $f(x) = g(x) + K$ para toda x en (a, b). [*Sugerencia:* $D_x(f(x) - g(x)) = 0$ en (a, b). Por el problema 15, existe una constante K tal que $f(x) - g(x) = K$ en (a, b).]

19. Halle un valor x_0 prescrito por el teorema del valor medio cuando $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 6$ en el intervalo $[0, 1]$.

Respuesta: $\frac{1}{2}$.

20. Demuestre que $x^3 + px + q = 0$ tiene *a*) una raíz real si $p > 0$, y *b*) tres raíces reales si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

21. Pruebe que $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ no tiene ni un máximo relativo ni un mínimo relativo. (*Sugerencia*: utilice el teorema 13.1.)

22. Demuestre que $f(x) = 5x^3 + 11x - 20 = 0$ tiene exactamente una solución real.

23. *a*) ¿Dónde son crecientes y dónde decrecientes las funciones siguientes? Trace las gráficas.

b) (CG) Compruebe las respuestas del inciso anterior mediante una graficadora.

i) $f(x) = 3x + 5$ *Respuesta:* creciente en todas partes.

ii) $f(x) = -7x + 20$ *Respuesta:* decreciente en todas partes.

iii) $f(x) = x^2 + 6x - 11$ *Respuesta:* decreciente en $(-\infty, -3)$, creciente en $(-3, +\infty)$.

iv) $f(x) = 5 + 8x - x^2$ *Respuesta:* creciente en $(-\infty, 4)$, decreciente en $(4, +\infty)$.

v) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *Respuesta:* creciente en $(-2, 0)$, decreciente en $(0, 2)$.

vi) $f(x) = |x - 2| + 3$ *Respuesta:* decreciente en $(-\infty, 2)$, creciente en $(2, +\infty)$.

vii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ *Respuesta:* decreciente en $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$; nunca creciente.

24. (CG) Utilice una graficadora para estimar los intervalos en los que $f(x) = x^5 + 2x^3 - 6x + 1$ es creciente y los intervalos en los que es decreciente.

25. Para las funciones siguientes determine si es aplicable el teorema de Rolle. Si lo es, halle los valores anunciados.

a) $f(x) = x^{3/4} - 2$ en $[-3, 3]$ *Respuesta:* No; no diferenciable en $x = 0$.

b) $f(x) = |x^2 - 4|$ en $[0, 8]$ *Respuesta:* No; no diferenciable en $x = 2$.

c) $f(x) = |x^2 - 4|$ en $[0, 1]$ *Respuesta:* No. $f(0) \neq f(1)$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 5}$ en $[-1, 4]$ *Respuesta:* Sí. $x_0 = 5 - \sqrt{6}$.

14

Valores máximos y mínimos

Números críticos

Un número x_0 en el dominio de f tal que $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no esté definido se llama *número crítico* de f.

Recuérdese (teorema 13.1) que si f tiene un extremo relativo en x_0 y $f'(x_0)$ está definida, entonces $f'(x_0) = 0$ y, por tanto, x_0 es un número crítico de f. Sin embargo, observe que la condición $f'(x_0) = 0$ no garantiza que f tenga un extremo relativo en x_0. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$ y, por consiguiente, 0 es un número crítico de f; pero f no tiene un máximo relativo ni un mínimo relativo en 0 (fig. 5.5).

EJEMPLO 14.1.

a) Sea $f(x) = 7x^2 - 3x + 5$. Entonces, $f'(x) = 14x - 3$. Al igualar $f'(x)$ a cero, $f'(x) = 0$, y resolver se llega a que el único número crítico de f es $\frac{3}{14}$.

b) Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Entonces, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Al despejar $f'(x) = 0$, se halla que los números críticos son 1 y $\frac{1}{3}$.

c) Sea $f(x) = x^{2/3}$. Entonces, $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$. Como $f'(0)$ no está definida, 0 es el único número crítico de f.

Es indispensable hallar algunas condiciones que permitan concluir que una función f tiene un máximo o un mínimo relativo en un número crítico dado.

Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Supóngase que $f'(x_0) = 0$ y que $f''(x_0)$ existe. Luego, si

i) $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0

ii) $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0

iii) $f''(x_0) = 0$, entonces se ignora qué pasa en x_0.

En el problema 9 se proporciona una demostración. Para ver que el inciso *iii*) es válido se consideran tres funciones: $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$. Como $f'(x) = 4x^3$, $g'(x) = -4x^3$ y $h'(x) = 3x^2$, 0 es un número crítico de las tres funciones. Como $f''(x) = 12x^2$, $g''(x) = -12x^2$ y $h''(x) = 6x$, la segunda derivada de las tres funciones es 0 en 0. Sin embargo, f tiene un mínimo relativo en 0, g tiene un máximo relativo en 0 y h no tiene un máximo ni un mínimo relativo en 0.

EJEMPLO 14.2.

a) Considere la función $f(x) = 7x^2 - 3x + 5$ del ejemplo 1*a*). El único valor crítico fue $\frac{3}{14}$. Como $f''(x) = 14$, $f''(\frac{3}{14}) = 14 > 0$. Entonces, el criterio de la segunda derivada dice que f tiene un mínimo relativo en $\frac{3}{14}$.

b) Considere la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ del ejemplo 1*b*). Observe que $f''(x) = 6x - 4$. En los números críticos 1 y $\frac{1}{3}$, $f''(1) = 2 > 0$ y $f''(\frac{1}{3}) = 2 > 0$. Por tanto, f tiene un mínimo relativo en 1 y un máximo relativo en $\frac{1}{3}$.

c) En el ejemplo 1*c*), $f(x) = x^{2/3}$ y $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. El único número crítico es 0, donde f' no está definida. Por tanto, $f''(0)$ no está definida y el criterio de la segunda derivada no es aplicable.

Si no se puede utilizar o resulta inconveniente el criterio de la segunda derivada, ya sea porque la segunda derivada es 0 o porque no existe o es difícil de calcular, se puede aplicar el criterio siguiente, sin perder de vista que $f'(x)$ es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en x.

Criterio de la primera derivada

Supóngase que $f'(x_0) = 0$.

Caso {+, –}

Si f' es positiva en un intervalo abierto inmediatamente a la izquierda de x_0, y negativa en un intervalo abierto justo a la derecha de x_0, entonces f tiene un máximo relativo en x_0 [fig. 14.1(*a*)].

Caso {–, +}

Si f' es negativa en un intervalo abierto justo a la izquierda de x_0, y positiva en un intervalo abierto justo a la derecha de x_0, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 [fig. 14.1(*b*)].

Casos {+, +} y {–, –}

Si f' tiene el mismo signo en intervalos abiertos justo a la izquierda y justo a la derecha de x_0, entonces f no tiene un máximo ni un mínimo relativo en x_0 [fig. 14.1(*c*-*d*)].

Para ver una demostración del criterio de la primera derivada, repase el problema 8.

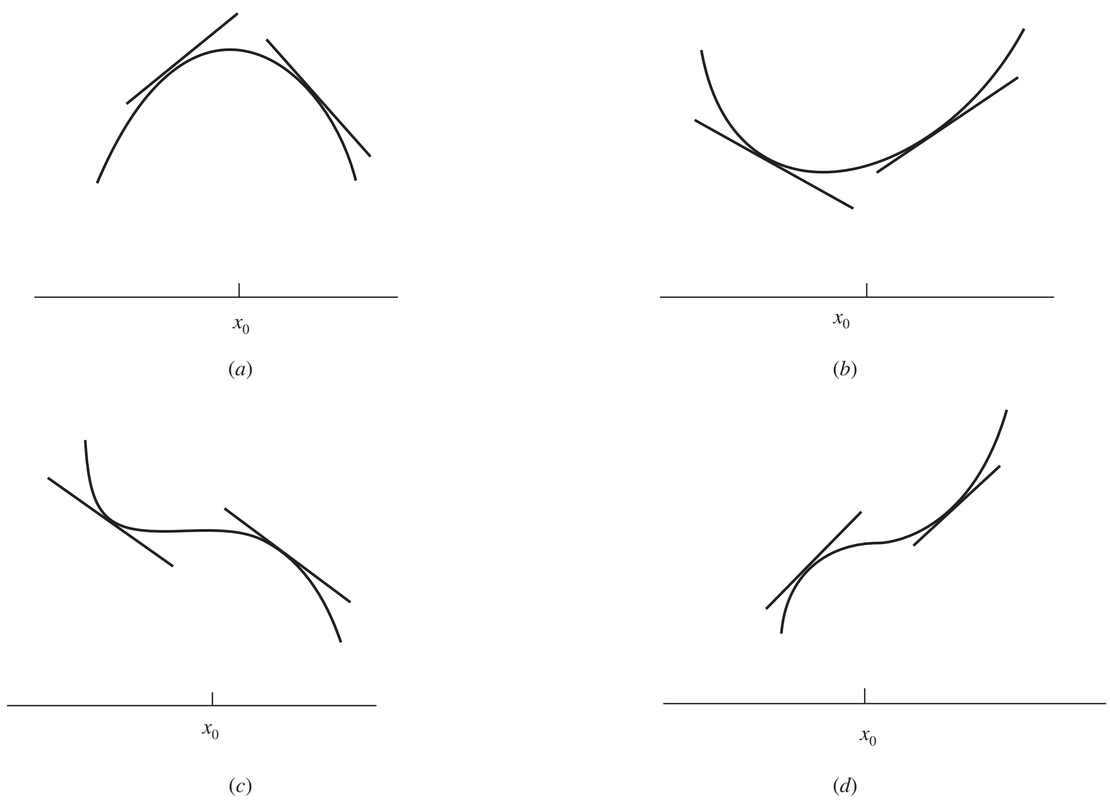


Fig. 14.1

EJEMPLO 14.3. Considere tres funciones $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$, ya analizadas. En su número crítico 0, el criterio de la segunda derivada no resulta aplicable porque la segunda derivada es 0. Entonces, se intenta el criterio de la primera derivada.

a) $f'(x) = 4x^3$. A la izquierda de 0, $x < 0$, y así, $f'(x) < 0$. A la derecha de 0, $x > 0$, por lo que $f'(x) > 0$. Luego, se presenta el caso {–, +} y f debe tener un mínimo relativo en 0.

b) $g'(x) = -4x^3$. A la izquierda de 0, $x < 0$, implica que $g'(x) > 0$. A la derecha de 0, $x > 0$, y entonces $g'(x) < 0$. Luego, aparece el caso {+, –} y g debe tener un máximo relativo en 0.

c) $h'(x) = 3x^2$. $h'(x) > 0$, a ambos lados de 0. Entonces, se tiene el caso {+, +} y h no presenta un máximo ni un mínimo relativo en 0. Existe un *punto de inflexión* en $x = 0$.

Puede comprobar estos resultados en las gráficas de las funciones.

Máximo y mínimo absolutos

Un *máximo absoluto* de una función f en un conjunto S ocurre en x_0 en S si $f(x) \leq f(x_0)$ para toda x en S. Un *mínimo absoluto* de una función f en un conjunto S ocurre en x_0 en S si $f(x) \geq f(x_0)$ para toda x en S.

Método tabular para hallar el máximo y el mínimo absolutos

Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo y un mínimo absolutos en $[a, b]$. Aquí se proporciona un método tabular para determinar qué son y dónde ocurren (fig. 14.2).

x	$f(x)$
c_1	$f(c_1)$
c_2	$f(c_2)$
- - -	- - -
- - -	- - -
c_n	$f(c_n)$
a	$f(a)$
b	$f(b)$

Fig. 14.2

Primero se hallan los números críticos (si los hay) $c_1, c_2, \ldots$ de f en (a, b). Segundo, se anotan estos números en una tabla, junto con los puntos extremos a y b del intervalo. Tercero, se calcula el valor de f para todos los números de la tabla.

Entonces:

1. El valor más grande de estos valores es el máximo absoluto de f en $[a, b]$.
2. El valor más pequeño de estos valores es el mínimo absoluto de f en $[a, b]$.

EJEMPLO 14.4. Halle el máximo y el mínimo absolutos de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ en $[0, 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. Por tanto, los números críticos son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. El único número crítico en $[0, 2]$ es 1. En la tabla de la figura 14.3 se observa que el valor máximo de f en $[0, 2]$ es 4, el cual se alcanza en el punto extremo derecho 2, y el valor mínimo es 1, alcanzado en 1.

x	$f(x)$
1	1
0	2
2	4

Fig. 14.3

Es evidente por qué el método funciona. Por el teorema del valor extremo, f alcanza valores máximos y mínimos en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si cualquiera de tales valores ocurre en un punto extremo o terminal, ese valor aparecerá en la tabla, y como en realidad es un máximo o un mínimo, aparecerá como el valor más grande o más pequeño. Si se asume un máximo o un mínimo en el punto x_0 dentro del intervalo, f tiene un máximo o un mínimo relativo en x_0 y, según el teorema 13.1, $f'(x_0) = 0$. Así, x_0 será un número crítico y aparecerá en la tabla, de manera que el valor máximo o mínimo correspondiente $f(x_0)$ será el más grande o el más pequeño en la columna de la derecha.

Teorema 14.1. Supóngase que f es una función continua definida en un intervalo J. El intervalo J puede ser un intervalo finito o infinito. Si f tiene un extremo relativo único dentro de J, entonces ese extremo relativo también es un extremo absoluto en J.

Para explicar el porqué de lo anterior, observe la figura 14.4, donde se supone que f tiene un extremo único, un máximo relativo en c. Considere cualquier otro número d en J. La gráfica se mueve hacia abajo a ambos lados de c. De esta manera, si $f(d)$ fuera mayor que $f(c)$, entonces, por el teorema del valor extremo para el intervalo cerrado con puntos extremos c y d, f tendría un mínimo absoluto en algún punto u entre c y d. (u podría no ser igual a c o a d.) Por consiguiente, f tendría un mínimo relativo en u, lo que contradiría la hipótesis de que f tiene un extremo relativo sólo en c. Es posible ampliar este argumento al caso en el que f tiene un mínimo relativo en c aplicando el resultado que se acaba de obtener para $-f$.

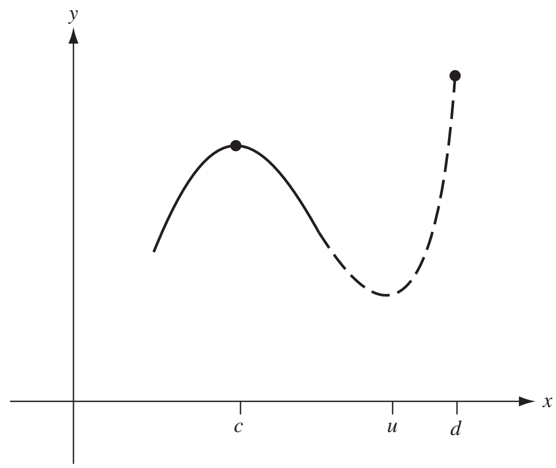


Fig. 14.4

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Localice los máximos o mínimos absolutos de las siguientes funciones en sus dominios:

a) $y = -x^2$; *b*) $y = (x-3)^2$; *c*) $y = \sqrt{25-4x^2}$; *d*) $y = \sqrt{x-4}$.

a) $y = -x^2$ tiene un máximo absoluto (que es 0), cuando $x = 0$, ya que $y < 0$ cuando $x \neq 0$. No tiene mínimo relativo, puesto que su rango es $(-\infty, 0)$. La gráfica es una parábola que se abre hacia abajo, con vértice en $(0, 0)$.

b) $y = (x-3)^2$ tiene un mínimo absoluto, 0, cuando $x = 3$, pues $y > 0$ cuando $x \neq 3$. No tiene máximo absoluto, pues su rango es $(0, +\infty)$. La gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, con vértice en $(3, 0)$.

c) $y = \sqrt{25-4x^2}$ tiene en 5 su máximo absoluto, cuando $x = 0$, ya que $25 - 4x^2 < 25$ cuando $x \neq 0$. 0 es su mínimo absoluto, cuando $x = \frac{5}{2}$. La gráfica es la mitad superior de una elipse.

d) $y = \sqrt{x-4}$ muestra a 0 como su mínimo absoluto cuando $x = 4$. No tiene máximo absoluto. Su gráfica es la mitad superior de una parábola con vértice en $(4, 0)$ y x como su eje de simetría.

2. Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$. Halle *a*) los números críticos de f; *b*) los puntos en los que f tiene un máximo o mínimo relativo; *c*) los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

a) $f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Al despejar $f'(x) = 0$ se obtienen los números críticos -3 y 2.

b) $f''(x) = 2x + 1$. Luego, $f''(-3) = -5 < 0$ y $f''(2) = 5$. Así, por el criterio de la segunda derivada, f tiene un máximo relativo en $x = -3$, donde $f(-3) = \frac{43}{2}$. Por el criterio de la segunda derivada, f tiene un mínimo relativo en $x = 2$, donde $f(2) = \frac{2}{3}$.

c) Considere $f'(x) = (x+3)(x-2)$. Cuando $x > 2$, $f'(x) > 0$. Para $-3 < x < 2$, $f'(x) < 0$. Para $x < -3$, $f'(x) > 0$. Así, por el teorema 13.7, f es creciente para $x < -3$ y $2 < x$, y decreciente para $-3 < x < 2$.

En la figura 14.5 se muestra un dibujo de parte de la gráfica de f. Observe que f no tiene máximo ni mínimo absolutos.

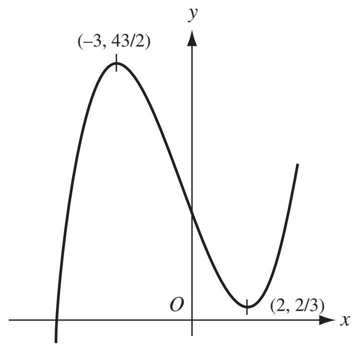


Fig. 14.5

3. Sea $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$. Halle *a*) los números críticos de *f*; *b*) los puntos en los que *f* tiene un extremo relativo; *c*) los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente.

a) Sea $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$. Es claro que $x = 1$ es un cero de $f'(x)$. Al dividir $f'(x)$ entre $x - 1$ se obtiene $4x^2 + 10x + 4$, que se factoriza $2(2x^2 + 5x + 2) = 2(2x + 1)(x + 2)$. Así, $f'(x) = 2(x - 1)(2x + 1)(x + 2)$, y los números críticos son $1, -\frac{1}{2}$, y -2.

b) $f''(x) = 12x^2 + 12x - 6 = 6(2x^2 + 2x - 1)$. Mediante el criterio de la segunda derivada, se halla *i*) en $x = 1$, $f''(1) = 18 > 0$, y existe un mínimo relativo; *ii*) en $x = -\frac{1}{2}$, $f''(-\frac{1}{2}) = -9 < 0$, de manera que hay un máximo relativo; *iii*) en $x = -2$, $f''(-2) = 18 > 0$, que señala un mínimo relativo.

c) $f'(x) > 0$ cuando $x > 1$, $f'(x) < 0$ cuando $-\frac{1}{2} < x < 1$, $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < -\frac{1}{2}$, y $f'(x) < 0$ cuando $x < -2$. Por tanto, *f* es creciente cuando $x > 1$, o bien, $-2 < x < -\frac{1}{2}$, y decreciente cuando $-\frac{1}{2} < x < 1$ o $x < -2$.

La gráfica aparece en la figura 14.6.

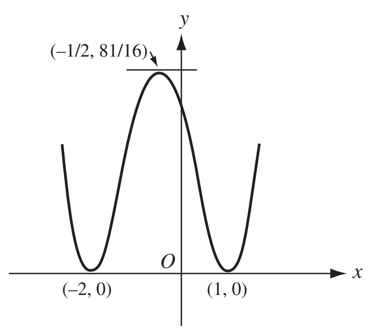


Fig. 14.6

4. Analice los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y halle los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente.

$f(x) = (x - 2)^{-1}$, de manera que $f'(x) = -(x - 2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$. Entonces, f' nunca es 0 y el único número donde f' no está definida es 2, que no se encuentra en el dominio de *f*. Por tanto, *f* no tiene números críticos. Así, *f* no tiene extremos relativos. Observe que $f'(x) < 0$ para $x \neq 2$. Luego, *f* es decreciente para $x < 2$ y para $x > 2$. Existe una discontinuidad no removible en $x = 2$. La gráfica se muestra en la figura 14.7.

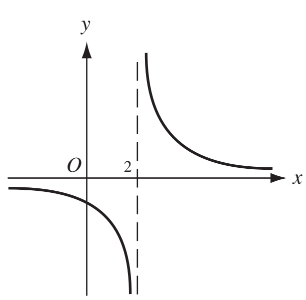


Fig. 14.7

5. Localice los extremos relativos de $f(x) = 2 + x^{2/3}$ y los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$. Entonces, $x = 0$ es un número crítico, ya que $f'(0)$ no está definida (pero 0 se halla en el dominio de f). Observe que $f'(x)$ tiende a ∞ cuando x se aproxima a 0. Si $x < 0$, $f'(x)$ es negativa, por lo que f es decreciente. Cuando $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y, por tanto, f es creciente. La gráfica se presenta en la figura 14.8. f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.

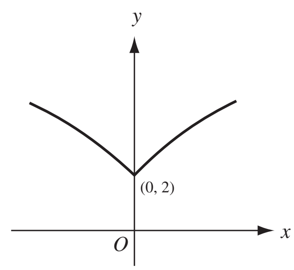


Fig. 14.8

6. Utilice el criterio de la segunda derivada para analizar los extremos relativos de las funciones siguientes: *a)* $f(x) = x(12 - 2x)^2$; *b)* $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$.

a) $f'(x) = x(2)(12 - 2x)(-2) + (12 - 2x)^2 = (12 - 2x)(12 - 6x) = 12(x - 6)(x - 2)$. Entonces, 6 y 2 son los números críticos. $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$. Luego, $f''(6) = 48 > 0$, y $f''(2) = -48 < 0$. Por tanto, f tiene un mínimo relativo en $x = 6$ y un máximo relativo en $x = 2$.

b) $f'(x) = 2x - \frac{250}{x^2} = 2\left(\frac{x^3 - 125}{x^2}\right)$. Entonces, el único número crítico es 5 (donde $x^3 - 125 = 0$). $f''(x) = 2 + 500/x^3$. Como $f''(5) = 6 > 0$, f tiene un mínimo relativo en $x = 5$.

7. Determine los extremos relativos de $f(x) = (x - 2)^{2/3}$.

$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{2/3}}$. Aquí, 2 es el único número crítico. Como $f'(2)$ no está definida, $f''(2)$ no estará definida. Entonces, debe intentarse con el criterio de la primera derivada. Para $x < 2$, $f'(x) < 0$, y para $x > 2$, $f'(x) > 0$. Así, se tiene el caso $\{-, +\}$ del criterio de la primera derivada, y f tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

8. Demuestre el criterio de la primera derivada.

Sea $f'(x_0) = 0$. Considérese el caso $\{+, -\}$: si f' es positiva en un intervalo abierto inmediatamente a la izquierda de x_0 y negativa en un intervalo abierto inmediatamente a la derecha de x_0, entonces f tiene un máximo relativo en x_0. El teorema 13.8 permite observar que f' es positiva en un intervalo abierto justo a la izquierda de x_0, f es creciente en ese intervalo, y que f' es negativa en un intervalo abierto justo a la derecha de x_0, f es decreciente en ese intervalo. Por tanto, f tiene un máximo relativo en x_0. El caso $\{-, +\}$ procede del caso $\{+, -\}$ aplicado a $-f$. En el caso $\{+, +\}$, f será creciente en un intervalo alrededor de x_0, y en el caso $\{-, -\}$ f será decreciente en un intervalo alrededor de x_0. Entonces, en ambos casos f no tiene máximo ni mínimo relativos en x_0.

9. Demuestre el criterio de la segunda derivada: si $f(x)$ es diferenciable en un intervalo abierto que contiene un valor crítico x_0 de f, y $f''(x_0)$ existe y $f''(x_0)$ es positiva (negativa), entonces f tiene un mínimo (máximo) relativo en x_0.

Sea $f''(x_0) > 0$. Entonces, por el teorema 13.8, f' es creciente en x_0. Como $f'(x_0) = 0$, esto implica que f' es negativa cuando está próxima y a la izquierda de x_0, y f' es positiva cuando está próxima y a la derecha de x_0. En consecuencia, se tiene el caso $\{-, +\}$ del criterio de la primera derivada y, por tanto, f tiene un mínimo relativo en x_0. En la situación opuesta, donde $f''(x_0) < 0$, el resultado que acaba de comprobar se aplica a la función $g(x) = -f(x)$. Así, g tiene un mínimo relativo en x_0, y, por consiguiente, f tiene un máximo relativo en x_0.

10. Entre los números reales positivos u y v cuya suma resulta en 50, halle la selección de u y de v que haga su producto P lo más grande posible.

$P = u(50 - u)$. Aquí, u es cualquier número positivo menor que 50. Pero también se puede permitir que u sea 0 o 50, ya que en tales casos, $P = 0$ que, con certeza, no será el valor más grande posible. Entonces, P es una función continua $u(50 - u)$, definida en $[0, 50]$. $P = 50u - u^2$ también es siempre diferenciable, y $dP/du = 50 - 2u$. $dP/du = 0$ resulta en un número crítico único $u = 25$. Por el método tabular (figura 14.9), se observa que el valor máximo de P es 625, cuando $u = 25$ (y, por tanto, $v = 50 - u = 25$).

u	P
25	625
0	0
50	0

Fig. 14.9

11. Divida el número 120 en dos partes tales que el producto P de una parte y el cuadrado de la otra constituya un máximo.

Sea x una parte y $120 - x$ la otra. Entonces, $P = (120 - x)x^2$ y $0 \le x \le 120$. Como $dP/dx = 3x(80 - x)$, los números críticos son 0 y 80. Con el método tabular se halla $P(0) = 0$, $P(80) = 256\,000$ y $P(120) = 0$. Por tanto, el valor máximo ocurre cuando $x = 80$, y las partes requeridas son 80 y 40.

12. Una hoja de papel para un cartel debe tener 18 pies cuadrados de área. Los márgenes superior e inferior han de ser de 9 pulgadas, y los márgenes de los lados, de 6 pulgadas. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la hoja para maximizar el área impresa?

Sea x una dimensión medida en pies. Entonces $18/x$ es la otra dimensión (fig. 14.10). La única restricción en x es que $x > 0$. El área impresa en pies cuadrados es $A = (x - 1)\left(\frac{18}{x} - \frac{3}{2}\right)$ y $\frac{dA}{dx} = \frac{18}{x^2} - \frac{3}{2}$.

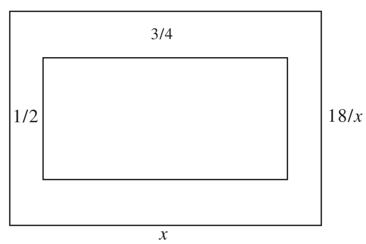


Fig. 14.10

Al resolver $dA/dx = 0$ se obtiene el número crítico $x = 2\sqrt{3}$. Como $d^2A/dx^2 = -36/x^3$ es negativa cuando $x = 2\sqrt{3}$, el criterio de la segunda derivada indica que A tiene un máximo relativo en $x = 2\sqrt{3}$. Como $2\sqrt{3}$ es el único número crítico en el intervalo $(0, +\infty)$, el teorema 14.1 establece que A tiene un máximo absoluto en $x = 2\sqrt{3}$. Entonces, un lado mide $2\sqrt{3}$ pies y el otro mide $\frac{18}{(2\sqrt{3})} = 3\sqrt{3}$ pies.

13. A las 9 AM, el barco B se encuentra 65 millas al este del barco A. El barco B navega hacia el Oeste a 10 millas por hora y A hacia el Sur a 15 millas por hora. Si continúan en sus cursos respectivos, ¿cuándo estarán más cerca el uno del otro y cuán cerca (fig. 14.11)?

Sean A_0 y B_0 las posiciones de los barcos a las 9 AM, y A_t y B_t sus posiciones t horas más tarde. La distancia recorrida en t horas por A es de $15t$ millas, y por B, de $10t$ millas. La distancia D entre los barcos está determinada por $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$. Entonces,

$$2D\frac{dD}{dt} = 2(15t)(15) + 2(65 - 10t)(-10); \text{ por tanto, } \frac{dD}{dt} = \frac{325t - 650}{D}.$$

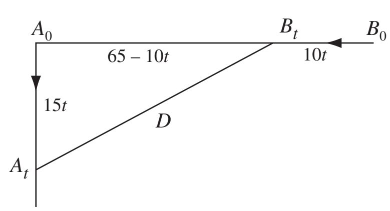


Fig. 14.11

Al resolver $dD/dt = 0$ se obtiene el número crítico $t = 2$. Como $D > 0$ y $325t - 650$ es negativo a la izquierda de 2 y positivo a la derecha de 2, el caso (–, +) del criterio de la primera derivada indica que $t = 2$ produce un mínimo relativo para D. Como $t = 2$ es el único número crítico, el teorema 14.1 implica que existe un mínimo absoluto en $t = 2$.

Tomando $t = 2$ en $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$ da $D = 15\sqrt{13}$ millas. Por tanto, los barcos están más cerca a las 11 AM, a $15\sqrt{13}$ millas de distancia uno del otro.

14. Se quiere construir un contenedor cilíndrico de metal cuya base circular tenga una capacidad de 64 pulgadas cúbicas. Halle sus dimensiones de manera que la cantidad de metal requerido (área de la superficie) sea mínima cuando el contenedor sea *a*) una lata abierta y *b*) una lata cerrada.

Sean r y h el radio de la base y la altura en pulgadas, respectivamente, A la cantidad de metal y V el volumen del contenedor.

a) Aquí $V = \pi r^2 h = 64$, y $A = 2\pi rh + \pi r^2$. Para expresar A como función de una variable se despeja h en la primera relación (porque es más fácil) y se sustituye en la segunda; se obtiene

$$A = 2\pi r\frac{64}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{128}{r} + \pi r^2 \quad \text{y} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$$

y el número crítico es $r = 4/\sqrt[3]{\pi}$. Entonces, $h = 64/\pi r^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$. Luego, $r = h = 4/\sqrt[3]{\pi}$ pulgadas.

Ahora $dA/dr > 0$ a la derecha del número crítico, y $dA/dr < 0$ a la izquierda de éste. Así, por el criterio de la primera derivada se tiene un mínimo relativo. Como no hay otro número crítico, dicho mínimo relativo es un mínimo absoluto.

b) Aquí de nuevo $V = \pi r^2 h = 64$, pero $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(64/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 128/r + 2\pi r^2$. Entonces,

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 32)}{r^2}$$

y el número crítico es $r = 2\sqrt[3]{4/\pi}$. Luego, $h = 64/\pi r^2 = 4\sqrt[3]{4/\pi}$. Por consiguiente, $h = 2r = 4\sqrt[3]{4/\pi}$ pulgadas. Como en el inciso *a*), es posible demostrar que se ha hallado un mínimo absoluto.

15. El costo total de producir x radios por día es $\$(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ y el precio por unidad para la venta es $\$(50 - \frac{1}{2}x)$.

a) ¿Cuál debería ser la producción diaria para obtener una utilidad total máxima?
b) Muestre que el costo de producir un radio es un mínimo relativo de esa producción.

a) La utilidad sobre la venta de x radios por día es $P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$. Entonces, $dP/dx = 15 - 3x/2$; al resolver $dP/dx = 0$ se obtiene el número crítico $x = 10$.

Como $d^2P/dx^2 = -\frac{3}{2} < 0$, el criterio de la segunda derivada muestra que se ha hallado un máximo relativo. Como $x = 10$ es el único número crítico, el máximo relativo es un máximo absoluto. Luego, la producción diaria que maximiza la utilidad es de 10 radios por día.

b) El costo de producir un radio es $C = \dfrac{\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25}{x} = \dfrac{1}{4}x + 35 + \dfrac{25}{x}$. Entonces, $\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{x^2}$; al resolver $dC/dx = 0$ se obtiene el número crítico $x = 10$.

Como $d^2C/dx^2 = 50/x^3 > 0$ cuando $x = 10$, se ha hallado un mínimo relativo. Puesto que hay sólo un número crítico, éste debe ser un mínimo absoluto.

16. El valor del combustible que consume una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad y cuesta \$25 por hora para una velocidad de 25 millas por hora (mi/h). Otros costos ascienden a \$100 por hora, sin tener en cuenta la velocidad. Halle la velocidad que minimiza el costo por milla.

Sea v la velocidad requerida y C el costo total por milla. El costo del combustible por hora es kv^2, donde k es una constante por determinar. Cuando $v = 25$ mi/h, $kv^2 = 625k = 25$; por tanto, $k = 1/25$.

$$C = \frac{\text{costo en \$/h}}{\text{velocidad en mi/h}} = \frac{v^2/25 + 100}{v} = \frac{v}{25} + \frac{100}{v}\ .$$

Entonces,

$$\frac{dC}{dv} = \frac{1}{25} - \frac{100}{v^2} = \frac{(v-50)(v+50)}{25v^2}.$$

Puesto que $v > 0$, el único número crítico relevante es $v = 50$. Como $d^2C/dv^2 = 200/v^3 > 0$ cuando $v = 50$, el criterio de la segunda derivada indica que C tiene un mínimo relativo en $v = 50$. Como $v = 50$ es el único número crítico en $(0, +\infty)$, el teorema 14.1 establece que C tiene un mínimo absoluto en $v = 50$. Así, la velocidad más económica es 50 millas por hora.

17. Un hombre en un bote de remos situado en P (fig. 14.12) a 5 millas en línea recta del punto A más cercano a una costa, desea llegar al punto B, a 6 millas de A a lo largo de la costa, en el tiempo más corto. ¿Dónde debería desembarcar si puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora?

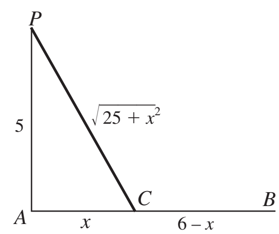


Fig. 14.12

Sea C el punto entre A y B donde el hombre desembarca, y sea $AC = x$. La distancia remada es $PC = \sqrt{25 + x^2}$ y el tiempo necesario para remar es $t_1 \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2}$. La distancia caminada es $CB = 6 - x$, y el tiempo que se necesita para caminar es $t_2 = (6 - x)/4$. Por tanto, el tiempo total necesario equivale a

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{25+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}. \text{ Entonces, } \frac{dt}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}.$$

El número crítico obtenido de la igualdad $2x - \sqrt{25+x^2} = 0$ es $x = \frac{5}{3}\sqrt{3} \sim 2.89$. Luego, debería desembarcar en un punto aproximado de 2.89 millas de A hacia B. (¿Cómo se sabe que este punto da el tiempo *más corto*?)

18. Un campo rectangular, uno de cuyos bordes limita un río que corre en línea recta, será cercado con alambre. Si no se necesita cercar a lo largo del río, muestra la cantidad mínima de alambre que se precisaría si la longitud del campo es dos veces su ancho.

Sea x la longitud del campo y y su ancho. El área del campo es $A = xy$. El alambre necesario es $F = x + 2y$, y $dF/dx = 1 + 2\, dy/dx$. Cuando $dF/dx = 0$, $dy/dx = -\frac{1}{2}$.

También, $dA/dx = 0 = y + x\, dy/dx$. Entonces, $y - \frac{1}{2}x = 0$ y $x = 2y$, como se requiere.

Para ver que se ha minimizado F, observe que $dy/dx = -y^2/A$ y

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(-2\frac{y}{A}\frac{dy}{dx}\right) = -4\frac{y}{A}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{y}{A} > 0 \text{ cuando } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}.$$

Ahora use el criterio de la segunda derivada y la unicidad del número crítico.

19. Halle las dimensiones de un cono circular recto de volumen mínimo V que puede circunscribirse en una esfera cuyo radio es 8 pulgadas.

Sea x el radio de la base del cono, y $y + 8$ la altura de este último (fig. 14.13). De los triángulos rectángulos semejantes ABC y AED se tiene que

$$\frac{x}{8} = \frac{y+8}{\sqrt{y^2 - 64}} \qquad \text{y, por tanto,} \qquad x^2 = \frac{64(y+8)^2}{y^2 - 64}.$$

También

$$V = \frac{\pi x^2 (y+8)}{3} = \frac{64\pi (y+8)^2}{3(y-8)}. \qquad \text{Entonces,} \qquad \frac{dV}{dy} = \frac{64\pi (y+8)(y-24)}{3(y-8)^2}.$$

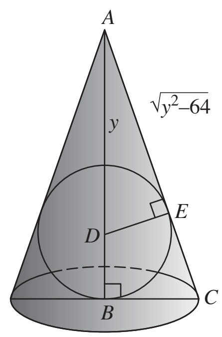


Fig. 14.13

El número crítico relevante es $y = 24$, de manera que la altura del cono es $y + 8 = 32$ pulgadas y el radio de la base es $8\sqrt{2}$ pulgadas. (¿Cómo se sabe que el volumen se ha minimizado?)

20. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima A que puede inscribirse en la parte de la parábola $y^2 = 4px$ que interseca la recta $x = a$.

Sea $PBB'P'$ de la figura 14.14 el rectángulo, y (x, y) las coordenadas de P. Entonces,

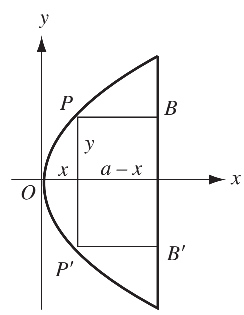


Fig. 14.14

$$A = 2y(a - x) = 2y\left(a - \frac{y^2}{4p}\right) = 2ay - \frac{y^3}{2p} \quad \text{y} \quad \frac{dA}{dy} = 2a - \frac{3y^2}{2p}.$$

Al resolver $dA/dy = 0$ se obtiene el número crítico $y = \sqrt{4ap/3}$. Las dimensiones del rectángulo son $2y = \frac{4}{3}\sqrt{3ap}$ y $a - x = a - (y^2/4p) = 2a/3$.

Como $d^2A/dy^2 = -3y/p < 0$, el criterio de la segunda derivada y la unicidad del número crítico garantizan que se ha hallado el área máxima.

21. Halle la altura del cilindro circular recto de volumen máximo V que puede inscribirse en una esfera de radio R (fig. 14.15).

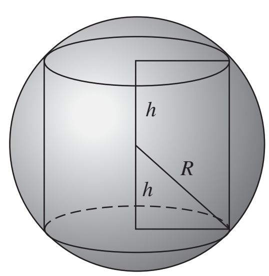


Fig. 14.15

Sea r el radio de la base y $2h$ la altura del cilindro. Según la geometría, $V = 2\pi r^2 h$ y $r^2 + h^2 = R^2$. Entonces,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(r^2\frac{dh}{dr} + 2rh\right) \quad \text{y} \quad 2r + 2h\frac{dh}{dr} = 0$$

De la última relación $\frac{dh}{dr} = -\frac{r}{h}$, entonces, $\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(-\frac{r^3}{h} + 2rh\right)$. Cuando V es un máximo, $\frac{dV}{dr} = 0$, del cual $r^2 = 2h^2$.

Así, $R^2 = r^2 + h^2 = 2h^2 + h^2$, de manera que $h = R/\sqrt{3}$ y la altura del cilindro es $2h = 2R/\sqrt{3}$. El criterio de la segunda derivada puede utilizarse para verificar que se ha hallado un valor máximo de V.

22. La pared de un edificio se apuntalará mediante una viga apoyada sobre una pared paralela de 10 pies de altura, situada a 8 pies del edificio. Halle la longitud L de la viga más corta que puede utilizarse.

Observe la figura 14.16. Sea x la distancia del pie de la viga al pie de la pared paralela, y sea y la distancia (en pies) del piso a la parte superior de la viga. Entonces, $L = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$.

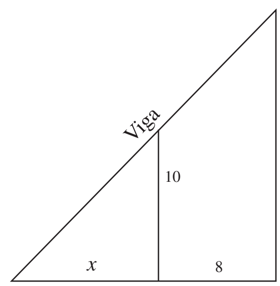


Fig. 14.16

También, de triángulos semejantes, $\frac{y}{10} = \frac{x+8}{x}$ y, por tanto, $y = \frac{10(x+8)}{x}$. Por consiguiente,

$$L = \sqrt{(x+8)^2 + \frac{100(x+8)^2}{x^2}} = \frac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x[(x^2+100)^{1/2} + x(x+8)(x^2+100)^{-1/2}] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} = \frac{x^3-800}{x^2\sqrt{x^2+100}}$$

El número crítico relevante es $x = 2\sqrt[3]{100}$. La longitud de la viga más corta es

$$\frac{2\sqrt[3]{100}+8}{2\sqrt[3]{100}}\sqrt{4\sqrt[3]{10\,000}+100} = (\sqrt[3]{100}+4)^{3/2} \text{ pies}$$

El criterio de la primera derivada y el teorema 14.1 garantizan que en realidad se ha hallado la longitud más corta.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

23. Analice cada uno de los valores máximos y mínimos relativos mediante el criterio de la primera derivada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Respuesta*: $x = -1$ produce el mínimo relativo -4.

b) $f(x) = 3 + 2x + x^2$ — *Respuesta*: $x = 1$ produce el máximo relativo 4.

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Respuesta*: $x = \frac{2}{3}$ produce el mínimo relativo $-\frac{256}{27}$; $x = -2$ produce el máximo relativo 0.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Respuesta*: $x = 1$ produce el máximo relativo -4; $x = 3$ produce el mínimo relativo -8.

e) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Respuesta*: ni máximo ni mínimo relativos.

f) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ *Respuesta*: $x = 0$ produce el máximo relativo 16; $x = \pm 2$ produce el mínimo relativo 0.

g) $f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$ *Respuesta*: $x = 0$ produce el máximo relativo 6912; $x = 4$ produce el mínimo relativo 0; $x = -3$ produce nada.

h) $f(x) = x^3 + 48/x$ *Respuesta*: $x = -2$ produce el máximo relativo -32; $x = 2$ produce el mínimo relativo 32.

i) $f(x) = (x - 1)^{1/3}(x + 2)^{2/3}$ *Respuesta*: $x = -2$ produce el máximo relativo 0; $x = 0$ produce el mínimo relativo $-\sqrt[3]{4}$; $x = 1$ produce nada.

24. Analice las funciones del problema 23*a*-*f*) para determinar, mediante el criterio de la segunda derivada, valores máximos o mínimos relativos.

25. Demuestre que $y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$ tiene un mínimo absoluto cuando $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

26. Analice los valores máximos y mínimos absolutos en el intervalo dado:

a) $y = -x^2$ en $-2 < x < 2$ *Respuesta*: máximo ($= 0$) en $x = 0$.

b) $y = (x - 3)^2$ en $0 \le x \le 4$ *Respuesta*: máximo ($= 9$) en $x = 0$; mínimo ($= 0$) en $x = 3$.

c) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $-2 \le x \le 2$ *Respuesta*: máximo ($= 5$) en $x = 0$; mínimo ($= 3$) en $x = \pm 2$.

d) $y = \sqrt{x - 4}$ en $4 \le x \le 29$ *Respuesta*: máximo ($= 5$) en $x = 29$; mínimo ($= 0$) en $x = 4$.

27. La suma de dos números positivos es 20. Halle los números si: *a*) su producto es un máximo; *b*) la suma de sus cuadrados es un mínimo; *c*) el producto del cuadrado de uno y el cubo del otro es un máximo.

Respuestas: *a*) 10, 10; *b*) 10, 10; *c*) 8, 12.

28. El producto de dos números positivos es 16. Halle los números cuando *a*) su suma es mínima; *b*) la suma de uno y el cuadrado del otro es mínima.

Respuestas: *a*) 4, 4; *b*) 8, 2.

29. Se va a construir una caja rectangular abierta con extremos cuadrados para que tenga una capacidad de 6400 pies cúbicos, a un costo de \$0.75/pie cuadrado para la base y \$0.25/pie cuadrado para los lados. Halle las dimensiones más económicas.

Respuesta: $20 \times 20 \times 16$.

30. Una pared de 8 pies de altura dista $3\frac{3}{8}$ pies de una casa. Halle la escalera más corta que llegue del piso a la casa cuando se inclina sobre la pared.

Respuesta: $15\dfrac{5}{8}$ pies.

31. Una compañía ofrece el siguiente plan de cargos: \$30 por mil pedidos de 50 000 o menos, con un descuento de $37\frac{1}{2}$¢ por cada millar que esté por encima de los 50 000. Halle el tamaño del pedido que consiga que los recibos de la compañía sean un máximo.

Respuesta: 65 000.

32. Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 4) que corta, en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

Respuesta: $4x + 3y - 24 = 0$.

33. ¿En qué punto del primer cuadrante de la parábola $y = 4 - x^2$ la recta tangente, junto con los ejes coordenados, determinan un triángulo de área mínima?

Respuesta: $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.

34. Halle la distancia mínima del punto (4, 2) a la parábola $y^2 = 8x$.

Respuesta: $2\sqrt{2}$.

35. *a*) Analice los valores máximos y mínimos de y en $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$. *b*) (CG) Verifique la respuesta para *a*) con una graficadora.

Respuesta: *a*) máximo en (5, 3); *b*) mínimo en (–1, –3).

36. (CG) Halle el máximo y el mínimo absolutos de $f(x) = x^5 - 3x^2 - 8x - 3$ en [–1, 2] con precisión de tres cifras decimales.

Respuesta: máximo 1.191 en $x = -0.866$; mínimo –14.786 en $x = 1.338$.

37. Una corriente eléctrica, cuando fluye en una bobina circular de radio r, ejerce una fuerza $F = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$ en un imán pequeño ubicado a una distancia x sobre el centro de la bobina. Demuestre que F es máxima cuando $x = \frac{1}{2}r$.

38. El trabajo realizado por una célula voltaica de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna constante r al pasar una corriente estacionaria por una resistencia externa R es proporcional a $E^2R/(r + R)^2$. Demuestre que el trabajo realizado es máximo cuando $R = r$.

39. Una recta tangente se dibuja a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, de manera que la parte intersecada por los ejes coordenados es un mínimo. Demuestre que su longitud es 9.

40. Un rectángulo está inscrito en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes de la elipse. Halle las dimensiones del rectángulo de *a*) área máxima y *b*) perímetro máximo que pueda inscribirse de esta manera.

Respuestas: *a*) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$; *b*) 32×18.

41. Halle el radio R del cono circular recto de volumen máximo que pueda inscribirse en una esfera de radio r. (*Recuérdese:* el volumen de un cono circular recto de radio R y altura h es $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.)

Respuesta: $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

42. Un cilindro circular recto está inscrito en un cono circular recto de radio r. Halle el radio R del cilindro si *a*) su volumen es un máximo; *b*) su área lateral es un máximo. (*Recuérdese:* el volumen de un cilindro circular recto de radio R y altura h es $\pi R^2 h$ y su área lateral es $2\pi Rh$.)

Respuestas: *a*) $R = \frac{2}{3}r$; *b*) $R = \frac{1}{2}r$.

43. Demuestre que una carpa cónica de volumen dado necesitará la cantidad mínima de material cuando su altura h es $\sqrt{2}$ por el radio r de la base. [Advierta primero que el área de la superficie $A = \pi(r^2 + h^2)$.]

44. Demuestre que el triángulo equilátero de altura $3r$ es el triángulo isósceles de área mínima que se circunscribe en un círculo de radio r.

45. Determine las dimensiones de un cilindro circular recto de máxima área de superficie lateral que puede inscribirse en una esfera de radio 8.

Respuesta: $h = 2r = 8\sqrt{2}$.

46. Investigue la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima (incluidos su pico y su base) en un cono circular recto de radio r y altura h.

Respuesta: si $h > 2r$, radio del cilindro $= \frac{1}{2}\left(\frac{hr}{h-r}\right)$.

15

Trazo de curvas. Concavidad. Simetría

Concavidad

Desde un punto de vista intuitivo, el arco de una curva es *cóncavo hacia arriba* si tiene la forma de una taza [fig. 15.1*a*)] y que es *cóncavo hacia abajo* si tiene la forma de una cúpula [fig. 15.1*b*)]. Sin embargo, es posible una definición más precisa. Un arco es cóncavo hacia arriba si para cada x_0, el arco queda por encima de la tangente en x_0 en algún intervalo abierto alrededor de x_0. De igual modo, un arco es cóncavo hacia abajo si para cada x_0, el arco queda por debajo de la tangente en x_0 en algún intervalo abierto alrededor de x_0.

La mayor parte de las curvas son combinaciones de cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Por ejemplo, en la figura 15.1*c*) la curva es cóncava hacia abajo de A a B y de C a D, pero cóncava hacia arriba de B a C.

(*a*)
Cóncava hacia arriba

(*b*)
Cóncava hacia abajo

(*c*)

Fig. 15.1

La segunda derivada de f indica la concavidad de la gráfica de f.

Teorema 15.1.

a) Si $f''(x) > 0$ para x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $a < x < b$.
b) Si $f''(x) < 0$ para x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo para $a < x < b$.

Repase la demostración en el problema 17.

EJEMPLO 15.1.

a) Sea $f(x) = x^2$. Entonces, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Como $f''(x) > 0$ para toda x, la gráfica de f es siempre cóncava hacia arriba. Esto se debe a que la gráfica señala una parábola que se abre hacia arriba.
b) Sea $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$. De ahí que $y^2 = 1 - x^2$, $x^2 + y^2 = 1$. Entonces, la gráfica es la mitad superior del círculo unitario con centro en el origen. Mediante derivación implícita se obtiene $x + yy' = 0$ y, en consecuencia, $1 + yy'' + (y')^2 = 0$. Así, $y'' = -[1 + (y')^2]/y$. Como $y > 0$ (excepto en $x = 1$), $y'' < 0$. Por tanto, la gráfica siempre es cóncava hacia abajo, es decir, que es lo que cabía esperar.

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión en una curva $y = f(x)$ es un punto en el que la concavidad cambia, de manera que la curva resulta cóncava hacia arriba en un lado y cóncava hacia abajo en el otro lado del punto. Entonces, si y'' existe en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces $y'' < 0$ en un lado de x_0 y $y'' > 0$ en el otro lado. Por ende, si y'' es continua en x_0, entonces $y'' = 0$ en x_0. Esto desemboca en el teorema siguiente.

Teorema 15.2. Si la gráfica de f tiene un punto de inflexión en x_0 y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a x_0 y f'' es continua en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$.

EJEMPLO 15.2.

a) Sea $f(x) = x^3$. Entonces, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Así, $f''(x) < 0$ para $x < 0$, y $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Por tanto, la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $x = 0$ (fig. 5.5). Observe que $f''(0) = 0$, como lo determina el teorema 15.2.

b) Sea $f(x) = x^4$. Entonces, $f'(x) = 4x^3$, y $f''(x) = 12x^2$. Al resolver $f''(x) = 0$ resulta $x = 0$. Sin embargo, la gráfica de f no tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Es cóncava hacia arriba en todos los puntos. Con este ejemplo se muestra que $f''(x_0) = 0$ no implica necesariamente que hay un punto de inflexión en x_0.

c) Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$. Al resolver $f''(x) = 2x + 1 = 0$ se halla que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(-\frac{1}{2}, \frac{133}{12})$. Observe que éste es en realidad un punto de inflexión porque $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{2}$ y $f''(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{2}$ (fig. 14.5).

Asíntotas verticales

Una recta vertical $x = x_0$ tal que $f(x)$ tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ cuando x se aproxima a x_0, desde la izquierda o desde la derecha, se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de f. Si $f(x)$ tiene la forma $g(x)/h(x)$, donde g y h son funciones continuas, entonces la gráfica de f tiene una asíntota vertical $x = x_0$ para toda x_0 tal que $h(x_0) = 0$ (y $g(x_0) \neq 0$).

Asíntotas horizontales

Una recta horizontal $y = y_0$ se denomina *asíntota horizontal* de la gráfica de f si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ o $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$. Así, la gráfica se aproxima a una asíntota horizontal cuando se mueve cada vez más a la izquierda o a la derecha.

EJEMPLO 15.3.

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces, la gráfica de f tiene una asíntota vertical en $x = 0$, a la que se aproxima tanto por la derecha como por la izquierda. La recta $y = 0$ (o sea, el eje x) es una asíntota horizontal tanto en la izquierda como en la derecha (fig. 5.21).

b) Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$. En consecuencia, $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f, a la que se aproxima tanto desde la derecha como desde la izquierda. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, a la cual se aproxima tanto en la izquierda como en la derecha (fig. 14.7).

c) Sea $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+3)}$. Entonces, la gráfica de f tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -3$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, a la que se aproxima tanto en la izquierda como en la derecha.

d) Sea $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$. Por consiguiente, la gráfica de f tiene una asíntota vertical en $x = 3$, a la que se aproxima desde la izquierda y desde la derecha. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal, a la cual se aproxima tanto por la izquierda como por la derecha.

Simetría

Dos puntos P y Q son *simétricos respecto a una recta* l si l es la mediatriz del segmento de recta que une P y Q [fig. 15.2*a*)].

Dos puntos P y Q son *simétricos respecto a un punto* B si B es el punto medio del segmento que une P y Q.

Una curva es simétrica respecto a una recta l (respectivamente, al punto B) si, para cualquier punto P en la curva, existe otro punto Q en la curva tal que P y Q sean simétricos respecto a l (respectivamente, al punto B) [fig. 15.2*b*-*c*)].

Si una curva es simétrica respecto a una recta l, entonces l se denomina un *eje de simetría* de la curva. Por ejemplo, toda recta que pase por el centro de un círculo es un eje de simetría de éste.

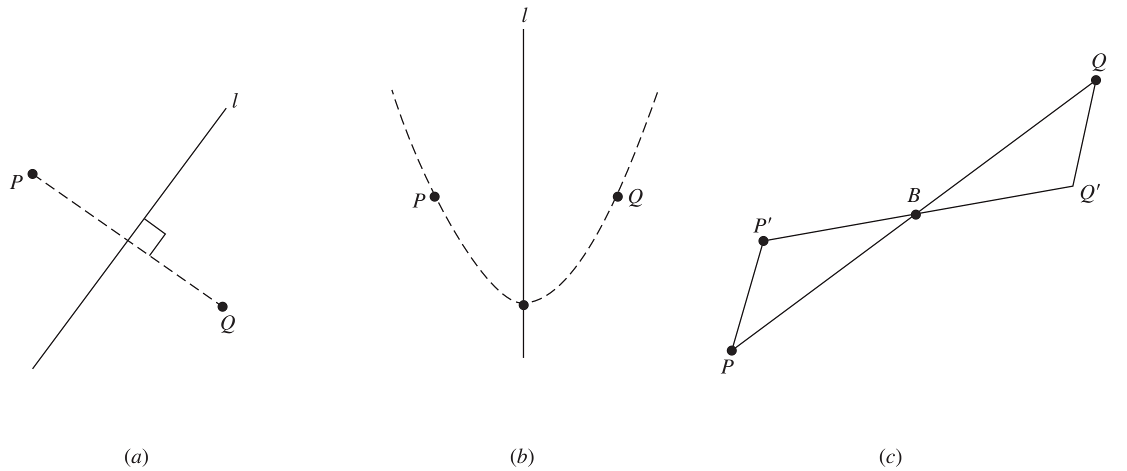


Fig. 15.2

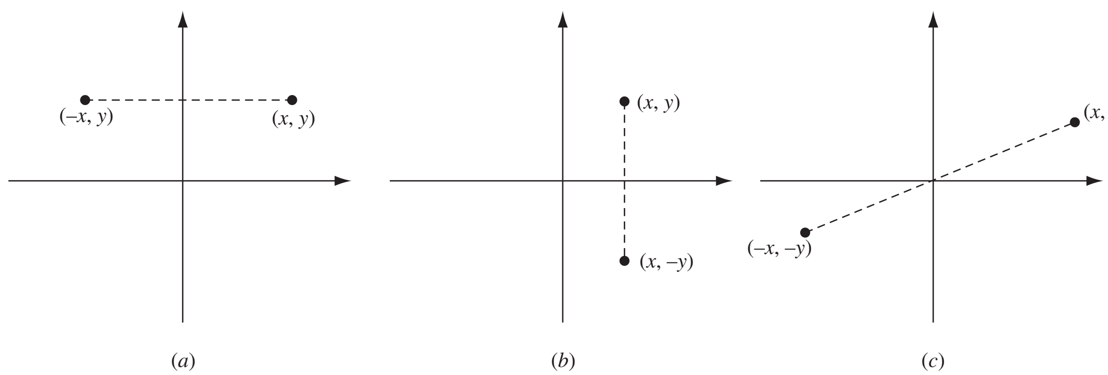


Fig. 15.3

Los puntos (x, y) y $(-x, y)$ son simétricos respecto al eje y, y los puntos (x, y) y $(x, -y)$ son simétricos respecto al eje x. Los puntos (x, y) y $(-x, -y)$ son simétricos respecto al origen [fig. 15.3*a*-*c*)].

Considérese la gráfica de una ecuación $F(x, y) = 0$. Entonces:

i) La gráfica es simétrica respecto al eje y si y sólo si $F(x, y) = 0$ implica que $F(-x, y) = 0$.
ii) La gráfica es simétrica respecto al eje x si y sólo si $F(x, y) = 0$ implica que $F(x, -y) = 0$.
iii) La gráfica es simétrica respecto al origen si y sólo si $F(x, y) = 0$ implica que $F(-x, -y) = 0$.

EJEMPLO 15.4.

a) La parábola $y = x^2$ es simétrica al eje y.
b) La parábola $x = y^2$ es simétrica respecto al eje x.
c) Un círculo $x^2 + y^2 = r^2$, una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son simétricas respecto al eje y, al eje x y al origen.

EJEMPLO 15.5. Un punto $P(a, b)$ es simétrico al punto $Q(b, a)$ respecto a la recta $y = x$. Para comprobarlo, primero se observa que la recta PQ tiene pendiente -1. Como la recta $y = x$ tiene pendiente 1, la recta PQ es perpendicular a la recta $y = x$. Además, el punto medio del segmento que une a P y a Q es $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$, que está en la recta $y = x$. Por tanto, la recta $y = x$ es la mediatriz de dicho segmento.

Funciones inversa y simetría

Dos curvas C_1 y C_2 son *simétricas una con la otra respecto de una recta l* si, para cualquier punto P en una de las curvas, el punto Q que es simétrico a P respecto a l se halla en la otra curva (es decir, si al "reflejar" una de las curvas en la recta l, el resultado es la otra curva).

Teorema 15.3. Considérese cualquier función f uno a uno y su función inversa f^{-1}. Entonces, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas una con la otra respecto de la recta $y = x$.

Para verlo, sean (a, b) que estén en la gráfica de f. Entonces, $f(a) = b$. Por tanto, $f^{-1}(b) = a$, o sea, (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. En el ejemplo 15.5, (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$.

EJEMPLO 15.6.

a) Si $f(x) = 2x$, entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$. Por tanto, las rectas $y = 2x$ y $y = \frac{1}{2}x$ son simétricas respecto a la recta $y = x$.
b) Sea C_1 la parábola que es la gráfica de la ecuación $y = x^2$, y sea C_2 la parábola que es la gráfica de la ecuación $x = y^2$. Entonces C_1 y C_2 son simétricos respecto a la recta $y = x$, puesto que la ecuación $x = y^2$ proviene de la ecuación $y = x^2$ al intercambiar x y y.

Funciones pares e impares

Una función f es *par* si para toda x en su dominio $-x$ también está en su dominio y $f(-x) = f(x)$. A la vez, f es una función *impar* si para toda x en su dominio $-x$ también está en su dominio y $f(-x) = -f(x)$.

EJEMPLO 15.7. Cualquier polinomio de la forma $3x^6 - 8x^4 + 7$, que supone sólo potencias pares de x, determina una función par. Todo polinomio, como $5x^9 + 2x^5 - 4x^3 + 3x$, que implica sólo potencias impares de x, determina una función impar.

Una función f es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al eje y. De hecho, supóngase que f es par y (x, y) está en su gráfica. Entonces, $y = f(x)$. Luego, $y = f(-x)$ y, por consiguiente, $(-x, y)$ está en la gráfica. Así, la gráfica es simétrica respecto al eje y. Lo contrario se deja como problema [el problema 16*a*)].

Una función f es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al origen. De hecho, supóngase que f es impar y (x, y) está en su gráfica. Así, $y = f(x)$. Por tanto, $-y = f(-x)$, y por consiguiente, $(-x, -y)$ está en la gráfica. Así, la gráfica es simétrica respecto al origen. Lo contrario se deja como problema [el problema 16*b*)].

Sugerencias para trazar el gráfico de $y = f(x)$

1. Calcule y' y, si es conveniente, y''.
2. Utilice y' para hallar cualquier número crítico (donde $y' = 0$, o y' no está definida y y está definida). Determine si estos números críticos producen un máximo o mínimo relativos mediante el criterio de la segunda o de la primera derivada.
3. Utilice y' para determinar los intervalos en los que y es creciente (cuando $y' > 0$) o decreciente (cuando $y' < 0$).
4. Utilice y'' para determinar dónde la gráfica es cóncava hacia arriba (cuando $y'' > 0$) o cóncava hacia abajo (cuando $y'' < 0$). Verifique los puntos donde $y'' = 0$ para determinar si son o no puntos de inflexión (si $y'' > 0$ en un lado y $y'' < 0$ en el otro lado del punto).
5. Busque las asíntotas verticales. Si $y = \frac{g(x)}{h(x)}$, existe una asíntota vertical $x = x_0$ si $h(x_0) = 0$ y $g(x_0) \neq 0$.
6. Busque las asíntotas horizontales. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$, entonces $y = y_0$ es una asíntota horizontal a la derecha. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$, entonces $y = y_0$ es una asíntota horizontal a la izquierda.
7. Determine el comportamiento de "al infinito". Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente, $-\infty$), entonces la curva se mueve hacia arriba (respectivamente, hacia abajo) sin límite a la derecha. De igual forma, si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente, $-\infty$), por consiguiente, la curva se mueve hacia arriba (respectivamente, hacia abajo), sin límite a la izquierda.
8. Halle las intersecciones con el eje y (es decir, donde $x = 0$) y las intersecciones con el eje x (o sea, donde $y = 0$).
9. Indique los puntos pico, donde y' tiende a un valor desde la izquierda y a otro valor desde la derecha. Un ejemplo es el origen en la gráfica de $y = |x|$.

10. Indique toda cúspide, donde y' tiende a $+\infty$ desde ambos lados o donde y' se aproxima a $-\infty$ desde ambos lados. Un ejemplo es el origen de la gráfica $y = \sqrt{|x|}$.
11. Halle toda asíntota oblicua $y = mx + b$ tal que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b)) = 0$ o $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b)) = 0$. Una asíntota oblicua es la que no es vertical ni horizontal.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

Se tiene que

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x + 1)(x - 2)$$

Sea $y'' = 0$ y se resuelve para obtener los posibles puntos de inflexión posibles $x = -\frac{1}{3}$ y 2. Entonces:

Cuando $x < -\frac{1}{3}$	$y'' = +$, y el arco es cóncavo hacia arriba.
Cuando $-\frac{1}{3} < x < 2$	$y'' = -$, y el arco es cóncavo hacia abajo.
Cuando $x > 2$	$y'' = +$, y el arco es cóncavo hacia arriba.

Los puntos de inflexión son $(-\frac{1}{3}, -\frac{322}{27})$ y $(2, -63)$, ya que y'' cambia de signo en $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 2$ (fig. 15.4).

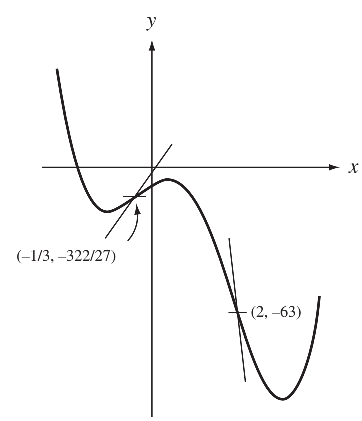


Fig. 15.4

2. Analice la concavidad y los puntos de inflexión de $y = x^4 - 6x + 2$ y trace la gráfica.

Se tiene que $y'' = 12x^2$. Por el teorema 15.2, el posible punto de inflexión está en $x = 0$. En los intervalos $x < 0$ y $x > 0$, y'' es positiva, y los arcos en ambos lados de $x = 0$ son cóncavos hacia arriba. El punto $(0, 2)$ no es un punto de inflexión. Sea $y' = 4x^3 - 6 = 0$, y se halla el número crítico $x = \sqrt[3]{3/2}$. En este punto $y'' = 12x^2 > 0$ y se tiene un mínimo relativo por el criterio de la segunda derivada. Como existe sólo un número crítico, hay un mínimo absoluto en este punto (donde $x \sim 1.45$ y $y \sim -3.15$ (fig. 15.5).

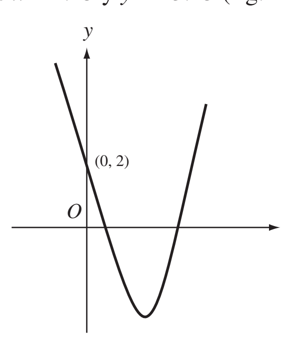


Fig. 15.5

3. Analice la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 3x + (x + 2)^{3/5}$ y luego trace la gráfica.

$y' = 3 + \frac{3}{5(x+2)^{2/5}}$ y $y'' = \frac{-6}{25(x+2)^{7/5}}$. El posible punto de inflexión está en $x = -2$. Cuando $x > -2$, y'' resulta negativa y el arco es cóncavo hacia abajo. Cuando $x < -2$, y'' es positiva y el arco es cóncavo hacia arriba. Por tanto, existe un punto de inflexión en $x = -2$, donde $y = -6$ (fig. 15.6). Como $y' > 0$ (excepto en $x = -2$), y es una función creciente y no hay extremos relativos.

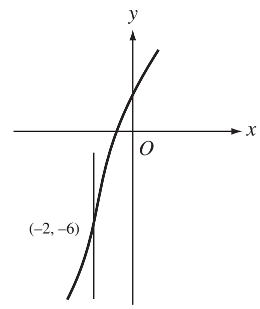


Fig. 15.6

4. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces hay un punto de inflexión en x_0.

Como $f'''(x_0) = 0$, $f'''(x_0)$ es o positivo o negativo. Por tanto, f'' es creciente o decreciente en x_0. Como $f''(x_0) = 0$, f'' tiene signos opuestos a la izquierda y a la derecha de x_0. Entonces, la curva tendrá concavidad opuesta en los lados de x_0 y habrá un punto de inflexión en x_0.

5. Halle las ecuaciones de las tangentes en los puntos de inflexión de $y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

Existe un punto de inflexión en $x = x_0$ cuando $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$. Aquí,

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x - 1)(x - 2)$$

$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x - 3)$$

Los posibles puntos de inflexión están en $x = 1$ y $x = 2$. Como $f'''(1) \neq 0$ y $f'''(2) \neq 0$, los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$ son puntos de inflexión.

En $(1, -1)$, la pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = 2$ y su ecuación es

$$y = y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o} \quad y + 1 = 2(x - 1) \quad \text{o} \quad y = 2x - 3$$

En $(2, 0)$, la pendiente es $f'(2) = 0$ y la ecuación de la recta tangente es $y = 0$.

6. Trace la gráfica de $y = f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$.

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$, $f''(x) = 12x - 10$, y $f'''(x) = 12$. Ahora, $12x - 10 > 0$ cuando $x > \frac{5}{6}$, y $12x - 10 < 0$ cuando $x < \frac{5}{6}$. Por tanto, la gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x > \frac{5}{6}$ y es cóncava hacia abajo cuando $x < \frac{5}{6}$. Luego, hay un punto de inflexión en $x = \frac{5}{6}$. Puesto que $f'(x) = 2(3x^2 - 5x + 2) = 2(3x - 2)(x - 1)$, los números críticos son $x = \frac{2}{3}$ y $x = 1$. Puesto que $f''(\frac{2}{3}) = -2 < 0$ y $f''(1) = 2$, existe un máximo relativo en $x = \frac{2}{3}$ (donde $y = -\frac{161}{27} \sim -5.96$ ~ -5.96) y un mínimo relativo en $x = 1$ (donde $y = -6$) (fig. 15.7).

7. Trace la gráfica de $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

$$y = \frac{x^2 - 4 + 4}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{4}{x - 2} = x + 2 + \frac{4}{x - 2}. \text{ Luego, } y' = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \text{ y } y'' = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Al resolver $y' = 0$ se obtienen los números críticos $x = 4$ y $x = 0$. Como $f''(4) = 1 > 0$ y $f''(0) = -1 < 0$, hay un mínimo relativo en $x = 4$ (donde $y = 8$) y un máximo relativo en $x = 0$ (donde $y = 0$). Como y'' nunca es 0, no hay puntos de inflexión. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua en ambos lados, porque en la curva, $y - (x + 2) = \frac{4}{x-2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$ (fig. 15.8).

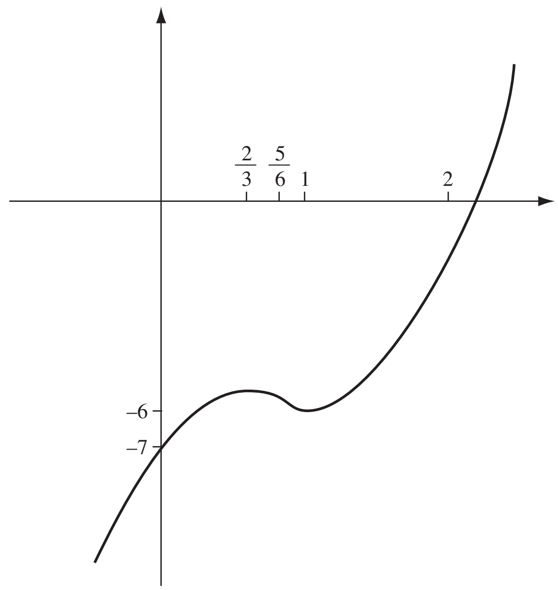


Fig. 15.7

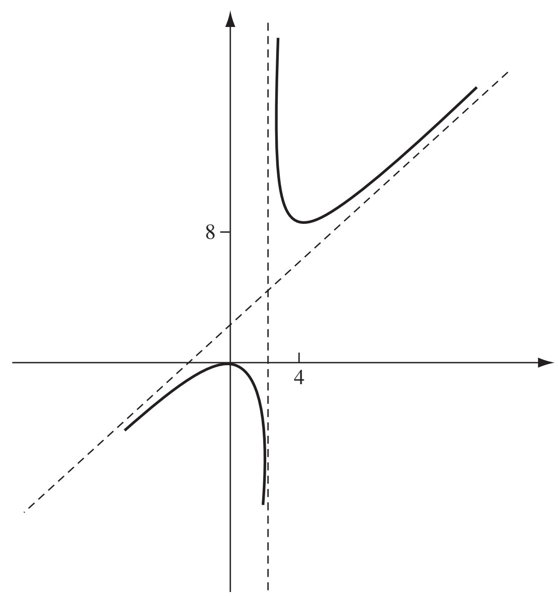


Fig. 15.8

8. Trace la gráfica de $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 36$.

$g'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x - 3)$ y $g''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3)$. Entonces, los números críticos son $x = 0$ (donde $y = 36$) y $x = 3$ (donde $y = 9$). Como $g''(0) = -18 < 0$ y $g''(3) = 18 > 0$, existe un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 3$. Al igualar $g''(x) = 0$ se obtiene $x = \frac{3}{2}$, donde existe un punto de inflexión, ya que $g''(x) = 6(2x - 3)$ cambia de signo en $x = \frac{3}{2}$.

$g(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, y $g(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$. Como $g(-1) = 29$ y $g(-2) = -16$, el teorema del valor intermedio implica que hay un cero x_0 de g entre –1 y –2. (Una graficadora muestra $x_0 \sim -1.70$.) Éste es el único cero porque g es creciente hasta el punto (0, 36), decreciente desde (0, 36) hasta (3, 9) y luego creciente desde (3, 9) (fig. 15.9).

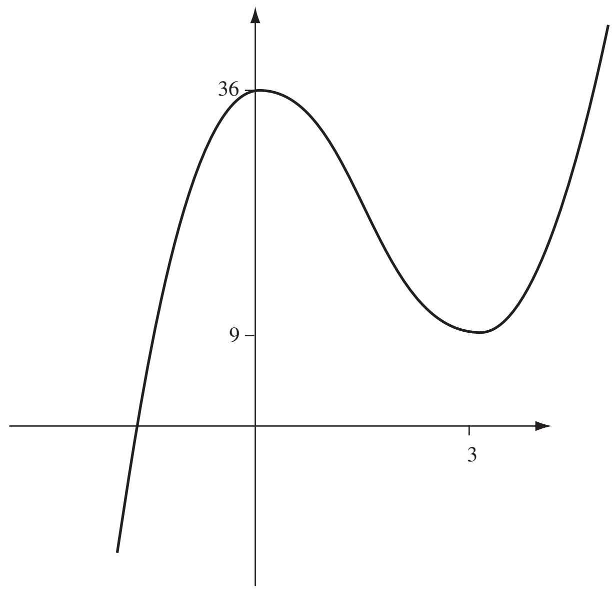


Fig. 15.9

9. Trace la gráfica de $y = \dfrac{x^2}{(x-2)(x-6)}$.

Hay asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 6$.

$$y' = \frac{2x(x-2)(x-6) - 2x^2(x-4)}{(x-2)^2(x-6)^2} = \frac{8x(3-x)}{(x-2)^2(x-6)^2}$$

$$y'' = \frac{(x-2)^2(x-6)^2(24-16x) - 8x(3-x)(2)(x-2)(x-6)(2x-8)}{(x-2)^4(x-6)^4}$$

$$= \frac{8(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x-2)^3(x-6)^3}$$

Los números críticos son $x = 0$ (donde $y = 0$) y $x = 3$ (donde $y = -3$). Los cálculos demuestran que $y''(0) > 0$ y $y''(3) < 0$. Por tanto, hay un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 3$. Como $y \to 1$ cuando $x \to \pm\infty$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal tanto en la izquierda como en la derecha. Si $y'' = 0$, entonces se obtiene $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 36 = 0$. Por el resultado del problema anterior (el 8), se advierte que se tiene un punto de inflexión único $x_0 \sim -1.70$ (donde $y \sim 0.10$) (fig. 15.10).

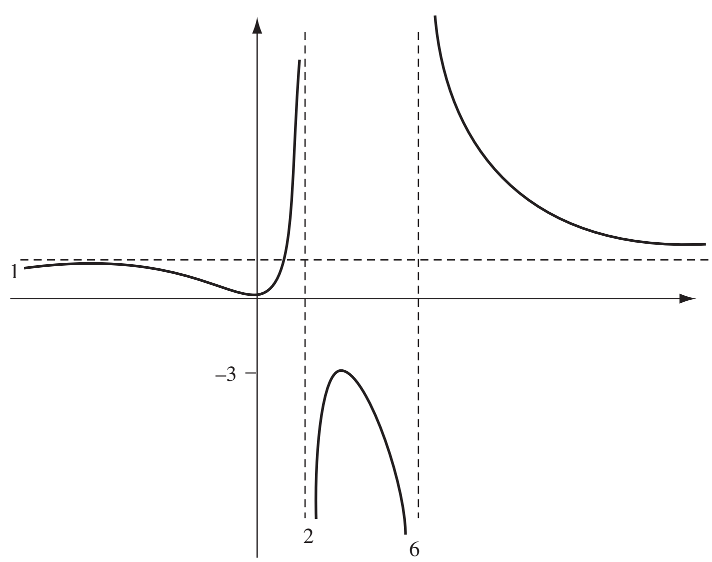


Fig. 15.10

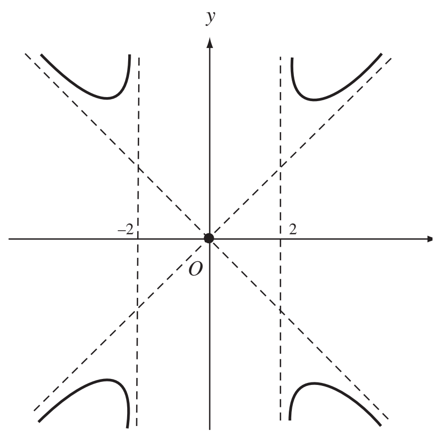
10. Trace la gráfica de $y^2(x^2 - 4) = x^4$.

$y^2 = \frac{x^4}{x^2-4}$. Entonces, $y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$. La curva existe sólo para $x^2 > 4$, es decir, para $x > 2$ o $x < -2$, más el punto aislado (0, 0).

La curva es simétrica respecto a ambos ejes coordenados y al origen. Por ello, a partir de este momento se considera sólo el primer cuadrante. Entonces,

$$y' = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)^{3/2}} \quad \text{y} \quad y'' = \frac{4x^2 + 32}{(x^2-4)^{5/2}}$$

El único número crítico es $2\sqrt{2}$ (donde $y = 4$). Como $y'' > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba y existe un mínimo relativo en $(2\sqrt{2}, 4)$. Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales. El resto de la gráfica en otros cuadrantes se obtiene mediante reflexión en los ejes y en el origen. Se advierte que también existe una asíntota oblicua $y = x$, ya que $y^2 - x^2 = x^4/(x^2 - 4) - x^2 = 4/(x^2 - 4) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Por simetría, $y = -x$ asimismo es una asíntota (fig. 15.11).



$y^2(x^2 - 4) = x^4$

Fig. 15.11

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

11. Analice las funciones del problema 23*a*-*f*) del capítulo 14.

Respuestas:

a) No hay punto de inflexión; cóncava hacia arriba en todas partes.
b) No hay punto de inflexión; cóncava hacia abajo en todas partes.
c) Punto de inflexión en $x = -\frac{2}{3}$; cóncava hacia arriba para $x > -\frac{2}{3}$; cóncava hacia abajo para $x < -\frac{2}{3}$.
d) Punto de inflexión en $x = 2$; cóncava hacia arriba para $x > 2$, cóncava hacia abajo para $x < 2$.
e) Punto de inflexión en $x = 2$; cóncava hacia abajo para $x > 2$, cóncava hacia arriba para $x < 2$.
f) Punto de inflexión en $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; cóncava hacia arriba para $x > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x < -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, cóncava hacia abajo para $-\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

12. Demuestre: si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos números críticos, su promedio es la abscisa en el punto de inflexión. Si hay sólo un número crítico, es la abscisa en el punto de inflexión.

13. Analice y trace las gráficas de las ecuaciones siguientes:

a) $xy = (x^2 - 9)^2$

Respuesta: simétrica respecto al origen, asíntota vertical $x = 0$, mínimo relativo en (3, 0), máximo relativo en (–3, 0), sin puntos de inflexión, cóncava hacia arriba para $x > 0$.

b) $y = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$

Respuesta: simétrica respecto al eje y, asíntotas verticales $x = \pm 1$, mínimo relativo en (0, 0), máximos relativos en $(\pm\sqrt{2}{-4})$, sin puntos de inflexión, cóncava hacia arriba para $|x| < 2$.

c) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$

Respuesta: asíntota vertical $x = 0$, mínimo relativo en (1, 3), punto de inflexión en $(-\sqrt[3]{2}, 0)$, cóncava hacia arriba para $x < -\sqrt[3]{2}$ y $x > 0$.

d) $y^3 = 6x^2 - x^3$

Respuesta: máximo relativo en $(4,\ 2\sqrt[3]{4})$, mínimo relativo en (0, 0), donde hay una "cúspide", punto de inflexión en (6, 0), cóncava hacia arriba para $x > 6$, asíntota oblicua $y = -x + 2$ a la izquierda y a la derecha.

e) $y = 1 + \dfrac{x^2}{x - 1}$

Respuesta: asíntota vertical $x = 1$, máximo relativo en (0, 1), mínimo relativo en (2, 5), cóncava hacia arriba para $x > 1$ y hacia abajo para $x < 1$, no hay puntos de inflexión, creciente para $x < 0$ y $x > 2$, decreciente para $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$, asíntota oblicua $y = x + 2$.

f) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Respuesta: Simétrica respecto al origen, máximo relativo en $(1, \frac{1}{2})$, mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{2})$ creciente $-1 < x < 1$, cóncava hacia arriba en $-\sqrt{3} < x < 0$ y $x > \sqrt{3}$, cóncava hacia abajo en $x < -\sqrt{3}$ y $0 < x < \sqrt{3}$, puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$, asíntota horizontal $y = 0$ en ambos lados.

g) $y = x\sqrt{x - 1}$

Respuesta: definida para $x \geq 1$, creciente, cóncava hacia arriba para $x > \frac{4}{3}$ y hacia abajo para $x < \frac{4}{3}$, punto de inflexión en $(\frac{4}{3},\ \frac{4}{9}\sqrt{3})$.

h) $y = x\sqrt[3]{2 - x}$

Respuesta: máximo relativo en $x = \frac{3}{2}$, creciente para $x < \frac{3}{2}$, cóncava hacia abajo para $x < 3$, punto de inflexión en (3, –3).

i) $y = \dfrac{x + 1}{x^2}$

Respuesta: asíntota vertical $x = 0$, asíntota horizontal $y = 0$ en ambos lados, mínimo relativo $(-2, -\frac{1}{4})$, creciente para $-2 < x < 0$, cóncava hacia arriba $-3 < x < 0$ y $x > 0$, punto de inflexión en $(-3, -\frac{2}{9})$, $y \to +\infty$ cuando $x \to 0$.

14. Demuestre que toda función $F(x)$ que esté definida para toda x puede expresarse de una y sólo una forma como la suma de una función par y una función impar. [*Pista*: sea $E(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x))$.]

15. Halle una ecuación de la nueva curva C_1 que se obtiene cuando la gráfica de la curva C con una ecuación $x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$ se refleja en *a*) el eje x, *b*) el eje y, *c*) el origen.

Respuestas: *a*) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$; *b*) igual que *a*); *c*) el mismo C.

16. *a*) Si la gráfica de f es simétrica respecto al eje y, demuestre que f es par. *b*) Si la gráfica de f es simétrica respecto al origen, entonces demuestre que f es impar. [*Pista*: para *a*), si x está en el dominio de f, $(x, f(x))$ está en la gráfica y, por tanto, $(-x, f(x))$ está en la gráfica. Entonces, $f(-x) = f(x)$.]

17. Demuestre el teorema 15.1: *a*) Si $f''(x) > 0$ para x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $a < x < b$. *b*) Si $f''(x) < 0$ para x en (a, b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo para $a < x < b$.

[Para *a*), sea x_0 que pertenece a (a, b). Como $f''(x_0) > 0$, f' es creciente en algún intervalo abierto I que contiene a x_0. Sea que x esté en I y $x > x_0$. Por el teorema del valor medio, $f(x) - f(x_0) = f'(x^*)(x - x_0)$ para algún x^* con $x_0 < x^* < x$. Como f' es creciente, $f'(x_0) < f'(x^*)$. Entonces $f(x) = f'(x^*)(x - x_0) + f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Pero $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es una ecuación de la tangente en x_0. Un argumento similar funciona cuando $x < x_0$. Luego, la curva queda por encima de la recta tangente y, por tanto, es cóncava hacia arriba.]

18. (CG) Utilice una graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Demuestre analíticamente que f es creciente y que existe un punto de inflexión en $(-1, 3)$. Use la calculadora para trazar la gráfica de f^{-1} y $y = x$, y observe que las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$.

19. (CG) Trate de dibujar la gráfica de $y = \frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 5}$ por métodos estándar y luego use la graficadora para obtener información adicional (como la ubicación de toda asíntota vertical).

16

Repaso de trigonometría

Medida del ángulo

La unidad tradicional para medir los ángulos es el grado. Una rotación completa la forman 360 grados. Sin embargo, una unidad diferente, el radián, es más útil en cálculo. Considérese un círculo de radio 1 con centro en el punto C (fig. 16.1). Sean CA y CB dos radios para los que el arco $\widehat{AB}$ del círculo tiene una longitud de 1. Entonces, un *radián* se toma como la medida de un ángulo central ACB.

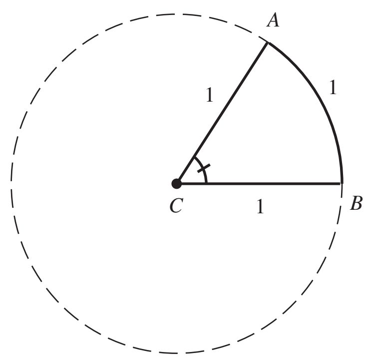


Fig. 16.1

Si u es el número de grados en un ángulo ACB, entonces la razón de u a 360º es igual a la razón de $\widehat{AB}$ con la circunferencia 2π. Como $\widehat{AB} = 1$, $u/360 = 1/2\pi$ y, por consiguiente, $u = 180/\pi$. Así,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados.} \tag{1}$$

Si π mide aproximadamente 3.14, entonces 1 radián equivale a aproximadamente 57.3 grados. Al multiplicar la ecuación (1) por $\pi/180$, se obtiene:

$$1 \text{ grado } = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \tag{2}$$

En la tabla de la figura 16.2 se muestra el equivalente en radianes de algunas medidas importantes en grados.

Ahora tómese cualquier círculo de radio r con centro O (fig. 16.3). Sea $\angle DOE$ que contiene θ radianes y sea s la longitud del arco DE. La razón de θ al número 2π radianes en una rotación completa es igual a la razón de s a toda la circunferencia $2\pi r$. Entonces, $\theta/2\pi = s/2\pi r$. Por consiguiente,

$$s = r\theta \tag{3}$$

Grados	Radianes
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3\pi}{2}$
360	2π

Fig. 16.2

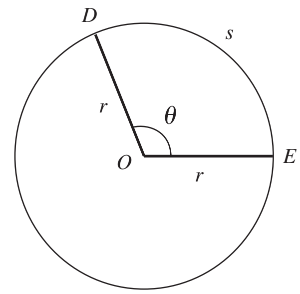


Fig. 16.3

Ángulos dirigidos

Si se piensa que un ángulo es generado por una rotación, entonces su medida se contará como positiva si la rotación va contra el sentido de las manecillas del reloj y negativa si la rotación avanza en el sentido de las manecillas del reloj. Obsérvese, por ejemplo, ángulos de $\pi/2$ radianes y $-\pi/2$ radianes en la figura 16.4. Se permiten ángulos de más de una rotación completa. En la figura 16.5, por ejemplo, se muestra un ángulo que va en sentido contrario a las manecillas del reloj, generado por una rotación completa más otro cuarto de rotación, lo que produce un ángulo de $2\pi + \pi/2 = 5\pi/2$ radianes, y un ángulo de 3π radianes producido por giro y medio en dirección contraria a las manecillas del reloj.

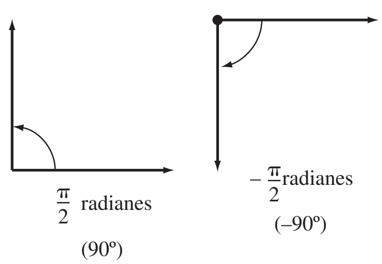


Fig. 16.4

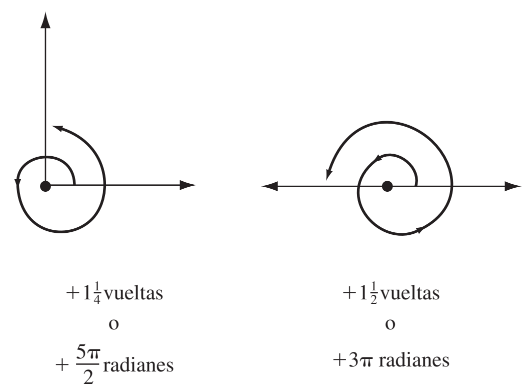


Fig. 16.5

Funciones seno y coseno

Considérese un sistema de coordenadas con origen en O y un punto A en (1, 0). Se rota la flecha OA por un ángulo de θ grados hacia una nueva posición OB. Entonces (fig. 16.6):

1. $\cos\theta$ está definido como la coordenada x del punto B.
2. $\operatorname{sen}\theta$ está definido como la coordenada y del punto B.

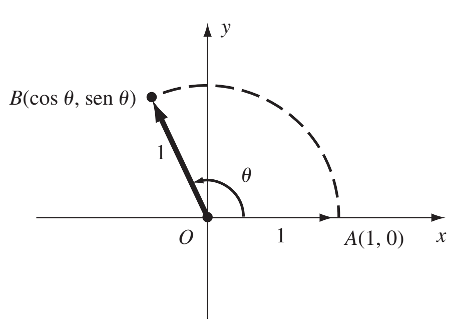


Fig. 16.6

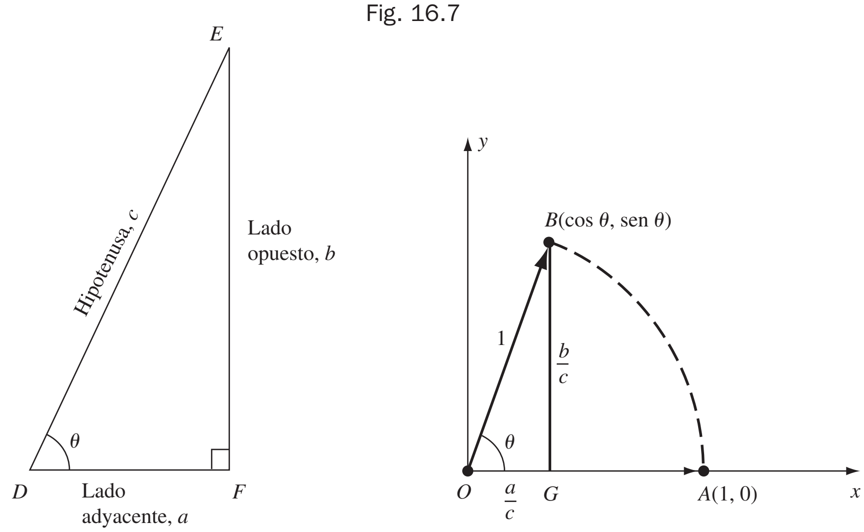
EJEMPLO 16.1.

a) Si $\theta = \pi/2$, la posición final B es (0, 1). Por tanto, $\cos(\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.
b) Si $\theta = \pi$, entonces B es (–1, 0). Por ende, $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$.
c) Si $\theta = 3\pi/2$, entonces B es (0, –1). Así, $\cos(3\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$.
d) Si $\theta = 0$ o $\theta = 2\pi$, entonces B es (1, 0). Por tanto, $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, y $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$.

Se observa que estas definiciones coinciden con las definiciones tradicionales en el caso de un ángulo agudo de un triángulo. Sea θ un ángulo agudo de un triángulo rectángulo DEF y sea ΔOBG un triángulo semejante con hipotenusa 1 (fig. 16.7). Como los triángulos son semejantes, $\overline{BG} / \overline{BO} = \overline{EF} / \overline{ED}$, es decir, $\overline{BG} = b/c$ y, de igual forma $\overline{OG} = a/c$. Entonces, $\cos \theta = a/c$ y $\operatorname{sen} \theta = b/c$. Esto es lo mismo que las definiciones tradicionales:

$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Fig. 16.7



Ahora es posible utilizar los valores obtenidos de la trigonometría del bachillerato [véase el problema 22a-c)]. En la tabla 16.1 se muestran los valores más útiles.

Primero se presentan algunas consecuencias simples de las definiciones.

(16.1) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$.

Esto se cumple porque una rotación completa adicional de 2π radianes implica regresar al mismo punto.

Tabla 16.1

θ			
Radianes	**Grados**	**cos θ**	**sen θ**
0	0	1	0
$\pi/6$	30	$\sqrt{3}/2$	1/2
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	60	1/2	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	90	0	1
π	180	–1	0
$3\pi/2$	270	0	–1

(16.2) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ (fig. 16.8).

(16.3) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ [De acuerdo con la notación tradicional, $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$ significa $(\operatorname{sen}\theta)^2$ y $(\cos\theta)^2$.]

En la figura 16.6, $1 = \overline{OB} = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}$ por el problema 1 del capítulo 2. (16.3) implica que $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ y $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$.

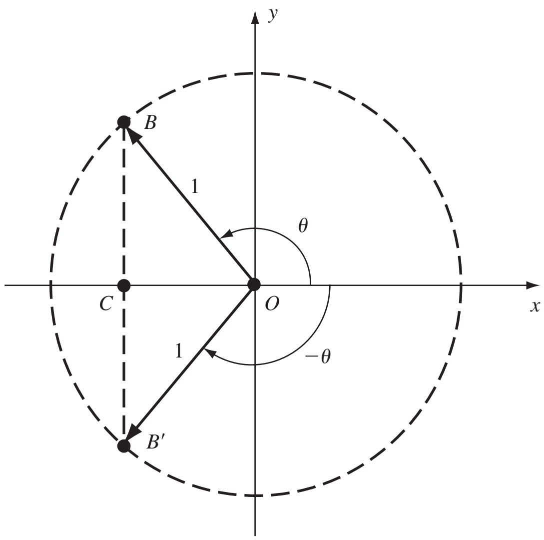


Fig. 16.8

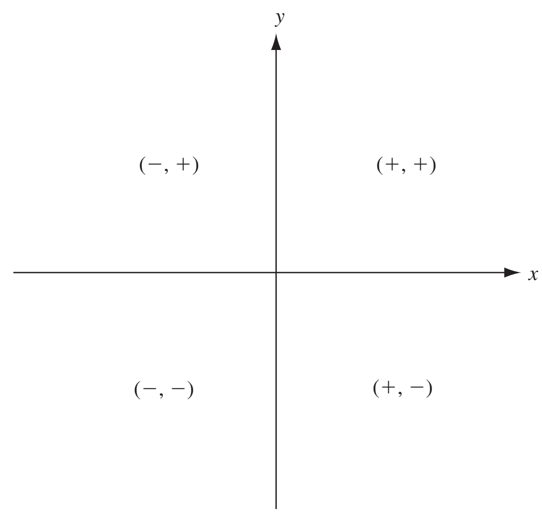


Fig. 16.9

(16.4) En los cuatro cuadrantes, el seno y el coseno tienen los signos que aparecen en la figura 16.9.

(16.5) Para cualquier punto $A(x, y)$ diferente del origen O, sea r su distancia del origen, y sea θ la medida en radianes del ángulo desde el eje x positivo a la derecha OA (fig. 16.10). El par (r, θ) se denomina *coordenadas polares* de A. Entonces, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ (repase el problema 8).

Para la derivación de fórmulas más complicadas se dependerá del resultado siguiente:

(16.6) $\cos(u - v) = \cos u\cos v + \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$
Consúltese la demostración en el problema 11.

(16.7) $\cos(u + v) = \cos u\cos v - \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$
Sustituya v por $-v$ en (16.6) y use (16.2).

(16.8) $\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v$ y $\operatorname{sen}(\pi/2 - v) = \cos v$
Remplace u por $\pi/2$ en (16.6) y utilice $\cos(\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, lo cual resulta en $\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v$. En esta fórmula, sustituya v por $(\pi/2 - v)$ para obtener $\cos v = \operatorname{sen}(\pi/2 - v)$.

(16.9) $\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u\cos v + \cos u\operatorname{sen} v$
Por (16.6) y (16.8),

$$\operatorname{sen}(u+v) = \cos[\pi/2 - (u - v)] = \cos[(\pi/2 - u) - v]$$

$$= \cos(\pi/2 - u)\cos v + \operatorname{sen}(\pi/2 - u)\operatorname{sen} v = \operatorname{sen} u\cos v + \cos u\operatorname{sen} v.$$

(16.10) $\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u\cos v - \cos u\operatorname{sen} v$
Remplace v por $-v$ en (16.9) y utilice (16.2).

(16.11) $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 u$
Sustituya v por u en (16.7) para obtener $\cos 2u = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u$. Use $\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$ y $\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$ para obtener las otras dos formas.

(16.12) $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u\cos u$
Remplace v por u en (16.9).

(16.13) $\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1+\cos u}{2}$

$$\cos u = \cos\left(2\cdot\frac{u}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - 1$$

por (16.11). Ahora se resuelve para $\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)$.

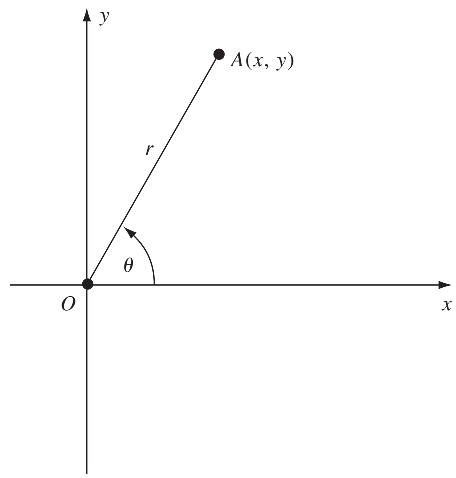


Fig. 16.10

(16.14) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{1-\cos u}{2}$

Por (16.3) y (16.13)

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)=1-\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)=1-\frac{1+\cos u}{2}=\frac{1-\cos u}{2}$$

(16.15) *a*) (Ley de cosenos). En todo triángulo ΔABC (fig. 16.11),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Para ver una demostración, repase el problema 11*a*).

b) (Ley de los senos)

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

donde sen A es sen ($\angle BAC$), y de igual forma para sen B y sen C.

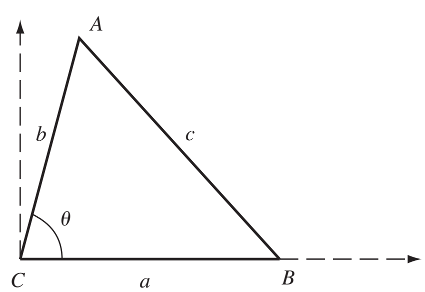


Fig. 16.11

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Convierta las medidas siguientes de grados en radianes: *a*) 54º; *b*) 120º.

a) $54° = 54\left(\frac{\pi}{180} \text{ radianes}\right) = \frac{3}{10}\pi$ radianes.

b) $120° = 120\left(\frac{\pi}{180} \text{ radianes}\right) = \frac{2\pi}{3}$ radianes.

2. Convierta las medidas siguientes de radianes en grados: *a*) $\frac{2\pi}{5}$ radianes; *b*) $\frac{5\pi}{6}$ radianes; *c*) 2 radianes.

a) $\frac{2\pi}{5} \text{radianes} = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{180}{\pi} \text{ grados }\right) = 72°$.

b) $\frac{5\pi}{6} \text{radianes} = \frac{5\pi}{6}\left(\frac{180}{\pi} \text{ grados }\right) = 150°$.

c) $2 \text{ radianes} = 2\left(\frac{180}{\pi} \text{ grados }\right) = \left(\frac{360}{\pi}\right)^{\circ}$.

3. *a*) En un círculo de radio $r = 3$ centímetros (cm), ¿qué longitud de arco s a lo largo de la circunferencia corresponde al ángulo central θ de $\pi/6$ radianes?

b) En un círculo de radio $r = 4$ pies, ¿qué ángulo central corresponde a una longitud de arco de 8 pies?

Se sabe que $s = r\theta$, donde θ se mide en radianes.

a) $s = 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ centímetros.

b) $\theta = \left(\frac{s}{r}\right) = \frac{8}{4} = 2$ radianes.

4. ¿Cuáles rotaciones entre 0 y 2π radianes tienen el mismo efecto que las rotaciones con las medidas siguientes?

a) $\frac{11\pi}{4}$ radianes; *b*) 405°; *c*) $-\frac{\pi}{3}$ radianes; *d*) -5π radianes.

a) $\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. Así, la rotación equivalente es $\frac{3\pi}{4}$ radianes.

b) $405° = (360 + 45)°$. Por consiguiente, la rotación equivalente es 45°.

c) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$. Entonces, la rotación equivalente es $\frac{5\pi}{3}$ radianes.

d) $-5\pi + 6\pi = \pi$. Así, la rotación equivalente es π radianes.

5. Halle sen θ si θ es un ángulo agudo tal que $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

Por (16.3), $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. Luego, $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{9}{25}$ y, por tanto, $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{3}{5}$. Como θ es agudo, sen θ es positivo. Entonces, $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

6. Demuestre que $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

Por (16.10), $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta - \cos\pi\operatorname{sen}\theta = (0)\cos\theta - (-1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$. Por (16.6), $\cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta = (-1)\cos\theta + (0)\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$.

7. Calcule estos valores: *a*) sen $2\pi/3$; *b*) sen $7\pi/3$; *c*) cos 9π; *d*) sen 390°; *e*) cos $3\pi/4$; *f*) cos $\pi/12$; *g*) sen $\pi/8$; *h*) sen 19°.

a) Por el problema 6, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Por (16.1), $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Por (16.1), $\cos 9\pi = \cos(\pi + 8\pi) = \cos\pi = -1$.

d) Por (16.1), $\operatorname{sen} 390° = \operatorname{sen}(30 + 360)° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$.

e) Por el problema 6, $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

f) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

g) Por (16.14), $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos(\pi/4)}{2} = \frac{1-(\sqrt{2}/2)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Por tanto, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Como $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, sen $\frac{\pi}{8}$ es positivo y, por consiguiente, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

h) 19° no puede expresarse en términos de ángulos más comunes (como 30°, 45°, 60°), de tal forma que cualquiera de las fórmulas sea aplicable. Entonces debe usarse la tabla de los senos que se encuentra en el apéndice A, la cual da 0.3256; ésta es una aproximación correcta a cuatro cifras decimales.

8. Demuestre el resultado de (16.5): si (r, θ) son coordenadas polares de (x, y), entonces $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.

Sea D el pie de la perpendicular que va de $A(x, y)$ al eje x (fig. 16.12). Sea F el punto en el rayo OA a una distancia unitaria del origen. Entonces, $F = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Si E es el pie de la perpendicular que va desde F hasta el eje x, por consiguiente $\overline{OE} = \cos\theta$ y $\overline{FE} = \operatorname{sen}\theta$. Como ΔADO es semejante al ΔFEO (por el criterio *AA*), se tiene que:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{FE}}, \text{ es decir, } \frac{x}{\cos\theta} = \frac{r}{1} = \frac{y}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Por tanto, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Cuando $A(x, y)$ está en uno de los otros cuadrantes, la demostración puede reducirse al caso donde A está en el primer cuadrante. Cuando A está en el eje x o en el eje y, el caso es muy fácil.

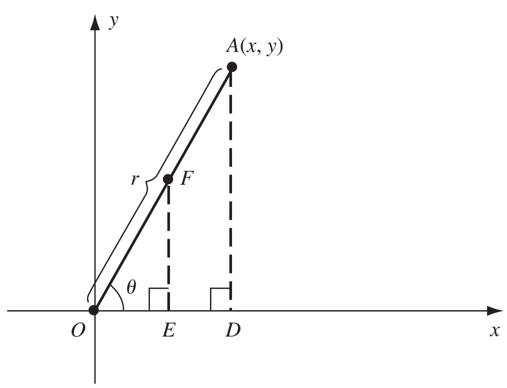


Fig. 16.12

9. Halle las coordenadas rectangulares del punto con coordenadas polares $r = 3$, $\theta = \pi/6$.

Por (16.5), $x = r\cos\theta = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

10. Halle las coordenadas polares del punto $(1, \sqrt{3})$.

Por (16.5), $r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4$. Entonces, $r = 2$. Por ende, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Luego, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

11. *a*) Demuestre la ley de cosenos [16.15*a*)]. *b*) Demuestre la ley de los senos [16.15*b*)].

a) Observe la figura 16.11. Tome un sistema de coordenadas con C como origen y B en el eje x positivo. Entonces, B tiene las coordenadas $(a, 0)$. Sean (x, y) las coordenadas de A. Por (16.5), $x = b\cos\theta$ y $y = b\operatorname{sen}\theta$. Por la fórmula de la distancia (2.1),

$$c = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Por consiguiente,

$$c^2 = (x - a)^2 + y^2 = (b \cos \theta - a)^2 + (b \operatorname{sen} \theta)^2$$
$$= b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad [\text{Álgebra: } (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2].$$
$$= a^2 + b^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) - 2ab \cos \theta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \text{ [por (16.3)].}$$

b) Observe la figura 16.13. Sea D el pie de la perpendicular que va de A al lado BC, y sea $h = \overline{AD}$. Entonces, $\operatorname{sen} B = \overline{AD}\,/\,\overline{AB} = h/c$. Luego, $h = c \operatorname{sen} B$ y así el área de $\Delta ABC = \frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura}) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$ (verifique que esto también se cumple cuando $\angle B$ es obtuso). De igual forma, $\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \text{área de } \Delta ABC = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. Por tanto, $\frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. Al dividir entre $\frac{1}{2}abc$ se obtiene la ley de los senos.

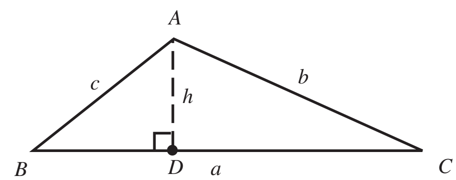


Fig. 16.13

12. Pruebe la identidad (16.6): $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$.

Considérese el caso en que $0 \leq v < u < v + \pi$ (fig. 16.14). Por la ley de cosenos, $BC^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos(\angle BOC)$. Así,

$$(\cos u - \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v)^2 = 2 - 2 \cos (u - v)$$
$$\cos^2 u - 2 \cos u \cos v + \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u - 2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \operatorname{sen}^2 v = 2 - 2 \cos (u - v)$$
$$(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) = 2 - 2 \cos (u - v)$$
$$1 + 1 - 2(\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) = 2 - 2 \cos (u - v)$$
$$\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos (u - v)$$

Todos los casos pueden derivarse del caso anterior.

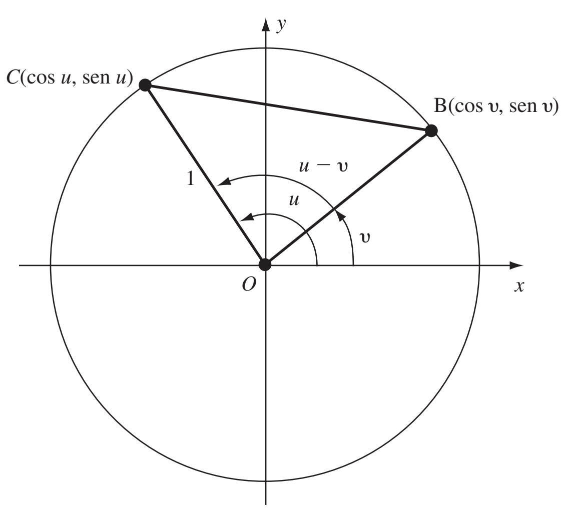


Fig. 16.14

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

13. Convierta las medidas siguientes de radianes en grados: *a*) 4 radianes; *b*) π/10 radianes; *c*) 11π/12 radianes.

Respuestas: *a*) (720/π)°; *b*) 18°; *c*) 165°.

14. Convierta estas medidas de grados en radianes: *a*) 9°; *b*) 75°; *c*) (90/π)°.

Respuestas: *a*) π/20 radianes; *b*) 5π/12 radianes; *c*) 1/2 radián.

15. Remítase a la notación de la figura 16.3. *a*) Si $r = 7$ y $\theta = \pi/14$, halle s; *b*) si $\theta = 30°$ y $s = 2$, halle r.

Respuestas: *a*) π/2; *b*) 12/π.

16. Halle el ángulo de rotación entre 0 y 2π que provoca el mismo efecto que las rotaciones siguientes: *a*) 17π/4; *b*) 375°; *c*) –π/3; *d*) –7π/2.

Respuestas: *a*) π/4; *b*) 15°; *c*) 5π/3; *d*) π/2.

17. Evalúe: *a*) cos (4π/3); *b*) sen (11π/6); *c*) cos 210°; *d*) sen 315°; *e*) cos 75°; *f*) sen 73°.

Respuestas: *a*) $-\frac{1}{2}$; *b*) $-\frac{1}{2}$; *c*) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *d*) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; *e*) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; *f*) aproximadamente 0.9563.

18. Sea θ un ángulo agudo y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$. Evalúe *a*) cos θ; *b*) sen 2θ; *c*) cos 2θ; *d*) cos $\frac{\theta}{2}$.

Respuestas: *a*) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; *b*) $\frac{\sqrt{15}}{8}$; *c*) $\frac{7}{8}$; *d*) $\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{4}}$.

19. Sea θ un ángulo en el tercer cuadrante ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) y $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Halle *a*) sen θ; *b*) cos 2θ; *c*) sen ($\frac{\theta}{2}$).

Respuestas: *a*) $-\frac{3}{5}$; *b*) $\frac{7}{25}$; *c*) $\frac{(3\sqrt{10})}{10}$.

20. En ΔABC, $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 7$ y $\cos(\angle ABC) = \frac{3}{5}$. Halle $\overline{BC}$.

Respuesta: $4\sqrt{2}$.

21. Demuestre la identidad $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$.

22. Derive los valores siguientes: *a*) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b*) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; *c*) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
[*Sugerencias*: *a*) Observe un triángulo rectángulo isósceles ΔABC.

b) Considere un triángulo equilátero ΔABC de lado 1. La recta AD que va de A al punto medio D del lado BC es perpendicular a BC. Por ende, $\overline{BD} = \frac{1}{2}$. Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ABD contiene $\frac{\pi}{3}$ radianes, $\cos(\pi/3) = \overline{BD}/\overline{AB} = (1/2)/1 = \frac{1}{2}$. Por (16.8), sen(π/6) = cos(π/2 – π/6) = cos (π/3).

c) $\operatorname{sen}^2(\pi/3) = 1 - \cos^2(\pi/3) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Entonces, sen $(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y sen $(\pi/3) = \frac{\pi}{2}$ (π/6) = sen (π/3) por (16.8).]

17

Derivación de funciones trigonométricas

Continuidad de cos x y sen x

Es claro que el cos x y el sen x son funciones continuas, es decir, que para todo θ,

$$\lim_{h\to 0} \cos(\theta + h) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(\theta + h) = \operatorname{sen}\theta$$

Para comprobarlo, observe en la figura 17.1 que cuando h se aproxima a 0, el punto C tiende al punto B. Por tanto, la coordenada x de C [que es cos $(\theta + h)$] tiende a la coordenada x de B (que es cos θ), y la coordenada y de C [que es sen $(\theta + h)$] tiende a la coordenada y de B (que es sen θ).

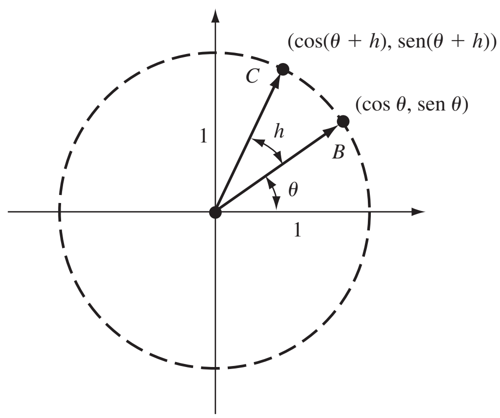


Fig. 17.1

Para hallar la derivada de sen x y cos x se necesitan los límites siguientes:

(17.1) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

(17.2) $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

Para ver una demostración de (17.1), revise el problema 1. A partir de (17.1), (17.2) se deriva de la manera siguiente:

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}.$$

Por tanto,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = 1 \cdot \frac{\operatorname{sen} 0}{1+\cos 0} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 1 \cdot 0 = 0$$

(17.3) $D_x\,(\text{sen}\ x) = \cos x$

(17.4) $D_x\,(\cos x) = -\text{sen}\ x$

Para ver una demostración de (17.3), repase el problema 2. A partir de (17.3) se puede deducir (17.4), con la ayuda de la regla de la cadena y (16.8), de esta manera:

$$D_x(\cos x) = D_x\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(-1) = -\text{sen}\,x$$

Gráfica de sen *x*

Como sen $(x + 2\pi)$ = sen x, sólo se debe construir la gráfica para $0 \le x \le 2\pi$. Al igualar D_x (sen x) = cos x = 0 y observando que cos $x = 0$ en $[0, 2\pi]$ cuando y sólo cuando $x = \pi/2$ o $x = 3\pi/2$, se hallan los números críticos $\pi/2$ y $3\pi/2$. Como $D_x^2(\text{sen x}) = D_x\,(\cos x) = -\text{sen}\ x$, y $-$sen $(\pi/2) = -1 < 0$ y $-$sen $(3\pi/2) = 1 > 0$, el criterio de la segunda derivada implica que existe un máximo relativo en $(\pi/2, 1)$ y un mínimo relativo en $(3\pi/2, -1)$. Puesto que D_x (sen x) = cos x es positivo en el primer y cuarto cuadrantes, sen x es creciente para $0 < x < \pi/2$ y para $3\pi/2 < x < 2\pi$. En virtud de que $D_x^2(\text{sen}x) = -\text{sen}x$ es positivo en el tercer y cuarto cuadrantes, la gráfica es cóncava hacia arriba para $\pi < x < 2\pi$. Así, habrá un punto de inflexión en $(\pi, 0)$, así como en $(0, 0)$ y $(2\pi, 0)$. Parte de la gráfica se muestra en la figura 17.2.

Gráfica de cos *x*

Obsérvese que sen $(\pi/2 + x)$ = sen $(\pi/2)$ cos x + cos $(\pi/2)$ sen x = $1 \cdot$ cos x + $0 \cdot$ sen x = cos x. Así, la gráfica de cos x puede trazarse moviendo la gráfica de sen x en $\pi/2$ unidades a la izquierda, como se muestra en la figura 17.3.

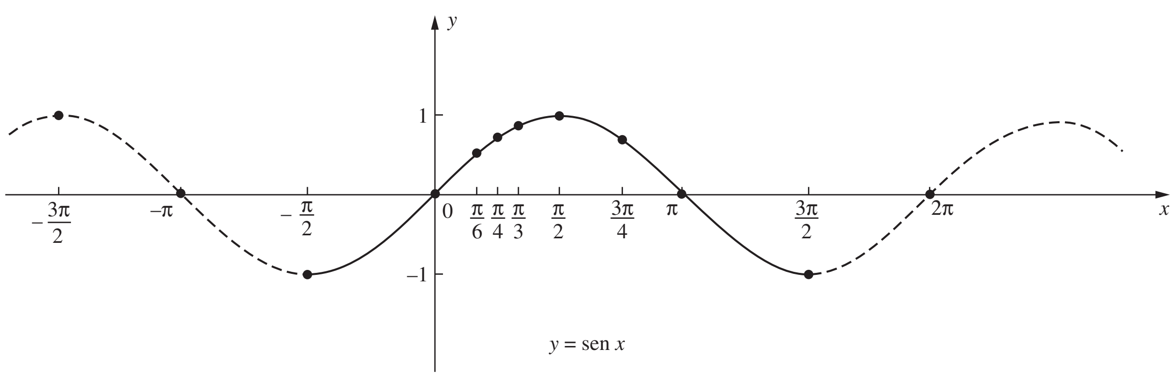


Fig. 17.2

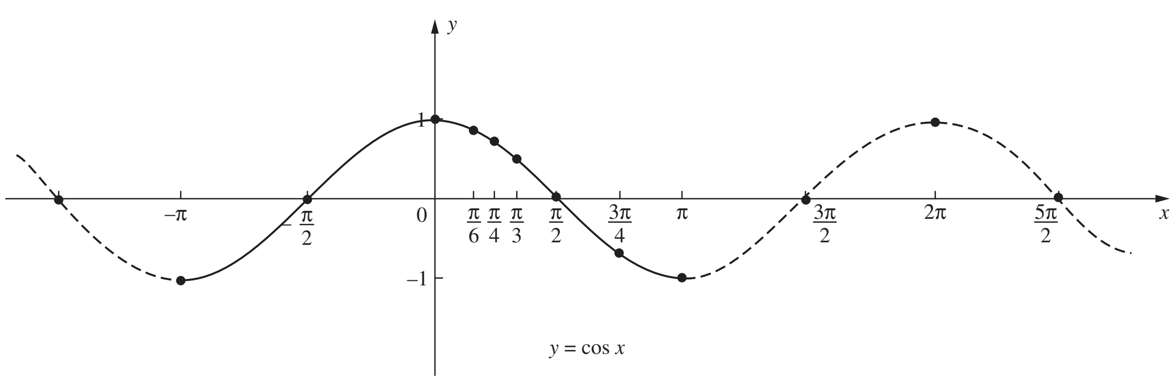


Fig. 17.3

Las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ constan de ondas repetidas, y cada una de ellas se extiende por un intervalo de longitud 2π. La longitud *(periodo)* y la altura *(amplitud)* de las ondas pueden cambiarse al multiplicar el argumento y el valor, respectivamente, por constantes.

EJEMPLO 17.1. Sea $y = \cos 3x$. La gráfica se muestra en la figura 17.4. Como $\cos 3(x + 2\pi/3) = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x$, la función es de periodo $p = 2\pi/3$. Por tanto, la longitud de cada onda es $2\pi/3$. El número de ondas sobre un intervalo de longitud 2π (correspondiente a una rotación completa del rayo que determina el ángulo x) es 3. Este número se denomina la *frecuencia* f de $\cos 3x$. En general, pf = (longitud de cada onda) × (número de ondas en un intervalo de 2π) = 2π. Por ende, $f = 2\pi/p$.

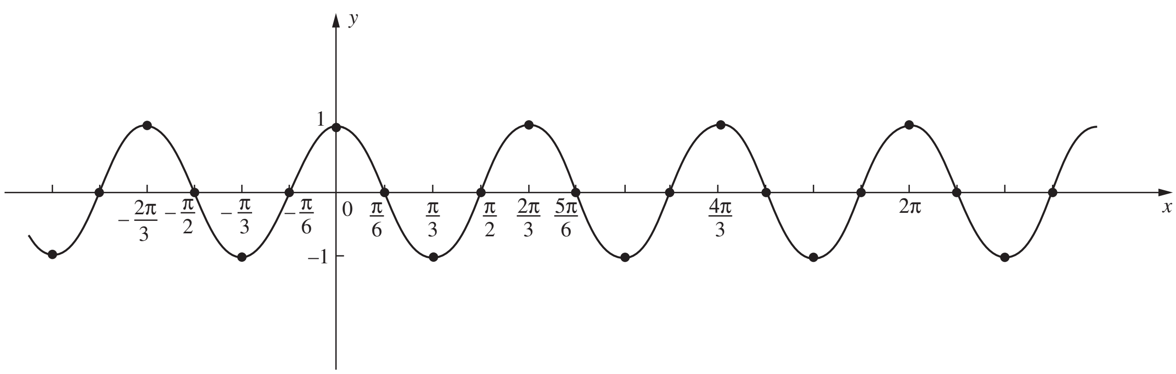


Fig. 17.4

Para toda $b > 0$, las funciones sen bx y $\cos bx$ tienen una frecuencia b y un periodo $2\pi/b$.

EJEMPLO 17.2. $y = 2 \text{ sen } x$. La gráfica de esta función (fig. 17.5) se obtiene de la de $y = \text{sen } x$ al duplicar los valores de y. El periodo y la frecuencia son similares a los de $y = \text{sen } x$, es decir, $p = 2\pi$ y $f = 1$. La amplitud, es decir, la altura máxima de cada onda, es 2.

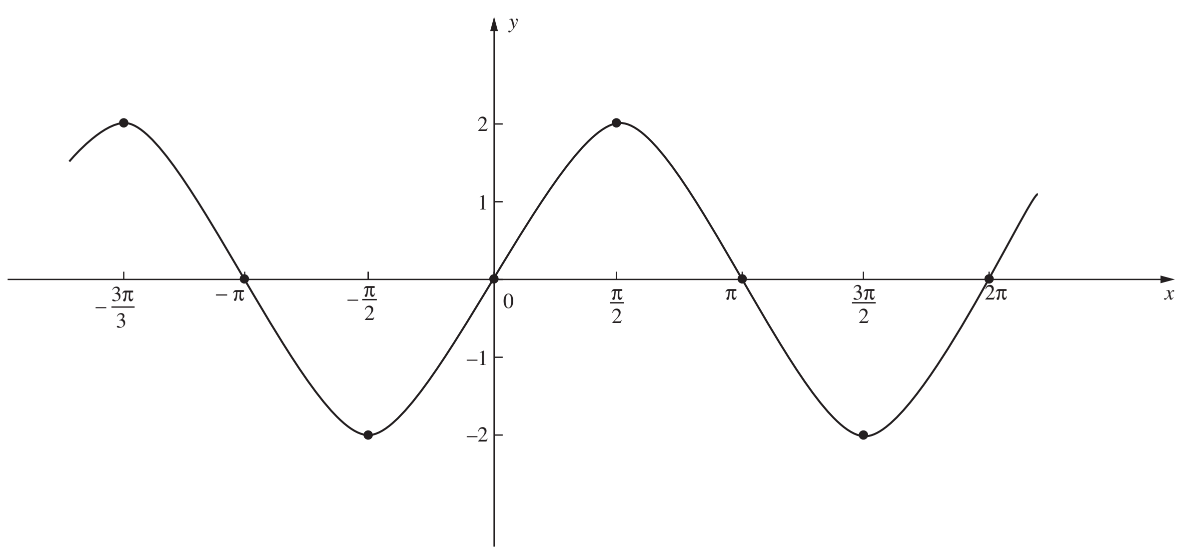


Fig. 17.5

EJEMPLO 17.3 En general, si $b > 0$, entonces $y = A \text{ sen } bx$ y $y = A \cos bx$ tienen periodo $2\pi/b$, frecuencia b y amplitud $|A|$. En la figura 17.6 se presenta la gráfica de $y = 1.5 \text{ sen } 4x$.

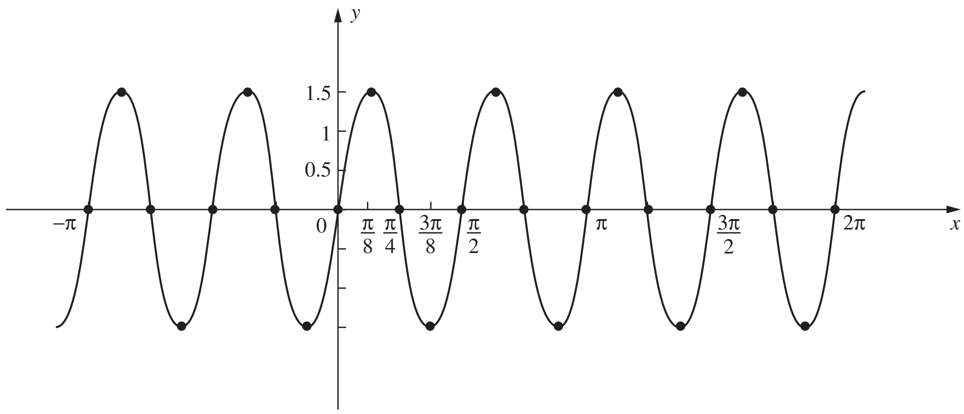


Fig. 17.6

Otras funciones trigonométricas

Tangente $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Cotangente $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\tan x}$

Secante $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Cosecante $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Derivadas

(17.5) $D_x(\tan x) = \sec^2 x$

(17.6) $D_x(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(17.7) $D_x(\sec x) = \tan x \sec x$

(17.8) $D_x(\operatorname{cosec} x) = -\cot x \operatorname{cosec} x$

Para obtener las demostraciones, repase el problema 3.

Otras relaciones

(17.9) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

(17.10) $\tan(x + \pi) = \tan x$ y $\cot(x + \pi) = \cot x$

Entonces, $\tan x$ y $\cot x$ tienen un periodo π. Repase el problema 4.

(17.11) $\tan(-x) = -\tan x$ y $\cot(-x) = -\cot x$

$$\tan(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x, \text{ y de igual forma para } \cot x$$

Gráfica de $y = \tan x$

Como $\tan x$ tiene un periodo π, basta determinar la gráfica en $-\pi/2$, $\pi/2$). Puesto que $\tan(-x) = -\tan x$, hay que trazar sólo la gráfica en $(0, \pi/2)$ y luego reflejarla en el origen. Como $\tan x = (\text{sen } x)/(\cos x)$, habrá asíntotas verticales en $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Por (17.5), $D_x(\tan x) > 0$ y, por tanto, $\tan x$ es creciente.

$$D_x^2(\tan x) = D_x(\sec^2 x) = 2\sec x(\tan x \sec x) = 2\tan x \sec^2 x.$$

Así, la gráfica es cóncava hacia arriba cuando $\tan x > 0$, es decir, para $0 < x < \pi/2$, y existe un punto de inflexión en $(0, 0)$. Algunos valores especiales de $\tan x$ se indican en la tabla 17.1 y la gráfica aparece en la figura 17.7.

Para un ángulo agudo θ de un rectángulo,

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \div \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

Tabla 17.1

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \sim 0.58$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3} \sim 1.73$

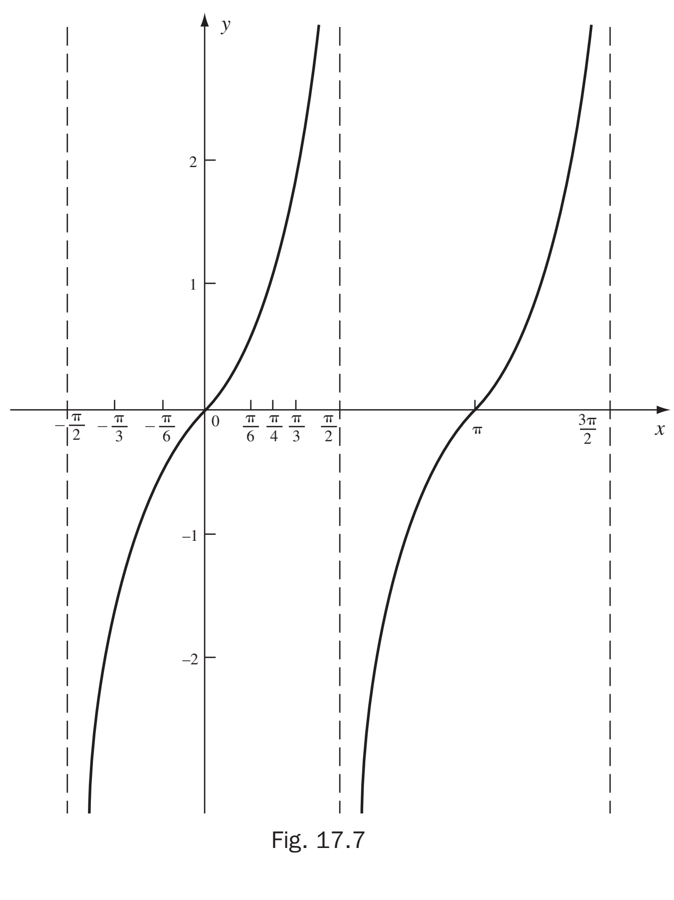


Fig. 17.7

Gráfica de $y = \sec x$

Como $\sec x = 1/(\cos x)$, la gráfica tendrá una asíntota vertical $x = x_0$ para todo x_0 tal que $\cos x_0 = 0$, es decir, para $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es cualquier entero. Igual que $\cos x$, $\sec x$ tiene un periodo de 2π, y se puede centrar la atención en $(-\pi, \pi)$. Nótese que $|\sec x| \geq 1$, como $|\cos x| \leq 1$. Al ser $D_x(\sec x) = \tan x \sec x = 0$, se hallan los números críticos en $x = 0$ y $x = \pi$, y el criterio de la primera derivada establece que existe un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = \pi$.

Como

$$D_x^2(\sec x) = D_x(\tan x \sec x) = \tan x(\tan x \sec x) + \sec x(\sec^2 x) = \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x)$$

no hay puntos de inflexión y la curva es cóncava hacia arriba para $-\pi/2 < x < \pi/2$. La gráfica se muestra en la figura 17.8.

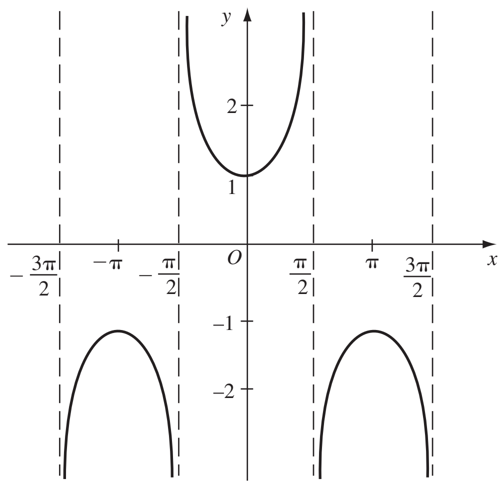


Fig. 17.8

Ángulos entre curvas

Por el *ángulo de inclinación* de una recta no vertical L se entiende el ángulo α más pequeño que se forma en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo a la recta (fig. 17.9). Si m es la pendiente de L, entonces $m = \tan \alpha$. [Se comprueba en la figura 17.10, donde se considera que la recta L' es paralela a L y, por consiguiente, tiene la misma pendiente m.

Entonces, $m = (\text{sen } \alpha - 0)/(\cos \alpha - 0) = (\text{sen } \alpha)/(\cos \alpha) = \tan \alpha$.]

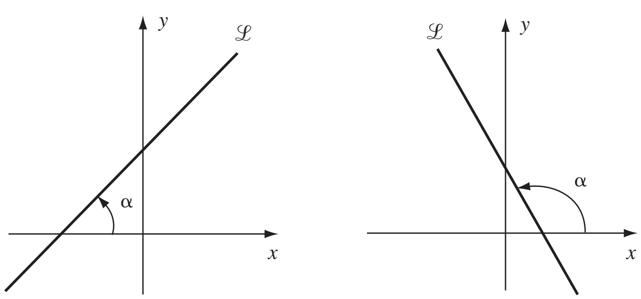


Fig. 17.9

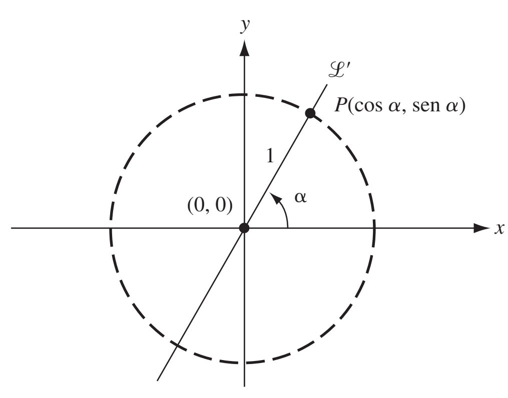


Fig. 17.10

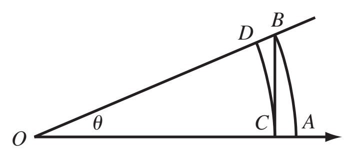
Por un *ángulo entre dos curvas en un punto de intersección P* se entiende el más pequeño de los dos ángulos comprendidos entre las tangentes a las curvas en P (repase los problemas 17 y 18).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Pruebe (17.1): $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

Como $\frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, se debe considerar sólo $\theta > 0$. En la figura 17.11, sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo central pequeño positivo de un círculo de radio $OA = OB = 1$. Sea C el pie de la perpendicular trazada desde B hasta OA. Obsérseve que $OC = \cos\,\theta$ y $CB = \operatorname{sen}\,\theta$. Sea D la intersección de OB con el arco de un círculo con centro en O y radio OC. Entonces,

$$\text{Área del sector } COD \leq \text{área de } \Delta COB \leq \text{área del sector } AOB$$



$OC = \cos\theta$, $CB = \operatorname{sen}\theta$

Fig. 17.11

Nótese que el área del sector $COD = \frac{1}{2}\theta\cos^2\theta$ y el área del sector $AOB = \frac{1}{2}\theta$. [Si W es el área de un sector determinado por un ángulo central θ de un círculo de radio r, entonces W/(área del círculo) $= \theta/2\pi$. Así, $W/\pi r^2 = \theta/2\pi$ y, por tanto, $W = \frac{1}{2}\theta r^2$.]

Entonces,

$$\frac{1}{2}\,\theta\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\cos \leq \frac{1}{2}\,\theta$$

Al dividir entre $\frac{1}{2}\theta\cos\theta > 0$ se obtiene

$$\cos\theta \leq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$$

Cuando θ tiende a 0^+, $\cos\,\theta \to 1$, $1/(\cos\,\theta) \to 1$. Por tanto,

$$1 \leq \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1 \quad \text{Así} \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

2. Pruebe (17.3): $D_x\,(\operatorname{sen}\,x) = \cos\,x$.

Aquí se utilizarán (17.1) y (17.2).

Sea $y = \operatorname{sen}\,x$. Entonces, $y + \Delta y = \operatorname{sen}\,(x + \Delta x)$ y

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen}\,x = \cos\,x\,\operatorname{sen}\,\Delta x + \operatorname{sen}\,x\,\cos\,\Delta x - \operatorname{sen}\,x$$

$$= \cos\,x\,\operatorname{sen}\,\Delta x + \operatorname{sen}\,x\,(\cos\,\Delta x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos x\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x} + \operatorname{sen} x\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}\right)$$

$$= (\cos x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x} + (\operatorname{sen} x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}$$

$$= (\cos\,x)(1) + (\operatorname{sen}\,x)(0) = \cos\,x$$

3. Demuestre *a)* $D_x\,(\tan\,x) = \sec^2 x$ (17.5); *b)* $D_x\,(\sec\,x) = \tan\,x\,\sec\,x$ (17.7).

a) $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

b) Derivando ambos lados de (17.9), $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, mediante la regla de la cadena se obtiene

$$2 \tan x \sec^2 x = 2 \sec x\, D_x(\sec x).$$

Por tanto, $D_x (\sec x) = \tan x \sec x$.

4. Pruebe (17.10): $\tan(x + \pi) = \tan x$.

$$\text{sen}\,(x + \pi) = \text{sen}\, x \cos \pi + \cos x\, \text{sen}\, \pi = -\text{sen}\, x$$
$$\cos (x + \pi) = \cos x \cos \pi - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, \pi = -\cos x$$

Entonces,

$$\tan(x+\pi) = \frac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\text{sen} x}{-\cos x} = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \tan x$$

5. Deduzca $\tan (u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$

$$\tan (u - v) = \frac{\text{sen}\,(u-v)}{\cos\,(u-v)} = \frac{\text{sen}\, u \cos v - \cos u\, \text{sen}\, v}{\cos u \cos v + \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\, u}{\cos u} - \dfrac{\text{sen}\, v}{\cos v}}{1 + \dfrac{\text{sen}\, u}{\cos u}\dfrac{\text{sen}\, v}{\cos v}} \text{ (divida el numerador y el denominador entre } \cos u \cos v$$

$$= \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

6. Calcule las derivadas de las funciones siguientes: *a*) $2 \cos 7x$; *b*) $\text{sen}^3 (2x)$; *c*) $\tan (5x)$; *d*) $\sec (1/x)$.

a) $D_x (2 \cos 7x) = 2(-\text{sen}\, 7x)(7) = -14\, \text{sen}\, 7x$

b) $D_x (\text{sen}^3 (2x)) = 3(\text{sen}^2 (2x))(\cos (2x))(2) = 6\, \text{sen}^2 (2x) \cos (2x)$

c) $D_x (\tan (5x)) = (\sec^2 (5x))(5) = 5 \sec^2 (5x)$

d) $D_x (\sec (1/x)) = \tan (1/x) \sec (1/x)(-1/x^2) = -(1/x^2) \tan (1/x) \sec (1/x)$

7. Halle todas las soluciones de la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$.

Al resolver $(\frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$, se observa que los únicos puntos en el círculo unitario con abscisa $\frac{1}{2}$ son $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Los ángulos centrales correspondientes son $\pi/3$ y $5\pi/3$. Éstas son, entonces, soluciones en $[0, 2\pi]$. Como cos x tiene periodo 2π, las soluciones son $\pi/3 + 2\pi n$ y $5\pi/3 + 2\pi n$, donde n es cualquier número entero.

8. Calcule los límites siguientes: *a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{2x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, 7x}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{2}\dfrac{\text{sen}\, 5x}{5x} = \dfrac{5}{2} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{sen}\, u}{u} = \frac{5}{2}(1) = \frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, 7x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x} \cdot \dfrac{7x}{\text{sen}\, 7x} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{7} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{sen}\, u}{u} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\text{sen}\, u}$

$= \dfrac{3}{7}(1)(1) = \dfrac{3}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$= (1)(\dfrac{1}{1}) = 1$

9. Sea $y = x\, \text{sen}\, x$. Halle y'''.

$$y' = x \cos x + \text{sen}\, x$$
$$y'' = x(-\text{sen}\, x) + \cos x + \cos x = -x\, \text{sen}\, x + 2 \cos x$$
$$Y''' = -x \cos x - \text{sen}\, x - 2\, \text{sen}\, x = -x \cos x - 3\, \text{sen}\, x$$

10. Sea $y = \tan^2(3x-2)$. Halle y''.

$y' = 2\tan(3x-2)\sec^2(3x-2)\cdot 3 = 6\tan(3x-2)\sec^2(3x-2)$

$y'' = 6[\tan(3x-2)\cdot 2\sec(3x-2)\cdot\sec(3x-2)\tan(3x-2)\cdot 3 + \sec^2(3x-2)\sec^2(3x-2)\cdot 3]$

$= 36\tan^2(3x-2)\sec^2(3x-2) + 18\sec^4(3x-2)$

11. Sea $y = \operatorname{sen}(x+y)$. Halle y'.

$$y' = \cos(x+y)\cdot(1+y') = \cos(x+y) + \cos(x+y)\cdot(y').$$

Al despejar y'

$$y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

12. Sea $\operatorname{sen} y + \cos x = 1$. Halle y''.

$$\cos y\cdot y' - \operatorname{sen} x = 0. \quad \text{Entonces} \quad y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos y}$$

$$y'' = \frac{\cos y\cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y)\cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\cdot y'}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y(\operatorname{sen} x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$$

13. Un piloto se dirige a un sitio en la Tierra frente a él. Si el avión, a 2 millas de altura, vuela a 240 millas/hora (mi/h), ¿cuán rápido debe girar el visor cuando el ángulo entre la trayectoria del avión y la línea de la visual es de 30°? (Fig. 17.12.)

$$\frac{dx}{dt} = -240\text{ mi/h} \quad \text{y} \quad x = 2\cot\theta$$

De la última ecuación, $\frac{dx}{dt} = -2\operatorname{cosec}^2\theta\frac{d\theta}{dt}$. Así, $-240 = -2(4)\frac{d\theta}{dt}$ cuando $\theta = 30°$

$$\frac{d\theta}{dt} = 30\text{ rad/h} = \frac{3}{2\pi}\text{ grados/s}$$

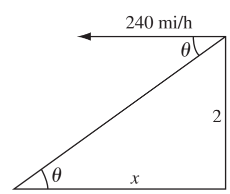


Fig. 17.12

14. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

$f(x)$ tiene un periodo de 2π. Por tanto, se debe considerar sólo el intervalo $[0, 2\pi]$. $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$, y $f''(x) = -(\operatorname{sen} x + \cos x)$. Los números críticos ocurren donde $\cos x = \operatorname{sen} x$ o $\tan x = 1$, $x = \pi/4$ o $x = 5\pi/4$.

$f''(\pi/4) = -(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} < 0$. Entonces, existe un máximo relativo en, $x = \pi/4$, $y = \sqrt{2}$.

$f''(5\pi/4) = -(-\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} > 0$. Es decir, se presenta un mínimo relativo en $x = 5\pi/4$, $y = -\sqrt{2}$.

Los puntos de inflexión ocurren cuando $f''(x) = -(\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$, $\operatorname{sen} x = -\cos x$, $\tan x = -1$, $x = 3\pi/4$ o $x = 7\pi/4$, $y = 0$ (fig. 17.13).

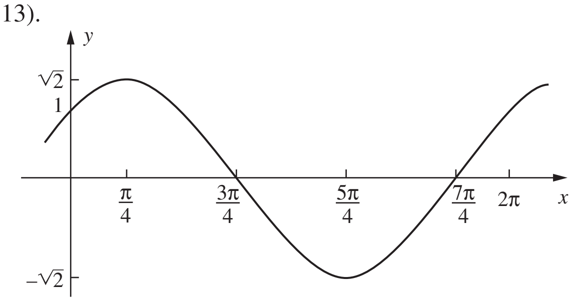


Fig. 17.13

15. Trace la gráfica de $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

$$f'(x) = -\text{sen } x - 2(\cos x)(-\text{sen } x) = (\text{sen } x)(2\cos x - 1)$$

y

$$f''(x) = (\text{sen } x)(-2\,\text{sen } x) + (2\cos x - 1)(\cos x)$$
$$= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - \cos x = 4\cos^2 x - \cos x - 2$$

Como f tiene un periodo 2π sólo debe considerarse $[-\pi, \pi]$, y como f es par, únicamente debe prestarse atención a $[0, \pi]$. Los números críticos son las soluciones en $[0, \pi]$ de $\text{sen } x = 0$ o $2\cos x - 1 = 0$. La primera ecuación tiene soluciones 0 y π, y la segunda equivale a $\cos x = \frac{1}{2}$, la cual tiene la solución $\pi/3$. $f''(0) = 1 > 0$; entonces, hay un mínimo relativo en (0, 0). $f''(\pi) = 3 > 0$; luego, existe un mínimo relativo en $(\pi, -2)$. $f''\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2} < 0$; por tanto, hay un máximo relativo en $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$. Hay puntos de inflexión entre 0 y $\frac{\pi}{3}$ y entre $\frac{\pi}{3}$ y π que pueden hallarse mediante la fórmula cuadrática para resolver $4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ para $\cos x$ utilizando después una tablas de cosenos o una calculadora para aproximar x (fig. 17.14).

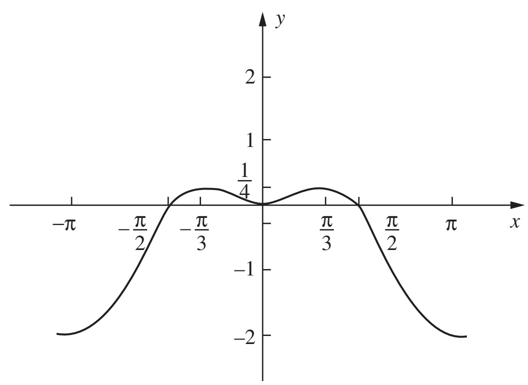


Fig. 17.14

16. Halle los extremos absolutos de $f(x) = \text{sen } x + x$ en $[0, 2\pi]$.

$f'(x) = \cos x + 1$. Sea $f'(x) = 0$, con lo que se obtiene $\cos x = -1$ y, por tanto, el único número crítico en $[0, 2\pi]$ es $x = \pi$. Se tabula π y los dos puntos extremos 0 y 2π y se calculan los valores de $f(x)$:

x	$f(x)$
π	π
0	0
2π	2π

Por consiguiente, el máximo absoluto 2π se obtiene en $x = 2\pi$, y el mínimo absoluto 0 en $x = 0$.

17. Halle el ángulo en el que las rectas $\mathscr{L}_1\colon y = x + 1$ y $\mathscr{L}_2\colon y = -3x + 5$ se cortan.

Sean α_1 y α_2 los ángulos de inclinación de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ (fig. 17.15), y sean m_1 y m_2 las pendientes respectivas. Entonces, $\tan \alpha_1 = m_1 = 1$ y $\tan \alpha_2 = m_2 = -3$. $\alpha_2 - \alpha_1$ es el ángulo de intersección. Ahora, por el problema 5,

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3-1}{1+(-3)(1)}$$

$$= \frac{-4}{-2} = 2$$

De una calculadora graficadora se obtiene $\alpha_2 - \alpha_1 \sim 63.4°$.

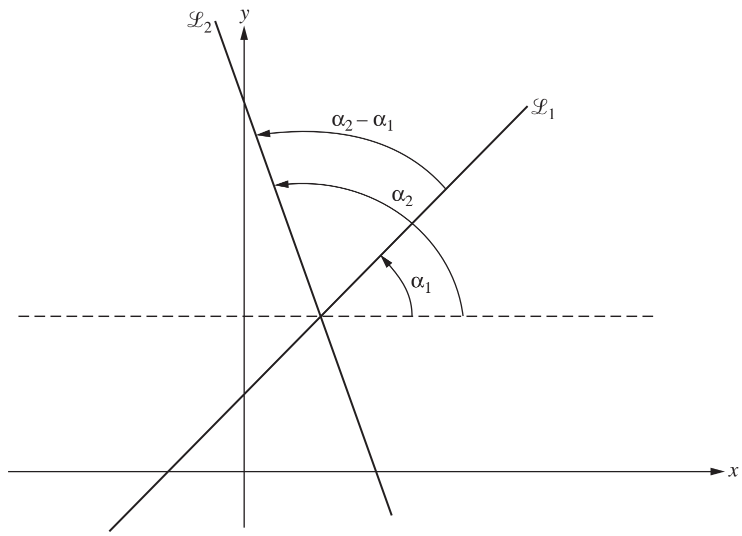


Fig. 17.15

18. Halle el ángulo α entre las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ en (1, 1).

Como $D_x(x^2) = 2x$ y $D_x(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, las pendientes en (1, 1) son 2 y $\frac{1}{2}$. Por tanto, $\tan\alpha = \dfrac{2-(\frac{1}{2})}{1+2(\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Entonces, mediante una calculadora graficadora se aproxima α a 36.9°.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

19. Demuestre que $\cot(x + \pi) = \cot x$, $\sec(x + 2\pi) = \sec x$ y $\operatorname{cosec}(x + 2\pi) = \operatorname{cosec} x$.

20. Halle el periodo p, la frecuencia f y la amplitud A de 5 sen $(x/3)$ y trace su gráfica.

Respuesta: $p = 6\pi, f = \frac{1}{3}, A = 5$

21. Encuentre todas las soluciones de $\cos x = 0$.

Respuesta: $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ para todo entero en n.

22. Halle todas las soluciones de $\tan x = 1$

Respuesta: $x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$ para todo entero en n.

23. Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$.

Respuesta: véase la figura 17.16.

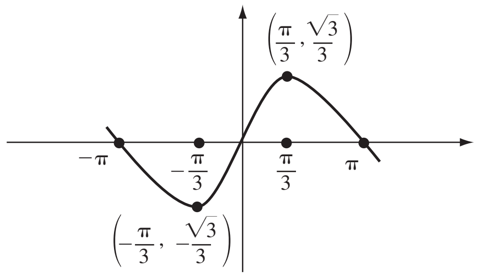


Fig. 17.16.

24. Deduzca la fórmula $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

25. Halle y'.

a) $y = \text{sen } 3x + \cos 2x$ — *Respuesta:* $y' = 3 \cos 3x - 2 \text{ sen } 2x$
b) $y = \tan (x^2)$ — *Respuesta:* $y' = 2x \sec^2 (x^2)$
c) $y = \tan^2 x$ — *Respuesta:* $y' = 2 \tan x \sec^2 x$
d) $y = \cot (1 - 2x^2)$ — *Respuesta:* $y' = 4x \operatorname{cosec}^2(1 - 2x^2)$
e) $y = x^2 \text{ sen } x$ — *Respuesta*: $y' = x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x$
f) $y = \dfrac{\cos x}{x}$ — *Respuesta:* $y' = \dfrac{-x\text{sen } x - \cos x}{x^2}$

26. Evalúe:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3(2x)}{x\text{sen}^2(3x)}$

Respuestas: *a*) $\dfrac{a}{b}$; *b*) $\dfrac{8}{9}$

27. Si $x = A$ sen $kt + B \cos kt$, demuestre que $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$.

28. *a*) Si $y = 3$ sen $(2x + 3)$, demuestre que $y'' + 4y = 0$. *b*) Si $y = \text{sen } x + 2 \cos x$, demuestre que $y''' + y'' + y' = 0$.

29. *i*) Analice y dibuje lo siguiente en el intervalo $0 \le x < 2\pi$. *ii*) (CG) Comprueba las respuestas del inciso anterior con una graficadora.

a) $y = \frac{1}{2}\text{sen } 2x$
b) $y = \cos^2 x - \cos x$
c) $y = x - 2 \text{ sen } x$
d) $y = \text{sen } x(1 + \cos x)$
e) $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

Respuestas:
a) máximo en $x = \pi/4, 5\pi/4$; mínimo en $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; punto de inflexión en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.
b) máximo en $x = 0, \pi$; mínimo en $x = \pi/3, 5\pi/3$; punto de inflexión en $x = 32° 32', 126° 23', 233° 37', 327° 28'$.
c) máximo en $x = 5\pi/3$; mínimo en $x = \pi/3$; punto de inflexión en $x = 0, \pi$.
d) máximo en $x = \pi/3$; mínimo en $x = 5\pi/3$; punto de inflexión en $x = 0, \pi, 104° 29', 255° 31'$.
e) máximo en $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; mínimo en $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$; punto de inflexión en $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$.

30. Si el ángulo de elevación del Sol es 45° y decrece a $\frac{1}{4}$ radianes por hora, ¿a qué velocidad se alarga la sombra proyectada en el suelo por un poste de 50 pies de altura?

Respuesta: 25 pies/hora.

31. Use la derivación implícita para hallar y': *a*) $\tan y = x^2$; *b*) $\cos(xy) = 2y$.

Respuestas: *a*) $y'' = 2x \cos^2 y$; *b*) $y' = -\dfrac{y \operatorname{sen}(xy)}{2 + x \operatorname{sen}(xy)}$.

18

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones seno y coseno, además de otras funciones trigonométricas, no son uno a uno, por lo que no tienen funciones inversas. Sin embargo, es posible restringir el dominio de las funciones trigonométricas de forma tal que se vuelvan uno a uno.

En la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ (fig. 17.2) se muestra que en el intervalo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ la restricción de sen x es uno a uno. De esta manera, se define $\text{sen}^{-1}x$ como la función inversa correspondiente. El dominio de dicha función es $[-1, 1]$, el cual es el rango de sen x. Así,

1. $\text{sen}^{-1}(x) = y$ si y sólo si $\text{sen}\, y = x$.
2. El dominio de $\text{sen}^{-1} x$ es $[-1, 1]$.
3. El rango de $\text{sen}^{-1} x$ es $[-\pi/2, \pi/2]$.

La gráfica de $\text{sen}^{-1} x$ se obtiene de la gráfica de sen x por reflexión en la recta $y = x$ (fig. 18.1).

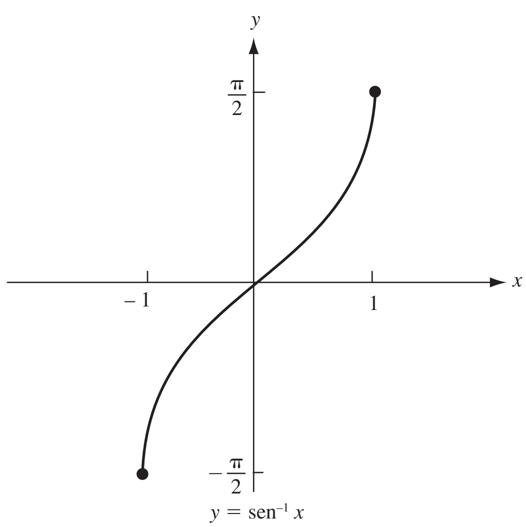


Fig. 18.1

EJEMPLO 18.1. En general, $\text{sen}^{-1} x$ = el número y en $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\text{sen}\, y = x$. En particular, $\text{sen}^{-1} 0 = 0$, $\text{sen}^{-1} 1 = \pi/2$, $\text{sen}^{-1}(-1) = -\pi/2$, $\text{sen}^{-1}(\frac{1}{2}) = \pi/6$, $\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$. También, $\text{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = \pi/6$. En general, $\text{sen}^{-1}(-x) = -\text{sen}^{-1} x$, ya que $\text{sen}(-y) = -\text{sen}\, y$.

La derivada de $\text{sen}^{-1} x$

Sea $y = \text{sen}^{-1} x$. Como sen x es derivable, $\text{sen}^{-1} x$ es derivable por el teorema 10.2. Ahora, $\text{sen}\, y = x$ y, entonces, por derivación implícita, $(\cos y)y' = 1$. Por tanto, $y' = 1/(\cos y)$. Pero $\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y = 1 - x^2$. Así, $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Por definición de $\text{sen}^{-1} x$, y está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y por consiguiente, $\cos y \ge 0$.

Entonces, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Por ende, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Así, se ha demostrado que

(18.1) $\quad D_x(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Función coseno inversa

Si se restringe el dominio de $\cos x$ a $[0, \pi]$, se obtiene una función uno a uno (con rango $[-1, 1]$). Por ello, es posible definir $\cos^{-1} x$ como la inversa de esa restricción.

1. $\cos^{-1}(x) = y$ si y sólo si $\cos y = x$.
2. El dominio de $\cos^{-1} x$ es $[-1, 1]$.
3. El rango de $\cos^{-1} x$ es $[0, \pi]$.

La gráfica de $\cos^{-1} x$ se muestra en la figura 18.2 y se obtiene mediante reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en la recta $y = x$.

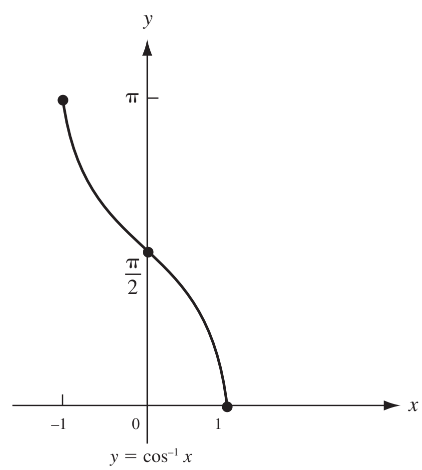


Fig. 18.2

Un argumento similar al anterior para (18.1) demuestra que

(18.2) $\quad D_x(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

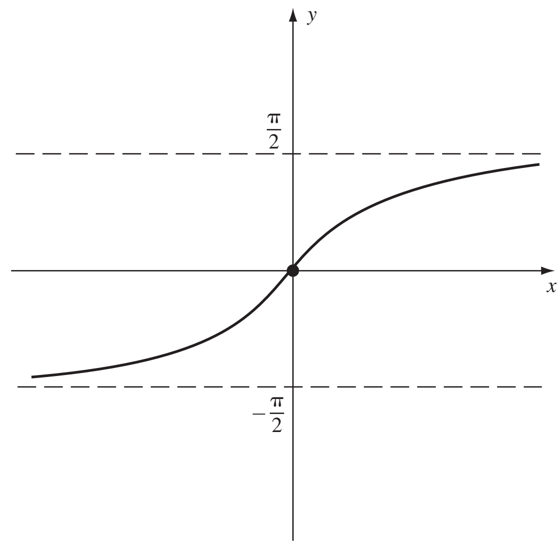
Función tangente inversa

Al restringir el dominio de $\tan x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ se obtiene una función uno a uno (con rango en el conjunto de todos los números reales), cuya inversa es $\tan^{-1} x$. Entonces:

1. $\tan^{-1}(x) = y$ si y sólo si $\tan y = x$.
2. El dominio de $\tan^{-1} x$ es $(-\infty, +\infty)$.
3. El rango de $\tan^{-1} x$ es $(-\pi/2, \pi/2)$.

EJEMPLO 18.2. En general, $\tan^{-1} x$ = al número y en $(-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan y = x$. En particular, $\tan^{-1} 0 = 0$, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$, $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3$, $\tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = \pi/6$. Como $\tan(-x) = -\tan x$, se sigue que $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$. Por ejemplo, $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$.

La gráfica de $y = \tan^{-1} x$ aparece en la figura 18.3. Se obtiene de la gráfica de $y = \tan x$ reflejada en la recta $y = x$. Nótese que $y = \pi/2$ es una asíntota horizontal a la derecha y $y = -\pi/2$ es una asíntota horizontal a la izquierda.



$y = \tan^{-1} x$

Fig. 18.3

(18.3) $D_x(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

De hecho, si $y = \tan^{-1} x$, entonces $\tan y = x$ y, por derivación implícita, $(\sec^2 y)y' = 1$. Entonces, $y' = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

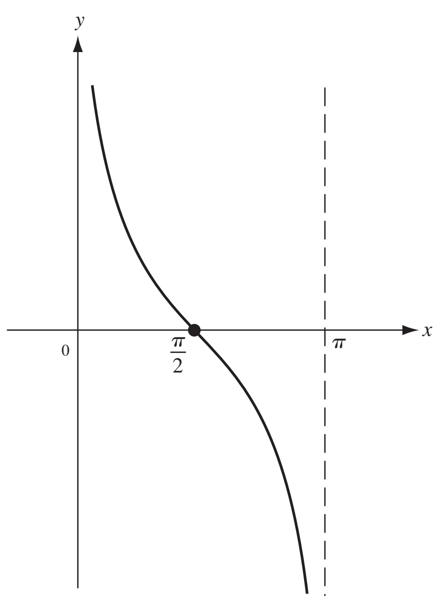
Las inversas de $\cot x$, $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ se definen en forma similar.

$\cot^{-1} x$. Se restringe $\cot x$ a $(0, \pi)$. Entonces, el dominio de $\cot^{-1} x$ es $(-\infty, +\infty)$ y

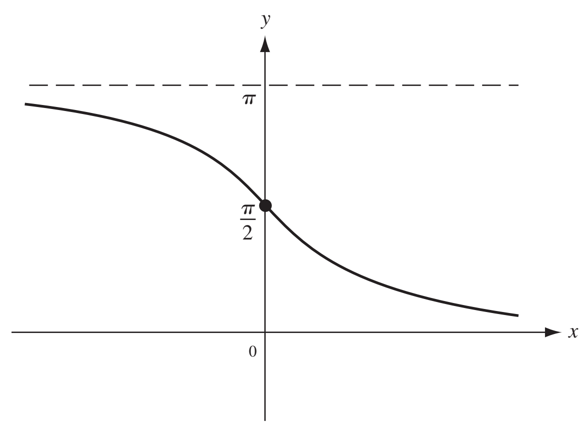
$$y = \cot^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \cot y = x$$

(18.4) $D_x(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

La demostración es similar a la de (18.3). Las gráficas de $\cot x$ y $\cot^{-1} x$ se muestran en la figura 18.4.



a) $y = \cot x$



b) $y = \cot^{-1} x$

Fig. 18.4

sec^{-1}x. Se restringe sec x a la unión de $[0, \pi/2)$ y $[\pi, 3\pi/2)$. Entonces el dominio de $\sec^{-1} x$ consta de toda y tal que $|y| \geq 1$ y

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \sec y = x$$

(18.5) $D_x(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Consulta la demostración en el problema 1. La gráfica de sec x aparece en la figura 17.8, y la de $\sec^{-1} x$ en la figura 18.5.

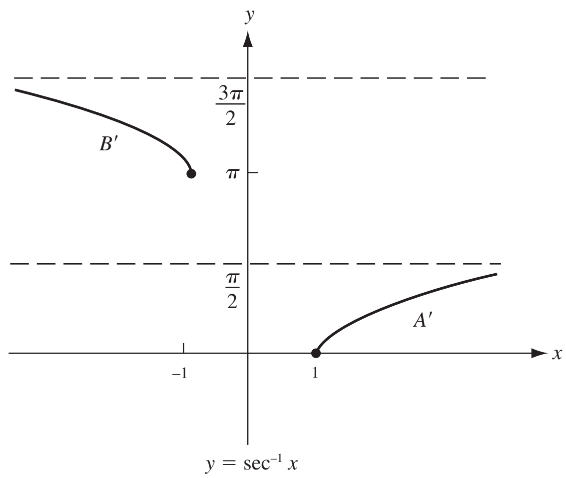


Fig. 18.5

cosec^{-1}x. Se restringe cosec x a la unión de $(0, \pi/2]$ y $(\pi, 3\pi/2]$. Entonces el dominio de $\text{cosec}^{-1} x$ consta de toda y tal que $|y| \geq 1$ y

$$y = \text{cosec}^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad \text{cosec}\, y = x$$

(18.6) $D_x(\text{cosec}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

La demostración es similar a la de (18.5). Las gráficas de cosec x y $\text{cosec}^{-1} x$ se muestran en la figura 18.6.

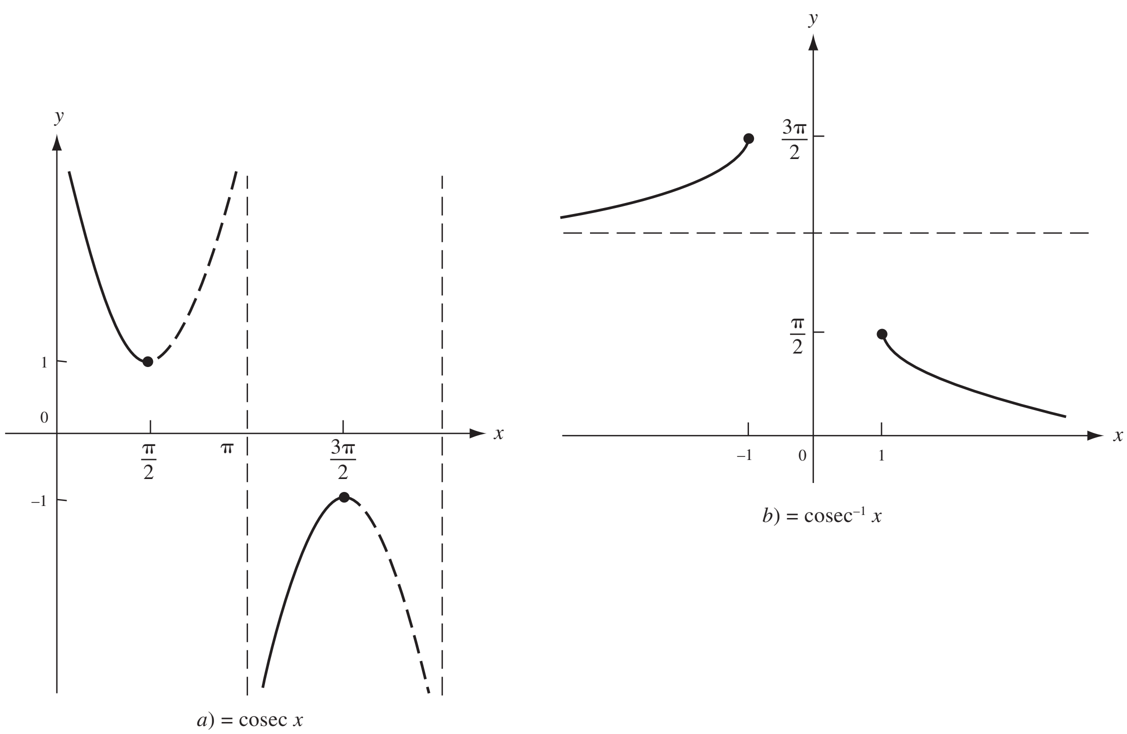


Fig. 18.6

Las selecciones aparentemente arbitrarias de los dominios para las funciones trigonométricas inversas se hicieron a fin de obtener fórmulas simples para las derivadas.

No debe confundirse la notación para las funciones trigonométricas inversas con notación exponencial. Por ejemplo, $\operatorname{sen}^{-1} x$ no es lo mismo que $(\operatorname{sen} x)^{-1}$. Para evitar la posibilidad de tal confusión, se puede utilizar la siguiente notación alternativa en las funciones trigonométricas inversas:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad \operatorname{arc\,cos} x = \cos^{-1} x, \quad \text{etcétera.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre (18.5): $D_x(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Sea $y = \sec^{-1} x$. Entonces, $\sec y = x$ y, por derivación implícita, $\tan y \sec y\,(y') = 1$. Ahora, $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 = x^2 - 1$; así, $\tan y = \pm\sqrt{x^2-1}$. Por definición de $\sec^{-1} x$, y está en $[0, \pi/2)$ o en $[\pi, 3\pi/2)$ y, por consiguiente, $\tan y$ es positiva. Por ende, $\tan y = \sqrt{x^2-1}$. Entonces,

$$y' = \frac{1}{\tan y \sec y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

En los problemas 2 a 8, halle la primera derivada y'.

2. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x-3)$.

Por (18.1) y la regla de la cadena,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}D_x(2x-3) = \frac{2}{\sqrt{12x-4x^2-8}} = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

3. $y = \cos^{-1}(x^2)$.

Por (18.2) y la regla de la cadena, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}D_x(x)^2 = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $y = \tan^{-1}(3x^2)$.

Por (18.3) y la regla de la cadena, $y' = -\dfrac{1}{1+(3x^2)^2}D_x(3x^2) = -\dfrac{6x}{1+9x^4}$

5. $y = \cot^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Por (18.4) y la regla de la cadena,

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}D_x\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\times\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

$$y' = x[\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x)] + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

7. $y = x\ \operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$ para $0 < x < 1$.

$$y' = x\left[\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\right] + \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

8. $y = \dfrac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\tan x\right)$.

$$y' = \frac{1}{ab}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\tan x\right)^2} D_x\left(\frac{b}{a}\tan x\right)\right] = \frac{1}{ab}\,\frac{a^2}{a^2+b^2\tan^2 x}\,\frac{b}{a}\sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x}$$

$$= \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

9. Sea y^2 sen $x + y = \tan^{-1} x$. Halle y'.

Por derivación implícita, $2yy'\operatorname{sen} x + y^2\cos x + y' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Por tanto,

$y'(2y\operatorname{sen} x + 1) = \dfrac{1}{1+x^2} - y^2\cos x$ y entonces,

$$y' = \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{1+x^2\ (2y\operatorname{sen} x + 1)}$$

10. Evalúe *a*) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{2}/2)$; *b*) $\cos^{-1}(1)$; *c*) $\cos^{-1}(0)$; *d*) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$; *e*) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$; *f*) $\sec^{-1}(2)$; *g*) $\sec^{-1}(-2)$.

a) $\operatorname{sen}^{-1}(-\sqrt{2}/2) = -\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{2}/2 = -\pi/4$

b) $\cos^{-1}(1) = 0$, puesto que $\cos(0) = 1$ y 0 está en $[0, \pi]$

c) $\cos^{-1}(0) = \pi/2$, ya que $\cos(\pi/2) = 0$ y $(\pi/2)$ está en $[0, \pi]$

d) $\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \pi/3$

e) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\pi/3$

f) $\sec^{-1}(2) = \pi/3$, ya que

$$\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos(\pi/3)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

g) $\sec^{-1}(-2) = 4\pi/3$, porque $(4\pi/3) = \dfrac{1}{\cos(4\pi/3)} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ y $4\pi/3$ está en $[\pi, 3\pi/29)$

11. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.

$D_x(\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Entonces, por el problema 15 del capítulo 13, $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$ es una constante. Como $\operatorname{sen}^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, esa constante es $\dfrac{\pi}{2}$.

12. *a*) Demuestre $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(y)) = y$; *b*) determine $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\pi)$; *c*) pruebe que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ si y sólo si x está en $[-\pi 2, \pi/2]$.

a) Esto resulta directamente de la definición de $\operatorname{sen}^{-1}(y)$.

b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}\pi) = \operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$.

c) $\operatorname{sen}^{-1} y$ es igual al número x en $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que sen $x = y$. Así, si x está en $[-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$. Si x no está en $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) \neq x$, ya que, por definición, $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ debe estar en $[-\pi/2, \pi/2]$.

13. Evalúe *a*) $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{5}))$; *b*) $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(-\frac{3}{4}))$.

a) Por (16.11), $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{5})) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{5})) = 1 - 2(\frac{2}{5})^2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$.

b) $\operatorname{sen}^2(\cos^{-1}(-\frac{3}{4})) = 1 - \cos^2(\cos^{-1}(-\frac{3}{4})) = 1 - (-\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{16}$.
Por tanto, $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(-\frac{3}{4})) = \pm\sqrt{7}/4$. Puesto que $\cos^{-1}(-\frac{3}{4})$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(-\frac{3}{4})) > 0$. Entonces, $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(-\frac{3}{4})) = \sqrt{7}/4$.

14. El borde inferior de un mural de 12 pies de altura está situado a 6 pies por encima de los ojos de un observador. De acuerdo con el supuesto de que la vista más favorable se obtiene cuando el ángulo subtendido por el mural y los ojos es un máximo, ¿a qué distancia de la pared debería pararse el observador?

Sea θ el ángulo subtendido y x la distancia desde la pared. De la figura 18.7, tan (θ + ϕ) = 18/x, tan ϕ = 6/x, y

$$\tan\theta = \tan[(\theta+\phi)-\phi] = \frac{\tan(\theta+\phi)-\tan\varphi}{1+\tan(\theta+\phi)\tan\phi} = \frac{(18/x)-(6/x)}{1+(18/x)(6/x)} = \frac{12x}{x^2+108}$$

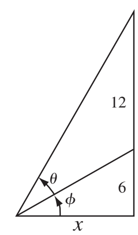


Fig. 18.7

Entonces,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12x}{x^2+108}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{12(-x^2+108)}{x^4+360x^2+11664}$$

El número crítico $x = 6\sqrt{3} \sim 10.4$. Por el crítico de la primera derivada, esto resulta en un máximo relativo. El observador debería pararse aproximadamente a 10.4 pies frente a la pared.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

15. Evalúe *a)* $\text{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)$; *b)* $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$; *c)* $\cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$; *d)* $\tan^{-1}(-\sqrt{3}/3)$; *e)* $\sec^{-1}(\sqrt{2})$; *f)* $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.

Respuestas: *a)* $-\frac{\pi}{3}$; *b)* $\frac{\pi}{6}$; *c)* $\frac{5\pi}{6}$; *d)* $-\frac{\pi}{6}$; *e)* $\frac{\pi}{4}$; *f)* $\frac{5\pi}{4}$

16. Demuestre que $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

En los problemas 17 a 24 halle y'.

17. $y = \text{sen}^{-1}(3x)$ *Respuesta*: $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

18. $y = \cos^{-1}(\frac{1}{2}x)$ *Respuesta*: $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

19. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$ *Respuesta*: $-\frac{3}{x^2+9}$

20. $y = \text{sen}^{-1}(x-1)$ *Respuesta*: $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

21. $y = x^2\cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$ *Respuesta*: $2x\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

22. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}(x-a)$ *Respuesta*: $\dfrac{x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

23. $y = (x-a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x-a}{a}\right)$ *Respuesta*: $2\sqrt{2ax - x^2}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} + \frac{1}{2}\sec^{-1}(\frac{1}{2}x)$ *Respuesta*: $\dfrac{8}{x^3\sqrt{x^2 - 4}}$

25. Prueba las fórmulas (18.2), (18.4) y (18.6).

26. Sea $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{7})$. Halle *a*) sen θ; *b*) cos θ; *c*) tan θ; *d*) cot θ; *e*) sec θ; *f*) cosec θ; *g*) cos 2θ; *h*) sen 2θ.

Respuestas: *a*) $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$; *b*) $\dfrac{2}{7}$; *c*) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$; *d*) $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$; *e*) $\dfrac{7}{2}$; *f*) $\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$; *g*) $-\dfrac{41}{49}$; *h*) $\dfrac{12\sqrt{5}}{49}$

27. Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{5})$. Halla *a*) sen θ; *b*) cos θ; *c*) tan θ; *d*) cot θ; *e*) sec θ; *f*) cosec θ; *g*) cos 2θ; *h*) sen 2θ.

Respuestas: *a*) $-\dfrac{1}{5}$; *b*) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$; *c*) $-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$; *d*) $-2\sqrt{6}$; *e*) $\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$; *f*) -5; *g*) $\dfrac{23}{25}$; *h*) $-\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

28. Demuestre $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$.

29. Evalúe *a*) $\cos(\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{11}))$; *b*) $\tan(\sec^{-1}(\frac{7}{5}))$; *c*) $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(\frac{2}{5}) + \sec^{-1} 4)$; *d*) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Respuestas: *a*) $\dfrac{4\sqrt{7}}{11}$; *b*) $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$; *c*) $\dfrac{\sqrt{21}}{20} + \dfrac{\sqrt{15}}{10}$; *d*) $\dfrac{\pi}{2}$

30. Halle el dominio y el rango de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\sec^{-1} x)$.

Respuesta: dominio $|x| \geq 1$; rango $(-1, 1)$

31. *a*) ¿Para qué valores de x es verdadero $\tan^{-1}(\tan x) = x$?

b) (CG) Comprueba la respuesta del inciso anterior con una graficadora para trazar la gráfica de $y = \tan^{-1}(\tan x) - x$.

Respuesta: *a*) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

32. Se desea colocar una luz directamente sobre el centro de un sitio circular de 30 pies de radio, a una altura tal que el borde reciba la máxima iluminación. Halle la altura si la intensidad I en cualquier punto del borde es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia (ángulo entre el rayo de luz y la vertical) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente.

(*Sugerencia*: sea x la altura requerida, y la distancia de la luz al punto del borde, y θ el ángulo de incidencia. Entonces, $I = k\dfrac{\cos\theta}{y^2} = \dfrac{kx}{(x^2 + 900)^{3/2}}$.)

Respuesta: $15\sqrt{2}$ pies

33. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ para $|x| < 1$. Analice qué sucede cuando $|x| = 1$.

34. (CG) Evalúe $\text{sen}^{-1}(\frac{3}{5})$ mediante una calculadora graficadora.

Respuesta: 0.6435

35. *a*) Halle sec $(\tan^{-1}(\frac{5}{7}))$; *b*) determine la fórmula algebraica para sec $(\tan^{-1}(2x))$. *c*) (CG) Compruebe sus respuestas a los incisos anteriores con una graficadora.

Respuestas: *a*) $\dfrac{\sqrt{74}}{7}$; *b*) $\sqrt{1+4x^2}$

36. Pruebe *a*) $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para $x \geq 1$; *b*) $\sec^{-1} x = 2\pi - \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para $x \leq -1$.

[La fórmula del inciso *a*) se cumple en general para $|x| \geq 1$, si se hubiera definido $\sec^{-1} x$ como la inversa de la restricción de sec x para $(-\pi/2, \pi/2)$. Sin embargo, si se hubiera hecho esto, la fórmula para $D_x(\sec^{-1} x)$ habría sido $1/(|x|\sqrt{x^2-1})$ en lugar de la fórmula más simple $1/(x\sqrt{x^2-1})$.]

19

Movimientos rectilíneo y circular

Movimiento rectilíneo

El *movimiento rectilíneo* es el de un objeto en línea recta. Si existe un sistema de coordenadas en esa recta y s representa la coordenada del objeto en cualquier instante t, entonces la posición del objeto está dada por una función $s = f(t)$ (fig. 19.1).

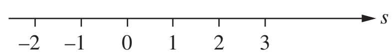


Fig. 19.1

La posición en un momento $t + \Delta t$, muy cercano a t, es $f(t + \Delta t)$. La "distancia" que recorre el objeto entre el instante t y el instante $t + \Delta t$ es $f(t + \Delta t) - f(t)$. El tiempo que el objeto ha recorrido es Δt. Entonces, la *velocidad media* durante este periodo de tiempo es

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

(Obsérvese que la "distancia" puede ser negativa cuando el objeto se mueve a la izquierda a lo largo del eje s. Así, la velocidad media puede ser positiva, negativa o cero.)

Cuando Δt tiende a cero, esta velocidad media se aproxima a lo que se conoce como *velocidad instantánea* v en el tiempo t. Entonces,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

Por tanto, la velocidad instantánea v es la derivada de la función de la posición s, es decir, $v = ds/dt$.

El signo de la velocidad instantánea v indica en qué dirección se mueve el objeto a lo largo de la recta. Si $v = ds/dt > 0$ en un intervalo de tiempo, entonces, por el teorema 13.7*a*), se sabe que s debe ser creciente, es decir, el objeto se desplaza en dirección de s creciente a lo largo de la recta. Si $v = ds/dt < 0$, entonces el objeto se está moviendo en la dirección de s decreciente.

La *rapidez* instantánea se define como el valor absoluto de la velocidad. Así, la rapidez indica cuán rápido se mueve el objeto, pero no su dirección. En un automóvil, el velocímetro señala la rapidez instantánea a la que se desplaza el auto.

La *aceleración* a de un objeto que se mueve en línea recta está definida por la razón a la que cambia la velocidad, es decir, la derivada de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

EJEMPLO 19.1. Sea la posición de un automóvil en una autopista dada por la ecuación $s = f(t) = t^2 - 5t$, donde s se mide en millas y t en horas. Así, la velocidad $v = 2t - 5$ millas por hora (mi/h) y su aceleración $a = 2$ mi/h^2. Por tanto, su velocidad es creciente a una razón de 2 millas por hora por hora.

Cuando un objeto que se mueve en línea recta cambia de dirección, su velocidad $v = 0$. Un cambio de dirección ocurre cuando la posición s llega a un extremo relativo, y esto sucede sólo cuando $ds/dt = 0$. (Sin embargo, lo contrario es falso; $ds/dt = 0$ no siempre indica un extremo relativo. Un ejemplo es $s = t^3$ en $t = 0$.)

EJEMPLO 19.2. Supóngase que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación $s = f(t) = (t-2)^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. (La gráfica de f aparece en la figura 19.2.) Entonces, $v = f'(t) = 2(t-2)$ pies/s y $a = 2$ pies/s^2. Para $t < 2$, $v < 0$ y el objeto se mueve a la izquierda (fig. 19.3). Para $t > 2$, $v > 0$ y el objeto se mueve a la derecha. El objeto cambia de dirección en $t = 2$, donde $v = 0$. Nótese que si bien la velocidad v es 0 en el momento $t = 2$, el objeto se está moviendo en ese instante, no está en reposo. Cuando se dice que un objeto está en *reposo* significa que su posición es constante durante todo un intervalo de tiempo.

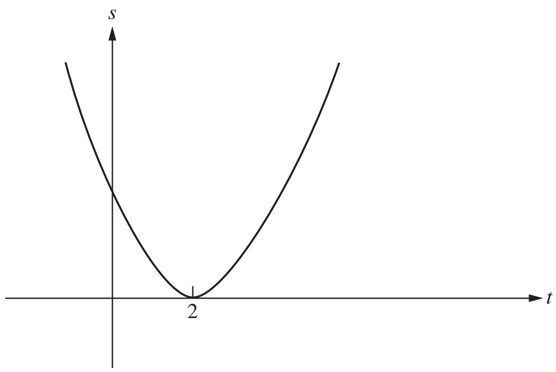


Fig. 19.2

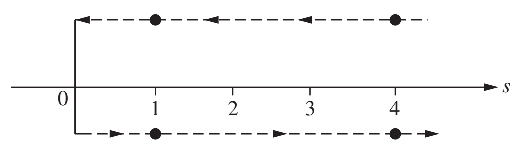


Fig. 19.3

Movimiento bajo la influencia de la gravedad

Si un objeto ha sido lanzado hacia arriba o hacia abajo, o tan sólo a partir de un estado de reposo, y la única fuerza que actúa sobre él es la gravitacional de la Tierra, el movimiento rectilíneo resultante se denomina *caída libre.*

Al colocar un sistema de coordenadas en una recta vertical sobre la que se mueve un objeto, se considera que este eje s se dirige hacia arriba (fig. 19.4) y que el nivel de la Tierra (la superficie del planeta) corresponde a $s = 0$. Según la física, la aceleración a es una constante aproximadamente igual a –32 pies/s^2. (En el sistema métrico, esta constante es –9.8 m/s^2.) Observe que la aceleración es negativa porque la fuerza de la gravedad de la Tierra hace que la velocidad se reduzca.

Como $\dfrac{dv}{dt} = a = -32$ se tiene que:

(19.1) $v = v_0 - 32t$

donde v_0 es la velocidad *inicial* cuando $t = 0$.* Ahora, $v = \dfrac{ds}{dt}$, por lo tanto,

(19.2) $s = s_0 + v_0 t - 16t^2$

donde s_0 es la *posición inicial*, el valor de s cuando $t = 0$.**

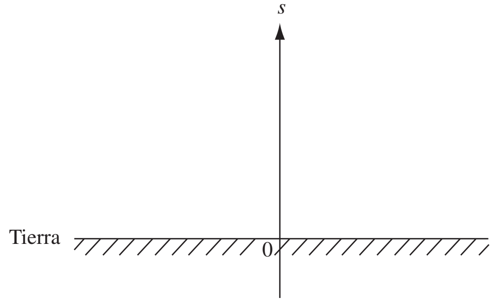


Fig. 19.4

* De hecho, $D_t(v_0 - 32t) = -32 = D_t v$. Entonces, por el problema 18 del capítulo 13, v y $v_0 - 32t$ difieren por una constante. Como v y $v_0 - 32t$ son iguales cuando $t = 0$, tal diferencia constante es 0.

** En efecto, $D_t(s_0 + v_0 t - 16t^2) = v_0 - 32t = D_t s$. Entonces, por el problema 18 del capítulo 13, s y $s_0 + v_0 t - 16t^2$ difieren por una constante. Como s y $s_0 + v_0 t - 16t^2$ son iguales cuando $t = 0$, esa diferencia constante es 0.

Movimiento circular

El movimiento de una partícula P a lo largo de un círculo queda completamente definido por la ecuación $\theta = f(t)$, donde θ es el ángulo central (en radianes) barrido en el instante t por una recta que une a P con el centro del círculo. Las coordenadas x y y de P están dadas por $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$.

Por *velocidad angular* ω de P en el instante t se entiende $\dfrac{d\theta}{dt}$.

Por *aceleración angular* α de P en el instante t se entiende $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta según la ley $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$. Determina su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos.

$v = \dfrac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2$; por tanto, cuando $t = 2$, $v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4$ pies/s.

$a = \dfrac{dv}{dt} = 3t$; por consiguiente, cuando $t = 2$, $a = 3(2) = 6$ pies/s^2.

2. La trayectoria de una partícula que se mueve en línea recta está dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$.

a) Halle s y a cuando $v = 0$.
b) Halle s y v cuando $a = 0$.
c) ¿Cuándo s es creciente?
d) ¿Cuándo v es creciente?
e) ¿Cuándo cambia la dirección del movimiento?

Se tiene que

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3), \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6(t-2)$$

a) Cuando $v = 0$, $t = 1$ y 3. Cuando $t = 1$, $s = 8$ y $a = -6$. Cuando $t = 3$, $s = 4$ y $a = 6$.
b) Cuando $a = 0$, $t = 2$. En $t = 2$, $s = 6$ y $v = -3$.
c) s es creciente cuando $v > 0$, es decir, cuando $t < 1$ y $t > 3$.
d) v es creciente cuando $a > 0$, es decir, cuando $t > 2$.
e) La dirección del movimiento cambia cuando $v = 0$ y $a \neq 0$. Del inciso *a*) se tiene que la dirección cambia cuando $t = 1$ y $t = 3$.

3. Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

a) ¿Cuándo s es creciente y cuándo decreciente?
b) ¿Cuándo v es creciente y cuándo decreciente?
c) Halle la distancia total recorrida en los primeros 5 segundos de movimiento.

Se tiene que

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4), \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6(t-3)$$

a) s es creciente cuando $v > 0$, es decir, cuando $t < 2$ y $t > 4$.

s es decreciente cuando $v < 0$, es decir, cuando $2 < t < 4$.

b) v es creciente cuando $a > 0$, es decir, cuando $t > 3$.

v es decreciente cuando $a < 0$, es decir, cuando $t < 3$.

c) Cuando $t = 0$, $s = 0$ y el cuerpo está en O. El movimiento inicial es a la derecha ($v > 0$) durante los primeros 2 segundos; cuando $t = 2$, el cuerpo está $s = f(2) = 20$ pies de O.

Durante los siguientes 2 segundos, se mueve a la izquierda, después de los cuales está a $s = f(4) = 16$ pies de O.

Luego se mueve a la derecha y después de 5 segundos de movimiento está $s = f(5) = 20$ pies de O. La distancia total recorrida es $20 + 4 + 4 = 28$ pies (fig. 19.5).

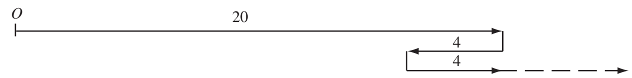


Fig. 19.5

4. Una partícula se mueve en una recta horizontal a $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$.

a) ¿Cuándo es creciente la rapidez y cuándo decreciente?
b) ¿Cuándo cambia la dirección del movimiento?
c) Halle la distancia total recorrida en los primeros 3 segundos de movimiento.
Aquí,

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5), \qquad a = \frac{dv}{dt} = 12(t-1)(t-2)$$

a) v cambia de signo en $t = 2.5$, y a cambia de signo en $t = 1$, $t = 2$.
Para $t < 1$, $v < 0$ y $a > 0$. Como $a > 0$, v es creciente. Como $v < 0$, la rapidez $|v| = -v$ es decreciente.
Para $1 < t < 2$, $v < 0$ y $a < 0$. Como $a < 0$, v es decreciente. Puesto que $v < 0$, la rapidez $|v| = -v$ es creciente.
Para $2 < t < 2.5$, $v < 0$ y $a > 0$. Como en el primer caso, la rapidez es decreciente.
Para $t > 2.5$, $v > 0$ y $a > 0$, v es creciente. Como $v > 0$, la rapidez $|v| = v$ es creciente.
b) La dirección del movimiento cambia en $t = 2.5$, ya que por el criterio de la segunda derivada s tiene un extremo relativo allí.
c) Cuando $t = 0$, $s = 3$ y la partícula está 3 unidades a la derecha de O. El movimiento es hacia la izquierda hasta que $t = 2.5$, después de lo cual está a $\frac{27}{16}$ unidades a la izquierda de O. Cuando $t = 3$, $s = 0$; la partícula se ha movido $\frac{27}{16}$ unidades a la derecha. La distancia total recorrida es $3 + \frac{27}{16} + \frac{27}{16} = \frac{51}{8}$ unidades (fig. 19.6).

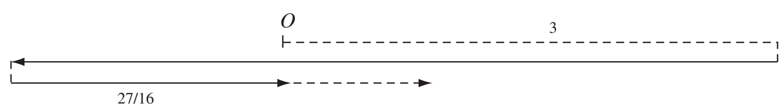


Fig. 19.6

5. Una piedra, lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 112 pies/segundo (pies/s), se mueve de acuerdo con la ecuación $s = 112t - 16t^2$, donde s es la distancia del punto de partida. Calcule *a*) la velocidad y la aceleración cuando $t = 3$ y cuando $t = 4$, y *b*) la máxima altura alcanzada. *c*) ¿Cuándo estará a 96 pies de altura?

Se tiene que $v = ds/dt = 112 - 32t$ y $a = dv/dt = -32$.
a) En $t = 3$, $v = 16$ y $a = -32$. La piedra está subiendo a 16 pies/s.
En $t = 4$, $v = -16$ y $a = -32$. La piedra está cayendo a 16 pies/s.
b) En el punto más alto del movimiento, $v = 0$. Al despejar $v = 0 = 112 - 32t$ resulta en $t = 3.5$. En ese instante $s = 196$ pies.
c) Sea $96 = 112t - 16t^2$, lo que resulta en $t^2 - 7t + 6 = 0$, de donde $t = 1$ y 6. Al cabo de 1 segundo de movimiento la piedra se halla a una altura de 96 pies y está subiendo, pues $v > 0$. Al cabo de 6 segundos se encuentra a la misma altura pero está cayendo, ya que $v < 0$.

6. Una partícula rota en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del reposo, de acuerdo con $\theta = \frac{t^3}{50-t}$, donde θ está en radianes y t en segundos. Calcule el desplazamiento angular θ, la velocidad angular ω y la aceleración angular α al cabo de 10 segundos.

$$\theta = \frac{t^3}{50} - t = 10 \text{ rad}, \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{3t^2}{50} - 1 = 5 \text{ rad/s}, \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{6t}{50} = \frac{6}{5} \text{ rad/s}^2$$

7. En $t = 0$, se lanza una piedra desde un edificio de 1024 pies de altura. ¿Cuándo toca el suelo la piedra y con qué velocidad? Determine también la rapidez en millas por hora.

Como $s_0 = 1024$ y $v_0 = 0$, la ecuación (19.2) se vuelve $s = 1024 - 16t^2$, y el tiempo en el que la piedra golpea la tierra es la solución de $1024 - 16t^2 = 0$. Esto se reduce a $t^2 = 64$, lo que da $t = \pm 8$. Como el movimiento ocurre cuando $t \geq 0$, $t = 8$. La ecuación (19.1) es $v = -32t$, lo que resulta en $v = -32(8) = -256$ pies/s cuando $t = 8$, es decir, el momento en el que la piedra choca con la tierra. (La velocidad es negativa porque la piedra se está moviendo hacia abajo.) La rapidez es 256 pies/s. Para cambiar a millas por hora se realiza lo siguiente:

$$x \text{ pies por segundo} = 60x \text{ pies por minuto} = 60(60x) \text{ pies por hora}$$

$$= \frac{3600x}{5280} \text{ millas por hora} = \frac{15}{22} x \text{ millas por hora}.$$

Luego,

(19.3) x pies por segundos$= \frac{15}{22} x$ millas por hora.

En especial, cuando $x = 256$, se obtiene $174\frac{6}{11}$ millas por hora.

8. Si se dispara un cohete verticalmente hacia arriba desde tierra con una velocidad inicial de 192 pies/s, ¿cuándo alcanza su altura máxima y cuál es esa altura? También establezca cuánto tarda en llegar a tierra nuevamente y con qué rapidez lo hace.

Las ecuaciones (19.1) y (19.2) son $v = 192 - 32t$ y $s = 192t - 16t^2$. A la altura máxima, $v = 0$ y, por tanto, $t = 6$. Esto significa que se toma 6 segundos para llegar a la altura máxima, que es $192(6) - 16(6)^2 = 576$ pies. El cohete regresa a nivel del suelo cuando $0 = 192t - 16t^2$, es decir, cuando $t = 12$. En consecuencia, tardó 6 segundos para llegar al suelo nuevamente, mismo tiempo al que empleó para alcanzar la altura máxima. La velocidad cuando $t = 12$ es $192 - 32(12) = -192$ pies/s. Entonces, su rapidez final es la misma que su rapidez inicial.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Demuestre que si un objeto se mueve en línea recta, su rapidez es creciente cuando su velocidad v y su aceleración a tienen el mismo signo, y su rapidez es decreciente cuando v y a tienen signo opuesto. (*Sugerencia*: la rapidez $S = |v|$. Cuando $v > 0$, $S = v$ y $dS/dt = dv/dt = a$. Cuando $v < 0$, $S = -v$ y $dS/dt = -dv/dt = -a$.)

10. Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, en unidades de pies y segundos. Determine su posición, dirección y velocidad, así como si su rapidez es creciente o decreciente cuando *a*) $t = \frac{1}{2}$; *b*) $t = \frac{3}{2}$; *c*) $t = \frac{5}{2}$; *d*) $t = 4$.

Respuestas:
a) $s = \frac{25}{8}$ ft pies; movimiento a la derecha con $v = \frac{15}{4}$ pies/s; rapidez decreciente.
b) $s = \frac{27}{8}$ pies; movimiento a la izquierda con $v = -\frac{9}{4}$ pies/s; rapidez creciente.
c) $s = \frac{5}{8}$ pies; movimiento a la izquierda con $v = -\frac{9}{4}$ pies/s; rapidez decreciente.
d) $s = 4$ pies; movimiento a la derecha con $v = 9$ pies/s; rapidez creciente.

11. La distancia de una locomotora respecto de un punto fijo sobre una vía recta en el instante t es $3t^4 - 44t^3 - 44t^2$. ¿Cuándo va en reversa?

Respuesta: $3 < t < 8$

12. Examina, como en el problema 2, cada uno de los siguientes movimientos en línea recta: *a*) $s = t^3 - 9t^2 + 24t$; *b*) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$; *c*) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$; *d*) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$.

Respuesta: los cambios de dirección ocurren en $t = 2$ y $t = 4$ en *a*), no hay cambios en *b*), en $t = 1$ y $t = 3$ en *c*) y en $t = 1$ en *d*).

13. Un objeto se mueve verticalmente hacia arriba desde el suelo de acuerdo con la ecuación $s = 64t - 16t^2$. Demuestre que ha perdido la mitad de su velocidad en los primeros 48 pies de ascenso.

14. Se lanza una bola verticalmente hacia arriba desde el borde de un tejado que está a 112 pies de altura, de tal forma que eventualmente caiga a la calle. Si se mueve de modo que la distancia s del tejado en el instante t está dada por $s = 94t - 16t^2$, halle *a*) la posición de la bola, su velocidad y la dirección del movimiento cuando $t = 2$, y *b*) su velocidad cuando golpea la calle (s en pies, y t en segundos).

Respuestas: *a*) 240 pies por encima de la calle, 32 pies/s hacia arriba; *b*) –128 pies/s.

15. Una rueda gira θ radianes en t segundos de manera que $\theta = 128t - 12t^2$. Encuentre la velocidad y la aceleración angular al cabo de 3 segundos.

Respuestas: $\omega = 56$ rad/s; $\alpha = -24$ rad/s^2

16. Se lanza una piedra en un pozo de 144 pies de profundidad. ¿Cuándo tocará la piedra el fondo del pozo?

Respuesta: después de 3 segundos

17. ¿Con qué rapidez, en millas por hora, un objeto lanzado desde lo alto de un edificio de 10 pisos tocará el suelo? Supóngase que cada piso del edificio tiene 10 pies de altura.

Respuesta: $54\frac{6}{11}$ mi/h

18. Un automóvil se mueve por una autopista recta. Si su posición está dada por $s = 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1$, con s en millas y t en horas, ¿cuál es la distancia que recorre de $t = 0$ a $t = 1$?

Respuesta: 2 millas

19. Responda a la misma pregunta que en el problema 18, excepto que $s = 5t - t^2$ y el auto va de $t = 0$ a $t = 3$.

Respuesta: 6.5 millas

20. Se lanza una piedra en línea recta desde el suelo. ¿Cuál es su velocidad inicial, en pies por segundo, si golpeó el suelo después de 15 segundos?

Respuesta: 240 pies/s

21. (CG) Sea la posición s de un objeto que se mueve en línea recta dada por la ecuación $s = t^4 - 3t^2 + 2t$. Utilice una graficadora para calcular cuándo cambia de dirección el objeto, cuándo se mueve a la derecha y cuándo a la izquierda. Trate de hallar las fórmulas exactas correspondientes.

Respuesta: cambia de dirección en $t = -1.3660$, 0.3660 y 1. El objeto se mueve a la izquierda para $t < -1.3660$ y para $0.3660 < t < 1$. Los valores exactos de t en los que el objeto cambia de dirección son 1 y $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

22. (CG) Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s = 3t - t^2$. Otro objeto avanza a lo largo de la misma recta de acuerdo con la ecuación $s = t^3 - t^2 + 1$. Utilice la calculadora graficadora para calcular *a*) cuándo ocupan la misma posición y *b*) cuándo tienen la misma velocidad. *c*) En el instante en que alcanzan la misma posición, ¿se están moviendo en la misma dirección?

Respuestas: *a*) 0.3473 y 1.5321; *b*) $t = \pm 1$; *c*) direcciones opuestas en ambas intersecciones.

20

Razones

Si una cantidad y es una función del tiempo t, la razón de cambio de y respecto al tiempo está dada por dy/dt. Cuando dos o más cantidades, todas funciones del tiempo t, están relacionadas por una ecuación, la relación de sus razones de cambio puede hallarse derivando ambos lados de la ecuación.

EJEMPLO 20.1. Una escalera de 25 pies reposa sobre una pared vertical (fig. 20.1). Si la base de la escalera resbala y se aleja de la base de la pared a 3 pies/s, ¿cuán rápido baja la parte superior de la escalera cuando la base de la misma está a 7 pies de la pared?

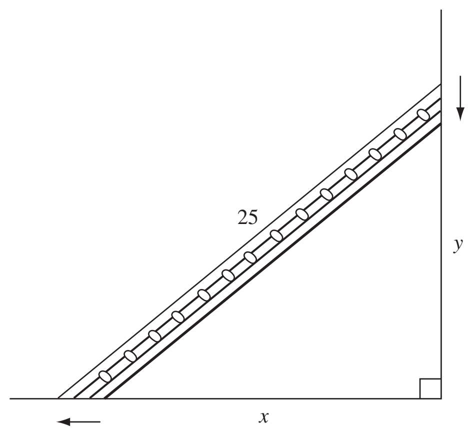


Fig. 20.1

Sea x la distancia de la base de la escalera a la base de la pared, y sea y la distancia de la parte superior de la escalera a la base de la pared. Como la base de la escalera se aleja de la base de la pared a una razón de 3 pies/s, $dx/dt = 3$, hay que hallar dy/dt cuando $x = 7$. Por el teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = (25)^2 = 625 \tag{1}$$

Ésta es la relación entre x y y. Al derivar ambos miembros respecto a t se obtiene

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Como $dx/dt = 3$, $6x + 2y\, dy/dt = 0$, donde

$$3x + y\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2}$$

Ésta es la ecuación deseada para dy/dt. Ahora, para este problema en particular, $x = 7$. Al sustituir x por 7 en la ecuación (1) se tiene $49 + y^2 = 625$, $y^2 = 576$, $y = 24$. En la ecuación (2), al remplazar x y y por 7 y 24 se obtiene $21 + 24\, dy/dt = 0$. Por tanto, $dy/dt = -\frac{7}{8}$. Como $dy/dt < 0$, se concluye que la parte superior de la escalera resbala por la pared a una razón de $\frac{7}{8}$ pies/s, cuando la base de la escalera está a 7 pies de la base de la pared.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El gas escapa de un globo esférico a razón de 2 pies^3/min. ¿Cuán rápido decrece el área del globo cuando el radio es de 12 pies?

Una esfera de radio r tiene el volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y superficie $S = 4\pi r^2$. Por hipótesis, $dV/dt = -2$. Ahora, $dV/dt = 4\pi r^2\, dr/dt$. Entonces, $-2 = 4\pi r^2\, dr/dt$, por tanto, $dr/dt = -1/(2\pi r^2)$. Además, $dS/dt = 8\pi r\, dr/dt$. Por consiguiente, $dS/dt = -8\pi r/2\pi r^2 = -4/r$. Así, cuando $r = 12$, $dS/dt = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$. Es decir, la superficie está decreciendo a una razón de $\frac{1}{3}$ pies^2/min.

2. De un depósito cónico sale agua a una razón de 1 pulg^3/s. Si el radio de la base del depósito es de 4 pulgadas y la altura de 8 pulgadas, determine la razón a la que el nivel del agua desciende cuando está a 2 pulgadas de la parte superior. (La fórmula para el volumen V de un cono es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h es la altura.)

Sea r el radio y h la altura de la superficie del agua en el instante t, y sea V el volumen del agua en el cono (fig. 20.2.) Por triángulos semejantes, $r/4 = h/8$, donde $r = \frac{1}{2}h$.

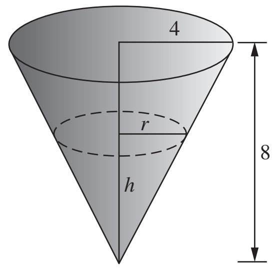


Fig. 20.2

Entonces,

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{12}\pi h^3. \quad \text{Así, } \frac{dV}{dt} = \tfrac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Por hipótesis, $dV/dt = -1$. Luego,

$$-1 = \tfrac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}, \text{ lo que resulta en } \frac{dh}{dt} = \frac{-4}{\pi h^2}.$$

Ahora, cuando el nivel del agua está a 2 pulgadas de la parte superior del depósito, $h = 8 - 2 = 6$. Por tanto, en ese momento, $dh/dt = -\frac{1}{9\pi}$, y, entonces, el nivel del agua está bajando a una razón de $\frac{1}{9\pi}$ pulg/s.

3. La arena que cae de un ducto forma un montículo cónico cuya altura es siempre igual a $\frac{4}{3}$ del radio de la base. *a*) ¿Cuán rápido se incrementa el volumen cuando el radio de la base es de 3 pies y aumenta a una razón de 3 pulg/min? *b*) ¿Cuán rápido aumenta el radio cuando está a 6 pies y el volumen se incrementa a una razón de 24 pies^3/min?

Sea r el radio de la base y h la altura del montículo en el instante t. Entonces,

$$h = \frac{4}{3}r \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{9}\pi r^3. \text{ Por ende, } \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

a) Cuando $r = 3$ y $dr/dt = \frac{1}{4}$, $dV/dt = 3\pi$ pies^3/min.

b) Cuando $r = 6$ y $dV/dt = 24$, $dr/dt = 1/(2\pi)$ pies/min.

4. El barco A navega hacia el sur a 16 millas/hora, y el barco B, situado a 32 millas al sur de A, navega hacia el este a 12 millas/hora. *a*) ¿A qué razón se acercan o separan al cabo de 1 hora? *b*) ¿Después de 2 horas? *c*) ¿Cuándo dejan de acercarse y a qué distancia se encuentran en ese momento?

Sean A_0 y B_0 las posiciones iniciales de los barcos, y A_t y B_t sus posiciones t horas más tarde. Sea D la distancia entre ellos t horas más tarde. Entonces (fig. 20.3):

$$D^2 = (32 - 16t)^2 + (12t)^2 \text{ y } 2D\frac{dD}{dt} = 2(32-16t)(-16) + 2(12t)(12) = 2(400t - 512).$$

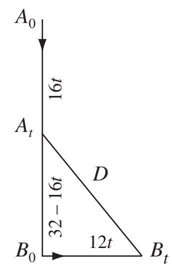


Fig. 20.3

Por tanto, $\frac{dD}{dt} = \frac{400t - 512}{D}$

a) Cuando $t = 1$, $D = 20$ y $\frac{dD}{dt} = -5.6$. Se acercan a 5.6 millas/hora.

b) Cuando $t = 2$, $D = 24$ y $\frac{dD}{dt} = 12$. Se alejan a 12 millas/hora.

c) Dejan de acercarse entre sí cuando $\frac{dD}{dt} = 0$, es decir, cuando $t = \frac{512}{400} = 1.28$ h, momento en el que están a $D = 19.2$ millas de distancia.

5. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a una razón de 2 pulgadas/s, mientras que los otros dos lados se acortan de tal forma que la figura sigue siendo un rectángulo con área constante $A = 50$ pulg^2. ¿Cuál es la razón de cambio del perímetro P, cuando la longitud de un lado creciente es de *a*) 5 pulgadas? *b*) ¿10 pulgadas? *c*) ¿Cuáles son las dimensiones cuando el perímetro termina de decrecer?

Sea x la longitud de los lados que se alargan, y y la longitud de los otros lados, en el instante t. Entonces,

$$P = 2(x+y), \quad \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right), \quad A = xy = 50, \quad \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

a) Cuando $x = 5$, $y = 10$ y $dx/dt = 2$. Entonces,

$$5\frac{dx}{dt} + 10(2) = 0 \text{ . Luego, } \frac{dx}{dt} = -4 \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = 2(2-4) = -4 \text{ pulgadas/s (decreciente)}$$

b) Cuando $x = 10$, $y = 5$ y $dx/dt = 2$. Entonces,

$$10\frac{dy}{dt} + 5(2) = 0 \text{ . Por tanto, } \frac{dy}{dt} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = 2(2-1) = 2 \text{ pulgadas/s (decreciente)}$$

c) El perímetro dejará de crecer cuando $dP/dt = 0$, es decir, cuando $dy/dt = -dx/dt = -2$. Entonces, $x(-2) + y(2) = 0$, y el rectángulo es un cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}$ pulgadas.

6. El radio de una esfera es r cuando el tiempo es t segundos. Halle el radio cuando la razón de cambio del área de la superficie y la razón de cambio del radio son iguales.

El área de superficie $S = 4\pi^2$; por tanto, $dS/dt = 8\pi r\, dr/dt$. Cuando $dS/dt = dr/dt$, $8\pi r = 1$ y el radio $r = 1/8\pi$.

7. Un peso W está atado a una cuerda de 50 pies de longitud que pasa por una polea en un punto P, a 20 pies sobre el suelo. El otro extremo de la cuerda está amarrado a un camión en un punto A, a 2 pies del suelo, como se muestra en la figura 20.4. Si el camión se aleja a una razón de 9 pies/s, ¿cuán rápido sube el peso cuando está a 6 pies sobre el suelo?

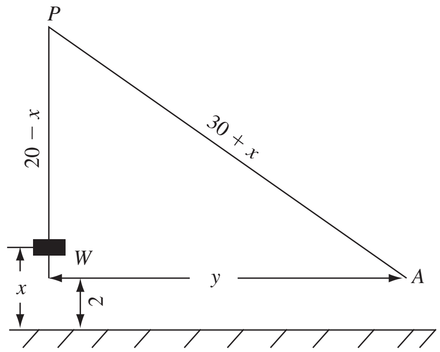


Fig. 20.4

Sea x la distancia que ha subido el peso, y y la distancia horizontal desde el punto A, donde la cuerda está amarrada al camión, a la recta vertical que pasa por la polea. Se debe hallar dx/dt cuando $dy/dt = 9$ y $x = 6$.

Ahora

$$y^2 = (30 + x)^2 - (18)^2 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{30+x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, $y = 18\sqrt{3}$ y $dy/dt = 9$. Entonces, $9 = \frac{30+6}{18\sqrt{3}}\frac{dx}{dt}$, de donde $\frac{dx}{dt} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ pies/s.

8. Un foco L está suspendido a H pies sobre la calle. Un objeto de h pies de altura en O, directamente bajo la luz del foco, se mueve en línea recta a lo largo de la calle a v pies/s. Determine la fórmula de la velocidad V del extremo de la sombra reflejada por el objeto en la calle a t segundos (fig. 20.5).

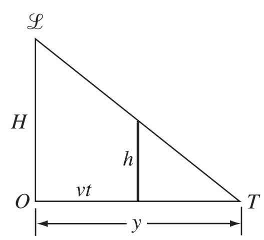


Fig. 20.5

Después de t segundos, el objeto se ha movido a una distancia vt. Sea y la distancia de la punta de la sombra desde O. Por triángulos semejantes, $(y - vt)/y = h/H$. Por tanto,

$$y = \frac{Hvt}{H-h} \quad \text{y, en consecuencia,} \quad V = \frac{dy}{dt} = \frac{Hv}{H-h} = \frac{1}{1-(h/H)}v$$

Entonces, la velocidad de la punta de la sombra es proporcional a la velocidad del objeto, ya que el factor de proporcionalidad depende de la razón h/H. Cuando $h \to 0$, $V \to v$, mientras que cuando $h \to H$, $V \to +\infty$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Un recipiente rectangular tiene 8 pies de longitud, 2 pies de ancho y 4 pies de profundidad. Si el agua fluye a una razón de 2 pies^3/min, ¿cuán rápido sube a la superficie cuando el agua tiene 1 pie de profundidad?

Respuesta: $\frac{1}{8}$ pies/min

10. Un líquido fluye dentro de un tanque cilíndrico vertical de 6 pies de radio a una razón de 8 pies^3/min. ¿Cuán rápido sube a la superficie?

Respuesta: $\frac{2}{9\pi}$ pies/min

11. Un hombre de 5 pies de altura camina a una razón de 4 pies/s. Si se aleja de la luz de un foco que está a 20 pies por encima de la calle, *a*) ¿a qué razón se mueve la punta de la sombra? *b*) ¿A qué razón cambia la longitud de la sombra?

Respuestas: *a*) $\frac{16}{3}$ pies/s; *b*) $\frac{4}{3}$ pies/s

12. Un globo sube verticalmente sobre un punto A del suelo a una razón de 15 pies/s. Un punto B del suelo queda a 30 pies de A. Cuando el globo está a 40 pies de A, ¿a qué razón cambia su distancia de B?

Respuesta: 12 pies/s

13. Una escalera de 20 pies de longitud se apoya contra una casa. Si el pie de la escalera se aleja de la casa a una razón de 2 pies/s, halle con qué velocidad *a*) la parte superior de la escalera se resbala por la pared, y *b*) disminuye la pendiente de la escalera cuando el pie de la misma está a 12 pies de la casa.

Respuestas: *a*) $\frac{3}{2}$ pies/s; *b*) $\frac{25}{72}$ pies/s

14. De un tanque cónico de 3 pies de radio y 10 pies de profundidad se saca agua a razón de 4 pies^3/min. ¿Cuán rápido baja el nivel cuando la profundidad del agua es de 6 pies? ¿Cuán rápido disminuye el radio de la superficie del agua?

Respuestas: $100/81\pi$ pies/min; $10/27\pi$ pies/min

15. Una barcaza, cuya cubierta está 10 pies por debajo del nivel del puerto, es arrastrada mediante un cable atado a la cubierta que pasa por un aro situado en el puerto. Cuando la lancha está a 24 pies de distancia y se aproxima al puerto a $\frac{3}{4}$ pies/s, ¿a qué velocidad se está tirando del cable? (Desprecie cualquier comba en el cable.)

Respuesta: $\frac{9}{13}$ pies/s

16. Un niño ha elevado una cometa a una altura de 150 pies. Si la cometa se aleja horizontalmente del niño a 20 pies/s, ¿a qué velocidad está soltando la cuerda cuando la cometa está a 250 pies de él?

Respuesta: 16 pies/s

17. Un tren que parte a las 11:00 AM viaja hacia el este a 45 millas/hora, mientras que otro, que sale a mediodía del mismo punto, viaja hacia el sur a 60 millas/hora. ¿A qué velocidad se separan a las 3 PM?

Respuesta: $105\sqrt{2}/2$ millas/hora

18. Un foco está en el extremo superior de un poste de 80 pies de altura. Se deja caer una bola desde un punto situado a 20 pies del foco y a su misma altura. Si se considera que la bola cae de acuerdo con la ecuación $s = 16t^2$, ¿con qué velocidad se mueve la sombra de la bola en el suelo 1 segundo más tarde?

Respuesta: 200 pies/s

19. El barco A está a 15 millas al este de O y se mueve hacia el oeste a 20 millas/hora; el barco B está a 60 millas al sur de O y se mueve hacia el norte a 15 millas/hora. *a*) ¿Se acercan o se alejan después de una hora y a qué razón? *b*) ¿Después de 3 horas? *c*) ¿Cuándo están más cerca el uno del otro?

Respuestas: *a*) acercándose, $115/\sqrt{82}$ millas/hora; *b*) separándose, $9\sqrt{10}/2$ millas/hora; *c*) 1 h 55 minutos

20. El agua se está fugando a una razón de 10 pies^3/min de una cisterna agrietada, cuya forma es la de un cono de 16 pies de profundidad y 8 pies de diámetro en la parte superior. Cuando el agua tiene 12 pies de profundidad, se observa que el nivel del agua sube a 4 pulgadas/min. ¿A qué razón se está fugando el agua?

Respuesta: $(10 - 3\pi)$ pies^3/min

21. Una solución pasa por un filtro cónico de 24 pulgadas de profundidad y 16 pulgadas en la parte superior, hacia una vasija cilíndrica de 12 pulgadas de diámetro. ¿A qué razón sube el nivel de la solución en el cilindro si, cuando la profundidad de la solución en el filtro es de 12 pulgadas, su nivel cae a una razón de 1 pulgada/min?

Respuesta: $\frac{4}{9}$ pulgadas/min

22. El petróleo de un buque cisterna se está fugando en forma de una película circular sobre la superficie del agua. Si el radio del círculo aumenta a una razón de 3 metros por minuto, ¿a qué velocidad se incrementa el área del círculo cuando el radio es de 200 metros?

Respuesta: 1200π m^2/min

23. Un punto se mueve sobre la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 36$, de forma tal que la coordenada x aumenta a una razón constante de 20 unidades por segundo. ¿A qué razón cambia la coordenada y en el punto (10, 4)?

Respuesta: 50 unidades/s

24. Si un punto se mueve por la curva $y = x^2 - 2x$, ¿en qué punto cambia la coordenada y dos veces tan rápido como la coordenada x?

Respuesta: (2, 0)

21

Diferenciales. Método de Newton

Si una función f es diferenciable en x, entonces $f'(x) = \text{lím}_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$, donde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Por tanto, para los valores de Δx cercanos a 0, $\Delta y/\Delta x$ estará próximo a $f'(x)$. Esto se escribe con frecuencia como $\Delta y/\Delta x \sim f'(x)$, donde

$$\Delta y \sim f'(x)\, \Delta x \tag{1}$$

Esto implica que

$$f(x + \Delta x) \sim \Delta f(x) + f'(x)\Delta x \tag{2}$$

La fórmula (2) puede utilizarse para aproximar valores de una función.

EJEMPLO 21.1. Estime el valor de $\sqrt{16.2}$. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 16$ y $\Delta x = 0.2$. Entonces, $x + \Delta x = 16.2$, $f(x + \Delta x) = \sqrt{16.2}$ y $f(x) = \sqrt{16} = 4$. Como $f'(x) = D_x(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x}) = 1/(2\sqrt{16}) = \frac{1}{8}$, la fórmula (2) se vuelve,

$$\sqrt{16.2} \sim 4 + \frac{1}{8}(0.2) = 4.025$$

(Esta aproximación no es válida sino hasta tres cifras decimales. Para cuatro cifras decimales el valor correcto es 4.0249, que puede comprobarse en una calculadora graficadora.)

EJEMPLO 21.2. Estime el valor de sen (0.1). En este caso, $f(x) = \text{sen}\, x$, $x = 0$ y $\Delta x = 0.1$. Entonces, $x + \Delta x = 0.1$, $f(x + \Delta x) = \text{sen}\,(0.1)$ y $f(x) = \text{sen}\, 0 = 0$. Como $f'(x) = \cos x = \cos 0 = 1$, la fórmula 21.2 da

$$\text{sen}\,(0.1) \sim 0 + 1(0.1) = 0.1$$

El valor real es 0.0998, corregido a cuatro cifras decimales. Observe que el método utilizado para este problema muestra que sen u puede aproximarse en u para los valores de u cercanos a 0.

Una limitación de la fórmula (21.2) consiste en que no se tiene información sobre cuán buena es la aproximación. Por ejemplo, si se busca que la aproximación sea correcta en cuatro cifras decimales, no se sabe cuán pequeño debería escogerse Δx.

La diferencial

El producto del miembro derecho de la ecuación (21.1) se llama *diferencial* de f y se representa mediante df.

Definición

La *diferencial* df de f se define por

$$df = f'(x)\Delta x$$

Obsérvese que df es una función de dos variables, x y Δx. Si Δx es pequeña, entonces la fórmula (1) se vuelve

$$f(x + \Delta x) - f(x) \sim df \tag{3}$$

Esta fórmula se ilustra en la figura 21.1. La recta $\mathscr{L}$ es tangente a la gráfica de f en P; entonces, su pendiente es $f'(x)$. Por ende, $f'(x) = \overline{RT}/\overline{PR} = \overline{RT}/\Delta x$. Luego, $\overline{RT} = f'(x)\Delta x = df$. Para todo Δx pequeño, Q es próximo a P en la gráfica y, por tanto, $\overline{RT} \sim \overline{RQ}$, es decir, $df \sim f(x + \Delta x) - f(x)$, que es la fórmula (21.3).

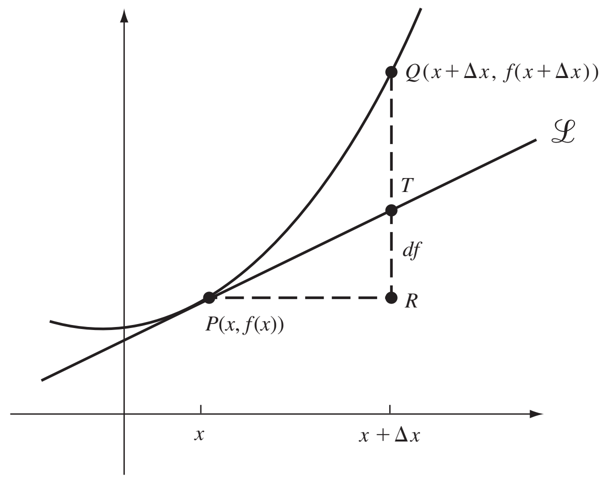


Fig. 21.1

Cuando la función f está dada por una fórmula, digamos $f(x) = \tan x$, entonces suele escribirse df como $d(\tan x)$. Por consiguiente

$$d\,(\tan x) = df = f'(x)\Delta x = \sec^2 x\ \Delta x$$

De igual forma, $d(x^3 - 2x) = (3x^2 - 2)\Delta x$. En especial si $f(x) = x$,

$$dx = df = f'(x)\Delta x = (1)\Delta x = \Delta x$$

Como $dx = \Delta x$, se obtiene $df = f'(x)dx$. Cuando $\Delta x \neq 0$, la división entre Δx resulta en $df/dx = f'(x)$. Cuando $f(x)$ se escribe como y, entonces df se escribe como dy y se obtiene la notación tradicional dy/dx para la derivada.

Si u y v son funciones y c es constante, entonces las fórmulas siguientes son fácilmente derivables:

$$d(c) = 0 \qquad d(cu) = c\ du \qquad d(u + v) = du + dv$$

$$d(uv) = u\ dv + v\ du \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ du - u\ dv}{v^2}$$

Método de Newton

Supóngase que se sabe que x_0 está próximo a una solución de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

donde f es una función derivable. Entonces, la recta tangente $\mathscr{T}$ a la gráfica de f en el punto con coordenada $x = x_0$ ordinariamente cortará el eje x en un punto cuya coordenada x_1 está más próxima a la solución de (4) de lo que lo está x_0 (fig. 21.2).

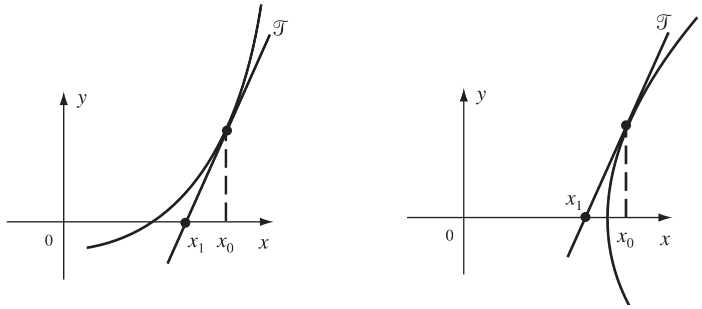


Fig. 21.2

Una ecuación punto-pendiente de la recta $\mathcal{T}$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ya que $f'(x_0)$ es la pendiente de $\mathcal{T}$. Si $\mathcal{T}$ corta el eje x en $(x_1, 0)$, entonces

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Si $f'(x_0) \neq 0$,
$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Por tanto,
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ahora se aplica el mismo razonamiento, pero comenzando con x_1 en lugar de x_0. El resultado es un número x_2 que debería ser más próximo a la solución de (4) que x_1, donde $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$. Si se repitiera este procedimiento, se obtendría una secuencia de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ determinada por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

Esto se conoce como el *método de Newton* para hallar cada vez mejores aproximaciones a una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Sin embargo, el método no siempre funciona (algunos ejemplos de las dificultades que pueden presentarse se muestran en los problemas 23 y 24).

EJEMPLO 21.3. Es posible aproximar $\sqrt{3}$ aplicando el método de Newton a la función $f(x) = x^3 - 3$. Aquí, $f'(x) = 2x$ y (5) se lee

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - 3)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} \tag{6}$$

Sea 1 la primera aproximación x_0, ya que se sabe que $1 < \sqrt{3} < 2$. Sustituyendo sucesivamente $n = 0, 1, 2, \ldots$ en (6)*, se obtiene

$$x_1 = \frac{1^3 + 3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{2^2 + 3}{2(2)} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_3 = \frac{(1.75)^2 + 3}{2(1.75)} = 1.732\,142\,857$$

$$x_4 = \frac{(1.732\,142\,857)^2 + 3}{2(1.732\,142\,857)} = 1.732\,050\,81$$

$$x_5 = \frac{(1.732\,050\,81)^2 + 3}{2(1.732\,050\,81)} = 1.732\,050\,808$$

$$x_6 = \frac{(1.732\,050\,808)^2 + 3}{2(1.732\,050\,808)} = 1.732\,050\,808$$

Como la calculadora dio $x_6 = x_5$, no se puede ir más allá, y se ha obtenido la aproximación $\sqrt{3} \sim 1.732\,050\,808$, que de hecho es correcta para el número indicado de cifras decimales.

* Los cálculos son tan tediosos que debería utilizarse una calculadora, preferentemente programable.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Utilice la fórmula (2) para aproximar: *a*) $\sqrt[3]{124}$; *b*) sen 61º.

a) Sea $f(x)=\sqrt[3]{124}$, $x = 125$ y $\Delta x = -1$. Entonces, $x + \Delta x = 124$, $f(x+\Delta x)=\sqrt[3]{124}$ y $f(x)=\sqrt[3]{125}=5$.

Como

$$f'(x)=D_x(x^{1/3})=\tfrac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3}\frac{1}{(125)^{2/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}=\frac{1}{75}$$

La fórmula (2) resulta en $\sqrt[3]{124}\sim 5+(\tfrac{1}{75})(-1)=5-\tfrac{1}{75}=\tfrac{374}{75}\sim 4.9867$. (Con cuatro cifras decimales, la respuesta correcta puede mostrarse como 4.9866.)

b) Sea $f(x) = \text{sen } x$, $x = \pi/3$ y $\Delta x = \pi/180$. Entonces, $x + \Delta x = 61º$, $f(x + \Delta x) = \text{sen } 61º$ y $f(x)=\sqrt{3}/2$. Como $f'(x)=\cos x=\cos(\pi/3)=\tfrac{1}{2}$, la fórmula (2) da

$$\text{sen}\,61^\circ \sim \frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)\sim 0.8660+0.0087=0.8747$$

(Para cuatro cifras decimales, la respuesta correcta puede mostrarse como 0.8746.)

2. Aproxime el cambio en el volumen V de un cubo de lado x si el lado se aumenta 1%.
En este caso, Δx es $0.01x$, $f(x) = V = x^3$ y $f'(x) = 3x^2$. Por la fórmula (1), el incremento es aproximadamente $(3x^2)(0.01x) = 0.03x^3$. (Entonces, el volumen aumenta 3% aproximadamente.)

3. Halle dy para cada una de las funciones siguientes $y = f(x)$:

a) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$.
$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)\, dx$

b) $y = (2x^3 + 5)^{3/2}$.
$dy=\tfrac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}d(2x^3+5)=\tfrac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}(6x^2dx)=9x^2(2x^3+5)^{1/2}dx$

c) $y=\dfrac{x^3+2x+1}{x^2+3}$.

$$dy=\frac{(x^2+3)d(x^3+2x+1)-(x^3+2x+1)d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$
$$=\frac{(x^2+3)(3x^2+2)dx-(x^3+2x+1)(2x)\,dx}{(x^2+3)^2}=\frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}dx$$

d) $y = \cos^2 2x + \text{sen } 3x$.

$dy = 2 \cos 2x\, d(\cos 2x) + d(\text{sen } 3x)$
$= (2 \cos 2x)(-2 \text{ sen } 2x\, dx) + 3 \cos 3x\, dx$
$= -4 \text{ sen } 2x \cos 2x\, dx + 3 \cos 3x\, dx$
$= (-2 \text{ sen } 4x + 3 \cos 3x)\, dx$

4. Utilice diferenciales para hallar $\dfrac{dy}{dx}$:

a) $xy + x - 2y = 5$.

$d(xy) + dx - d(2y) = d(5)$

$xdy + ydx + dx - 2dy = 0$

$(x - 2)dy + (y + 1)dx = 0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+1}{x-2}$$

b) $\dfrac{2x}{y}-\dfrac{3y}{x}=8$.

$$2\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\right)-3\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\right)=0$$

$$2x^2(y\,dx - x\,dy) - 3y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$$
$$(2x^2y + 3y^3)dx - (2x^3 + 3y^2x)dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2+3y^2)}{x(2x^2+3y^2)} = \frac{y}{x}$$

c) $x = 3\cos\theta - \cos 3\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 3\theta$.

$dx = (-3\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen} 3\theta)d\theta$, $dy = (3\cos\theta - 3\cos 3\theta)d\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta}$$

5. Aproxime las raíces (reales) de $x^3 + 2x - 5 = 0$.

Trace las gráficas de $y = x^3$ y $y = 5 - 2x$ en los mismos ejes; observe que debe haber una raíz, la cual queda entre 1 y 2. Se aplica el método de Newton, con $x_0 = 1$. Entonces, $f(x) = x^3 + 2x - 5$ y $f'(x) = 3x^2 + 2$. La ecuación 5 se vuelve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n - 5}{3x_n^2 + 2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 + 2}$$

Entonces,

$$x_1 = \frac{7}{5} = 1.4$$
$$x_2 \sim 1.330\,964\,467$$
$$x_3 \sim 1.328\,272\,82$$
$$x_4 \sim 1.328\,268\,856$$
$$x_5 \sim 1.328\,268\,856$$

Una calculadora da la respuesta 1.328 2689, exacta para el número indicado de cifras. Por tanto, la respuesta obtenida mediante el método de Newton es correcta hasta al menos siete cifras decimales.

6. Aproxime las raíces de $2\cos x - x^2 = 0$.

Al trazar las gráficas de $y = 2\cos x$ y $y = x^2$, observe que hay dos raíces reales, próximas a 1 y –1. (Como la función $2\cos x - x^2$ es par, si r es una raíz, la otra raíz es $-r$.) Se aplica el método de Newton con $x_0 = 1$. Entonces, $f(x) = 2\cos x - x^2$ y $f'(x) = -2\operatorname{sen} x - 2x = -2(x + \operatorname{sen} x)$. La ecuación (5) se vuelve

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}\,\frac{2\cos x_n - x_n^2}{x_n + \operatorname{sen} x_n} = \frac{x_n^2 + 2(x_n \operatorname{sen} x_n + \cos x_n)}{2(x_n + \operatorname{sen} x_n)}$$

Entonces

$$x_1 \sim 1.021\,885\,93$$
$$x_2 \sim 1.021\,689\,97$$
$$x_3 \sim 1.021\,689\,954$$
$$x_4 \sim 1.021\,689\,954$$

Una graficadora produce 1.021 69, correcto para el número indicado de cifras decimales, de manera que la respuesta obtenida mediante el método de Newton es precisa al menos con cinco cifras decimales.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7. Utilice la fórmula (2) para aproximar *a*) $\sqrt[4]{17}$; *b*) $\sqrt[5]{1020}$; *c*) cos 59º; *d*) tan 44º.

Respuestas: *a*) 2.031 25; *b*) 3.996 88; *c*) 0.5151; *d*) 0.9651.

8. Utilice la fórmula (1) para aproximar el cambio en *a*) x^3 cuando x cambia de 5 a 5.01; *b*) $\frac{1}{x}$ cuando x cambia de 1 a 0.98.

Respuestas: *a*) 0.75; *b*) 0.02

9. Una placa circular se dilata por la acción del calor de manera que su radio se incrementa de 5 a 5.06 pulgadas. Calcule el incremento del área.

Respuesta: 0.6π pulgadas^2 ~ 1.88 pulgadas^2.

10. El radio de una bola de hielo se reduce de 10 a 9.8 pulgadas. Calcule la reducción en *a*) el volumen; *b*) el área de la superficie.

Respuestas: *a*) 80π pulgadas^3; *b*) 16π pulgadas^2.

11. La velocidad adquirida por un objeto que cae libremente una distancia h pies a partir del reposo está dada por $v = \sqrt{64.4h}$ pies/s. Calcule el error en v debido a un error de 0.5 pies al medir h como 100 pies.

Respuesta: 0.2 pies/s.

12. Si un aviador vuela alrededor del mundo a una altura de 2 millas sobre el ecuador, calcule cuántas millas más recorrerá que una persona que viaje a lo largo del ecuador.

Respuesta: 12.6 millas.

13. Se desea medir el radio de un círculo y se va a calcular su área. Si el radio puede medirse con una precisión de 0.001 pulgadas y el área debe tener una aproximación de 0.1 pulgadas^2, calcule el radio máximo para el que puede utilizarse este proceso.

Respuesta: 16 pulgadas.

14. Si $pV = 20$ y p se mide como 5 ± 0.02, calcule V.

Respuesta: $V = 4 \pm 0.016$.

15. Si $F = 1/r^2$ y F se mide como 4 ± 0.05, estime r.

Respuesta: $r = 0.5 \pm 0.003$.

16. Calcule el cambio en la superficie total de un cono circular recto cuando *a*) el radio r permanece constante mientras la altura h cambia en poca cantidad Δh; *b*) la altura permanece constante mientras el radio cambia muy poco Δr.

Respuestas: *a*) $\pi rh\,\Delta h/\sqrt{r^2+h^2}$; *b*) $\pi\left(\dfrac{h^2+2r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}+2r\right)\Delta r$.

17. Halle dy para:

a) $y = (5 - x)^3$ *Respuesta*: $-3(5-x)^2dx$.

b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *Respuesta*: $\dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}dx$.

c) $y = \cos^{-1}(2x)$ *Respuesta*: $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

d) $y = \cos(bx^2)$ *Respuesta*: $-2bx \operatorname{sen}(bx^2)dx$.

18. Halle dy/dx en los ejemplos siguientes, por medio de diferenciales:

a) $2xy^3 + 3x^2y = 1$ *Respuesta*: $-\dfrac{2y(y^2+3x)}{3x(2y^2+x)}$

b) $xy = \text{sen}(x - y)$ *Respuesta*: $\dfrac{\cos(x-y)-y}{\cos(x-y)+x}$.

19. (CG) Utilice el método de Newton para hallar las soluciones a estas ecuaciones, con cuatro cifras decimales:

a) $x^3 + 3x + 1 = 0$ *Respuesta*: –0.3222.

b) $x - \cos x = 0$ *Respuesta*: 0.7391.

c) $x^3 + 2x^2 - 4 = 0$ *Respuesta*: 1.1304.

20. (CG) Aplique el método de Newton para aproximar con cuatro cifras decimales:

a) $\sqrt[4]{3}$ *Respuesta*: 1.3161.

b) $\sqrt[5]{247}$ *Respuesta*: 3.0098.

21. *a*) Compruebe que el método de Newton para calcular $\sqrt{r}$ de la ecuación $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{r}{x_n}\right)$.

b) (CG) Aplique el inciso *a*) para aproximar $\sqrt{5}$ con cuatro decimales.

Respuesta: *b*) 2.2361.

22. (CG) Demuestre que $x^3 + x^2 - 3 = 0$ tiene una sola solución en (1, 2) y aplique el método de Newton para aproximar hasta cuatro decimales.

Respuesta: 1.1746.

23. Demuestre que el método de Newton no funciona si se aplica la ecuación $x^{1/3} = 0$, con $x_0 = 1$.

24. Pruebe que el método de Newton no da aproximaciones a las soluciones de las ecuaciones siguientes, comenzando con los valores iniciales dados y explique por qué no funciona en tales casos.

a) $x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0$, con $x_0 = 1$.

b) $x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$, con $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & \text{para } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x} & \text{para } x < 2 \end{cases}$, con $x_0 = 3$.

25. (CG) Aproxime π utilizando el método de Newton para hallar una solución de $\cos x + 1 = 0$.

Respuesta: 3.141 592 654. (Observe cuánto demora la respuesta para estabilizarse.)

26. (CG) Utilice el método de Newton para calcular la única solución positiva de $\cos x = \dfrac{x}{2}$.

Respuesta: 1.029 866 529.

22

Antiderivadas

Si $F'(x) = f(x)$, entonces F se denomina una *antiderivada* de f.

EJEMPLO 22.1. x^3 es una antiderivada de $3x^2$, pues $D_x(x^3) = 3x^2$. Pero $x^3 + 5$ también es una antiderivada de $3x^2$ ya que $D_x(5) = 0$.

(I) En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + C$ también es una antiderivada de $f(x)$, donde C es cualquier constante.

(II) De igual forma, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ y si $G(x)$ es cualquier otra antiderivada de $f(x)$, entonces $G(x) = F(x) + C$, para alguna constante C.

La propiedad (II) se desprende del problema 13 del capítulo 18, ya que $F'(x) = f(x) = G'(x)$.

De las propiedades (I) y (II) se observa que, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces las antiderivadas de $f(x)$ son precisamente tales funciones de la forma $F(x) + C$, para una constante arbitraria C.

Notación. $\int f(x)\,dx$ denotará cualquier antiderivada de $f(x)$. En esta notación, $f(x)$ se denomina el *integrando*.

Terminología. Una antiderivada $\int f(x)\,dx$ también se denomina una *integral indefinida*.

Más adelante se proporcionará una explicación de la notación peculiar $\int f(x)\,dx$ (incluida la presencia de la diferencial dx).

EJEMPLO 22.2. *a)* $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$; *b)* $\int -\operatorname{sen} x\,dx = \cos x + C$.

Leyes de las antiderivadas

Ley 1. $\int 0\,dx = C$.

Ley 2. $\int 1\,dx = x + C$.

Ley 3. $\int a\,dx = ax + C$.

Ley 4. $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$ para cualquier número racional $r \neq -1$.

(4) sigue del hecho que $D_x\left(\dfrac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$ para $r \neq -1$.

Ley 5. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Se observa que $D_x\left(a\int f(x)\,dx\right) = aD_x\left(\int f(x)\,dx\right) = af(x)$.

Ley 6. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x) + dx + \int g(x)\,dx$.

Se observa que $D_x\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = D_x\left(\int f(x)\,dx\right) + D_x\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x) + g(x)$.

Ley 7. $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$.

Se observa que $D_x\left(\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right) = D_x\left(\int f(x)\,dx\right) - D_x\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x) - g(x)$.

EJEMPLO 22.3.

a) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}dx = \dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$ por la ley (4).

b) $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = \dfrac{x^{-1}}{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$ por la ley (4).

c) $\int 7x^3 dx = 7\int x^3 dx = 7\left(\dfrac{x^4}{4}\right) + C = \frac{7}{4}x^4 + C$ por las leyes (5) y (4).

d) $\int (x^2+4)\,dx = \int x^2 dx + \int 4\,dx = \dfrac{1}{3}x^3 + 4x + C$ por las leyes (6), (4) y (2).

e) $\int (3x^6 - 4x)\,dx = \int 3x^6 dx - \int 4x\,dx = 3\int x^6\,dx - 4\int x\,dx = 3(\frac{1}{7}x^7) - 4(\frac{1}{2}x^2) + C = \frac{3}{7}x^7 - 2x^2 + C.$

EJEMPLO 22.4. Las leyes (3) a (7) permiten calcular la antiderivada de todo polinomio. Por ejemplo,

$$\int (6x^8 - \tfrac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3})\,dx = 6(\tfrac{1}{9}x^9) - \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{6}x^6) + 7(\tfrac{1}{5}x^5) + \sqrt{3}x + C$$

$$= \tfrac{2}{3}x^9 - \tfrac{1}{9}x^6 + \tfrac{7}{5}x^5 + \sqrt{3}x + C$$

Ley 8. Fórmula abreviada I

$$\int (g(x))^r g'(x)\,dx = \frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1} + C \quad \text{para todo número racional } r \neq -1.$$

Para la comprobación, $D_x\left(\dfrac{1}{r+1}(g(x))^{r+1}\right) = \dfrac{1}{r+1}D_x[(g(x))^{r+1}] = \dfrac{1}{r+1}(r+1)(g(x))^r g'(x) = (g(x))^r g'(x)$ por la regla de la cadena para potencias.

EJEMPLO 22.5. $\int (\frac{1}{3}x^3 + 7)^5 x^2\,dx = \frac{1}{6}(\frac{1}{3}x^3 + 7)^6 + C.$

Para comprobarlo, sea $g(x) = (\frac{1}{3}x^3 + 7)$ y $r = 5$ en la fórmula abreviada I.

EJEMPLO 22.6. $\int (x^2+1)^{2/3} x\,dx = \dfrac{1}{2}\int (x^2+1)^{2/3} 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5/3}\right)(x^2+1)^{5/3} + C = \dfrac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} + C.$

En este caso, se tuvo que insertar un factor de 2 en el integrando para poder utilizar la fórmula abreviada I.

Ley 9. Método de sustitución

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

donde u se sustituye por $g(x)$ después de evaluar el lado derecho. La "sustitución" se realiza en el lado izquierdo con $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$. (Para ver una justificación, repase el problema 21.)

EJEMPLO 22.7

a) Halle $\int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx$.
Sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$. Luego, $x\,dx = \frac{1}{2}du$. Por sustitución

$$\int x\,\mathrm{sen}\,(x^2)dx = \int \mathrm{sen}\,u\,(\tfrac{1}{2})du = \tfrac{1}{2}\,(-\cos u) + C = -\tfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

b) Halle $\int \mathrm{sen}(x/2)\,dx$.
Sea $u = \frac{x}{2}$. Entonces $du = \frac{1}{2}dx$. Por tanto, $dx = 2\,du$. Por sustitución,

$$\int \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int (\mathrm{sen}\,u)\,2\,du = 2\int \mathrm{sen}\,u\,du = 2(-\cos u) + C = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Nótese que la fórmula abreviada I es un caso especial del método de sustitución, con $u = g(x)$. La ventaja de la fórmula abreviada I es que evita el tedio de realizar la sustitución.

Las fórmulas conocidas para las derivadas de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas dan las fórmulas siguientes para las antiderivadas:

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{para } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{para } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{para } a > 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas 1 a 8, evalúe la antiderivada.

1. $\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$ [Ley (4)]

2. $\int \frac{dx}{x^6} = \int x^{-6} dx = \frac{1}{-5}x^{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$ [Ley (4)]

3. $\int \sqrt[3]{z}\,dz = \int z^{1/3} dz = \frac{1}{4/3}z^{4/3} + C = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{z})^4 + C$ [Ley (4)]

4. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3} dx = \frac{1}{1/3}x^{1/3} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$ [Ley (4)]

5. $\int (2x^2 - 5x + 3)\,dx = 2\int x^2 dx - 5\int x\,dx + \int 3\,dx$

$$= 2(\tfrac{1}{3}x^3) - 5(\tfrac{1}{2}x^2) + 3x + C = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 3x + C \qquad \text{[Leyes (3)-(7)]}$$

6. $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (1-x)x^{1/2} dx = \int (x^{1/2} - x^{3/2})dx$

$$= \int x^{1/2} dx - \int x^{3/2} dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} - \frac{1}{5/2}x^{5/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{2}{5}x^{5/2} + C = 2x^{3/2}(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}x) + C \qquad \text{[Leyes (4) y (7)]}$$

7. $\int (3s+4)^2\,ds = \int (9s^2+24s+16)\,ds$

$$= 9(\tfrac{1}{3}s^3) + 24(\tfrac{1}{2}s^2) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C \qquad \text{[Leyes (3)-(6)]}$$

Obsérvese que hubiera sido más fácil por medio de la fórmula abreviada I:

$$\int (3s+4)^2\,ds = \tfrac{1}{3}\int (3s+4)^2 3\,ds = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}(3s+4)^3) + C = (\tfrac{1}{9})(3s+4)^3 + C$$

8. $\int \dfrac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 5x - 4\left(\dfrac{1}{-1}x^{-1}\right) + C$

[Leyes (3)-(7)] $\quad = \tfrac{1}{2}x^2 + 5x + \dfrac{4}{x} + C$

Use la fórmula abreviada I en los problemas 9 a 15.

9. $\int (s^3+2)^2(3s^2)\,ds = \tfrac{1}{3}(s^3+2)^3 + C$

10. $\int (x^3+2)^{1/2}x^2dx = \tfrac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2}3x^2dx = \tfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3/2}(x^3+2)^{3/2}\right) + C = \tfrac{2}{9}(x^3+2)^{3/2} + C$

11. $\int \dfrac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx = \tfrac{8}{3}\int (x^3+2)^{-3}3x^2dx = \tfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{-2}(x^3+2)^{-2}\right) + C = -\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(x^3+2)^2} + C$

12. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \tfrac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2dx = \tfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3/4}(x^3+2)^{3/4}\right) + C = \tfrac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$

13. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\tfrac{3}{4}\int -4x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

$$= -\tfrac{3}{4}\int -4x(1-2x^2)^{1/2}\,dx = -\tfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3/2}(1-2x^2)^{3/2}\right) + C$$

$$= -\tfrac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C$$

14. $\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx = -\tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x)\,dx$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4/3}(1-x^2)^{4/3}\right) + C = -\tfrac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$$

15. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx = \int (\operatorname{sen} x)^2\cos x\,dx = \tfrac{1}{3}(\operatorname{sen} x)^3 + C = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

En los problemas 16 a 18, aplique el método de sustitución.

16. $\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Sea $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Entonces, $du = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}dx$. Luego, $2\,du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Así,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\operatorname{sen} u + C = 2\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C$$

17. $\int x\sec^2(4x^2-5)\,dx.$

Sea $u = 4x^2 - 5$. Entonces, $du = 8x\,dx$, y $\tfrac{1}{8}du = x\,dx$. Así,

$$\int x\sec^2(4x^2-5)\,dx = \tfrac{1}{8}\int \sec^2 u\,du = \tfrac{1}{8}\tan u + C = \tfrac{1}{8}\tan(4x^2-5) + C$$

18. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx.$

Sea $u = x + 1$. Entonces, $du = dx$ y $x = u - 1$. Luego,

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\;du = \int (u^2-2u+1)u^{1/2}du$$
$$= \int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du = \tfrac{2}{7}u^{7/2}-2(\tfrac{2}{5})u^{5/2}+\tfrac{2}{3}u^{3/2}+C$$
$$= 2u^{3/2}(\tfrac{1}{7}u^2-\tfrac{2}{5}u+\tfrac{1}{3})+C$$
$$= 2(x+1)^{3/2}[\tfrac{1}{7}(x+1)^2-\tfrac{2}{5}(x+1)+\tfrac{1}{3}]+C$$

19. Se lanza una piedra desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies/segundo (pie/s). *a*) ¿Cuándo alcanza su máxima altura? *b*) ¿Cuál es la máxima altura? *c*) ¿Cuándo toca el suelo? *d*) ¿Cuál es la velocidad cuando llega al suelo?

En problemas de caída libre, $v = \int a\,dt$ y $s = \int v\,dt$ porque $a = \frac{dv}{dt}$ y $v = \frac{ds}{dt}$. Como $a = -32$ pies/s^2,

$$v = \int -32\,dt = -32t + C_1$$

Sea $t = 0$, y se observa que $C_1 = v_0$, la velocidad inicial en $t = 0$. Entonces, $v = -32t + v_0$. Por consiguiente,

$$s = \int (-32t + v_0)\,dt = -16t^2 + v_0t + C_2$$

Sea $t = 0$, y se observa que $C_2 = s_0$, la posición inicial en $t = 0$. Por tanto,

$$s = -16t^2 + v_0t + s_0$$

En este problema, $s_0 = 0$ y $v_0 = 64$. Entonces,

$$v = -32t + 64, \quad s = -16t^2 + 64t$$

a) A la altura máxima, $\frac{ds}{dt} = v = 0$. Así, $-32t + 64 = 0$ y, por ende, $t = 2$ segundos.

b) Cuando $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) = 64$ pies, la altura máxima.

c) Cuando la piedra llega al suelo, $0 = s = -16t^2 + 64t$. Al dividir entre t, $0 = -16t + 64$ y, por tanto, $t = 4$.

d) Cuando $t = 4$, $v = -32(4) + 64 = -64$ pies/s.

20. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 2) y que tiene pendiente $5x^2 - x + 1$ en cada punto (x, y).

Como la pendiente es la derivada, $dy/dx = 5x^2 - x + 1$, entonces

$$y = \int (5x^2 - x + 1)\,dx = \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x + C$$

Como (3, 2) está en la curva, $2 = \frac{5}{3}(3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 3 + C = 45 - \frac{9}{2} + 3 + C$. Por consiguiente, $C = -\frac{83}{2}$. Por tanto, la ecuación de la curva es

$$y = \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{83}{2}$$

21. Justifique el método de sustitución: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\,du$.

Aquí, $u = g(x)$ y $du/dx = g'(x)$. Por la regla de la cadena,

$$D_x\left(\int f(u)\,du\right) = D_u\left(\int f(u)\,du\right)\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot\frac{du}{dx} = f(g(x))\cdot g'(x)$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 22 a 44, evalúe la antiderivada indicada.

22. $\int \frac{(1+x^2)}{\sqrt{x}}\,dx$ *Respuesta*: $2x^{1/2}(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x^2)+C$

23. $\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}\,dx$ *Respuesta*: $\frac{x^2}{x+1}+C$

24. $\int \cos 3x\,dx$ *Respuesta*: $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

25. $\int \frac{\operatorname{sen} y\,dy}{\cos^2 y}$ *Respuesta*: $\sec y + C$

26. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ (*Sugerencia:* multiplique el numerador y el denominador por $1 - \cos x$.)

Respuesta: $-\cot x + \operatorname{cosec} x + C$

27. $\int (\tan 2x + \sec 2x)^2\,dx$ *Respuesta*: $\tan 2x + \sec 2x - x + C$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ *Respuesta*: $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

29. $\int \frac{dx}{9+x^2}$ *Respuesta*: $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ (*Sugerencia:* factorice 16 fuera de radical.)

Respuesta: $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{4x}{5}\right)+C$

31. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ (*Sugerencia:* factorice el 4 del denominador o haga la sustitución $u = 2x$)

Respuesta: $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$ (*Sugerencia:* factorice el 4 del radical o haga la sustitución $u = 2x$)

Respuesta: $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

33. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ (*Sugerencia*: sustituya $u = x^3$) *Respuesta*: $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}(x^3)+C$

34. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3}$ (*Sugerencia:* sustituya $u = x^2$) *Respuesta*: $\frac{\sqrt{3}}{6}\tan^{-1}\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{3}\right)+C$

35. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ *Respuesta*: $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)+C$

36. $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx$ *Respuesta*: $\frac{3x^2}{2}-4x+4\tan^{-1}x+C$

37. $\int \frac{\sec x \tan x\,dx}{9+4\sec^2 x}$ *Respuesta*: $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2\sec x}{3}\right)+C$

38. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *Respuesta*: $-\sqrt{1-x^2}+3\operatorname{sen}^{-1}x+C$

39. $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$ *Respuesta*: $\frac{\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}\left(\frac{(x+5)\sqrt{5}}{5}\right)+C$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$ *Respuesta:* $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-4}{6}\right)+C$

41. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$ *Respuesta:* $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+C$

42. $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$ *Respuesta:* $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+6}{8}\right)+C$

43. $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ *Respuesta:* $-\sqrt{5-4x-x^2}+\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$

44. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$ *Respuesta:* $-\sqrt{4x-x^2}+4\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

En los problemas 45 a 52 utilice la fórmula abreviada I.

45. $\int (x-2)^{3/2}dx$ *Respuesta:* $\frac{2}{5}(x-2)^{5/2}+C$

46. $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ *Respuesta:* $-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ *Respuesta:* $2\sqrt{x+3}+C$

48. $\int \sqrt{3x-1}\,dx$ *Respuesta:* $\frac{2}{9}(3x-1)^{3/2}+C$

49. $\int \sqrt{2-3x}\,dx$ *Respuesta:* $-\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2}+C$

50. $\int (2x^2+3)^{1/3}x\,dx$ *Respuesta:* $\frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3}+C$

51. $\int \sqrt{1+y^4}\,y^3\,dy$ *Respuesta:* $\frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2}+C$

52. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^3}$ *Respuesta:* $-\frac{1}{4(x^2+4)^2}+C$

En los problemas 53 a 64 utilice cualquier método.

53. $\int (x-1)^2x\,dx$ *Respuesta:* $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

54. $\int (x^2-x)^4(2x-1)\,dx$ *Respuesta:* $\frac{1}{5}(x^2-x)^5+C$

55. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ *Respuesta:* $\sqrt{x^2+2x-4}+C$

56. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$ *Respuesta:* $\frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C$

57. $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,dx$ *Respuesta:* $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C = 2x^{1/2}(\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x - 2) + C$

58. $\int \sec 3x \tan 3x\,dx$ *Respuesta:* $\frac{1}{3}\sec 3x + C$

59. $\int \operatorname{cosec}^2(2x)\,dx$ *Respuesta:* $-\frac{1}{2}\cot 2x + C$

60. $\int x\sec^2(x^2)\,dx$ *Respuesta:* $\frac{1}{2}\tan(x^2) + C$

61. $\int \tan^2 x\,dx$ *Respuesta:* $\tan x - x + C$

62. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx$ *Respuesta:* $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

63. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ *Respuesta:* $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x\sqrt{5}}{5}\right) + C$

64. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{1-4\tan^2 x}$ *Respuesta:* $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(2\tan x) + C$

65. Se lanza una piedra hacia arriba desde el borde de un edificio, a 120 pies de altura, con una velocidad inicial de 96 pies/segundo (pie/s). *a*) ¿Cuándo alcanzará su altura máxima? *b*) ¿Cuál será su altura máxima? *c*) ¿Cuándo tocará el suelo? *d*) ¿Con qué rapidez llegará al suelo?

Respuestas: *a*) $t = 3$ s; *b*) 264 pies; *c*) $\frac{6+\sqrt{66}}{2} \sim 7.06$ s; *d*) ~129.98 pies/s

66. Un objeto se desplaza sobre el eje x con aceleración $a = 3t - 2$ pies/s^2. En el instante $t = 0$, está en el origen y se mueve con una velocidad de 5 pies/s en dirección negativa. *a*) Halle una fórmula para su velocidad v. *b*) Encuentre la fórmula para su posición x. *c*) ¿Cuándo y dónde cambia de dirección? *d*) ¿En qué instantes se mueve hacia la derecha?

Respuestas: *a*) $v = \frac{3}{2}t^2 - 2t - 5$; *b*) $x = \frac{1}{2}t^3 - t^2 - 5t$; *c*) $\frac{2 \pm \sqrt{34}}{3}$; *d*) $t > \frac{2+\sqrt{34}}{3}$ o $t < \frac{2-\sqrt{34}}{3}$

67. Un cohete lanzado hacia arriba desde el suelo regresa a éste 8 segundos (s) más tarde. *a*) ¿Cuál fue la velocidad inicial? *b*) ¿Cuál fue su máxima altura?

Respuestas: *a*) 128 pies/s; *b*) 256 pies

68. En una vía recta, un conductor frena cuando el auto va a 55 millas por hora (mi/h). Los frenos producen una desaceleración constante de 11 pies/s^2. *a*) ¿Cuándo parará el auto? *b*) ¿Cuánto se desplazará después de haber presionado los frenos?

Respuestas: *a*) 5 segundos; *b*) 137.5 pies

69. Halle la ecuación de la curva que pasa por el punto (3, 7) y que tiene pendiente $4x^2 - 3$ en (x, y).

Respuesta: $y = \frac{4}{3}x^3 - 3x - 20$

23

La integral definida. Área bajo una curva

Notación sigma

La letra griega mayúscula Σ (sigma) representa la suma repetida.

EJEMPLO 23.1.

a) $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5 = 15.$

b) $\sum_{i=0}^{3} (2i+1) = 1+3+5+7.$

c) $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2+3^2+\cdots+(10)^2.$

d) $\sum_{j=1}^{4} \cos j\pi = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

En general, si f es una función definida en los enteros y si n y k son enteros tales que $n \geq k$, entonces:

$$\sum_{j=k}^{n} f(j) = f(k) + f(k+1) + \cdots + f(n)$$

Área bajo una curva

Supóngase que f es una función tal que $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo cerrado $[a, b]$. Su gráfica es una curva que queda sobre o por encima del eje x (fig. 23.1). Se tiene la idea intuitiva del *área* A de la región $\mathscr{R}$ bajo la gráfica, encima del eje x y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Se especificará un método para evaluar A.

Se escogen los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre a y b. Sea $x_0 = a$ y $x_n = b$. Luego (fig. 23.2),

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

El intervalo $[a, b]$ se divide en n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Las longitudes de estos intervalos se simbolizan con $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$. Por tanto, si $1 \leq k \leq n$,

$$\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$$

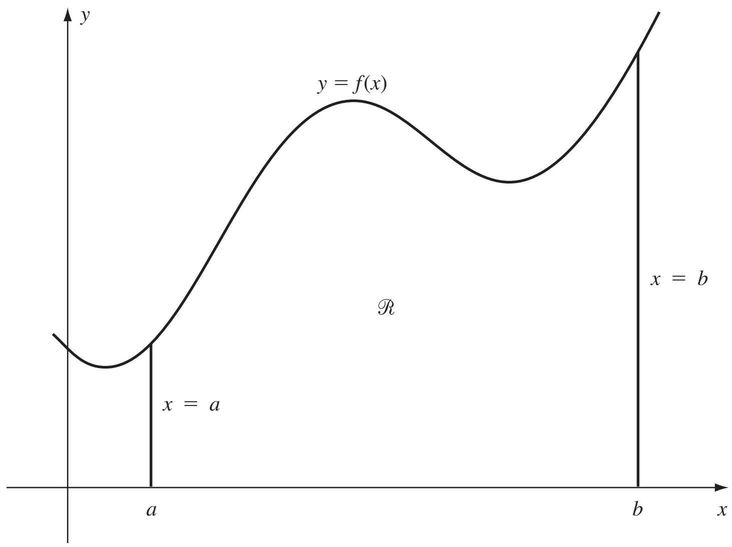


Fig. 23.1

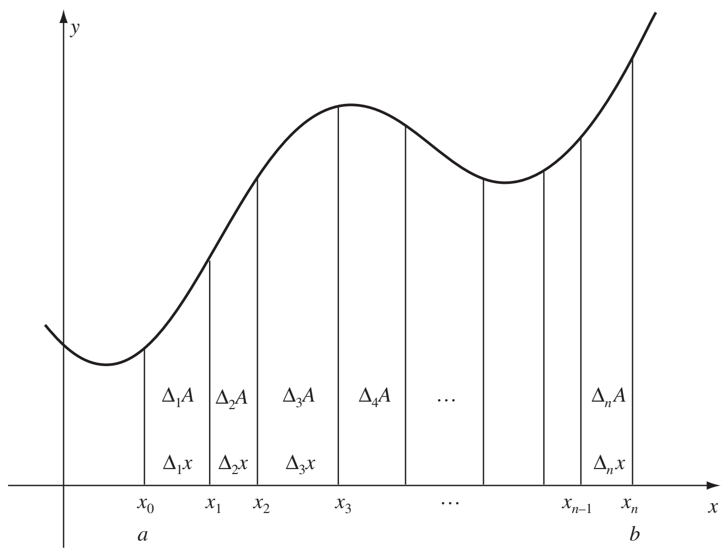


Fig. 23.2

Se trazan los segmentos de recta vertical $x = x_k$ desde el eje x hasta la gráfica, con lo que se divide la región $\mathcal{R}$ en n franjas. Si $\Delta_k A$ representa el área de la franja k-ésima se obtiene

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k A$$

Es posible aproximar el área $\Delta_k A$ de la manera siguiente: se selecciona cualquier punto x_k^* en el subintervalo k-ésimo $[x_{k-1}, x_k]$. Se traza el segmento de recta vertical que va desde el punto x_k^* sobre el eje x hasta la gráfica (obsérvense las líneas punteadas de la figura 23.3); la longitud de este segmento es $f(x_k^*)$. El rectángulo con base $\Delta_k x$ y altura $f(x_k^*)$ tiene el área $f(x_k^*)\Delta$kx, que es aproximadamente el área $\Delta_k A$ de la franja k-ésima. Por tanto, el área total A bajo la curva es aproximadamente la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x = f(x_1^*)\,\Delta_1 x + f(x_2^*)\,\Delta_2 x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta_n x \tag{1}$$

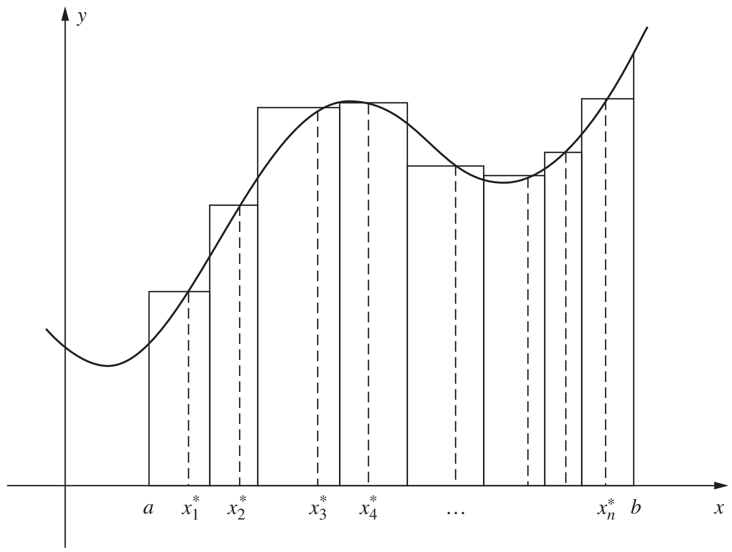


Fig. 23.3

La aproximación mejora cada vez que se divide el intervalo $[a, b]$ en más y más subintervalos y cuando las longitudes de éstos se hacen mucho más pequeñas. Si las aproximaciones sucesivas pueden hacerse tan próximas a un número específico como se desee, entonces ese número se representará por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y se denominará la *integral definida* de f desde a hasta b. Ese número no existe en todos los casos, pero sí existe, por ejemplo, cuando la función f es continua en $[a, b]$. Cuando $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, su valor es igual al área A bajo la curva.*

En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, b se denomina *límite superior* y a se llama *límite inferior* de la integral definida.

Para cualquier función (no necesariamente no negativa) f en $[a, b]$, pueden definirse las sumas de la forma (1) sin utilizar la noción de área. Si hay un número al que puedan aproximarse tales sumas tanto como se desee, a medida que n se vuelve más y más grande y cuando el máximo de las longitudes $\Delta_k x$ tiende a 0, entonces ese número se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$ y se denomina *integral definida* de f en $[a, b]$.

Cuando $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, se dice que f es *integrable* en $[a, b]$.

Supóngase, sin verificación, que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para toda función f que sea continua en $[a, b]$. Si se desea evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ basta hallar el límite de una secuencia de sumas (1) para las cuales el número n de subintervalos tiende a infinito y las longitudes máximas de los subintervalos se aproximan a 0.

EJEMPLO 23.2. Demuéstrese entonces que

$$\int_a^b 1\,dx = b - a \tag{2}$$

Sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ una subdivisión de $[a, b]$. Entonces, una suma correspondiente (1) es

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x \qquad (\text{porque } f(x) = 1 \text{ para toda } x)$$

$$= b - a$$

Como toda suma de aproximación es $b - a$, $\int_a^b 1\,dx = b - a$.

* La integral definida también se denomina *integral de Riemann* de f en $[a, b]$, y la suma (1) se conoce como la *suma Riemann* para f en $[a, b]$.

Otro argumento sería utilizar el hecho de que la región que está bajo la gráfica de la función constante 1 y por encima del eje x, entre $x = a$ y $x = b$, es un rectángulo con base $b - a$ y altura 1 (fig. 23.4). Entonces, $\int_a^b 1\,dx$, el área de dicho rectángulo, es $b - a$.

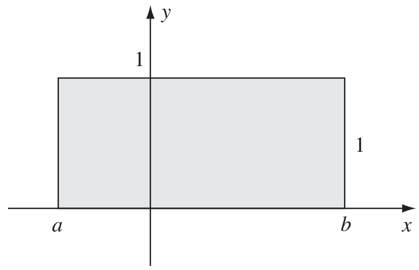


Fig. 23.4

EJEMPLO 23.3. Calcula $\int_a^b x\,dx$.

Sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < x_n = b$ una subdivisión de $[a, b]$ en n subintervalos iguales. Luego, cada $\Delta_k x = (b - a)/n$. Represente $(b - a)/n$ mediante Δx. Entonces, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\,\Delta x$ y, en general, $x_k = a + k\,\Delta x$.
En el k-ésimo subintervalo, $[x_{k-1}, x_k]$, escoge x_k^* como el extremo (terminal) derecho x_k. Así, una suma de aproximación (1) tiene la forma

$$\begin{aligned} f(x_k^*)\,\Delta_k x &= \sum_{k=1}^{n} x_k^*\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n}(a + k\,\Delta x)\,\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a\,\Delta x + k(\Delta x)^2) = \sum_{k=1}^{n} a\,\Delta x + \sum_{k=1}^{n} k(\Delta x)^2 \\ &= n(a\,\Delta x) + (\Delta x)^2 \sum_{k=1}^{n} k = n\left(a\frac{b-a}{n}\right) + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2\,\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado el hecho de que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (repase el problema 5).

Ahora, cuando $n \to \infty$, $(n + 1)/n = 1 + 1/n \to 1 + 0 = 1$. Por tanto, el límite de las sumas de aproximación es

$$a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 = (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Luego, $\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

En el capítulo siguiente se presenta un método para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ que evitará el tipo de cálculo tedioso utilizado en este ejemplo.

Propiedades de la integral definida

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Esto resulta del hecho de que una suma de aproximación $\sum_{k=1}^{n} cf(x_k^*)\,\Delta_k x$ para $\int_a^b cf(x)\,dx$ es igual a c veces la suma de aproximación $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x$ para $\int_a^b f(x)\,dx$, y la misma relación se cumple para los límites correspondientes.

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

Éste es el caso especial de (3) cuando $c = -1$.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{5}$$

Esto es resultado de que una sumatoria $\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^*)+g(x_k^*))\,\Delta_k x$ para $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ es igual a la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x+\sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\,\Delta_k x$ de sumatorias de aproximación para $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$.

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx \tag{6}$$

Como $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$, esto se sigue de (5) y (4).

Si $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a, b]$ si sólo y si es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. Además, si f es integrable en $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^a f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \tag{7}$$

Esto es obvio cuando $f(x) \geq 0$ y se interpretan los integrales como áreas. El resultado general se obtiene de observar las sumas de aproximación correspondientes, aunque el caso en el que uno de los subintervalos de $[a, b]$ que contiene c requiera algún razonamiento adicional.

Se ha definido $\int_a^b f(x)\,dx$ sólo cuando $a < b$. Se puede ampliar la definición a todos los casos posibles de la manera siguiente:

i) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

ii) $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ cuando $a < b$

En particular, siempre se tiene que:

$$\int_c^d f(x)\,dx=-\int_d^c f(x)\,dx \text{ para todo } c \text{ y } d \tag{8}$$

Se puede comprobar de inmediato que las leyes (2) a (6), la ecuación (7) y el resultado del ejemplo 3 son válidos para límites superior e inferior arbitrarios en las integrales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea $f(x) \leq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea A el área entre la gráfica de f y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$ (fig. 23.5). Demuestre que $\int_c^b f(x)\,dx=-A$.

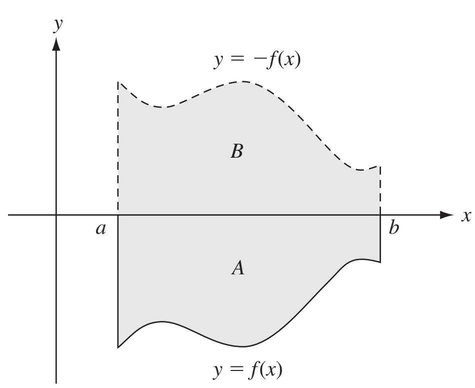


Fig. 23.5

Sea B el área entre la gráfica de $-f$ y el eje x, desde $x = a$ hasta $x = b$. Por simetría, $B = A$. Pero $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$ por (4).

Como $\int_a^b -f(x)\,dx=B \quad \int_a^b f(x)\,dx=-B=-A$

2. Considere una función f que, entre a y b, asume tanto valores positivos como negativos. Por ejemplo, sea su gráfica como la de la figura 23.6. Entonces, $\int_a^b f(x)\,dx$ es la diferencia entre la suma de las áreas por encima del eje x y por debajo de la gráfica y entre la suma de las áreas debajo del eje x y por encima de la gráfica. En el caso de la gráfica mostrada en la figura 23.6,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (A_1 + A_3 + A_5) - (A_2 + A_4)$$

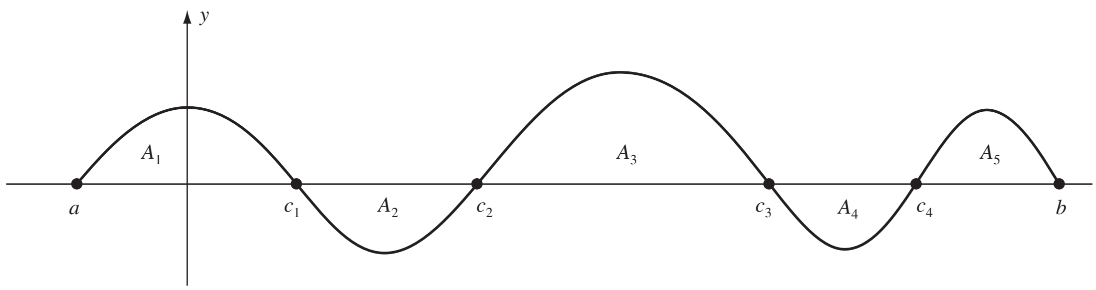


Fig. 23.6

Para comprobarlo, aplique (7) y el problema 1:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{c_4} f(x)\,dx + \int_{c_4}^{b} f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

3. Sean f y g integrables en $[a, b]$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

c) Si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

a) Como toda suma de aproximación $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x \geq 0$, resulta que

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

b) $g(x) - f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Entonces, por *a*), $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0$. Por (6), $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Por consiguiente,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

c) Por *b*), $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$. Pero por (2) y (3) $\int_a^b m\,dx = m\int_a^b 1\,dx = m(b-a)$ y $\int_a^b M\,dx = M\int_a^b 1\,dx = M(b-a)$. En consecuencia,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

4. Evalúe $\int_0^1 x^2\,dx$.

Ésta es el área bajo la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$. Divida $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Luego, cada $\Delta_k x = 1/n$, en el k-ésimo subintervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ sea x_k^* el extremo derecho k/n. Por consiguiente, la suma de aproximación (1) es

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Ahora, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (revise el problema 12). Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta_k x = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)(2+\frac{1}{n})$$

Entonces, las sumas de aproximación tienden a $\frac{1}{6}(1+0)(2+0)=\frac{1}{3}$, cuando $n \to \infty$. Por ende, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. En el capítulo siguiente se deducirá un método más simple para obtener el mismo resultado.

5. Demuestre la fórmula $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ utilizada en el ejemplo 3.

Al invertir el orden de los sumandos en

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$$

Al sumar las dos ecuaciones se obtiene

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1) = n(n+1)$$

porque la suma en cada columna es $n + 1$. Por tanto, al dividir entre 2 se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6. Calcule: *a*) $\int_1^4 3\,dx$; *b*) $\int_{-2}^5 x\,dx$; *c*) $\int_0^1 3x^2\,dx$.

Respuestas: *a*) $3(4 - 1) = 9$; *b*) $\frac{1}{2}(5^2-(-2)^2)=\frac{21}{2}$; *c*) $3(\frac{1}{3})=1$

7. Halle el área bajo la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, por encima del eje x y entre $x = 0$ y $x = 1$.

Respuesta: $\frac{1}{3}-2[\frac{1}{2}(1^2-0^2)]+2(1-0)=\frac{4}{3}$

8. Evalúe $\int_2^6 (3x+4)\,dx$.

Respuesta: $3((\frac{1}{2})(6^2-2^2))+4(6-2)=64$

9. Para la función f graficada en la figura 23.7, expresa $\int_0^3 f(x)\,dx$ en términos de las áreas A_1, A_2 y A_3.

Respuesta: $A_1 - A_2 + A_3$

10. Demuestre que $3 \le \int_1^4 x^3\,dx \le 192$ [*Sugerencia*: repase el problema 3*c*).]

11. Evalúe $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. (*Sugerencia:* halle el área correspondiente por razonamiento geométrico.)

Respuesta: $\pi/4$

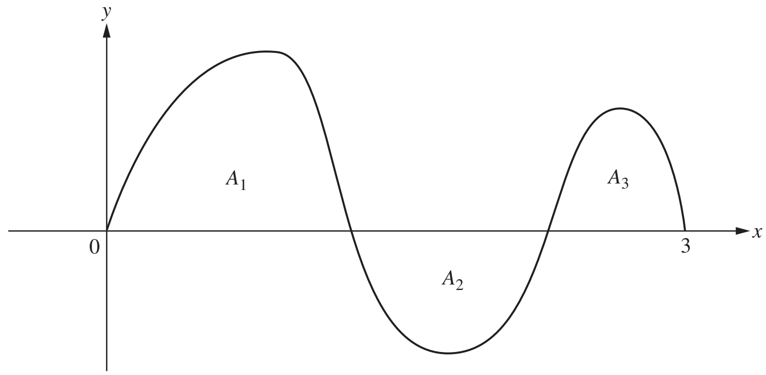


Fig. 23.7

12. Utilice la inducción matemática para demostrar la fórmula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ del problema 4. (Compruébelo cuando $n = 1$ y luego demuestre que, si se cumple para n, se cumple para $n + 1$.)

13. Evalúe *a*) $\sum_{j=0}^{2} \cos\frac{j\pi}{6}$; *b*) $\sum_{j=0}^{2}(4j+1)$; *c*) $\sum_{j=1}^{100} 4j$; *d*) $\sum_{j=1}^{18} 2j^2$.

Respuestas: *a*) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; *b*) 15; *c*) 20 200; *d*) 4218

14. Sea la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = 6$ como el de la figura 23.8. Evalúe $\int_1^6 f(x)\,dx$.

Respuesta: $1-3+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

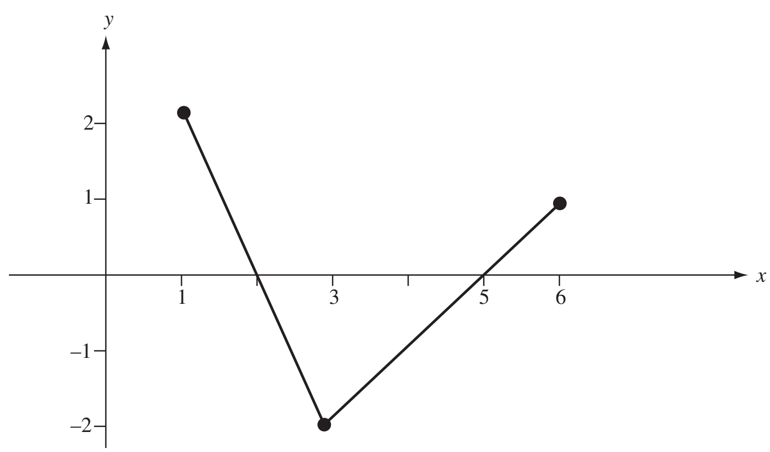


Fig. 23.8

15. Si f es continua en $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ y $f(x_0) > 0$ para algún x_0 en $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. [*Sugerencia:* por la continuidad de f, $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) > 0$ para toda x en algún subintervalo $[c, d]$. Use la fórmula (7) y el problema 3*a*, *c*).]

24

Teorema fundamental del cálculo

Teorema del valor medio para integrales

Sea f continua en $[a, b]$. Así, existe c en $[a, b]$ tal que

$$\int_b^a f(x)dx = (b-a)f(c) \tag{24.1}$$

Para comprobarlo, sean m y M los valores máximos y mínimos de f en $[a, b]$. Se aplica entonces el problema 3*c*) del capítulo 23 para obtener

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \text{y, por consiguiente,} \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Luego, por el teorema del valor intermedio, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$ para algún c en $[a, b]$.

Valor promedio de una función en un intervalo cerrado

Sea f definida en $[a, b]$. Cuando f puede asumir infinitamente muchos valores en $[a, b]$, no es posible hablar de promedio de todos los valores de f. Más bien, se divide $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Se selecciona un punto arbitrario x_k^* en el k-ésimo subintervalo, de manera que el promedio de los valores $f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*)$ es

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \ldots + f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)$$

Cuando n es grande, este valor es un buen estimado "del valor promedio de f en $[a, b]$". Sin embargo, como $\frac{1}{n} = \frac{1}{b-a}\Delta x$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Cuando $n \to \infty$, la suma de la derecha tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$. De ahí surge la definición siguiente.

Definición. El *valor promedio* de f en $[a, b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Sea f continua en $[a, b]$. Si x está en $[a, b]$, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una función de x, y:

$$D_x\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \tag{24.2}$$

En el problema 4 hallará una demostración.

Teorema fundamental del cálculo

Sea f continua en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int f(x)\,dx$, es decir, F es una antiderivada de f. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{24.3}$$

Obsérvese que por (24.2), $\int_a^x f(t)\,dt$ y $F(x)$ tienen la misma derivada, $f(x)$. Por tanto, como se advierte en el problema 18 del capítulo 13, hay una constante K tal que $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + K$. Cuando $x = a$, se obtiene

$$F(a) + K = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{ luego}, \ K = -F(a)$$

Por tanto, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$. Cuando $x = b$, se tiene

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

La ecuación (24.3) brinda una forma simple de calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando se puede hallar una antiderivada F de f. La expresión $F(b) - F(a)$ a la derecha de 24.3 a menudo se abrevia como $F(x)\Big]_a^b$. Entonces, el teorema fundamental del cálculo puede escribirse como sigue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

EJEMPLO 24.1.

i) La complicada evaluación de $\int_a^b x\,dx$ en el ejemplo 23.3 del capítulo 23 puede sustituirse por la siguiente, que es más simple:

$$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big]_a^b = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

ii) Los cálculos tediosos de $\int_0^1 x^2\,dx$ del problema 4 del capítulo 23 pueden remplazarse por

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}1^3 - \tfrac{1}{3}0^3 = \tfrac{1}{3}$$

iii) En general, $\int_a^b x^r\,dx = \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}\Big]_a^b = \dfrac{1}{r+1}(b^{r+1} - a^{r+1})$ para $r \neq -1$

Cambio de variable en una integral definida

Al calcular una integral definida mediante el teorema fundamental se requiere una antiderivada $\int f(x)\,dx$. En el capítulo 22 se observó que una sustitución de una nueva variable u algunas veces es útil al hallar $\int f(x)\,dx$. Cuando la sustitución también se hace en la integral definida, los límites de integración deben sustituirse por los valores correspondientes de u.

EJEMPLO 24.2. Evalúa $\int_1^9 \sqrt{5x+4}\,dx$.

Sea $u = 5x + 4$. Entonces, $du = 5dx$. Cuando $x = 1$, $u = 9$, y cuando $x = 9$, $u = 49$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \sqrt{5x+4}\,dx &= \int_9^{49} \sqrt{u}\,\tfrac{1}{5}\,du = \tfrac{1}{5}\int_9^{49} u^{1/2}\,du \\
&= \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big]_9^{49} \quad \text{(por el teorena fundamental)} \\
&= \tfrac{2}{15}(49^{3/2} - 9^{3/2}) = \tfrac{2}{15}[(\sqrt{49})^3 - (\sqrt{9})^3] \\
&= \tfrac{2}{15}(7^3 - 3^3) = \tfrac{2}{15}(316) = \tfrac{632}{15}
\end{aligned}$$

Consulta la justificación de este método en el problema 5.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Evalúe $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$.

$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x$ por la fórmula abreviada I. Así, por el teorema fundamental,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{3}\left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^3 - (\operatorname{sen} 0)^3\right] = \tfrac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \tfrac{1}{3}$$

2. Halle el área bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, por encima del eje x, y entre 0 y 1.

El área es $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^1 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$

3. Halle el valor promedio de $f(x) = 4 - x^2$ en [0, 2].

El valor promedio es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \tfrac{1}{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^2 = \tfrac{1}{2}[\left(8 - \tfrac{8}{3}\right) - (0 - 0)] = \tfrac{8}{3}$$

4. Demuestre la fórmula (24.2): $D_x\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x)$.

Sea $h(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces:

$$\begin{aligned} h(x+\Delta x) - h(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{(por 23.7)} \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\, dt \\ &= \Delta x \cdot f(x^*) \qquad \text{para algún } x^* \text{ entre } x \text{ y } x+\Delta x \text{ (por el teorema del valor medio para integrales)} \end{aligned}$$

Así, $\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = f(x^*)$ y, por consiguiente,

$$D_x\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = D_x(h(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x^*)$$

Pero cuando $\Delta x \to 0$, $x + \Delta x \to x$ y, por ello, $x^* \to x$ (como x^* está entre x y $x + \Delta x$). Entonces, f es continua, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x^*) = f(x)$.

5. Justifique un cambio de variable en una integral definida en el siguiente sentido preciso. Dada $\int_a^b f(x)\, dx$, sea $x = g(u)$ donde, cuando x varía de a a b, u crece o decrece de c a d (véase la figura 24.1 para el caso en que u es creciente). Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\, du$$

(El lado derecho se obtiene al sustituir $g(u)$ por x, $g'(u)\, du$ por dx, y cambiar los límites de integración desde a y b hasta c y d.)

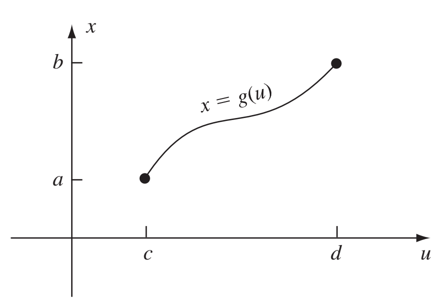


Fig. 24.1

Sea $F(x) = \int f(x)\,dx$, es decir, $F'(x) = f(x)$. Por la regla de la cadena,

$$D_u(F(g(u))) = F'(g(u)) \cdot g'(u) = f(g(u))g'(u) \qquad \text{Así,} \qquad \int f(g(u))g'(u)\,du = F(g(u))$$

Entonces, por el teorema fundamental,

$$\int_c^d f(g(u))g'(u)\,du = F(g(u))\Big]_c^d = F(g(d)) - F(g(c))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

6. *a*) Si f es una función par, demuestre que, para $a > 0$, $a > 0$, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f es una función impar, demuestre que, para $a > 0$, $a > 0$, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Sea $u = -x$. Entonces, $du = -dx$, y

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-u)(-1)\,du = -\int_a^0 f(-u)\,du = \int_0^a f(-u)\,du$$

Al rescribir u como x en la última integral queda:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx \qquad (*)$$

Luego,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (\text{por}\,(23.7))$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (\text{por}(*))$$

$$= \int_0^a f(-x) + f(x)\,dx \qquad [\text{por}\ (23.5)]$$

a) Si f es par, $f(-x) + f(x) = 2f(x)$; luego $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a 2f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f es impar, $f(-x) + f(x) = 0$; luego $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a 0\,dx = 0\int_0^a 1\,dx = 0$.

7. Regla del trapecio

a) Sea $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Divida $[a, b]$ en n partes iguales, cada una de longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, por medio de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. [fig. 24.2a)]. Demuestre la siguiente regla, llamada *regla del trapecio*:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right)$$

b) Use la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^1 x^2\,dx$.

a) El área de la franja que está sobre $[x_{k-1}, x_k]$ es aproximadamente el área del trapecio $ABCD$ en la figura 24.2*b*), $\frac{1}{2}\Delta x(f(x_{k-1}) + f(x_k))$.* (Recuérdese que $x_0 = a$ y $x_n = b$.) Entonces, el área bajo la curva se aproxima por la suma de las áreas de trapecios.

$$\frac{\Delta x}{2}\{[f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)]\} = \frac{\Delta x}{2}[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]$$

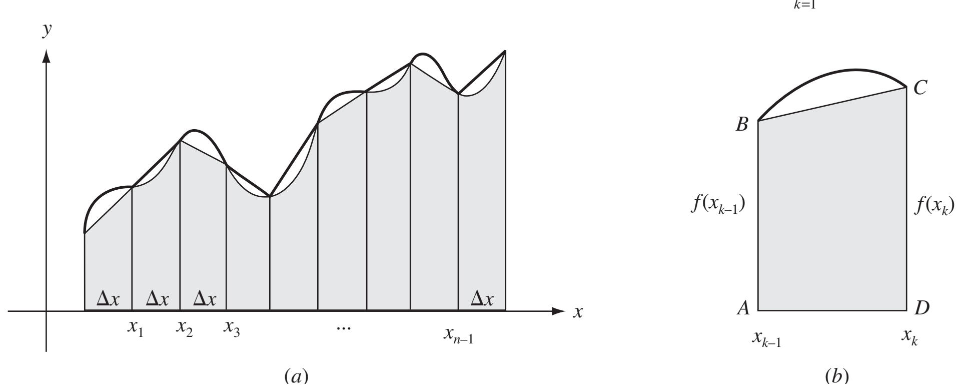


Fig. 24.2

* Recuérdese que el área de un trapecio de altura h y bases b_1 y b_2 es $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$.

b) Con $n = 10$, $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = \frac{1}{10}$ y $x_k = \frac{k}{10}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &\sim \frac{1}{20}\left(0^2 + 2\sum_{k=1}^{9}\frac{k^2}{100} + 1^2\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{2}{100}\sum_{k=1}^{9}k^2 + 1\right)\\ &= \frac{1}{20}\left[\frac{2}{100}(285) + 1\right] \qquad \text{(por el problema 12 del capítulo 23)}\\ &= 0.335\end{aligned}$$

El valor exacto es $\frac{1}{3}$ [por el ejemplo 24.1*ii*) anterior].

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 8 a 22, utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral definida.

8. $\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)\,dx$ *Respuesta:* $\frac{4}{3}$

9. $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$ *Respuesta:* $\frac{10}{9}$

10. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *Respuesta:* 2

11. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x\,dx$ *Respuesta:* $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. $\int_0^2 (2 + x)\,dx$ *Respuesta:* 6

13. $\int_0^2 (2 - x)^2\,dx$ *Respuesta:* $\frac{8}{3}$

14. $\int_0^3 (3 - 2x + x^2)\,dx$ *Respuesta:* 9

15. $\int_{-1}^{2} (1 - t^2)t\,dt$ *Respuesta:* $-\frac{9}{4}$

16. $\int_1^4 (1 - u)\sqrt{u}\,du$ *Respuesta:* $-\frac{116}{15}$

17. $\int_1^8 \sqrt{1 + 3x}\,dx$ *Respuesta:* 26

18. $\int_0^2 x^2(x^3 + 1)\,dx$ *Respuesta:* $\frac{40}{3}$

19. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\,dx$ *Respuesta:* 2

20. $\int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2\,dx$ *Respuesta:* $\frac{1}{30}$

21. $\displaystyle\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx$ *Respuesta:* 6

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\,dt$ *Respuesta:* 4

En los problemas 23 a 26, utilice el problema 6*a, b*).

23. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4}\,dx$ *Respuesta:* $\dfrac{\pi}{4}$

24. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3-x^5)\,dx$ *Respuesta:* 0

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \operatorname{sen}\frac{x}{5}\,dx$ *Respuesta:* 0

26. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ *Respuesta:* 2

27. Pruebe $D_x\left(\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt\right)=-f(x)$.

28. Demuestre $D_x\left(\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$.

En los problemas 29 a 32, use los problemas 27 y 28 y la fórmula (24.2) para hallar la derivada indicada.

29. $D_x\left(\displaystyle\int_1^x \operatorname{sen} t\,dt\right)$ *Respuesta:* sen x

30. $D_x\left(\displaystyle\int_x^0 t^2\,dt\right)$ *Respuesta:* $-x^2$

31. $D_x\left(\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} t^3\,dt\right)$ *Respuesta:* $\operatorname{sen}^3 x \cos x$

32. $D_x\left(\displaystyle\int_{x^2}^{4x} \cos t\,dt\right)$ *Respuesta:* $4\cos 4x - 2x\cos x^2$

33. Calcule el valor promedio de las funciones siguientes en los intervalos indicados.

a) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ en [0, 1] *Respuesta:* $\dfrac{5}{6}$

b) $f(x)=\sec^2 x$ on $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ *Respuesta:* $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

c) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $[-1, 4]$ *Respuesta:* 12

d) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ en $[0, \pi]$ *Respuesta:* $\dfrac{2}{\pi}$

34. Utilice el método de cambio de variable para hallar $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{2x+3}\; x\,dx$.

Respuesta: $\dfrac{58}{5}$

35. Un objeto se mueve a lo largo del eje x durante un periodo de tiempo T. Si su posición inicial es x_1 y su posición final es x_2, demuestre que su velocidad promedio fue de $\dfrac{x_2-x_1}{T}$.

36. Sea $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{para } x<0\\ 1-x & \text{para } x\geq 0\end{cases}$. Evalúe $\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx$. *Respuesta:* $\frac{3}{2}$

37. Evalúe $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{3}^{3+h}\frac{5}{x^3+7}\,dx$. *Respuesta:* $\frac{5}{34}$

38. **(Regla del punto medio)** En una suma de aproximación (23.1) $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x$, si se selecciona x_k^* como el punto medio del k-ésimo subintervalo, la suma se obtiene por la regla del *punto medio*. Aplique la regla del punto medio para aproximar $\int_0^1 x^2\,dx$, mediante una división en cinco subintervalos iguales, y compare con el resultado exacto de $\frac{1}{3}$.

Respuesta: 0.33

39. (**Regla de Simpson**) Si se divide $[a, b]$ en n subintervalos iguales, donde n es par, la siguiente suma de aproximación para $\int_a^b f(x)\,dx$,

$$\frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

se obtiene por la *regla de Simpson*. Salvo por el primero y en el último términos, los coeficientes constan de 4 y 2 alternados. (La idea básica es utilizar parábolas como arcos de aproximación en lugar de segmentos de recta como en la regla del trapecio. La regla de Simpson generalmente es mucho más precisa que la regla del punto medio o la regla del trapecio.)

Aplica la regla de Simpson para aproximar *a*) $\int_0^1 x^2\,dx$ y b) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx$, con $n = 4$, y compara los resultados con las respuestas obtenidas por el teorema fundamental.

Respuestas: *a*) $\frac{1}{3}$, que es el número exacto; *b*) $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}+1)\sim 2.0046$ comparado con 2.

40. Considere $\int_0^1 x^3\,dx$. *a*) Demuestre que el teorema fundamental da la respuesta $\frac{1}{4}$. *b*) (CG) Con $n = 10$, aproxime (con cuatro cifras decimales) la integral por las reglas del trapecio, del punto medio y de Simpson.

Respuesta: regla del trapecio: 0.2525; del punto medio: 0.2488; de Simpson: 0.2500.

41. Evalúe:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{6n}\left[\sec^2\left(\frac{\pi}{6n}\right)+\sec^2\left(2\frac{\pi}{6n}\right)+\cdots+\sec^2\left((n-1)\frac{\pi}{6n}\right)+\frac{4}{3}\right]$

Respuestas: *a*) (a) $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx=0$; (b) $\int_0^{\pi/6}\sec^2 x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{3}$

42. *a*) Use una sustitución para evaluar $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (con ocho cifras decimales).

b) (CG) Utilice una graficadora para calcular la integral de *a*).

Respuestas: (a) $\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\sim 0.39052429$; (b) 0.39052429

43. (CG) Calcule $\int_0^{\pi/4} x\operatorname{sen}^3(\tan x)\,dx$ (con cuatro cifras decimales).

Respuesta: 0.0262

44. (CG) Considere $\int_1^2 x\sqrt[3]{x^5+2x^2-1}\,dx$. Calcule (con seis cifras decimales) su valor mediante las reglas del trapecio y la de Simpson (ambas con $n = 4$) y compare con el valor dado por una graficadora.

Respuestas: regla del trapecio: 3.599492; de Simpson: 3.571557; calculadora graficadora: 3.571639

25

El logaritmo natural

La forma tradicional de definir un logaritmo, $\log_a b$, es referirlo como el número u tal que $a^u = b$. Por ejemplo, $\log_{10}100 = 2$ porque $10^2 = 100$. Sin embargo, esta definición tiene un vacío teórico. El defecto consiste en que no se ha definido todavía a^u cuando u es un número racional, por ejemplo, $\sqrt{2}$ o π. Este vacío puede llenarse, pero ello necesitaría un desvío.* También se podría tomar un método distinto que a la postre resultaría en definiciones lógicamente irrefutables de las funciones logarítmicas y exponenciales. Una desventaja temporal es que la motivación para la definición inicial no será obvia.

El logaritmo natural

Ya está familiarizado con la fórmula

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (\text{con } r \neq -1)$$

El problema sigue siendo determinar qué sucede cuando $r = -1$, es decir, encontrar la antiderivada de x^{-1}.

En la figura 25.1 se muestra la gráfica de $y = 1/t$, para $t > 0$. Se trata de una rama de la hipérbola. Para $x > 1$, la integral definida

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

es el valor del área que está bajo la curva $y = 1/t$ y por encima del eje t, entre $t = 1$ y $t = x$.

Definición

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ para $x > 0$

La función $\ln x$ se denomina *logaritmo natural*. Las razones para llamarlo logaritmo se aclararán posteriormente. Por (24.2),

(25.1) $$D_x(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0$$

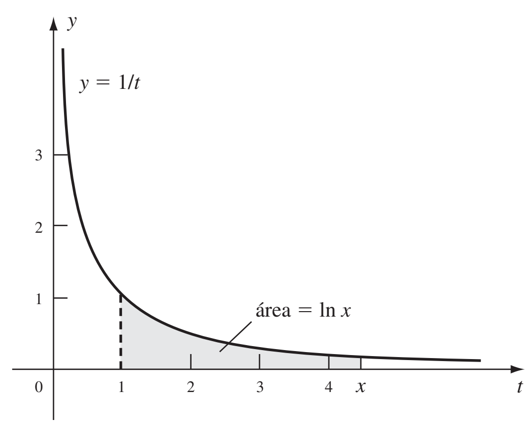


Fig. 25.1

* En algunos textos de cálculo tan sólo se ignora esta dificultad. Se considera que a^u está definida cuando $a > 0$ y u es *cualquier* número real y que las reglas exponenciales usuales son válidas.

Por tanto, el logaritmo natural es la antiderivada de x^{-1}, pero sólo en el intervalo $(0, +\infty)$. A continuación se construirá una antiderivada en (25.5) para todo $x \neq 0$.

Propiedades del logaritmo natural

(25.2) $\ln 1 = 0$, porque $\ln\ 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$

(25.3) Si $x > 1$, entonces $\ln x > 0$

Esto es cierto en virtud de que $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ representa un área, o por el problema 15 del capítulo 23.

(25.4) Si $0 < x < 1$, entonces $\ln x < 0$

$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$ por (23.8). Ahora, para $0 < x < 1$, si $x \leq t \leq 1$, entonces $1/t > 0$ y, por consiguiente, por el problema 15 del capítulo 23, $\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt > 0$.

(25.5) *a*) $D_x(\ln|x|) = \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$

b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\ |x| + C$ para $x \neq 0$

El argumento es simple. Para $x > 0$, $|x| = x$ y, entonces, $D_x\ (\ln |x|) = D_x\ (\ln x) = 1/x$ por (25.1). Para $x < 0$, $|x| = -x$ y, entonces,

$$D_x(\ln|x|) = D_x(\ln(-x)) = D_u(\ln u)D_x(u) \qquad \text{(regla de la cadena, con } u = -x > 0)$$

$$= \left(\frac{1}{u}\right)(-1) = \frac{1}{-u} = \frac{1}{x}$$

EJEMPLO 25.1. $D_x(\ln|3x+2|) = \dfrac{1}{3x+2}D_x(3x+2)$ (Regla de la cadena)

$$= \frac{3}{3x+2}$$

(25.6) $\ln uv = \ln u + \ln v$

Nótese que

$$D_x(\ln(ax)) = \frac{1}{ax}D_x(ax) \qquad \text{(por la regla de la cadena y (25.1))}$$

$$= \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x} = D_x(\ln x)$$

Por tanto, $\ln\ (ax) = \ln x + K$ para alguna constante K (por el problema 18 del capítulo 13). Cuando $x = 1$, $\ln a = \ln 1 + K = 0 + K = K$. Entonces, $\ln\ (ax) = \ln x + \ln a$. Al sustituir a y x por u y v se obtiene (25.6).

(25.7) $\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

En (25.6), se remplaza u por $\dfrac{u}{v}$.

(25.8) $\ln\dfrac{1}{v} = -\ln v$

En (25.7), se sustituye u por 1 y se utiliza (25.2).

(25.9) $\ln(x^r) = r\ln x$ para todo número racional r y $x > 0$.

Por la regla de la cadena, $D_x(\ln(x^r)) = \dfrac{1}{x^r}(rx^{r-1}) = \dfrac{r}{x} = D_x(r\ln x)$. Entonces, por el problema 18 del capítulo 13, $\ln(x^r) = r\ln x + K$ para alguna constante K. Cuando $x = 1$, $\ln 1 = r\ln 1 + K$. Como $\ln 1 = 0$, $K = 0$, lo que resulta en (25.9).

EJEMPLO 25.2. $\ln \sqrt[3]{2x-5} = \ln (2x-5)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln (2x-5)$.

(25.10) $\ln x$ es una función creciente.

$D_x(\ln x) = \dfrac{1}{x} > 0$ como $x > 0$. Ahora se utiliza el teorema 13.7.

(25.11) $\ln u = \ln v$ implica que $u = v$.

Ésta es una consecuencia directa de (25.10). Si $u \neq v$, entonces $u < v$ o bien, $v < u$ y, por consiguiente, $\ln u < \ln v$ o $\ln v < \ln u$.

(25.12) $\dfrac{1}{2} < \ln 2 < 1$

El área bajo la gráfica de $y = 1/t$, entre $t = 1$ y $t = 2$, y por encima del eje t, es mayor que el área $\frac{1}{2}$ del rectángulo con base [1, 2] y altura $\frac{1}{2}$. (fig. 25.2). También es menor que el área 1 del rectángulo con base [1, 2] y altura 1. (Un argumento más riguroso utilizaría los problemas 3*c*) y 15 del capítulo 23.)

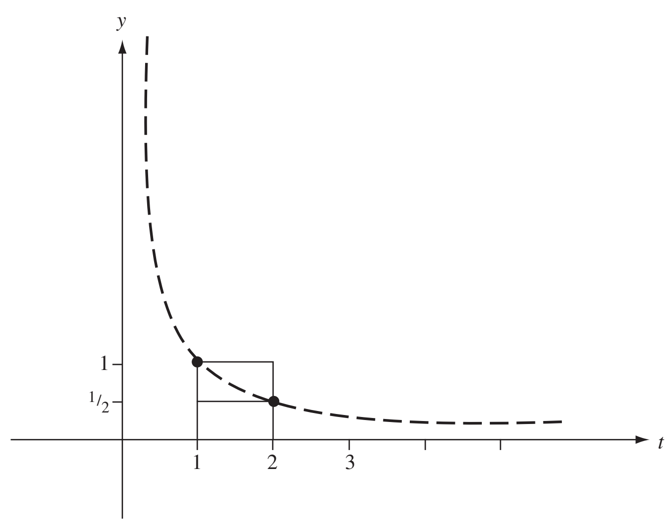


Fig. 25.2

(25.13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Sea k cualquier entero positivo. Entonces, para $x > 2^{2k}$,

$\ln x > \ln (2^{2k}) = 2k \ln 2 > 2k(\frac{1}{2}) = k$

por (25.10) y (25.9). Entonces, cuando $x \to +\infty$, $\ln x$ excederá a la postre a veces excede todo entero positivo.

(25.14) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Sea $u = 1/x$. Cuando $x \to 0^+$, $u \to +\infty$. Por tanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{u \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to +\infty} -\ln u \qquad \text{(por (25.8))}$$

$$= -\lim_{u \to +\infty} \ln u = -\infty \qquad \text{(por (25.13))}$$

(25.15) Fórmula abreviada II: $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln |g(x)| + C$

Por la regla de la cadena y (25.5*a*), $D_x(\ln |g(x)|) = \dfrac{1}{g(x)}\, g'(x)$.

EJEMPLO 25.3.

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln |x^2+1| + C = \ln (x^2+1) + C$

El signo del valor absoluto se eliminó porque $x^2 + 1 \geq 0$. En el futuro, se hará esto sin mencionarlo explícitamente.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Evalúe *a*) $\int \tan x\,dx$; *b*) $\int \cot x\,dx$; *c*) $\int \sec x\,dx$.

a) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$

$= -\ln|\cos x| + C$ por la fórmula abreviada II.

$$= -\ln\left|\frac{1}{\sec x}\right| + C = -(-\ln|\sec x|) + C = \ln|\sec x| + C$$

(25.16) $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

b) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$ Por la fórmula abreviada II.

(25.17) $\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

c) $\displaystyle\int \sec x\,dx = \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$\displaystyle= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ Por la fórmula abreviada II.

(25.18) $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

2. (CG) Calcule el valor de ln 2.

Una graficadora da un valor de $\ln 2 \sim 0.6931471806$. Más adelante se hallará otro método para calcular ln 2.

3. (CG) Trace la gráfica de $y = \ln x$.

Una graficadora entrega la gráfica mostrada en la figura 25.3. Nótese que por (25.10), ln x es creciente. Por (25.13), la gráfica crece sin límite a la derecha, y por (25.14) el eje negativo y es una asíntota vertical. Como

$$D_x^2(\ln x) = D_x(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

la gráfica es cóncava hacia abajo. Por (25.13) y (25.14), el teorema del valor intermedio, el rango de ln x es el conjunto de todos los números reales.

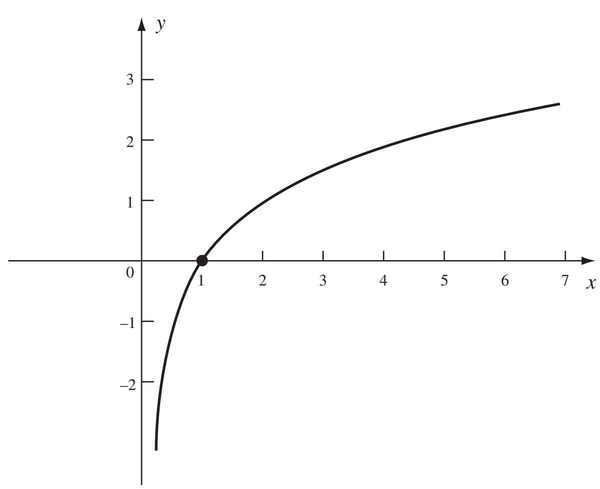


Fig. 25.3

4. Halle *a)* $D_x(\ln(x^4 + 7x))$; *b)* $D_x(\ln(\cos 2x))$; *c)* $D_x(\cos(\ln 2x))$.

a) $D_x(\ln(x^4+7x)) = \dfrac{1}{x^4+7x}(4x^3+7) = \dfrac{4x^3+7}{x^4+7x}$

b) $D_x(\ln(\cos 2x)) = \dfrac{1}{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)(2) = -\dfrac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$

$$= -2\tan 2x$$

c) $D_x(\cos(\ln 2x)) = (-\operatorname{sen}(\ln 2x))\left(\dfrac{1}{2x}\right)(2) = -\dfrac{\operatorname{sen}(\ln 2x)}{x}$

5. Halle las antiderivadas siguientes. Use la fórmula abreviada II cuando sea posible.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{8x-3}\,dx$; *b)* $\displaystyle\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\,dx$; *c)* $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2+5}\,dx$; *d)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+5}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{8x-3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8}{8x-3}\,dx = \frac{1}{8}\ln|8x-3| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{24x^7}{3x^8-2}\,dx = \tfrac{1}{6}\ln|3x^8-2| + C$

c) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2+5}\,dx = \int \frac{x}{x^2+5}\,dx - \int \frac{4}{x^2+5}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx - 4\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{4\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

d) Complete el cuadrado en el denominador: $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{x}{(x-2)^2+1}\,dx$.
Sea $u = x - 2$, $du = dx$.

$$\int \frac{x}{(x-2)^2+1}\,dx = \int \frac{u+2}{u^2+1}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \int \frac{2}{u^2+1}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(u^2+1) + 2\tan^{-1}u + C = \tfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 2\tan^{-1}(x-2) + C$$

6. **Derivación logarítmica.** Halle la derivada de $y = \dfrac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}$.

Primero se obtienen los logaritmos naturales de los valores absolutos de ambos miembros:

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\right| = \ln|x(1-x^2)^2| - \ln|(1+x^2)^{1/2}|$$

$$= \ln|x| + \ln|(1-x^2)^2| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$= \ln|x| + 2\ln|1-x^2| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Ahora se obtienen las derivadas de ambos lados:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x^2}(-2x) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}(2x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right)$$

7. Demuestre que $1 - \dfrac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$ para $x > 0$. (Cuando $x \neq 1$, las desigualdades estrictas se cumplen.)

Cuando $x > 1$, $1/t$ es una función decreciente en $[1, x]$ y entonces su mínimo en $[1, x]$ es $1/x$ y su máximo es 1. Así, por los problemas 3*c*) y 15 del capítulo 23,

$$\frac{1}{x}(x-1) < \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < x - 1 \qquad \text{luego,} \qquad 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

Para $0 < x < 1$, $-\frac{1}{t}$ es creciente en $[x, 1]$. Entonces, por los problemas 3*c*) y 15 del capítulo 23,

$$-\frac{1}{x}(1-x) < \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_x^1 \left(-\frac{1}{t}\right) dt < -1(1-x)$$

Por tanto, $1-\frac{1}{x} < \ln x < x-1$. Cuando $x = 1$, los tres términos son iguales a 0.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

8. Halle las derivadas de las funciones siguientes.

a) $y = \ln(x+3)^2 = 2\ln(x+3)$

Respuesta: $y' = \dfrac{2}{x+3}$

b) $y = (\ln(x+3))^2$

Respuesta: $y' = 2\ln(x+3)\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2\ln(x+3)}{x+3}$

c) $y = \ln[(x^3+2)(x^2+3)] = \ln(x^3+2) + \ln(x^2+3)$

Respuesta: $y' = \dfrac{1}{x^3+2}(3x^2) + \dfrac{1}{x^2+3}(2x) = \dfrac{3x^2}{x^3+2} + \dfrac{2x}{x^2+3}$

d) $y = \ln\dfrac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln(3x-4)^2 = 4\ln x - 2\ln(3x-4)$

Respuesta: $y' = \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{3x-4}(3) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{3x-4}$

e) $y = \ln \operatorname{sen} 5x$

Respuesta: $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 5x}\cos(5x)(5) = 5\cot 5x$

f) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Respuesta: $y' = \dfrac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x+(1+x^2)^{1/2}} = \dfrac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}}\,\dfrac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $y = \ln\sqrt{3-x^2} = \ln(3-x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(3-x^2)$

Respuesta: $y' = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{3-x^2}(-2x) = -\dfrac{x}{3-x^2}$

h) $y = x\ln x - x$

Respuesta: $y' = \ln x$

i) $y = \ln(\ln(\tan x))$

Respuesta: $y' = \dfrac{\tan x + \cot x}{\ln(\tan x)}$

9. Halle las antiderivadas siguientes. Use la fórmula abreviada II cuando sea posible.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{7x}\,dx$

Respuesta: $\dfrac{1}{7}\ln|x| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^8}{x^9-1}\,dx$

Respuesta: $\frac{1}{9}\ln|x^9-1| + C$

c) $\int \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x} dx$

Respuesta: use la fórmula abreviada I: $\frac{2}{3}(\ln x + 3)^{3/2} + C$

d) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

Respuesta: $\ln |\ln x| + C$

e) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{1 - \cos 3x} dx$

Respuesta: $\frac{1}{3} \ln |1 - \cos 3x| + C$

f) $\int \frac{2x^4 - x^2}{x^3} dx$

Respuesta: $x^2 - \ln |x| + C$

g) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Respuesta: $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$

Respuesta: $-2 \ln |1 - \sqrt{x}| + C$

10. Utilice la derivación logarítmica para calcular y'.

a) $y = x^4 \sqrt{2 - x^2}$

Respuesta: $y' = x^4 \sqrt{2 - x^2} \left(\frac{4}{x} - \frac{x}{2 - x^2} \right) = 4x^3 \sqrt{2 - x^2} - \frac{x^5}{\sqrt{2 - x^2}}$

b) $y = \frac{(x - 1)^5 \sqrt[4]{x + 2}}{\sqrt{x^2 + 7}}$

Respuesta: $y' = y \left(\frac{5}{x - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x + 2} - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$

c) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 3} \cos x}{(3x - 5)^3}$

Respuesta: $y' = y \left(\frac{x}{x^2 + 3} - \tan x - \frac{1}{3x - 5} \right)$

d) $y = \sqrt[4]{\frac{2x + 3}{2x - 3}}$

Respuesta: $y' = -\frac{3y}{4x^2 - 9}$

11. Exprese en términos de ln 2 y ln 3: *a*) $\ln(3^7)$; *b*) $\ln \frac{2}{27}$.

Respuestas: *a*) 7 ln 3; *b*) ln 2 – 3 ln 3

12. Exprese en términos de ln 2 y ln 5: *a*) ln 50; *b*) $\ln \frac{1}{4}$; *c*) $\ln \sqrt{5}$; *d*) $\ln \frac{1}{40}$.

Respuestas: *a*) ln 2 + 2 ln 5; *b*) –2 ln 2; *c*) $\frac{1}{2}$ ln 5; *d*) –(3 ln 2 + ln 5)

13. Halle el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ y sobre el eje x, entre $x = 2$ y $x = 4$.

Respuesta: $\ln 2$

14. Halle el valor promedio de $\frac{1}{x}$ en [3, 5].

Respuesta: $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$

15. Aplique la derivación implícita para hallar y': *a*) $y^3 = \ln (x^3 + y^3)$; *b*) $3y - 2x = 1 + \ln xy$.

Respuestas: *a*) $y' = \dfrac{x^2}{y^2(x^3 + y^3 - 1)}$; *b*) $y' = \dfrac{y^2x + 1}{x^3y - 1}$

16. Evalúe $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{2+h}{2}$.

Respuesta: $\frac{1}{2}$

17. Compruebe la fórmula $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$.

18. (CG) Aproxime $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$ con seis cifras decimales por *a*) la regla del trapecio; *b*) la regla del punto medio; *c*) la regla de Simpson, en cada caso con $n = 10$.

Respuestas: *a*) 0.693771; *b*) 0.692835; *c*) 0.693147

19. (CG) Aplique el método de Newton para aproximar la raíz de $x^2 + \ln x = 2$ a cuatro cifras decimales.

Respuesta: 1.3141

26

Funciones exponenciales y logarítmicas

En el capítulo 25 aprendió que el logaritmo natural ln x es una función derivable creciente cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales positivos y su rango el conjunto de todos los números reales. Como es creciente, es una función uno a uno y, por tanto, tiene una función inversa, la cual se denomina e^x.

Definición

e^x es la inversa de ln x.

Se deduce que el dominio de e^x es el conjunto de todos los números reales y su rango el conjunto de todos los números reales positivos. Como e^x es la inversa de ln x, la gráfica de e^x puede obtenerse por reflexión de la de ln x en la recta $y = x$ (fig. 26.1).

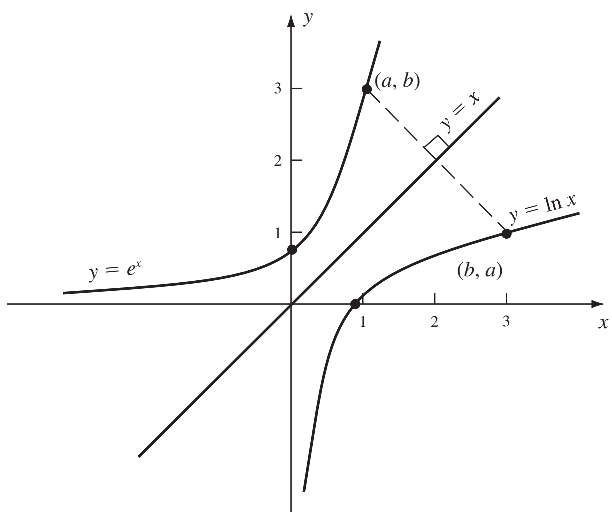


Fig. 26.1

Esta notación puede resultar confusa. No debería presuponerse de la notación que e^x es una potencia ordinaria de una base e con exponente x. Aunque más adelante es este capítulo se hallará que esto es cierto, todavía no se sabe.

Propiedades de e^x

(26.1) $e^x > 0$ para todo x

El rango de e^x es el conjunto de todos los números reales positivos.

(26.2) $\ln (e^x) = x$

(26.3) $e^{\ln x} = x$

Las propiedades (26.2) y (26.3) se deducen de que e^x y ln x son inversas una de la otra.

(26.4) e^x es una función creciente.

Sea $u < v$. Como $u = \ln(e^u)$ y $v = \ln(e^v)$, ln (e^u). Pero como ln x es creciente, $e^u < e^v$. [Si $e^v \le e^u$, entonces ln $(e^v) \le$ ln (e^u).]

(26.5) $D_x(e^x) = e^x$

Sea $y = e^x$. Entonces, ln $y = x$. Por derivación implícita, $\frac{1}{y}y' = 1$ y, por tanto, $y' = y = e^x$. Para ver un argumento más riguroso, sea $f(x) = \ln x$ y $f^{-1}(y) = e^y$. Nótese que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Por el teorema 10.2*b*),

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad \text{es decir,} \quad D_y(e^y) = \frac{1}{1/e^y} = e^y$$

EJEMPLO 26.1. $D_x(e^{\operatorname{sen} x}) = D_u(e^u)D_x(u)$ (Regla de la cadena, con $u = \operatorname{sen} x$)

$= e^u(\cos x) = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x)$

(26.6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

EJEMPLO 26.2. Para hallar $\int xe^{x^2}\,dx$, sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Entonces,

$$\int xe^{x^2}dx = \tfrac{1}{2}\int e^u\,du = \tfrac{1}{2}e^u + C = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

(26.7) $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$

Sea $u = -x$, $du = -dx$. Entonces, $\int e^{-x}dx = -\int e^u\,du = -e^u + C = -e^{-x} + C$.

(26.8) $e^0 = 1$

Por (26.3), $1 = e^{\ln 1} = e^0$.

(26.9) $e^{u+v} = e^u e^v$

$\ln(e^{u+v}) = u + v = \ln(e^u) + \ln(e^v) = \ln(e^u e^v)$ por (25.6). Por tanto, $e^{u+v} = e^u e^v$ porque ln x es una función uno a uno.

(26.10) $e^{u-v} = \dfrac{e^u}{e^v}$

Por (26.9), $e^{u-v}e^v = e^{(u-v)+v} = e^u$. Ahora se divide entre e^u.

(26.11) $e^{-v} = \dfrac{1}{e^v}$

Se remplaza u por 0 en (26.10) y se aplica (26.8).

(26.12) $x < e^x$ para todo x.

Por el problema 7 del capítulo 25, $\ln x \le x - 1 < x$. Por (26.3) y (26.4), $x = e^{\ln x} < e^x$.

(26.13) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Esto se deduce de (26.4) y (26.12).

(26.14) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Sea $u = -x$. Cuando $x \to -\infty$, $u \to +\infty$ y por (26.13) $e^u \to +\infty$. Entonces, por (26.11),

$e^x = e^{-u} = \dfrac{1}{e^u} \to 0$.

Ahora puede aclararse el misterio de la letra e en la expresión e^x.

Definición

Sea e el número tal que 1n $e = 1$.

Como 1n x es una función uno a uno que va del conjunto de todos los números reales positivos al conjunto de todos los números reales, debe haber exactamente un número x tal que ln $x = 1$. Ese número se denomina e.

Como, por (25.12), $\ln 2 < 1 < 2 \ln 2 = \ln 4$, se sabe que $2 < e < 4$.

(26.15) (CG) $e \sim 2.718281828$

Este cálculo puede obtenerse con una graficadora. Más tarde se indicará cómo aproximar e con cualquier grado de precisión.

Ahora se puede demostrar que la notación e^x no está errada, es decir, que e^x en realidad es una potencia de e. Primero, esto puede probarse para los x enteros positivos mediante inducción matemática. [De hecho, por (23.6), $e = e^{\ln e} = e^1$. Así, por (26.9), $e^{n+1} = e^n e^1 = e^n e$ para todo n entero positivo y, por tanto, si se supone mediante hipótesis inductiva que e^n representa el producto de e por sí mismo n veces, entonces e^{n+1} es el producto de e por sí mismo $n + 1$ veces.] Por (26.8), $e^0 = 1$, lo que corresponde a la definición estándar de e^0. Si n es un entero positivo, e^{-n} ordinariamente se definiría mediante $1/e^n$, lo cual es idéntico al valor de la función dada por (26.11). Si k y n son enteros positivos, entonces la potencia $e^{k/n}$ se define ordinariamente como $\sqrt[n]{e^k}$. Ahora, de hecho, por (26.9), el producto $e^{k/n}e^{k/n} \ldots e^{k/n}$, donde hay n factores, es igual a $e^{k/n+k/n+\ldots+k/n} = e^k$. Así, el valor de la función $e^{k/n}$ es idéntico a la raíz n–ésima de e^k. En fracciones negativas, de nuevo se aplica (26.11) para ver que el valor de la función e^x es idéntico al valor especificado por la definición común. Por ende, el valor de la función e^x es la potencia usual de e cuando x es cualquier número racional. Como nuestra función e^x es continua, el valor de e^x cuando x es irracional es el límite deseado de e^r para los números racionales r que tienden a x.

La gráfica de $y = e^x$ aparece en la figura 26.2. Por (26.13), la gráfica crece sin límite a la derecha y, por (26.14), el eje x negativo es una asíntota horizontal a la izquierda. Como $D_x^2(e^x) = D_x(e^x) = e^x > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en todas partes. La gráfica de $y = e^{-x}$ también se muestra en la figura 26.2. Se obtiene de la gráfica de $y = e^x$ por reflexión en el eje y.

(26.16) $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Para ver una demostración, repase el problema 5.

(26.17) $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Éste es un caso especial de (26.16) cuando $x = 1$. Se puede utilizar esta fórmula para aproximar e, aunque la convergencia a e resulta más bien lenta. Por ejemplo, cuando $n = 1\,000$, se obtiene 2.7169, y cuando $n = 10\,000$, se tiene 2.7181, que es correcto sólo con tres cifras decimales.

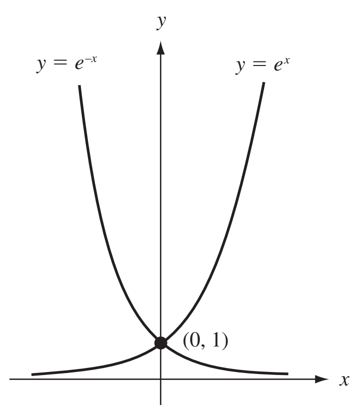


Fig. 26.2

Función exponencial general

Sea $a > 0$. Entonces es posible definir a^x como sigue:

Definición

$a^x = e^{x \ln a}$

Nótese que esto concuerda con la definición de e^x, ya que cuando $a = e$, $\ln a = 1$.

(26.18) $D_x(a^x) = (\ln a)\, a^x$.

De hecho,

$$D_x(e^{x \ln a}) = D^u(e^u)D_x u \quad \text{(Regla de la cadena con } u = x \ln a)$$
$$= e^u (\ln a) = e^{x \ln a}(\ln a) = a^x(\ln a)$$

EJEMPLO 26.3. $D_x(2^x) = (1\text{n } 2)\, 2^x$.

(26.19) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

Ésta es una consecuencia directa de (26.18).

EJEMPLO 26.4. $\int 10^x = \frac{1}{\ln 10} 10^x + C$

Se pueden derivar las propiedades comunes de las potencias.

(26.20) $a^0 = 1$

$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1$

(26.21) $a^{u+v} = a^u a^v$

$a^{u+v} = e^{(u+v) \ln a} = e^{u \ln a + v \ln a} = e^{u \ln a} e^{v \ln a} = a^u a^v$.

(26.22) $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$

Por (26.21), $a^{u-v}a^v = a^{(u-v)+v} = a^u$. Ahora, se divide entre a^v.

(26.23) $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$

Se remplaza u por 0 en (26.22) y se usa (26.20)

(26.24) $a^{uv} = (a^u)^v$

$(a^u)^v = e^{v \ln(a^u)} = e^{v(u(\ln a))} = e^{(uv)\ln a} = a^{uv}$

(26.25) $(ab)^u = a^u b^u$

$a^u b^u = e^{u \ln a} e^{u \ln b} = e^{u \ln a + u \ln b} = e^{u(\ln a + \ln b)} = e^{u \ln(ab)} = (ab)^u$

Recuérdese que $D_x(x^r) = rx^{r-1}$ para números racionales r. Ahora se puede demostrar la fórmula para todo número real r.

(26.26) $D_x(x^r) = rx^{r-1}$

Como $x^r = e^{r \ln x}$,

$$D_x(x^r) = D_x(e^{r \ln x}) = D_u(e^u)D_x(u) \quad \text{(Regla de la cadena con } u = r \ln x\text{)}$$

$$= e^u \left(r \left(\frac{1}{x} \right) \right) = r(x^r) \left(\frac{1}{x} \right) = r \frac{x^r}{x^1} = rx^{r-1}$$

Funciones logarítmicas generales

Sea $a > 0$. Se desea definir una función $\log_a x$ que desempeñe el papel del logaritmo tradicional para la base a. Si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$ y, por consiguiente, $\ln(a^y) = \ln x$, $y \ln a = \ln x$, $y = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Definición

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

(26.27) $y = \log_a x$ equivale a $a^y = x$

$y = \log_a x \Leftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow y \ln a = \ln x$

$\Leftrightarrow \ln(a^y) = \ln x \Leftrightarrow a^y = x$ ($\Leftrightarrow$ es el símbolo de *si y sólo si.*)

Entonces, la función logarítmica general con base a es la inversa de la función exponencial general con base a.

(26.28) $a^{\log_a x} = x$

(26.29) $\log_a(a^x) = x$

Esto se deduce de (26.27). Véase el problema 6.

Las propiedades usuales de los logaritmos pueden derivarse con facilidad. Véase el problema 7. Nótese que $\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \frac{\ln x}{1} = \ln x$. Por ende, el logaritmo natural resulta ser un logaritmo en el sentido usual, con base e.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Evalúe *a*) $\ln(e^3)$; *b*) $e^{7\ln 2}$; *c*) $e^{(\ln 3)-2}$; *e*) 1^u.

a) $\ln(e^3) = 3$, por (26.2)

b) $e^{7\ln 2} = (e^{\ln 2})^7 = 2^7 = 128$, por (26.24) y (26.3)

c) $e^{(\ln 3)-2} = \frac{e^{\ln 3}}{e^2} = \frac{3}{e^2}$, por (26.10)

d) $1^u = e^{u\ln 1} = e^{u(0)} = e^0 = 1$, por (26.8)

2. Halle las derivadas de *a*) e^{3x+1}; *b*) 5^{3x}; *c*) $3x^\pi$; *d*) x^2e^x.

a) $D_x(e^{3x+1}) = e^{3x+1}(3) = 3e^{3x+1}$, por la regla de la cadena

b) $D_x(5^{3x}) = D_u(5^u)D_x(u)$ (regla de la cadena con $u = 3x$)
$= (\ln 5)5^u(3)$, por (26.18)
$= 3(\ln 5)\, 5^{3x}$

c) $D_x(3x^\pi) = 3(\pi x^{\pi-1}) = 3\pi x^{\pi-1}$, por (26.26)

d) $D_x(x^2e^x) = x^2D_x(e^x) + e^xD_x(x^2)$, por la regla del producto
$= x^2e^x + e^x(2x) = xe^x(x + 2)$

3. Halle las antiderivadas siguientes: *a*) $\int 3(2^x)\,dx$; *b*) $\int x^2e^{x^3}dx$.

a) $\int 3(2^x)\,dx = 3\int 2^x\,dx = 3\frac{1}{\ln 2}2^x + C = \frac{3}{\ln 2}2^x + C$

b) Sea $u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$. Entonces, $\int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

4. Despeje x en las ecuaciones siguientes: *a*) $\ln x^3 = 2$; *b*) $\ln(\ln x) = 0$; *c*) $e^{2x-1} = 3$; *d*) $e^x - 3e^{-x} = 2$.

En general, $\ln A = B$ equivale a $A = e^B$, y $e^c = D$ a $C = \ln D$.

a) $\ln x^3 = 3\ln x$. Por tanto, $\ln x^3 = 2$ da $3\ln x = 2$, $\ln x = \frac{2}{3}$, $x = e^{2/3}$.

b) $\ln(\ln x) = 0$ equivale a $\ln x = e^0 = 1$, que a su vez equivale a $x = e^1 = e$.

c) $e^{2x-1} = 3$ equivale a $2x - 1 = \ln 3$, y luego a $x = \frac{\ln 3 + 1}{2}$.

d) Multiplique ambos lados por e^x: $e^{2x} - 3 = 2e^x$, $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$. Sea $u = e^x$, con lo que se obtiene la ecuación cuadrática $u^2 - 2u - 3 = 0$; $(u - 3)(u + 1) = 0$, con soluciones $u = 3$ y $u = -1$. Por tanto, $e^x = 3$ o $e^x = -1$. El último resultado es imposible, ya que e^x siempre es positiva. En consecuencia, $e^x = 3$ y $x = \ln 3$.

5. Demuestre (26.16): $e^u = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$.

Sea $a_n = \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$. Entonces,

$$\ln a_n = n\ln\left(\left|1 + \frac{u}{n}\right.\right) = u\left(\frac{\ln(1 + u/n) - \ln 1}{u/n}\right)$$

La expresión $\left(\frac{\ln(1 + u/n) - \ln 1}{u/n}\right)$ es un cociente de diferencia para $D_x(\ln x)$ en $x = 1$, con $\Delta x = u/n$.

Cuando $n \to +\infty$, $u/n \to 0$. Entonces, ese cociente de diferencia tiende a $D_x(\ln x)\big|_{x=1} = (1/x)\big|_{x=1} = 1$. Por tanto, $\lim_{n\to+\infty}\ln a_n = u(1) = u$. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln a_n} = e^u$.

6. Demuestre (26.28) $a^{\log_a x} = x$ y (26.29) $\log_a(a^x) = x$.

Al sustituir $\log_a x$ por y en (26.27) se obtiene $a^{\log_a x} = x$.

Al remplazar a^y por x en (26.27) se obtiene $y = \log_a(a^y)$.

7. Deduzca las propiedades siguientes de $\log_a x$:

a) $\log_a 1 = 0$.

$$\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = \frac{0}{\ln a} = 0.$$

b) $\log_a a = 1$.

$$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

c) $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$.

$$\log_a uv = \frac{\ln uv}{\ln a} = \frac{\ln u + \ln v}{\ln a} = \frac{\ln u}{\ln a} + \frac{\ln v}{\ln a} = \log_a u + \log_a v$$

d) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$.

Se remplaza u en *c*) por $\frac{u}{v}$.

f) $\log_a(u^r) = r\log_a u$.

$$\log_a(u^r) = \frac{\ln(u^r)}{\ln a} = \frac{r\ln u}{\ln a} = r\log_a u.$$

g) $D_x(\log_a x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$.

$$D_x(\log_a x) = D_x\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}D_x(\ln x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

8. Calcule las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = e^{5x}$ *Respuesta:* $y' = 5e^{5x}$

b) $y = e^{\tan 3x}$ *Respuesta:* $y' = 3\sec^2(3x)\, e^{\tan 3x}$

c) $y = e^{-x}\cos x$ *Respuesta:* $y' = -e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

d) $y = 3^{-x^2}$ *Respuesta:* $y' = -2x(\ln 3)3^{-x^2}$

e) $y = \operatorname{sen}^{-1}(e^x)$ *Respuesta:* $y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

f) $y = e^{e^x}$ *Respuesta:* $y' = e^{x+e^x}$

g) $y = x^x$ *Respuesta:* $y' = x^x(1 + \ln x)$

h) $y = \log_{10}(3x^2 - 5)$ *Respuesta:* $y' = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{6x}{3x^2-5}$

9. Halle las antiderivadas siguientes:

a) $\int 3^{2x}\,dx$ *Respuesta:* $\dfrac{1}{2\ln 3}3^{2x} + C$

b) $\int \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$ *Respuesta:* $-e^{1/x} + C$

c) $\int (e^x+1)^3 e^x\,dx$ *Respuesta:* $\dfrac{(e^x+1)^4}{4} + C$

d) $\int \dfrac{dx}{e^x+1}$ *Respuesta:* $x - \ln(e^x + 1) + C$

e) $\int \dfrac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$ *Respuesta:* $-\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C$

f) $\int e^{-x^2+2}x\,dx$ *Respuesta:* $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+2} + C$

g) $\int (e^x+1)^2\,dx$ — *Respuesta:* $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$

h) $\int (e^x-x^e)\,dx$ — *Respuesta:* $e^x-\dfrac{x^{e+1}}{e+1}+C$

i) $\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$ — *Respuesta:* $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)+C$

j) $\int \dfrac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ — *Respuesta:* $\operatorname{sen}^{-1}(e^x)+C$

k) $\int x^3(5^{x^4+1})\,dx$ — *Respuesta:* $\dfrac{1}{4\ln 5}5^{x^4+1}+C$

l) $\int \dfrac{\log_{10}x}{x}\,dx$ — *Respuesta:* $\dfrac{1}{2\ln 10}(\ln x)^2+C=\dfrac{\ln 10}{2}(\log_{10}x)^2+C$

10. (Funciones hiperbólicas) Defina

$$\operatorname{senh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\operatorname{sen} h x}{\cos h x},\quad \sec h=\frac{1}{\cos h x}$$

Deduzca los resultados siguientes:

a) $D_x(\operatorname{sen} h\, x)=\cos h\, x$ y $D_x(\cos h\, x)=\operatorname{sen} h\, x$.
b) $D_x(\tan h\, x)=\sec h^2\, x$ y $D_x(\sec h\, x)=-\sec h\, x \tan h\, x$.
c) $\cos h^2\, x-\operatorname{sen} h^2\, x=1$
d) $\operatorname{sen} h(x+y)=\operatorname{sen} h\, x\cos h\, y+\cos h\, x\operatorname{sen} h\, y$.
e) $\cos h(x+y)=\cos h\, x\cos h\, y+\operatorname{sen} h\, x\operatorname{sen} h\, y$.
f) $\operatorname{sen} h\, 2x=2\operatorname{sen} h\, x\cos h\, x$.
g) $\cos h\, 2x=\cos h^2\, x+\operatorname{sen} h^2\, x=2\cos h^2\, x-1=2\operatorname{sen} h^2\, x+1$.
h) (CG) Trace la gráfica de $y=2\cos h(x/2)$(denominada "catenaria") y halle su punto mínimo.

Respuesta: (0, 2)

11. Despeje x en las ecuaciones siguientes:

a) $e^{3x}=2$ — *Respuesta:* $\frac{1}{3}\ln 2$
b) $\ln(x^4)=-1$ — *Respuesta:* $e^{-1/4}$
c) $\ln(\ln x)=2$ — *Respuesta:* e^{e^2}
d) $e^x-4e^{-x}=3$ — *Respuesta:* 2 ln 2
e) $e^x+12e^{-x}=7$ — *Respuesta:* 2 ln 2 y ln 3
f) $5^x=7$ — *Respuesta:* $\dfrac{\ln 7}{\ln 5}=\log_5 7$
g) $\log_2(x+3)=5$ — *Respuesta:* 29
h) $\log_2 x^2+\log_2 x=4$ — *Respuesta:* $\sqrt[3]{16}$
i) $\log_2(2^{4x})=20$ — *Respuesta:* 5
j) $e^{-2x}-7e^{-x}=8$ — *Respuesta:* –3 ln 2
k) $x^x=x^3$ — *Respuesta:* 1 y 3

12. Evalúe *a*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$; *b*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h^2}-1}{h}$

Respuestas: *a*) 1; *b*) 0

13. Evalúe *a*) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+2}\,dx$; *b*) $\displaystyle\int_1^e\frac{2+\ln x}{x}\,dx$

Respuestas: *a*) $\ln\frac{4}{3}$; *b*) $\frac{5}{2}$

14. (CG) Aplique el método de Newton para aproximar (con cuatro cifras decimales) una solución de $e^x=\dfrac{1}{x}$.

Respuesta: 0.5671

15. (CG) Use la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$ a cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.8556

16. Si se paga interés a r por ciento por año y se aumenta n veces al año, entonces P dólares se vuelven $P\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$ después de un año. Si $n \to +\infty$, se dice que el interés se *compone continuamente* (es decir, se trata de interés compuesto).

a) Si se incrementa continuamente r por ciento anual, demuestre que P se convierte $Pe^{r/100}$ dólares después de un año, y $Pe^{rt/100}$ dólares después de t años.

b) Si r por ciento se incrementa continuamente, ¿en cuántos años se duplicará cierto monto de dinero?

c) (CG) Calcule con dos cifras decimales cuántos años tomaría duplicar cierta cantidad de dinero si se incrementa continuamente a 6% anual.

d) (CG) Compare el resultado de incrementar continuamente a 5% con el obtenido al incrementar una vez al año.

Respuestas: *b*) $\frac{100(\ln 2)}{r} \sim \frac{69.31}{r}$; *c*) aproximadamente 11.55 años; *d*) después de un año un dólar se vuelve 1.05 dólares cuando se incrementa una vez al año, y aproximadamente 1.0512 dólares cuando se incrementa continuamente.

17. Halle $(\log_{10} e) \cdot \ln 10$

Respuesta: 1

18. Escriba como un solo logaritmo con base a: $3 \log_a 2 + \log_a 40 - \log_a 16$

Respuesta: $\log_a 20$

19. (CG) Calcule $\log_2 7$ con ocho cifras decimales.

Respuesta: 2.80735492

20. Demuestre que $\log_b x = (\log_a x)(\log_b a)$.

21. (CG) Trace la gráfica de $y = e^{-x^2/2}$. Indique los extremos absolutos, los puntos de inflexión, las asíntotas y cualquier simetría.

Respuesta: máximo absoluto en (0, 1), puntos de inflexión en $x = \pm 1$, el eje x es una asíntota horizontal a la izquierda y a la derecha, simétrica respecto al eje y.

22. Dado $e^{xy} - x + y^2 = 1$, halle $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita.

Respuesta: $\frac{1 - ye^{xy}}{2y + xe^{xy}}$

23. (CG) Trace la gráfica de $y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Respuesta: $\ln(e^x + e^{-x}) + C$

24. Evalúe $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$.

Respuesta: $\ln(e^x + e^{-x}) + C$

25. Aplique la derivación logarítmica para hallar la derivada de $y = x^{3/x}$.

Respuesta: $\frac{3y(1 - \ln x)}{x^2}$

27

Regla de L'Hôpital

Los límites de la forma lím $\frac{f(x)}{g(x)}$ pueden evaluarse mediante el siguiente teorema en los *casos indeterminados* donde tanto $f(x)$ como $g(x)$ tienden a 0, o ambas tienden a $\pm\infty$.

Regla de L'hôpital

Si $f(x)$ y $g(x)$, o ambas tienden a 0, o ambas tienden a $\pm\infty$, entonces,

$$\text{lím}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}\,\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aquí, "lím" equivale a

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}, \quad \underset{x\to-\infty}{\text{lím}}, \quad \underset{x\to a}{\text{lím}}, \quad \underset{x\to a^+}{\text{lím}}, \quad \underset{x\to a^-}{\text{lím}}$$

Si desea consultar un esbozo de la demostración, repase los problemas 1, 11 y 12. Se considera, en el caso de los tres últimos tipos de límites, que $g'(x) \neq 0$ para x que esté suficientemente próximo a a, y en el caso de los primeros dos límites, que $g'(x) \neq 0$ para los valores de x suficientemente grandes o suficientemente pequeños. (Las afirmaciones correspondientes sobre $g(x) \neq 0$ se siguen del teorema de Rolle.)

EJEMPLO 27.1. Como ln x tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$, la regla de L'Hôpital implica que

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{\ln x}{x} = \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{1/x}{1} = \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{1}{x} = 0$$

EJEMPLO 27.2. Como e^x tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$, la regla de L'Hôpital implica que

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{x}{e^x} = \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{1}{e^x} = 0$$

EJEMPLO 27.3. Se sabe, por el problema 13*a*) del capítulo 7, que

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} = \frac{3}{7}$$

Puesto que $3x^2 + 5x - 8$ y $7x^2 - 2x + 1$ tienden a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$, la regla de L'Hôpital indica que

$$\underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} = \underset{x\to+\infty}{\text{lím}}\,\frac{6x+5}{14x-2}$$

y otra aplicación de la regla señala que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{14x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

EJEMPLO 27.4. Como tan x tiende a 0 cuando x tiende a 0, la regla de L'Hôpital implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1^2} = 1$$

Tipo indeterminado 0 · ∞

Si $f(x)$ tiende a 0 y $g(x)$ tiende a $\pm\infty$, no se sabe cómo determinar lím $f(x)g(x)$ A veces este problema puede transformarse para conseguir que la regla de L'Hôpital sea aplicable.

EJEMPLO 27.5. Cuando x tiende a 0 desde la derecha, ln x tiende a $-\infty$. Entonces, no se sabe cómo hallar $\lim_{x\to 0^-} x \ln x$. Pero cuando x tiende a 0 desde la derecha, $1/x$ tiende a $+\infty$. Así, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Tipo indeterminado ∞ – ∞

Si $f(x)$ y $g(x)$ tienden a ∞ no se sabe qué sucede con lím $(f(x) - g(x))$. En ocasiones el problema puede transformarse en un problema tipo L'Hôpital.

EJEMPLO 27.6. $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right)$ es un problema de este tipo. Pero

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

Como $x - \operatorname{sen} x$ y $x \operatorname{sen} x$ ambos tienden a 0, se aplica la regla de L'Hôpital y se obtiene $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$. Aquí, tanto el numerador como el denominador tienden a 0 y por la regla de L'Hôpital resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x} = \frac{0}{0+1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Tipos indeterminados 0^0, ∞^0 y 1^∞

Si lím y es uno de estos tipos, entonces lím (ln y) será del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 27.7. En $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$, $y = x^{\operatorname{sen} x}$, es del tipo 0^0 y no se sabe qué sucede en el límite. Pero $y = \operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$ y ln x y cosec x tienden a $\pm\infty$. Entonces, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{cosec} x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0^+} \tan x = -(1)(0) = 0$$

Aquí se utilizó el hecho de que $\lim_{x\to 0}((\operatorname{sen} x)/x) = 1$ (problema 1 del capítulo 17). Ahora, como $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

EJEMPLO 27.8. En $\lim_{x\to 0^+} |\ln x|^x$, $y = |\ln x|^x$ es de tipo ∞^0, y no es claro qué pasa en el límite. Pero $\ln y = x \ln|\ln x| = \dfrac{\ln|\ln x|}{1/x}$ y tanto $\ln|\ln x|$ como $1/x$ tienden a $+\infty$. Entonces, por la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x\ln x}\right) \Big/ \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\ln x} = 0,$$

ya que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0. \quad \text{Por tanto,} \quad \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1$$

EJEMPLO 27.9. En $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$, $y = x^{1/(x-1)}$ es de tipo 1^∞ y no puede verse qué sucede en el límite. Pero $\ln y = \dfrac{\ln x}{x-1}$ y tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Entonces, por la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1. \text{ Por tanto, } \lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1} e^{\ln y} = e^1 = e$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre la forma siguiente $\frac{0}{0}$ de la regla de L'Hôpital: Sean $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables, $g'(x) \neq 0$ en algún intervalo abierto (a, b) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Entonces, $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Como $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$, se considera que $f(a)$ y $g(a)$ están definidas y que $f(a) = g(a) = 0$. Al remplazar b por x en el teorema del valor medio extendido (teorema 13.5) y utilizando el hecho de que $f(a) = g(a) = 0$ se obtiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

para algún x_0 con $a < x_0 < x$. Entonces, $x_0 \to a^+$ cuando $x \to a^+$. Por tanto,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede obtener la forma $\frac{0}{0}$ de la regla de L'Hôpital para $\lim_{x\to a^-}$ (simplemente por ser $u = -x$), y entonces los resultados para $\lim_{x\to a^-}$ y $\lim_{x\to a^+}$ dan la forma $\frac{0}{0}$ de la regla de L'Hôpital para $\lim_{x\to a}$.

2. Por los ejemplos 1 y 2 se sabe ya que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Demuestre además que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ para todo n entero positivo.

Use la inducción matemática. Considere estos resultados para un $n \geq 1$. Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+1)(\ln x)^n(1/x)}{1} = (n+1)\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = (n+1)(0) = 0$$

De igual forma,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1)\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = (n+1)(0) = 0$$

3. Aplique la regla de L'Hôpital una o más veces para evaluar los límites siguientes. Compruebe en todos los casos que se cumplen los supuestos apropiados.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x}$.

Se obtiene $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x} = \dfrac{1+2(1)}{1-2(1)} = -3.$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x^2}$.

Se obtiene $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{2x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ por el ejemplo 27.2.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$.

Se obtiene $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{2\operatorname{sen} x\cos x - 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$.

Mediante la aplicación repetida de la regla de L'Hôpital se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{-4\operatorname{sen} 2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x} = \frac{1+1}{-8(1)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

d) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}}$.

Se obtiene $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\cos x}{1/[2(x-\pi)^{1/2}]} = \lim\limits_{x\to \pi^+} 2(x-\pi)^{1/2}\cos x = 0.$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \tan x}$.

Queda $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\cos x)/(\operatorname{sen} x)}{(\sec^2 x)/(\tan x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos^4 x = 1.$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$.

El uso directo de la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{-2\operatorname{cosec}^2(2x)} = \tfrac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{cosec}^2 x\,(\cot x)}{(\operatorname{cosec}^2(2x))(\cot 2x)}$$

lleva a límites aún más complicados, pero, si cambia de cot a tan, se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(2x)}{\sec^2 x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\cos^2(2x)} = 2\frac{1}{1} = 2$$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$.

Éste es del tipo $0\cdot\infty$. Entonces, la regla de L'Hôpital puede aplicarse de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} -\tfrac{1}{2}x^2 = 0$$

h) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1-\tan x)\sec 2x$.

Éste es del tipo $0\cdot\infty$. Sin embargo, es igual a

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos 2x} = \lim_{x\to \pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\left(\text{Aquí se utilizó el valor } \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\right)$$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Éste es del tipo $\infty - \infty$, pero resulta igual a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{xe^x+2e^x} = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

j) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x - \cot x)$.

Éste es del tipo $\infty - \infty$, pero resulta igual a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

k) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$.

Éste es del tipo ∞^0. Sea $y = (\tan x)^{\cos x}$, entonces $\ln y = (\cos x)(\ln \tan x) = \dfrac{\ln \tan x}{\sec x}$.

Por tanto,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \ln y = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\ln \tan x}{\sec x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec^2 x/\tan x)/(\sec x \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{1} = 1$$

l) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$.

Se obtiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$ y se está girando en un círculo. Por ende, la regla de L'Hopital no es de uso alguno. Pero,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2}+1}$$

$$= \sqrt{0+1} = 1$$

4. Haga una crítica sobre el siguiente uso de la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-2}{6x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{6} = 1$$

La segunda ecuación es un uso incorrecto de la regla de L'Hôpital, ya que $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 2x - 1) = 7$ y $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 6x + 3) = 3$. Entonces, el límite correcto sería $\frac{7}{3}$.

5. (CG) Trace la gráfica de $y = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$.

Véase la figura 27.1. Por el ejemplo 2, $\lim_{x\to+\infty} y = 0$. Entonces, el eje x positivo es una asíntota horizontal. Como $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$. $y' = e^{-x}(1-x)$ y $y'' = e^{-x}(x-2)$. Entonces, $x = 1$ es un número crítico. Por el criterio de la segunda derivada, existe un máximo relativo en $(1, 1/e)$ porque $y'' < 0$ en $x = 1$. La gráfica es cóncava hacia abajo para $x < 2$ (donde $y'' < 0$) y cóncava hacia arriba para $x > 2$ (donde $y'' > 0$). $(2, 2/e^2)$ es un punto de inflexión. La graficadora proporciona los estimados $1/e \sim 0.37$ y $2/e^2 \sim 0.27$.

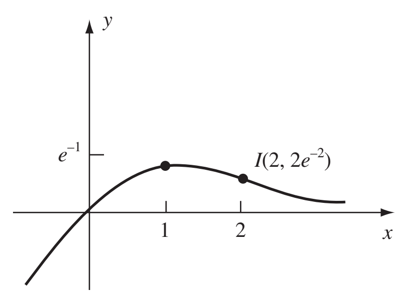


Fig. 27.1

6. (CG) Trace la gráfica de $y = x \ln x$.

Véase la figura 27.2. La gráfica está definida sólo para $x > 0$. Claramente, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$. Por el ejemplo 5, $\lim_{x\to 0^+} y = 0$. Como $y' = 1 + \ln x$ y $y'' = 1/x > 0$, el número crítico en $x = 1/e$ (donde $y' = 0$) resulta, por el criterio de la segunda derivada, un mínimo relativo en $(1/e, -1/e)$. La gráfica es cóncava hacia arriba en todas partes.

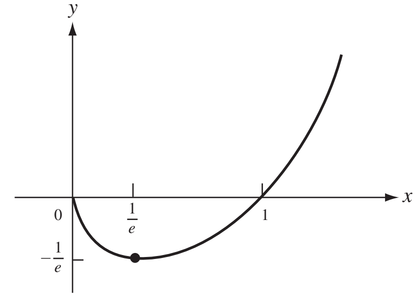


Fig. 27.2

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

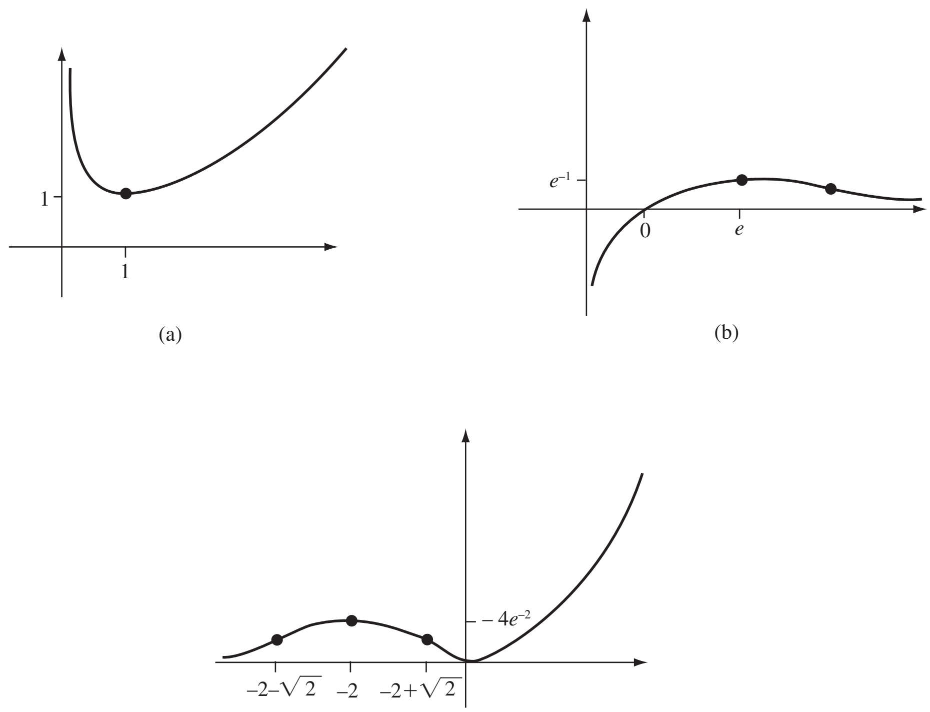
7. Demuestre que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ para todo x entero positivo.

8. Halle $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

Respuesta: π

9. Trace las gráficas de las funciones siguientes: *a*) $y = x - \ln x$; *b*) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; (c) $y = x^2 e^x$

Respuesta: véase figura 27.3



(a) (b) (c)

Fig. 27.3

10. Evalúe los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^4 - 256}{x - 4} = 256$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^4 - 256}{x^2 - 16} = 32$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2} = e^2$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^x}{1 - e^x} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\tan 2x} = \dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(2 + x)}{x + 1} = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} = \dfrac{1}{4}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen} x} = 4$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{8^x - 2^x}{4x} = \dfrac{1}{2} \ln 2$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \tan^{-1} x - x}{2x - \operatorname{sen}^{-1} x} = 1$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x} = 4$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{3}{2}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

p) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi} \dfrac{\csc 6x}{\csc 2x} = \dfrac{1}{3}$ *q*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+2\ln x}{x+3\ln x} = 5$ *r*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+x^2}{e^x+1} = 0$

s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\cot x}{e^{\csc^2 x}} = 0$ *t*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x+3x^3}{4e^x+2x^2} = \dfrac{1}{4}$ *u*) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x-1)\cos x = 1$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ *w*) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{cosec} x = 1$ *x*) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{cosec} \pi x \ln x = -1/\pi$

y) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} e^{-\tan x}\sec^2 x = 0$ *z*) $\lim\limits_{x\to 0} (x-\operatorname{sen}^{-1} x)\operatorname{cosec}^3 x = -\dfrac{1}{6}$ *a′*) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

b′) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 0$ *c′*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi} (\sec^3 x - \tan^3 x) = \infty$ *d′*) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

e′) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x}\right) = -\dfrac{1}{3}$ *f′*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$ *g′*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

h′) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$ *i′*) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+3x)^{1/x} = e^4$ *j′*) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x})^{e^x} = 1/e$

k′) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\tan x} = 1/e$ *l′*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cos x} = 1$ *m′*) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\tan\frac{1}{2}\pi x} = e^{-2/\pi}$

n′) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+1/x)^x = e$ *o′*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{3^{x^2}} = 0$ *p′*) $\lim\limits_{x\to+0^+} \dfrac{e^{-3/x}}{x^2} = 0$

q′) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^5 x}{x^2} = 0$ *r′*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^{1000}}{x^5} = 0$

s′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{(1-x)} = 1$

11. Compruebe el diagrama de la demostración de la forma $\frac{0}{0}$ de la regla de L'Hôpital en $+\infty$. Sean *f*(x) y $g(x)$ son derivables y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \geq c$, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Entonces,

$$\text{si} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración: sea $F(u) = f(1/u)$ y $G(u) = g(1/u)$. Entonces, por el problema 1 para $a \to 0^+$ y con F y G en lugar de f y g,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{F(u)}{G(u)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{F'(u)}{G'(u)}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{(f'(1/u)\cdot(-1/u^2))}{(g'(1/u)\cdot(-1/u^2))} = \lim_{u\to 0^+} \frac{f'(1/u)}{g'(1/u)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

12. Llene los vacíos en la demostración de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ de la regla de L'Hôpital en el caso $\lim\limits_{x\to a^+}$. (Los otros casos se obtienen fácilmente como en la forma $\frac{0}{0}$.) Sean *f*(x) y $g(x)$ derivables y $g'(x) \neq 0$ en algún intervalo abierto (a, b) y que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$. Entonces,

$$\text{si} \quad K = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe,} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración: Sea $\in\, > 0$ y se escoge c de manera que $|K - (f'(x)/g'(x)| < \in/2$ para $a < x < c$. Sea d en (a, c). Sea $a < y < d$. Por el teorema del valor medio extendido, existe un x^* tal que

$$y < x^* < d \qquad \text{y} \qquad \frac{f(d)-f(y)}{g(d)-g(y)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

Entonces,

$$\left|K - \frac{f(d) - f(y)}{g(d) - g(y)}\right| < \frac{\in}{2} \text{ y, entonces, } \left|K - \left[\left(\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(d)}{g(y)}\right) \Big/ \left(1 - \frac{g(d)}{g(y)}\right)\right]\right| < \frac{\in}{2}$$

Ahora se tiene que $y \to a^+$. Como $g(y) \to \pm\infty$ y $f(d)$ y $g(d)$ son constantes, $f(d)/g(y) \to 0$ y $1 - g(d)/g(y) \to 1$. Así, para y próximo a a,

$$\left|K - \frac{f(y)}{g(y)}\right| < \in. \quad \text{Por tanto,} \quad \lim_{y \to a^+} \frac{f(y)}{g(y)} = K$$

13. (CG) En los casos siguientes intente hallar el límite por métodos analíticos y luego compruébelo calculando el límite en una graficadora:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$; *Respuesta:* 0

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x}$; *Respuesta:* 1

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$; *Respuesta:* 1;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$ *Respuesta:* *d*) $\frac{3}{2}$

14. La corriente en un circuito con resistencia R, inductancia L y fuerza electromotriz constante E en el instante t está dada por $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. Obtenga una fórmula para calcular i cuando R está muy próxima a cero.

Respuesta: $\frac{Et}{L}$

28

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Considérese una cantidad y que varía con el tiempo y que

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{28.1}$$

para alguna constante k. Sea $F(t) = y/e^{kt}$. Entonces, por la regla del cociente,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{e^{kt} D_t y - y\, D_t e^{kt}}{e^{2kt}} = \frac{e^{kt} ky - ye^{kt} k}{e^{2kt}} = \frac{0}{e^{2kt}} = 0$$

Por tanto, $F(t)$ debe ser una constante C. (¿Por qué?) Entonces, $y/e^{kt} = C$ y, por ende, $y = Ce^{kt}$. Para evaluar C, sea $t = 0$. Así, $y(0) = Ce^0 = C(1) = C$. Si se designa $y(0)$ por y_0, entonces $C = y_0$ y se ha obtenido la forma general de la solución a la ecuación (28.1):

$$y = y_0 e^{kt} \tag{28.2}$$

Si $k > 0$, entonces *y crece exponencialmente* y k es la *constante de crecimiento*. Si $k < 0$, entonces *y decrece exponencialmente* y k es la constante de decrecimiento. La constante y_0 se denomina *valor inicial*.

Del problema 2 del capítulo 27 se sabe que $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{u^n}{e^u} = 0$. Así, cuando $k > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^{kt}} = 0$. Luego, una cantidad que crece exponencialmente lo hace mucho más rápido que cualquier potencia de t. En muchos procesos naturales, como el crecimiento bacteriano o el decrecimiento radiactivo, las cantidades aumentan o disminuyen a una razón exponencial.

Vida media

Considérese que una cantidad y de cierta sustancia decrece exponencialmente, con un decrecimiento constante k. Sea y_0 la cantidad en el instante $t = 0$. ¿En qué momento T quedará sólo a la mitad de la cantidad original?

Por (28.2) se llega a la ecuación $y = y_0 e^{kt}$. Por tanto, en el instante T,

$$\tfrac{1}{2} y_0 = y_0 e^{kT}$$

$$\tfrac{1}{2} = e^{kT}$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{kT}\right) = kT$$

$$-\ln 2 = kT \tag{28.3}$$

$$T = -\frac{\ln 2}{k} \tag{28.4}$$

Nótese que el mismo valor T se obtiene para *toda* cantidad original y_0. T recibe el nombre de *vida media* de la sustancia. Se relaciona con la constante de decrecimiento k por la ecuación (28.3). Por ello, si se conoce el valor de k o de T es posible calcular el valor de la otra. Además, nótese que en (28.4), $k < 0$, así que $T > 0$.

El valor de k puede obtenerse por experimento. Para un valor inicial dado y_0 y un tiempo positivo específico t_0, se observa el valor de y, se sustituye en la ecuación (28.2) y se despeja o resuelve para k.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La vida media T del radio es 1690 años. ¿Cuánto quedará de un gramo de radio después de 1000 años?

De (28.3), $k = -\frac{\ln 2}{T} = -\frac{\ln 2}{1690}$ y la cantidad de radio está dada por $y = y_0 e^{-(\ln 2)t/1690}$. Se observa que $y_0 = 1$, por lo que al sustituir 1000 por t se obtiene

$$y = e^{-(\ln 2)\,1000/1690} \sim e^{-693.1/1690} \sim e^{-0.4101} \sim 0.6636 \text{ gramos}$$

Así, quedarán aproximadamente 663.6 miligramos al cabo de 1000 años.

2. Si 20% de una sustancia radiactiva desaparece en un año, halle su vida media T. Suponga que el decrecimiento es exponencial.

Por (28.2), $0.8y_0 = y_0^{k(1)} = y_0 e^k$. Entonces, $0.8 = e^k$, donde $k = 1\text{n}\,(0.8) = \ln(\frac{4}{5}) = \ln 4 - 1\text{n}\,5$. De (28.4), $T = -\frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 4} \sim 3.1063$ años.

3. Suponga que el número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente con una constante de crecimiento de 0.02, con el tiempo medido en horas. (Aunque el número de bacterias debe ser un entero no negativo, el supuesto de que el número es una cantidad continua siempre parece llevar a los resultados que se verifican experimentalmente.)

a) ¿Cuántas bacterias estarán presentes después de 1 hora si eran 1000 inicialmente?

b) Dadas las misma 1000 bacterias iniciales, ¿en cuántas horas habrá 100 000 bacterias?

a) De (28.2), $y = 1000e^{0.02} \sim 1000(1.0202) = 1020.2 \sim 1020$

b) De (28.2),

$$\begin{aligned} 100\,000 &= 1000e^{0.02t} \\ 100 &= e^{0.02t} \\ \ln 100 &= 0.02t \\ 2\ln 10 &= 0.02t \text{ (como } \ln 100 = \ln(10)^2 = 2\ln 10) \\ t &= 100 \ln 10 \sim 100(2.0326) = 203.26 \text{ horas} \end{aligned}$$

Nota: a veces, en lugar de dar un crecimiento constante, como $k = 0.02$, se da una razón de crecimiento correspondiente por una unidad de tiempo (en este caso, 2% por hora). Esto no es muy exacto. Una razón de crecimiento de r% por unidad de tiempo es aproximadamente lo mismo que un valor de $k = 0.0r$ cuando r es relativamente pequeña (por ejemplo, $r \le 3$). De hecho, con una razón de crecimiento de r%, $y = y_0(1 + 0.0r)$ después de una unidad de tiempo. Como $y = y_0 e^k$ cuando $t = 1$, queda $1 + 0.0r = e^k$ y, por consiguiente, $k = \ln(1 + 0.0r)$. Esto es próximo a $0.0r$, ya que $\ln(1 + x) \sim x$ para x pequeñas positivas. (Por ejemplo, ln 1.02 ~ 0.0198 y ln 1.03 ~ 0.02956). Por ello, en numerosos textos se interpreta con frecuencia una razón de crecimiento de r% como $k = 0.0r$.

4. Si una cantidad y crece o decrece exponencialmente, halle una fórmula para obtener el valor promedio de y durante el intervalo $[0, b]$.

Por definición, el valor promedio $y_{av} = \frac{1}{b-0}\int_0^b y\,dt = \frac{1}{bk}\int_0^b ky\,dt$ (donde k es la constante de crecimiento o decrecimiento). Por (28.1), $ky = \frac{dy}{dt}$ y, por ende, $y_{av} = \frac{1}{bk}\int_0^b \frac{dy}{dt}\,dt$. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_0^b \frac{dy}{dt}\,dt = y(b) - y(0) = y(b) - y_0. \quad \text{Luego, } y_{av} = \frac{1}{bk}(y(b) - y_0)$$

5. Si la población de un país es 100 millones de personas y crece exponencialmente con una constante $k = \ln 2$, calcule con exactitud la población dentro de cinco años.

Por (28.2), la población $y = y_0 e^{kt} = 10^8 e^{(\ln 2)5} = 10^8 (e^{\ln 2})^5 = 10^8(2^5) = 32(10^8)$. Por tanto, la población llegará a 3.2 miles de millones de personas en cinco años.

6. Vida media del carbono. Cierto isótopo ^{14}C de carbono se presenta en los organismos vivos en una proporción fija del carbono ordinario. Cuando el organismo muere, su ^{14}C decrece exponencialmente y su vida media es de 5730 años. Considérese que una pieza de carbón vegetal proveniente de un incendio forestal se encontró en una cueva y contiene sólo 9% de ^{14}C esperando en un trozo de madera de un árbol vivo. (Esta cifra se obtiene al medir la cantidad de carbono ordinario en el pedazo de carbón vegetal.) ¿Hace cuánto se quemó la madera para formar el carbón vegetal?

Si y es la cantidad de ^{14}C presente en el trozo de carbón vegetal, se tiene que $y = y_0 e^{kt}$. La cantidad presente es $0.09y_0 = y_0 e^{k\tau}$, donde τ es el tiempo transcurrido. Entonces, $0.09 = e^{k\tau}$, $\ln(0.09) = k\tau$, $\tau = (\ln(0.09))/k$. Como la vida media $T = 5730$ y $k = (\ln 2)/T = -(\ln 2)/5730$, se obtiene

$$\tau = -\frac{5730\ln(0.09)}{\ln 2} = \frac{5730(\ln 100 - \ln 9)}{\ln 2} \sim 19906 \text{ años}$$

7. Ley del enfriamiento de Newton. La razón de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre temperatura del objeto y la del medio que lo rodea.

Suponga que un refrigerador se mantiene a una temperatura constante de 45 °F y que se coloca un objeto con temperatura de 80 °F dentro de él. Si la temperatura del objeto cae de 80 °F a 70 °F en 15 minutos, ¿en cuánto tiempo la temperatura del objeto bajará a 60 °F?

Sea u la temperatura del objeto. Entonces, por la ley del enfriamiento de Newton, $du/dt = k(u - 45)$ para alguna constante k (negativa). Sea $y = u - 45$. Así, $dy/dt = du/dt = ky$. Entonces, por (28.2), $y = y_0 e^{kt}$. Como u tiene inicialmente 80 °F, $y_0 = 80 - 45 = 35$. Así, $y = 35e^{kt}$ cuando $t = 15$, $u = 70$ y $y = 25$. Por tanto, $25 = 35e^{15k}$, $5 = 7e^{15k}$ y, por consiguiente, $15k = \ln\left(\frac{5}{7}\right) = \ln 5 - \ln 7$. Entonces, $k = \frac{1}{15}(\ln 5 - \ln 7)$. Cuando la temperatura del objeto es de 60 °F, $y = 15$. Por ende, $15 = 35e^{kt}$, $3 = 7e^{kt}$, $3 = 7e^{kt}$ y, por consiguiente, $kt = \ln\left(\frac{3}{7}\right) = \ln 3 - \ln 7$. Entonces,

$$t = \frac{\ln 3 - \ln 7}{k} = 15\frac{\ln 3 - \ln 7}{\ln 5 - \ln 7} \sim 37.7727 \text{ minutos}$$

En consecuencia, se necesitan aproximadamente 22.7727 minutos para que la temperatura del objeto baje de 70 °F a 60 °F.

8. Interés compuesto: Suponga que los ahorros de una cuenta ganan intereses a una tasa de r% anual. Al cabo de un año, una cantidad de P dólares se volvería $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ dólares, y después de t años se convertirá $P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$ dólares. No obstante, si se calcula el interés n veces al año en lugar de una vez al año, entonces en cada periodo la tasa de interés sería (r/n)%; después de t años, habrán pasado nt de tales periodos y el monto final sería $P\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}$. Si $n \to +\infty$, entonces el interés se *compone continuamente*. En tal caso, la cantidad final sería

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt} = P\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{n}\right]^t = Pe^{0.01rt} \quad \text{por (26.16)}$$

Se depositan 100 dólares en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés de 4% anual. Después de cinco años, cuánto habrá en la cuenta si:

a) ¿El interés se calcula una vez al año?

b) ¿El interés se calcula trimestralmente (es decir, cuatro veces por año)?

c) ¿El interés se compone continuamente?

a) $100(1.04)^5 \sim 121.6653$ dólares

b) $100(1.01)^{20} \sim 122.0190$ dólares

c) $100e^{0.04(5)} = 100e^{0.2} \sim 122.1403$ dólares

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Supóngase que en una reacción química cierta sustancia se descompone a una razón proporcional a la cantidad presente. Considere que una cantidad inicial de 10 000 gramos se reduce a 1000 gramos en cinco horas. ¿Cuánto quedará de una cantidad inicial de 20 000 gramos después de 15 horas?

Respuesta: 20 gramos

10. Un contenedor con capacidad máxima de 25 000 insectos tiene inicialmente 1000 de ellos. Si la población crece exponencialmente con una constante de crecimiento de (ln 5)/10 insectos por día, ¿en cuántos días estará lleno el contenedor?

Respuesta: 20 días

11. La vida media del radio es de 1690 años. ¿Cuánto radio quedará de 32 gramos de radio al cabo de 6760 años?

Respuesta: 2 gramos

12. Si una población crece exponencialmente y se incrementa a una razón de 2.5% por año, halle la constante de crecimiento k.

Respuesta: $\ln 1.025 \sim 0.0247$

13. Una solución de agua salada contiene inicialmente 5 libras de sal en 10 galones de líquido. Si el agua fluye a razón de $\frac{1}{2}$ gal/min y la mezcla fluye a la misma razón, ¿cuánta sal habrá al cabo de 20 minutos?

Respuesta: $\dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S}{10}\right)$. Cuando $t = 20$, $S = 5e^{-1} \sim 1.8395$ lb

14. Los insectos de un cercado crecen exponencialmente de forma tal que su población se duplica en cuatro horas. Después de 12 horas, ¿cuántas veces aumentará el número inicial de insectos?

Respuesta: 8

15. (CG) Si la población mundial en 1990 fue de de 4.5 miles de millones de personas y crece exponencialmente con una constante de crecimiento $k = (\ln 3)/8$, calcule la población mundial en los años *a*) 2014, *b*) 2020.

Respuestas: *a*) 111.5 miles de millones; *b*) 277.0 miles de millones

16. (CG) Si un termómetro con una lectura de 65 °F se saca al aire donde la temperatura es de 25 °F constante, la lectura decrece a 50 °F en 2.0 minutos.

a) Halle la lectura del termómetro después de un minuto más.
b) ¿Cuánto tiempo más transcurrirá (después de 3.0 minutos) para que el termómetro marque 32 °F?

Aplique la ley del enfriamiento de Newton.

Respuestas: *a*) 45 °F; *b*) aproximadamente 4.4 minutos más

17. (CG) Bajo interés compuesto continuo a una razón de r% por año;

a) ¿Cuánto toma en duplicarse una cantidad de dinero P?
b) Si una cantidad P se duplica en nueve años, ¿cuánto es r?

c) Si $r = 8$, ¿cuánto debe depositarse ahora para que haya \$100 000 en 17 años?

Respuestas: *a*) $\dfrac{100\ln 2}{r} \sim \dfrac{69.31}{r}$; *b*) aproximadamente 7.7; *c*) aproximadamente \$25 666

18. Un objeto se enfría de 120 °F a 95 °F en media hora cuando está rodeado por aire a una temperatura de 70 °F. Aplique la ley del enfriamiento de Newton para hallar su temperatura al cabo de media hora más.

Respuesta: 82.5 °F

19. Si una cantidad de dinero que recibe un interés de 8% anual se descompone continuamente, ¿cuál es la tasa de rendimiento anual equivalente?

Respuesta: aproximadamente 8.33%

20. ¿Cuánto se toma en decrecer 90% de un elemento radiactivo cobalto 60, si su vida media es 5.3 años?

Respuesta: aproximadamente 17.6 años

21. Una sustancia radiactiva decrece exponencialmente. Si se comienza con una cantidad inicial de y_0, ¿cuál es la cantidad promedio presente durante la primera vida media?

Respuesta: $\dfrac{y_0}{2\ln 2}$

29

Aplicaciones de integración I: Área y longitud de arco

Área entre una curva y el eje *y*

Ya se ha expuesto el procedimiento para hallar el área de una región como la que se muestra en la figura 29.1, limitada por debajo por el eje x, por encima por una curva $y = f(x)$, y que queda entre $x = a$ y $x = b$. El área es la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

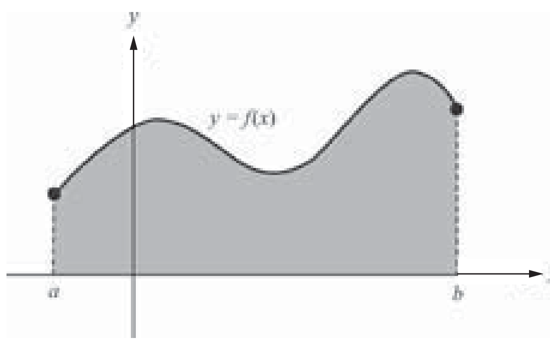


Fig. 29.1

Ahora, considérese la región que aparece en la figura 29.2, limitada a la izquierda por el eje y, a la derecha por una curva $x = g(y)$, y que queda entre $y = c$ y $y = d$. Entonces, por un argumento similar al del caso mostrado en la figura 29.1, el área de la región es la integral definida $\int_c^d g(y)\,dy$.

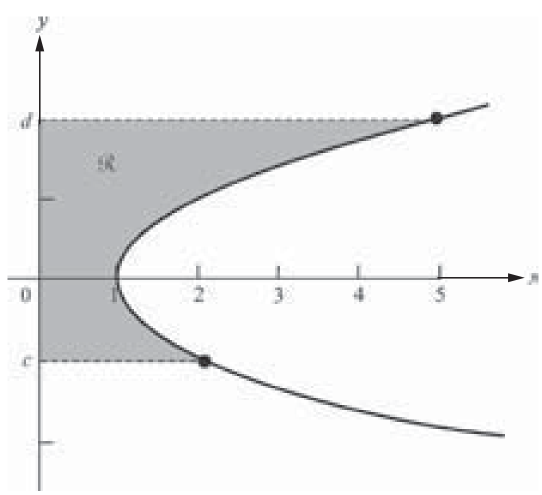


Fig. 29.2

EJEMPLO 29.1. Considere la región limitada a la derecha por la parábola $x = 4 - y^2$, a la izquierda por el eje y, y por encima y por debajo por $y = 2$ y $y = -1$ (fig. 29.3). Entonces, el área de esta región es $\int_{-1}^{2}(4 - y^2)\,dy$. Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que

$$(4y - \tfrac{1}{3}y^3)\Big]_{-1}^{2} = (8 - \tfrac{8}{3}) - (-4 - (-\tfrac{1}{3})) = 12 - \tfrac{9}{3} = 12 - 3 = 9$$

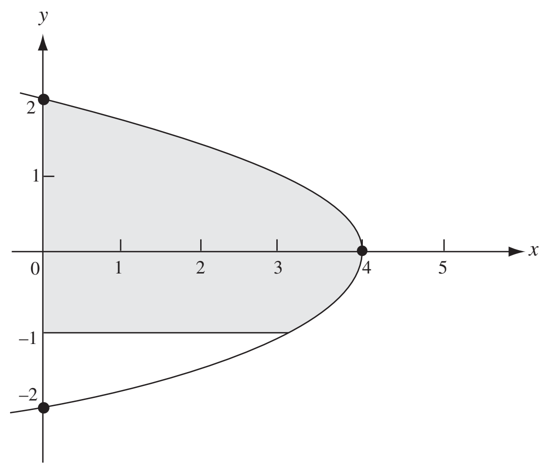


Fig. 29.3

Área entre curvas

Sean f y g funciones continuas tales que $g(x) \le f(x)$ para $a \le x \le b$. Entonces, la curva $y = f(x)$ queda por encima de la curva $y = g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. El área A de la región que yace entre las dos curvas y que queda entre $x = a$ y $x = b$ se obtiene con la fórmula

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \tag{29.1}$$

Para comprender por qué la fórmula se cumple, primero observe un caso especial donde $0 \le g(x) \le f(x)$ para $a \le x \le b$ (fig. 29.4). Claramente el área es la diferencia entre dos áreas, el área A_f de la región bajo la curva $y = f(x)$ y por encima del eje x, y el área A_g de la región bajo la curva $y = g(x)$ y por encima del eje x. Como $A_f = \int_a^b f(x)\,dx$ y $A_g = \int_a^b g(x)\,dx$,

$$A = A_f - A_g = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \quad \text{por (23.6)}$$

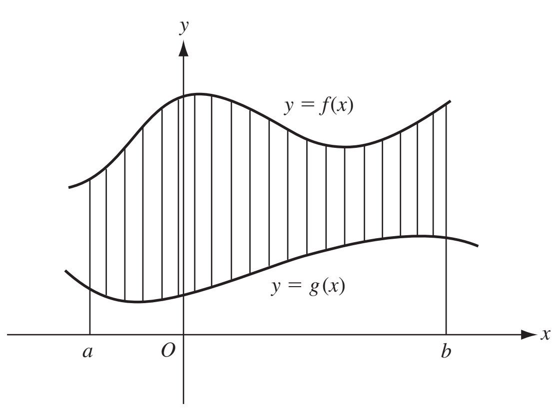


Fig. 29.4

Ahora se estudiará el caso general (fig. 29.5), en el que una o ambas curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ pueden quedar por debajo del eje x. Sea $m < 0$ el mínimo absoluto de g en $[a, b]$. Se elevan ambas curvas $|m|$ unidades. Las nuevas gráficas, que se muestran en la figura 29.6, se hallan sobre el eje x y comprenden la misma área A que las gráficas originales. La curva superior es la gráfica de $y = f(x) + |m|$, en tanto que la inferior es la de $y = g(x) + |m|$. Por tanto, por el caso especial anterior,

$$A = \int_a^b ((f(x)) + |m|) - (g(x) + |m|))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

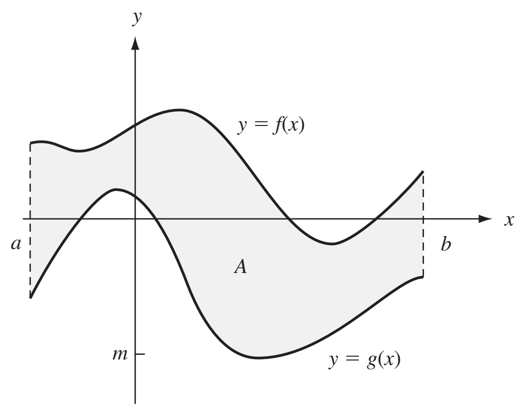


Fig. 29.5

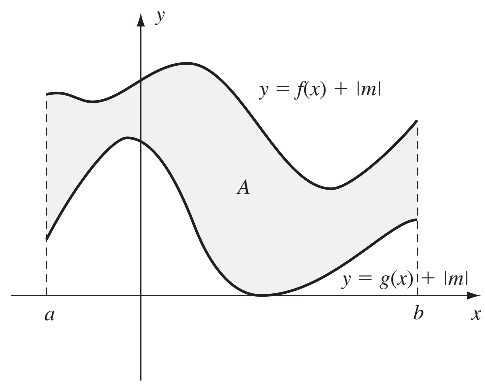


Fig. 29.6

EJEMPLO 29.2. Halle el área A de la región $\mathscr{R}$ bajo la recta $y = \frac{1}{2}x + 2$, por encima de la parábola $y = x^2$ y entre el eje y y $x = 1$ (véase la región sombreada de la figura 29.7). Por (29.1),

$$A = \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - x^2\right) dx = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3}\right) - (0 + 0 - 0) = \frac{3}{12} + \frac{24}{12} - \frac{4}{12} = \frac{23}{12}$$

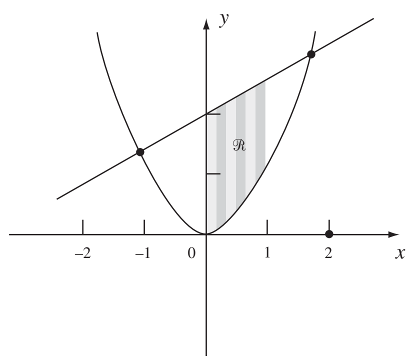


Fig. 29.7

Longitud de arco

Sea f diferenciable en $[a, b]$. Considere la parte de la gráfica de f de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Halle una fórmula para la longitud L de esta curva. Divida $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud Δx. A cada punto x_k en esta subdivisión le corresponde un punto $(P_k(x_k, f(x_k))$ en la curva (fig. 29.8). Para los n grandes, la suma $\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1}P_k}$ de las longitudes de los segmentos de recta $P_{k-1}P_k$ es una aproximación a la longitud de la curva.

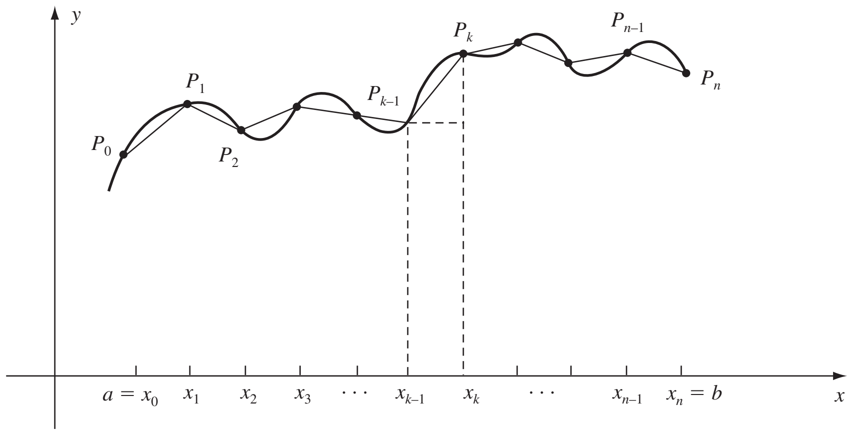


Fig. 29.8

Por la fórmula de la distancia (2.1),

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

Ahora, $x_k - x_{k-1} = \Delta x$, y por el teorema del valor medio (teorema 13.4)

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})f'(x_k^*) = (\Delta x)f'(x_k^*)$$

para algún x_k^* en (x_{k-1}, x_k). Luego,

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2(f'(x_k^*))^2} = \sqrt{(1 + (f'(x_k^*))^2)(\Delta x)^2}$$
$$= \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}\,\Delta x$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}\,\Delta x$$

La suma de la derecha es una suma de aproximación para la integral definida $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. Por consiguiente, cuando $n \to +\infty$, se obtiene la *fórmula de la longitud de arco:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \qquad (29.2)$$

EJEMPLO 29.3. Halle la longitud de arco L de la curva $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 5$.

Por (29.2), como $y' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$,

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

$$= \tfrac{4}{9}\int_0^5 (1 + \tfrac{9}{4}x)^{1/2}\left(\tfrac{9}{4}\right)dx = \tfrac{4}{9}\,\tfrac{2}{3}(1 + \tfrac{9}{4}x)^{3/2}\Big]_0^5 \quad \text{(por la fórmula abreviada I y el teorema fundamental del cálculo)}$$

$$= \tfrac{8}{27}\left(\left(\tfrac{49}{4}\right)^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \tfrac{8}{27}\left(\tfrac{343}{8} - 1\right) = \tfrac{335}{27}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle el área limitada por la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje y y las rectas $y = -1$ y $y = 3$.

Observe, completando el cuadrado, que $x = -(y^2 - 2y - 8) = -((y - 1)^2 - 9) = 9 - (y - 1)^2 = (4 - y)(2 + y)$. Por tanto, el vértice de la parábola es (9, 1) y la parábola corta el eje y en $y = 4$ y $y = -2$. Se desea saber el área de la región sombreada de la figura 29.9, dada por

$$\int_{-1}^{3}(8+2y-y^2)\,dy = \left(8y+y^2-\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big]_{-1}^{3} = (24+9-9)-\left(-8+1-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{92}{3}$$

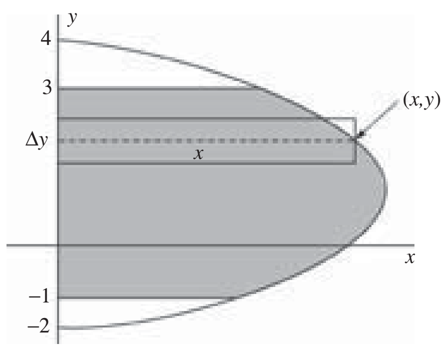


Fig. 29.9

2. Halle el área de la región comprendida entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ de $x = 0$ a $x = \pi/4$ (fig. 29.10).

Las curvas se intersecan en $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$, y $0 \le \operatorname{sen} x < \cos x$ para $0 \le x < \pi/4$ (fig. 29.10). Por tanto, el área es

$$\int_{0}^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = (\operatorname{sen} x + \cos x)\Big]_{0}^{\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) = \sqrt{2}-1$$

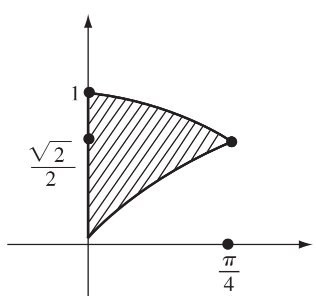


Fig. 29.10

3. Halle el área de la región limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$.

Al despejar x en $6x - x^2 = x^2 - 2x$ se observa que las parábolas se cortan cuando $x = 0$ y $x = 4$, es decir, en (0, 0) y (4, 8) (fig. 29.11). Completando el cuadrado, la primera parábola tiene la ecuación $y = 9 - (x - 3)^2$; por consiguiente, su vértice está en (3, 9) y se abre hacia abajo. De igual forma, la segunda parábola tiene la ecuación $y = (x - 1)^2 - 1$; en consecuencia, su vértice está en (1, –1) y se abre hacia arriba. Observe que la primera parábola queda por encima de la segunda en la región dada. Por (29.1), el área requerida es

$$\int_{0}^{4}((6x-x^2)-(x^2-2x))\,dx = \int_{0}^{4}(8x-2x^2)\,dx = \left(4x^2-\tfrac{2}{3}x^3\right)\Big]_{0}^{4} = \left(64-\frac{128}{3}\right) = \frac{64}{3}$$

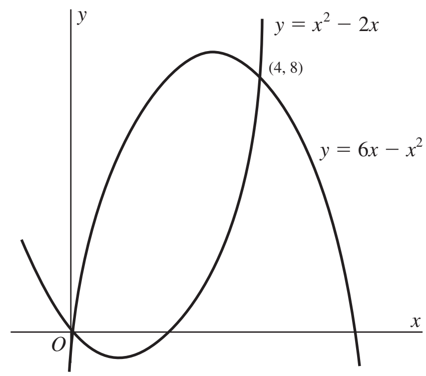


Fig. 29.11

4. Halle el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

Despejando las ecuaciones simultáneamente se obtiene $(2x - 4)^2 = 4x$, $x^2 - 4x + 4 = x$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $(x - 1)(x - 4) = 0$. Por tanto, las curvas se cortan cuando $x = 1$ o $x = 4$, es decir, en $(1, -2)$ y $(4, 4)$ (fig. 29.12). Nótese que ninguna de las curvas está por encima de la otra en toda la región. En consecuencia, es mejor tomar y como variable independiente y rescribir las curvas como $x = \frac{1}{4}y^2$ y $x = \frac{1}{2}(y+4)$. La recta siempre está a la derecha de la parábola.

El área se obtiene integrando a lo largo del eje y:

$$\int_{-2}^{4}\left(\tfrac{1}{2}(y+4) - \tfrac{1}{4}y^2\right)dy = \tfrac{1}{4}\int_{-2}^{4}(2y + 8 - y^2)\,dy$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(y^2 + 8y - \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big]_{-2}^{4} = \tfrac{1}{4}\left(\left(16 + 32 - \tfrac{64}{3}\right) - \left(4 - 16 + \tfrac{8}{3}\right)\right) = 9$$

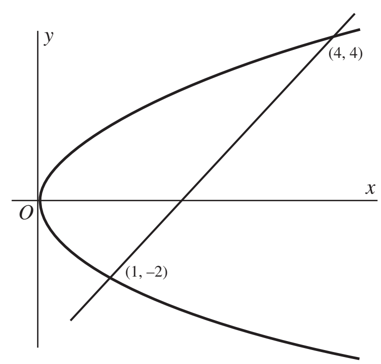


Fig. 29.12

5. Determine el área de la región que se halla entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.

Como $x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$, la curva corta el eje x en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$. La gráfica es similar a la curva mostrada en la figura 29.13. (Aplicando la fórmula cuadrática a y' se encuentra que los valores máximo y mínimo ocurren en $x = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$.) Como la parte de la región con $2 \le x \le 4$ queda por debajo del eje x es preciso calcular las dos integrales separadas, una respecto a y entre $x = 0$ y $x = 2$, y la otra respecto a $-y$ entre $x = 2$ y $x = 4$. Así, el área requerida es

$$\int_{0}^{2}(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx - \int_{2}^{4}(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right)\Big]_{0}^{2} - \left(\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_{2}^{4} = 4 + 4 = 8$$

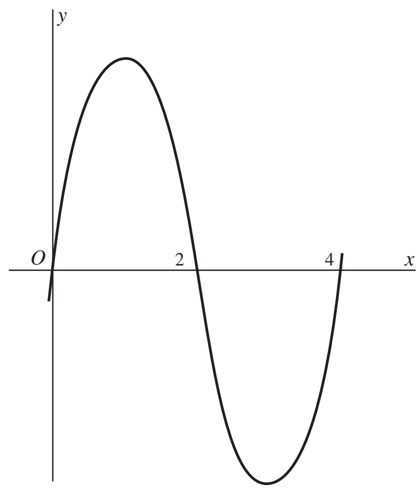


Fig. 29.13

Observe que si hubiera cometido el error de calcular simplemente la integral $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$, se hubiera obtenido la respuesta incorrecta, que es 0.

6. Establezca el área encerrada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

La curva es simétrica respecto a los ejes de coordenadas. Por tanto, el área requerida es cuatro veces la parte que yace en el primer cuadrante (fig. 29.14). En el primer cuadrante, $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$ y la curva corta el eje x en $x = 0$ y $x = 1$. Entonces, el área requerida es

$$4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -2\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}(-2x)\,dx$$

$$= -2\left(\tfrac{2}{3}\right)(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^1 \qquad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= -\tfrac{4}{3}(0 - 1^{3/2}) = -\tfrac{4}{3}(-1) = \tfrac{4}{3}$$

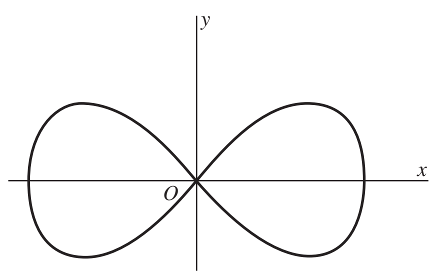


Fig. 29.14

7. Halle la longitud de arco de la curva $x = 3y^{3/2} - 1$ de $y = 0$ a $y = 4$.

Se pueden invertir los papeles de x y de y en la fórmula de la longitud de arco (29.2): $L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$. Como $\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{1/2}$,

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \tfrac{81}{4}y}\,dy = \tfrac{4}{81}\int_0^4 (1 + \tfrac{81}{4}y)^{1/2}(\tfrac{81}{4})\,dy = \tfrac{4}{81}(\tfrac{2}{3})(1 + \tfrac{81}{4}y)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{8}{243}((82)^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1)$$

8. Halle la longitud de arco de la curva $24xy = x^4 + 48$ de $x = 2$ a $x = 4$.

$y = \frac{1}{24}x^3 + 2x^{-1}$. Por tanto, $y' = \frac{1}{8}x^2 - 2/x^2$. Entonces,

$$(y')^2 = \tfrac{1}{64}x^4 - \tfrac{1}{2} + \frac{4}{x^4}$$

$$1 + (y')^2 = \tfrac{1}{64}x^4 + \tfrac{1}{2} + \frac{4}{x^4} = \left(\tfrac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2$$

Por consiguiente,

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_2^4 \left(\tfrac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int_2^4 \left(\tfrac{1}{8}x^2 + 2x^{-2}\right)dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{24}x^3 - 2x^{-1}\right)\Big]_2^4 = \left(\tfrac{8}{3}-\tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{3}-1\right) = \tfrac{17}{6}$$

9. Determine la longitud de arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ de $x = 0$ a $x = a$.
$y' = \frac{1}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ y, por ende,

$$1+(y')^2 = 1 + \tfrac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \tfrac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$$

Entonces,

$$L = \tfrac{1}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})\Big]_0^a = \frac{a}{2}(e - e^{-1})$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10. Halle el área de la región que queda por encima del eje x y debajo de la parábola $y = 4x - x^2$.

Respuesta: $\frac{32}{3}$

11. Establezca el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

Respuesta: $\frac{56}{3}$

12. Determine el área de la región limitada por las curvas dadas.

a) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 5$ — *Respuesta*: 39
b) $y = x^3, y = 0, x = 1, x = 3$ — *Respuesta*: 20
c) $y = 4x - x^2, y = 0, x = 1, x = 3$ — *Respuesta*: $\frac{22}{3}$
d) $x = 1 + y^2, x = 10$ — *Respuesta*: 36
e) $x = 3y^2 - 9, x = 0, y = 0, y = 1$ — *Respuesta*: 8
f) $x = y^2 + 4y, x = 0$ — *Respuesta*: $\frac{32}{3}$
g) $y = 9 - x^2, y = x + 3$ — *Respuesta*: $\frac{125}{6}$
h) $y = 2 - x^2, y = -x$ — *Respuesta*: $\frac{9}{2}$
i) $y = x^2 - 4, y = 8 - 2x^2$ — *Respuesta*: 32
j) $y = x^4 - 4x^2, y = 4x^2$ — *Respuesta*: $\frac{512}{15}\sqrt{2}$
k) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 0, x = 2$ — *Respuesta*: $\dfrac{e^2+1}{e^2-2}$
l) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}, y = 0, x = \pm a$ — *Respuesta*: $2a\left(\dfrac{e-1}{e}\right)$
m) $xy = 12, y = 0, x = 1, x = e^2$ — *Respuesta*: 24
n) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, y = 0, x = \pm 1$ — *Respuesta*: $\dfrac{\pi}{2}$
o) $y = \tan x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$ — *Respuesta*: $\frac{1}{2}\ln 2$
p) $y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2$ — *Respuesta*: $\frac{98}{3}$

13. Halle la longitud del arco indicado de las curvas siguientes.

a) $y^3 = 8x^2$ de $x = 1$ a $x = 8$ — *Respuesta*: $\left(104\sqrt{13} - 125\right)/27$

b) $6xy = x^4 + 3$ de $x = 1$ a $x = 2$ — *Respuesta*: $\frac{17}{12}$

c) $27y^2 = 4(x - 2)^3$ de $(2, 0)$ a $(11, 6\sqrt{3}$ — *Respuesta*: 14

d) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ de $x = 1$ a $x = e$ — *Respuesta*: $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$

e) $y = \ln \cos x$ de $x = \dfrac{\pi}{6}$ a $x = \dfrac{\pi}{4}$ — *Respuesta*: $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

f) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ de $x = 1$ a $x = 8$ — *Respuesta*: 9

14. (CG) Calcule la longitud de arco de la curva $y = \text{sen}\, x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ con una exactitud de cuatro decimales. (Aplique la regla de Simpson con $n = 10$.)

Respuesta: 3.8202

30

Aplicaciones de integración II: volumen

Un sólido de revolución se obtiene al girar una región en un plano alrededor de una recta que no corta la región. La recta sobre la que se lleva a cabo la rotación se denomina *eje de revolución*.

Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere la región $\mathcal{R}$ bajo la gráfica de f, por encima del eje x y entre $x = a$ y $x = b$ (fig. 30.1). Si $\mathcal{R}$ gira en torno al eje x, el sólido resultante es un *sólido de revolución.* En la figura 30.2 se muestran las regiones generadoras $\mathcal{R}$ para algunos sólidos comunes.

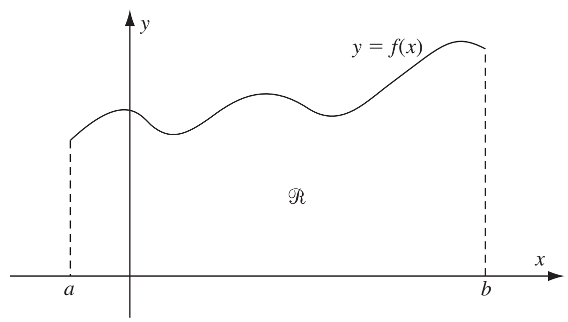


Fig. 30.1

Fórmula del disco

El volumen V del sólido de revolución obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ de la figura 30.1 en torno al eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad \text{(Fórmula del disco)}$$

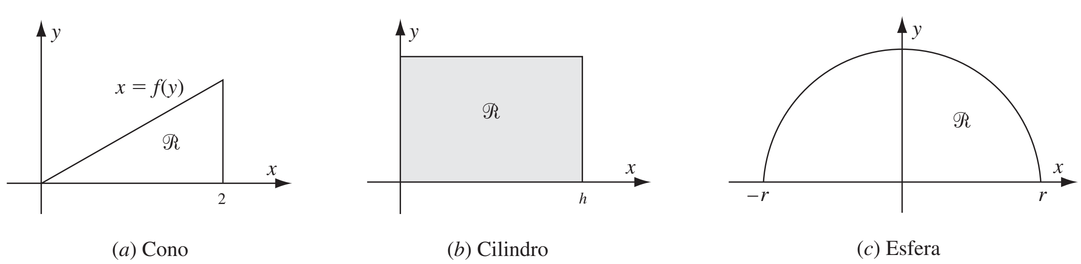


Fig. 30.2

En el problema 9 hallará un diagrama de la demostración de esta fórmula.

De igual forma, cuando el eje de rotación es el eje y la región que está girando queda entre ese eje y una curva $x = g(y)$ y entre $y = c$ y $y = d$ (fig. 30.3), entonces el volumen V del sólido de revolución se obtiene con la fórmula

$$V = \pi\int_c^d (g(y))^2\,dy = \pi\int_a^b x^2dy \qquad \text{(Fórmula del disco)}$$

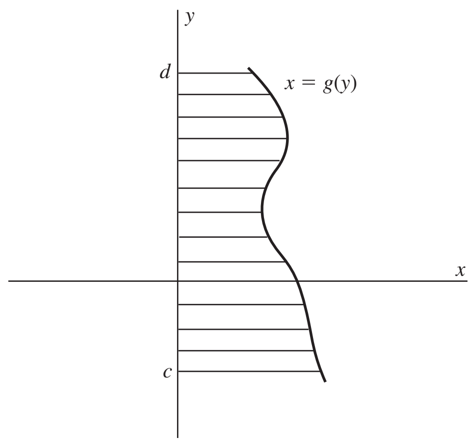


Fig. 30.3

EJEMPLO 30.1. Considérese un sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje x la región en el primer cuadrante, limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ (fig. 30.4). Mediante la fórmula del disco, el volumen es

$$V = \pi\int_0^2 y^2dx = \pi\int_0^2 8x\,dx = \pi(4x^2)\Big]_0^2 = \pi(16-0) = 16\pi$$

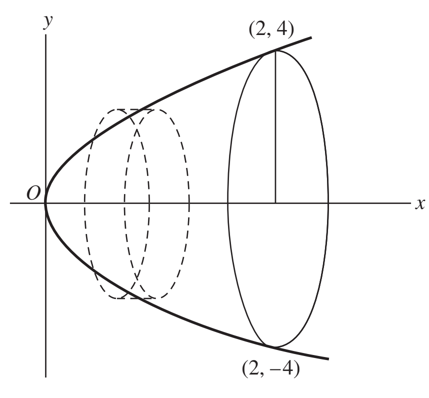


Fig. 30.4

EJEMPLO 30.2. Considérese un sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje y la región limitada por la parábola $y = 4x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 16$ (fig. 30.5). Para determinar su volumen, se utiliza la versión de la fórmula del disco en la que se integra a lo largo del eje y. Así,

$$V = \pi\int_0^{16} x^2dy = \pi\int_0^{16}\frac{y}{4}dy = \frac{\pi}{8}y^2\Big]_0^{16} = \frac{\pi}{8}(256-0) = 32\pi$$

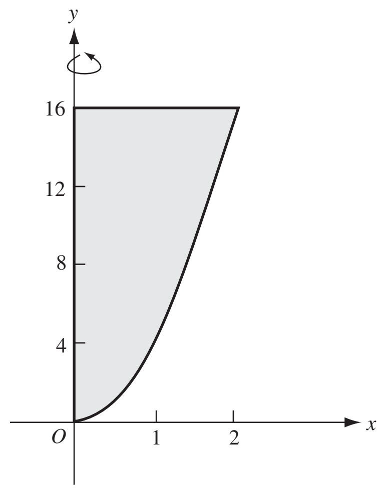


Fig. 30.5

Método de washer

Supóngase que $0 \le g(x) \le f(x)$ para $a \le x\ b$. Considere la región entre $x = a$ y $x = b$ que queda entre $y = g(x)$ y $y = f(x)$ (fig. 30.6). Entonces, el volumen V del sólido de revolución obtenido al girar esta región sobre el eje x se obtiene con la fórmula

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \qquad \text{(Fórmula de washer)*}$$

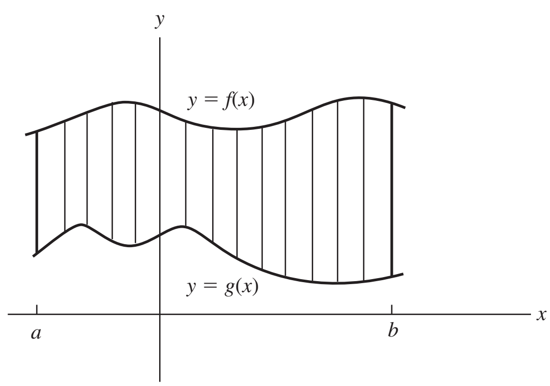


Fig. 30.6

La justificación es clara. El volumen deseado es la diferencia de dos volúmenes, los volúmenes $\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$ del sólido de revolución generado al girar en torno al eje x la región que se halla debajo de $y = f(x)$, y el volumen $\pi \int_a^b (g(x))^2\, dx$ del sólido de revolución producido al girar alrededor del eje x la región que se encuentra debajo de $y = g(x)$.

Una fórmula semejante

$$V = \pi \int_c^d \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] dy \qquad \text{(Fórmula de washer)}$$

se cumple cuando la región queda entre dos curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y entre $y = c$ y $y = d$, y se gira en torno al eje y. (Se supone que $0 \le g(y) \le f(y)$ para $c \le y \le d$.)

* La palabra *washer* (arandela) se usa porque cada delgada franja vertical de la región que se gira produce un sólido parecido a una parte de las cañerías llamada *arandela*.

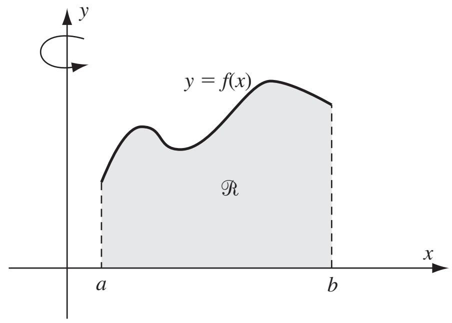


Fig. 30.7

EJEMPLO 30.3. Considere un sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje x la región limitada por las curvas $y = 4x^2$, $x = 0$ y $y = 16$ (la misma región que en la figura 30.5). Aquí la curva superior es $y = 16$ y la inferior, $y = 4x^2$. Así, por la fórmula de washer,

$$V = \pi\int_0^2 \left[16^2 - (4x^2)^2\right] dx = \pi\int_0^2 \left[256 - 16x^4\right] dx = \pi\left(256x - \frac{16}{5}x^5\right)\Big]_0^2 = \pi\left(512 - \frac{512}{5}\right) = \frac{2048\pi}{5}$$

Método de capas cilíndricas

Considérese el sólido de revolución obtenido al girar en torno al eje y la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante entre el eje x y la curva $y = f(x)$, y que yace entre $x = a$ y $x = b$ (fig. 30.7). Entonces, el volumen del sólido está dado por

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\, dx = 2\pi\int_a^b xy\, dx \qquad \text{(Fórmula de capas cilíndricas)}$$

En el problema 10 se ofrece la justificación de esta fórmula.

Una fórmula similar se cumple cuando los papeles de x y y se invierten, es decir, la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante entre el eje y y la curva $x = f(y)$, y que queda entre $y = c$ y $y = d$, gira alrededor del eje x

$$V = 2\pi\int_c^d yf(y)\, dy = 2\pi\int_c^d yx\, dy$$

EJEMPLO 30.4. Gire en torno del eje y la región que está por encima del eje x y por debajo de $y = 2x^2$, y entre $x = 0$ y $x = 5$. Por la fórmula de capas cilíndricas, el sólido resultante tiene el volumen

$$2\pi\int_0^5 xy\, dx = 2\pi\int_0^5 x(2x^2)\, dx = 4\pi\int_0^5 x^3 dx = \pi(x^4)\Big]_0^5 = 625\pi$$

Observe que el volumen hubiera podido calcularse mediante la fórmula de washer, pero el cálculo hubiera sido un tanto más complicado.

Diferencia de la fórmula de capas

Sea $0 \le g(x) \le f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ con $a \ge 0$. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante que está entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$. Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y se obtiene con

$$V = 2\pi\int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx \qquad \text{(Diferencia de la fórmula de capas)}$$

Esto se deduce obviamente de la fórmula de capas cilíndricas, ya que el volumen requerido es la diferencia de los dos volúmenes obtenidos mediante la fórmula de capas cilíndricas. Nótese que una fórmula similar es válida cuando los papeles de x y y se invierten.

EJEMPLO 30.5. Considere la región del primer cuadrante limitada por encima por $y = x^2$, por debajo por $y = x^3$ y que queda entre $x = 0$ y $x = 1$. Cuando se le gira en torno al eje y, esta región genera un sólido de revolución cuyo volumen, de acuerdo con la diferencia de la fórmula de capas, es

$$2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = 2\pi \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}$$

Fórmula de la sección transversal (fórmula de las rebanadas)

Supóngase que un sólido queda por completo entre el plano perpendicular al eje x en $x = a$ y el plano perpendicular al eje x en $x = b$. Para cada x tal que $a \le x \le b$, supóngase que el plano perpendicular al eje x en ese valor de x corta el sólido en una región de área $A(x)$ (fig. 30.8). Entonces, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \qquad \text{(Fórmula de la sección transversal)}^{\dagger}$$

En el problema 11 se ofrece una comprobación.

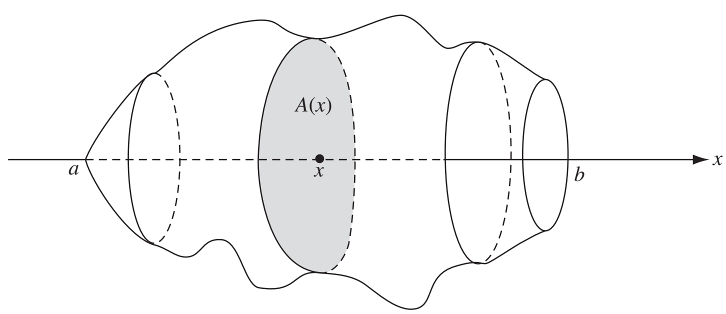


Fig. 30.8

EJEMPLO 30.6. Suponga que la mitad de un salami de longitud h es tal que una sección transversal perpendicular al eje del salami, a una distancia x del extremo O, es un círculo de radio $\sqrt{x}$ (fig. 30.9). Por tanto, el área $A(x)$ de la sección transversal es $\pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$. Así, con la fórmula de la sección transversal se obtiene

$$V = \int_0^h A(x)\, dx = \int_0^h \pi x\, dx = \frac{\pi}{2}x^2\Big]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}$$

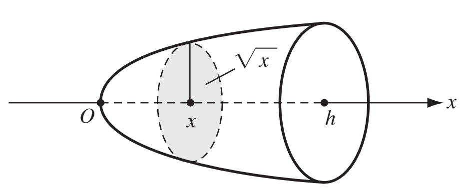


Fig. 30.9

† Está fórmula también se conoce como *la fórmula de las rebanadas* porque cada área de corte transversal $A(x)$ se obtiene cortando el sólido en rebanadas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle el volumen de un cono de altura h, cuya base tiene radio r.

El cono se genera al girar en torno al eje x la región que se halla entre la recta $y = \frac{r}{h}x$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = h$ [fig. 30.2*a*)]. Por la fórmula del disco, el volumen del cono es

$$\pi\int_0^h y^2\,dx = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\tfrac{1}{3}h^3\right) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

2. Determine el volumen de un cilindro de altura h y radio r.

El cilindro se genera cuando se gira en torno al eje x la región que yace entre la recta $y = r$ y el eje x, entre $x = 0$ y $x = h$ [fig. 30.2*b*)]. Por la fórmula del disco, el volumen del cilindro es

$$V = \pi\int_0^h y^2\,dx = \pi\int_0^h r^2\,dx = \pi r^2 x\Big]_0^h = \pi r^2 h$$

3. Determine el volumen de una esfera de radio r.

La esfera se genera al girar alrededor del eje x la región que se halla entre el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x, entre $x = -r$ y $x = r$ [fig. 30.2*c*)]. Por la simetría respecto al eje y se puede emplear la parte de la región comprendida entre $x = 0$ y $x = r$ y luego duplicar el resultado. Así, por la fórmula del disco, el volumen de la esfera es

$$V = 2\pi\int_0^r y^2\,dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left(r^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

4. Sea $\mathscr{R}$ la región comprendida entre el eje x, la curva $y = x^3$ y la recta $x = 2$ (fig. 30.10).

a) Halle el volumen del sólido obtenido al girar $\mathscr{R}$ en torno al eje x.
b) Determine el volumen del sólido obtenido al girar $\mathscr{R}$ alrededor del eje y.

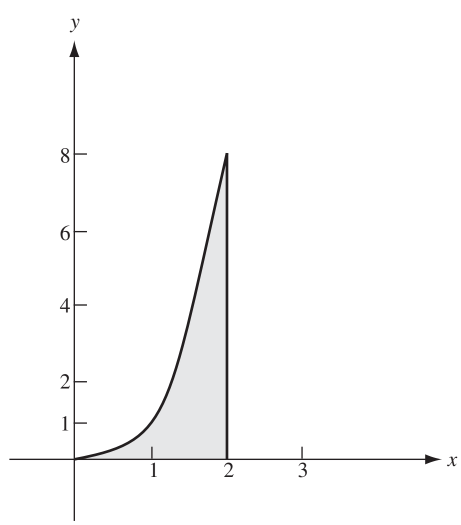


Fig. 30.10

a) Con la fórmula del disco se obtiene el volumen

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi\int_0^2 x^6\,dx = \frac{\pi}{7}x^7\Big]_0^2 = \frac{128\pi}{7}$$

b) (*Primera solución*) Con la fórmula de capas cilíndricas resulta el volumen

$$V = 2\pi\int_0^2 xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x(x^3)\,dx = 2\pi\int_0^2 x^4\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big]_0^2 = \frac{64\pi}{5}$$

(*Segunda solución*) Al integrar a lo largo del eje y y utilizar la fórmula de washer se obtiene el volumen

$$V = \pi\int_0^8\left[2^2 - \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right]dy = \pi\int_0^8\left[4 - y^{2/3}\right]dy = \pi\left(4y - \frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Big]_0^8 = \pi\left(32 - \left(\frac{3}{5}\right)32\right) = \frac{64\pi}{5}$$

5. Halle el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje y la región que está en el primer cuadrante dentro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ y entre $y = a$ y $y = r$ (donde $0 < a < r$) (fig. 30.11). (El sólido es una "tapa polar" de una esfera de radio r.)

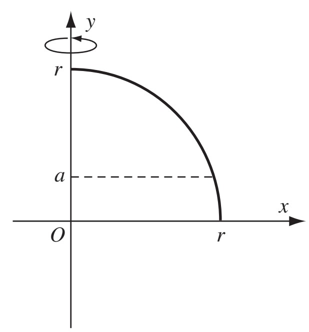


Fig. 30.11

Al integrar a lo largo del eje y, al usar la fórmula del disco se obtiene el volumen

$$V = \pi\int_a^r x^2\,dy = \pi\int_a^r (r^2 - y^2)dy = \pi\left(r^2y - \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big]_a^r = \pi\left(\tfrac{2}{3}r^3 - \left(r^2a - \tfrac{1}{3}a^3\right)\right) = \tfrac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2a + a^3)$$

6. Halle el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje y la región que se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por arriba, por la parábola $y = 2 - x^2$ y por debajo, por la parábola $y = x^2$ (fig. 30.12)

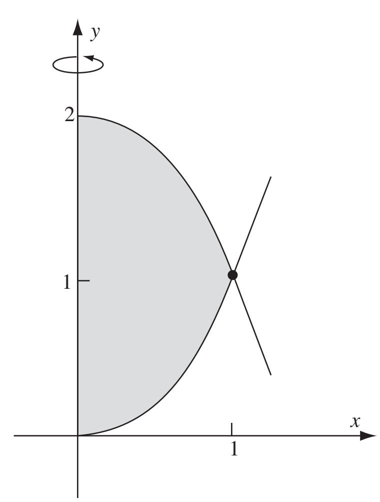


Fig. 30.12

Las curvas se intersecan en (1, 1). Por la diferencia de la fórmula de capas cilíndricas, el volumen es

$$V = 2\pi\int_0^1 x((2-x^2)-x^2)\,dx = 4\pi\int_0^1 (x-x^3)\,dx = 4\pi\left(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big]_0^1 = 4\pi\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)=\pi$$

7. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada por la parábola $y = 4x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 16$ (fig. 30.5). Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar $\mathcal{R}$ en torno a la recta $y = -2$.

La solución de este problema se reduce al caso de una revolución en torno al eje x. Se sube la región $\mathcal{R}$ verticalmente a una distancia de 2 unidades. Esto cambia $\mathcal{R}$ en una región $\mathcal{R}^*$ acotada por debajo por la parábola $y = 4x^2 + 2$, a la izquierda por el eje y, y por encima por la recta $y = 18$ (fig. 30.13). Entonces, el sólido de revolución original tiene el mismo volumen que el sólido de revolución obtenido al girar $\mathcal{R}^*$ alrededor del eje x. El último volumen se obtiene mediante la fórmula de washer:

$$V = \pi\int_0^2 (18^2-(4x^2+2)^2)\,dx = \pi\int_0^2 (256-16x^4-16x^2-4)\,dx$$

$$= \pi\left(252x-\tfrac{16}{5}x^5-\tfrac{16}{3}x^3\right)\Big]_0^2 = \pi\left(504-\tfrac{512}{5}-\tfrac{128}{3}\right)=\tfrac{5384\pi}{15}$$

8. Como en el problema 7, considérese la región $\mathcal{R}$ acotada por la parábola $y = 4x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 16$ (fig. 30.5). Halle el volumen del sólido obtenido al girar $\mathcal{R}$ en torno de la recta $x = -1$.

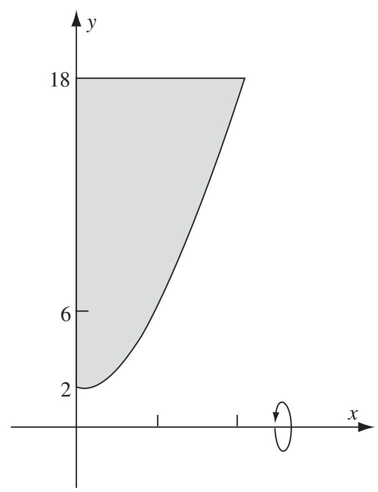


Fig. 30.13

Para resolver este problema, se reduce al caso de una revolución sobre el eje y. Se mueve la región $\mathcal{R}$ a la derecha una distancia equivalente a 1 unidad. Esto convierte a $\mathcal{R}$ en una región $\mathcal{R}$ acotada a la derecha por la parábola $y = 4(x-1)^2$, por encima por $y = 16$ y a la izquierda por $x = 1$ (fig. 30.14). El volumen deseado es el mismo que el obtenido cuando se gira $\mathcal{R}^*$ alrededor del eje y. El último volumen se obtuvo mediante la diferencia de la fórmula de capas cilíndricas:

$$V = 2\pi\int_1^3 x(16-4(x-1)^2)\,dx = 2\pi\int_1^3 x(16-4x^2+8x-4)\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^3 (16x-4x^3+8x^2-4x)\,dx = 2\pi\left(8x^2-x^4+\tfrac{8}{3}x^3-2x^2\right)\Big]_1^3$$

$$= 2\pi\left[(72-81+72-18)-\left(8-1+\tfrac{8}{3}-2\right)\right]=\tfrac{112}{3}$$

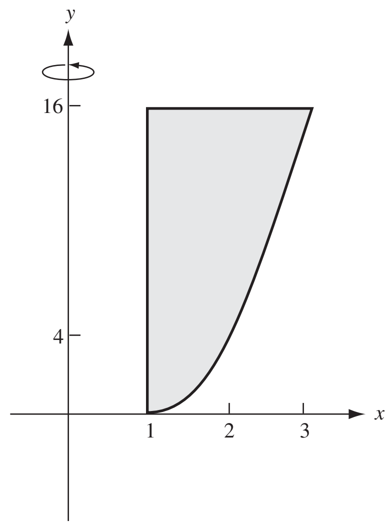


Fig. 30.14

9. Justifique la fórmula del disco $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (fig. 30.15). Considere el volumen V_i obtenido al girar la región $\mathcal{R}_i$ por encima del i-ésimo subintervalo en torno al eje x. Si m_i y M_i son el mínimo absoluto y el máximo absoluto de f en el i-ésimo intervalo, entonces V_i queda entre el volumen de un cilindro de radio m_i y altura Δx y el volumen de un cilindro de radio M_i y altura Δx. Luego, $\pi m_i^2\Delta x \le V_i \le \pi M_i^2\Delta x$ y, por tanto, $m_i^2 \le \frac{V_i}{\pi\Delta x} \le M_i^2$. (Se ha supuesto que el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$.) Por consiguiente, por el teorema del valor medio intermedio para la función continua $(f(x))^2$, existe un x_i^* en el i-ésimo subintervalo tal que $\frac{V_i}{\pi\Delta x} = \left(f(x_i^*)\right)^2$ y, por ello, $V_i = \pi\left(f(x_i^*)\right)^2\Delta x$. Entonces,

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i^*)\right)^2\Delta x$$

Haciendo $n \to +\infty$, se obtiene la fórmula del disco.

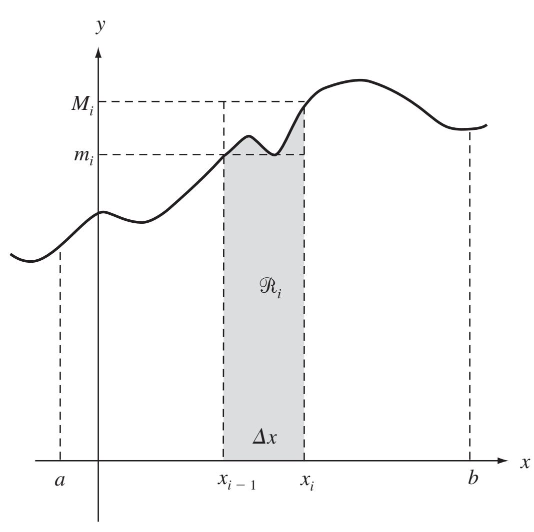


Fig. 30.15

10. Justifique la fórmula de capas cilíndricas: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$.

Se divide $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud Δx (fig. 30.16). Sea $\mathcal{R}_i$ la región por encima del *i-ésimo* subintervalo. Sea x_i^* el punto medio $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ del i-ésimo intervalo. El sólido obtenido al girar la región $\mathcal{R}_i$ en torno al eje y es aproximadamente el sólido obtenido al girar el rectángulo con base Δx y altura $y_i^* = f(x_i^*)$. Este último sólido es una capa cilíndrica, es decir, queda entre los cilindros obtenidos al girar los rectángulos con la misma altura $f(x_i^*)$ y con base $[0, x_{i-1}]$ y $[0, x_i]$. Por tanto, tiene volumen

$$\pi x_i^2 f(x_i^*) - \pi x_{i-1}^2 f(x_i^*) = \pi f(x_i^*)(x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

$$= \pi f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) = \pi f(x_i^*)(2x_i^*)(\Delta x) = 2\pi x_i^* f(x_i^*)(\Delta x)$$

Luego, el V total se aproxima por $2\pi\sum_{i=1}^{n} x_1^* f(x_1^*)\Delta x$, el cual tiende a $2\pi\int_a^b x\,f(x)dx$ cuando $n \to +\infty$.

11. Justifique la fórmula de la sección transversal: $V = \int_a^b A(x)\,dx$.

Se divide $[a, b]$ en n subintervalos iguales $[x_{i-1}, x_i]$, y se elige un punto x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$. Si n es grande, Δx es pequeño y la pieza de sólido entre x_{i-1} y x_i estará próxima a un disco (no circular) de grosor Δx y área de base $A(x_i^*)$ (fig. 30.17). Este disco tiene el volumen $A(x_i^*)\Delta x$. Entonces, V se aproxima mediante $\sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$, que tiende a $\int_a^b A(x)\,dx$ cuando $n \to +\infty$.

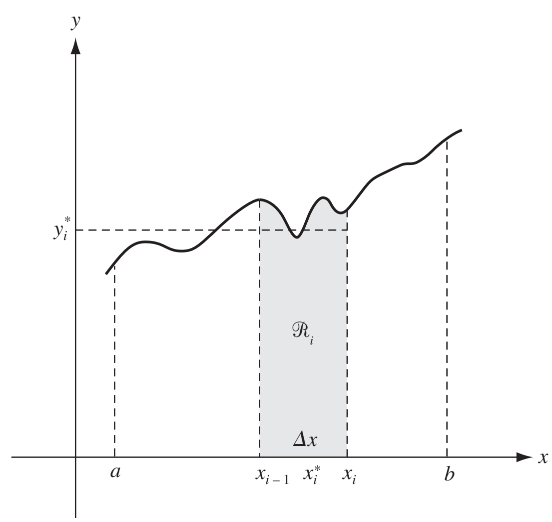


Fig. 30.16

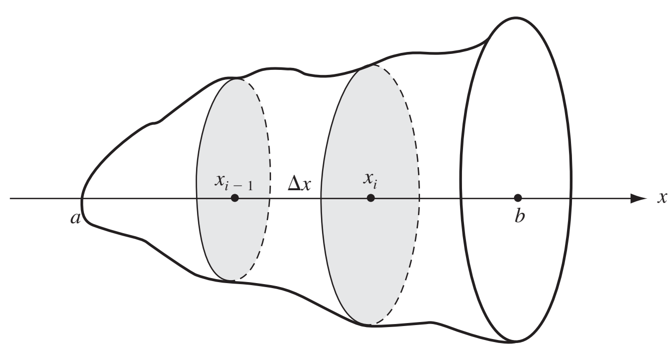


Fig. 30.17

12. Un sólido tiene una base circular con radio de 4 unidades. Halle el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular a un diámetro fijo en particular es un triángulo equilátero.

Se toma el círculo como en la figura 30.18, con el diámetro fijo sobre el eje x. La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 16$. La sección transversal ABC del sólido es un triángulo equilátero de lado $2y$ y área $A(x) = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(16 - x^2)$. Entonces, por la fórmula de la sección transversal,

$$V = \sqrt{3}\int_{-4}^{4}(16 - x^2)\,dx = \sqrt{3}\left(16x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big]_{-4}^{4} = \tfrac{256}{3}\sqrt{3}$$

13. Un sólido tiene una base una forma de un elipse con eje mayor 10 y eje menor 8. Determine su volumen si cada sección perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles con altura 6.

Se toma la elipse como en la figura 30.19, con la ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. La sección ABC es un triángulo isósceles con base $2y$, altura 6 y área $A(x) = 6y = 6\left(\dfrac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}\right)$. Por tanto,

$$V = \tfrac{24}{5}\int_{-5}^{5}\sqrt{25 - x^2}\,dx = 60\pi$$

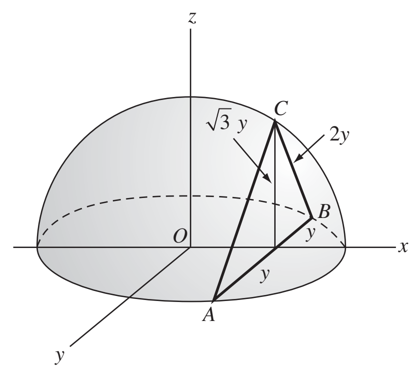


Fig. 30.18

(Nótese que $\int_{-5}^{5}\sqrt{25 - x^2}\,dx$ es el área de la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 25$ y, por tanto, es igual a $25\pi/2$.)

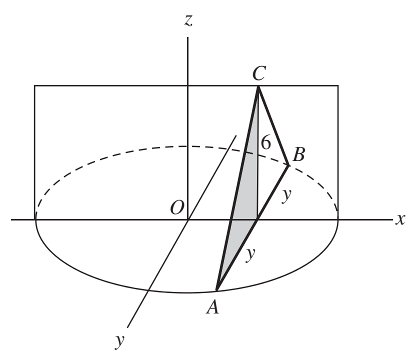


Fig. 30.19

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

14. Considere la región R acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ (fig. 30.4).

a) Determine el volumen del sólido generado al girar $\mathscr{R}$ en torno al eje y.

b) Halle el volumen del sólido generado al girar $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $x = 2$.

Respuestas: *a*) $\dfrac{128\pi}{5}$; *b*) $\dfrac{256\pi}{15}$

15. Establezca el volumen del sólido generado al girar la región ubicada entre el eje x y la parábola $y = 4x - x^2$ alrededor de la recta $y = 6$.

Respuesta: $\dfrac{1408\pi}{15}$

16. Encuentre el volumen del toro (rosquilla) generado cuando el círculo $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ gira en torno al eje y, con $0 < b < a$.

Respuesta: $2\pi^2ab^2$

17. Considere la región $\mathcal{R}$ acotada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y = 3$. Halle el volumen del sólido generado cuando $\mathcal{R}$ gira en torno a:

a) El eje x.

b) La recta $x = 3$.

Respuestas: *a*) $\dfrac{1792\pi}{15}$; *b*) $\dfrac{256\pi}{3}$

En los problemas 18 a 26, determine el volumen generado cuando la región indicada gira en torno a la recta dada. Aplique la fórmula del disco.

18. La región acotada por $y = 2x^2$, $y = 0$ y $x = 5$, en torno al eje x.

Respuesta: 2500π

19. La región acotada por $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$ y $x = 8$, alrededor del eje x.

Respuesta: $\dfrac{256\pi}{3}$

20. La región acotada por $y = 4x^2$, $x = 0$ y $y = 16$, en torno a $y = 16$ (fig. 30.5).

Respuesta: $\dfrac{4096\pi}{15}$

21. La región acotada por $y^2 = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$, alrededor del eje x.

Respuesta: 4π

22. La región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$, en torno a $x = 2$.

Respuesta: $\dfrac{16\pi}{5}$

23. La región dentro de la curva $y^2 = x^4(1 - x^2)$, en torno al eje x.

Respuesta: $\dfrac{4\pi}{35}$

24. La región dentro de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, alrededor del eje x.

Respuesta: 16π

25. La región dentro de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, alrededor del eje y.

Respuesta: 24π

26. La región dentro la parábola $x = 9 - y^2$ y entre $y = x - 7$ y el eje y, en torno al eje y.

Respuesta: $\frac{963\pi}{5}$

En los problemas 27 a 32, halle el volumen del sólido generado por el giro de la región indicada en torno a la recta dada. Aplique la fórmula de washer.

27. La región acotada por $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$, en torno del eje y.

Respuesta: 625π

28. La región acotada por $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$ y $x = 8$, alrededor del eje y.

Respuesta: $128\sqrt{3}\pi$

29. La región acotada por $y = x^3$, $x = 0$ y $y = 8$, alrededor de $x = 2$.

Respuesta: $\frac{144\pi}{5}$

30. La región acotada por $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$, en torno al eje x.

Respuesta: $\frac{32\pi}{3}$

31. La región acotada por $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$, en torno a $y = 6$.

Respuesta: $\frac{64\pi}{3}$

32. La región acotada por $x = 9 - y^2$ y $y = x - 7$, alrededor de $x = 4$.

Respuesta: $\frac{153\pi}{5}$

En los problemas 33 a 37, determine el volumen del sólido generado por el giro de la región indicada alrededor de la recta dada. Use la fórmula de capas cilíndricas.

33. La región acotada por $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$, en torno a $x = 6$.

Respuesta: 375π

34. La región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 2$, alrededor de $y = 8$.

Respuesta: $\frac{320\pi}{7}$

35. La región acotada por $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, en torno a $x = 5$.

Respuesta: $\frac{64\pi}{3}$

36. La región acotada por $y = x^2 - 5x + 6y$ y $y = 0$, alrededor del eje y.

Respuesta: $\frac{5\pi}{6}$

37. La región acotada por $x = 9 - y^2$, $y = x - 7$ y $x = 0$, alrededor de $y = 3$.

Respuesta: $\frac{369\pi}{2}$

En los problemas 38 a 42, halle el volumen generado por el giro de la región indicada alrededor de la recta dada. Use el método más apropiado.

38. La región acotada por $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, alrededor del eje y.

Respuesta: $\pi(1 - e^{-1})$

39. La región acotada por $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$, en torno a $x = 2$.

Respuesta: 27π

40. La región acotada por $y = 2x$, $y = 0$ y $x = 1$, alrededor del eje y.

Respuesta: $\frac{4\pi}{3}$

41. La región acotada por $y = x^2$ y $x = y^2$, en torno al eje x.

Respuesta: $\frac{3\pi}{10}$

42. La región acotada por $xy = 4$ y $y = (x - 3)^2$, alrededor del eje x.

Respuesta: $\frac{27\pi}{5}$

43. Halle el volumen del tronco de un cono cuya base inferior tiene radio R, la base superior de radio r y la altura es h.

Respuesta: $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$

44. Un sólido tiene una base circular con radio de 4 unidades. Halle su volumen si todo plano perpendicular a un diámetro fijo (el eje x en la figura 30.18) es *a*) un semicírculo; *b*) un cuadrado; *c*) un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa en el plano de la base.

Respuestas: *a*) $\frac{128\pi}{3}$; *b*) $\frac{1024}{3}$; *c*) $\frac{256}{3}$

45. Un sólido tiene una base en forma de elipse con eje mayor 10 y eje menor 8. Determine su volumen si toda sección perpendicular al eje mayor es un triángulo rectángulo isósceles con un cateto en el plano de la base.

Respuesta: $\frac{640}{3}$

46. La base de un sólido es la región que ubicada en el primer cuadrante y está acotada por la recta $4x + 5y = 20$ y los ejes coordenados. Halle su volumen si toda sección plana perpendicular al eje x es un semicírculo.

Respuesta: $\frac{10\pi}{3}$

47. La base de un sólido es un círculo $x^2 + y^2 = 16x$, y toda sección plana perpendicular al eje x es un rectángulo cuya altura es el doble de la distancia del plano de la sección al origen. Determine su volumen.

Respuesta: 1024π

48. La sección de cierto sólido cortado por un plano perpendicular al eje x es un círculo con los extremos de un diámetro que yace en las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$. Halle su volumen.

Respuesta: $\dfrac{6561\pi}{280}$

49. La sección de cierto sólido cortado por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado con extremos de una diagonal en las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$. Establezca su volumen.

Respuesta: $\dfrac{144}{35}$

50. Se perfora un hoyo con radio de 1 unidad en una esfera cuyo radio equivale a 3 unidades; el eje del hoyo es el diámetro de la esfera. Halle el volumen de la parte restante de la esfera.

Respuesta: $\dfrac{64\pi\sqrt{2}}{3}$

31

Técnicas de integración I: integración por partes

Si u y v son funciones, al aplicar la regla del producto se obtiene

$$D_x(uv) = uv' + vu'$$

que puede reescribirse en términos de antiderivadas de la manera siguiente:

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx$$

Ahora, $\int uv'\,dx$ puede escribirse como $\int u\,dv$ y $\int vu'\,dx$ puede representarse como $\int v\,du$.† Entonces, $uv = \int u\,dv + \int v\,du$ y, por tanto,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{(Integración por partes)}$$

El propósito de la integración por partes es remplazar una integración "difícil" $\int u\,dv$ por una integración "fácil" $\int v\,du$.

EJEMPLO 31.1. Halle $\int x \ln x\,dx$.

Para utilizar la fórmula de la integración por partes hay que dividir el integrando $x \ln x\,dx$ en dos "partes" u y dv, de modo que se pueda hallar fácilmente v por integración y también resulte fácil hallar $\int v\,du$. En este ejemplo, sea $u = \ln x$ y $dv = x\,dx$. Entonces, se tiene que $v = \frac{1}{2}x^2$ y se observa que $du = \frac{1}{x}dx$. Luego, al aplicar la fórmula de la integración por partes resulta:

$$\begin{aligned}
\int x \ln x\,dx &= \int u\,dv = uv - \int v\,du = (\ln x)(\tfrac{1}{2}x^2) - \int \tfrac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}dx\right) \\
&= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C \\
&= \tfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C
\end{aligned}$$

La integración por partes puede ser más fácil de aplicar si se forma un rectángulo como el siguiente para el ejemplo 1:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx & v = \tfrac{1}{2}x^2 \end{array}}$$

† $\int uv'\,dx = \int u\,dv$, donde, después de la integración de la derecha, la variable v se remplaza por la función correspondiente de x. De hecho, por la regla de la cadena $D_x(\int u\,dv) = D_v(\int u\,dv) \cdot D_x v = u \cdot v'$. Por ende, $\int u\,dv = \int uv'\,dx$. De igual forma, $\int v\,du = \int vu'\,dx$.

En la primera fila se colocan u y dv; en la segunda, los resultados de calcular du y v. El resultado deseado de la fórmula de integración por partes $uv - \int v\,du$ puede obtenerse si se multiplica primero la esquina superior izquierda u por la esquina inferior derecha v, y luego se resta la integral del producto $v\,du$ de las dos entradas v y du en la segunda fila.

EJEMPLO 31.2. Halle $\int xe^x\,dx$.

Sea $u = x$ y $dv = e^x$. Ahora se esquematiza en un rectángulo como éste

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}}$$

Luego,
$$\int xe^x dx = uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$
$$= e^x(x-1) + C$$

EJEMPLO 31.3. Halle $\int e^x \cos x\,dx$.

Sea $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Con ello se elabora el rectángulo

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}}$$

Entonces,
$$\int e^x \cos x\,dx = uv - \int v\,du = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx \tag{1}$$

Ahora se tiene el problema de hallar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que parece ser tan difícil como la integral original $\int e^x \cos x\,dx$. Sin embargo, se intenta hallar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ mediante otra integración por partes. Esta vez, sea $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^x & dv = \operatorname{sen} x\,dx \\ du = e^x\,dx & v = -\cos x \end{array}}$$

Así,
$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x\,dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

Al sustituir lo anterior en la fórmula (1) resulta:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right)$$
$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

Sumado $\int e^x \cos x\,dx$ en ambos lados se obtiene $2\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$. Entonces,

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x)$$

Se debe sumar una constante arbitraria:

$$\int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) + C$$

Observe que para resolver este ejemplo se necesitó de la aplicación iterada de la integración por partes.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Sea $u = x^2$ y $dv = xe^{x^2}dx$. Observe que v puede evaluarse mediante la sustitución $w = x^2$. (Se obtiene $v = \frac{1}{2}\int e^w dw = \frac{1}{2}e^w = \frac{1}{2}e^{x^2}$.)

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = xe^{x^2}dx \\ du = 2x\,dx & v = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{array}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2}dx &= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \int xe^{x^2}dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \\ &= \tfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + C\end{aligned}$$

2. Determine $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

Sea $u = \ln(x^2+2)$ y $dv = dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln(x^2+2) & dv = dx \\ du = \dfrac{2x}{x^2+2}dx & v = x \end{array}}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2+2)\,dx &= x\ln(x^2+2) - 2\int \frac{x^2}{x^2+2}dx \\ &= x\ln(x^2+2) - 2\int\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)dx \\ &= x\ln(x^2+2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= x(\ln(x^2+2)-2) + 2\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\end{aligned}$$

3. Resuelva $\int \ln x\,dx$.

Sea $u = \ln x$ y $dv = dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx & v = x \end{array}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

4. Resuelva $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Se tienen tres opciones: *a*) $u = x \operatorname{sen} x$, $dv = dx$; *b*) $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\,dx$; *c*) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$.

a) Sea $u = x\operatorname{sen} x$, $dv = dx$. Entonces, $du = (\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx$, $v = x$, y

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = x\cdot x\operatorname{sen} x - \int x(\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx$$

Puesto que la integral resultante no es tan simple como la original, esta opción se descarta.

b) Sea $u = \text{sen } x$, $dv = x\,dx$. Entonces, $du = \cos x\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$ y

$$\int x \text{ sen } x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \text{ sen } x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\,dx$$

Como la integral resultante no es tan simple como la original, esta opción también se descarta.

c) Sea $u = x$, $dv = \text{sen } x\,dx$. Entonces $du = dx$, $v = -\cos x$ y

$$\int x \text{ sen } x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \text{sen } x + C$$

5. Halle $\int x^2 \ln x\,dx$.

Sea $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$. Entonces, $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^3}{3}$ y

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

6. Resuelva $\int \text{sen}^{-1} x\,dx$.

Sea $u = \text{sen}^{-1} x$, $dv = dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \text{sen}^{-1} x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v = x \end{array}}$$

Por tanto

$$\int \text{sen}^{-1} x\,dx = x \text{ sen}^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x \text{ sen}^{-1} x + \tfrac{1}{2}\int 1 - x^2)^{-1/2}(-2x)dx$$

$$= x \text{ sen}^{-1} x + \tfrac{1}{2}(2(1-x^2)^{1/2}) + C \qquad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= x \text{ sen}^{-1} x + (1-x^2)^{1/2} + C = x \text{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

7. Resuelva $\int \tan^{-1} x\,dx$.

Sea $u = \tan^{-1} x$, $dv = dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \tan^{-1} x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx & v = x \end{array}}$$

Por ende,

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\ \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \qquad \text{(por la fórmula abreviada II)}$$

8. Halle $\int \sec^3 x\,dx$.

Sea $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sec x & dv = \sec^2 x\,dx \\ du = \sec x \tan x\,dx & v = \tan x \end{array}}$$

Así, $$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \tan x|$$

Por consiguiente, $$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

Así, $$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

9. Halle $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

Sea $u = x^2$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Así, $du = 2x\,dx$ y $v = -\cos x$. Entonces,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x\,dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

Ahora se aplica la integración por partes a $\int x \cos x\,dx$, con $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$, con lo que se obtiene

$$\int x \cos x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Por tanto, $$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

10. Halle $\int x^3 e^{2x} dx$.

Sea $u = x^3$, $dv = e^{2x}\,dx$. Entonces, $du = 3x^2\,dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$ y

$$\int x^3 e^{2x} dx = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{2}\int x^2 e^{2x} dx$$

Para la integral resultante, sea $u = x^2$ y $dv = e^{2x}\,dx$. Entonces, $du = 2x\,dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$ y

$$\int x^3 e^{2x} dx = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx\right) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2 e^{2x} + \tfrac{3}{2}\int x e^{2x} dx$$

Para la integral resultante, sea $u = x$ y $dv = e^{2x}\,dx$. Entonces, $du = dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$ y

$$\int x^3 e^{2x} dx = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2 e^{2x} + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}x e^{2x} - \tfrac{1}{2}\int e^{2x} dx\right) = \tfrac{1}{2}x^3 e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2 e^{2x} + \tfrac{3}{4}x e^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

11. Derive la siguiente *fórmula reducción* para $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$.

$$\int \operatorname{sen}^m x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,dx$$

Sea $u = \operatorname{sen}^{m-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}^{m-1} x & dv = \operatorname{sen} x\,dx \\ du = (m-1)\operatorname{sen}^{m-2} x\,dx & v = -\cos x \end{array}}$$

Así,
$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x\,dx &= -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^2 x\,dx\\ &= -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx\\ &= -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,dx - (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,dx\end{aligned}$$

Por tanto,
$$m\int \operatorname{sen}^m x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x + (m-1)\int \operatorname{sen}^{m-2} x\,dx$$
y al dividir entre m se obtiene la fórmula requerida.

12. Aplique la fórmula de la reducción del problema 11 para hallar $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

Cuando $m = 2$ se tiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen}^0 x\,dx\\ &= -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \tfrac{1}{2}\int 1\,dx\\ &= -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C\end{aligned}$$

13. Aplique la fórmula de la reducción del problema 11 para hallar $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.
Cuando $m = 3$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\,dx &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{3} + \tfrac{2}{3}\int \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{3} - \tfrac{2}{3}\cos x + C\\ &= -\frac{\cos x}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 x) + C\end{aligned}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 14 a 21, use la integración por partes para comprobar las fórmulas indicadas.

14. $\int x\cos x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

15. $\int x\sec^2 3x\,dx = \tfrac{1}{3}x\tan 3x - \tfrac{1}{9}\ln|\sec x| + C$

16. $\int \cos^{-1} 2x\,dx = x\cos^{-1} 2x - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

17. $\int x\tan^{-1} x\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}x + C$

18. $\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\tfrac{1}{3}e^{-3x}(x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9}) + C$

19. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$

20. $\int x\,\text{sen}^{-1}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

21. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$

22. Demuestre que $\int_0^{2\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx = -\frac{2\pi}{n}$ para algún entero n positivo.

23. Demuestre la fórmula de reducción siguiente:

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

24. Aplique el problema 23 para hallar $\int \sec^4 x\,dx$.

Respuesta: $\frac{1}{3}\tan x(\sec^2 x + 2) + C$

25. Pruebe la fórmula de reducción:

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\left(-\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right)$$

26. Aplique el problema 25 para hallar $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\,dx$.

Respuesta: $\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$

27. Demuestre $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)(\ln x - 1)] + C$ para $\neq -1$.

28. Pruebe la fórmula de reducción $\int x^n e^{ax}dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$.

29. Utilice el problema 28 y el ejemplo 31.2 de este capítulo para demostrar que $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

32

Técnicas de integración II: integrandos trigonométricos y sustituciones trigonométricas

Integrandos trigonométricos

1. Considérense las integrales de la forma, $\int \operatorname{sen}^k x \cos^n x\, dx$, con k y n enteros no negativos.

   Tipo 1. Al menos uno de entre sen x *y* cos x *se presenta en una potencia impar*. Entonces es factible la sustitución de una función por la otra.

EJEMPLO 32.1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$.

Sea $u = \cos x$. Entonces, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\int (1-u^2)u^2\, du = \int (u^4 - u^2)\, du \\
&= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 32.2. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\, dx$.

Sea $u = \operatorname{sen} x$. Entonces, $du = \cos x\, dx$ y

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^7 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x \cos x\, dx \\
&= \int u^4(1-u^2)^3\, du = \int u^4(1-3u^2+3u^4-u^6)\, du \\
&= \int (u^5 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10})\, du \\
&= \tfrac{1}{6}u^6 - \tfrac{3}{7}u^7 + \tfrac{1}{3}u^9 - \tfrac{1}{11}u^{11} + C \\
&= \tfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x - \tfrac{3}{7}\operatorname{sen}^7 x + \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^9 x - \tfrac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 32.3. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$.

Sea $u = \cos x$. Entonces, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\int (1-u^2)^2\,du = -\int (1-2u^2+u^4)\,du\\ &= -(u-\tfrac{2}{3}u^3+\tfrac{1}{5}u^5)+C\\ &= -\tfrac{1}{5}\cos^5 x+\tfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C\end{aligned}$$

Tipo 2. Ambas potencias de sen x *y* cos x *son pares*. Esto siempre supone un cálculo más tedioso mediante las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \text{ y } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

EJEMPLO 32.4.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int (\cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx\\ &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right) dx\\ &= \frac{1}{8}\int (1(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)+(\cos 2x)(1-2\cos 2x+\cos^2 2x))\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x+\cos 2x-2\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{8}\left(\int 1\,dx-\int \cos 2x\,dx-\int \cos^2 2x\,dx+\int \cos^3 2x\,dx\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx+\int (\cos 2x)(1-\operatorname{sen}^2 2x)\,dx\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)+\int \cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\int u^2\,du\right) \quad [\text{donde } u=\operatorname{sen} 2x]\\ &= \frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}\right)+C\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right)+C\\ &= \frac{x}{16}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{64}-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48}+C\end{aligned}$$

2. Considérense las integrales de la forma $\int \tan^k x \sec^n x\,dx$, con k y n enteros no negativos. Cabe recordar que $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

Tipo 1. n es par: se sustituye $u = \tan x$.

EJEMPLO 32.5. $\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx$.

Sea $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx &= \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx = \int u^2(1+u^2)\,du\\ &= \int (u^4+u^2)\,du = \tfrac{1}{5}u^5+\tfrac{1}{3}u^3+C = \tfrac{1}{5}\tan^5 x+\tfrac{1}{3}\tan^3 x+C\end{aligned}$$

Tipo 2. n *es impar y* k *es impar*: se sustituye $u = \sec x$.

EJEMPLO 32.6. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$.

Sea $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x\, dx$. Entonces,

$$\int \tan^3 x \sec x\, dx = \int \tan^2 x \sec x \tan x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \tan x\, dx$$

$$= \int (u^2 - 1)\, du = \tfrac{1}{3}u^3 - u + C = \tfrac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$$

Tipo 3. n *es impar y* k *es par*. Este caso generalmente requiere un cálculo tedioso.

EJEMPLO 32.7.

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx = \int (\sec^3 x - \sec x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) - \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \text{(por el problema 8 del capítulo 31)}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

3. Considérense integrales de la forma sen $\int Ax \cos Bx\, dx$, $\int \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx\, dx$, y $\int \cos Ax \cos Bx\, dx$. Se necesitarán las identidades

$$\operatorname{sen} Ax \cos Bx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(A + B)x + \operatorname{sen}(A - B)x)$$

$$\operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} Bx = \tfrac{1}{2}(\cos(A - B)x - \cos(A + B)x)$$

$$\cos Ax \cos Bx = \tfrac{1}{2}(\cos(A - B)x + \cos(A + B)x)$$

EJEMPLO 32.8.

$$\int \operatorname{sen} 7x \cos 3x\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(7 + 3)x + \operatorname{sen}(7 - 3)x)\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 4x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{10}\cos 10x - \tfrac{1}{4}\cos 4x) + C = -\tfrac{1}{40}(2\cos 10x + 5\cos 4x) + C$$

EJEMPLO 32.9.

$$\int \operatorname{sen} 7x \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\cos(7 - 3)x + \cos(7 + 3)x)\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4x - \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} 10x) + C = \tfrac{1}{40}(5\operatorname{sen} 4x - 2\operatorname{sen} 10x) + C$$

EJEMPLO 32.10.

$$\int \cos 7x \cos 3x\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\cos(7 - 3)x + \cos(7 + 3)x)\, dx = \int \tfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} 10x) + C = \tfrac{1}{40}(5\operatorname{sen} 4x + 2\operatorname{sen} 10x) + C$$

Sustituciones trigonométricas

Hay tres clases principales de sustituciones trigonométricas. En seguida se explica cada una mediante un ejemplo típico.

EJEMPLO 32.11. Resuelva $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$.

Sea $x = 2\tan\theta$, es decir, $\theta = \tan^{-1}(x/2)$. Así,

$$dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \text{ y } \sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + 4\tan^2\theta} = 2\sqrt{1 + \tan^2\theta} = 2\sqrt{\sec^2\theta} = 2|\sec\theta|$$

Por definición de la tangente inversa, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Así, $\cos\theta > 0$ y, por tanto, $\sec\theta > 0$. Luego, $\sec\theta = |\sec\theta| = \sqrt{4+x^2}/2$. Por ende,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\tan^2\theta(2\sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen}\theta)^{-2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}(-(\operatorname{sen}\theta)^{-1}) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

Ahora debe evaluarse sen θ.

Método analítico: $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta} = \dfrac{x/2}{\sqrt{4+x^2}/2} = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

Método geométrico: traza el triángulo rectángulo que aparece en la figura 32.1. Con base en él observe que $\operatorname{sen}\theta = x/\sqrt{4+x^2}$. (Nótese que también se cumple para $\theta < 0$.)

Por tanto, $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

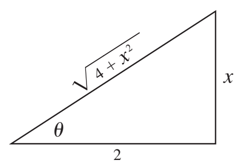


Fig. 32.1

Este ejemplo ilustra la regla general siguiente:

Estrategia I. Si $\sqrt{a^2+x^2}$ se presenta en un integrado, pruebe a usar la sustitución $x = a\tan\theta$.

EJEMPLO 32.12. Halle $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$.

Sea $x = 3$ sen θ, es decir, $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$. Entonces, $dx = 3\cos\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta} = 3\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3|\cos\theta|$$

Por definición de la inversa de seno, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y, por consiguiente, $\cos\theta > 0$. Así, $\cos\theta = |\cos\theta| = \sqrt{9-x^2}/3$. Ahora,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta\,(3\cos\theta)} = \frac{1}{9}\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{9}\cot\theta + C = -\frac{1}{9}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + C = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2/3}}{x/3} + C = -\frac{1}{99}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

Este ejemplo ilustra el método general siguiente:

Estrategia II. Si $\sqrt{a^2-x^2}$ se presenta en un integrado, pruebe usar la sustitución $x = a$ sen θ.

EJEMPLO 32.13. Resuelva $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

Sea $x = 2\sec\theta$, es decir, $\theta = \sec^{-1}(x/2)$. Entonces, $dx = 2\sec\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = 2\sqrt{\sec^2\theta - 1} = 2\sqrt{\tan^2\theta} = 2|\tan\theta|$$

Por definición de la inversa de secante, θ está en el primer o tercer cuadrante y, por consiguiente, $\tan\theta > 0$. Entonces, $\tan\theta = |\tan\theta| = \sqrt{x^2-4}/2$. Ahora,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{4\sec^2\theta(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}\,d\theta$$

$$= 4\int \sec^3\theta\, d\theta = 2(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C) \text{ (por el problema 8 del capítulo 31)}$$

$$= 2\left(\frac{x}{2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|\right) + C$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} + 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + K \quad \text{donde} \quad K = C - 2\ln 2$$

Este ejemplo ilustra el método general que sigue:

Estrategia III.	Si $\sqrt{x^2-a^2}$ se presenta en un integrado, trate de usar la sustitución $x = a\sec\theta$.

PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas 1 a 23, compruebe las soluciones dadas. Recuerde las identidades

$$\operatorname{sen}^2 u = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2u) \quad \cos^2 u\,\tfrac{1}{2}(1+\cos 2u) \quad \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$$

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x) + C = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen}x\cos x) + C$.

2. $\int \cos^2(3x)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}6x) + C$.

3. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx$

$$= \int \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= -\cos x + \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C \quad \text{(por la fórmula abreviada I).}$$

4. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\cos x\,dx$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C \quad \text{(por la fórmula abreviada I).}$$

5. $\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^5(3x)\,dx = \int (1-\cos^2(3x))\cos^5(3x)\operatorname{sen}(3x)\,dx$

$$= \int \cos^5(3x)\operatorname{sen}(3x)\,dx - \int \cos^7(3x)\operatorname{sen}3x\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \cos^5(3x)(-3\operatorname{sen}(3x))\,dx + \frac{1}{3}\int \cos^7(3x)(-3\operatorname{sen}(3x))\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{6}\cos^6(3x) + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{8}\cos^8(3x) + C \quad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= \tfrac{1}{72}(3\cos^8(3x) - 4\cos^6(3x)) + C$$

6. $\int \cos^3\left(\frac{x}{3}\right)dx = \int\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)\cos\frac{x}{3}\,dx$

$$= \int\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)\cos\frac{x}{3}\,dx = \int\cos\frac{x}{3}\,dx - \int\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)\cos\frac{x}{3}\,dx$$

$$= 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} - 3\int\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)dx$$

$$= 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} - 3\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right) + C \quad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= 3\operatorname{sen}\frac{x}{3} - \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

7. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int\cos^2(2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{8}\int(1+\cos 4x))\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \tfrac{1}{8}(x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)) + C$$

$$= \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \tfrac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$$

8. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int\operatorname{sen}^2(2x)\,dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos(4x))\,dx$

$$= \tfrac{1}{8}(x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)) + C = \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$$

9. $\int \operatorname{sen}^4(3x)\cos^2(3x)\,dx = \int(\operatorname{sen}^2(3x)\cos^2(3x))\operatorname{sen}^2(3x)\,dx$

$$= \frac{1}{8}\int\operatorname{sen}^2(6x)(1-\cos(6x))\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\operatorname{sen}^2(6x)\,dx - \frac{1}{8}\int\operatorname{sen}^2(6x)\cos(6x)\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int(1-\cos(12x))\,dx - \frac{1}{48}\int\operatorname{sen}^2(6x)(6\cos(6x))\,dx$$

$$= \tfrac{1}{16}(x - \tfrac{1}{12}\operatorname{sen}(12x)) - \tfrac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x) + C \quad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{192}\operatorname{sen}(12x)) - \tfrac{1}{144}\operatorname{sen}^3(6x) + C$$

10. $\int \operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x\,dx = \int \quad (\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x))\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}\int(\cos x - \cos 5x))\,dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5x) + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} 5x) + C$$

11. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx = \int \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(3x-5x) + \operatorname{sen}(3x+5x)) \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen}(-2x) + \operatorname{sen}(8x)) \, dx = \frac{1}{2}\int (-\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(8x)) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{8}\cos(8x)) + C = \tfrac{1}{4}\cos(2x) - \tfrac{1}{16}\cos(8x) + C$$

12. $\int \cos 4x \cos 2x \, dx = \dfrac{1}{2}\int (\cos(2x) + \cos(6x)) \, dx$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \tfrac{1}{6}\operatorname{sen}(6x)) + C = \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \tfrac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + C$$

13. $\int \sqrt{1-\cos x} \, dx = \sqrt{2}\int \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) dx \quad \left(\text{por } \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos x}{2}\right)$

$$= \sqrt{2}\left(-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

14. $\int (1+\cos 3x)^{3/2} \, dx = 2\sqrt{2}\int \cos^3\left(\dfrac{3x}{2}\right) dx \quad \text{puesto que } \cos^2\left(\dfrac{3x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(3x)}{2}$

$$= 2\sqrt{2}\int \left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\int \cos\left(\frac{3x}{2}\right) dx - \int \operatorname{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) dx\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{2}{3}\int \operatorname{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) dx\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{2}{3}\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\left(\frac{3x}{2}\right)\right] + C$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}\left[3\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}^3\left(\frac{3x}{2}\right)\right] + C$$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} \quad \left(\text{puesto que } \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right| + C$$

16. $\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x(\sec^2 x - 1) \, dx$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \int (\sec^2 x - 1) dx \quad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - (\tan x - x) + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

17. $\int \tan^5 x\, dx = \int \tan^3 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^3 dx$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx$ (por la fórmula abreviada I)

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x \sec^2 x\, dx + \int \tan x\, dx$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$ (por la fórmula abreviada I)

18. $\int \sec^4(2x)\, dx = \int \sec^2(2x)\sec^2(2x)\, dx$

$= \int \sec^2(2x)(1 + \tan^2(2x))\, dx$

$= \int \sec^2(2x)\, dx + \int \sec^2(2x)\tan^2(2x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\tan(2x) + \frac{1}{2}\int \tan^2(2x)(2\sec^2(2x))\, dx$

$= \frac{1}{2}\tan(2x) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\tan^3(2x) + C$ (por la fórmula abreviada I)

$= \frac{1}{2}\tan(2x) + \frac{1}{6}\tan^3(2x) + C$

19. $\int \tan^3(3x)\sec^4(3x)\, dx = \int \tan^3(3x)(1 + \tan^2(3x))\sec^2(3x)\, dx$

$= \int \tan^3(3x)\sec^2(3x)\, dx + \int \tan^5(3x)\sec^2(3x)\, dx$

$= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\tan^4(3x) + \frac{1}{3}\frac{1}{6}\tan^6(3x) + C$

$= \frac{1}{12}\tan^4(3x) + \frac{1}{18}\tan^6(3x) + C$

20. $\int \cot^3(2x)\, dx = \int \cot(2x)(\operatorname{cosec}^2(2x) - 1)\, dx$

$= -\frac{1}{4}\cot^2(2x) + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{cosec}^2(2x)| + C$

21. $\int \cot^4(3x)\, dx = \int \cot^3(3x)(\operatorname{cosec}^2(3x) - 1)\, dx$

$= \int \cot^2(3x)\operatorname{cosec}^2(3x)\, dx - \int \cot^2(3x)\, dx$

$= -\frac{1}{9}\cot^3(3x) - \int (\operatorname{cosec}^2(3x) - 1)\, dx$

$= -\frac{1}{9}\cot^3(3x) + \frac{1}{3}\cot(3x) + x + C$

22. $\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx = \operatorname{cosec}^2 x(1 + \cot^2 x)^2\, dx$

$= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + 2\int \cot^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \cot^4 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$

23. $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^5 x\, dx = \int \cot^2 x \operatorname{cosec}^4 \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$

$= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\operatorname{cosec}^4 x \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$

$= \int \operatorname{cosec}^6 x \operatorname{cosec} x \cot x\, dx - \int \operatorname{cosec}^4 x \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$

$= -\frac{1}{7}\operatorname{cosec}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + C$

24. Resuelva $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx$.

$\sqrt{9-4x^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$. Entonces, sea $x = \frac{3}{2}$ sen θ. Luego,

$$dx = \tfrac{3}{2}\cos\theta \, d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{9-4x^2} = \sqrt{9-9\,\text{sen}^2\theta} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

Por tanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx = \int \frac{3\cos\theta(\frac{3}{2}\cos\theta)\,d\theta}{\frac{3}{2}\,\text{sen}\,\theta} = 3\int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta} d\theta = 3\int \frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta} d\theta$$

$$= 3\int (\text{cosec}\,\theta - \text{sen}\,\theta)\; d\theta = 3\;\ln|\text{cosec}\,\theta - \cot\theta| \; + 3\;\theta\cos + \text{C}$$

Pero,

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{3}{2x} \quad \text{y} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{\sqrt{9-4x^2}/3}{2x/3} = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x}$$

Entonces,

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} dx = 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + K \qquad \text{donde} \qquad K = C - 3\ln 2$$

25. Resuelva $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-4x^2}}$.

Sea $x = \frac{3}{2}\tan\theta$ (fig. 32.2). Entonces, $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta$ y $\sqrt{9-4x^2} = 3\sec\theta$. Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta}{(\frac{3}{2}\tan\theta)(3\sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \text{cosec}\,\theta\, d\theta = \tfrac{1}{3}\ln|\text{cosec}\,\theta - \cot\theta| + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| + K$$

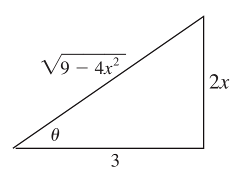


Fig. 32.2

26. Halle $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6} dx$.

Sea $x = \frac{4}{3}$ sen θ (fig. 32.3). Entonces, $dx = \frac{4}{3}\cos\theta\, d\theta$ y $\sqrt{16-9x^2} = 4\cos\theta$. Por tanto,

$$\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6} dx = \int \frac{(64\cos^3\theta)(\frac{4}{3}\cos\theta\, d\theta)}{\frac{4096}{729}\,\text{sen}^6\theta}$$

$$= \frac{243}{16}\int \cot^4\theta\,\text{cosec}^2\theta\, d\theta = -\frac{243}{80}\cot^5\theta + C$$

$$= -\frac{243}{80}\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{243x^5} + C = -\frac{1}{80}\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{x^5} + C$$

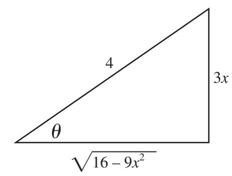


Fig. 32.3

27. Halle $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

Sea $x - 1 = \operatorname{sen} \theta$ (fig. 32.4). Entonces, $dx = \cos\, \theta\, d\theta$ y $\sqrt{2x-x^2} = \cos\theta$. Por tanto,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int (1+\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = \int (\tfrac{3}{2} + 2\operatorname{sen}\theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x-1) - \tfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C$$

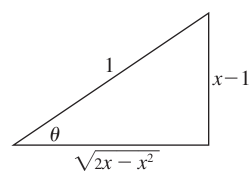


Fig. 32.4

28. Resuelva $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(4(x-3)^2-9)^{3/2}}$.

Sea $x - 3 = \tfrac{3}{2}\sec\theta$ (fig. 32.5). Entonces, $dx = \tfrac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ y $\sqrt{4x^2-24x+27} = 3\tan\theta$. Luego,

$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} = \int \frac{\tfrac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{27\tan^3\theta} = \frac{1}{18}\int \operatorname{cosec}\theta\, \cot\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{18}\operatorname{cosec}\theta + C = -\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}} + C \quad \text{(de la figura 32.5)}$$

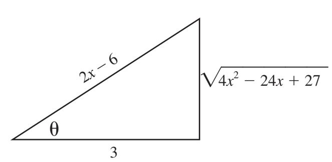


Fig. 32.5.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

29. $\int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$

30. $\int \operatorname{sen}^3 2x\, dx = \tfrac{1}{6}\cos^3 2x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + C$

31. $\int \operatorname{sen}^4 2x\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}4x + \frac{1}{64}\operatorname{sen}8x + C$

32. $\int \cos^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen}2x + C$

33. $\int \operatorname{sen}^7 x\,dx = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$

34. $\int \cos^6 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{3}{32}\operatorname{sen}2x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x + C$

35. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^5 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$

36. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

37. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx = \frac{1}{48}\cos^3 2x - \frac{1}{16}\cos 2x + C$

38. $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{128}(3x - \operatorname{sen}4x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}8x + C$

39. $\int \operatorname{sen}2x\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

40. $\int \cos 3x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{10}\operatorname{sen}5x + C$

41. $\int \operatorname{sen}5x\operatorname{sen}x\,dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen}4x - \frac{1}{12}\operatorname{sen}6x + C$

42. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1-\operatorname{sen}x} = \operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

43. $\int \frac{\cos^{2/3} x}{\operatorname{sen}^{8/3} x}dx = -\frac{3}{5}\cot^{5/3} x + C$

44. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$

45. $\int x(\cos^3 x^2 - \operatorname{sen}^3 x^2)\,dx = \frac{1}{12}(\operatorname{sen}x^2 + \cos x^2)(4 + \operatorname{sen}2x^2) + C$

46. $\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

47. $\int \tan^3 3x\sec 3x\,dx = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

48. $\int \tan^{3/2} x\sec^4 x\,dx = \frac{2}{5}\tan^{5/2} x + \frac{2}{9}\tan^{9/2} x + C$

49. $\int \tan^4 x\sec^4 x\,dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

50. $\int \cot^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\operatorname{sen} x| + C$

51. $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{6}\cot^6 x + C$

52. $\int \cot^3 x \operatorname{cosec}^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 + C$

53. $\int \operatorname{cosec}^4 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C$

54. $\int \left(\frac{\sec x}{\tan x}\right)^4 dx = -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C$

55. $\int \frac{\cot^3 x}{\operatorname{cosec} x}\, dx = -\operatorname{sen} x - \operatorname{cosec} x + C$

56. $\int \tan x\sqrt{\sec x}\, dx = 2\sqrt{\sec x} + C$

57. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$

58. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\, dx = 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C$

59. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

60. $\int \sqrt{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$

61. $\int \frac{x^2\, dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

62. $\int \sqrt{x^2-4}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

63. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} + C$

64. $\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{5/2}} = \frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}} + C$

65. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$

66. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

67. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + 8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right| + C$

68. $\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + C$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}) + C$

70. $\int \frac{dx}{(4x - x^2)^{3/2}} = \frac{x - 2}{4\sqrt{4x - x^2}} + C$

71. $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^2} = \frac{1}{54} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(9 + x^2)} + C$

En los problemas 72 y 73, aplique primero integración por partes.

72. $\int x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

73. $\int x \cos^{-1} x\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\cos^{-1} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

33

Técnicas de integración III: integración por fracciones parciales

En este capítulo se expondrá un método general para hallar las antiderivadas de la forma $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios. Una función de la forma $\frac{N(x)}{D(x)}$ se denomina *función racional.* [$N(x)$ es el numerador y $D(x)$ el denominador.] A guisa de ejemplo considere

$$\int \frac{x-1}{x^3+8} dx \qquad \text{y} \qquad \int \frac{x^3-x}{x+2} dx$$

Supónganse dos restricciones, pero ninguna de ellas limita la aplicabilidad de este método: *i*) el primer coeficiente (el coeficiente de la potencia más alta de x) en $D(x)$ es +1; *ii*) $N(x)$ es de grado menor que $D(x)$. Un coeficiente $N(x)/D(x)$ que satisfaga *ii*) se denomina función racional *propia*. Observe que las restricciones *i*) y *ii*) no son esenciales.

EJEMPLO 33.1. Considérese el caso donde $\frac{N(x)}{D(x)}$ es $\frac{2x^3}{5x^8+3x-4}$. Aquí, la primera restricción no se satisface. Sin embargo, se observa que

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}} dx$$

La integral del lado derecho satisface las restricciones *i*) y *ii*).

EJEMPLO 33.2. Considere el caso donde $\frac{N(x)}{D(x)}$ es $\frac{2x^5+7}{x^2+3}$. Aquí, la segunda restricción no satisface. Pero se puede dividir $N(x)$ entre $D(x)$:

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3 - 6x + \frac{18x+7}{x^2+3}$$

Por tanto,

$$\int \frac{2x^5+7}{x^2+3} dx = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \int \frac{18x+7}{x^2+3} dx$$

y el problema se reduce a evaluar $\int \frac{18x+7}{x^2+3} dx$, la cual satisface las restricciones.

Un polinomio es *irreductible* si no es el producto de dos polinomios de grado menor.

Todo polinomio lineal $f(x) = ax + b$ es irreductible automáticamente, ya que los polinomios de grados menores que $f(x)$ son constantes y $f(x)$ no es el producto de dos constantes.

Ahora considérese cualquier polinomio cuadrático $g(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces,

$$g(x) \text{ es irreducible si y sólo si } b^2 - 4ac < 0.$$

Para comprobar esto, sea $g(x)$ reducible. Entonces, $g(x) = (Ax + B)(Cx + D)$. Por consiguiente, $x = -B/A$ y $x = -D/C$ son raíces de $f(x)$. Con la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se deberían obtener tales raíces. Por tanto, $b^2 - 4ac$ no puede ser negativa. Considérese recíprocamente que $b^2 - 4ac \geq 0$. Así, con la fórmula cuadrática se obtienen dos raíces de $g(x)$. Pero si r es una raíz de $g(x)$, se tiene que $g(x)$ es divisible entre $x - r$.[‡] Por consiguiente, $g(x)$ es reducible.

EJEMPLO 33.3.

a) $x^2 + 4$ es irreductible, ya que $b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(4) = -16 < 0$.

b) $x^2 + x - 4$ es reducible, ya que $b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-4) = 17 \geq 0$.

Se considerará sin prueba alguna la siguiente propiedad equitativa de los polinomios con coeficientes reales.

Teorema 33.1. Todo polinomio $D(x)$ con 1 como coeficiente principal puede expresarse como producto de factores lineales de la forma $x - a$ y de factores cuadráticos irreductibles de la forma $x^2 + bx + c$. (Se permite la repetición de factores.)

EJEMPLO 33.4.

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$

b) $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ $\quad$ ($x^2 + 4$ es irreductible)

c) $x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$ $\quad$ ($x^2 + 3$ es irreductible)

d) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + 1)(x - 2)^2$

Método de fracciones parciales

Considere que se desea evaluar $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$, donde $\frac{N(x)}{D(x)}$ es una función racional propia y $D(x)$ tiene 1 como coeficiente principal. Primero se escribe $D(x)$ con producto de factores lineales y cuadráticos irreductibles.

El método dependerá de esta factorización. Se considerarán varios casos; en cada uno de ellos se explicará primero el método por medio de un ejemplo y luego se planteará el procedimiento general.

Caso I

$D(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

EJEMPLO 33.5. Resuelva $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

En este caso, $D(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Se escribe

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Supóngase que A y B son ciertas constantes, que se deben evaluar ahora. Se eliminan los denominadores multiplicando ambos lados por $(x - 2)(x + 2)$:

$$1 = A(x + 2) + B(x - 2) \tag{1}$$

Primero se sustituye x por -2 en (1): $1 = A(0) + B(-4) = -4B$. Entonces, $B = -\frac{1}{4}$.

Luego, se sustituye x por 2 en (1): $1 = A(4) + B(0) = 4A$. En estas condiciones $A = \frac{1}{4}$. Por tanto,

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}$$

‡ En general, si un polinomio $h(x)$ tiene r como raíz, entonces $h(x)$ debe ser divisible entre $x - r$.

Así,
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx = \tfrac{1}{4}\ln|x-2| - \tfrac{1}{4}\ln|x+2| + C$$
$$= \tfrac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

EJEMPLO 33.6. Resuelva $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$.

Al factorizar el denominador se obtiene $x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3)$. El integrando es $\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}$. Se representa de la forma siguiente:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Se eliminan los denominadores multiplicando por $x(x - 2)(x + 3)$:

$$x + 1 = A(x-2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \tag{2}$$

Sea $x = 0$ en (2): $1 = A(-2)(3) + B(0)(3) + C(0)(-2) = -6A$. Luego, $A = -\frac{1}{6}$.

Sea $x = 2$ en (2): $3 = A(0)(5) + B(2)(5) + C(2)(0) = 10B$. Por ende, $B = \frac{3}{10}$.

Sea $x = -3$ en (2): $-2 = A(-5)(0) + B(-3)(0) + C(-3)(-5) = 15C$. Entonces, $C = -\frac{2}{15}$.

Así,
$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x} = \int\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{x} + \frac{3}{10}\frac{1}{x+2} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$= -\tfrac{1}{6}\ln|x| + \tfrac{3}{10}\ln|x+2| - \tfrac{2}{15}\ln|x+3| + C$$

Regla general para el caso I

Se representa el integrando como una suma de términos de la forma $\frac{A}{x-a}$ por cada factor lineal $x - a$ del denominador, donde A es una constante desconocida. Se despejan las constantes. Al integrar se obtiene una suma de términos de la forma $A \ln |x - a|$.

Observación: supóngase sin prueba alguna que el integrando siempre tiene una representación de la clase requerida. Todo problema en particular puede comprobarse al final del cálculo.

Caso II

$D(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se presentan más de una vez.

EJEMPLO 33.7. Halle $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$.

Primero se factoriza el denominador‡

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$$

Luego, se representa el integrando $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ como una suma, de esta forma:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

‡ Al tratar de hallar los factores lineales de un denominador que es un polinomio con coeficientes integrales, se prueba cada uno de los divisores r del término constante para ver si es una raíz del polinomio. Si lo es, entonces $x - r$ es un factor del polinomio. En el ejemplo dado, el término constante es 1. Sus dos divisores, 1 y –1, resultan ser raíces.

Se observa que para el factor $(x-1)$ esto ocurre dos veces, y que hay términos tanto con $(x-1)$ como con $(x-1)^2$ en el denominador. Ahora se eliminan los denominadores multiplicando ambos miembros por $(x+1)(x-1)^2$:

$$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x+1) + C(x+1) \qquad (1)$$

Sea $x = 1$. Entonces, $8 = (0)A + (2)(0)B + (2)C = 2C$. Luego, $C = 4$.
Sea $x = -1$. Entonces, $2 = (4)A + (0)(-2)B + (0)C = 4A$. Por tanto, $A = \frac{1}{2}$.

Para hallar B se comparan los coeficientes de x^2 a ambos lados de (1). A la izquierda es 0 y a la derecha es $A + B$. Por tanto, $A + B = 0$. Como $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Entonces,

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + 4\frac{1}{(x-2)^2}$$

Por tanto,

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1} = \tfrac{1}{2}\ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\ln|x-1| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Por la fórmula abreviada I,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2}\,dx = -(x-1)^{-1} = -\frac{1}{x-1}$$

Entonces,

$$\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1} = \tfrac{1}{2}\ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - 4\frac{1}{x-1} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\frac{|x+1|}{|x-1|} - \frac{4}{x-1} + C$$

EJEMPLO 33.8. Resuelva $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3(x-2)^2}$.

Se representa el integrando $\frac{(x+1)}{x^3(x-2)^2}$ de la forma siguiente:

$$\frac{(x+1)}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

Los denominadores se eliminan multiplicando por $x^3(x-2)^2$:

$$x+1 = Ax^2(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + C(x-2)^2 + Dx^3(x-2) + Ex^3$$

Sea $x = 0$. Entonces, $1 = 4C$. Así, $C = \frac{1}{4}$.
Sea $x = 2$. Por tanto, $3 = 8E$. Luego, $E = \frac{3}{8}$.
Se comparan los coeficientes de x. Entonces, $1 = 4B - 4C$. Como $C = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$.
Se comparan los coeficientes de x^2. Entonces, $0 = 4A - 4B + 4C$. Como $B = \frac{1}{2}$ y $C = \frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{4}$.
Se comparan los coeficientes de x^4. Entonces, $0 = A + D$. Como $A = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$.

Así,

$$\frac{(x+1)}{x^3(x-2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(x-2)^2}$$

e

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3(x-2)^2} = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \tfrac{3}{8}\frac{1}{x-2} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{4x+1}{8x^2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x-2} + C$$

Regla general para el caso II

Para cada factor lineal repetido $(x - r)$ que se presenta k veces en el denominador, se utiliza $\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ como parte de la representación del integrando. Cada factor lineal que ocurre sólo una vez se maneja como en el caso I.

Caso III

$D(x)$ es un producto de uno o más factores cuadráticos irreductibles distintos y posiblemente también algunos factores lineales (que pueden presentarse más de una vez).

Regla general para el caso III

Los factores lineales se manejan como en los casos I y II. Por cada factor cuadrático irreductible $x^2 + bx + c$ se coloca un término $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ en la representación del integrando.

EJEMPLO 33.9. Resuelva $\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$.

El integrando se representa de esta forma:

$$\frac{(x-1)}{x(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$$

Se eliminan los denominadores multiplicando por $x(x^2 + 1)(x^2 + 2)$

$$x - 1 = A(x^2+ 1)(x^2 + 2) + (Bx + C)x(x^2 + 2) + (Dx + E)x(x^2 + 1)$$

Se multiplica a la derecha:

$$x - 1 = (A + B + D)x^4 + (B + \mathrm{E})x^3 + (3A + C + D)x^2 + (2C + E)x + 2A$$

Al comparar los coeficientes se obtiene:

$$2A = -1, \qquad 2C + E = 1, \qquad 3A + C + D = 0, \qquad B + E = 0, \qquad A + B + D = 0$$

Por tanto, $A = -\frac{1}{2}$ y, en consecuencia, $C + D = \frac{3}{2}$, $B + D = \frac{1}{2}$. De las dos últimas ecuaciones, $C - B = 1$. De $2C + E = 1$ y $B + E = 0$, se obtiene $2C - B = 1$. Ahora, de $C - B = 1$ y de $2C - B = 1$ se llega a $C = 0$. Por tanto, de $C - B = 1$, $B = -1$. Entonces, de $B + D = \frac{1}{2}$ se obtiene $D = \frac{3}{2}$. Finalmente, de $B + E = 0$, $E = 1$.

Así,

$$\frac{(x-1)}{x(x^2+1)(x^2+2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{3x+2}{x^2+2}$$

Por tanto,

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+1)(x^2+2)} = -\tfrac{1}{2}\ln|x| - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{x^2+2}\,dx$$

Ahora,

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) \qquad \text{(por la fórmula abreviada II)}$$

Además,

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3}{2}\ln(x^2+2) + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x(x^2+1)(x^2+2)} = -\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Caso IV

$D(x)$ es un producto de cero o más factores lineales y uno o más factores cuadráticos irreductibles.

Regla general para el caso IV

Los factores lineales se manejan como en los casos I y II. Por cada factor cuadrático irreductible $x^2 + bx + c$ que se presente a la k-ésima potencia, se inserta como parte de la representación del integrando:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

EJEMPLO 33.10. Halle $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Sea $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$. Entonces,

$$2x^2 + 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x +(B + D)$$

Se comparan los coeficientes: $A = 0$, $B = 2$, $A + C = 0$, $B + D = 3$. Por tanto, $C = 0$, $D = 1$. Así,

$$\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{2}{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=2\tan^{-1}x+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

En la segunda integral, sea $x = \tan\theta$. Entonces,

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^4\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{2}(\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Así,

$$\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx=\tfrac{5}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resuelva $\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

El integrando es una fracción impropia. Por división,

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=x-\frac{x+1}{x^3-x^2}=x-\frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Se escribe $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ y se obtiene

$$x + 1 = Ax(x - 1) + B(x - 1) + Cx^2$$

Para $x = 0$, $1 = -B$ y $B = -1$. Para $x = 1$, $2 = C$. Para $x = 2$, $3 = 2A + B + 4C$ y $A = -2$. Entonces,

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\,dx = \int x\,dx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

2. Halle $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

Sea $\frac{x}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$. Se eliminan los denominadores:

$$x = A(x + 3) + B(x + 2)$$

Sea $x = -2$. Entonces, $-2 = A$. Sea $x = -3$. Entonces $-3 = -B$. Luego, $B = 3$.

$$\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)} = -2 \quad \frac{1}{x+2}\,dx + 3 \quad \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= -2\ln|x+2| + 3\ln|x+3| + C = -\ln((x+2)^2) + \ln(|x+3|)^3 + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}\right| + C$$

3. Resuelva $\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx$.

Sea $\frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$. Se eliminan los denominadores:

$$x^2 + 2 = A(x + 2)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 2)$$

Sea $x = 0$; entonces $2 = -2A$. Luego, $A = -1$. Sea $x = -2$; entonces $6 = 6B$. Luego, $B = 1$. Sea $x = 1$; entonces, $3 = 3C$. Luego, $C = 1$. Por tanto,

$$\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x+2| + \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{(x+2)(x-1)}{x}\right| + C$$

4. Resuelva $\frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3}\,dx$.

Sea $\frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$. Se eliminan los denominadores:

$$x^3 + 1 = A(x - 1)^3 + B(x + 2)(x - 1)^2 + C(x + 2)(x - 1) + D(x + 2)$$

Sea $x = -2$; entonces, $-7 = -27A$. Luego $A = \frac{7}{27}$ Sea $x = 1$; entonces $2 = 3D$. Luego, $D = \frac{2}{3}$. Ahora se comparan los coeficientes de x^3. Así, $1 = A + B$, ya que $A = \frac{7}{27}$. y $B = \frac{20}{27}$. Se comparan los coeficientes de x^2. Entonces $0 = -3A + C$, ya que $A = \frac{7}{27}$, y $C = \frac{7}{9}$.

Entonces, $\int \frac{x^3+1}{(x+2)(x-1)^3}\,dx = \frac{7}{27}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{20}{27}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{9}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

$$= \frac{7}{27}\ln|x+2| + \frac{20}{27}\ln|x-1| - \frac{7}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + C$$

5. Halle $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

$x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$. Se escribe $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$ y se obtiene

$$x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)$$
$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(2B+D)$$

Por consiguiente, $A+C=1$, $B+D=1$, $2A+C=1$ y $2B+D=2$. Al despejar simultáneamente se obtiene $A=0$, $B=1$, $C=1$ y $D=0$. Entonces,

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx=\int \frac{1}{x^2+1}\,dx+\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$$
$$=\tan^{-1}x+\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$$

6. Halle $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx$.

Se escribe $\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$. Entonces,

$$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^2+2)^2\,(Cx+D)(x^2+2)+Ex+F$$
$$=Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x$$
$$+(4B+2D+F)$$

de donde $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=0$, $E=4$, $F=0$. Así, la integral dada es igual a

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2+2}+4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3}=\int \frac{x\,dx}{x^2+2}-\int \frac{dx}{x^2+2}+4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3}$$

Por la fórmula abreviada II,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)$$

y por la fórmula abreviada I,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3}=\frac{1}{2}\int (x^2+2)^{-3}(2x)\,dx=\frac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})(x^2+2)^{-2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+2)^2}$$

Entonces,

$$\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{(x^2+2)^2}+C$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 7 a 25 evalúe las integrales dadas.

7. $\int \frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4}=\frac{1}{5}\ln\left|(x+1)(x-4)^4\right|+C$

9. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx=\ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right|+C$

10. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

11. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + \ln\left|(x+2)(x-4)^4\right| + C$

12. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

13. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

15. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+3} + \tan^{-1}x + C$

16. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right| + C$

17. $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$

18. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{x^2+4} + C$

19. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C$

20. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+3)(x^3+1)}\,dx = \ln\left|\frac{x^3-x^2-x}{(x+1)^2}\right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

21. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$

22. $\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln\frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C$

23. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^{-}-3}{e^{-}}\right| + C$ (*Sugerencia*: sea $e^x = u$.)

24. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x(1+\cos^2 x)} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$ (*Sugerencia:* sea $\cos x = u$.)

25. $\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta}{1+\tan^3\theta}\,d\theta = \ln|1+\tan\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

34

Técnicas de integración IV: sustituciones misceláneas

I. Se presupone que en una función racional una variable se remplaza por uno de los radicales siguientes:

1. $\sqrt[n]{ax+b}$. Entonces, la sustitución $ax + b = z^n$ producirá una función racional (repase los problemas 1 a 3).
2. $\sqrt{q+px+x^2}$. Aquí, la sustitución $q + px + x^2 = (z - x)^2$ resultará en una función racional (consulte el problema 4).
3. $\sqrt{q+px-x^2} = \sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)}$. En este caso, la sustitución $q + px - x^2 = (\alpha + x)^2z^2$ producirá una función racional (problema 5).

II. Se presupone que en una función racional algunas variables se remplazan por sen x, por cos x o por ambas. Entonces, la sustitución $x = 2 \tan^{-1}z$ resultará en una integral de una función racional de z.

Ello se debe a que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2} \tag{34.1}$$

(Repase el problema 6 para ver una derivación de las primeras dos ecuaciones.)

En el resultado final, se sustituye z por tan $(x/2)$ (repase los problemas 7 a 10).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resuelva $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$.

Sea $1 - x = z^2$. Entonces, $x = 1 - z^2$, $dx = -2z\,dz$ y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z\,dz}{(1-z^2)z} = -2\int \frac{dz}{1-z^2}$$

Por integración por fracciones parciales se obtiene:

$$-2\int \frac{dz}{1-z^2} = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C. \text{ Por tanto, } \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

2. Resuelva $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$.

Sea $x + 2 = z^2$. Entonces, $x = z^2 - 2$, $dx = 2z\,dz$ e

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-4)} = 2\int \frac{dz}{z^2-4}$$

Por integración por fracciones parciales queda:

$$2\int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C$$

3. Halle $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$.

Sea $x = z^4$. Entonces, $dx = 4z^3\,dz$ e

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = \int \frac{4z^3\,dz}{z^2-z} = 4\int \frac{z^2\,dz}{z-1}$$

$$= 4\int \frac{(z^2-1)+1}{z-1}dz = 4\int \frac{(z-1)(z+1)+1}{z-1}dz = 4\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= 4(\tfrac{1}{2}z^2 + z + \ln|z-1|) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}-1) + C$$

4. Halle $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$.

Sea $x^2 + x + 2 = (z-x)^2$. Entonces,

$$x = \frac{z^2-2}{1+2z}, \quad dx = \frac{2(z^2+z+2)\,dz}{(1+2z)^2}, \quad \sqrt{x^2+x+2} = \frac{z^2+z+2}{1+2z}$$

e

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{\dfrac{2(z^2+z+2)}{(1+2z)^2}}{\dfrac{z^2-2}{1+2z}\,\dfrac{z^2+z+2}{1+2z}}dz = 2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + C$$

La ecuación $2\int \frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C$ se obtuvo mediante integración por fracciones parciales.

5. Resuelve $\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$.

Sea $5 - 4x - x^2 = (5 + x)(1 - x) = (1 - x)^2z^2$. Entonces,

$$x = \frac{z^2-5}{1+z^2}, \quad dx = \frac{12z\,dz}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{5-4x-x^2} = (1-x)z = \frac{6z}{1+z^2}$$

e

$$\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\dfrac{z^2-5}{1+z^2}\,\dfrac{12z}{(1+z^2)^2}}{\dfrac{216z^3}{(1+z^2)^3}}dz = \frac{1}{18}\int\left(1-\frac{5}{z^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{18}\left(z+\frac{5}{z}\right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

6. Dado $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, es decir, $x = 2\tan^{-1}z$, muestre que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2} \qquad \text{y} \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Como

$$\frac{1+\cos x}{2} = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{1}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1}{1+z^2}$$

al despejar cos x se obtiene $\cos x = \dfrac{2}{1+z^2} - 1 = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$. También,

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x/2) = 2\frac{\tan(x/2)}{\sec^2(x/2)} = 2\frac{\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2z}{1+z^2}$$

7. Resuelva $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Sea $x = \tan^{-1} z$. Mediante las ecuaciones (34.1) se tiene que

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x - \cos x} = \int \frac{\dfrac{2}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2} - \dfrac{1-z^2}{1+z^2}}\, dz$$

$$= \int \frac{dz}{z(1+z)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}\right) dz = \ln|z| - \ln|1+z| + C = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + C$$

8. Halle $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\cos x}$.

Sea $x = 2\tan^{-1} z$. Por medio de las ecuaciones (34.1), resulta

$$\int \frac{\dfrac{2}{1+z^2}}{3-2\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}\, dz = \int \frac{2\,dz}{1+5z^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}(z\sqrt{5}) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

9. Resuelve $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Sea $x = 2\tan^{-1} z$. Al utilizar las ecuaciones (34.1) resulta

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\dfrac{2}{1+z^2}}{2+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}\, dz = \int \frac{2\,dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

10. Resuelve $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x}$.

Sea $x = 2\tan^{-1} z$. Mediante las ecuaciones (34.1) se obtiene

$$\int \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x} = \int \frac{\dfrac{2}{1+z^2}}{5+4\dfrac{2z^2}{1+z^2}}\, dz = \int \frac{2\,dz}{5+8z+5z^2}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}} = \tfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z+(\frac{4}{5})}{\frac{3}{5}}\right) + C = \tfrac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)+4}{3}\right) + C$$

11. Use la sustitución $1 - x^3 = z^2$ para resolver $\int x^5\sqrt{1-x^3}\, dx$.

La sustitución da $x^3 = 1 - z^2$, $3x^2\, dx = -2z\, dz$ e

$$\int x^5\sqrt{1-x^3}\, dx = \int x^3\sqrt{1-x^3}\,(x^2\; dx) = \int (1-z^2)z(-\tfrac{2}{3}z\, dz) = -\frac{2}{3}\int (1-z^2)z^2\; dz$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right) + C = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(2+3x^3) + C$$

12. Use $x = \frac{1}{z}$ para hallar $\int \frac{\sqrt{x - x^2}}{x^4}\, dx$.

La sustitución resulta en $dx = -dz/z^2$, $\sqrt{x - x^2} = \sqrt{z - 1}/z$ e

$$\int \frac{\sqrt{x - x^2}}{x^4}\, dx = \int \frac{\frac{\sqrt{z-1}}{z}\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1/z^4} = -\int z\sqrt{z-1}\, dz$$

Sea $z - 1 = s^2$. Entonces,

$$-\int z\sqrt{z-1}\, dz = -\int (s^2 + 1)(s)(2s\, ds) = -2\left(\frac{s^5}{5} + \frac{s^3}{3}\right) + C$$

$$= -2\left[\frac{(z-1)^{5/2}}{5} + \frac{(z-1)^{3/2}}{3}\right] + C = -2\left[\frac{(1-x)^{5/2}}{5x^{5/2}} + \frac{(1-x)^{3/2}}{3x^{3/2}}\right] + C$$

13. Halle $\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}}$.

Sea $u = x^{1/6}$, así que $x = u^6$, $dx = 6u^5\, du$, $x^{1/2} = u^3$ y $x^{1/3} = u^2$; entonces, se obtiene

$$\int \frac{6u^5 du}{u^3 + u^2} = 6\int \frac{u^3}{u+1}\, du = 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right) du = 6\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \ln|u+1|\right) + C$$

$$= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + x^{1/6} - \ln|x^{1/6} + 1| + C$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 14 a 39, evalúe la integral dada.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx = 2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

16. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

17. $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\, dx = -x + \frac{4}{3}[\sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2})] + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \ln\left|2\sqrt{x^2-x+1} + 2x - 1\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = 2\tan^{-1}(\sqrt{x^2+x-1} + x) + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$

21. $\int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}\, dx = -\frac{(4x-x)^{3/2}}{6x^3} + C$

22. $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2} + (x+1)^{1/4}} = 2(x+1)^{1/2} - 4(x+1)^{1/4} + 4\ln(1+(x+1)^{1/4}) + C$

23. $\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C$

24. $\int \frac{dx}{1-2\operatorname{sen} x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\tan \frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C$

25. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3\tan \frac{1}{2}x + 1}{\tan \frac{1}{2}x + 3} \right| + C$

26. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x - 1} = \ln \left| \tan \frac{1}{2}x - 1 \right| + C$

27. $\int \frac{dx}{5+3\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{5\tan(x/2)+3}{4} + C$

28. $\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan^2 \frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}} \right| + C$

29. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x + \cos x} = \ln \left| 1 + \tan \frac{1}{2}x \right| + C$

30. $\int \frac{dx}{2-\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\sqrt{3} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C$

31. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x} \, dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2\operatorname{sen} \sqrt{x} + C$

32. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = -\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1-x}{2x} \right) + C$ (*Sugerencia:* sea $x = 1/z$.)

33. $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1} dx = e^x - 3\ln(e^x+1) + C$ (*Sugerencia*: sea $e^x + 1 = z$.)

34. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1-\cos x} dx = \cos x + \ln(1-\cos x) + C$ (*Sugerencia*: sea $\cos x = z$.)

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ (*sugerencia*: sea $x = 2/z$.)

36. $\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8} \tan^{-1} \left(\frac{2}{x} \right) + C$

37. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx = \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$

38. $\int \frac{dx}{3(1-x^2)-(5+4x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + C$

39. $\int \frac{x^{1/2}}{x^{1/5}+1} dx = 10[\frac{1}{13}x^{13/10} - \frac{1}{11}x^{11/10} + \frac{1}{9}x^{9/10} - \frac{1}{7}x^{7/10} + \frac{1}{5}x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/10} + x^{1/10} - \tan^{-1}(x^{1/10})] + C$
(*Sugerencia*: sea $u = x^{1/10}$.)

40. (CG) Utilice una graficadora para aproximar (con ocho cifras decimales) $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{3-2\cos x}$ y compare el resultado con el valor obtenido por los métodos presentados en este capítulo.

41. (CG) Use una graficadora para aproximar (con ocho cifras decimales) $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ y compare el resultado con el valor obtenido por los métodos presentados en este capítulo.

35

Integrales impropias

Para definir una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es suficiente que a y b sean números reales y que $f(x)$ sea continua en $[a, b]$. Se deben estudiar ahora dos clases de integrales, denominadas *integrales impropias*.

Límites de integración infinitos

a) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$

Véase los problemas 1 a 3 y 5 a 6.

b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$

Véase el problema 4.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$

Esto siempre que existan *ambos* límites a la derecha (véase el problema 7).

Discontinuidades del integrando

a) Si f es continua en $[a, b]$ pero discontinua desde la derecha en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)\,dx$$

Véase el problema 16.

b) Si f es continua en $[a, b]$ pero no es continua desde la izquierda en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to b^-} \int_a^u f(x)\,dx$$

Véase los problemas 9, 10, 12, 14 y 15.

c) Si f es continua en $[a, b]$ excepto en el punto c en (a, b), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{u\to c^-} \int_a^u f(x)\,dx + \lim_{u\to c^+} \int_u^b f(x)\,dx$$

siempre que *ambas* integrales a la derecha existan. Véase los problemas 11 y 13.

Cuando el límite definido como una integral impropia existe, entonces la integral es *convergente*. En el caso opuesto, la integral es *divergente*. Si la integral es divergente, entonces es igual a $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) si el límite que define la integral impropia tiende a $+\infty$ (correspondientemente, $-\infty$).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resuelva $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big]_1^c$$

$$= \lim_{c\to+\infty} -\left(\frac{1}{c}-1\right) = -(0-1) = 1$$

Nota: la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ puede interpretarse como el área de la región bajo la curva $y = 1/x^2$ y por encima del eje x, para $x > 1$. Entonces, una región infinita (en el sentido de no ser acotada) puede tener un área finita.

2. Resuelva $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \ln x\Big]_1^c$$

$$= \lim_{c\to+\infty} -(\ln c - 0) = +\infty$$

es decir, la integral diverge hacia $+\infty$.

3. Demuestre que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge para $p > 1$ y diverge hacia $+\infty$ para $p \leq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\Big]_1^c$$

Sea $p > 1$. Entonces, se tiene que $\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}}-1\right) = \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}$

Por el problema 2, ya se sabe que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge hacia $+\infty$. Sea $p < 1$. Entonces,

$$\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{c^{p-1}}-1\right) = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-p}(c^{1-p}-1) = +\infty \text{, ya que } 1-p > 0$$

4. Resuelva $\int_{-\infty}^{0} e^{rx}\,dx$ para $r > 0$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{rx}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_c^{0} e^{rx}\,dx = \lim_{c\to-\infty} \frac{1}{r}e^{rx}\Big]_c^0$$

$$= \frac{1}{r}\lim_{c\to-\infty}(1-e^{rc}) = \frac{1}{r}(1-0) = \frac{1}{r}$$

5. Evalúe $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{c} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^c$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)-0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

6. Halle $\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{c} e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)\right)\Big]_0^c \quad \text{(por integración por partes)}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\left(-\tfrac{1}{2}e^{-c}(\operatorname{sen} c + \cos c)\right) + \tfrac{1}{2}\right]$$

Cuando $c \to +\infty$, $e^{-c} \to 0$, mientras que sen c y cos c oscilan entre –1 y 1. Por tanto, $\lim\limits_{c\to+\infty} e^{-c}(\operatorname{sen} c + \cos c) = 0$ y, por consiguiente,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}$$

7. Resuelva $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} &= \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} \\
&= \lim_{c\to+\infty} \int_1^{e^c} \frac{du}{u^2+1} \quad \text{(por la sustitución de } u = e^x\text{)} \\
&= \lim_{c\to+\infty} \tan^{-1} u \Big]_1^{e^c} = \lim_{c\to+\infty} (\tan^{-1}(e^c) - \tan^{-1}(1)) \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(\tan^{-1}(e^c) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

De igual forma,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} &= \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} \\
&= \lim_{c\to-\infty} \int_{e^c}^{1} \frac{du}{u^2+1} = \lim_{c\to-\infty} \tan^{-1} u \Big]_{e^c}^{1} \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(e^c)\right) = \frac{\pi}{4} - \lim_{c\to-\infty} \tan^{-1}(e^c) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

8. Determine el área de la región que queda a la derecha de $x = 3$ y entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ y el eje x.

El área es

$$\begin{aligned}
\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} &= \lim_{c\to+\infty} \int_3^c \frac{dx}{x^2-1} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty} \ln \frac{x-1}{x+1}\Big]_3^c \quad \text{(por integración de fracciones parciales)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty}\left(\ln\frac{c-1}{c+1} - \ln\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{c\to+\infty}\left(\ln\frac{1-(1/c)}{1+(1/c)} - \ln\tfrac{1}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

9. Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

El integrado es discontinuo en $x = 3$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{u\to3^-} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{u\to3^-} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\Big]_0^u \\
&= \lim_{u\to3^-}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) - \operatorname{sen}^{-1} 0\right) = \lim_{u\to3^-}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) - 0\right) \\
&= \operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

10. Obtenga $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$.

El integrado es discontinuo en $x = 2$

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{u\to 2^-} \int_0^u \frac{dx}{2-x} = \lim_{u\to 2^-} -\ln(2-x)\Big]_0^u$$

$$= \lim_{u\to 2^-} -(\ln(2-u) - \ln 2)) = +\infty$$

Por tanto, la integral diverge hacia $+\infty$.

11. Resuelva $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

El integrado es discontinuo en $x = 1$, el cual está dentro de (0, 4) (fig. 35.1).

$$\lim_{u\to 1^-} \int_0^u \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{u\to 1^-} -\frac{1}{x-1}\Big]_0^u$$

$$= \lim_{u\to 1^-} -\left(\frac{1}{u-1} - (-1)\right) = \lim_{u\to 1^-} -\left(\frac{1}{u-1} + 1\right) = +\infty$$

Por tanto, $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ es divergente. (No se tiene que considerar $\lim_{u\to 1^+} \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ para todo. A fin de que sea $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ convergente, tanto $\lim_{u\to 1^-} \int_0^u \frac{dx}{(x-1)^2}$ como $\lim_{u\to 1^+} \int_u^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ deben existir.)

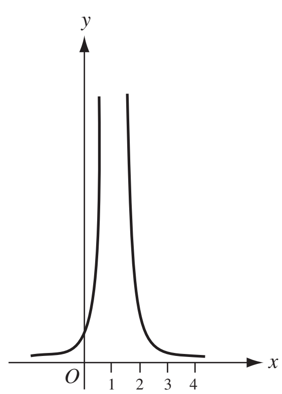


Fig. 35.1

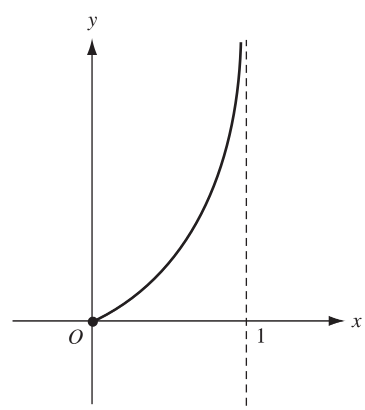


Fig. 35.2

12. Determine el área de la región comprendida entre la curva $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$ (fig.35.2)

El área es

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{u\to 1^-} \int_0^u \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{u\to 1^-} -\frac{1}{2}\int_0^u (1-x^2)^{1/2}(-2x)\,dx$$

$$= \lim_{u\to 1^-} -(1-x^2)^{1/2}\Big]_0^u \quad \text{(por la fórmula abreviada I)}$$

$$= \lim_{u\to 1^-} -[\sqrt{1-u^2} - 1] = 1$$

13. Resuelva $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

El integrado es discontinuo en $x = 1$, que queda dentro de (0, 4).

$$\lim_{u\to 1^-}\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u (x-1)^{1/3}\,dx$$

$$= \lim_{u\to 1^-} \tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_0^u = \lim_{u\to 1^-}\tfrac{3}{2}[(u-1)^{2/3}-1] = -\tfrac{3}{2}$$

Por otra parte,

$$\lim_{u\to 1^+}\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{u\to 1^+}\int_0^4 (x-1)^{1/3}\,dx$$

$$= \lim_{u\to 1^+} \tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_0^4 = \lim_{u\to 1^+}\tfrac{3}{2}[\sqrt[3]{9}-(u-1)^{2/3}-1] = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

Por tanto,

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{u\to 1^-}\int_0^u \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{u\to 1^+}\int_u^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

$$= \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)$$

14. Resuelva $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$.

El integrado es discontinuo en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2}\sec x\,dx = \lim_{u\to\pi/2^-}\int_0^u \sec x\,dx$$

$$= \lim_{u\to\pi/2^-} \ln(\sec x + \tan x)\Big]_0^u$$

$$= \lim_{u\to\pi/2^-} [\ln(\sec u + \tan u) - \ln(1+0)]$$

$$= \lim_{u\to\pi/2^-} \ln(\sec u + \tan u) = +\infty$$

ya que,

$$\lim_{u\to\pi/2^-}\sec u = +\infty \text{ y } \lim_{u\to\pi/2^-}\tan u = +\infty$$

Entonces, $\int_0^{\pi/2}\sec x\,dx$ diverge hacia $+\infty$.

15. Resuelva $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$.

El integrado es discontinuo en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx = \lim_{u\to\pi/2^-}\int_0^u \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$$

$$= \lim_{u\to\pi/2^-} -\int_0^u (1-\operatorname{sen} x)^{-1/2}(-\cos x)\,dx$$

$$= \lim_{u\to\pi/2^-} -2(1-\operatorname{sen} x)^{1/2}\Big]_0^u = \lim_{u\to\pi/2^-} -2[(1-\operatorname{sen} u)^{1/2}-1] = 2$$

16. Evalúe $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

El integrado es discontinuo en $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to 0^+}\int_u^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big]_u^1$$

$$= \lim_{u\to 0^+} -\left(1-\frac{1}{u}\right) = +\infty$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

17. Evalúe las integrales siguientes:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ *b*) $\int_0^4 \frac{1}{4-x}\,dx = +\infty$ *c*) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = 4$

d) $\int_0^4 \frac{1}{(4-x)^{3/2}}\,dx = +\infty$ *e*) $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = \pi$ *f*) $\int_{-1}^8 \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{9}{2}$

g) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$ *h*) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = +\infty$ *i*) $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$

j) $\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}$

18. Halle el área de la región comprendida entre la curva indicada y sus asíntotas:

a) $y^2 = \frac{x^4}{4-x^2}$; *b*) $y^2 = \frac{4-x}{x}$; *c*) $y^2 = \frac{1}{x(1-x)}$

Respuestas: *a*) 4π; *b*) 4π; *c*) 2π

19. Evalúe las integrales dadas:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ *b*) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}$ *c*) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$

d) $\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2} = +\infty$ *e*) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$ *f*) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{e}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = 0$ *h*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{2}$ *i*) $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = -1$

j) $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}\,dx = 6$

20. Halle el área de la región comprendida entre la curva indicada y su asíntota:

a) $y = \frac{8}{x^2+4}$; *b*) $y = \frac{x}{(4+x^2)^2}$; *c*) $y = xe^{-x^2/2}$

Respuestas: *a*) 4π; *b*) $\frac{1}{4}$; *c*) 2

21. Determine el área de las regiones siguientes:

a) Por encima del eje x, bajo $y = \frac{1}{x^2-4}$ y a la derecha de $x = 3$.

b) Por encima del eje x, bajo $y = \frac{1}{x(x-1)^2}$ y a la derecha de $x = 2$

Respuestas: *a*) $\frac{1}{4}\ln 5$; *b*) $1 - \ln 2$

22. Demuestre que las áreas de las regiones siguientes son infinitas:

a) Por encima del eje x, bajo $y = \dfrac{1}{4-x^2}$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

b) Por encima del eje x, bajo $xy = 9$ y a la derecha de $x = 1$.

23. Demuestre que el área de la región en el primer cuadrante bajo $y = e^{-2x}$ es $\frac{1}{2}$, y que el volumen generado al girar dicha región en torno al eje x es $\dfrac{\pi}{4}$.

24. Establezca la longitud de arco indicado: *a*) $9y^2 = x(3-x)^2$, una onda; *b*) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, toda la longitud; *c*) $9y^2 = x^2(2x+3)$, una onda.

Respuestas: *a*) $4\sqrt{3}$ unidades; *b*) $6a$ unidades; *c*) $2\sqrt{3}$ unidades

25. Demuestre que $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-b)^p}$ converge para $p < 1$ y diverge hacia $+\infty$ para $p \geq 1$.

26. Sea $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x < b$. Considere que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ (fig. 35.3). No es difícil demostrar que si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ también lo hace y, de forma equivalente, si $\int_a^b f(x)\,dx$ no converge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ tampoco lo hace. Un resultado semejante se cumple para $a < x \leq b$, con $\lim\limits_{x\to a^+}$ remplazando a $\lim\limits_{x\to b^-}$.

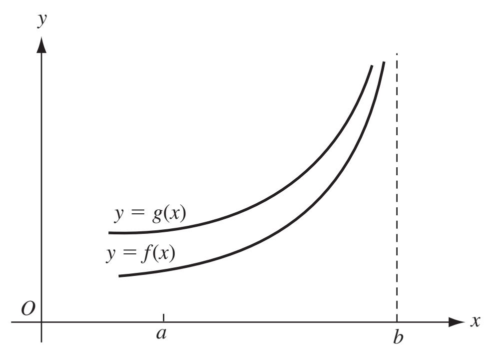


Fig. 35.3

A guisa de ejemplo, considere $\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x^4}$. Para $0 \leq x < 1$,

$$1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-x^4}$$

Como $\dfrac{1}{4}\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x}$ no converge, tampoco lo hace $\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x^4}$.

Ahora considere $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$. Para $0 < x \leq 1$, $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Como $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge, entonces $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ también lo hace.

Determine si cada una de las integrales siguientes converge:

a) $\int_0^1 \dfrac{e^x dx}{x^{1/3}}$; *b*) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{x}dx$; *c*) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

Respuestas: *a*) y *c*) convergen

27. Sea $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$. Considere también que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (fig. 35.4). No es difícil demostrar que, si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también lo hace (y de forma equivalente, que si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ no converge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ tampoco lo hace).

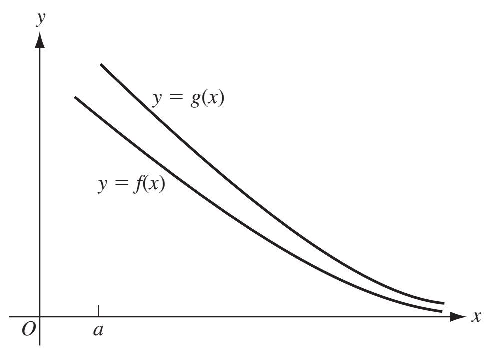


Fig. 35.4

Como ejemplo, considere $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x+6}}$. Para $x \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{x^4+2x+6}} < \frac{1}{x^2}$. Puesto que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, entonces $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x+6}}$ también lo hace.

Determine si converge o no cada una de las integrales siguientes:

a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x}}$; *b*) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$; *c*) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$

Respuesta: todas convergen

28. Defina la función gama $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ para $t > 0$. Puede demostrarse que $\Gamma(t)$ es convergente. (Esto se deja como tarea para el estudiante.)

a) Pruebe que $\Gamma(1) = 1$.

b) Pruebe que $\Gamma(2) = 1$. (*Sugerencia:* aplique integración por partes.)

c) Pruebe que $\Gamma(t + 1) = t\,\Gamma(t)$ para toda $t > 0$. (*Sugerencia:* use integración por partes.)

d) Use la respuesta del inciso *c*) para demostrar que $\Gamma(n + 1) = n!$ para todo entero positivo n. (*Recuerde:* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$.)

36

Aplicaciones de la integración III: área de una superficie de revolución

Si un arco de una curva gira en torno de una recta que no corta el arco, entonces la superficie resultante se denomina *superficie de revolución*. Por *área de superficie* de tal superficie se entiende el área de su superficie externa.

Sea f una función continua en $[a, b]$ que es diferenciable en (a, b) y tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Entonces, el área de superficie S de la superficie de revolución generada al girar la gráfica de f en $[a, b]$ alrededor del eje x se obtiene con la fórmula

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \tag{36.1}$$

Véase en el problema 11 una justificación de esta fórmula.

Hay otra fórmula como la (36.1) que se obtiene cuando se intercambian los papeles de x y de y. Sea g una función continua en $[c, d]$ que es diferenciable en (c, d) y tal que $g(y) \geq 0$ para $c \leq y \leq d$. Entonces, el área de superficie S de la superficie de revolución creada por el giro de la gráfica de g en $[c, d]$ alrededor del eje y se obtiene con la fórmula:

$$S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy \tag{36.2}$$

Asimismo, si una curva está dada por ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, $y = g(u)$ (véase el capítulo 37), y si el arco desde $u = u_1$ hasta $u = u_2$ se gira en torno del eje x, entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$S = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du \tag{36.3}$$

En este caso se ha supuesto que f y g son continuas en $[u_1, u_2]$ y diferenciables en (u_1, u_2), y que $y = g(u) \geq 0$ en $[u_1, u_2]$. Otra fórmula de este tipo se cumple en el caso de una revolución en torno al eje y.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine el área S de la superficie de revolución creada al girar alrededor del eje x el arco de la parábola $y^2 = 12x$ de $x = 0$ a $x = 3$.

Por derivación implícita,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} \qquad \text{y} \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2+36}{y^2}$$

Por (36.1)

$$S = 2\pi\int_0^3 y\frac{\sqrt{y^2+36}}{y}\,dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x+36}\,dx$$

$$= 2\pi(8(12x+36)^{3/2})]_0^3 = 24(2\sqrt{2}-1)\pi$$

2. Determine el área S de la superficie de revolución creada al girar alrededor del eje y el arco de $x = y^3$ de $y = 0$ a $y = 1$.

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \qquad \text{y} \qquad 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1+9y^4. \text{ Entonces, por (36.2)}$$

$$S = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+9y^4}\,dy = 2\pi\int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_0^1 (1+9y^4)^{1/2}(36y^3)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{18}\frac{2}{3}(1+9y^4)^{3/2}]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

3. Establezca el área de la superficie de revolución creada cuando gira en torno al eje x el arco de $y^2 + 4x = 2\ln y$ de $y = 1$ a $y = 3$.

$$S = 2\pi\int_e^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_1^3 y\frac{1+y^2}{2y}\,dy = \pi\int_1^3 (1+y^2)\,dy = \frac{32}{3}\pi$$

4. Halle el área de la superficie de revolución creada al girar un lazo de la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ alrededor del eje x (fig. 36.1).

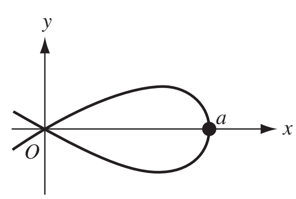


Fig. 36.1

Aquí, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^2x-2x^3}{8a^2y}$ y $1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = 1+\dfrac{(a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)} = \dfrac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}$

Por tanto $$S = 2\pi\int_0^a 2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a\sqrt{2}}\frac{3a^2-2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2-2x^2)x\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2$$

5. Establezca el área de la superficie de revolución creada al girar en torno al eje x la elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4} = 1$.

$$S = 2\pi\int_{-4}^4 y\frac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{-4}^4 \sqrt{64-3x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{64-3x^2}+32\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{8}\right)\right)\Bigg]_{-4}^4 = 8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right)$$

6. Halle el área de la superficie de revolución que se crea al girar alrededor del eje x la hipocicloide $x = \cos^3 \theta$, $y = a\ \text{sen}^3\ \theta$.

La superficie requerida se forma por el giro del arco de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. Se tiene que $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\text{sen}\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$ y $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta$. Entonces,

$$S = 2(2\pi)\int_0^{\pi/2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2(2\pi)\int_0^{\pi/2}(a\,\text{sen}^3\theta)3a\cos\theta\,\text{sen}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{12a^2\pi}{5} \quad \text{(unidades cuadradas)}$$

7. Halle el área de la superficie de revolución creada cuando se gira la cardioide $x = \cos 3\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\ \text{sen}\theta - \text{sen}\ 2\theta$ alrededor del eje x.

La superficie requerida se forma por el giro del arco de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ (fig. 36.2). Se tiene que

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta,$$

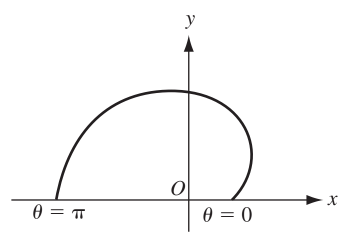


Fig. 36.2

y

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 8(1 - \text{sen}\theta\,\text{sen}2\theta - \cos\theta\cos 2\theta) = 8(1 - \cos\theta)$$

Entonces,

$$S = 2\pi\int_0^{\pi}(2\text{sen}\theta - \text{sen}\,2\theta)(2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\theta})\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta(1 - \cos\theta)^{3/2}\,d\theta = \left(\frac{16\sqrt{2}}{5}\pi(1 - \cos\theta)^{5/2}\right)\Bigg]_0^{\pi}$$

$$= \frac{128\pi}{5} \quad \text{(unidades al cuadrado)}$$

8. Demuestre que el área de la superficie de un cilindro de radio r y altura h es $2\pi rh$.

La superficie se crea cuando se gira alrededor del eje x la curva $y = r$, de $x = 0$ a $x = h$. Como $\frac{dy}{dx} = 0$, $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$. Entonces, por (36.1),

$$S = 2\pi\int_0^h r\,dx = 2\pi(rx)\Big]_0^h = 2\pi rh$$

9. Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

El área de la superficie se crea al girar en torno al eje x el semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ de $x = -r$ a $x = r$. Por simetría, éste es el doble del área de la superficie de $x = 0$ a $x = r$. Como $y^2 = r^2 - x^2$,

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \text{y} \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

En consecuencia, por (36.1)

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^r y\sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx = 4\pi r \int_0^r 1\,dx = 4\pi r x \Big]_0^r = 4\pi r^2$$

10. *a*) Demuestre que el área de la superficie de un cono con base r y altura inclinada s (fig. 36.3) es πrs.

b) Demuestre que el área de la superficie del tronco de un cono con bases r_1 y r_2 y altura inclinada u (fig. 36.4) es $\pi(r_1 + r_2)u$. (Observe que el *tronco* se obtiene al girar la altura de la pendiente en torno de la base del triángulo.)

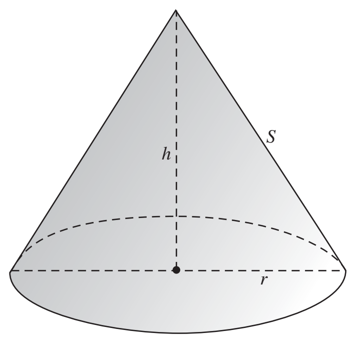


Fig. 36.3

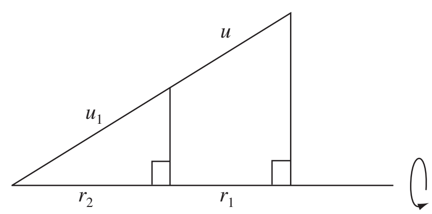


Fig. 36.4

a) Se corta el cono a lo largo de una altura inclinada y se abre como parte de un círculo de radio s (como se muestra en la figura 36.5). Observe que la parte de la circunferencia cortada por esta región es $2\pi r$ (la circunferencia de la base del cono). Ahora, el área deseada S es la diferencia entre πs^2 (el área del círculo en la figura 36.5) y el área A_1 de un sector circular con ángulo central θ. El área A_1 es $\frac{\theta}{2\pi}(\pi s^2) = \frac{1}{2}\theta s^2$. Como el arco cortado por θ es $2\pi s - 2\pi r$, se obtiene $\theta = \frac{2\pi s - 2\pi r}{s}$. Así, $A_1 = \pi(s - r)s$. Por lo tanto, $S = \pi s^2 - \pi(s - r)s = \pi rs$ unidades al cuadrado.

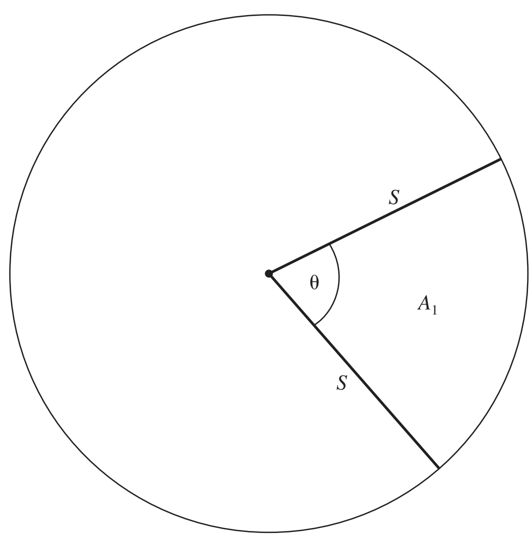


Fig. 36.5

b) De los triángulos semejantes en la figura 36.4 se obtiene $\frac{u_1}{r_1} = \frac{u_1 + u}{r_2}$. Entonces, $r_2u_1 = r_1u_1 + r_1u$. Por tanto, $u_1 = \frac{r_1 u}{r_2 - r_1}$. Ahora, por el resultado del inciso *a*), el área de la superficie de un tronco es $\pi r_2(u_1 + u) - \pi r_1 u_1 = \pi(r_2 - r_1)u_1 + \pi r_2 u = \pi r_1 u + \pi r_2 u = \pi(r_1 + r_2)u$ unidades al cuadrado.

11. Esboce una comprobación de la fórmula (36.1).

Supóngase que $[a, b]$ se divide en n subintervalos iguales. $[x_{k-1}, x_k]$, cada uno de longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. El área de superficie total S es la suma de las áreas de superficie S_k creadas por los arcos entre los puntos $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ y $[x_k, f(x_k)]$, cada uno de los cuales es aproximado por el área de superficie generada por el segmento de recta entre $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ y $[x_k, f(x_k)]$. La última es el área de un tronco de un cono. En la notación de la figura 36.6, esto es, en virtud del problema 10*b*):

$$\pi\left(f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 2\pi\left(\frac{f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)}{2}\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

Ahora, $\dfrac{f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)}{2}$, donde el promedio de $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$ está entre estos dos valores y por el teorema del valor intermedio, es igual a $f\left(x_k^*\right)$ para algún x_k^* en (x_{k-1}, x_k). También, $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x$. Por el teorema del valor medio, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x_k^\#\right)$ para algún $x_k^\#$ en (x_{k-1}, x_k). Entonces, S se aproxima por la suma

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi f\left(x_k^*\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x_k^\#\right)\right)^2}\,\Delta x$$

y es posible demostrar que esta suma puede realizarse arbitrariamente próxima a $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.[†] Por tanto, la última es igual a S.

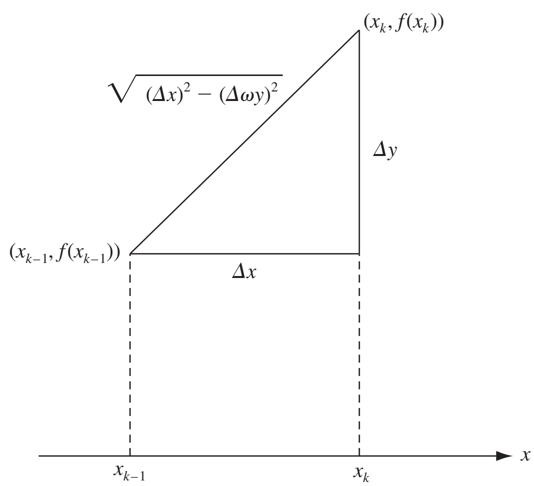


Fig. 36.6

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 12 a 20, determine el área de la superficie de revolución creada cuando gira el arco indicado alrededor del eje indicado.

12. $y = mx$ de $x = 0$ a $x = 2$; eje x *Respuesta:* $4m\pi\sqrt{1+m^2}$

[†] En general, puede probarse el resultado siguiente: **teorema de Bliss.** Sean f y g son continuas en $[a, b]$. Se divide $[a, b]$ en subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ y sea $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$. En cada $[x_{k-1}, x_k]$, se escoge x_k^* y $x_k^\#$. Entonces, la suma de la aproximación $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)g\left(x_k^\#\right)\Delta_k\ x$ puede hacerse arbitrariamente próxima a $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ cuando $n \to +\infty$ y haciendo que las longitudes máximas de los subintervalos tiendan a 0.

13. $y = \frac{1}{3}x^3$ de $x = 0$ a $x = 3$; eje x *Respuesta:* $\pi(82\sqrt{82} - 1)/9$

14. $y = \frac{1}{3}x^3$ de $x = 0$ a $x = 3$; eje y *Respuesta:* $\frac{1}{2}\pi\left[9\sqrt{82} + \ln\left(9 + \sqrt{82}\right)\right]$

15. Un lazo de $8y^2 = x^2(1 - x^2)$; eje x *Respuesta:* $\frac{1}{4}\pi$

16. $y = x^3/6 + 1/2x$ de $x = 1$ a $x = 2$; eje y *Respuesta:* $\left(\frac{15}{4} + \ln 2\right)\pi$

17. $y = \ln x$ de $x = 1$ a $x = 7$; eje y *Respuesta:* $\left[34\sqrt{2} + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right]\pi$

18. Un lazo de $9y^2 = x(3 - x)^2$; eje y *Respuesta:* $28\pi\sqrt{3}/5$

19. Un arco de $x = a(\theta - \text{sen}\ \theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$; eje x *Respuesta:* $64\pi a^2/3$

20. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \text{ sen } t$ de $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}\pi$, eje x *Respuesta:* $2\pi\sqrt{2}(2e^{\pi} + 1)/5$

21. Determine el área de la superficie de una zona cortada en una esfera de radio r por dos planos paralelos, cada uno a una distancia de $\frac{1}{2}a$ del centro.

Respuesta: $2\pi ar$

22. Determine el área de la superficie de un toro (rosquilla) creada al girar el círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ en torno al eje x. Considere que $0 < a < b$.

Respuesta: $4\pi^2 ab$

37

Representación paramétrica de curvas

Ecuaciones paramétricas

Si las coordenadas (x, y) de un punto P en una curva están definidas como funciones $x = f(u)$ y $y = g(u)$ de una tercera variable o *parámetro*, u, las ecuaciones $x = f(u)$ y $y = g(u)$ se denominan *ecuaciones paramétricas* de la curva.

EJEMPLO 37.1

a) $x = \cos\theta$ y $y = 4\operatorname{sen}^2\theta$ son ecuaciones paramétricas, con parámetro θ, de la parábola $4x^2 + y = 4$, ya que $4x^2 + y = 4\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta = 4$.

b) $x = \frac{1}{2}t$ y $y = 4 - t^2$ es otra representación paramétrica, con parámetro t, de la misma curva.

Nótese que el primer conjunto de ecuaciones paramétricas representa sólo una parte de la parábola [fig. 37.1*a*)], en tanto que la segunda representa toda la curva [fig. 37.1 *b*)].

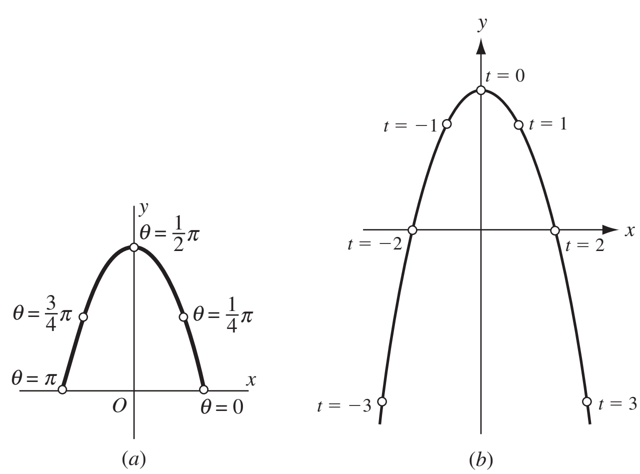


Fig. 37.1

EJEMPLO 37.2

a) Las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ representan el círculo de radio r con centro en el origen, como $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$. El parámetro θ puede considerarse el ángulo del eje x positivo al segmento desde el origen hasta el punto P en el círculo (fig. 37.2).

b) Las ecuaciones $x = a + r\cos\theta$ y $y = b + r\operatorname{sen}\theta$ representan el círculo de radio r con centro en (a, b), ya que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$.

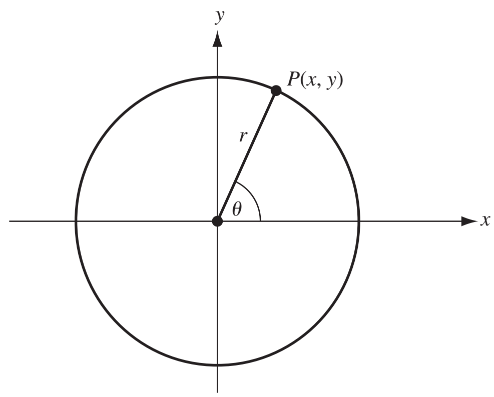


Fig. 37.2

Supóngase que una curva se define mediante un par de ecuaciones paramétricas $x = f(u)$ y $y = g(u)$. Entonces, la primera y la segunda derivada $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ están dadas por las fórmulas siguientes:

(37.1) Primera derivada

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{du}\right)$$

Esto se sigue de la fórmula de la regla de la cadena $\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$.

(37.2) Segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) \Big/ \frac{dx}{du}$$

Esto se sigue de la fórmula de la regla de la cadena $\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{du}$.

Longitud de arco para una curva paramétrica

Si una curva está definida por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos correspondientes a los valores parámetro t_1 y t_2 es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Esta fórmula puede comprobarse por un argumento semejante al de la fórmula de la longitud de arco (29.2).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Halle $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x = t - \text{sen } t$, $y = 1 - \cos t$.

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ y $\frac{dy}{dt} = \text{sen } t$. Por (37.1), $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen } t}{1 - \cos t}$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(1 - \cos t)(\cos t) - (\text{sen } t)(\text{sen } t)}{(1 - \cos t)^2}$$

$$= \frac{\cos t - (\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}{(1 - \cos t)^2} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2} = \frac{1}{\cos t - 1}$$

Por tanto, por (37.2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos t - 1}\Big/(1-\cos t) = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$

2. Resuelva $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

$\dfrac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$ y $\dfrac{dy}{dt} = e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$. Por (37.1), $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t + \operatorname{sen} t}{\cos t - \operatorname{sen} t}$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 - (\cos t + \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t - \cos t)}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2}$$

$$= \frac{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t + \operatorname{sen} t)^2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2} = \frac{2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2}$$

$$= \frac{2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2}$$

Así, por (37.2),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2}\Big/ e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) = \frac{2}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)}$$

3. Encuentre una ecuación de la tangente a la curva $x = \sqrt{t}$, $y = t - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en el punto donde $t = 4$.

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ y $\dfrac{dy}{dt} = 1 + \dfrac{1}{2t^{3/2}}$. Por (37.1), $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{t} + \dfrac{1}{t}$. Entonces, la pendiente de la tangente cuando $t = 4$ es $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$. Cuando $t = 4$, $x = 2$ y $y = \frac{7}{2}$. Una ecuación de la tangente es $y - \frac{7}{2} = \frac{17}{4}(x-2)$.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva está dada en el tiempo t por las ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3\cos t$, $y = 3 + 2\operatorname{sen} t$, donde x y y se miden en pies y t en segundos (fig. 37.3). Obsérvese que $\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-3)^2 = 1$, de manera que la curva es una elipse. Determine: *a*) la razón de cambio en tiempo de x cuando $t = \pi/3$; *b*) la razón de cambio en tiempo de y cuando $t = 5\pi/3$; *c*) la razón de cambio en tiempo del ángulo de inclinación θ de la tangente cuando $t = 2\pi/3$.

$\dfrac{dy}{dt} = 3\operatorname{sen} t$ y $\dfrac{dy}{dt} = 2\cos t$. Entonces, $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\cot t$.

a) Cuando $t = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ pies/s

b) Cuando $t = \dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{dy}{dt} = 2(\frac{1}{2}) = 1$ pies/s

c) $\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3}\cot t)$. Entonces, $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-\frac{2}{3}\csc^2 t}{1 + \frac{4}{9}\cot t^2\, t} = \dfrac{-6\csc^2 t}{9 + 4\cot^2 t}$.

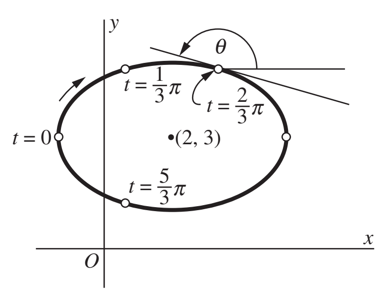


Fig. 37.3

Cuando $t = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9+4(-1/\sqrt{3})^2} = -\frac{24}{31}$. Luego, el ángulo de inclinación de la tangente es decreciente a razón de $\frac{24}{31}$ radianes por segundo.

5. Determine la longitud de arco de la curva $x = t^2$ y $y = t^3$ de $t = 0$ a $t = 4$.

$\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$ y $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)$.

Entonces,

$$L = \int_0^4 2t\sqrt{1+\tfrac{9}{4}t^2}\,dt = \tfrac{4}{9}\int_0^4 (1+\tfrac{9}{4}t^2)^{1/2}(\tfrac{9}{2}t)\,dt$$

$$= \tfrac{4}{9}\tfrac{2}{3}(1+\tfrac{9}{4}t^2)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{8}{27}(37\sqrt{37}-1)$$

6. Halle la longitud de un arco de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta$ y $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 2(1-\cos\theta) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Entonces,

$$L = 2\int_0^4 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = -4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = -4(\cos\pi - \cos 0) = 8$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 7 a 11, determine *a*) $\frac{dy}{dx}$, *b*) $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$ — *Respuestas:* *a*) $2t$; *b*) 2

8. $x = t + 1/t$, $y = t + 1$ — *Respuestas:* *a*) $t^2/(t^2-1)$; *b*) $-2t^3/(t^2-1)^3$

9. $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$ — *Respuestas:* *a*) $-2\operatorname{sen} t$; *b*) -1

10. $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ — *Respuestas:* *a*) $-\tan\theta$; *b*) $1/(3\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta)$

11. $x = a(\cos\phi + \phi\operatorname{sen}\phi)$, $y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi\cos\phi)$ — *Respuestas:* *a*) $\tan\phi$; *b*) $1/(a\phi\cos^3\phi)$

12. Establezca la pendiente de la curva $x = e^{-t}\cos 2t$, $y = e^{-2t}\operatorname{sen} 2t$ en el punto $t = 0$.

Respuesta: -2

13. Determine las coordenadas rectangulares del punto más alto de la curva $x = 96t$, $y = 96t - 16t^2$. (*Sugerencia*: halle t para el y máximo).

Respuesta: (288, 144)

14. Determine las ecuaciones de la tangente y la normal de las curvas siguientes en los puntos determinados por el valor dado del parámetro:

a) $x = 3e^t$, $y = 5e^{-t}$ en $t = 0$

b) $x = a\cos^4\theta$, $y = a\operatorname{sen}^4\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$

Respuestas: *a*) $3y + 5x = 30$, $5y - 3x = 16$; *b*) $2x + 2y = a$, $y = x$

15. Encuentre una ecuación de la tangente en cualquier punto $P(x, y)$ de la curva $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\text{sen}^3 t$. Muestre que la longitud del segmento de la tangente cortada por los ejes de coordenadas es a.

Respuesta: $x\,\text{sen}\,t + y\cos t = \frac{a}{2}\text{sen}\,2t$

16. Para la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, halle los puntos en los que la tangente es *a*) horizontal y *b*) vertical. Demuestre que en el punto donde la curva se corta a sí misma, las dos tangentes son perpendiculares entre sí.

Respuesta: *a*) $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; *b*) $t = 0$

En los problemas 17 a 20, encuentre la longitud del arco especificado de la curva dada.

17. El círculo $x = a\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

Respuesta: $2\pi a$

18. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\text{sen}\,t$ de $t = 0$ a $t = 4$.

Respuesta: $\sqrt{2}(e^4 - 1)$

19. $x = \ln\sqrt{1+t^2}$, $y = \tan^{-1} t$ de $t = 0$ a $t = 1$.

Respuesta: $\ln(1+\sqrt{2})$

20. $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta + 1$, $y = 2\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta$.

Respuesta: 16

21. La posición de un punto en el instante t está dado como $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$. Determine la distancia que se desplaza el punto de $t = 0$ a $t = 4$.

Respuesta: 20

22. Identifique las curvas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes y escriba las ecuaciones para las curvas en términos de x y y:

a) $x = 3t + 5$, $y = 4t - 1$ *Respuesta:* *línea recta:* $4x - 3y = 23$

b) $x = t + 2$, $y = t^2$ *Respuesta:* *parábola*: $y = (x - 2)^2$

c) $x = t - 2$, $y = \frac{t}{t-2}$ *Respuesta:* *hipérbola:* $y = \frac{2}{x} + 1$

d) $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$ *Respuesta:* *círculo:* $x^2 + y^2 = 25$

23. (CG) Use una graficadora para hallar las gráficas de las curvas parámetricas siguientes:

a) $x = \theta + \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ (cicloide)

b) $x = 3\cos^3\theta$, $y = 3\,\text{sen}^3\theta$ (hipocicloide)

c) $x = 2\cot\theta$, $y = 2\,\text{sen}^2\theta$ (bruja de Agnesi)

d) $x = \frac{3\theta}{(1+\theta^3)}$, $y = \frac{3\theta^2}{(1+\theta^3)}$ (folio de Descartes)

38

Curvatura

Derivada de la longitud de un arco

Sea $y = f(x)$ que tiene una primera derivada continua. Sea $A(x_0, y_0)$ un punto fijo en su gráfica (fig. 38.1) y sea s la longitud de arco medida desde A hasta cualquier otro punto $P(x, y)$ en la curva. Se sabe que, por la fórmula (29.2),

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

si se selecciona s para que crezca con x. Sea $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto en la curva cercano a P. Sea Δs la longitud de arco de P a Q. Entonces,

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y de forma semejante,

$$\frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

El signo más o menos se obtiene en la primera fórmula según s aumente o disminuya al crecer x, y en la segunda fórmula según s aumente o disminuya al crecer y.

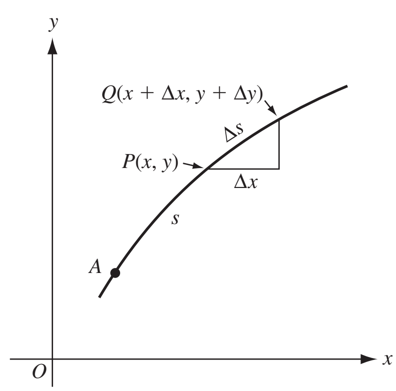


Fig. 38.1

Cuando una curva está definida por ecuaciones paramétricas $x = f(u)$ y $y = g(u)$,

$$\frac{ds}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta u} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}$$

Aquí, el signo más o menos se obtiene según s aumente o disminuya al crecer u.

Para evitar la repetición de signos ambiguos, se supondrá de aquí en adelante que la dirección en cada arco se ha fijado de manera que la derivada de la longitud de arco sea positiva.

Curvatura

La curvatura K de una curva $y = f(x)$ en cualquier punto P de ella se define como la razón de cambio de la dirección de la curva en P, es decir, del ángulo de inclinación τ de la tangente en P, respecto a la longitud del arco s (fig. 38.2). Intuitivamente, la curvatura indica cuán rápido está girando la tangente. Así, la curvatura es grande cuando la curva se dobla de forma pronunciada.

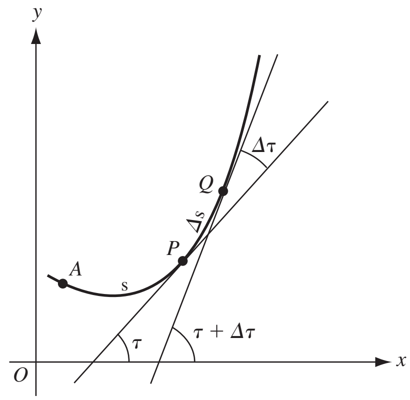


Fig. 38.2

Como fórmulas de curvatura se obtienen:

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \tag{38.1}$$

o en términos de y,

$$K = \frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2}} \tag{38.2}$$

Para ver una demostración repase el problema 13.

K se define a veces como positiva. Si suponemos esto, entonces el signo de K debería ignorarse en lo sucesivo.

El radio de curvatura

El radio de curvatura R en el punto P sobre una curva se define mediante $R = \left|\dfrac{1}{K}\right|$, siempre que $K \neq 0$.

El círculo de curvatura

El círculo de curvatura, o *círculo osculador* de una curva en el punto P, es el círculo de radio R, que se encuentra en el lado cóncavo de la curva y tangente a P (fig. 38.3).

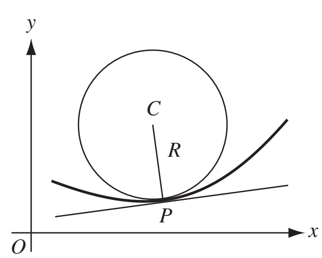


Fig. 38.3

Para construir el círculo de curvatura, en el lado cóncavo de la curva se traza la línea normal al punto P y en él se tiende un segmento PC de longitud R. El punto C es el centro del círculo requerido.

El centro de curvatura

El centro de curvatura para un punto $P(x, y)$ de una curva es el centro C del círculo de curvatura P. Las coordenadas (α, β) del centro de curvatura se obtienen con

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{d^2y/dx^2} \qquad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y/dx^2}$$

o por

$$\alpha = x + \frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{d^2x/dy^2} \qquad \beta = y - \frac{\frac{dx}{dy}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}{d^2x/dy^2}$$

En el problema 9 se brindan más detalles.

La evoluta

La evoluta de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva dada (problemas 11 y 12).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre $\frac{ds}{dx}$ en $P(x, y)$ en la parábola $y = 3x^2$.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+(6x)^2} = \sqrt{1+36x^2}$$

2. Determine $\frac{ds}{dx}$ y $\frac{ds}{dy}$ en $P(x, y)$ en la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$.

Como $2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$ y $\frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}$. Entonces,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2+16y^2}{16y^2} = \frac{32-3x^2}{32-4x^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32-3x^2}{32-4x^2}}$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1+\frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2+16y^2}{x^2} = \frac{2+3y^2}{2-y^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2+3y^2}{2-y^2}}$$

3. Halle $\frac{ds}{d\theta}$ en $P(x, y)$ en la curva $x = \sec\theta$ y $y = \tan\theta$.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2\theta\tan^2\theta + \sec^4\theta} = |\sec\theta|\sqrt{\tan^2\theta + \sec^2\theta}$$

4. Las coordenadas (x, y) en pies de una partícula móvil P están dadas por $x = \cos t - 1$ y $y = 2 \operatorname{sen} t + 1$, donde t es el tiempo en segundos. ¿A qué velocidad se mueve P a lo largo de la curva cuando *a*) $t = 5\pi/6$, *b*) $t = 5\pi/3$, *c*) P se desplaza a su velocidad máxima y a su velocidad mínima?

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$$

a) Cuando $t = \frac{5\pi}{6}$ $\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ pies/s .

b) Cuando $t = \frac{5\pi}{3}$ $\quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ pies/s .

c) Sea $S = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. Entonces, $\frac{dS}{dt} = \frac{-3\cos t \operatorname{sen} t}{S}$. Al despejar $\frac{dS}{dt} = 0$ se tienen los números críticos $t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$.

Cuando $t = 0$ y π, la velocidad $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3(1)} = 2$ pies/s es máxima. Cuando $t = \pi/2$ y $3\pi/2$, la velocidad $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3(0)} = 1$ pies/s es mínima. La curva se muestra en la figura 38.4.

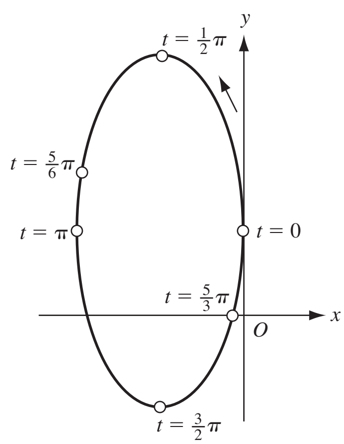


Fig. 38.4

5. Determine la curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos: *a*) $(3, 6)$; *b*) $(\frac{3}{4}, -3)$; *c*) $(0, 0)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}; \quad \text{entonces,} \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3}$$

a) En $(3, 6)$: $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6}$, entonces, $K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$.

b) En $(\frac{3}{4}, -3)$: $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}$, entonces, $K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{75}$.

c) En $(0, 0)$, $\frac{dy}{dx}$ no está definida. Pero $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} = 0$, $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6}$ y $K = -\frac{1}{6}$.

6. Encuentre la curvatura de la cicloide $x = \pi - \operatorname{sen} \theta$ y $y = 1 - \cos \theta$ en el punto más alto de un arco (fig. 38.5).

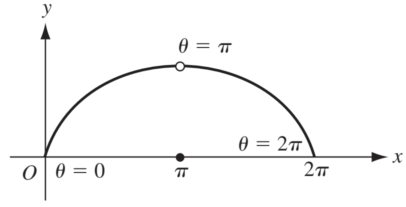


Fig. 38.5

Para determinar el punto más alto en el intervalo $0 < x < 2\pi$, $dy/d\theta = \operatorname{sen}\theta$, de manera que el valor crítico en el intervalo es $x = \pi$. Como $d^2y/d\theta^2 = \cos\theta < 0$ cuando $\theta = \pi$, el punto $\theta = \pi$ es un punto máximo relativo y constituye el punto más alto de la curva en el intervalo.

Para hallar la curvatura,

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$$

En $\theta = \pi$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{4}$ y $K = -\frac{1}{4}$.

7. Encuentre la curvatura de la cisoide $y^2(2-x) = x^3$ en el punto (1, 1) (fig. 38.6).

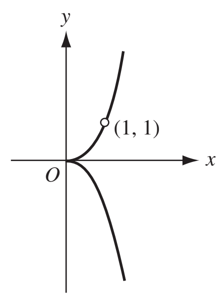


Fig. 38.6

Al derivar implícitamente la ecuación dada respecto a x se obtiene

$$-y^2 + (2-x)\,2yy' = 3x^2 \tag{1}$$

y

$$-2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x \tag{2}$$

De (1), para $x = y = 1$, $-1 + 2y' = 3$ y $y' = 2$. De forma semejante, de (2), para $x = y = 1$ y $y' = 2$, se tiene que $y'' = 3$. Entonces, $K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25$.

8. Encuentre el punto de máxima curvatura en la curva $y = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}. \text{ Entonces, } K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{dK}{dx} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$$

El valor crítico es, por tanto, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. El punto requerido es $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

9. Establezca las coordenadas del centro de curvatura C de la curva $y = f(x)$ en un punto $P(x, y)$, donde $y' \neq 0$ (fig. 38.3).

El centro de curvatura $C(\alpha, \beta)$ queda: (1) en la recta normal en P y (2) a una distancia R de P medida hacia el lado cóncavo de la curva. Con estas condiciones se obtienen, respectivamente,

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \quad \text{y} \quad (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2}$$

De la primera, $\alpha - x = -y'(\beta - y)$. Al sustituir en la segunda se obtiene

$$(\beta - y)^2[1+(y')^2] = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2} \quad \text{y, por tanto,} \quad \beta - y = \pm\frac{1+(y')^2}{y''}$$

Para determinar el signo correcto, nótese que cuando la curva es cóncava hacia arriba, $y'' > 0$, y como C está por encima de P, $\beta - y > 0$. Entonces, el signo apropiado en este caso es +. (Demuestre que el signo también es + cuando $y'' < 0$.) Entonces,

$$\beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} \quad \text{y} \quad \alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}$$

10. Determine la ecuación del círculo de curvatura de $2xy + x + y = 4$ en el punto (1, 1).

Al derivar se obtiene $2y + 2xy' + 1 + y' = 0$. En (1, 1), $y' = -1$ y $1 + (y')^2 = 2$. Al derivar de nuevo se obtiene $4y' + 2xy'' + y'' = 0$. En (1, 1), $y'' = \frac{4}{3}$. Entonces,

$$K = \frac{4/3}{2\sqrt{2}}, \qquad R = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad \alpha = 1 - \frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2}, \qquad \beta = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2}$$

La ecuación requerida es $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ o $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{9}{2}$.

11. Determine la ecuación de la evoluta de la parábola $y^2 = 12x$.

En $P(x, y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}, \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2} = 1 + \frac{3}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{36}{y^3} = -\frac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}$$

Entonces

$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}\,(1+3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}(x+3)}{\sqrt{3}} = 3x + 6$$

y

$$\beta = y + \frac{1+36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3 + 36y}{36} = -\frac{y^3}{36}$$

Las ecuaciones $\alpha = 3x + 6$ y $\beta = -y^3/36$ pueden considerarse ecuaciones paramétricas de la evoluta con x y y, ligadas por la ecuación de la parábola, como parámetros. Sin embargo, es relativamente sencillo eliminar los parámetros. Así, $x = (\alpha - 6)/3$ y $y = -\sqrt[3]{36\beta}$, y al sustituir en la ecuación de la parábola queda

$$(36\beta)^{2/3} = 4(\alpha - 6) \quad \text{o} \quad 81\beta^2 = 4(\alpha - 6)^3$$

En la figura 38.7 se presentan la parábola y su evoluta.

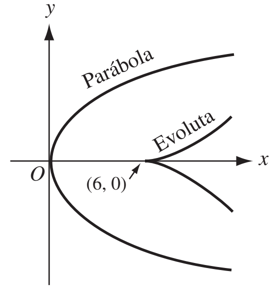


Fig. 38.7

12. Determine la ecuación de la evoluta de la curva $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$.

En $P(x, y)$:

$$\frac{dx}{d\theta} = \theta\cos\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \theta\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{dx} = \tan\theta, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2\theta}{\theta\cos\theta} = \frac{\sec^3\theta}{\theta}$$

Entonces

$$\alpha = x - \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = x - \theta\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

y

$$\beta = y + \frac{\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = y + \theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$

y $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$ son ecuaciones paramétricas de la evoluta (fig. 38.8).

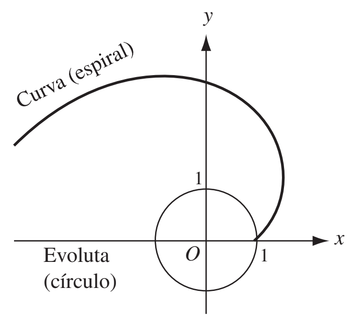


Fig. 38.8

13. Compruebe la fórmula (38.1)

$\tan\tau$ es la pendiente de la recta tangente y, por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \tan\tau. \quad \text{Entonces,} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d\tau}{ds}$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{ds} = \sec^2\tau\cdot\frac{d\tau}{ds}$$

Esto da

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\cdot\frac{d\tau}{ds},$$

de donde

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 14 a 16, halle $\frac{ds}{dx}$ y $\frac{ds}{dy}$.

14. $x^2 + y^2 = 25$ *Respuesta:* $\frac{ds}{dx} = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}, \frac{ds}{dy} = \frac{5}{\sqrt{25 - y^2}}$

15. $y^2 = x^3$ *Respuesta:* $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}, \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{4 + 9y^{2/3}}}{3y^{1/3}}$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *Respuesta:* $\frac{ds}{dx} = (a/x)^{1/3}, \frac{ds}{dy} = \left(\frac{a}{y}\right)^{1/3}$

En los problemas 17 a 18, encuentre $\frac{ds}{dx}$.

17. $6xy = x^4 + 3$ *Respuesta:* $\frac{ds}{dx} = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$

18. $27ay^2 = 4(x - a)^3$ *Respuesta:* $\frac{ds}{dx} = \sqrt{(x + 2a)/3a}$

En los problemas 19 a 22, encuentre $\frac{ds}{dt}$.

19. $x = t^2, y = t^3$ *Respuesta:* $t\sqrt{4 + 9t^2}$

20. $x = 2 \cos t, y = 3 \operatorname{sen} t$ *Respuesta:* $\sqrt{4 + 5\cos^2 t}$

21. $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$ *Respuesta:* 1

22. $x = \cos^3 t, y = \operatorname{sen}^3 t$ *Respuesta:* $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$

23. Halle la curvatura de cada curva en los puntos dados:

a) $y = x^3/3$ en $x = 0, x = 1, x = -2$ *b)* $x^2 = 4ay$ en $x = 0, x = 2a$
c) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = 0, x = \frac{1}{2}\pi$ *d)* $y = e^{-x^2}$ en $x = 0$

Respuestas: *a)* $0, \sqrt{2}/2, -4\sqrt{17}/289$; *b)* $1/2a, \sqrt{2}/8a$; *c)* $0, -1$; *d)* -2

24. Demuestre: *a)* que la curvatura de una línea recta es 0; *b)* que la curvatura de un círculo es numéricamente el recíproco de su radio.

25. Determine los puntos de máxima curvatura de *a)* $y = e^x$; *b)* $y = \frac{1}{3}x^3$.

Respuesta: *a)* $x = -\frac{1}{2}\ln 2$; *b)* $x = \frac{1}{5^{1/4}}$

26. Halle el radio de la curvatura de

a) $x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0$ en $(3, 3)$.
b) $x = 2a \tan \theta, y = a \tan^2 \theta$ en (x, y).
c) $x = a \cos^4 \theta, y = a \operatorname{sen}^4 \theta$ en (x, y).

Respuestas: *a)* $5\sqrt{5}$; *b)* $2a\,|\sec^3 \theta|$; *c)* $2a(\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta)^{3/2}$

27. Determine el centro de la curvatura de *a*) problema 26*a*); *b*) $y = \text{sen } x$ en un punto máximo.

Respuestas: *a*) $C(-7, 8)$; *b*) $C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

28. Encuentre la ecuación del círculo de curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos (0, 0) y (3, 6).

Respuesta: $(x-6)^2 + y^2 = 36$; $(x-15)^2 + (y+6)^2 = 288$

29. Determine la ecuación del círculo de la evoluta de *a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; *b*) $x^{2/3} + y^{2/3} + a^{2/3}$; *c*) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\,\text{sen } t + \text{sen } 2t$.

Respuestas: *a*) $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$; *b*) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$; *c*) $\alpha = \frac{1}{3}(2\cos t - \cos 2t)$, $\beta = \frac{1}{3}(2\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,2t)$

39

Vectores en un plano

Escalares y vectores

Cantidades como el tiempo, la temperatura y la rapidez, que tienen sólo magnitud, se denominan *escalares*. Por otra parte, cantidades como la fuerza, la velocidad y la aceleración, que tienen tanto magnitud como dirección, se denominan *vectores*. Los vectores se representan geométricamente por segmentos de recta dirigidos (flechas). La dirección de la flecha (el ángulo que forma con alguna recta dirigida fija en el plano) es la del vector, y la longitud de la flecha representa la magnitud del vector.

Los escalares se denotarán con letras, a, b, c,... en tipo ordinario; los vectores se simbolizarán con letras en negritas **a, b, c**..., o mediante una expresión **OP** [donde se considera que el vector va de O a P [fig. 39.1a)]. La magnitud (longitud) de un vector **a** u **OP** se representa por $|\mathbf{a}|$ o por $|\mathbf{OP}|$.

Dos vectores **a** y **b** son iguales (lo que se escribe $\mathbf{a} = \mathbf{b}$) si tienen la misma dirección y magnitud. Un vector cuya magnitud es la de **a**, pero cuya dirección es opuesta a la de **a**, se denomina *negativo* de **a** y se representa como $-\mathbf{a}$ [fig. 39.1a)].

Si **a** es un vector y k es un escalar positivo, entonces $k\mathbf{a}$ se define como un vector cuya dirección es la de **a** y cuya magnitud es k veces la de **a**. Si k es un escalar negativo, entonces $k\mathbf{a}$ tiene dirección opuesta a la de **a** y su magnitud es $|k|$ veces la de **a**.

También se considera que un *vector cero* **0** con magnitud 0 y sin dirección se define $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

A menos que se indique de otro modo, un vector dado carece de una posición fija en el plano, por lo que puede moverse en desplazamiento paralelo como se desee. En particular, si **a** y **b** son dos vectores [figura 39.1b)], pueden colocarse de manera que tengan un punto inicial o final común P [figura 39.1c)] o de forma que el punto inicial de **b** coincida con el punto terminal o extremo de **a** [figura 39.1d)].

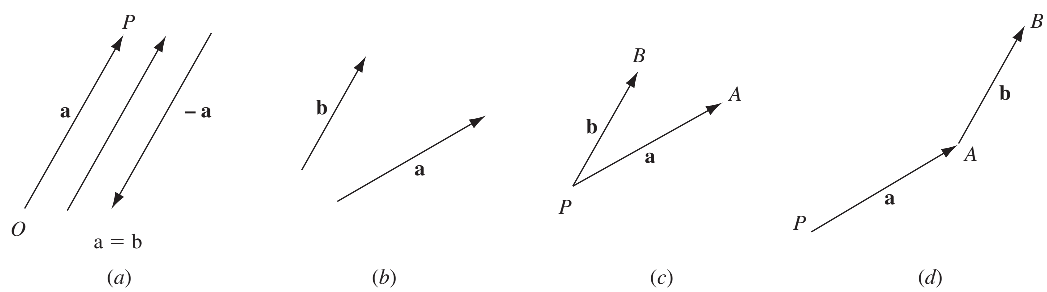


Fig. 39.1

Suma y diferencia de dos vectores

Si **a** y **b** son los vectores de la figura 39.1b), su *suma* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ se obtiene de cualquiera de estas dos formas, ambas equivalentes:

1. Trazando los vectores como en la figura 39.1c) y completando el paralelogramo $PAQB$ de la figura 39.2a). El vector **PQ** es la suma requerida.
2. Trazando los vectores como en la figura 39.1d) y completando el triángulo PAB de la figura 39.2b). Ahí el vector **PB** es la suma requerida.

De la figura 39.2b) se deduce que es posible desplazar tres vectores para formar un triángulo, siempre que uno de ellos sea la suma o el negativo de la suma de los otros dos.

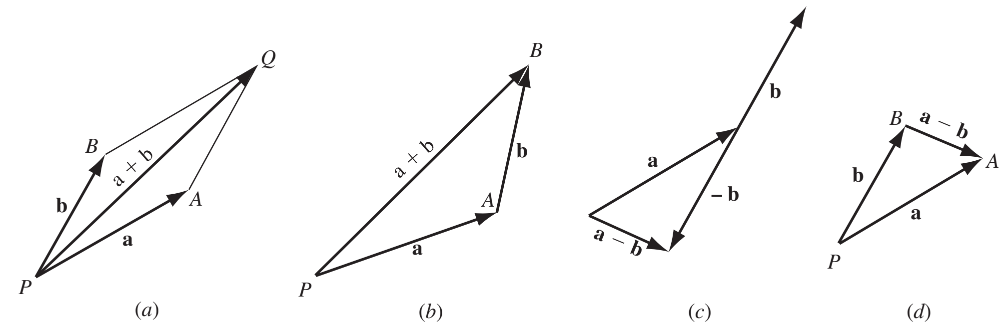


Fig. 39.2

Si **a** y **b** son los vectores de la figura 39.1b), su diferencia **a** – **b** se halla por cualquiera de estas dos formas equivalentes:

1. De la relación **a** – **b** = **a** + (–**b**) como en la figura 39.2*c*).
2. Trazando los vectores como en la figura 39.1*c*) y completando el triángulo. En la figura 39.2*d*), el vector

   BA = a – b.

Si **a, b** y **c** son vectores, las leyes siguientes son válidas:

Propiedad (39.1) (*ley conmutativa*) **a** + **b** = **b** + **a**
Propiedad (39.2) (*ley asociativa*) **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**
Propiedad (39.3) (*ley distributiva*) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$

Véase los problemas 1 a 4.

Componentes de un vector

En la figura 39.3*a*), sea **a** = **PQ** un vector y sean *PM* y *PN* otras dos rectas cualesquiera dirigidas hasta *P*. Se construye el paralelogramo *PAQB*. Entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{PA} + \mathbf{PB}$$

y se dice que **a** se ha *resuelto* en las direcciones *PM* y *PN*. **PA** y **PB** se llamarán las *componentes* de un vector de **a** en el par de direcciones *PM* y *PN*.

Considérese el siguiente vector **a** en un sistema de coordenadas rectangulares [figura 39.3*b*)], que tiene las mismas unidades de medida en los dos ejes. Se representa con **i** el vector que va de (0, 0) a (1, 0) y con **j** el vector que va de (0, 0) a (0, 1). La dirección de **i** es la del eje positivo *x* y la de **j** es la del eje positivo *y,* y ambos son *vectores unitarios*, es decir, vectores de magnitud 1.

Desde el punto inicial *P* y el punto terminal *Q* de **a** se trazan las perpendiculares al eje *x*, que lo cortan en *M* y *N*, respectivamente, y al eje *y*, que lo cortan en *S* y *T*, respectivamente. Ahora, $MN = a_1\mathbf{i}$, cuando a_1 positivo, y $ST = a_2\mathbf{j}$, con a_2 negativo. Entonces: $\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i}$, $\mathbf{ST} = \mathbf{PR} = a_2\mathbf{j}$, y

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \tag{39.1}$$

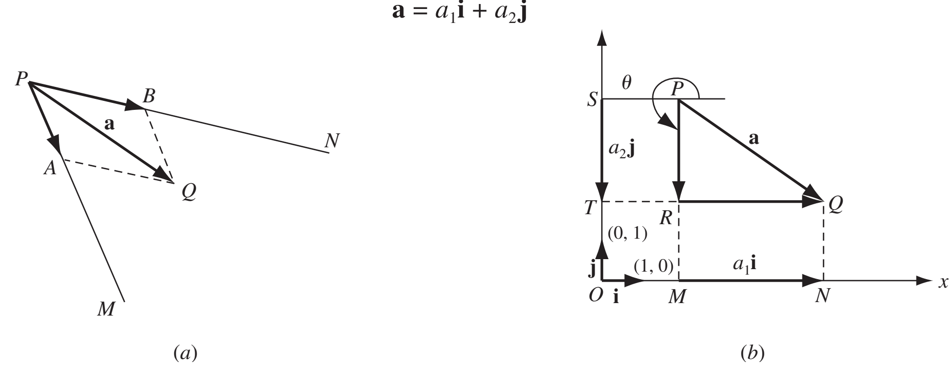


Fig. 39.3

Sean $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ las *componentes vectoriales* de **a.**[*] Los escalares a_1 y a_2 se denominarán *componentes escalares* (o *componentes x* y *componentes y* o, simplemente, *componentes*) de **a**. Nótese que $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$.

La dirección de **a** está dada por el ángulo θ, con $0 \leq \theta < 2\pi$, medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje x positivo hasta el vector. Entonces,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad (39.2)$$

y

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} \qquad (39.3)$$

con el cuadrante de θ determinado por

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos\theta, \quad a_2 = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta$$

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces se cumple lo siguiente:

Propiedad (39.4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$

Propiedad (39.5) $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$

Propiedad (39.6) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$

Propiedad (39.7) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

Producto escalar (o producto punto)

El *producto escalar* (o *producto punto*) de vectores **a** y **b** está definido por

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \qquad (39.4)$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre dos vectores cuando se trazan con un punto inicial común (fig. 39.4). También se define: $\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a} = 0$.

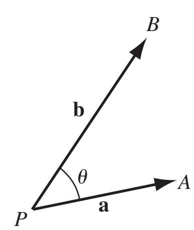


Fig. 39.4

A partir de las definiciones es posible demostrar las propiedades siguientes del producto escalar:

Propiedad (39.8) (*ley conmutativa*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

Propiedad (39.9) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ y $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

Propiedad (39.10) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ si y sólo si ($\mathbf{a} = 0$ o $\mathbf{b} = 0$ o **a** es perpendicular a **b**)

Propiedad (39.11) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 1$ y $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0$

Propiedad (39.12) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$

Propiedad (39.13) (*ley distributiva*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Propiedad (39.14) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{d}$

[*] No es necesario indicar un par de direcciones (como *OM* y *OT*), ya que quedan determinadas por el sistema de coordenadas.

Proyecciones escalar y vectorial

En la ecuación (39.1), el escalar a_1 se denomina *proyección escalar* de **a** sobre cualquier vector cuya dirección sea la del eje x positivo, en tanto que el vector $a_1\mathbf{i}$ es la *proyección vectorial* de **a** sobre cualquier vector cuya dirección sea la del eje x positivo. En general, para cualquier vector **b** no cero y cualquier vector **a**, se define $\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ como la proyección escalar de **a** en **b**, y $\left(\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ como la proyección vectorial de **a** en **b** (repase el problema 7). Nótese que cuando **b** tiene la dirección del eje x positivo, $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\mathbf{i}$.

Propiedad (39.15) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es el producto de la longitud de **a** y la proyección escalar de **b** en **a**. De igual forma, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es el producto de la longitud de **b** y la proyección escalar de **a** en **b** (fig. 39.5).

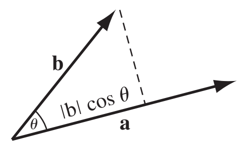


Fig. 39.5

Derivación de funciones vectoriales

Considere que la curva de la figura 39.6 se define por las ecuaciones paramétricas $x=f(u)$ y $y=g(u)$. El vector

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = f(u)\mathbf{i} + g(u)\mathbf{j}$$

que une el origen al punto $P(x, y)$ de la curva se denomina *vector de posición* o *radio vector* de P. Es una función de u. [De aquí en adelante, utilizaremos la letra **r** exclusivamente para los vectores de posición. Así, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es el vector "libre", mientras que $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es el vector que une el origen con $P(3, 4)$.]

La derivada $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ de la función **r** respecto a u se define como $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{r}(u+\Delta u)-\mathbf{r}(u)}{\Delta u}$.

El cálculo directo da:

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}=\frac{dx}{du}\mathbf{i}+\frac{dy}{du}\mathbf{j} \tag{39.5}$$

Sea s la longitud de arco medida desde un punto fijo P_0 de la curva de manera que s aumenta con u. Si τ es el ángulo que forma $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ con el eje x positivo, entonces

$$\tan\tau=\left(\frac{dy}{du}\right)\Big/\left(\frac{dx}{du}\right)=\frac{dy}{dx}= \text{ la pendiente de la curva en } P$$

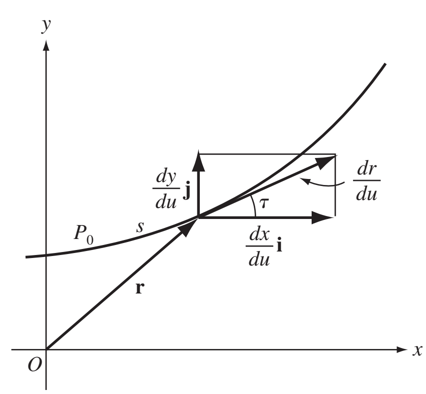


Fig. 39.6

Además, $\dfrac{d\mathbf{r}}{du}$ es un vector de magnitud

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \frac{ds}{du} \tag{39.6}$$

cuya dirección es la de la tangente a la curva en P. Es usual representar este vector con P como su punto inicial.

Si ahora la variable escalar u se toma como la longitud de arco s, entonces la ecuación (39.5) se vuelve

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{39.7}$$

La dirección de $\mathbf{t}$ es τ, mientras que su magnitud es $\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$, lo que resulta igual a 1. Entonces, $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ es un *vector tangente unitario* a la curva en P.

Así, $\mathbf{t}$ es un vector unitario, $\mathbf{t}$ y $d\mathbf{t}/ds$ son perpendiculares (problema 10). Se representa con $\mathbf{n}$ un vector unitario en P que tiene la dirección $d\mathbf{t}/ds$. Cuando P se mueve a lo largo de la curva que se muestra en la figura 39.7, la magnitud $\mathbf{t}$ permanece constante; por tanto, $d\mathbf{t}/ds$ mide la razón de cambio de la dirección de $\mathbf{t}$. Entonces, la magnitud de $d\mathbf{t}/ds$ en P es el valor absoluto de la curvatura en P, es decir, $|d\mathbf{t}/ds| = |K|$, y

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n} \tag{39.8}$$

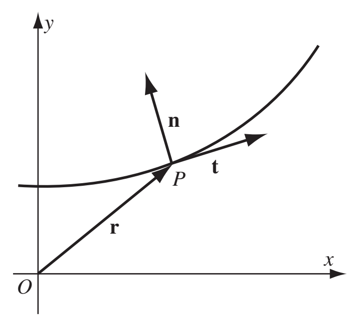


Fig. 39.7

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Compruebe que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

De la figura 39.8, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

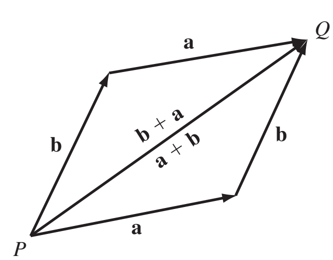


Fig. 39.8

2. Compruebe que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

De la figura 39.9, $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$. También $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

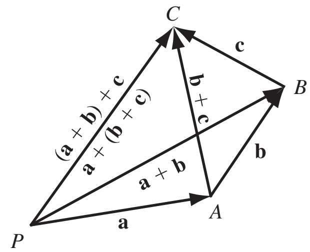


Fig. 39.9

3. Sean **a**, **b** y c tres vectores que comienzan desde P tales que sus puntos finales, A, B y C, quedan en una recta, como se muestra en la figura 39.10. Si C biseca a BA en la razón x:y, donde $x + y = 1$, demuestre que $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$.

Observe que

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

Como ejemplo, si C biseca a BA, entonces $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

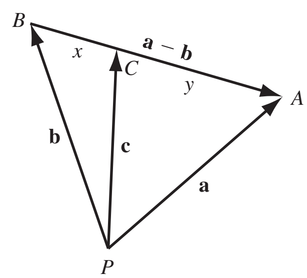


Fig. 39.10

4. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

Sean las diagonales que se intersecan en Q como se muestra en la figura 39.11. Como **PB** = **PQ** + **QB** = **PQ** – **BQ**, hay números positivos x y y tales que $\mathbf{b} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (x - y)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}$. Entonces, $x + y = 1$ y $x - y = 0$. Por tanto, $x = y = \frac{1}{2}$, y Q es el punto medio de cada diagonal.

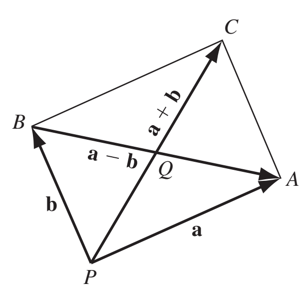


Fig. 39.11

5. Para los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine la magnitud y la dirección de *a*) **a** y **b**; *b*) **a** + **b**; *c*) **b** – **a**.

a) Para $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\tan\theta = a_2/a_1 = \frac{4}{3}$ y $\cos\theta = a_1/|\mathbf{a}| = \frac{3}{5}$; entonces, θ es un ángulo del primer cuadrante y es 53º 8’.

Para $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$: $|\mathbf{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$; θ = 360º – 26º 34’ = 333º 26’.

b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Entonces, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. Como $\tan\theta = \frac{3}{5}$ y $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\theta = 30º\ 58'$.

c) $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. Entonces, $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{26}$. Como $\tan\,\theta = 5$ y $\cos\theta = -1/\sqrt{26}$, $\theta = 258º\ 41'$.

6. Demuestre que la mediana a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a la base (fig. 39–12, donde $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$).

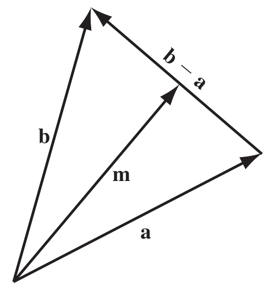


Fig. 39.12

Del problema 3, como **m** biseca la base, $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Entonces,

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0$$

Por tanto, la mediana es perpendicular a la base.

7. Si **b** es un vector no cero, descompón un vector **a** en componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, paralelo y perpendicular, respectivamente, a **b**.

En la figura 39.13 se tiene que $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = 0$. Por tanto, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - c\mathbf{b}$. Además, $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} - c\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} - c|\mathbf{b}|^2 = 0$, donde $c = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$. Entonces,

$$\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - c\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

El escalar $\mathbf{a} \cdot \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ es la proyección escalar de **a** en **b**. El vector $\left(\mathbf{a} \cdot \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ es la proyección vectorial de **a** en **b**.

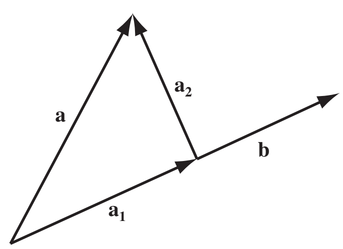


Fig. 39.13

8. Descomponga $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ en las componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, paralela y perpendicular, respectivamente, **a b** $= 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Del problema 7, $c = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \dfrac{12 + 3}{10} = \dfrac{3}{2}$. Entonces,

$$\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = \tfrac{9}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3}{2}\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3}{2}\mathbf{j}$$

9. Si $\mathbf{a} = f_1(u)\mathbf{i} + f_2(u)\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = g_1(u)\mathbf{i} + g_2(u)\mathbf{j}$, muestre que $\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}$.

Por la propiedad 39.12, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (f_1(u)\mathbf{i} + f_2(u)\mathbf{j})\times(g_1(u)\mathbf{i} + g_2(u)\mathbf{j}) = f_1g_1 + f_2g_2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \frac{df_1}{du}g_1 + f_1\frac{dg_1}{du} + \frac{df_2}{du}g_2 + f_2\frac{dg_2}{du}\\ &= \left(\frac{df_1}{du}g_1 + \frac{df_2}{du}g_2\right) + \left(f_1\frac{dg_1}{du} + f_2\frac{dg_2}{du}\right)\\ &= \left(\frac{df_1}{du}\mathbf{i} + \frac{df_2}{du}\mathbf{j}\right)\cdot(g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j}) + (f_1(u)\mathbf{i} + f_2(u)\mathbf{j})\cdot\left(\frac{dg_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dg_2}{du}\mathbf{j}\right)\\ &= \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}\end{aligned}$$

10. Si $\mathbf{a} = f_1(u)\mathbf{i} + f_2(u)\mathbf{j}$ es de magnitud constante diferente de cero, muestra que $\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$ y, por tanto, cuando $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ no es cero, $\mathbf{a}$ y $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ son perpendiculares.

Sea $|\mathbf{a}| = c$. Entonces, $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = c^2$. Por el problema 9,

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 2\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$$

Entonces, $\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$.

11. Dado $\mathbf{r} = (\cos^2\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^2\theta)\mathbf{j}$, para $0 \le \theta \le \pi/2$, halle $\mathbf{t}$.

Puesto que $\frac{d}{d\theta}\cos^2\theta = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}2\theta$ y $\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}^2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$, la ecuación (39.5) da

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = -(\operatorname{sen}2\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}2\theta)\mathbf{j}$$

En consecuencia, por la ecuación (39.6)

$$\frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \sqrt{2}\operatorname{sen}2\theta$$

por la propiedad 39.12. Entonces,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

12. Dado $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, halle $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ cuando $\theta = \pi/4$.

Se tiene que $\mathbf{r} = a(\cos^3\theta)\mathbf{i} + a(\operatorname{sen}^3\theta)\mathbf{j}$. Entonces,

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = -3a(\cos^2\theta)(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + 3a(\operatorname{sen}^2\theta)(\cos\theta)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = 3a\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Por tanto,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = ((\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j})\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{1}{3a\cos\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{3a\operatorname{sen}\theta}\mathbf{j}$$

En $\theta = \pi/4$,

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{j},\ |K| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{2}{3a} \quad \text{y} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

13. Demuestre que el vector $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos sobre la recta. Entonces, $ax_1 + by_1 + c = 0$ y $ax_2 + by_2 + c = 0$. Al restar la primera y la segunda se obtiene

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \tag{1}$$

Ahora

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \times [(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}]$$

$$= \mathbf{a} \times \mathbf{P_1P_2}$$

Por (1), el lado izquierdo es cero. Entonces, **a** es perpendicular (normal) a la recta.

14. Use métodos vectoriales para hallar:

a) La ecuación de la recta que pasa por $P_1(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $x + 2y + 5 = 0$.

b) La ecuación de la recta que pasa por $P_1(2, 3)$ y $P_2(5, -1)$.

Tome $P(x, y)$ como otro punto en la recta requerida.

a) Por el problema 13, el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ es normal a la recta $x + 2y + 5 = 0$. Entonces $\mathbf{P_1P} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ es paralela a **a** si $(x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} = k(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ para algún k escalar. Al igualar los componentes se obtiene $x - 2 = k$ y $y - 3 = 2k$. Si se elimina k, se tiene la ecuación requerida $y - 3 = 2(x - 2)$, o el equivalente, $2x - y - 1 = 0$.

b) Se tiene $\mathbf{P_1P} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ y $\mathbf{P_1P_2} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Ahora a $= 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ es perpendicular a $\mathbf{P_1P_2}$ y, por tanto, a $\mathbf{P_1P}$ Entonces, $0 = \mathbf{a} \times \mathbf{P_1P} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times [(x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}]$ y, de forma equivalente, $4x + 3y - 17 = 0$.

15. Emplee métodos vectoriales para hallar la distancia del punto $P_1(2, 3)$ desde la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

En un punto conveniente sobre la recta, como $A(4, 0)$, se construye el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ perpendicular a la recta. La distancia requerida es $d = |\mathbf{AP_1}| \cos\theta$ en la figura 39.14. Ahora $\mathbf{a} \times \mathbf{AP_1} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{AP_1}| \cos\theta = |\mathbf{a}|d$. Por tanto,

$$d = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{AP_1}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

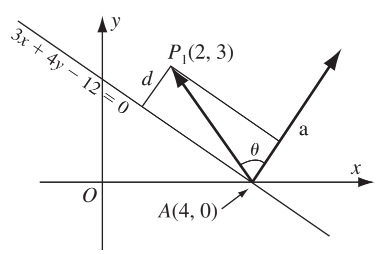


Fig. 39.14

16. El *trabajo* realizado por una fuerza expresada como vector **b** al mover un objeto a lo largo del vector a se define como el producto de magnitud **b** en la dirección de a y la distancia que se desplazó el objeto. Halle el trabajo realizado al mover un objeto a lo largo del vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ si la fuerza aplicada es $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

El trabajo realizado es

(magnitud de **b** en la dirección de **a**) × (distancia movida) $= (|\mathbf{b}|\cos\theta)\,|\mathbf{a}| = \mathbf{b} \times \mathbf{a} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 10$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

17. Dados los vectores **a**, **b** y **c** de la figura 39.15, construya: *a*) 2**a**; *b*) –3**b**; *c*) **a** + 2**b**; *d*) **a** + **b** – c; *e*) **a** – 2**b** + 3**c**.

18. Demuestre que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela a la del tercer lado y equivale a la mitad de su longitud (fig. 39.16).

19. Si **a, b, c, d** son lados consecutivos de un cuadrilátero (fig. 39.17), pruebe que **a** + **b** + **c** + **d** = 0 (*Sugerencia:* sean *P* y *Q* dos vértices no consecutivos.) Exprese **PQ** de dos formas.

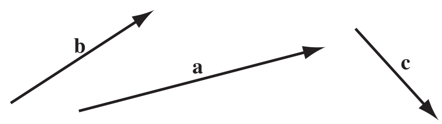


Fig. 39.15

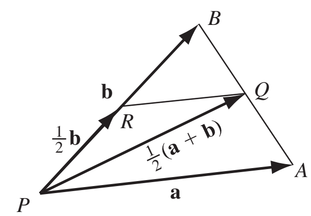


Fig. 39.16

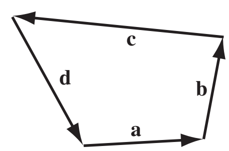


Fig. 39.17

20. Demuestre que si se unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero cualquiera, el cuadrilátero resultante es un paralelogramo (fig. 39.18).

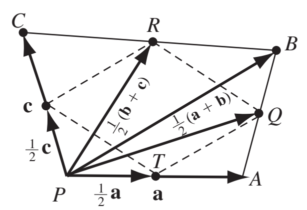


Fig. 39.18

21. Use la figura 39.19, donde |**a**| = |**b**| es el radio de un círculo y pruebe que el ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

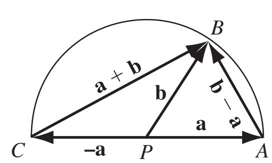


Fig. 39.19

22. Halle la longitud de cada uno de los vectores siguientes y el ángulo que forman con el eje *x* positivo: *a*) **i** + **j**; *b*) –**i** + **j**; *c*) $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$; *d*) $\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$

Respuestas: a) $\sqrt{2},\ \theta = \frac{1}{4}\pi$; *b*) $\sqrt{2},\ \theta = \frac{3\pi}{4}$; *c*) 2, $\theta = \frac{\pi}{3}$; *d*) 2, $\theta = \frac{5\pi}{3}$

23. Demuestre que si se obtiene **u** al girar el vector unitario **i** en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno del origen hasta el ángulo θ, entonces **u** = **i** cos θ + **j** sen θ.

24. Aplique la ley de los cosenos en triángulos para obtener $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2)$.

25. Escriba cada uno de los vectores siguientes en la forma a**i** + b**j**:

a) El vector que une el origen con $P(2, -3)$.
b) El vector que une $P_1(2, 3)$ a $P_2(4, 2)$.
c) El vector que une $P_2(4, 2)$ a $P_1(2, 3)$.
d) El vector unitario en la dirección de 3**i** + 4**j**.
e) El vector con magnitud 6 y dirección 120º.

Respuestas: *a*) 2**i** – 3**j**; *b*) 2**i** – **j**; *c*) –2**i** + **j**; *d*) $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$; *e*) $-3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j}$

26. Aplique métodos vectoriales para deducir la fórmula de la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

27. Dados $O(0, 0)$, $A(3, 1)$ y $B(1, 5)$ como vértices del paralelogramo $OAPB$, halle las coordenadas de P.

Respuesta: (4, 6)

28. *a*) Determine k de forma que **a** = 3**i** + 2**j** y **b** = **i** + k**j** sean perpendiculares. *b*) Escriba un vector perpendicular a **a** = 2**i** + 5**j**.

29. Demuestre las propiedades (39.8) a (39.15).

30. Determine la proyección vectorial y la proyección escalar de **b** en **a**, dado: *a*) **a** = **i** – 2**j** y **b** = –3**i** + **j**; *b*) **a** = 2**i** + 3**j** y **b** = 10**i** + 2**j**.

Respuestas: *a*) –**i** + 2**j**, $-\sqrt{5}$; *b*) 4**i** + 6**j**, $2\sqrt{13}$

31. Demuestre que tres vectores **a, b, c,** después de desplazamientos paralelos, formarán un triángulo siempre que: *a*) uno de ellos sea la suma de los otros dos, o *b*) **a** + **b** + **c** = **0**.

32. Pruebe que **a** = 3**i** – 6**j**, **b** = 4**i** + 2**j** y **c** = –7**i** + 4**j** son los lados de un triángulo rectángulo. Compruebe que: el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.

33. Halle el vector unitario tangente t = dr/ds, dado: *a*) **r** = 4**i** cos θ + 4**j** sen θ ; *b*) **r** = e^{θ}**i** + $e^{-\theta}$**j**; *c*) **r** = θ**i** + θ²**j**.

Respuestas: *a*) –**i** sen θ + **j** cos θ; *b*) $\dfrac{e^{\theta}\mathbf{i} - e^{-\theta}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}}$; *c*) $\dfrac{\mathbf{i} + 2\theta\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}$

34. *a*) Determine **n** para la curva del problema 33*a*); *b*) calcule **n** para la curva del problema 33*c*); *c*) encuentre **t** y **n** dadas x = cos θ + θ sen θ y y = sen θ – θ cos θ.

Respuestas: *a*) = **i** cos θ – **j** sen θ; *b*) $\dfrac{-2\theta}{\sqrt{1+4\theta^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1+4\theta^2}}\mathbf{j}$; *c*) **t** = **i** cos θ + **j** sen θ, **n** = –**i** sen θ + **j** cos θ

40

Movimiento curvilíneo

Velocidad en el movimiento curvilíneo

Considere un punto $P(x, y)$ que se mueve a lo largo de una curva con las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde t es el tiempo. Al derivar el vector de posición se obtiene

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{40.1}$$

respecto a *t,* se obtiene el *vector velocidad*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \tag{40.2}$$

donde $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ y $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

La magnitud de **v** se denomina *rapidez* y está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$

La dirección de **v** en P está en la tangente a la curva en P, como se muestra en la figura 40.1. Si τ representa la dirección de **v** (el ángulo entre **v** y el eje x positivo), entonces tan $\tau = v_y/v_x$, y el cuadrante es determinado por $v_x = |\mathbf{v}| \cos \tau$ y $v_y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen} \tau$.

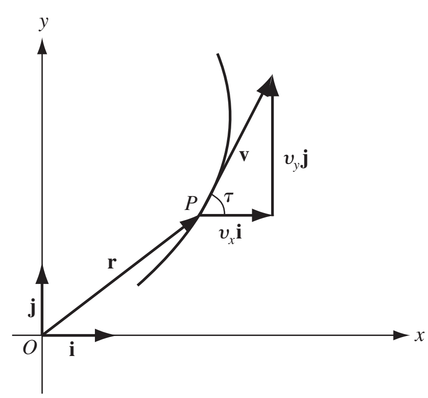


Fig. 40.1

Aceleración en el movimiento curvilíneo

Al derivar (40.2) respecto a t se obtiene el *vector de aceleración*:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \tag{40.3}$$

donde $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ y $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}$. La magnitud de **a** se obtiene con

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

La dirección ϕ de **a** está dada por tan $\phi = a_y/a_x$, y el cuadrante es determinado por $a_x = |\mathbf{a}| \cos \phi$ y $a_y = |\mathbf{a}| \text{ sen } \phi$ (fig. 40.2).

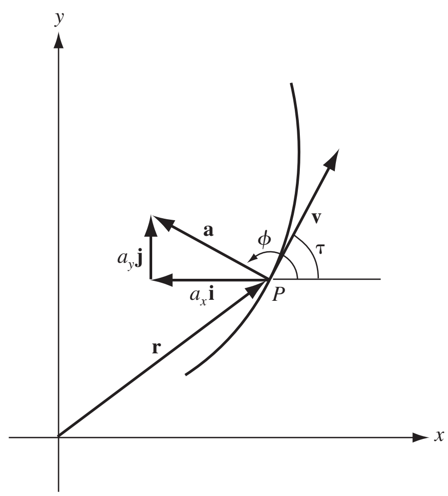


Fig. 40.2

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Por la ecuación (39.7),

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{ds}{dt} \tag{40.4}$$

Entonces,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$= \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + |K|\,\mathbf{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{40.5}$$

por (39.8).

La ecuación (40.5) descompone el vector aceleración en P a lo largo de los vectores tangente y normal. Las componentes se llaman a_1 y a_n, respectivamente, y para sus magnitudes se tiene que

$$|a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| \quad \text{y} \quad |a_n| = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}$$

donde R es el radio de curvatura de la curva P (fig. 40.3).

En virtud de que $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$, se obtiene

$$a_n^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_t^2$$

como segunda forma de determinar $|a_n|$.

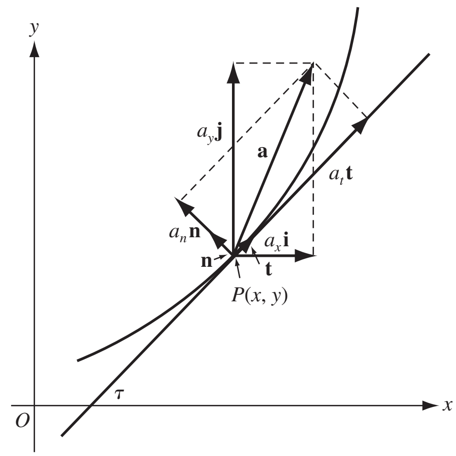


Fig. 40.3

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Analice el movimiento descrito por las ecuaciones $x = \cos 2\pi t$, $y = 3 \operatorname{sen} 2\pi t$. Determine la magnitud y la dirección de los vectores de velocidad y aceleración cuando *a*) $t = \frac{1}{6}$; *b*) $t = \frac{2}{3}$.

El movimiento es a lo largo de la elipse $9x^2 + y^2 = 9$. Comenzando (en $t = 0$) en (1, 0), el punto en movimiento recorre la curva en sentido contrario al de las manecillas del reloj:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (\cos 2\pi t)\mathbf{i} + (3\operatorname{sen} 2\pi t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = -(2\pi \operatorname{sen} 2\pi t)\mathbf{i} + (6\pi \cos 2\pi t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = -(4\pi^2 \cos 2\pi t)\mathbf{i} - (12\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi t)\mathbf{j}$$

a) En $t = \frac{1}{6}$:

$$\mathbf{v} = -\sqrt{3}\pi\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = -2\pi^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\pi^2\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{(-\sqrt{3}\pi)^2 + (3\pi)^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tan\tau = \frac{v_y}{v_x} = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} = -\frac{1}{2}$$

Luego, $\tau = 120º$.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(-2\pi^2)^2 + (-6\sqrt{3}\pi^2)^2} = 4\sqrt{7}\pi^2$$

$$\tan\varphi = \frac{a_y}{a_x} = 3\sqrt{3}, \quad \cos\varphi = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Entonces, $\phi = 259º\ 6'$.

b) En $t = \frac{2}{3}$:

$$\mathbf{v} = \sqrt{3}\pi\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = 2\pi^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\pi^2\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\pi, \quad \tan\tau = -\sqrt{3} \cos\tau = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto, $\tau = \frac{5\pi}{3}$.

$$|\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\pi^2, \quad \tan\varphi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

Entonces, $\phi = 79° 6'$.

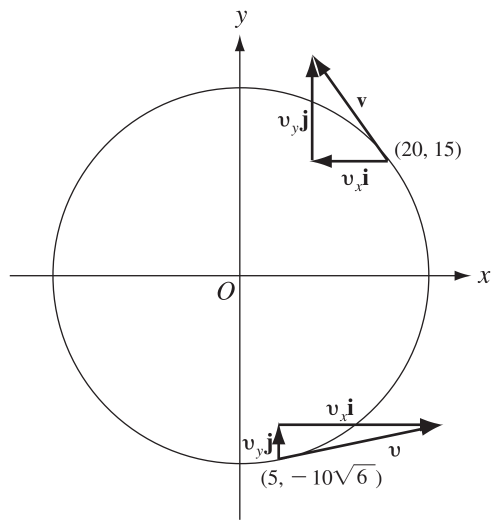


Fig. 40.4

2. Un punto recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj el círculo $x^2 + y^2 = 625$ a velocidad $|\mathbf{v}| = 15$. Halle τ, $|\mathbf{a}|$, y ϕ en: *a*) el punto (20, 15) y *b*) el punto $(5, -10\sqrt{6})$. Apoye su labor en la figura 40.4.

Al utilizar las ecuaciones paramétricas $x = 25 \cos \theta$ y $y = 25 \operatorname{sen} \theta$ se tiene que en $P(x, y)$:

$$\mathbf{r} = (25 \cos \theta)\mathbf{i} + (25 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [(-25 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (25 \cos \theta)\mathbf{j}]\frac{d\theta}{dt}$$

$$= (-15 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + 15 \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = [(-15 \cos \theta)\mathbf{i} - (15 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}]\frac{d\theta}{dt}$$

$$= (-9 \cos \theta)\mathbf{i} - (9 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$$

ya que $|\mathbf{v}| = 15$ equivale a una rapidez angular constante de $\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{5}$.

a) En el punto (20, 15), $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$ y $\cos \theta = \frac{4}{5}$. Así,

$$\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}, \quad \tan \tau = -\tfrac{4}{3}, \quad \cos \tau = -\tfrac{3}{5}. \quad \text{Entonces} \quad \tau = 126° \ 52'$$

$$\mathbf{a} = -\tfrac{36}{5}\mathbf{i} - \tfrac{27}{3}\mathbf{j}, \quad |\mathbf{a}| = 9, \quad \tan \varphi = \tfrac{3}{4}, \quad \cos \varphi = \ \tfrac{4}{5}. \quad \text{Entonces} \quad \varphi = 216° \ 52'$$

b) En el punto $(5, -10\sqrt{6})$, $\operatorname{sen} \theta = -\frac{2}{5}\sqrt{6}$ y $\cos \theta = \frac{1}{5}$. Luego,

$$\mathbf{v} = 6\sqrt{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \tan \tau = \sqrt{6}/12, \quad \cos \tau = \tfrac{2}{5}\sqrt{6}. \quad \text{Entonces} \quad \tau = \ 11° \ 32'$$

$$\mathbf{a} = -\tfrac{9}{5}\mathbf{i} + \tfrac{18}{5}\sqrt{6}\mathbf{j}, \quad |\mathbf{a}| = 9, \quad \tan \varphi = -2\sqrt{6}, \quad \cos \varphi = -\tfrac{1}{5}. \quad \text{Entonces} \ \varphi = 101° \ 32'$$

3. Una partícula se mueve sobre el arco del primer cuadrante de $x^2 = 8y$ de manera que $\upsilon_y = 2$. Halle $|\mathbf{v}|$, τ, $|\mathbf{a}|$ y ϕ en el punto (4, 2).

Al utilizar las ecuaciones paramétricas $x = 4\theta$, $y = 2\theta^2$, se tiene que

$$\mathbf{r} = 4\theta\mathbf{i} + 2\theta^2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 4\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i} + 4\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}$$

Como $v_y = 4\theta\frac{d\theta}{dt} = 2$ y $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\theta}$ se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{2}{\theta}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = -\frac{1}{\theta^3}\mathbf{i}$$

En el punto (4, 2), $\theta = 1$. Entonces,

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}, \quad \tan\tau = 1, \quad \cos\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \quad \text{Por tanto,} \ \ \tau = \tfrac{1}{4}\pi$$

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i}, \quad |\mathbf{a}| = 1, \quad \tan\varphi = 0, \quad \cos\varphi = -1. \quad \text{Por ende} \quad \varphi = \pi$$

4. Determine las magnitudes de las componentes tangencial y normal de aceleración para el movimiento $x = e^t \cos t$ y $y = e^t \operatorname{sen} t$ en cualquier instante t.

Se tiene:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -2e^t(\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + 2e^t(\cos t)\mathbf{j}$$

Entonces, $|\mathbf{a}| = 2e^t$. También, $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{2}e^t$ y $|a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| = \sqrt{2}e^t$. Finalmente,

$$|a_n| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{2}e^t$$

5. Una partícula se desplaza de izquierda a derecha a lo largo de la parábola $y = x^2$ con rapidez constante 5. Determine la magnitud de las componentes tangencial y normal de la aceleración en (1, 1).

Como la rapidez es constante $|a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| = 0$. En (1, 1), $y' = 2x = 2$ y $y'' = 2$. El radio de curvatura en (1, 1) es, entonces, $R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Por tanto, $|a_n| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} = 2\sqrt{5}$.

6. La fuerza centrífuga F (en libras) ejercida por una partícula en movimiento de peso W (en libras) en un punto de su trayectoria está dada por la ecuación $F = \frac{W}{g}|a_n|$. Halle la fuerza centrífuga ejercida por una partícula que pesa 5 libras en los extremos de los ejes mayor y menor cuando realiza la trayectoria elíptica $x = 20 \cos t$, $y = 15 \operatorname{sen} t$, con medidas en pies y segundos. Sea $g = 32$ pies/s^2.

En este caso se tiene:

$$\mathbf{r} = (20 \cos t)\mathbf{i} + (15 \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = (-20 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (15 \cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -20(\cos t)\mathbf{i} - 15(\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

Entonces,

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{400 \operatorname{sen}^2 t + 225 \cos^2 t} \quad \text{y} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175 \operatorname{sen} t \cos t}{\sqrt{400 \operatorname{sen}^2 t + 225 \cos^2 t}}$$

En los extremos del eje mayor ($t = 0$ o $t = \pi$):

$$|\mathbf{a}| = 20, \quad |a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| = 0, \quad |a_n| = \sqrt{20^2 - 0^2} = 20 \quad \text{y} \quad F = \tfrac{5}{32}(20) = \tfrac{25}{8} \text{ libras}$$

En los extremos del eje menor $\left(t = \frac{\pi}{2} \text{ o } t = \frac{3\pi}{2}\right)$:

$$|\mathbf{a}| = 15, \quad |a_t| = 0, \quad |a_n| = 15 \quad \text{y} \quad F = \tfrac{5}{32}(15) = \tfrac{75}{32} \text{ libras}$$

7. Sean las ecuaciones del movimiento de un proyectil $x = v_0 t \cos \psi$, $y = v_0 t \operatorname{sen} \psi - \frac{1}{2} g t^2$, donde v_0 es la velocidad inicial, ψ es el ángulo de proyección, g = 32 pies/s^2, y x y y están medidos en pies y t en segundos. Determine *a*) la ecuación de movimiento en coordenadas rectangulares; *b*) el rango; *c*) el ángulo de proyección para el rango máximo, y *d*) la rapidez y la dirección del proyectil después de 5 segundos de vuelo si v_0 = 500 pies/s y ψ = 45º (fig. 40.5).

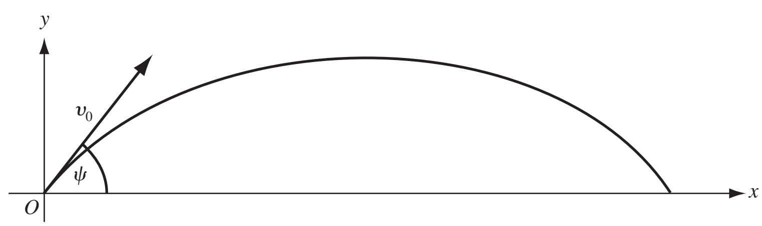


Fig. 40.5

a) Se despeja en la primera ecuación $t = \dfrac{x}{v_0 \cos \psi}$ y se sustituye en la segunda:

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \psi} \operatorname{sen} \psi - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \psi} \right)^2 = x \tan \psi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \psi}$$

b) Se despeja t en $y = v_0 t \operatorname{sen} \psi - \frac{1}{2} g t^2 = 0$ y se tiene $t = 0$ y $t = (2v_0 \operatorname{sen} \psi)/g$. Para la última, se obtiene

$$\text{Rango} = x = v_0 \cos \psi \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \psi}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\psi}{g}$$

c) Para que x sea un máximo, $\dfrac{dx}{d\psi} = \dfrac{2 v_0^2 \cos 2\psi}{g} = 0$; por tanto, $\cos 2\psi = 0$ y $\psi = \frac{1}{4}\pi$.

d) Para $v_0 = 500$ y $\psi = \frac{1}{4}\pi$, $x = 250\sqrt{2}t$ y $y = 250\sqrt{2}t - 16t^2$. Entonces,

$$v_x = 250\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad v_y = 250\sqrt{2} - 32t$$

Cuando $t = 5$, $v_x = 250\sqrt{2}$ y $v_y = 250\sqrt{2} - 160$. Luego,

$$\tan \tau = \frac{v_y}{v_x} = 0.5475 \text{. Entonces, } \tau = 28º\ 42' \text{ y } |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 403 \text{ pies/s}$$

8. Un punto P se mueve en un círculo $x = r \cos \beta$, $y = r \operatorname{sen} \beta$, con rapidez constante v. Demuestre que si el radio vector de P se mueve con velocidad angular ω y aceleración angular α, *a*) $v = r\omega$, y *b*) $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

a) $v_x = -r \operatorname{sen} \beta \dfrac{d\beta}{dt} = -r\omega \operatorname{sen} \beta$ y $v_y = r \cos \beta \dfrac{d\beta}{dt} = r\omega \cos \beta$

Entonces, $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2 \operatorname{sen}^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta)\omega^2} = r\omega$$

b) $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega \cos \beta \frac{d\beta}{dt} - r \operatorname{sen} \beta \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \cos \beta - r\alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega \operatorname{sen} \beta \frac{d\beta}{dt} + r \cos \beta \frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \operatorname{sen} \beta + r\alpha \cos \beta$$

Luego, $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2(\omega^4 + a^2)} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Determine la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración en el instante t, dados:

a) $x = e^t$, $y = e^{2t} - 4e^t + 3$; en $t = 0$ *Respuesta:* *a)* $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$, $\tau = 296^\circ\, 34'$; $|\mathbf{a}| = 1$, $\phi = 0$

b) $x = 2 - t$, $y = 2t^3 - t$; en $t = 1$ *Respuesta:* *b)* $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$, $\tau = 101^\circ\, 19'$; $|\mathbf{a}| = 12$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

c) $x = \cos 3t$, $y = \operatorname{sen} t$; en $t = \frac{1}{4}\pi$ *Respuesta:* *c)* $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$, $\tau = 161^\circ\, 34'$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{41}$, $\phi = 353^\circ\, 40'$

d) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$; en $t = 0$ *Respuesta:* *d)* $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, $\tau = \frac{1}{4}\pi$; $|\mathbf{a}| = 2$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

10. Una partícula se mueve sobre el arco del primer cuadrante de la parábola $y^2 = 12x$ con $v_x = 15$. Halle v_y, $|\mathbf{v}|$ y τ, y a_x, a_y, $|\mathbf{a}|$, y ϕ en (3, 6).

Respuesta: $v_y = 15$, $|\mathbf{v}| = 15\sqrt{2}$, $\tau = \frac{1}{4}\pi$; $a_x = 0$, $a_y = -75/2$, $|\mathbf{a}| = 75/2$, $\phi = 3\pi/2$

11. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = x^3/3$ con $v_x = 2$ en todo momento. Halle la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración cuando $x = 3$.

Respuesta: $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{82}$, $\tau = 83^\circ\, 40'$; $|\mathbf{a}| = 24$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

12. Una partícula se mueve alrededor de un círculo de 6 pies de radio a una rapidez constante de 4 pies/s. Determine la magnitud de su aceleración en cualquier posición.

Respuesta: $|a_t| = 0$, $|\mathbf{a}| = |a_n| = 8/3$ pies/s^2

13. Determine la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración, así como las magnitudes de las componentes tangencial y normal de aceleración en el instante t, para el movimiento:

a) $x = 3t$, $y = 9t - 3t^2$; en $t = 2$

b) $x = \cos t + t \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} t - t \cos t$; en $t = 1$

Respuestas: *a)* $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$, $\tau = 7\pi/4$; $|\mathbf{a}| = 6$, $\phi = 3\pi/2$; $|a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$;

b) $|\mathbf{v}| = 1$, $\tau = 1$; $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $\phi = 102^\circ 18'$; $|a_t| = |a_n| = 1$

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$ de manera que $x = \frac{1}{2}t^2$, para $t > 0$. Halle v_x, v_y, $|\mathbf{v}|$ y τ, a_x, a_y, $|\mathbf{a}|$ y ϕ; $|a_t|$ y $|a_n|$ cuando $t = 1$.

Respuesta: $v_x = 1$, $v_y = 0$, $|\mathbf{v}| = 1$, $\tau = 0$; $a_x = 1$, $a_y = 2$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$, $\phi = 63^\circ 26'$; $|a_t| = 1$, $|a_n| = 2$

15. Una partícula se mueve a lo largo de $y = 2x - x^2$ con $v_x = 4$ en todo momento. Calcule las magnitudes de las componentes tangencial y normal de aceleración en la posición *a)* (1, 1) y *b)* (2, 0).

Respuestas: *a)* $|a_t| = 0$, $|a_n| = 32$; *b)* $|a_t| = 64/\sqrt{5}$, $|a_n| = 32\sqrt{5}$

16. Si una partícula se mueve en un círculo de acuerdo con las ecuaciones $x = r \cos \omega r$, $y = r \operatorname{sen} \omega r$, demuestre que su rapidez es ωr.

17. Demuestre que si una partícula se mueve con rapidez constante, entonces sus vectores velocidad y aceleración son perpendiculares y recíprocamente pruebe que si sus vectores velocidad y aceleración son perpendiculares, entonces su rapidez es constante.

41

Coordenadas polares

La posición de un punto P en un plano puede describirse por sus coordenadas (x, y) respecto de un sistema de coordenadas rectangulares. Su posición también puede determinarse al seleccionar un punto fijo O, especificando la distancia dirigida $\rho = OP$ y el ángulo θ que forma OP con una semirrecta fija OX (fig. 41.1). Éste es el *sistema de coordenadas polares*. El punto O se denomina *polo* y OX, *eje polar*.

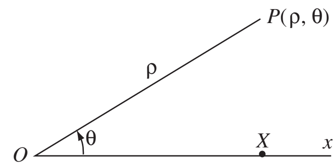


Fig. 41.1

A cada par de números (ρ, θ) le corresponde un punto único. Lo contrario no es cierto. Por ejemplo, $(1, 0)$ y $(1, 2\pi)$ describe el mismo punto en el eje polar y a una distancia 1 del polo. Ese mismo punto también corresponde a $(-1, \pi)$. [Cuando ρ es negativo, el punto correspondiente a (ρ, θ) se obtiene de esta forma: el eje polar OX se gira θ radianes (en sentido contrario al de las manecillas del reloj si θ es positivo, y en el sentido de las manecillas si θ es negativo) hasta una nueva posición OX' y luego se mueve $|\rho|$ unidades en la semirrecta opuesta a OX'.]

En general, un punto P con coordenadas polares (ρ, θ) también puede describirse por $(\rho, \theta \pm 2n\pi)$ y $(-\rho, \theta \pm (2n+1)\pi)$, donde n es cualquier entero no negativo. Además, el polo mismo corresponde a $(0, \theta)$, con θ arbitrario.

EJEMPLO 41.1. En la figura 41.2 se muestran varios puntos y sus coordenadas polares. Observe que las coordenadas polares del punto C son $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Una *ecuación polar* de la forma $\rho = f(\theta)$ o $F(\rho, \theta) = 0$ determina una curva, que consta de todos los puntos que corresponden a los pares (ρ, θ) que satisfacen la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $\rho = 2$ determina el círculo con centro en el polo y radio 2. La ecuación $\rho = -2$ determina el mismo conjunto de puntos. En general,

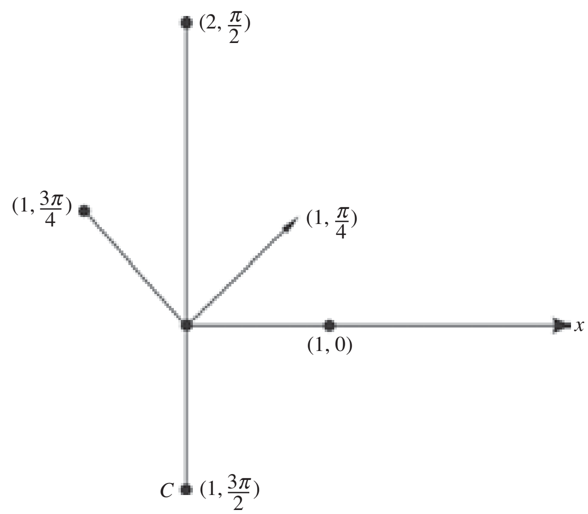


Fig. 41.2

una ecuación $\rho = c$, donde c es una constante, determina el círculo con centro en el polo y radio $|c|$. Una ecuación $\theta = c$ designa la recta que pasa por el polo y que se obtiene al girar el eje polar c radianes. Por ejemplo, $\theta = \pi/2$ es la recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar.

Coordenadas polares y rectangulares

Dados el polo y el eje polar, se establece un sistema de coordenadas rectangulares donde el eje polar es el eje x positivo y el eje y es perpendicular al eje x en el polo (fig. 41.3). Así, el polo se halla en el origen del sistema rectangular. Si un punto P tiene coordenadas rectangulares (x, y) y coordenadas polares (ρ, θ), entonces,

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{y} \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \tag{41.1}$$

Estas ecuaciones implican

$$\rho = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \tag{41.2}$$

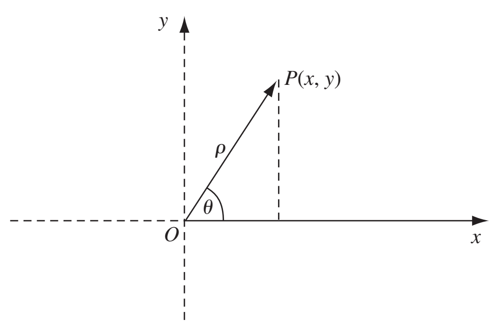


Fig. 41.3

EJEMPLO 41.2. Considérese la curva polar $\rho = \cos \theta$. Al multiplicar por ρ se obtiene $\rho^2 = \rho \cos \theta$. Por tanto, $x^2 + y^2 = x$ se cumple para las coordenadas rectangulares de los puntos sobre la curva. Ello equivale a $x^2 - x + y^2 = 0$, y al completar el cuadrado respecto a x se obtiene $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Por consiguiente, la curva es el círculo con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$ y radio $\frac{1}{2}$. Nótese que cuando θ varía de 0 a $\pi/2$, el semicírculo superior se traza de $(1, 0)$ a $(0, 0)$, y luego cuando θ varía de $\frac{\pi}{2}$ a π el semicírculo inferior se dibuja de $(0, 0)$ de vuelta a $(1, 0)$. Todo este trayecto se traza una vez más cuando θ varía de π a 2π. Como $\cos \theta$ tiene un periodo de 2π, se ha descrito completamente la curva.

EJEMPLO 41.3. Considérese la parábola $y = x^2$. En coordenadas polares, se obtiene $\rho \operatorname{sen} \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$ y, por consiguiente, $\rho = \tan \theta \sec \theta$, que es una ecuación polar de la parábola.

Algunas curvas polares típicas

a) Cardioide: $\rho = 1 + \operatorname{sen} \theta$ (fig. 41.4*a*).
b) Caracol: $\rho = 1 + 2 \cos \theta$ (fig. 41.4 *b*).
c) Rosa con tres pétalos: $\rho = \cos 3\theta$ (fig. 41.4*c*).
d) Lemniscata: $\rho^2 = \cos 2\theta$ (fig. 41.4*d*).

En un punto P sobre una curva polar, el ángulo ψ que va del radio vector OP a la tangente PT a la curva (fig. 41.5) se calcula con la fórmula:

$$\tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \text{donde} \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta} \tag{41.3}$$

Para ver una demostración de esta fórmula, véase el problema 1. La tangente ψ es muy importante en las coordenadas polares, similar a la de la pendiente de la tangente en las coordenadas rectangulares.

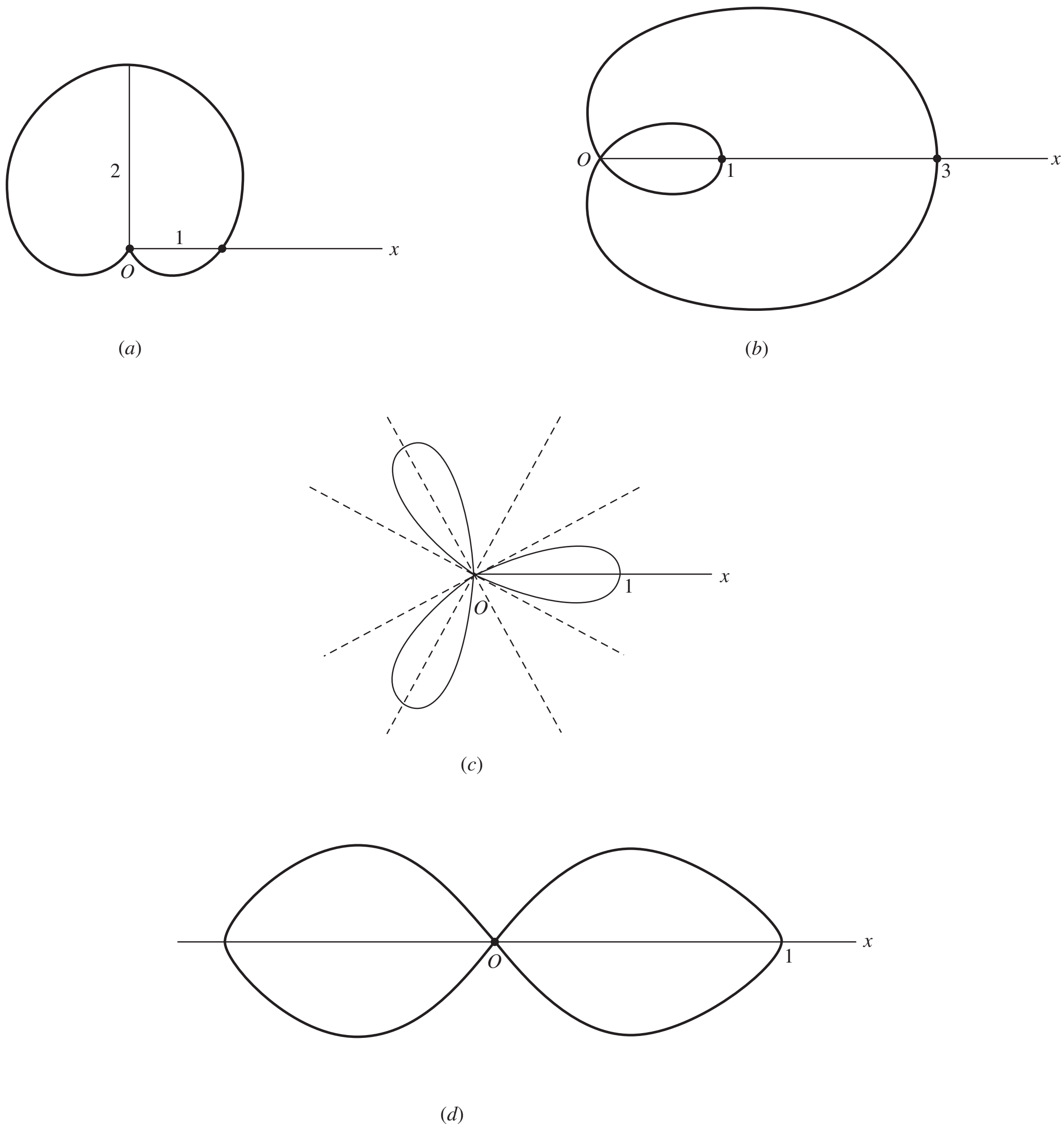


Fig. 41.4

Ángulo de inclinación

El ángulo de inclinación τ de la tangente a una curva en un punto $P(\rho,\ \theta)$ de ésta se encuentra dado por:

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta} \tag{41.4}$$

Para leer una demostración de esta ecuación véase el problema 4.

Puntos de intersección

Algunos o todos los puntos de intersección de dos curvas polares $\rho = f_1(\theta)$ y $\rho = f_2(\theta)$ (o ecuaciones equivalentes) pueden hallarse despejando

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \tag{41.5}$$

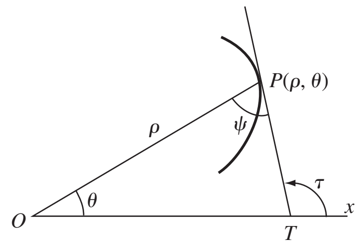


Fig. 41.5

EJEMPLO 41.4. Determine los puntos de intersección de $\rho = 1 + \text{sen}\ \theta$ y $\rho = 5 - 3\ \text{sen}\ \theta$.

Al hacer $1 + \text{sen}\ \theta = 5 - 3\ \text{sen}\ \theta$ se obtiene $\text{sen}\ \theta = 1$. Entonces, $\rho = 2$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. El único punto de intersección es $\frac{2\pi}{2}$. Nótese que no es necesario indicar el número infinito de los otros pares que designan el mismo punto.

Como un punto puede representarse por más de un par de coordenadas polares, la intersección de dos curvas puede contener puntos para los cuales ningún par de coordenadas polares satisfaga (41.5).

EJEMPLO 41.5. Determine los puntos de intersección de $\rho = 2\ \text{sen}\ 2\ \theta$ y $\rho = 1$.

La solución de la ecuación $2\ \text{sen}\ 2\theta = 1$ es $\text{sen}\, 2\theta = \frac{1}{2}$ y, por tanto, dentro de $[0, 2\pi)$, $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$. Se han hallado cuatro puntos de intersección: $(1, \frac{\pi}{12})$, $(1, \frac{5\pi}{12})$, $(1, \frac{13\pi}{12})$ y $(1, \frac{17\pi}{12})$. Pero el círculo $\rho = 1$ también puede representarse como $\rho = -1$. Ahora, despejando $2\ \text{sen}\ 2\theta = -1$ se obtiene $\text{sen}\, 2\theta = -\frac{1}{2}$, por lo que $\theta = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$ y $\frac{23\pi}{12}$. Así, se obtienen cuatro puntos más de intersección $(-1, \frac{7\pi}{12})$, $(-1, \frac{11\pi}{12})$, $(-1, \frac{19\pi}{12})$ y $(-1, \frac{23\pi}{12})$.

Cuando el polo es un punto de intersección, puede no aparecer entre las soluciones de (41.5). El polo es un punto de intersección cuando existe θ_1 y θ_2 tal que $f_1(\theta_1) = 0 = f_2(\theta_2)$.

EJEMPLO 41.6. Determine los puntos de intersección de $\rho = \text{sen}\ \theta$ y $\rho = \cos\ \theta$.

De la ecuación $\text{sen}\ \theta = \cos\ \theta$ se obtienen los puntos de intersección $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$. Sin embargo, ambas curvas contienen el polo. En $\rho = \text{sen}\ \theta$, el polo tiene coordenadas (0, 0), mientras que en $\rho = \cos\ \theta$, el polo tiene coordenadas $(0, \frac{\pi}{2})$.

EJEMPLO 41.7. Determine los puntos de intersección de $\rho = \cos 2\theta$ y $\rho = \cos\ \theta$.

De la ecuación $\cos 2\theta = \cos\ \theta$ y observando que $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ se obtiene $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ y, por consiguiente, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$. Así, $\cos\theta = 1$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Luego, $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, lo que resulta en los puntos de intersección (1, 0), $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Pero el polo también es un punto de intersección, que aparece cuando $(0, \frac{\pi}{2})$ en $\rho = \cos 2\theta$ y cuando $(0, \frac{\pi}{4})$ en $\rho = \cos\ \theta$.

Ángulo de intersección

El ángulo de intersección, ϕ, de dos curvas en un punto común $P(\rho, \theta)$ que no sea el polo está dado por

$$\tan\varphi = \frac{\tan\psi_1 - \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2} \tag{41.6}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son los ángulos que van desde el radio vector OP hasta las rectas tangentes respectivas de las curvas en P (fig. 41.6). Esta fórmula proviene de la identidad trigonométrica para $\tan(\psi_1 - \psi_2)$, ya que $\phi = \psi_1 - \psi_2$.

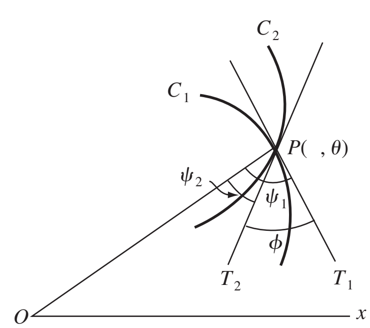


Fig. 41.6

EJEMPLO 41.8. Determine los ángulos (agudos) de intersección de $\rho = \cos 2\theta$ y $\rho = \cos \theta$.

Los puntos de intersección se hallaron en el ejemplo 7. También se necesita tan ψ_1 y tan ψ_2. Para $\rho = \cos \theta$, con la fórmula (41.3) se obtiene tan $\psi_1 = -\cot \theta$. Para $\rho = \cos 2\theta$, la fórmula (41.3) resulta en $\tan \psi_2 = -\frac{1}{2}\cot 2\theta$.

En el punto (1, 0), tan $\psi_1 = -\cot 0 = \infty$ y de igual forma, tan $\psi_2 = \infty$. Entonces $\psi_1 = \psi_2 = \frac{\pi}{2}$ y, por tanto, $\phi = 0$.

En el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\tan\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\tan\psi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. Entonces, por (41.6),

$$\tan\varphi = \frac{(\sqrt{3}/3) + (\sqrt{3}/6)}{1 - (1/6)} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$$

y, por consiguiente, el ángulo agudo de intersección $\phi = 46° \; 6'$. Por simetría, éste también es el ángulo agudo de intersección en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

En el polo, en $\rho = \cos \theta$, el polo está dado por $\theta = \frac{\pi}{2}$. En $\rho = \cos 2\theta$, el polo está dado por $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Así, en el polo hay dos intersecciones y el ángulo agudo es de $\frac{\pi}{4}$ en ambas.

La derivada de la longitud de arco

La derivada de la longitud de arco está dada por

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} \tag{41.7}$$

donde $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ y se entiende que s aumenta con θ. En el problema 20 se presenta la demostración correspondiente.

Curvatura

La curvatura de una curva polar está dada por

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \tag{41.8}$$

En el problema 17 se presenta la demostración respectiva.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deduzca la fórmula (41.3): $\tan\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}$ donde $\rho'\frac{d\rho}{d\theta}$.

En la figura 41.7, $Q(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ es un punto en la curva próximo a P. Con base en el triángulo rectángulo PSQ,

$$\tan\lambda = \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{\rho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho\cos\Delta\theta} = \frac{\rho\operatorname{sen}\Delta\theta}{\rho(1 - \cos\Delta\theta) + \Delta\rho} = \frac{\rho\dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho\dfrac{1 - \cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

Cuando $Q \to P$ a lo largo de la curva, $\Delta\theta \to 0$, $OQ \to OP$, $PQ \to PT$ y $\angle\lambda \to \angle\psi$.

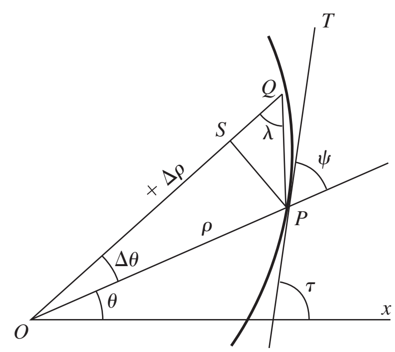


Fig. 41.7

Cuando $\Delta\theta \to 0$, $\frac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$ y $\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 0$. Entonces,

$$\tan\psi = \lim_{\Delta\theta\to 0} \tan\lambda = \frac{\rho}{dp/d\theta} = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$$

En los problemas 2 y 3 use la fórmula (41.3) para determinar tan ψ para la curva dada en el punto indicado.

2. $\rho = 2 + \cos\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$ (fig. 41.8).

En $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\rho = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $\rho' = -\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\tan\psi = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$

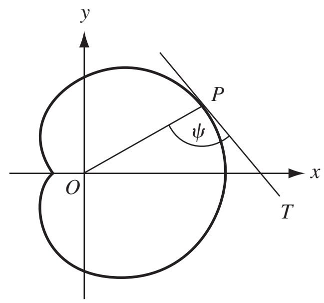


Fig. 41.8

3. $\rho = 2\operatorname{sen} 3\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$ (fig. 41.9).

En $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\rho = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\rho' = 6\cos 3\theta = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\sqrt{2}$ y $\tan\psi = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1}{3}$.

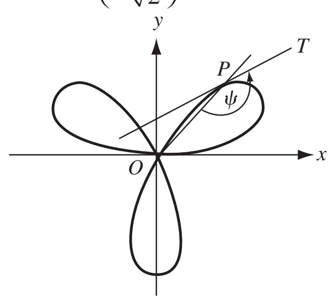


Fig. 41.9

4. Compruebe la fórmula (41.4): $\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}$

De la figura 41.7, $\tau = \psi + \theta$ y

$$\tan\tau = \tan(\psi+\theta) = \frac{\tan\psi + \tan\theta}{1-\tan\psi\tan\theta} = \frac{\rho\frac{d\theta}{d\rho} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1-\rho\frac{d\theta}{d\rho}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\rho\cos\theta + \frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta}$$

5. Demuestre que si $\rho = f(\theta)$ pasa por el polo y θ_1 es tal que $f(\theta_1) = 0$, entonces la dirección de la tangente a la curva en el polo $(0, \theta_1)$ es θ_1 (fig. 41.10).

En $(0, \theta_1)$, $\rho = 0$, y $\rho' = f'(\theta_1)$. Si $\rho' \neq 0$

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta} = \frac{0 + f'(\theta_1)\operatorname{sen}\theta_1}{0 + f'(\theta_1)\cos\theta_1} = \tan\theta_1$$

Si $\rho' = 0$,

$$\tan \tau = \lim_{\theta \to \theta_1} \frac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{f'(\theta)\cos\theta} = \tan\theta_1$$

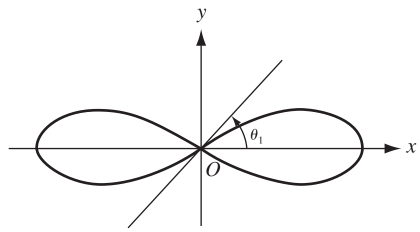


Fig. 41.10

En los problemas 6 a 8, determine la pendiente de la curva indicada en el punto dado.

6. $\rho = 1 - \cos\,\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ (fig. 41.11).

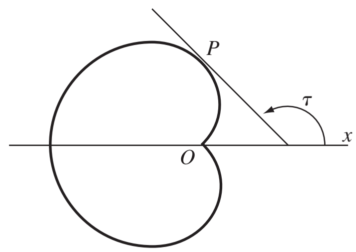


Fig. 41.11

En $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{sen}\,\theta = 1, \quad \cos\,\theta = 0, \quad \rho = 1, \quad \rho' = \operatorname{sen}\,\theta = 1$$

y

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1}{-1\cdot 1 + 1\cdot 0} = -1$$

7. $\rho = \cos\,3\theta$ en el polo (fig. 41.12).
Cuando $\rho = 0$, $\cos\,3\theta = 0$. Entonces $3\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$. Por el problema 5, $\tan\tau = 1/\sqrt{3}$, ∞ y $-1\sqrt{3}$.

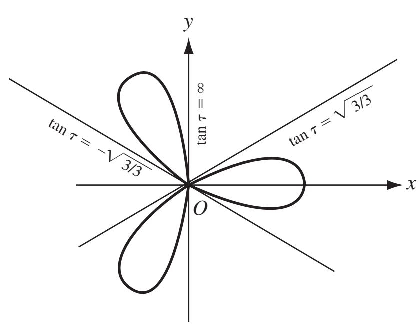


Fig. 41.12

8. $\rho\theta = a$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$.
En $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{3a}{\pi}$ y $\rho = -\frac{a}{\theta^2} = -\frac{9a}{\pi^2}$. Entonces,

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}\theta}{-\rho\operatorname{sen}\theta + \rho'\cos\theta} = -\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3}$$

9. Investigue $\rho = 1 + \text{sen}\ \theta$ para las tangentes horizontales y verticales (fig. 41.13).

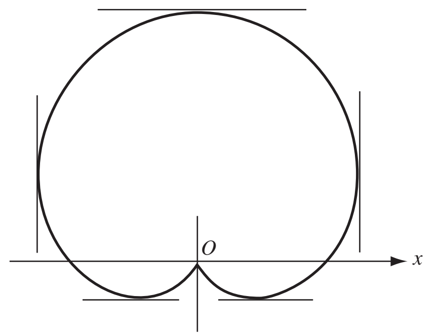


Fig. 41.13

En $P(\rho, \theta)$:

$$\tan\tau = \frac{(1+\text{sen}\,\theta)\cos\theta + \cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{-(1+\text{sen}\,\theta)\text{sen}\,\theta + \cos^2\theta} = -\frac{\cos\theta(1+2\,\text{sen}\,\theta)}{(\text{sen}\,\theta+1)(2\,\text{sen}\,\theta-1)}$$

Se establece $\cos\theta(1 + 2\ \text{sen}\ \theta) = 0$ y al resolver para (despejar) x se obtiene $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$.

También se establece $(\text{sen}\ \theta + 1)(2\ \text{sen}\ \theta - 1) = 0$ y al despejar se obtiene $\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$.

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ existe una tangente horizontal en $(2, \frac{\pi}{2})$.

Para $\theta = \frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$ hay tangentes horizontales en $\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

Para $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ hay tangentes verticales en $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$

Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, por el problema 5, existe una tangente vertical en el polo.

10. Demuestre que el ángulo que forma el radio vector a cualquier punto de la cardioide $\rho = a(1 - \cos\theta)$ con la curva, es la mitad del que forma el radio vector con el eje polar.

En cualquier punto $P(\rho, \theta)$ sobre la cardioide

$$\rho' = a\ \text{sen}\ \theta \quad \text{y} \quad \tan\psi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Entonces, $\psi = \frac{1}{2}\theta$.

En los problemas 11 a 13, determine los ángulos de intersección del par de curvas dadas.

11. $\rho = 3\cos\theta$, $\rho = 1 + \cos\theta$ (fig. 41.14).

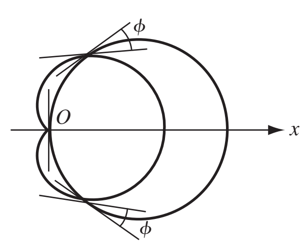


Fig. 41.14

Al despejar $3\cos\theta = 1 + \cos\theta$ para los puntos de intersección se obtiene $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$. Las curvas también se intersecan en el polo.

Para $\rho = 3\cos\theta$: $\quad \rho' = -3\ \text{sen}\ \theta \quad$ y $\quad \tan\psi_1 = -\cot\theta$

Para $\rho = 1 + \cos\theta$: $\quad \rho' = -\text{sen}\ \theta \quad$ y $\quad \tan\psi_2 = -\frac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

En $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\tan\psi_1 = -1\sqrt{3}$, $\tan\psi_2 = -\sqrt{3}$ y $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. El ángulo agudo de intersección en $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ y, por simetría, en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$ es $\frac{\pi}{6}$.

En el polo, un diagrama o el resultado del problema 5 muestra que las curvas son ortogonales.

12. $\rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$, $\rho = 3\csc^2 \frac{1}{2}\theta$.

Al despejar $\sec^2 \frac{1}{2}\theta = 3\,\text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta$ para los puntos de intersección, se obtiene $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ y $\left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$.

Para $\rho = \sec^2 \frac{1}{2}\theta$: $\quad \rho' = \sec^2 \frac{1}{2}\theta \tan \frac{1}{2}\theta \quad$ y $\quad \tan\psi_1 = \cot \frac{1}{2}\theta$
Para $\rho = 3\,\text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta$: $\quad \rho' = -3\,\text{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta \cot \frac{1}{2}\theta \quad$ y $\quad \tan\psi_2 = -\tan \frac{1}{2}\theta$

En $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\tan\psi_1 = 1/\sqrt{3}$, $\tan\pi_2 = -\sqrt{3}$ y $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, las curvas son ortogonales. De igual forma, las curvas son ortogonales en $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

13. $\rho = \text{sen}\ 2\theta$, $\rho = \cos\ \theta$ (fig. 41.15).

Las curvas se intersecan en los puntos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ y el polo.

Para $\rho = \text{sen}\ 2\theta$: $\quad \rho' = 2\cos 2\theta \quad$ y $\quad \tan\psi_1 = \frac{1}{2}\tan 2\theta$
Para $\rho = \cos\ \theta$: $\quad \rho' = -\text{sen}\ \theta \quad$ y $\quad \tan\ \psi_2 = -\cot\ \theta$

En $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\tan\psi_1 = \sqrt{3}/2$, $\tan\psi_2 = -\sqrt{3}$ y $\tan\varphi_1 = -3\sqrt{3}$. El ángulo agudo de intersección en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ es $\varphi = \tan^{-1} 3\sqrt{3} = 79°6'$. De igual forma, en $\theta = \frac{5\pi}{6}$, $\tan\psi_1 = -\sqrt{3}/2$, $\tan\psi_2 = \sqrt{3}$ y el ángulo de intersección es $\tan^{-1} 3\sqrt{3}$.

En el polo, los ángulos de intersección son 0 y $\frac{\pi}{2}$.

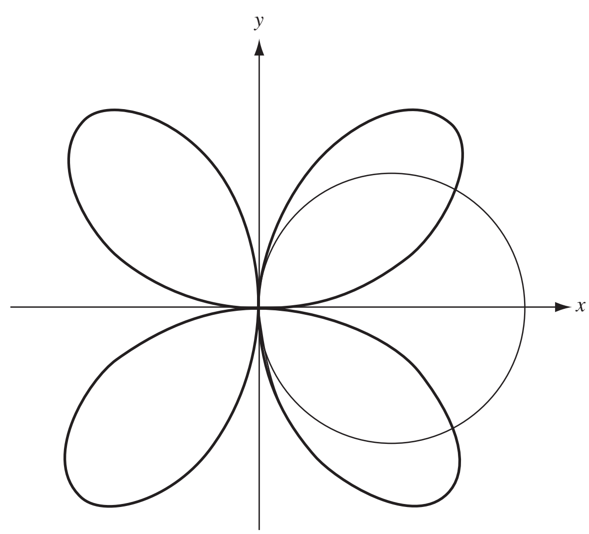


Fig. 41.15

En los problemas 14 a 16, determine $\frac{ds}{d\theta}$ en el punto $P(\rho, \theta)$.

14. $\rho = \cos 2\theta$

$$\rho' = -2\ \text{sen}\ 2\theta \quad \text{y} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4\text{sen}^2\, 2\theta} = \sqrt{1 + 3\text{sen}^2\, 2\theta}$$

15. $\rho(1 + \cos\ \theta) = 4$

Derivando se obtiene $-\rho\ \text{sen}\ \theta + \rho'(1 + \cos\ \theta) = 0$. Entonces,

$$\rho' = \frac{\rho\,\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{4\,\text{sen}\theta}{(1+\cos\theta)^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{3/2}}$$

16. $\rho = \text{sen}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$ (También evaluar $\frac{ds}{d\theta}$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$.)

$$\rho' = \text{sen}^2 \tfrac{1}{3}\theta \cos \tfrac{1}{3}\theta \quad \text{y} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\text{sen}^6 \tfrac{1}{3}\theta + \text{sen}^4 \tfrac{1}{3}\theta \cos^2 \tfrac{1}{3}\theta} = \text{sen}^2 \tfrac{1}{3}\theta$$

En $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $ds/d\theta = \text{sen}^2 \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}$

17. Compruebe la fórmula (41.8): $K = \dfrac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}$.

Por definición $K = \frac{d\tau}{ds}$. Ahora, $\tau = \theta + \psi$ y, por tanto,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right)$$

donde $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)$. También

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(\rho')^2 - \rho\rho'']/(\rho')^2}{1 + (\rho/\rho')^2} = \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}; \quad \text{entonces} \quad 1 + \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}$$

Así, $K = \dfrac{d\theta}{ds}\left(1 + \dfrac{d\psi}{d\theta}\right) = \dfrac{1 + d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \dfrac{1 + d\psi/d\theta}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} = \dfrac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}$

18. Sea $\rho = 2 + \text{sen}\ \theta$. Determine la curvatura en el punto $P(\rho, \theta)$.

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}} = \frac{(2 + \text{sen}\theta)^2 + 2\cos^2\theta + (\text{sen}\theta)(2 + \text{sen}\theta)}{[(2 + \text{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta]^{3/2}} = \frac{6(1 + \text{sen}\theta)}{(5 + 4\text{sen}\theta)^{3/2}}$$

19. Sea $\rho(1 - \cos\theta) = 1$. Determine la curvatura en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

$$\rho' = \frac{-\text{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)^2} \quad \text{y} \quad \rho' = \frac{-\cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2} + \frac{2\,\text{sen}^2\theta}{(1 - \cos\theta)^3}; \quad \text{entonces} \quad K = \text{sen}^3 \frac{\theta}{2}$$

En $\theta = \frac{\pi}{2}$, $K = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; en $\theta = \frac{4\pi}{3}$, $K = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 3\frac{\sqrt{3}}{8}$.

20. Compruebe la fórmula (41.7): $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$.

Sea ρ una función de θ. De $x = \rho\cos\theta$ y $y = \rho\ \text{sen}\ \theta$ se obtiene $dx/d\theta = -\rho\ \text{sen}\ \theta + (\cos\theta)\ \rho'$ y $dy/d\theta = \rho \cos\theta + (\text{sen}\ \theta)\ \rho'$. Por tanto,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = [\rho^2\text{sen}^2\theta + (\rho')^2\cos^2\theta - 2\rho\rho'\text{sen}\theta\cos\theta]$$

y

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [\rho^2\cos^2\theta + (\rho')^2\text{sen}^2\theta + 2\rho\rho'\text{sen}\theta\cos\theta]$$

Así,

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2$$

Como s crece con $\frac{ds}{d\theta} > 0$ y se obtiene la fórmula (41.7).

21. Para $\rho = \cos 2\theta$, determine $\frac{ds}{d\theta}$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$. (Supóngase, como es usual, que s aumenta con θ.)

$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = -2\ \text{sen}2\theta$. Por la fórmula (41.7),

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\cos^2(2\theta) + 4\ \text{sen}^2(2\theta)} = \sqrt{1 + 3\text{sen}^2(2\theta)}$$

$$= \sqrt{1 + 3\text{sen}^2(\pi/2)} = 2$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 22 a 25, determine tan ψ para la curva dada en los puntos indicados.

22. $\rho = 3 - \text{sen}\ \theta$ en $\theta = 0$, $\theta = 3\pi/4$ *Respuesta*: -3; $3\sqrt{2} - 1$

23. $\rho = a(1 - \cos\theta)$ en $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/2$ *Respuesta*: $\sqrt{2} - 1$; -1

24. $\rho(1 - \cos\theta) = a$ en $\theta = \pi/3$, $\theta = 5\pi/4$ *Respuesta:* $-\sqrt{3}/3$; $1 + \sqrt{2}$

25. $\rho^2 = 4\ \text{sen}\ 2\theta$ en $\theta = 5\ \pi/12$, $\theta = 2\pi/3$ *Respuesta*: $-1\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$

En los problemas 26 a 29, determine tan τ para la curva dada en el punto indicado.

26. $\rho = 2 + \text{sen}\ \theta$ en $\theta = \pi/6$ *Respuesta*: $-3\sqrt{3}$

27. $\rho^2 = 9\cos 2\theta$ en $\theta = \pi/6$ *Respuesta*: 0

28. $\rho = \text{sen}^3(\theta/3)$ en $\theta = \pi/2$ *Respuesta*: $-\sqrt{3}$

29. $2\rho(1 - \text{sen}\ \theta) = 3$ en $\theta = \pi/4$ *Respuesta*: $1 + \sqrt{2}$

30. Investigue $\rho = \text{sen}\ 2\theta$ para hallar las tangentes horizontales y verticales.

Respuesta: tangentes horizontales en: $\theta = 0, \pi, 54° 44', 125° 16', 234° 44', 305° 16'$; tangentes verticales en $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 35° 16', 144° 44', 215° 16', 324° 44'$.

En los problemas 31 a 33, determine los ángulos agudos de intersección de cada par de curvas.

31. $\rho = \text{sen}\ \theta$, $\rho = \text{sen}\ 2\theta$ *Respuesta*: $\phi = 79° 6'$ en $\theta = \pi/3$ y $5\pi/3$; $\phi = 0$ en el polo

32. $\rho = \sqrt{2}\,\text{sen}\theta$, $\rho^2 = \cos 2\theta$ *Respuesta*: $\phi = \pi/3$ en $\theta = \pi/6, 5\pi/6$; $\phi = \pi/4$ en el polo

33. $\rho^2 = 16\ \text{sen}\ 2\theta$, $\rho^2 = 4\ \text{cosec}\ 2\theta$ *Respuesta*: $\phi = \pi/3$ en cada intersección

34. Demuestre que cada par de curvas se cortan en ángulo recto en todos los puntos de intersección.

a) $\rho = 4\cos\theta$, $\rho = 4\ \text{sen}\ \theta$ *b*) $\rho = e^{\theta}$, $\rho = e^{-\theta}$
c) $\rho^2\cos 2\theta = 4$, $\rho^2\ \text{sen}\ 2\theta = 9$ *d*) $\rho = 1 + \cos\theta$, $\rho = 1 - \cos\theta$

35. Determine el ángulo de intersección de las tangentes a $\rho = 2 - 4\ \text{sen}\ \theta$ en el polo.

Respuesta: $2\pi/3$

36. Determine la curvatura de cada una de estas curvas en $P(\rho, \theta)$: *a*) $\rho = e^{\theta}$; *b*) $\rho = \text{sen } \theta$; *c*) $\rho^2 = 4 \cos 2\theta$; *d*) $\rho = 3 \text{ sen } \theta + 4 \cos \theta$.

Respuesta: *a*) $1/(\sqrt{2}e^{\theta})$, *b*) 2; *c*) $\frac{3}{2}\sqrt{\cos 2\theta}$; *d*) $\frac{2}{5}$

37. Determine $\dfrac{ds}{d\theta}$ para la curva $\rho = a \cos \theta$.

Respuesta: *a*

38. Encuentre $\dfrac{ds}{d\theta}$ para la curva $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

Respuesta: $a\sqrt{2 + 2\cos\theta}$

39. Supóngase que una partícula se mueve a lo largo de una curva $\rho = f(\theta)$ con su posición en cualquier instante t dada por $\rho = g(t)$, $\theta = h(t)$.

a) Multiplique la ecuación $\left(\dfrac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2$ obtenida en el problema 20 por $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ para que resulte

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

b) A partir de $\tan\psi = \rho\dfrac{d\theta}{d\rho} = \rho\dfrac{d\theta/dt}{d\rho/dt}$, obtenga $\text{sen}\,\psi = \dfrac{\rho}{v}\dfrac{d\theta}{dt}$ y $\cos\psi = \dfrac{1}{v}\dfrac{d\rho}{dt}$.

En los problemas 40 a 43, determine todos los puntos de intersección de las ecuaciones indicadas.

40. $\rho = 3 \cos \theta$, $\rho = 3 \text{ sen } \theta$ *Respuesta*: $(0, 0)$, $\left(3\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

41. $\rho = \cos \theta$, $\rho = 1 - \cos \theta$ *Respuesta*: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

42. $\rho = \theta$, $\rho = \pi$ *Respuesta*: (π, π), $(-\pi, -\pi)$

43. $\rho = \text{sen } 2\theta$, $\rho = \cos 2\theta$ *Respuesta*: $(0, 0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{(2n+1)\pi}{6}\right)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

44. (CG) Trace las curvas de los problemas 40 a 43, determine sus gráficas en una graficadora y compruebe las respuestas a los problemas 40 a 43.

45. (CG) Trace las gráficas de las ecuaciones siguientes y luego compruebe las respuestas con una graficadora:

a) $\rho = 2 \cos 4\theta$ *b*) $\rho = 2 \text{ sen } 5\theta$ *c*) $\rho^2 = 4 \text{ sen } 2\theta$

d) $\rho = 2(1 - \cos \theta)$ *e*) $\rho = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ *f*) $\rho^2 = \dfrac{1}{\theta}$

g) $\rho = 2 - \sec \theta$ *h*) $\rho = \dfrac{2}{\theta}$

[En los incisos *g*) y *h*) busque las asíntotas.]

46. Cambie las siguientes ecuaciones rectangulares en ecuaciones polares y trace las gráficas:

a) $x^2 - 4x + y^2 = 0$ *b*) $4x = y^2$ *c*) $xy = 1$
d) $x = a$ *e*) $y = b$ *f*) $y = mx + b$

Respuestas: *a*) $\rho = 4\cos\theta$, *b*) $\rho = 4\cot\theta\operatorname{cosec}\theta$, *c*) $\rho^2 = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta$, *d*) $\rho = a\sec\theta$, *e*) $\rho = b\operatorname{cosec}\theta$, *f*) $\rho = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta}$

47. (CG) Cambie las siguientes ecuaciones polares en coordenadas rectangulares y luego trace la gráfica. Haga la comprobación con una calculadora graficadora: *a*) $\rho = 2c\operatorname{sen}\theta$, *b*) $\rho = \theta$, *c*) $\rho = 7\sec\theta$.

Respuestas: *a*) $x^2 + (y-c)^2 = c^2$; *b*) $y = x\tan(\sqrt{x^2+y^2})$; *c*) $x = 7$

48. *a*) Demuestre que la distancia entre dos puntos con coordenadas polares (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) es

$$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

b) Cuando $\theta_1 = \theta_2$, ¿a cuánto se simplifica la distancia? Explique por qué.

Respuesta: $|\rho_1 - \rho_2|$

c) Cuando $\theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$, ¿cuál es el resultado al usar la fórmula? Explique la importancia del resultado.

Respuesta: $\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$

d) Determine la distancia entre los puntos con coordenadas polares (1, 0) y $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Respuesta: $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

49. *a*) Sea *f* una función continua tal que $f(\theta) \geq 0$ para $\alpha < \theta < \beta$. Sea *A* el área de la región acotada por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, y la curva polar $\rho = f(\theta)$. Deduzca la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2 d\theta = \dfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$. (*Sugerencia*: divida $[\alpha, \beta]$ en *n* partes iguales, cada una igual a $\Delta\theta$. Cada subregión resultante tiene un área aproximada a $\frac{1}{2}\Delta\theta(f(\theta_i^*))^2$, donde θ_i^* está en el *i*–ésimo subintervalo.)

b) Determine el área dentro de la cardioide $\rho = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

c) Establezca el área de un pétalo de la rosa con tres pétalos, $\rho = \cos 3\theta$. (*Sugerencia*: integre de $-\dfrac{\pi}{6}$ a $\dfrac{\pi}{6}$.)

42

Sucesiones infinitas

Sucesiones infinitas

Una sucesión infinita $\langle s_n \rangle$ es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos; s_n es el valor de esta función para un entero n positivo dado. A veces se indica $\langle s_n \rangle$ con sólo escribir los primeros términos de la sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \ldots$ En este capítulo se considerarán sólo las sucesiones en las que los valores s_n sean números reales.

EJEMPLO 42.1

a) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ es la sucesión $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

b) $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ es la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

c) $\langle n^2 \rangle$ es la sucesión de cuadrados $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

d) $\langle 2n \rangle$ es la sucesión de enteros positivos pares $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$

e) $\langle 2n - 1 \rangle$ es la sucesión de enteros impares positivos $1, 3, 5, 7, \ldots$

Límite de una sucesión

Si $\langle s_n \rangle$ es una sucesión infinita y L es un número, entonces que $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$ si s_n se aproxima arbitrariamente a L cuando n crece sin límite.

Desde un punto de vista más preciso, $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$ significa que para todo número real positivo $\in > 0$, hay un entero positivo n_0 tal que, cuando $n \geq n_0$, se tiene $|s_n - L| < \in$. Para ilustrar lo que esto significa, se colocan los puntos L, $L - \in$ y $L + \in$ en una recta numérica (fig. 42.1), donde $\in$ es algún número real positivo. Ahora, si se colocan los puntos $s_1, s_2, s_3, \ldots$ en la recta numérica, tarde o temprano habrá un índice n_0 tal que $s_{n_0}, s_{n_0+1}, s_{n_0+2}, s_{n_0+3}, \ldots$ y todos los términos subsiguientes de la sucesión quedarán dentro del intervalo $(L - \in, L + \in)$.

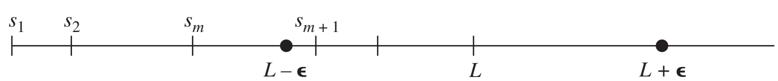


Fig. 42.1

Si $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$, entonces la sucesión $\langle s_n \rangle$ *converge a L.* Si existe un número L tal que $\langle s_n \rangle$ converge a L, entonces $\langle s_n \rangle$ es *convergente.* Cuando $\langle s_n \rangle$ no es convergente, entonces es *divergente*.

EJEMPLO 42.2. $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ es convergente, porque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Para comprobarlo, se observa que $\frac{1}{n}$ puede aproximarse arbitrariamente a 0 haciendo a n lo suficientemente grande. Esto se explica al observar que $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, $\frac{1}{1000} = 0.001$ y así sucesivamente. Para comprobar que la definición precisa se satisface, sea $\in$ un número positivo cualquiera. Se toma n_0 como el entero positivo más pequeño mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$. Entonces $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Por tanto, si $n \geq n_0$, entonces $n > \frac{1}{\varepsilon}$ y, por consiguiente, $\frac{1}{n} < \in$. Así, si $n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \in$. Con esto se comprueba que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

EJEMPLO 42.3. $\langle 2n\rangle$ es una sucesión divergente, ya que $\text{lím}_{n\to+\infty} 2n \neq L$ para cada número real L. De hecho, $2n$ aumenta arbitrariamente cuando n crece.

Se escribe $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ si s_n se vuelve arbitrariamente grande cuando n crece. En tal caso, $\langle s_n\rangle$ diverge a $+\infty$. Dicho con mayor precisión, $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ si y sólo si, para cualquier número c, sin importar cuán grande sea, existe un número positivo n_0 tal que, cuando $n \geq n_0$, se tiene que $s_n > c$.

De igual forma, se escribe $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ si s_n se vuelve arbitrariamente pequeño cuando n crece. En tal caso, $\langle s_n\rangle$ diverge a $-\infty$. Mejor dicho, $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ i y sólo si, para cualquier número c, sin importar cuán pequeño sea, existe un entero positivo n_0 tal que, cuando $n \geq n_0$, se tiene que $s_n < c$.

Se escribirá $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \infty$ si $\text{lím}_{n\to+\infty} |s_n| = +\infty$, es decir, la magnitud de s_n crece arbitrariamente cuando n crece.

EJEMPLO 42.4. *a*) $\text{lím}_{n\to+\infty} 2n = +\infty$; *b*) $\text{lím}_{n\to+\infty} (1-n)^3 = -\infty$; *c*) $\text{lím}_{n\to+\infty} (-1)^n (n^2) = \infty$. Nótese que en el inciso *c*), la sucesión no converge a $+\infty$ ni a $-\infty$.

EJEMPLO 42.5. La sucesión $\langle(-1)^n\rangle$ es divergente, pero no diverge a $+\infty$ ni a $-\infty$ ni a ∞. Sus valores oscilan entre 1 y -1.

Una sucesión $\langle s_n\rangle$ está *acotada por encima* si hay número c tal que $s_n \leq c$ para todo n y se entiende que $\langle s_n\rangle$ está *acotada por debajo* si existe un número b tal que $b \leq s_n$ para todo n. Una sucesión $\langle s_n\rangle$ está *acotada* (limitada) si está limitada tanto por encima como por debajo. Es claro que una sucesión $\langle s_n\rangle$ está acotada si y sólo si hay un número d tal que $|s_n| \leq d$ para todo n.

EJEMPLO 42.6. *a*) La sucesión $\langle 2n\rangle$ está acotada por debajo (por ejemplo, por 0), pero no está acotada por encima. *b*) la sucesión $\langle(-1)^n\rangle$ está acotada. Observe que $\langle(-1)^n\rangle$ es $-1, 1, -1,\ldots$ Entonces, $|(-1)^n| \leq 1$ para toda n.

Teorema 42.1. Toda la sucesión convergente es acotada.

En el problema 5 se presenta una demostración.

El recíproco del teorema 42.1 es falso. Por ejemplo, la sucesión $\langle(-1)^n\rangle$ es acotada pero no convergente.

Las operaciones aritméticas estándar sobre sucesiones convergentes resultan en sucesiones convergentes, como lo demuestran los resultados siguientes intuitivamente obvios.

Teorema 42.2. $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = c$ y $\text{lím}_{n\to+\infty} t_n = d$. Entonces:

a) $\text{lím}_{n\to+\infty} k = k$, donde k es una constante.

b) $\text{lím}_{n\to+\infty} ks_n = kc$, donde k es una constante.

c) $\text{lím}_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = c + d$

d) $\text{lím}_{n\to+\infty} (s_n - t_n) = c - d$

e) $\text{lím}_{n\to+\infty} (s_n t_n) = cd$

f) $\text{lím}_{n\to+\infty} (s_n / t_n) = c/d$ siempre que $d \neq 0$ y $t_n \neq 0$ para todo n.

Para ver las demostraciones de los incisos *c*) y *e*), repase el problema 10.

Los siguientes hechos sobre sucesiones son intuitivamente claros.

Teorema 42.3. Si $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \infty$ y $s_n \neq 0$ para todo n, entonces $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$.

Para ver una demostración, consulte el problema 7.

Teorema 42.4

a) Si $|a| > 1$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} a^n = \infty$.

En particular, si $a > 1$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

b) Si $|r| < 1$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} r^n = 0$.

En el problema 8 puede consultar las demostraciones respectivas.

TEOREMA 42.5. (Teorema del sándwich o teorema de intercalación.) $\lim_{n\to+\infty} s_n = L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ y existe un entero m tal que $s_n \le t_n \le u_n$ para todo $n \ge m$, entonces $\lim_{n\to+\infty} t_n = L$.

Para ver una demostración, repase el problema 11.

Corolario 42.6. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ y hay un número m tal que $|t_n| \le |u_n|$ para todo $n \ge m$, entonces $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Ésta es una consecuencia del teorema 42.5 y el hecho de que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ equivale a $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

EJEMPLO 42.7. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^2} = 0$. Para comprobarlo, use el corolario 42.6, observando que $\left|(-1)^n \dfrac{1}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n}$ y $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Teorema 42.7. Sea f una función continua en c y sea $\lim_{n\to+\infty} s_n = c$, donde todos los términos s_n están en el dominio de f. Entonces $\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = f(c)$.

Véase el problema 33.

Es evidente que si una sucesión converge o no, no se verá afectada si se borran, suman o alteran un número finito de términos en su comienzo. La convergencia depende de qué sucede "en el largo plazo".

Es necesario ampliar la noción de sucesiones infinitas al caso donde se permite que el dominio de una sucesión sea el conjunto de enteros no negativos o cualquier conjunto que conste de todos los enteros mayores o iguales que un entero fijo. Por ejemplo, si se toma el dominio como el conjunto de enteros no negativos, entonces $\langle 2n + 1\rangle$ indicaría la sucesión de enteros impares positivos, y $\langle 1/2^n\rangle$ representaría la sucesión, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Sucesiones monótonas

a) Una sucesión $\langle s_n\rangle$ es no *decreciente* si $s_n \le s_{n+1}$ para todo n.

b) Una sucesión $\langle s_n\rangle$ es *creciente* si $s_n < s_{n+1}$ para todo n.

c) Una sucesión $\langle s_n\rangle$ es no *creciente* si $s_n \ge s_{n+1}$ para todo n.

d) Una sucesión $\langle s_n\rangle$ es *decreciente* si $s_n > s_{n+1}$ para todo n.

e) Una sucesión es *monótona* si es no decreciente o no creciente.

Claramente, toda sucesión creciente es no decreciente (pero no recíprocamente), y toda sucesión decreciente es no creciente (pero no recíprocamente).

EJEMPLO 42.8. *a*) La sucesión 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, … es no decreciente, pero no creciente. *b*) –1, –1, –2, –2, –3, –3, –4, –4, … es no creciente, pero no decreciente.

Una propiedad básica e importante del sistema de números reales está dada por el siguiente resultado. Su demostración va más allá del objetivo de esta obra.

Teorema 42.8. Toda sucesión monótona acotada es convergente.

Hay varios métodos para mostrar que una sucesión $\langle s_n\rangle$ es no decreciente, creciente, no creciente o decreciente. En el caso siguiente, la propiedad $\langle s_n\rangle$ es creciente.

Método 1: Demuestre que $s_{n+1} - s_n > 0$.

EJEMPLO 42.9. Considere $s_n = \dfrac{3n}{4n+1}$. Entonces, $s_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{4(n+1)+1} = \dfrac{3n+3}{4n+5}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{3n+3}{4n+5} - \frac{3n}{4n+1} = \frac{(12n^2+15n+3)-(12n^2+15n)}{(4n+5)(4n+1)} \\ &= \frac{3}{(4n+5)(4n+1)} > 0 \end{aligned}$$

ya que $4n + 5 > 0$ y $4n + 1 > 0$.

Método 2: Cuando todo $s_n > 0$, *demuestre que* $s_{n+1}/s_n > 1$.

EJEMPLO 42.10. Use el mismo ejemplo $s_n = \dfrac{3n}{4n+1}$ anterior,

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\frac{3n+3}{4n+5}\right) \Big/ \left(\frac{3n}{4n+1}\right) = \frac{3n+3}{3n}\,\frac{4n+1}{4n+5} = \frac{12n^2+15n+3}{12n^2+15n} > 1,$$

ya que $12n^2 + 15n + 3 > 12n^2 + 15n > 0$.

Método 3: Halle una función diferenciable $f(x)$ tal que $f(n) = s_n$, para todo n, y demuestre que $f'(x) > 0$ para todo $x \geq 1$ (y, por tanto, que f es una función creciente para $x \geq 1$).

EJEMPLO 42.11. Considere de nuevo $s_n = \dfrac{3n}{4n+1}$. Sea: $f(x) = \dfrac{3x}{4x+1}$. Entonces $f'(x) = \dfrac{3}{(4x+1)^2} > 0$ para todo x.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En cada una de las sucesiones siguientes, escriba la fórmula para el término n–ésimo y determine el límite (si existe). Supóngase que $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ *b)* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$ *d)* 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999,…

e) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\pi, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}2\pi, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}, \ldots$ *f)* $\frac{2}{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots$

a) $s_n = \dfrac{1}{2_n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$.

b) $s_n = \dfrac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$

c) $s_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$. Esto es intuitivamente claro, pero también puede aplicarse el teorema 42.3 a la sucesión $\langle(-1)^{n+1}n\rangle$, como $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}n = \infty$.

d) $s_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1$.

Nótese que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$ en virtud del teorema 42.4*b*).

e) $s_n = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$. Obsérvese que la sucesión consta de repeticiones del ciclo 1, 0, –1, 0 y no tiene límite.

f) $s_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ por (26.17).

2. Evalúe $\lim_{n\to+\infty} s_n$ en los casos siguientes:

a) $s_n = \dfrac{5n^2 - 4n + 13}{3n^2 - 95n - 7}$ *b)* $s_n = \dfrac{8n^2 - 3}{2n + 5}$ *c)* $\dfrac{3n+7}{n^3 - 2n - 9}$

a) Recuérdese que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5x^2 - 4x + 13}{3x^2 - 95x - 7} = \dfrac{5}{3}$ por el problema 13 del capítulo 7. Así, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2 - 4n + 13}{3n^2 - 95n - 7} = \dfrac{5}{3}$. Un resultado semejante se cumple cuando s_n es un cociente de los polinomios del mismo grado.

b) Recuérdese que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{8x^2 - 3}{2x + 5} = +\infty$ por el problema 13 del capítulo 7. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{8n^2 - 3}{2n + 5} = +\infty$. Un resultado semejante se obtiene cuando s_n es una función racional cuyo numerador tiene un grado mayor que el denominador (y cuyos primeros coeficientes son del mismo signo).

c) Recuérdese que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3x+7}{x^3 - 2x - 9} = 0$ por el problema 13 del capítulo 7. Así, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3n+7}{n^3 - 2n - 9} = 0$. El mismo resultado se cumple cuando s_n es una función racional cuyo denominador tiene grado mayor que el numerador.

3. Para cada una de las sucesiones siguientes, determine si es no decreciente, creciente, no creciente, decreciente o ninguna de las anteriores. Luego determine su límite, si existe.

a) $s_n = \dfrac{5n-2}{7n+3}$ *b*) $s_n = \dfrac{n}{2^n}$ *c*) $S_n = \dfrac{1}{3^n}$

a) Sea $f(x) = \dfrac{5x-2}{7x+3}$. Entonces, $f'(x) = \dfrac{(7x+3)(5)-(5x-2)(7)}{(7x+3)^2} = \dfrac{29}{(7x+3)^2} > 0$

Por tanto, $f(x)$ es una función creciente y, por ende, $\langle s_n \rangle$ es una sucesión creciente.

b) Sea $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$. Entonces, $f'(x) = \dfrac{2^x - x(\ln x)2^x}{2^{2x}} = \dfrac{1-x(\ln 2)}{2^x}$

Como $\ln 2 > \frac{1}{2}$ [por (25.12)], $x(\ln 2) > \dfrac{x}{2} \geq 1$, cuando $x \geq 2$. Luego, $1 - x(\ln 2) < 0$ cuando $x \geq 2$ y, por tanto, $f'(x) < 0$ cuando $x \geq 2$. Entonces, $f(x)$ es decreciente para $x \geq 2$, y ello implica que s_n es decreciente para $n \geq 2$. Nótese que $s_1 = \frac{1}{2} = s_2$. Así, $\langle s_n \rangle$ es no creciente. Ahora se halla el límite. Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\ln 2)2^x} = 0 \quad \text{y, de esta manera,} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

c) $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\dfrac{1}{3^{n+1}}\right) \Big/ \left(\dfrac{1}{3^n}\right) = \dfrac{1}{3} < 1$. Por tanto, $\langle s_n \rangle$ es decreciente

El teorema 42.4*b*) indica que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

4. Demuestre que la sucesión $s_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}$ es convergente.

De acuerdo con el teorema 42.8, $\langle s_n \rangle$ es acotada, como $0 < s_n < 1$. Ahora se demostrará que $\langle s_n \rangle$ es decreciente. Observe que

$$s_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)} = s_n \frac{2n+1}{2n+2} < s_n$$

5. Demuestre el teorema 42.1: toda sucesión convergente $\langle s_n \rangle$ es acotada.

Sea $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$. Se toma $\in = 1$. Entonces, hay un entero positivo n_0 tal que, siempre que $n \geq n_0$, se tiene que $|s_n - L| < 1$. Por ende, para $n \geq n_0$, mediante la desigualdad triangular se obtiene

$$|s_n| = |(s_n - L) + L| \leq |s_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

Si se toma M como el máximo de $1 + |L|$ y $|s_1|, |s_2|, |s_3|, \ldots, |s_{n_0}|$, se obtiene $|s_n| \leq M$ para todo n. Así, $\langle s_n \rangle$ es acotada.

6. Demuestre que la sucesión $\left\langle \dfrac{n!}{2^n} \right\rangle$ es divergente.

Puesto que $\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{2}\,\dfrac{4}{2}\cdots\dfrac{n}{2} > \dfrac{n}{2}$ para $n > 4$, la sucesión no es acotada. Entonces, por el teorema 42.1, la sucesión no puede ser convergente.

7. Pruebe el teorema 42.3: si $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ y $s_n \neq = 0$ para todo n, entonces $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{s^n} = 0$.

Considere todo $\in > 0$. Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$, existe algún entero positivo m tal que, cuando $n \geq m$,

$$|s_n| > \frac{1}{\in} \quad \text{y, por tanto,} \quad \left|\frac{1}{s_n} - 0\right| = \left|\frac{1}{s_n}\right| < \in. \quad \text{Entonces,} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$$

8. Pruebe el teorema 42.4: *a*) si $|a| > 1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} a^n = \infty$; *b*) Si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$.

a) Sea $M > 0$ y sea $|a| = 1 + b$. Entonces, $b > 0$. Ahora $|a|^n = (1 + b)^n = 1 + nb + \ldots > 1 + nb > M$ cuando $n \geq \dfrac{M}{b}$.

b) Sea $a = 1/r$. Como $|r| < 1$, $|a| > 1$. Por el inciso *a*), $\lim_{n\to+\infty} a^n = \infty$. Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{r^n}\right) = \infty$. Entonces, por el teorema 42.3, $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$.

9. Demuestre: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

$\lim_{n\to+\infty} 2^n = \infty$ por el teorema 42.4*a*). Así, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ por el teorema 42.3.

10. Pruebe el teorema 42.2*c*) y *e*).

Sea $\lim_{n\to+\infty} s_n = c$ y $\lim_{n\to+\infty} t_n = d$.

c) $\lim_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = c + d$. Sea $\in\ > 0$. Entonces existen enteros m_1 y m_2 tales que $|s_n - c| < \in/2$ para $n \geq m_1$ y $|t_n - d| < \in/2$ para $n \geq m_2$. Sea m el máximo de m_1 y m_2. Entonces, para $n \geq m$, $|s_n - c| < \in/2$ y $|t_n - d| < \in/2$. Por lo tanto, para $n \geq m$,

$$|(s_n + t_n) - (c + d)| = |(s_n - c) + (t_n - d)| \leq |s_n - c| + |t_n - d| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

e) $\lim_{n\to+\infty} (s_n t_n) = cd$. Como $\langle s_n \rangle$ resulta convergente, es acotada, por el teorema 42.1 y, por tanto, hay un número positivo M tal que $|s_n| \leq M$ para todo n. Sea $\in\ > 0$. Si $d \neq 0$, existe un entero m_1 tal que $|s_n - c| < \in/2|d|$ para $n \geq m_1$ y, por consiguiente, $|d||s_n - c| < \in/2$ para $n \geq m_1$. Si $d = 0$, entonces se puede seleccionar $m_1 = 1$ y, sin embargo, se tendría $|d||s_n - c| < \in/2$ para $n \geq m_1$. También existe un m_2 tal que $|t_n - d| < \in/2M$ para $n \geq m_2$. Sea m el máximo de m_1 y m_2. Si $n \geq m$,

$$|s_n t_n - cd| = |s_n(t_n - d) + d(s_n - c)| \leq |s_n(t_n - d)| + |d(s_n - c)|$$

$$= |s_n||t_n - d| + |d||s_n - c| \leq M\left(\frac{\in}{2M}\right) + \frac{\in}{2} = \in$$

11. Demuestre el teorema de intercalación: si $\lim_{n\to+\infty} s_n = L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ y existe un entero m tal que $s_n \leq t_n \leq u_n$, para todo $n \geq m$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = L$.

Sea $\in\ > 0$. Existe un entero $m_1 \geq m$ tal que $|s_n - L| < \in/4$ y $|u_n - L| < \in/4$ para $n \geq m_1$. Ahora supóngase que $n \geq m_1$. Como $s_n \leq t_n \leq u_n$, $|t_n - s_n| \leq |u_n - s_n|$. Pero

$$|u_n - s_n| = |(u_n - L) + (L - s_n)| \leq |u_n - L| + |L - s_n| < \frac{\in}{4} + \frac{\in}{4} = \frac{\in}{2}$$

Así, $|t_n - s_n| < \in/2$. Por tanto,

$$|t_n - L| = |t_n - s_n| + (s_n - L)| \leq |t_n - s_n| + |s_n - L| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{4} < \in$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 12 a 29, determine para cada sucesión $\langle s_n \rangle$ si es acotada o no y si es no decreciente, creciente, no creciente o decreciente. Indique asimismo si es convergente y, si es posible, establezca su límite. (*Nota*: si la sucesión tiene un límite finito, debe ser acotada; en cambio, si tiene un límite infinito, debe ser no acotada.)

12. $\left\langle n + \frac{2}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: no decreciente, creciente para $n \geq 2$; límite $+\infty$

13. $\left\langle \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \right\rangle$ *Respuesta*: acotada; sin límite

14. $\langle \sqrt[3]{n^2} \rangle$ *Respuesta*: creciente, límite $+\infty$

15. $\left\langle \frac{n!}{10^n} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente para $n \geq 10$; límite $+\infty$

16. $\left\langle \frac{\ln n}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: decreciente para $n \geq 3$; límite 0

17. $\langle \frac{1}{2}(1+(-1)^{n+1}) \rangle$ *Respuesta*: acotada; sin límite

18. $\left\langle \ln \frac{n+1}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: decreciente; límite 0

19. $\left\langle \frac{2^n}{n!} \right\rangle$ *Respuesta*: no creciente; decreciente para $n \geq 2$; límite 0

20. $\langle \sqrt[n]{n} \rangle$ *Respuesta*: decreciente para $n \geq 3$; límite 1

21. $\left\langle \frac{3n}{n+2} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente; límite 3

22. $\left\langle \cos \frac{\pi}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente, límite 1

23. $\left\langle \frac{4n+5}{n^3-2n+3} \right\rangle$ *Respuesta*: decreciente; límite 0

24. $\left\langle \frac{\operatorname{sen} n}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: límite 0

25. $\langle \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rangle$ *Respuesta*: decreciente; límite 0

26. $\left\langle \frac{2^n}{3^n - 4} \right\rangle$ *Respuesta*: decreciente; límite 0

27. $\left\langle n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente, límite π

28. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente, límite $+\infty$

29. $\left\langle \frac{n^n}{n!} \right\rangle$ *Respuesta*: creciente; límite $+\infty$

En los problemas 30 a 32, encuentre la fórmula plausible para una sucesión cuyos primeros términos están dados. Determine el límite (si existe) de la sucesión.

30. $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{6}, \frac{81}{8}, \ldots$ *Respuesta*: $s_n = \frac{3^{n-1}}{2(n-1)}$; el límite es $+\infty$

31. $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ *Respuesta*: $s_n = (-1)^n$; sin límite

32. $\frac{3}{1}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{3}{2}, \frac{19}{11}, \ldots$ *Respuesta*: $s_n = \frac{4n-1}{3n-2}$; decreciente, el límite es $\frac{4}{3}$

33. Demuestre el teorema 42.7. [*Sugerencia*: sea $\in > 0$. Escoja $\delta > 0$ tal que, para x en el dominio de f para el cual $|x - c| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(c)| < \in$. Seleccionar m de manera que $n \geq m$ implique $|s_n - c| < \delta$.]

34. Demuestre que $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1$ para $p > 0$. (*Sugerencia*: $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$.)

35. (CG) Use una graficadora para analizar $s_n = \dfrac{n^2+5}{\sqrt{4n^4+n}}$ para $n = 1$ a $n = 5$. Luego determine analíticamente el comportamiento de la sucesión.

Respuesta: decreciente, el límite es $\frac{1}{2}$

36. (CG) Use una graficadora para analizar $s_n = \dfrac{n^5}{2^n}$ para $n = 1$ hasta $n = 10$. Luego determine analíticamente el comportamiento de la sucesión.

Respuesta: decreciente para $n \geq 7$; el límite es 0

37. Demuestre que $\text{lím}_{n\to+\infty} a_n = 0$ equivale a $\text{lím}_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

38. Si $s_n > 0$ para todo n y $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n^2 = c$, pruebe que $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \sqrt{c}$.

39. (CG) Defina s_n por recursión de la siguiente manera: $s_1 = 2$ y $s_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(s_n + \dfrac{2}{s_n}\right)$ para $n \geq 1$.

a) Use una graficadora para calcular s_n para $n = 2,\ldots, 5$.
b) Demuestre que si $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n$ existe, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \sqrt{2}$.
c) Demuestre que $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n$ existe.

40. Defina s_n por recursión de la siguiente manera: $s_1 = 3$ y $s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + 6)$ para $n \geq 1$.

a) Demuestre que $s_n < 6$ para todo n.
b) Demuestre que $\langle s_n \rangle$ es creciente.
c) Demuestre que $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n$ existe.
d) Evaluar $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n$.

Respuesta: *d*) 6

41. Pruebe el teorema 42.2, incisos *a*), *b*), *d*) y *f*).

43

Series infinitas

Sea $\langle s_n \rangle$ una sucesión infinita. Se puede formar la sucesión infinita de *sumas parciales* $\langle s_n \rangle$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= s_1 \\
S_2 &= s_1 + s_2 \\
S_3 &= s_1 + s_2 + s_3 \\
&\vdots \\
S_n &= s_1 + s_2 + \cdots + s_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Generalmente se designa la sucesión $\langle s_n \rangle$ mediante la notación

$$\sum S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$$

Los números $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ se denominarán *términos* de la serie.

Si S es un número tal que $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = S$, entonces la serie $\sum S_n$ *converge* y S recibe el nombre de *suma* de la serie. Casi siempre se representa S mediante $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$

Si no existe ningún número S tal que $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = S$, entonces la serie $\sum S_n$ *diverge*. Si $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, la serie diverge a $+\infty$ y se escribe $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = +\infty$. De igual forma, si $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, entonces la serie diverge a $-\infty$ y se escribe $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = -\infty$.

EJEMPLO 43.1. Considere la sucesión $\langle(-1)^{n+1}\rangle$. Los términos son $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $s_3 = 1$, $s_4 = -1$ y así sucesivamente. Por tanto, las sumas parciales comienzan con $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + (-1) = 0$, $S_3 = 1 + (-1) + (1) = 1$, $S_4 = 1 + (-1) + (1) + (-1) = 0$ y continúan alternado unos y ceros. Por consiguiente, $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n$ no existe y la serie diverge (pero no a $+\infty$ o $-\infty$).

Series geométricas

Considere la sucesión $\langle ar^{n-1}\rangle$, que consta de los términos $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

La serie $\sum ar^{n-1}$ se denomina *serie geométrica* con *razón r* y *primer término a*. Su n–ésima suma parcial S_n está dada por

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Multiplique por r: $$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Reste: $$S_n - rS_n = a - ar^n$$

Por tanto, $$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Ahora todo depende de la razón r. Si $|r| < 1$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} r^{n} = 0$ [por el teorema 42.4*b*)] y, por consiguiente, $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = a/(1-r)$. Si $|r| > 1$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} r^n = \infty$ [por el teorema 42.2*a*)] y, por tanto, $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = \infty$. (Una excepción baladí se presenta cuando $a = 0$. En este caso, todos los términos son 0, la serie converge y su suma es 0.) Estos resultados se resumen en seguida.

Teorema 43.1. Dada la serie geométrica $\sum ar^{n-1}$:

a) Si $|r| < 1$, la serie converge y tiene suma $\dfrac{a}{1-r}$

b) Si $|r| > 1$ y $a \neq 0$, la serie diverge a ∞.

EJEMPLO 43.2. Tómese la serie geométrica $\sum (\frac{1}{2})^{n-1}$ con razón $r = \frac{1}{2}$ y primer término $a = 1$:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots$$

Por el teorema 43.1*a*), la serie converge y tiene suma $\dfrac{1}{1-(\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Así, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-1} = 2$.

Se puede multiplicar una serie $\sum s_n$ por una constante c para obtener una nueva serie $\sum cs_n$, y se pueden sumar dos series $\sum s_n$ y $\sum t_n$ para obtener una nueva serie $\sum (s_n + t_n)$.

Teorema 43.2. Si $c \neq 0$, entonces $\sum cs_n$ converge si y sólo si $\sum s_n$ converge. Además, en el caso de convergencia,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} cs_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$$

Para obtener este resultado, denótase por $T_n = cs_1 + cs_2 + \ldots + cs_n$ la n–ésima suma parcial de la serie $\sum cs_n$. Entonces, $T_n = cS_n$ es la *n–ésima* suma parcial de $\sum s_n$. Luego, $\text{lím}_{n\to+\infty} T_n$ existe si y sólo si existe $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n$ y, cuando los límites existen, $\text{lím}_{n\to+\infty} T_n = c\ \text{lím}_{n\to+\infty} S_n$. Esto resulta por el teorema 43.2.

Teorema 43.3. Supóngase que dos series $\sum s_n$ y $\sum t_n$ convergen ambas. Entonces, su suma $\sum (s_n + t_n)$ también converge y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (s_n + t_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n + \sum_{n=1}^{+\infty} t_n$$

Para comprobarlo, sean S_n y T_n la n–ésima suma parcial de $\sum s_n$ y $\sum t_n$, respectivamente. Entonces, la n–ésima suma parcial U_n de $\sum (s_n + t_n)$ se observa fácilmente como $S_n + T_n$. Luego, $\text{lím}_{n\to+\infty} U_n = \text{lím}_{n\to+\infty} S_n + \text{lím}_{n\to+\infty} T_n$. Esto resulta por el teorema 43.3.

Corolario 43.4. Supóngase que dos series $\sum s_n$ y $\sum t_n$ ambas convergen. Entonces, su diferencia $\sum (s_n - t_n)$ también converge y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (s_n - t_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n - \sum_{n=1}^{+\infty} t_n$$

Esto se deduce directamente de los teoremas 43.2 y 43.3. Sólo obsérvese que $\sum (s_n - t_n)$ es la suma de $\sum s_n$ y la serie $\sum (-1)t_n$.

Teorema 43.5. Si $\sum s_n$ converge, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Para comprobarlo, sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s_n = S$. Esto significa que $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = S$, donde, como es usual, S_n es la n–ésima suma parcial de la serie. También se tiene que $\text{lím}_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Pero $s_n = S_n - S_{n-1}$. Entonces, $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \text{lím}_{n\to+\infty} S_n - \text{lím}_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Corolario 43.6. **(Teorema de divergencia.)** Si $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n$ no existe o $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n \neq 0$, entonces $\sum s_n$ diverge.

Ésta es la consecuencia lógica inmediata del teorema 43.5.

EJEMPLO 43.3. La serie $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$ diverge.

Aquí, $s_n = \frac{n}{2n+1}$. Como $\text{lím}_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, el teorema de divergencia implica que la serie diverge.

El recíproco del teorema 43.5 no es válido: $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = 0$ no implica que $\sum s_n$ converja. Esto se muestra mediante el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 43.4. Considere la famosa *serie armónica* $\sum \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$. Ahora analice las siguientes sumas parciales de esta serie:

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= S_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > S_4+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = S_4+\frac{4}{8} = S_4+\frac{1}{2} \\ &> 1+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{16} &= S_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} \\ &> S_8+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = S_8+\frac{1}{2} \\ &> 1+\frac{4}{2} \end{aligned}$$

Si se continúa de esta forma se obtendría $S_{32} > 1+\frac{5}{2}$, $S_{64} > 1+\frac{6}{2}$ y, en general, $S_{2^k} > 1+k/2$ cuando $k>1$. Esto significa que $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ y, por lo tanto, la serie diverge. Pero observe que $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \text{lím}_{n\to+\infty} 1/n = 0$.

Observación: la convergencia o la divergencia no se ve afectada por la adición o eliminación de un número finito de términos al comienzo de una serie. Por ejemplo, si se borran los primeros k términos de una serie y la suma de los términos borrados es c, entonces cada nueva suma parcial T_n tendrá la forma $S_{n+k} - c$. (Por ejemplo, T_1 es $S_{k+1} - c$.) Pero $\text{lím}_{n\to+\infty} (S_{n+k} - c)$ existe si y sólo si $\text{lím}_{n\to+\infty} S_{n+k}$ existe, y $\text{lím}_{n\to+\infty} S_{n+k}$ existe si y sólo si $\text{lím}_{n\to+\infty} S_n$ existe.

Notación: suele resultar útil tratar las series en las que los términos de $\langle S_n\rangle$ tienen índices enteros no negativos: $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$. Entonces, las sumas parciales S_n también comenzarían con $S_0 = s_0$, y la suma de una serie convergente se representaría como $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine si la serie $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots$ es convergente.

Ésta es una serie geométrica con razón $r=\frac{1}{5}$ y el primer término $a=\frac{1}{5}$. Como $|r| = \left|\frac{1}{5}\right| < 1$. El teorema 43.1*a*) dice que la serie converge y que su suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{1/5}{1-(1/5)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$

2. Analice la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$ para hallar la convergencia.

El n–ésimo término es $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Esto es igual a $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Por lo tanto, la n–ésima suma parcial

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdot+\frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0 = 1$. En estas condiciones, la serie converge y su suma es 1.

3. Se sabe que la serie geométrica $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ converge a $S = 2$. Analice la serie resultante cuando *a*) sus primeros términos se suprimen; *b*) los términos 3, 2 y 5 se agregan al comienzo de la serie.

a) La serie resultante es una serie geométrica $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$ con razón $\frac{1}{2}$. Converge a $\frac{1/16}{1-(1/2)} = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8}$. Observe que esto es lo mismo que $S-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}) = 2-(\frac{15}{8}) = \frac{1}{8}$.

b) La nueva serie es $3+2+5+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$. Las nuevas sumas parciales son las antiguas más (3 + 2 + 5). Como las sumas parciales antiguas convergen a 2, las nuevas convergen a 2 + 10 = 12. Entonces, la nueva serie resulta convergente y su suma es 12.

4. Demuestre que la serie $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\cdots$ diverge.

Aquí, $s_n = \frac{2^n-1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1-0 = 1 \neq 0$. Así, por el teorema de divergencia, la serie diverge.

5. Analice la serie $9-12+16-\frac{64}{3}+\frac{256}{9}-\cdots$ para hallar la convergencia.

Ésta es una serie geométrica con razón $r = -\frac{4}{3}$. Como $|r| = \frac{4}{3} > 1$, el teorema 43.1*b*) indica que la serie diverge.

6. Evalúe $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$.

Ésta es una serie geométrica con razón $r = -\frac{1}{2}$ y el primer término es $a = 1$. Como $|r| = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge y su suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{9/10}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$.

7. Demuestre que el decimal infinito 0.999… es igual a 1.

$0.999\cdots = \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$. Ésta es una serie geométrica con el primer término $a = \frac{9}{10}$ y razón $r = \frac{1}{10}$. Por tanto, converge a la suma $\frac{a}{1-r} = \frac{9/10}{1-(1/10)} = \frac{9/10}{9/10} = 1$.

8. Analice la serie $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$.

Aquí, $s_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Observe que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. Por tanto, la n–ésima suma parcial S_n es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$. Luego, la serie converge a $\frac{1}{2}$.

9. Analice la serie $3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{3}+\cdots$.

$s_n = \sqrt[n]{3} = 3^{1/n} = e^{(\ln 3)/n}$. Luego, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = e^0 = 1 \neq 0$ Por el teorema de divergencia, la serie diverge.

10. Analice la serie $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots$.

Esta serie se obtiene de la serie armónica al borrar los primeros nueve términos. Como la serie armónica diverge, entonces este serie también lo hace.

11. **(Paradoja de Zenón)** Aquiles (A) y una tortuga (T) tienen una carrera. T arranca 1000 pies adelante, pero A corre a 10 pies/s, mientras que T sólo a 0.01 pies/s. Cuando A alcanza el punto de partida de T, T ha avanzado una distancia corta, etcétera. Zenón decía que A nunca alcanzaría a T. Demuestre que sí lo hará.

Cuando A llega al punto de partida de T han pasado 100 segundos y T se ha movido 0.01(100) = 1 pie. A recorre ese pie adicional en 0.1 segundos, pero T se ha movido 0.01(0.1) = 0.001 pies más. A necesita 0.0001 segundos para recorrer esa distancia, pero *T*, entre tanto, se ha movido 0.01(0.0001) = 0.000001 pies, etcétera. El límite de la distancia entre *A* y *T* tiende a 0. El tiempo implicado es 100 + 0.1 + 0.0001 + 0.0000001 +…, que es una serie geométrica con primer término $a = 100$ y razón $r = 1/1000$. Su suma es

$$\frac{a}{1-r} = \frac{100}{1-(1/1000)} = \frac{100}{999/1000} = \frac{100000}{999}$$

lo que constituye un poco más de 100 segundos. La paradoja surge de la división artificial del hecho en infinitamente muchos pasos cada vez más y más cortos.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Analice cada una de las series geométricas siguientes. Si la serie converge, halle su suma.

a) $4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \cdots$ *Respuesta:* $S = \frac{16}{5}$

b) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \cdots$ *Respuesta:* Diverge

c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ *Respuesta:* $S = \frac{3}{4}$

d) $1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \ldots$ *Respuesta:* $S = \dfrac{e}{e-1}$

13. Una bola de caucho cae de una altura de 10 pies. Cuando golpea el suelo, rebota hacia arriba tres cuartos de la altura anterior. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la bola antes que se detenga?

Respuesta: 70 pies

14. Analice la serie $\sum \dfrac{1}{n(n+4)} = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{2\cdot 6} + \dfrac{1}{3\cdot 7} + \cdots$.

Respuesta: $S = \frac{25}{48}$

15. Analice la serie $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$

Respuesta: $S = \frac{1}{4}$

16. Evalúe $\sum_{n=1}^{+\infty} s_n$ cuando s_n es la siguiente:

a) 3^{-n}; *b*) $\dfrac{1}{n(n+2)}$; *c*) $\dfrac{1}{n(n+3)}$; *d*) $\dfrac{n}{(n+1)!}$

Respuestas: *a*) $\frac{1}{2}$; *b*) $\frac{3}{4}$; *c*) $\frac{11}{18}$; *d*) 1

17. Demuestre que cada una de las series diverge:

a) $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \cdots$ *b*) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \cdots$ *c*) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \cdots$

d) $e + \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{27} + \frac{e^4}{64} + \cdots$ *e*) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

18. Evalúe lo siguiente:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{7^n}\right)$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ *e*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ *f*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{3^n}$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 - 3}{n^2 + n + 2}$ *h*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^{2n}}$ *i*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$

Respuestas: *a*) $\frac{19}{6}$; *b*) $+\infty$; *c*) 1; *d*) $\frac{25}{6}$; *e*) 1; *f*) $+\infty$; *g*) $+\infty$; *h*) $-\frac{1}{26}$; *i*) 8; *j*) $+\infty$

19. (CG) En los problemas 1 a 6, use una calculadora en las primeras diez sumas parciales y determine con cuántas cifras decimales es correcta la décima suma parcial de la suma de la serie.

20. (CG) *a*) Si $|x| < 1$, ¿cuál función está representada por $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$?

b) Use una graficadora para graficar $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9$ en el intervalo $(-1, 1)$ y compare la gráfica con la de la función en el inciso *a*).

Respuesta: *a*) $\frac{1}{1-x}$

21. En cada punto siguiente, determine los valores de x para los cuales converge la serie indicada; luego halle la función representada por la suma de la serie para tales valores de x.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n$ *b*) $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-2)^n$ *c*) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ *d*) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

Respuestas: *a*) $|x| < \frac{1}{3}, \frac{1}{1-3x}$; *b*) $1 < x < 3\ \frac{1}{3-x}$; *c*) $|x| < 2, \frac{2}{2-x}$; *d*) $-1 < x < 3, \frac{2}{3-x}$

44

Series con términos positivos. Criterio de la integral. Criterios de comparación

Series con términos positivos

Si todos los términos de una serie $\sum s_n$ son positivos, entonces la serie se denomina *serie positiva*.

Para una serie positiva $\sum s_n$, la sucesión de sumas parciales $\langle S_n \rangle$ es una sucesión creciente porque $S_{n+1} = S_n + s_{n+1} > S_n$. Con esto se llega al siguiente resultado útil.

Teorema 44.1. Una serie positiva $\sum s_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\langle s_n \rangle$ es acotada.

Para comprobarlo, observe primero que si $\sum s_n$ converge, entonces, por definición, $\langle S_n \rangle$ converge y, por tanto, por el teorema 42.1, $\langle S_n \rangle$ es acotada. Recíprocamente, si $\langle S_n \rangle$ es acotada. Por el contrario, si $\langle S_n \rangle$ es acotada, entonces, como también es creciente, por el teorema 42.8 se deduce que $\langle S_n \rangle$ converge, es decir, $\sum s_n$ converge.

Teorema 44.2. (Criterio de la integral.) Sea $\sum s_n$ una serie positiva y sea $f(x)$ una función continua positiva decreciente en $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = s_n$ para todo entero positivo n. Entonces:

$$\sum s_n \text{ converge si y sólo si } \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

De la figura 44.1 se observa que $\int_1^n f(x)dx < s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} = S_{n-1}$. Si $\sum s_n$ converge, entonces $\langle S_n \rangle$ es acotada; así $\int_1^u f(x)\,dx$ será acotada para todo $u \geq 1$ y, por tanto, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Recíprocamente, de la figura 44.1 se tiene que $s_2 + s_3 + \cdots + s_n < \int_1^n f(x)\,dx$ y, por consiguiente, $S_n < \int_1^n f(x)\,dx + s_1$. En estas condiciones, si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $S_n < \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + s_1$ y en consecuencia $\langle S_n \rangle$ será acotada. Así, por el teorema 44.1, $\sum s_n$ converge, con lo que se demuestra el teorema 44.2.

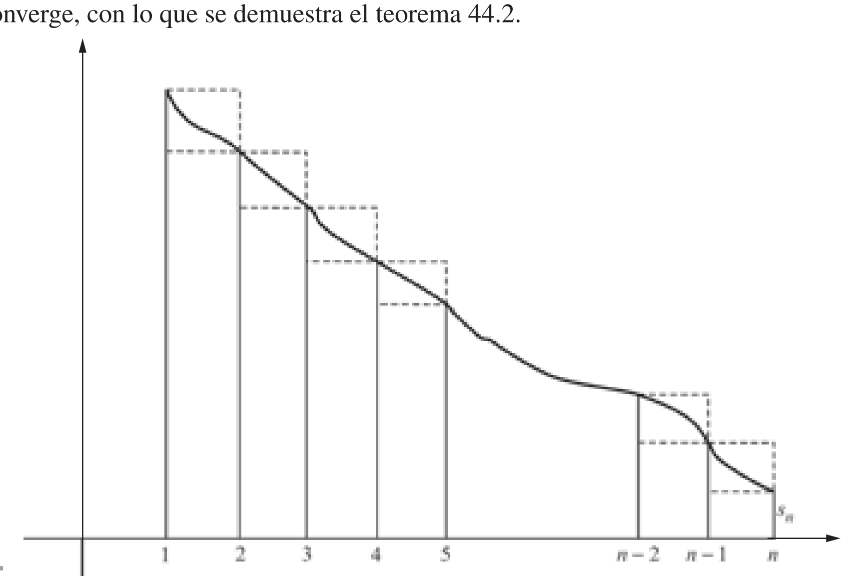


Fig. 44.1

EJEMPLO 44.1. $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Ahora,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \tfrac{1}{2}(\ln x)^2\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \tfrac{1}{2}((\ln u)^2 - 0) = +\infty$$

Por tanto, por el criterio de la integral $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

EJEMPLO 44.2. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Sea $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ahora

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} -\left(\frac{1}{u} - 1\right) = 1$$

Así, por criterio de la integral $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Observación: el criterio de la integral puede extenderse fácilmente al caso en que el límite inferior de la integral se cambia de 1 a cualquier entero positivo.

Teorema 44.3. **(Criterios de comparación.)** Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series positivas tales que existe un m entero positivo para el cual $a_k \le b_k$ para todo entero $k \ge m$. Así:

1. Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.

Se podría asumir en la deducción del teorema 44.3 que $m = 1$, ya que la convergencia no se ve afectada al borrar un número finito de términos al comienzo de una serie. Observe también que el numeral 2 de la lista de arriba es una consecuencia lógica del numeral 1. Para probar este último, supóngase que $\sum b_n$ converge. Sea $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ la n-ésima suma parcial para $\sum b_n$, y sea $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ la n-ésima suma parcial para $\sum a_n$. Entonces, $A_n \le B_n$, pues $a_k \le b_k$ para todo k. Como $\sum b_n$ converge, se deduce por el teorema 44.1 que la sucesión $\langle B_n \rangle$ es acotada. En virtud de que $A_n \le B_n$, para todo n, se deduce que la sucesión $\langle A_n \rangle$ es acotada. Entonces, por el teorema 44.1, $\sum a_n$ converge. Esto demuestra el teorema 44.3.

EJEMPLO 44.3. $\sum \frac{1}{n^2 + 5}$ converge.

Sea $a_n = \frac{1}{n^2 + 5}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$. Así, $a_n < b_n$ para toda n. Por el ejemplo 2, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Entonces, por el criterio de comparación, $\sum \frac{1}{n^2 + 5}$ converge.

EJEMPLO 44.4. $\sum \frac{1}{3n + 5}$ diverge.

Sea $a_n = \frac{1}{4n}$ y $b_n = \frac{1}{3n + 5}$. Ahora, $a_n < b_n$ $n \ge 5$. (Para comprobarlo, observe que $\frac{1}{4n} \le \frac{1}{3n + 5}$ equivale a $3n + 5 \le 4n$, que equivale a $5 \le n$.) Recuérdese que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge (por el ejemplo 4 del capítulo 43). Por tanto, $\sum \frac{1}{4n}$ diverge por el teorema 43.2. El criterio de comparación implica que $\sum \frac{1}{3n + 5}$ diverge.

A veces, como en el ejemplo 44.4, es preciso realizar maniobras complicadas para aplicar el criterio de comparación. El resultado siguiente brinda una herramienta mucho más flexible.

Teorema 44.4. **(Criterio de comparación por paso al límite.)** Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series positivas tales que $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe y $0 < L < +\infty$. Entonces, $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge.

Supóngase que $\sum b_n$ converge. Sea c un número positivo tal que $L < c$. Entonces existe un entero positivo m tal que $a_n/b_n < c$ para todo $n \geq m$. Por tanto, $a_n < cb_n$ para todo $n \geq m$. Pero como $\sum cb_n$ converge, $\sum cb_n$ también lo hace. Por consiguiente, por el criterio de comparación $\sum a_n$ converge. Recíprocamente, si $\sum a_n$ converge, entonces, $\sum b_n$ también lo hace. (De hecho, $\text{lím}_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{L} > 0$ y es posible emplear el mismo tipo de argumento que se acaba de dar.)

EJEMPLO 44.5. $\sum \dfrac{3n^2 - 5n + 4}{7n^3 + 2}$ diverge.

Cuando se trata con los cocientes de polinomios, una regla práctica es ignorar todo salvo los primeros términos. En este caso, se tiene $\dfrac{3n^2}{7n^3} = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{1}{n}$. Se intenta una comparación por paso al límite con $\dfrac{1}{n}$. Ahora

$$\text{lím}_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{3n^2 - 5n + 4}{7n^3 + 2} \right) \bigg/ \frac{1}{n} \right] = \text{lím}_{n\to+\infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 4n}{7n^3 + 2} = \frac{3}{7}.$$

Como $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, el criterio de comparación por paso al límite dice que $\sum \dfrac{3n^2 - 5n + 4}{7n^3 + 2}$ diverge.

EJEMPLO 44.6 $\sum \dfrac{5n - 2}{\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7}}$ converge.

Mediante la regla práctica dada en el ejemplo 44.5 respecto a los primeros términos, se observa que $\dfrac{5n}{\sqrt{n^6}} = \dfrac{5n}{n^3} = \dfrac{5}{n^2}$. Entonces, se intenta una comparación por paso al límite con $\dfrac{1}{n^2}$:

$$\text{lím}_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{5n - 2}{\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7}} \right) \bigg/ \frac{1}{n^2} \right] = \text{lím}_{n\to+\infty} \frac{5n^3 - 2n^2}{\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7}}$$

Se divide el numerador y el denominador entre n^3. Nótese que en el denominador se obtendría

$$\frac{1}{n^3}\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7} = \frac{1}{\sqrt{n^6}}\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7} = \sqrt{1 - \frac{4}{n^4} + \frac{7}{n^6}}$$

El resultado sería

$$\text{lím}_{n\to+\infty} \frac{5 - \dfrac{2}{n}}{\sqrt{1 - \dfrac{4}{n^4} + \dfrac{7}{x^6}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Por tanto, como se sabe por el ejemplo 44.2 que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, el criterio de comparación por paso al límite implica que $\sum \dfrac{5n - 2}{\sqrt{n^6 - 4n^2 + 7}}$ converge.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Considere la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$, donde p es una constante. Se trata de la denominada *serie p*. Entonces:

a) Si $p > 1$, la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$ converge.

b) Si $p \leq 1$, la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$ diverge.

Podría suponerse que $p \neq 1$, ya que se conoce que la serie armónica $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. También podría suponerse que $p > 0$; si $p \leq 0$, $\text{lím}_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} \neq 0$ y el teorema de divergencia implica que la serie diverge. Se aplica el criterio de la integral con $f(x) = 1/x^p$. ($f(x)$ es positiva y decreciente en $[1, +\infty)$.) Ahora,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \text{lím}_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{1}{x^p}\,dx = \text{lím}_{u\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg]_1^u$$

$$= \text{lím}_{u\to+\infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

a) $p > 1$. Entonces, $p - 1 > 0$ y. Así $\text{lím}_{n\to+\infty} u^{1-p} = \text{lím}_{n\to+\infty} \frac{1}{u^{p-1}} = 0$. Luego, $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{p-1}$.
Por el criterio de la integral $\sum \frac{1}{n^p}$ converge.

b) $p < 1$. Entonces, $1 - p > 0$ y $\text{lím}_{n\to+\infty} u^{1-p} = +\infty$. Luego, $\text{lím}_{n\to+\infty}\left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = +\infty$ y por el criterio de la integral $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge.

En los problemas 2 a 7 determine la convergencia en las series dadas.

2. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$.

$s_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$. En $[1, +\infty)$, $f(x) > 0$ y f es decreciente.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{2}\int_1^u (2x-1)^{-1/2}(2)\,dx$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \tfrac{1}{2}(2)(2x-1)^{1/2}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \left((2u-1)^{1/2} - 1\right) = +\infty$$

En consecuencia, la serie diverge por el criterio de la integral.

3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{29} + \cdots + \frac{1}{n^3+2} + \cdots$.

$\frac{1}{n^3+2} < \frac{1}{n^3}$. $\sum \frac{1}{n^3}$ es convergente, ya que es una serie p con $p = 3 > 1$. Por tanto, por el criterio de comparación, $\sum \frac{1}{n^3+2}$ es convergente.

4. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$.

$s_n = \frac{1}{n!}$. Observe que $\frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ para $n \ge 2$. Como $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ es una serie geométrica convergente (con razón $r = \frac{1}{2}$), $\sum \frac{1}{n!}$ es convergente por el criterio de comparación.

5. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \cdots$.

$s_n = \frac{n+1}{n^3}$. Use la comparación por paso al límite con $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^3}\Big/\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3} = 1$$

Se sabe que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Entonces, por el criterio de comparación por paso al límite, $\sum \frac{n+1}{n^3}$ converge.

6. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$.

$s_n = \frac{1}{n^n}$. Ahora, $\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ y $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ es una serie geométrica convergente ($r = \frac{1}{2}$). Entonces, por el criterio de comparación, $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

7. $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$.

$s_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}$. Use la comparación por paso al límite con $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)\Big/\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n}{n^3+1} = 1$$

Se sabe que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Entonces, por el criterio de comparación por paso al límite $\sum \frac{n^2+1}{n^3+1}$ diverge.

8. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$.

$s_n = \frac{1}{n\ln n}$ está definida para $n \geq 2$.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{u\to+\infty}\int_2^{u}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{u\to+\infty}\ln(\ln u)\Big]_2^u = \lim_{u\to+\infty}(\ln(\ln u)-\ln(\ln 2)) = +\infty$$

Por tanto, la serie diverge por el criterio de la integral.

9. ¿Cuántos términos de $\sum \frac{1}{n^2}$ bastan para obtener una exactitud de dos cifras decimales (es decir, un error < $5/10^3$)?

Si se utilizan k términos, se requiere que el error

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \leq \int_k^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_k^u\frac{1}{x^2}dx = \lim_{u\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big]_k^u = \lim_{u\to+\infty}-\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{k} < \frac{5}{10^3} = \frac{1}{200}$$

Por tanto, $200 < k$. Entonces, es suficiente utilizar 201 términos de la serie. (Puede emplear una graficadora para hallar $\sum_{n=1}^{201}\frac{1}{n^2}\approx 1.64$.)

10. Supóngase que $\sum s_n$ converge en virtud del criterio de la integral aplicada a $f(x)$ y, para cada n, el error (o residuo), R_k después de k términos se define como

$$\sum_{n=1}^{+\infty}s_n-\sum_{n=1}^{k}s_n. \quad \text{Entonces} \quad R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty}s_n < \int_k^{+\infty}f(x)\,dx.$$

Halle una cota en el error cuando $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ es aproximada por los primeros cinco términos $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=\frac{5269}{3600}\approx 1.4636$.

El error $R_5 < \int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{5} = 0.2$.

11. Supóngase que $\sum s_n$ y $\sum c_n$ son series positivas, $\sum c_n$ converge y $s_n \leq c_n$ para todo n. Entonces el error R_k después de k términos es

$$\sum_{n=1}^{+\infty}s_n-\sum_{n=1}^{k}s_n = \sum_{n=k+1}^{+\infty}s_n \leq \sum_{n=k+1}^{+\infty}c_n.$$

¿Por lo menos cuántos términos se necesitan para calcular $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5+1}$ con un error < 0.00001?

En este caso $s_n = \frac{1}{n^5+1}$ y $c_n = \frac{1}{n^5}$. Es suficiente tener $\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n^5} < 0.00001$. Ahora, $\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{n^5} < \int_k^{+\infty}\frac{1}{x^5}dx = \frac{1}{4k^4}$. Entonces, se necesita $\frac{1}{4k^4} < 0.00001 = \frac{1}{100\,000}$. De forma equivalente, $100\,000 < 4k^4$, $25\,000 < k^4$, $k \geq 13$.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

Para los problemas 12 a 43, determine si la serie converge.

12. $\sum \frac{3}{n(n+1)}$ *Respuesta:* converge; comparación con $\sum \frac{3}{n^2}$

13. $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ *Respuesta:* diverge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n}$

14. $\sum \frac{n}{n^2+1}$ *Respuesta:* diverge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n}$

15. $\sum \frac{n}{e^n}$ *Respuesta:* converge; criterio de la integral

16. $\sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ *Respuesta:* converge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n^2}$

17. $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ *Respuesta:* converge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n^2}$

18. $\sum \frac{1}{n^3-1}$ *Respuesta:* converge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n^3}$

19. $\sum \frac{n-2}{n^3}$ *Respuesta:* converge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n^2}$

20. $\sum \frac{\ln n}{n^2+2}$ *Respuesta:* converge; comparación paso al límite con $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

21. $\sum n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ *Respuesta:* diverge; teorema de divergencia

22. $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *Respuesta:* diverge; serie p, $p = \frac{1}{3} < 1$

23. $\sum \frac{1}{n^{n-1}}$ *Respuesta:* converge; comparación con $\sum \frac{1}{2^{n-1}}, n \geq 2$

24. $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ *Respuesta:* diverge; comparación con $\sum \frac{\ln n}{n}$

25. $\sum \frac{1}{1+\ln n}$ *Respuesta:* diverge; comparación con $\sum \frac{1}{n}$

26. $\sum \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$ *Respuesta:* diverge; comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

27. $\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ (para $n \geq 3$) *Respuesta:* diverge; criterio de la integral

28. $\sum \dfrac{1}{n \ln n\, (\ln(\ln n))^2}$ (para $n \geq 3$) *Respuesta:* converge; criterio de la integral

29. $\dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{13^2} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{1}{(3n+1)^2}$; converge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{n^2}$

30. $3 + \dfrac{3}{2^{1/3}} + \dfrac{3}{3^{1/3}} + \dfrac{3}{4^{1/3}} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{3}{n^{1/3}}$; diverge; serie p, $p = \frac{1}{3} < 1$

31. $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{13} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{1}{4n-3}$; diverge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{n}$

32. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dfrac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$; converge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{n^2}$

33. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{2 \cdot 3^2} + \dfrac{4}{3 \cdot 3^3} + \dfrac{5}{4 \cdot 3^4} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{n+1}{n \cdot 3^n}$; converge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{3^n}$

34. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} + \dfrac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{1}{n2^n}$; converge; comparación con $\sum \dfrac{1}{2^n}$

35. $\dfrac{2}{1 \cdot 3} + \dfrac{3}{2 \cdot 4} + \dfrac{4}{3 \cdot 5} + \dfrac{5}{4 \cdot 6} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{n+1}{n(n+2)}$; diverge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{n}$

36. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{4^3} + \dfrac{4}{5^4} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{n}{(n+1)^n}$; converge; comparación con $\sum \dfrac{1}{2^{n-1}}$

37. $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^{5/2}} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{1}{n^{(n+2)/2}}$; converge; comparación con $\sum \dfrac{1}{n^2}$

38. $1 + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{10} + \dfrac{5}{17} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$; diverge; comparación por paso al límite con $\sum \dfrac{1}{n}$

39. $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots.$

Respuesta: $s_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (2+3n)}$; converge; comparación con $\sum (\frac{2}{3})^n$

40. $\frac{3}{2}+\frac{5}{10}+\frac{7}{30}+\frac{9}{68}+\cdots.$

Respuesta: $s_n=\frac{2n+1}{n^3+n}$; converge; comparación por paso al límite con $\sum\frac{1}{n^2}$

41. $\frac{3}{2}+\frac{10}{24}+\frac{29}{108}+\frac{66}{320}+\cdots.$

Respuesta: $s_n=\frac{n^3+2}{n^4+n^3}$; diverge; comparación por paso al límite con $\sum\frac{1}{n}$

42. $\frac{1}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-2}+\frac{3}{4^2-3}+\frac{4}{5^2-4}+\cdots.$

Respuesta: $s_n=\frac{n}{(n+1)^2-n}$; diverge; comparación por paso al límite con $\sum\frac{1}{n}$

43. $\frac{1}{2^3-1^2}+\frac{1}{3^3-2^2}+\frac{1}{4^3-3^2}+\frac{1}{5^3-4^2}+\cdots.$

Respuesta: $s_n=\frac{1}{(n+1)^3-n^2}$; converge; comparación por paso al límite con $\sum\frac{1}{n^3}$

44. (CG) Estime el error cuando:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n+1}$ es aproximada por la suma de sus primeros seis términos.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^n+3}$ es aproximada por la suma de sus primeros seis términos.

Respuestas: *a*) 0.0007; *b*) 0.00009

45. (CG) *a*) Calcule el error cuando la serie geométrica $\sum\frac{3}{2^n}$ es aproximada por la suma de sus primeros seis términos.

b) ¿Cuántos términos son suficientes para calcular la suma si el error permisible es 0.00005?

Respuestas: *a*) 0.047; *b*) 16

46. (CG) *a*) ¿Cuántos términos es suficiente aproximar $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ con un error < 0.001?

b) Determine un límite en el error si se aproxima $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ por la sexta suma parcial

c) ¿Cuál es la aproximación a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ por la sexta suma parcial, corregida a cuatro cifras decimales?

Respuestas: *a*) 7; *b*) 0.0015; *c*) 1.0811

47. (CG) Sea S_n la *n*-ésima suma parcial $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ de la serie armónica divergente.

a) Demuestre que $\ln(n+1)\le S_n\le 1+\ln n$.

b) Sea $E_n=S_n-\ln n$. Demuestre que $\langle E_n\rangle$ es acotada y decreciente.

c) Demuestre que $\langle E_n\rangle$ converge. Su límite se representa con γ y se denomina la constante de *Euler*.

d) Use una graficadora para aproximar E_{999} a ocho cifras decimales.

Respuestas: *d*) 0.57771608 (de hecho, $\gamma\sim 0.57721566$).

48. (Extensión del criterio de comparación por paso al límite.) Supóngase que $\sum s_n$ y $\sum t_n$ son series positivas. Demuestre

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{t_n} = 0$ y $\sum t_n$ converge, entonces $\sum s_n$ también lo hace.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{t_n} = +\infty$ y $\sum t_n$ diverge, entonces $\sum s_n$ también lo hace.

49. Aplique la extensión del criterio de comparación por paso al límite para determinar si $\sum \dfrac{(\ln n)^4}{n^3}$ converge.

Respuesta: converge; use $\sum \dfrac{1}{n^2}$ y el problema 48*a*).

50. Supóngase que $\sum s_n$ es una serie positiva y $\text{lím}_{n\to+\infty}\, ns_n$ existe y es positivo. Demuestre que $\sum s_n$ diverge. (*Sugerencia:* compare por paso al límite con $\sum\left(\frac{1}{n}\right)$.)

51. Supóngase que $\sum s_n$ y $\sum t_n$ son series convergentes positivas. Demuestre que $\sum s_n\, t_n$ converge.

45

Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Criterio del razón

Series alternadas

Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos es una *serie alternada*. Se puede escribir de la forma

$$\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

donde a_n son todos positivos.

Teorema 45.1. Teorema de las series alternadas. Sea $\sum(-1)^{n+1} a_n$ una serie alternada. Supóngase que: **1**. la sucesión $\langle a_n\rangle$ es decreciente; **2**. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Entonces:

I. $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge a una suma A.

II. Si A_n es la n–ésima suma parcial y $R_n = A - A_n$ es el error correspondiente, entonces $|R_n| < a_{n+1}$ (es decir, el error es menor en magnitud que el primer término omitido).

I. Como $\langle a_n\rangle$ es decreciente, $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ y, por tanto, $a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} A_{2n+2} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \\ &= A_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > A_{2n} > 0 \end{aligned}$$

Entonces, la sucesión $\langle A_{2n}\rangle$ es creciente. También,

$$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Por tanto, $\langle A_{2n}\rangle$ es acotada. Luego, por el teorema 42.8, $\langle A_{2n}\rangle$ converge al límite L. Ahora $A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1}$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to+\infty} A_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} A_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L + 0 = L$$

Así pues, $\lim_{n\to+\infty} A_n = L$ y, por tanto, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge.

II. $R_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \cdots > 0$ y $R_{2n} = a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \cdots < a_{2n+1}$. Por tanto, $|R_{2n}| < a_{2n+1}$. Para índices impares, $R_{2n+1} = -(a_{2n+2} - a_{2n+3}) - (a_{2n+4} - a_{2n+5}) - \cdots < 0$ y $R_{2n+1} = -a_{2n+2} + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + (a_{2n+5} - a_{2n+6}) + \cdots > -a_{2n+2}$. Por tanto, $|R_{2n+1}| < a_{2n+2}$. Así, para todo k, $|R_k| < a_{k+1}$.

EJEMPLO 45.1. La serie armónica alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

converge en virtud del teorema de la serie alternada. Por el numeral II de ese teorema, la magnitud $|R_n|$ del error después de n términos es menor que $\frac{1}{n+1}$. Si se desea un error menor que 0.1, es suficiente tomar $\frac{1}{n+1}\leq 0.1=\frac{1}{10}$, que equivale a $10 \leq n + 1$. Entonces, $n \geq 9$. Así, debe usarse

$$A_9 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{1879}{2520}\sim 0.7456$$

Definición. Considérese una serie arbitraria $\sum s_n$.

$\sum s_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum |s_n|$ es convergente.
$\sum s_n$ es *condicionalmente convergente* si es convergente pero no absolutamente convergente.

EJEMPLO 45.2. La serie armónica alternada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente.

EJEMPLO 45.3 La serie $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ es absolutamente convergente.

Es necesario enunciar dos resultados significativos sobre la convergencia absoluta y condicional. En adelante, por reorganización de una serie se entenderá una serie obtenida de una serie dada mediante la reorganización o reordenamiento de sus términos (es decir, cambiando el orden en el que se presentan los términos).

1. Si $\sum s_n$ es absolutamente convergente, entonces toda reorganización de $\sum s_n$ es convergente y tiene la misma suma que $\sum s_n$.
2. Si $\sum s_n$ es condicionalmente convergente y si c es cualquier número real o $+\infty$ o $-\infty$, entonces hay una reorganización de $\sum s_n$ con suma c.

Teorema 45.2. Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.
En el problema 1 puede verse la demostración.

Observe que una serie positiva es absolutamente convergente si y sólo si es convergente.
El siguiente es probablemente el más útil de todos los criterios de convergencia.

Teorema 45.3. El criterio de la razón. Sea $\sum s_n$ una serie cualquiera.

1. Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r < 1$, entonces $\sum s_n$ es absolutamente convergente.
2. Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = r$ y ($r > 1$ o $r = +\infty$), entonces $\sum s_n$, diverge.
3. Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = 1$, entonces no se puede deducir ninguna conclusión sobre la convergencia o divergencia de $\sum s_n$.

   Para ver una demostración, repase el problema 14.

Teorema 45.4. El criterio de la raíz. Sea $\sum s_n$ una serie cualquiera.

1. Si Si $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$, entonces $\sum s_n$ es absolutamente convergente.
2. Si $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = r$ y ($r > 1$ o $r = +\infty$), entonces $\sum s_n$ es absolutamente divergente.
3. Si $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|s_n|} = 1$, entonces no se puede deducir ninguna conclusión sobre la convergencia o divergencia de $\sum s_n$.

   En el problema 15 puede ver una demostración.

EJEMPLO 45.4. Considere una serie $\sum \frac{2^{2n}}{n^n}$. Entonces, $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = \text{lím}_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$. Por el criterio de la raíz, la serie converge absolutamente.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre que si $\sum s_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

$0 \le s_n + |s_n| \le 2|s_n|$. Como $\sum |s_n|$ converge, $\sum 2|s_n|$ también lo hace. Luego, por el criterio de comparación, $\sum (s_n + |s_n|)$ converge. Por tanto, $\sum s_n = \sum s_n((s_n + |s_n|) - |s_n|)$ converge por el corolario 43.4.

En los problemas 2 a 13, determine si la serie indicada converge absolutamente, condicionalmente o no converge.

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$. $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge por comparación con la serie p convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Entonces, $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$ es absolutamente convergente.

3. $\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} + \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{e^n}$. La serie $\sum \frac{n}{e^n}$ converge por el criterio de la integral [utilizando $f(x) = \frac{x}{e^x}$]. Por tanto, $\sum (-1)^{n+1}\frac{n}{e^n}$ es absolutamente convergente.

4. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $\left\langle \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rangle$ es una sucesión decreciente, la serie converge en virtud del teorema de series alternadas. Pero $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, ya que es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.

5. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$.

La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ es una serie geométrica con razón $r = \frac{1}{2}$. Como $|r| < 1$, converge y, por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

6. $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n-1}}$. Se aplica el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{n+1}{3^n} \bigg/ \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} \quad \text{Entonces,} \quad \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

7. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n^3}$. Preste atención a $\sum |s_n|$. $|s_n| = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^3}$. Entonces $\sum |s_n|$ converge por comparación con la serie p convergente $\sum \frac{1}{n^3}$. Por tanto, la serie es absolutamente convergente.

8. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \cdots$.

$s_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n}$. Observe que $\left\langle \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n} \right\rangle$ es una sucesión decreciente $\left(\text{como } D_x\left(\frac{x+1}{(x+2)x}\right) < 0\right)$. Por tanto, la serie dada es convergente por el teorema de series alternadas. Sin embargo, $|s_n| > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Entonces, $\sum |s_n|$ diverge por comparación con $\sum \frac{1}{n}$. Es decir, la serie dada resulta condicionalmente convergente.

9. $2-\dfrac{2^3}{3!}+\dfrac{2^5}{5!}-\dfrac{2^7}{7!}+\cdots.$

$s_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Se aplica el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big/\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}=\frac{4}{(2n+1)(2n)}$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|=0$ y, por consiguiente, la serie es absolutamente convergente.

10. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{2^3+1}+\dfrac{9}{3^3+1}-\dfrac{16}{4^3+1}+\cdots$

$s_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n^3+1}$. Como $\left\langle\dfrac{n^2}{n^3+1}\right\rangle$ es una sucesión decreciente para $n\geq 2$, la serie dada converge por el teorema de series alternadas. La serie $\sum|s_n|$ es divergente por la comparación por paso al límite con $\sum\dfrac{1}{n}$. Por tanto, la serie dada es condicionalmente convergente.

11. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2^3+1}+\dfrac{3}{3^3+1}-\dfrac{4}{4^3+1}+\cdots.$

$s_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^3+1}$. $\sum|s_n|$ es convergente por la comparación por paso al límite con $\sum\dfrac{1}{n^2}$. Por ello, la serie dada es absolutamente convergente.

12. $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}-\dfrac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots.$

$s_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n2^n}$. Se aplica el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\frac{1}{n2^n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2}$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\dfrac{1}{2}<1$. Entonces, la serie dada es absolutamente convergente.

13. $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{(n+1)!}.$

Se aplica el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{(n+1)^3}{(n+2)!}\Big/\frac{n^3}{(n+1)!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|=0$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

14. Justifique el criterio de la razón (teorema 45.3)

a) Sea $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|=r<1$. Se selecciona t tal que $r<t<1$. Entonces, existe un entero m tal que si $n\geq m$, $\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|\leq t$. Por tanto,

$$|s_{m+1}|\leq t|s_m|,\qquad |s_{m+2}|\leq t|s_{m+1}|\leq t^2|s_m|,\qquad \ldots\qquad |s_{m+k}|\leq t^k|s_m|$$

Pero $\sum t^k|s_m|$ es una serie geométrica convergente (con razón $t<1$). Luego, por el criterio de comparación, $\sum|s_n|$ converge. Así, $\sum s_n$ es absolutamente convergente.

b) Sea $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|=r$ y $r>1$ o $r=+\infty$. Se selecciona t de manera que $1<t<r$. Existe un entero positivo m tal que si $n\geq m$, $\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right|\geq t$. Por tanto,

$$|s_{m+1}|\geq t|s_m|,\qquad |s_{m+2}|\geq t|s_{m+1}|\geq t^2|s_m|,\qquad \ldots\qquad |s_{m+k}|\geq t^k|s_m|$$

Por consiguiente $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \infty$ y, por el teorema de divergencia, $\sum s_n$ diverge.

c) Considere $\sum \frac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{n+1}\right)\Big/\frac{1}{n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. En este caso, la serie diverge. Ahora considere $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

En este caso, la serie converge.

15. Justifique el criterio de la raíz (teorema 45.4).

a) Supóngase que $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r < 1$. Se selecciona t de manera que $r < t < 1$. Entonces, existe un número positivo m tal que $\sqrt[n]{|s_n|} \le t$ para $n \ge m$. Por tanto, $|s_n| \le t^n$ para $n \ge m$. Por consiguiente, $\sum |s_n|$ converge por comparación con la serie geométrica convergente $\sum t^n$. Entonces, $\sum s_n$ es absolutamente convergente.

b) Supóngase que $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = r$ y $r > 1$ o $r = +\infty$. Se selecciona t de manera que $1 < t < r$. Para algún entero positivo m, $\sqrt[n]{|s_n|} \ge t$ para $n \ge m$. Entonces, $|s_n| \ge t^n$ para $n \ge m$. Como $\text{lím}_{n\to+\infty} t^n = +\infty$, $\text{lím}_{n\to+\infty} s_n = \infty$. Por consiguiente, por el teorema de divergencia, $\sum s_n$ diverge.

c) Considere $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$. En ambos casos, $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|s_n|} = 1$. (Nótese que $\text{lím}_{n\to+\infty} n^{-n} = \text{lím}_{n\to+\infty} e^{-(\ln n)/n} = 1$).

En los problemas 16 a 22, aplique el criterio de la razón para probar la convergencia de las series.

16. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$.

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}\Big/\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{n+1}{n}. \quad \text{Entonces,} \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{1}{3} < 1$$

Así, la serie converge por el criterio de la razón.

17. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \cdots$.

$$s_n = \frac{n!}{3^n}. \quad \text{Entonces,} \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\Big/\frac{n!}{3^n} = \frac{n+1}{3}$$

Luego, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = +\infty$ y la serie diverge por el criterio de la razón.

18. $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots$.

$$s_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}. \quad \text{Entonces,} \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\Big/\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$. Por tanto, la serie converge por el criterio de la razón.

19. $2 + \frac{3}{2}\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{4^3} + \cdots$.

$$s_n = \frac{n+1}{n}\frac{1}{4^{n-1}}. \quad \text{Entonces,} \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{4^n}\right)\Big/\left(\frac{n+1}{n}\frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{1}{4}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{1}{4} < 1$. Por tanto, la serie converge por el criterio de la razón.

20. $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$.

$$s_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}. \quad \text{Luego,} \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}\Big/\frac{n^2+1}{n^3+1} = \frac{((n+1)^2+1)(n^3+1)}{((n+1)^3+1)(n^2+1)}.$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = 1$. Por ende, el criterio de la razón no arroja conclusión alguna. Sin embargo, la comparación por paso al límite con $\sum \frac{1}{n}$ muestra que la serie diverge.

21. $\sum \frac{n3^n}{(n+1)!}$.

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{(n+2)!} \bigg/ \frac{n3^n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n}\frac{3}{n+2}. \quad \text{Entonces,} \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = 0$$

Por tanto, la serie converge por criterio de la razón.

22. $\sum \frac{n^n}{n!}$.

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \quad \text{Entonces,} \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = e > 1$$

Por tanto, la serie diverge por el criterio de la razón.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 23 a 40, determine si la serie alternada indicada es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

23. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

24. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$ *Respuesta*: condicionalmente convergente

25. $\sum (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ *Respuesta*: divergente

26. $\sum (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{3n+1}$ *Respuesta*: condicionalmente convergente

27. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ *Respuesta*: condicionalmente convergente

28. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ *Respuesta*: divergente

29. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

30. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *Respuesta*: condicionalmente convergente

31. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

32. $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

33. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

34. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ *Respuesta*: condicionalmente convergente

35. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^4+2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

36. $\sum(-1)^{n+1}n\left(\frac{3}{4}\right)^4$ *Respuesta*: absolutamente convergente

37. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^2-3}{n^2+n+2}$ *Respuesta*: divergente

38. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^n}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

39. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^{n+2}}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

40. $\sum\frac{\cos\pi n}{n^2}$ *Respuesta*: absolutamente convergente

41. (CG) ¿Cuántos términos de $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ serán suficientes para obtener una aproximación dentro de 0.0005 de la suma real? Determine la aproximación.

Respuesta: $n = 6$: $\frac{91}{144} \sim 0.632$

42. (CG) ¿Cuántos términos de $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ bastarán para obtener una aproximación de la suma real con un error < 0.001? Determine tal aproximación.

Respuesta: $n = 3$; 0.842

43. (CG) ¿Cuántos términos de $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ bastarán para obtener una aproximación de la suma real con un error < 0.001? Determine la aproximación.

Respuesta: $n = 1000$; 0.693

En los problemas 44 a 49, determinar si la serie converge.

44. $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *Respuesta*: convergente

45. $\sum\frac{(2n)!}{n^4}$ *Respuesta*: divergente

46. $\sum\frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ *Respuesta*: divergente

47. $\sum\frac{3^n}{n!}$ *Respuesta*: convergente

48. $\sum \frac{4^n}{(n+2)^n}$ *Respuesta*: convergente

49. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *Respuesta*: divergente

50. Determine si $\sum (-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Respuesta: condicionalmente convergente

En los problemas 51 y 52, determine el número de términos que bastan para aproximar la suma de la serie indicada con precisión de cuatro cifras decimales (es decir, con un error $< 5/10^5$) y calcule la aproximación.

51. (CG) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^5}$ *Respuesta*: $n = 6$; 0.9721

52. (CG) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$ *Respuesta*: $n = 4$; 0.8415

53. Sea $|r| < 1$

a) Demuestre que $\sum nr^n = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \ldots$ converge.

b) Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$. (*Sugerencia:* sea $S = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots$, multiplique esta ecuación por r y reste el resultado de la ecuación original).

c) Demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

46

Serie de potencias

Serie de potencias

Una serie infinita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots \tag{46.1}$$

se denomina *serie de potencias* en x en torno a c con coeficientes $\langle a_n \rangle$. Un caso especial e importante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{46.2}$$

es una serie de potencias en torno a 0.

Para un valor de x dado, la serie (46.1) converge o diverge. Por tanto, (46.1) determina una función f cuyo dominio es el conjunto de todos los x para los cuales (46.1) converge y cuyo valor $f(x)$ correspondiente es la suma de la serie.

Nótese que (46.1) converge cuando $x = c$.

EJEMPLO 46.1. La serie de potencias en torno a 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$$

es una serie geométrica con razón $r = x$. Así, converge para $|x| < 1$ y su suma es $\frac{1}{1-x}$. Entonces, el dominio de la función correspondiente es un intervalo en torno a 0.

Teorema 46.1. Supóngase que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ converge para $x_0 \neq c$. Por tanto, converge absolutamente para todo x tal que $|x - c| < |x_0 - c|$ (es decir, para todo x que esté más próximo a c que x_0).

Repase el problema 4 para ver una demostración.

Teorema 46.2. Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$, uno de los tres casos siguientes es verdadero:

a) Converge para todo x.

b) Converge para todo x en un intervalo abierto $(c - R_1, c + R_1)$ alrededor de c, pero no fuera del intervalo cerrado $[c - R_1, c + R_1]$.

c) Converge sólo para $x = c$.

Por *intervalo de convergencia* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ se entiende:

En el caso *a*): $(-\infty, +\infty)$

En el caso *b*): $(c - R_1, c + R_1)$

En el caso *c*): $\{c\}$

Por *radio de convergencia* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ se entiende:

En el caso *a*) ∞
En el caso *b*) R_1
En el caso *c*) 0

Nota: en el caso *b*), si la serie de potencias no converge en ninguno de los puntos finales de su intervalo de convergencia en uno o en ambos puntos finales, depende de la serie dada.

Para ver una demostración del teorema 46.2, repase el problema 5.

EJEMPLO 46.2. La serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n} = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \cdots$$

es una serie de potencias en torno a 2. Se utiliza el criterio de la razón para hallar el intervalo de convergencia

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{|x-2|^{n+1}}{n+1} \Big/ \frac{|x-2|^n}{n} = \frac{n}{n+1}|x-2|. \qquad \text{Entonces, } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = |x-2|.$$

Entonces, por el criterio de la razón, la serie converge absolutamente para $|x - 2| < 1$. La última desigualdad equivale a $-1 < x - 2 < 1$, que a su vez equivale a $1 < x < 3$. Por tanto, el intervalo de convergencia es (1, 3) y el radio de convergencia es 1. En el punto terminal $x = 1$, la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^n/n]$, lo que converge por el teorema de series alternadas. En el punto terminal $x = 3$, la serie se convierte en $\sum_{n=1}^{+\infty}(1/n)$, la serie armónica divergente. Entonces, la serie de potencias converge para $1 \le x < 3$.

EJEMPLO 46.3. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

es una serie en torno a 0. (Recuérdese que $0! = 1$.) Se utiliza el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1}. \qquad \text{Entonces, } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = 0.$$

Así, por el criterio de la razón, la serie converge (absolutamente) para todo x. Su intervalo de convergencia es $(-\infty, +\infty)$ y su radio de convergencia es ∞.

EJEMPLO 46.4. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n = 1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots$$

es una serie de potencias en torno a 0. Se utiliza de nuevo el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = (n+1)\,|x|. \qquad \text{Entonces, } \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = +\infty$$

excepto cuando $x = 0$. Así, la serie converge sólo para $x = 0$. Su "intervalo" (degenerado) de convergencia es $\{0\}$ y su radio de convergencia es 0.

Convergencia uniforme

Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones, todas definidas en un conjunto A. Sea f la función definida en A. Entonces, $\langle f_n \rangle$ *converge uniformemente* a f en A si para todo $\in > 0$ existe un entero m positivo tal que para cada x en A y todo $n \geq m$, $|f_n(x) - f(x)| < \in$.

Teorema 46.3. Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ converge para $x_0 \neq c$ y $d < |x_0 - c|$, entonces la sucesión de sumas parciales $\langle S_k(x) \rangle$, donde $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$, converge uniformemente a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ en el intervalo que consta de todos los x tal que $|x - c| < d$. Por tanto, la convergencia es uniforme en cualquier intervalo estrictamente dentro del intervalo de convergencia.

Se remite al lector a libros más avanzados para hallar una demostración de este resultado.

Teorema 46.4. Si $\langle f_n \rangle$ converge uniformemente a f en un conjunto A y cada f_n es continuo en A, entonces f es continuo en A.

En el problema 6 se ofrece una demostración.

Corolario 46.5. La función definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ es continua en todos los puntos dentro de su intervalo de convergencia.

Esto se deduce de los teoremas 46.3 y 46.4.

Teorema 46.6. Integración de series de potencias. Sea f la función definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ en su intervalo de convergencia (con radio de convergencia R_1). Entonces:

a) $$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + K \qquad \text{para} \quad |x-c| < R_1 \tag{46.3}$$

donde el intervalo de convergencia de la serie de potencias en el miembro derecho de la fórmula (46.3) es el mismo que el de la serie original. K es una constante de integración arbitraria. Nótese que la antiderivada de f se obtiene por integración término a término de una serie de potencias dada.

b) Si a y b están en el intervalo de convergencia, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg]_a^b \tag{46.4}$$

Así, $\int_a^b f(x)\,dx$ se obtiene por integración término a término.

Una demostración del teorema 46.6 debe consultarse en un libro más avanzado.

Teorema 46.7. Derivación de serie de potencias. Sea f la función definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ en su intervalo de convergencia (con radio de convergencia R_1). Entonces, f es derivable en ese intervalo y

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1} \qquad \text{para} \quad |x-c| < R_1 \tag{46.5}$$

Por consiguiente, la derivada f' se obtiene mediante derivación término a término de la serie de potencias. El intervalo de convergencia de la serie de potencias del miembro derecho de la fórmula (46.5) será el mismo que para la serie de potencias original.

Para una demostración, el lector debe remitirse a textos más avanzados.

EJEMPLO 46.5. Ya se sabe, por el ejemplo 46.1, que para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \tag{46.6}$$

Ahora, $D_x\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Entonces, por el teorema 46.7,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

EJEMPLO 46.6. Se sabe que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1$$

Se remplaza x por $-x$ (lo cual es permisible, ya que $|-x| = |x| < 1$). El resultado es

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \tag{46.7}$$

Por el teorema 46.6*a*), se puede integrar término a término:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + K \qquad \text{para } |x| < 1$$

$$\ln |1+x| = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + K \qquad \text{para} \quad |x| < 1$$

Con $x = 0$ y observando que $\ln 1 = 0$, se advierte que $K = 0$.

También se observa que para $|x| < 1$, se tiene que $-1 < x < 1$, $0 < 1 + x < 2$ y, por consiguiente, $|1 + x| = 1 + x$. Por tanto,

$$\ln (1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \tag{46.8}$$

El criterio de la razón muestra que esta serie converge.

Si se remplaza x por $x - 1$ se obtiene

$$\ln x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad \text{para } |x - 1| < 1 \tag{46.9}$$

Se observa que $|x - 1| < 1$ equivale a $0 < x < 2$.

Así, $\ln x$ es definible por una serie de potencias dentro de $(0, 2)$.

Teorema 46.8. Teorema de Abel. Supóngase que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ tiene un intervalo finito de convergencia $|x - c| < R_1$ y sea f una función cuyos valores en ese intervalo están dados por tal serie de potencias. Si la serie de potencias también converge en el punto terminal de la derecha $b = c + R_1$ del intervalo de convergencia, entonces $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe y es igual a la suma de la serie en b. El resultado análogo se cumple en el punto terminal de la izquierda $a = c - R_1$.

Si desea consultar una demostración, la encontrará en libros más avanzados.

EJEMPLO 46.7. Esta es una continuación del ejemplo 46.6. Por la fórmula (46.8)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{para } |x| < 1$$

En el punto terminal de la derecha $x = 1$ del intervalo de convergencia, la serie de potencias se convierte en la serie armónica alternada convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots$$

Por el teorema de Abel, esta serie es igual al $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$. Entonces,

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots \tag{46.10}$$

EJEMPLO 46.8. Empiece de nuevo con

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad \text{para } |x| < 1$$

Se remplaza x por $-x^2$ para obtener

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \tag{46.11}$$

Como $|-x^2| < 1$ equivale a $|x| < 1$, (46.11) se cumple para $|x| < 1$.

Ahora, por el teorema 46.6*a*), la antiderivada $\tan^{-1} x$ de $\frac{1}{1+x^2}$ puede obtenerse mediante integración término a término:

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + K \quad \text{para } |x| < 1\\ &= K + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots\end{aligned}$$

Aquí, K es la constante de integración. Si $x = 0$ y se observa que $\tan^{-1} 0 = 0$, se deduce que $K = 0$. Por tanto,

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots \tag{46.12}$$

En el punto terminal de la derecha $x = 1$ del intervalo de convergencia, la serie en (46.12) se convierte en

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

la cual converge en virtud del teorema de las series alternadas. Entonces, por el teorema de Abel,

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \lim_{x\to 1^-} \tan^{-1}(x) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \tag{46.13}$$

EJEMPLO 46.9. Se sabe por el ejemplo 46.3 que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo x. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ para todo x. Por derivación término a término (teorema 46.7),

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

Observe que $f(0) = 1$. Por consiguiente, por la fórmula (28.2), $f(x) = e^x$. Así,

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x \tag{46.14}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n}=(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(x-2)^3}{3}+\cdots$$

e identifique la función representada por esta serie de potencias.

Aplique el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{|x-2|^{n+1}}{n+1}\bigg/\frac{|x-2|^n}{n}=\frac{n}{n+1}|x-2|. \qquad \text{Luego,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=|x-2|$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $|x-2| < 1$. (Esto equivale a $-1 < x-2 < 1$, que a su vez equivale a $1 < x < 3$.) En el punto terminal de la derecha $x = 3$, la serie es la serie armónica divergente, y en el punto terminal izquierdo $x = 1$, la serie es la negativa de la serie armónica alternada convergente. Por tanto, la serie converge para $1 \le x < 3$.

Sea $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$. Por el teorema 46.7, $h'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x-2)^{n-1}$. Esta es una serie geométrica con primer término 1 y cociente $(x-2)$; entonces, su suma es $\frac{1}{1-(x-2)}=\frac{1}{3-x}$. Por ende, $h'(x)=\frac{1}{3-x}$. Por ende, $h(x)=\int\frac{dx}{3-x}=-\ln|3-x|+C$ Ahora,

$$h(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2-2)^n}{n}=0 \qquad \text{y} \qquad -\ln|3-2|+C=0. \qquad \text{Así, } C=0$$

Además, como $x < 3$ en el intervalo de convergencia, $3 - x > 0$ y, por consiguiente, $|3 - x| = 3 - x$. Por tanto, $h(x) = -\ln(3 - x)$.

En los problemas 2 y 3, determine el intervalo de convergencia de la serie dada y el comportamiento en los puntos terminales (si hay alguno).

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\cdots$

Aplique el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}\bigg/\frac{|x|^n}{n^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|. \qquad \text{En consecuencia,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=|x|.$$

Por tanto, el intervalo de convergencia es $|x| < 1$. El radio de convergencia es 1. En $x = 1$, se obtiene la serie p convergente con $p = 2$. En $x = -1$, la serie converge por el criterio de series alternadas. Así, la serie converge para $-1 \le x \le 1$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}=(x+1)+\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}}+\cdots$

Aplique el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{|x+1|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \Big/ \frac{|x+1|^n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,|x+1|. \qquad \text{Por tanto,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = |x+1|.$$

Así, el intervalo de convergencia es $|x + 1| < 1$, lo cual equivale a $-1 < x + 1 < 1$, lo que a su vez equivale a $-2 < x < 0$. El radio de convergencia es 1. En el punto terminal (o punto extremo) de la derecha $x = 0$ se obtiene la serie p divergente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. En el punto extremo $x = -2$ se obtiene la serie alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la cual converge por el teorema de series alternadas. Así, la serie converge para $-2 \le x < 0$.

4. Demuestre el teorema (46.1).

Como $\sum a_n(x_0 - c)^n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} a_n (x_0 - c)^n = 0$ por el teorema (43.5). Por tanto, hay un número positivo M tal que $|a_n|\,|x_0 - c|^n < M$ para todo n, por el teorema (42.1). Supóngase que $|x - c| < |x_0 - c|$. Sea

$$r = \frac{|x-c|}{|x_0 - c|} < 1. \qquad \text{Entonces,} \qquad |a_n||x-c|^n = |a_n||x_0 - c|^n r^n < Mr^n$$

Luego, $\sum |a_n(x-c)^n|$ es convergente por comparación con la serie geométrica convergente $\sum Mr^n$. Así, $\sum a_n(x-c)^n$ es absolutamente convergente.

5. Demuestre el teorema (46.2).

Sólo es posible aquí un argumento muy intuitivo. Supóngase que ninguno de los casos *a*) y *c*) se cumple. Como el caso *a*) no se cumple, la serie de potencias no converge para algún $x \ne c$. Como el caso *c*) no se cumple, la serie converge para algún $x \ne c$. El teorema (46.1) implica que hay un intervalo $(c - K, c + K)$ alrededor de c donde la serie converge. El intervalo de convergencia es el máximo de dicho intervalo. [Mediante el teorema (46.1), se toma el "mínimo límite superior" R_1 de todo K tal que la serie converge en $(c - K, c + K)$. Entonces, $(c - R_1, c + R_1)$ es el intervalo deseado.]

6. Demuestre el teorema (46.4).

Supóngase que x está en A y $\in\, > 0$. Como $\langle f_n\rangle$ converge uniformemente a f en A, existe un entero positivo m tal que si $n \ge m$, entonces $|f_n(y) - f(y)| < \in/3$ para todo y en A. Como f_m es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que para todo x^* en A, si $|x^* - x| < \delta$, luego $|f_m(x^*) - f_m(x)| < \in/3$. Por tanto, si $|x^* - x| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x^*) - f(x)| &= |(f(x^*) - f_m(x^*)) + (f_m(x^*) - f_m(x)) + (f_m(x) - f(x))| \\ &\le |f(x^*) - f_m(x^*)| + |f_m(x^*) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \frac{\in}{3} + \frac{\in}{3} + \frac{\in}{3} = \in \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad de f en x.

7. Si $\langle f_n\rangle$ converge uniformemente a f en $[a, b]$ y cada f_n es continuo en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.

Supóngase que $\in\, > 0$. Existe un entero positivo m tal que si $n \ge m$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\in}{b-a}$ para todo x en $[a, b]$. Por tanto, $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \in$. Entonces,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \in \qquad \text{para } n \ge m$$

8. Demuestre que la función f definida por una serie de potencias es continua en su intervalo de convergencia (corolario 46.5).

$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ y la convergencia es uniforme por el teorema (46.3). Cada $S_n(x)$, que es un polinomio, es continuo. Por tanto, f es continuo por el teorema (46.4).

9. Encuentre una serie de potencias en torno a 0 que represente la función $\frac{x}{1+x^2}$. ¿En qué intervalo es válida la representación?

Por la fórmula (46.11), $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ para $|x|<1$. Por tanto,

$$\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1} \quad \text{para } |x|<1$$

La serie diverge en ambos puntos terminales $x = 1$ y $x = -1$.

En los problemas 10 y 11, aplique el criterio de la razón para determinar el intervalo de convergencia e indique qué sucede en los puntos terminales (si hay alguno).

10. $\sum \frac{n}{10^n} x^n$.

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{(n+1)\,|x|^{n+1}}{10^{n+1}}\bigg/\frac{n\,|x|^n}{10^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{|x|}{10}. \qquad \text{Por tanto,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{|x|}{10}.$$

Entonces, el intervalo de convergencia es $|x|/10 < 1$, o sea, cuando $|x| < 10$. Este es el intervalo de convergencia. La serie diverge en ambos puntos terminales ± 10.

11. $\sum \frac{n}{3^n}(x-\pi)^n$.

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{(n+1)\,|x-\pi|^{n+1}}{3^{n+1}}\bigg/\frac{n\,|x-\pi|^n}{3^n}=\frac{n+1}{n}\,\frac{|x-\pi|}{3} \qquad \text{Por tanto,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{|x-\pi|}{3}.$$

Así, el intervalo de convergencia es $|x - \pi| < 3$. La serie diverge en ambos puntos terminales.

12. Encuentre el intervalo de convergencia de $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

Aplique el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{((n+1)!)^2\,|x|^{n+1}}{(2n+2)!}\bigg/\frac{(n!)^2\,|x|^n}{(2n)!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}|x| \qquad \text{Por tanto,} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right|=\frac{|x|}{4}.$$

Entonces, el intervalo de convergencia es $|x| < 4$.

13. Encuentre una serie de potencias en torno a 0 que represente $\frac{x}{1-x^3}$.

Empiece con $\frac{1}{1-x}=\sum^{+\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Remplace x por x^3

$$\frac{1}{1-x^3}=\sum^{+\infty} x^{3n} \qquad \text{para } |x|<1$$

(ya que $|x^3| < 1$ equivale a $|x| < 1$). Se multiplica por x:

$$\frac{x}{1-x^3}=\sum^{+\infty} x^{3n+1} \qquad \text{para } |x|<1$$

En los problemas 14 a 16, halle las fórmulas simples para la función $f(x)$ representada por la serie de potencias indicada.

14. $\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots$

Sea $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$.

$$xf(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x=e^x-1-x$$

Por tanto, $f(x)=\frac{e^x-1-x}{x}$.

15. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots$

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$. Luego, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{3n-1} = x^2 + x^5 + x^8 + \cdots$.

Esta es una serie geométrica con cociente x^3. Entonces, converge para $|x^3| < 1$, que equivale a $|x| < 1$. Por tanto, $f'(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$ para $|x| < 1$. Por consiguiente, $f(x) = \int \frac{x^2}{1-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C$. Pero, $f(0) = 0$, por lo que $C = 0$. Asimismo, $1 - x^3 > 0$ para $|x| < 1$. Por tanto,

$$f(x) = -\tfrac{1}{3}\ln(1-x^3) \qquad \text{para} \qquad |x| < 1.$$

16. $x + 2x^3 + 3x^5 + 4x^7 + \cdots$

El criterio de la razón muestra que la serie converge para $|x| < 1$. Sea

$$g(x) = x + 2x^3 + 3x^5 + 4x^7 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{2n-1}$$

Entonces, $2g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1}$. Por ende, al obtener las antiderivadas,

$$2\int g(x)dx = K + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = K + \frac{x^2}{1-x^2} \qquad \left(\text{ya que } \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} \text{ es una serie geométrica con cociente } x^2\right).$$

Ahora se deriva:

$$2g(x) = D_x\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \qquad g(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2} \qquad \text{para } |x| < 1$$

17. (CG) Aproxime $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ con una precisión de dos cifras decimales (es decir, con un error $< 5/10^3$).

Por la fórmula (46.8), $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ para $|x| < 1$, entonces

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{4}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

Por el teorema (46.6*b*),

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{n+1}}$$

que es una serie alternada convergente.

A fin de obtener una aproximación con error menor que $5/10^3$, se debe hallar n tal que el primer término omitido $\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{n+1}} \le \frac{5}{10^3} = \frac{1}{200}$. Así, hay que obtener $200 \le (n+1)^2 2^{n+1}$. Por ensayo y error se muestra que $n \ge 3$. Por tanto, se pueden utilizar los términos correspondientes a $n = 0, 1, 2$:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} = \frac{65}{144} \sim 0.45$$

Esta respuesta se confirma mediante una graficadora, con la que se obtiene 0.44841421 como una aproximación.

18. Encuentre la función definida por $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$.

Esta es una serie geométrica con razón $r = 2x$ y primer término 1. Por tanto, converge para $|2x| < 1$, es decir, para $|x| < \frac{1}{2}$ y su suma es $\frac{1}{1-2x}$.

19. Halle el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$.

Aplique el criterio de la razón:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{\ln(n+2)} \Big/ \frac{|x|^n}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}|x|$$

Por la regla de L'Hôpital, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right| = |x|$. Por tanto, el intervalo de convergencia está dado por $|x| < 1$. (Para $x = 1$, se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$, que como se sabe, es divergente. Para $x = -1$, se obtiene la serie alternada convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

20. Aproxime $\dfrac{1}{e}$ con un error menor que 0.0001.

Por la fórmula (46.14),

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x. \text{ Por tanto,} \qquad \frac{1}{e} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

Por el teorema de la serie alternada, se busca el n mínimo tal que $1/n! \leq 0.0001 = 1/10\,000$, es decir, $10\,000 \leq n!$. Por ensayo y error se muestra que $n \geq 8$. Entonces, se deben utilizar los términos correspondientes a $n = 0, 1, \ldots, 7$:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} = \frac{103}{280} \sim 0.3679$$

(Una graficadora da la respuesta 0.3678794412, corregida con diez cifras decimales.)

21. Aproxime $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ con dos cifras decimales de precisión, es decir, con un error $< 5/10^3 = 0.005$.

Por la fórmula (46.14),

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x. \text{ Por tanto,} \qquad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \qquad \text{para todo } x.$$

Por el teorema (46.6*b*),

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2n+1}$$

Se puede aplicar el teorema de las series alternadas. La magnitud del primer término omitido $\dfrac{1}{(2n+1)n!}$ debería ser $\leq 0.005 = 1/200$. Entonces, $200 \leq (2n+1)n!$ Por ensayo y error se muestra que $n \geq 4$. Por tanto, se deberían utilizar los primeros cuatro términos, es decir, los correspondientes a $n = 0, 1, 2, 3$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \sim 0.743$$

(Una graficadora da la aproximación 0.74682413, corregida con ocho cifras decimales.)

22. Encuentre una expansión de serie de potencias para $\dfrac{1}{x+3}$ en torno a 0.

$\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x/3)+1}$. Por la fórmula (46.7), $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ para $|x| < 1$.

Por tanto,

$$\frac{1}{(x/3)+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n} \quad \text{para } \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

Luego,

$$\frac{1}{x+3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}} \quad \text{para } |x| < 3$$

La serie diverge en $x = \pm 3$.

23. Encuentre una expansión de serie de potencias para $\frac{1}{x}$ en torno a 1.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$. Por la fórmula (46.7), $\frac{1}{1+x} = \sum^{+\infty}(-1)^n x^n$ para $|x| < 1$. Por tanto,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (x-1)^n \quad \text{para} \quad |x-1| < 1$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 24 a 31, determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias indicada.

24. $\sum nx^n$ *Respuesta*: $-1 < x < 1$

25. $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ *Respuesta*: $-1 \leq x \leq 1$

26. $\sum \frac{x^n}{n5^n}$ Respuesta: $-5 \leq x < 5$

27. $\sum \frac{x^{2n}}{n(n+1)(n+2)}$ *Respuesta*: $-1 \leq x \leq 1$

28. $\sum \frac{x^{n+1}}{(\ln\ (n+1))^2}$ *Respuesta*: $-1 \leq x < 1$

29. $\sum \frac{x^n}{1+n^3}$ *Respuesta*: $-1 \leq x \leq 1$

30. $\sum \frac{(x-4)^n}{n^2}$ *Respuesta*: $3 \leq x \leq 5$

31. $\sum \frac{(3x-2)^n}{5^n}$ *Respuesta*: $-1 < x < \frac{7}{3}$

32. Exprese e^{-2x} como una serie de potencias en torno a 0.

Respuesta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n$

33. Exprese $e^{x/2}$ como una serie de potencias en torno a 2.

Respuesta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{2^n (n!)}(x-2)^n$

34. Exprese $\ln x$ como una serie de potencias en torno a 2.

Respuesta: $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}(x-2)^n$

35. (CG) Encuentre ln (0.97) con una precisión de siete cifras decimales. (*Sugerencia:* use la serie de potencias para ln $(1 - x)$ en torno a 0.)

Respuesta: –0.0304592

36. ¿Cuántos términos deben utilizarse en la serie de potencias para ln $(1 + x)$ en torno a 0 para hallar ln 1.02 con un error ≤ 0.00000005?

Respuesta: tres

37. (CG) Use una serie de potencias para calcular e^{-2} con exactitud de cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.1353

38. (CG) Evalúe $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$ con precisión de cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.4940

En los problemas 39 y 40, determine el intervalo de convergencia de la serie indicada.

39. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$ *Respuesta*: $(-\infty, +\infty)$

40. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n} x^n$ *Respuesta*: $x = 0$

41. Exprese $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ como una serie de potencias en torno a 0.

Respuesta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

42. Encuentre una serie de potencias en torno a 0 para la función de distribución normal $\int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Respuesta: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2^n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

43. Encuentre una expansión de la serie de potencias en torno a 0 para $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Respuesta: $2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

44. (CG) Aproxime $\tan^{-1} \frac{1}{2}$ con precisión de dos cifras decimales.

Respuesta: 0.46

45. Demuestre que el recíproco del teorema de Abel no es válido, es decir, si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para $|x| < r$, donde r es el radio de convergencia de la serie de potencia y $\lim_{x\to r^-} f(x)$ existe, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ no necesita converger. (*Sugerencia:* analizar $f(x)=\frac{1}{1+x}$.)

46. Encuentre una fórmula simple para la función $f(x)$ representada por $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.

Respuesta: $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

47. Encuentre una fórmula simple para la función $f(x)$ representada por $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n}$.

Respuesta: $x + (1 - x) \ln (1 - x)$

48. *a*) Demuestre que $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ para $|x| > 1$. (*Sugerencia*: use el ejemplo 46.5.)

b) Demuestre que $\frac{2x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n$ para $|x| < 1$. [*Sugerencia*: primero divida la serie entre x, integre, factorice x, utilice el inciso *a*) y luego derive.]

c) Demuestre que $\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ para $|x| < 1$.

d) Evalúe $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Respuesta: *d*) 2 y 6

47

Series de Taylor y de Maclaurin. Fórmula de Taylor con residuo

Series de Taylor y de Maclaurin

Sea f una función infinitamente derivable en $x = c$, es decir, las derivadas $f^{(n)}(c)$ existen para todo entero positivo n.

La *serie de Taylor para f en torno a c* es la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

donde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para todo n. Observe que $f^{(0)}$ se toma como la función f en sí, de modo que $a_0 = f(c)$.

La *serie de Maclaurin para f* es la serie de Taylor para f en torno a 0, es decir, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

donde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para todo n.

EJEMPLO 47.1. La serie de Maclaurin para sen x.

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces

$$f'(x) = \cos x,$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

Como $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$, las derivadas adicionales repiten este ciclo de cuatro funciones. Como sen 0 = 0 y cos 0 = 1, $f^{(2k)}(0) = 0$ y $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Por tanto, $a_{2k} = 0$ y $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. Entonces, la serie de Maclaurin para sen x es

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Una aplicación del criterio de la razón muestra que esta serie converge para todo x. No se sabe que sen x sea igual a su serie de Maclaurin. Lo demostraremos más adelante.

EJEMPLO 47.2. Halle la serie de Maclaurin para $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{3\cdot 2}{(1-x)^4},$$

$$f^4(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^5}, \quad f^5(x) = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{(1-x)^6}$$

Obsérvese el patrón: $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Por tanto, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$ para todo n, y la serie de Maclaurin para $\dfrac{1}{1-x}$ es $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En este caso, ya se sabe que $\dfrac{1}{1-x}$ es igual a su serie de Maclaurin para $|x| < 1$.

Teorema 47.1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-c)^n$ para algún $x \neq c$, entonces esta serie es la serie de Taylor para f, es decir, $b_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$ para todo n. En particular, si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ para algún $x \neq 0$, entonces esta serie es la serie de Maclaurin para f.

Supóngase que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-c)^n$ para algún $x \neq c$. Entonces, $f(c) = b_0$. Por derivación término a término (teorema 46.7) $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} nb_n (x-c)^{n-1}$ en el intervalo de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-c)^n$. Por tanto, $f'(c) = b_1$. Derivando de nuevo se obtiene $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)b_n (x-c)^{n-2}$. Entonces, $f''(c) = 2b_2$ y, por consiguiente, $b_2 = \dfrac{f''(c)}{2!}$.

Derivando nuevamente se obtiene $f'''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)b_n (x-c)^{n-3}$. Luego $f'''(c) = 3!b_3$ y, por consiguiente, $b_3 = \dfrac{f'''(c)}{3!}$. Iterando este procedimiento se obtiene

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \qquad \text{para todo } n \geq 0$$

Así, la serie es la serie de Taylor para f.

EJEMPLO 47.3. Ya se sabe por la fórmula (46.8) que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{para } |x| < 1$$

Por tanto, por el teorema 47.1, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ debe ser la serie de Maclaurin para ln $(1 + x)$. No es necesario pasar por el laborioso proceso de calcular la serie de Maclaurin para ln $(1 + x)$ directamente a partir de la definición de la serie de Maclaurin.

EJEMPLO 47.4. Si $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, determine $f^{(47)}(0)$.

Se sabe que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ para $|x| < 1$. Por tanto, por el teorema 47.1, el coeficiente de x^n, o sea 1, es igual a $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Entonces, para $n = 47$, $1 = \dfrac{f^{(47)}(0)}{(47)!}$ y, por consiguiente, $f^{(47)}(0) = (47)!$.

Teorema 47.2. Fórmula de Taylor con residuo. Sea f una función tal que su $(n + 1)$-ésima derivada $f^{(n+1)}$ existe en (α, β). Supóngase también que c y x existen en (α, β). Entonces, existe algún x^* entre c y x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x) \end{aligned} \tag{47.1}$$

Aquí, $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ se denomina el *término residuo* o el *error*.

El teorema 47.2 puede deducirse del teorema 13.6 (el teorema del valor medio de orden superior).

Aplicaciones de la fórmula de Taylor con residuo

I. Muestra de que ciertas funciones están representadas por su serie de Taylor mediante la demostración de que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

A partir de la fórmula de Taylor (47.1),

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Si $\text{lím}_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ entonces

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

es decir, $f(x)$ es igual a su serie de Taylor.

Observación: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d^n}{n!} = 0$ para todo d. Para comprobarlo, recuérdese que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ converge para todo x. Por ende, por el teorema (43.5), $\text{lím}_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ para todo x.

EJEMPLO 47.5. sen x es igual a su serie de Maclaurin.

Cuando $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces toda derivada $f^{(n)}(x)$ es cualquiera de éstas: sen x, cos x, –sen x o –cos x y, por consiguiente, $|f^{(n)}(x)| \le 1$. Así,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right| \le \frac{|(x-c)^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Por la observación anterior, $\text{lím}_{n\to+\infty} \dfrac{|(x-c)^{n+1}|}{(n+1)!} = 0$. Por tanto, $\text{lím}_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Por consiguiente, sen x es igual a su serie de Maclaurin:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (47.2)$$

II. Valores de aproximación de funciones integrales

Use una cota en $R_n(x)$ para obtener una cota en el error cuando se aproxima la suma de una serie infinita mediante una suma parcial.

EJEMPLO 47.6. Aproxime e con cuatro cifras decimales, es decir, con un error < 0.00005. El resultado preliminar es $e < 3$. Para comprobarlo, nótese que, como $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$,

$$\begin{aligned} e = e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Ahora, para la función $f(x) = e^x$, se desea hacer la magnitud del error $R_n(1) < 0.00005$. Por la fórmula de Taylor con residuo, con $x = 1$,

$$|R_n(1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}\right|, \qquad \text{donde } 0 < x^* < 1$$

Como $D_x(e^x) = e^x$, $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo x. Por tanto, $f^{(n+1)}(x^*) = e^{x^*}$. Entonces e^x es una función creciente, $e^{x^*} < e^1 = e < 3$ $< e^1 = e < 3$. Así, $|R_n(1)| < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Como se desea hacer del error < 0.00005, basta tener

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 0.00005, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{20\,000}, \qquad 60\,000 \leq (n+1)!.$$

Por ensayo y error se muestra que se cumple para $n \geq 8$. Entonces, se puede utilizar la suma parcial $\sum_{n=0}^{8} \frac{1}{n!} \sim 1.7183$.

Teorema 47.3. La serie binomial. Supóngase que $r \neq 0$. Entonces,

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \qquad \text{para } |x| < 1$$

$$= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{47.3}$$

Se aplica el criterio de la razón a la serie dada:

$$\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \left|\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \middle/ \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)x^n}{n!}\right|$$

Así,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(r-n)x}{n+1}\right| = |x|$$

Por tanto, la serie converge para $|x| < 1$. Para ver un esbozo de la demostración de que la serie es igual a $(1 + x)^r$ repase el problema 31.

Nótese que si r es un entero positivo k, entonces los coeficientes de x^n para $n > k$ son 0 y se obtiene la fórmula binomial

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} x^n$$

EJEMPLO 47.7. Redefina $\sqrt{1+x}$ como una serie de potencias en torno a 0. Esta es la serie binomial para $r = \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1/2}{1!}x + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!}x^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \tag{47.4}$$

EJEMPLO 47.8. Encuentre una extensión de la serie de potencias en torno a 0 para $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Se toma la serie binomial para $r = -\frac{1}{2}$, y luego se remplaza x por $-x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{-1/2}{1!}(-x) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}(-x)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!2^n}x^n + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n \tag{47.5}$$

Teorema 47.4. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ para $|x|<R_1$ y $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ para $|x|<R_2$, entonces $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ para $|x|$ < mínimo (R_1, R_2), donde $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Puede consultar una demostración en una obra más avanzada. El teorema 47.4 garantiza que si f y g tienen extensiones de series de potencias, entonces también las tiene su producto.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre una extensión de serie de potencias en torno a 0 para cos x.

Se sabe por el ejemplo 47.5 que

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \quad \text{para todo } x.$$

Entonces, por el teorema (46.7), es posible derivar término a término:

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \quad \text{para todo } x.$$

2. Encuentre una serie de potencias en torno a $\frac{\pi}{2}$ para sen x.

Use la identidad de $\operatorname{sen} x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. En consecuencia, por el problema 1,

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}=1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\cdots$$

3. Sea $f(x)=\tan^{-1}x$. Evalúe $f^{(38)}(0)$.

Se sabe por la fórmula (46.12) que

$$\tan^{-1} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7 \quad \text{para } |x|<1$$

Por tanto, por el teorema (47.1), el coeficiente de x^{38} en esta serie de potencias es igual a $\frac{f^{(38)}(0)}{(38)!}$. Pero el coeficiente de x^{38} es 0. Entonces, $f^{(38)}(0)=0$.

4. Halle las extensiones de la serie de potencias en torno a 0 para las funciones siguientes:

a) $\cos(x^2)$ *b*) xe^{-2x} *c*) $1/\sqrt[3]{1+x}$

a) $\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ por el problema 1. Por ende, $\cos(x^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{4k}$.

b) Se sabe que $e^x=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Entonces, $e^{-2x}=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^k$. Por tanto,

$$xe^{-2x}=\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} x^{k+1}=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

c) Esta es la serie binomial para $r=-\frac{1}{3}$.

$$1/\sqrt[3]{1+x}=1-\frac{1}{3}x+\frac{(-1/3)(-4/3)}{2!}x^2+\frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{3!}x^3$$
$$+\frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)(-10/3)}{4!}x^4+\cdots.$$
$$=1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2))}{3^n n!} x^n$$

5. Encuentre los primeros cinco términos de la serie de Maclaurin para $e^x(\text{sen } x)$.

Método 1: sea $f(x) = e^x$ (sen x). Entonces,

$$f'(x) = e^x(\text{sen}\,x + \cos x), \quad f''(x) = 2e^x(\cos x), \quad f'''(x) = 2e^x(\cos x - \text{sen}\,x)$$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x(\text{sen}\,x), \quad \text{y} \quad f^{(5)}(x) = -4e^x(\text{sen}\,x + \cos x)$$

Por tanto, como $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, se obtiene $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = 0$ y $a_5 = -\frac{1}{30}$. Así,

$$e^x(\text{sen}\,x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots$$

Método 2 $e^x(\text{sen}\,x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right)$. Si se multiplica de acuerdo con la regla expuesta en el teorema (47.4), se obtiene el mismo resultado anterior. Por ejemplo, $c_5 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = -\frac{1}{30}$.

6. Se sabe que $\text{sen}\,x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$. ¿Para qué valores de x al aproximar sen x por x se produce un error de < 0.005?

$|R_2(x)| = \left|\dfrac{f^{(3)}(x^*)}{3!}x^3\right| \le \dfrac{|x|^3}{6}$. (Aquí, $|f^{(3)}(x)| \le 1$, ya que $f^{(3)}$ es $-\cos x$.) Por tanto, se requiere $|x|^3/6 < 0.005$, que equivale a $|x|^3 < 0.03$. Entonces, se quiere $|x| < \sqrt[3]{0.03} \sim 0.31$.

7. Si se aproxima sen x por $x - \dfrac{x^3}{3!}$ para $|x| < 0.5$, ¿cuál es un límite en el error?

Como sen x es igual a una serie alternada para todo x, el error será menor que la magnitud del primer término omitido, en este caso $|x|^5/5!$. Cuando $|x| < 0.5$, el error será menor que $\dfrac{1}{120}(0.5)^5 \sim 0.00026$..

8. Aproxime $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx$ con un error menor que 0.005.

$$\text{sen}\,x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Por tanto,

$$\frac{\text{sen}\,x}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left.\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\frac{1}{2k+1}$$

Esta es una serie alternada. Se debe hallar k de manera que $\dfrac{1}{(2k+1)!}\,\dfrac{1}{2k+1} \le 0.005$ o, de forma equivalente, $200 \le (2k+1)!(2k+1)$. Esto resulta verdadero para $k \ge 2$. Por ende, se necesita $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \sim 0.9$.

9. Halle una serie de potencias en torno a 0 para $\text{sen}^{-1} x$.

Por la fórmula (47.5),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n \qquad \text{para } |x| < 1$$

Remplace x por t^2

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}t^{2n} \qquad \text{para } |t| < 1$$

Entonces, para $|x| < 1$,

$$\operatorname{sen}^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

10. Halle la serie de Maclaurin para las funciones siguientes: *a)* sen (x^3); *b)* $\operatorname{sen}^2 x$.

Recuerde que si una función tiene una extensión de la serie de potencias en un intervalo en torno a 0, entonces esa serie es la serie de Maclaurin de la función.

a) $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ para todo x. Por tanto, $\operatorname{sen}(x^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{6k+3}$ y esta es la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}(x^3)$.

b) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$ por el problema 1. Entonces, la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^2 x$ es $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$.

11. Determine los primeros cuatro términos no cero (no nulos) de la serie de Maclaurin para $f(x) = \sec x$.

Sería muy tedioso calcular las derivadas sucesivas. Mejor, como $\sec x \cos x = 1$, se puede proceder de forma diferente. Supóngase que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Entonces,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) = 1$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots\right) = 1$$

Ahora se "multiplica", se comparan coeficientes en ambos miembros de la ecuación y se despeja a_n

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \tfrac{1}{2};\ a_3 = 0;\ a_4 = \tfrac{5}{24};\ a_5 = 0;\ a_6 = \tfrac{61}{720}$$

Entonces,

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots$$

Otro método consiste en efectuar una "división larga" de 1 entre $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Encuentre la serie de Maclaurin para las funciones siguientes:

a) sen (x^5); *b)* $\frac{1}{1+x^5}$; *c)* $\cos^2 x$.

Respuestas: *a)* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{10k+5}$; *b)* $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^n x^{5n}$; *c)* $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$

13. Halle la serie de Taylor para $\ln x$ en torno a 2.

Respuesta: $\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$

14. Determine los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para *a)* $\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$; *b)* $e^x \cos x$.

Respuestas: *a)* $x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$; *b)* $1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

15. Calcule los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para tan x.

Respuesta: $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$

16. Calcular los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Respuesta: $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$

17. Halle la serie de Taylor para cos x en torno a $\frac{\pi}{3}$. [*Sugerencia*: use una identidad para $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.]

Respuesta: $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}$

18. (CG) Use la serie de potencias para aproximar $\int_0^{1/2}\frac{\tan^{-1}x}{x}dx$

Respuesta: 0.4872

19. (CG) Use la serie de potencias para aproximar $\int_0^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ correctamente con cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.4484

20. (CG) Use la serie de potencias para aproximar $\int_0^1\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ correctamente con cuatro decimales.

Respuesta: 1.0948

21. (CG) ¿Cuál es un límite en el error si se aproxima e^x por $1+x+\frac{1}{2}x^2$ para $|x|\le 0.05$? (Puede utilizar $e^{0.05}$ < 1.06.)

Respuesta: 0.0000221

22. (CG) ¿Cuál es un límite en el error si se aproxima ln $(1 + x)$ por x para $|x| \le 0.05$?

Respuesta: 0.00125

23. (CG) Use la serie de Taylor para sen x en torno a $\frac{\pi}{3}$ a fin de aproximar sen 62° correctamente con cinco cifras decimales.

Respuesta: 0.88295

24. (CG) ¿En qué intervalo puede seleccionar el ángulo si los valores de cos x se calcularán empleando tres términos de su serie de Taylor en torno a $\frac{\pi}{3}$ y el error no debe exceder de 0.00005?

Respuesta: $\left|x-\frac{\pi}{3}\right|\le 0.0669$

25. (CG) Use la serie de potencias para calcular con una precisión de cuatro cifras decimales: *a*) e^{-2}; *b*) sen 32°; *c*) cos 36°.

Respuesta: *a*) 0.1353; *b*) 0.5299; *c*) 0.8090

26. (CG) ¿Para qué rango de x se puede:

a) Remplazar e^x por $1+x+\frac{1}{2}x^2$ si el error permisible es 0.0005?

b) Sustituir sen x por $x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$ si el error permisible es 0.00005?

Respuesta: *a*) $|x| < 0.1$; *b*) $|x| < 47°$

27. Use la serie de potencias para evaluar *a*) $\text{lím}_{n\to 0} \frac{e - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$; *b*) $\text{lím}_{n\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2}$.

Respuestas: *a*) $\frac{1}{6}$; *b*) $\frac{e}{2}$

28. (CG) Use la serie de potencias para evaluar:

a) $\int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x)^{-1/2} dx$ (con precisión de tres cifras decimales).

b) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$ (con precisión de cinco cifras decimales).

c) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$ (con precisión de cuatro cifras decimales).

Respuestas: *a*) 1.854; *b*) 0.76355; *c*) 0.4940

29. (CG) Use la serie de potencias para aproximar la longitud de la curva $y = \frac{1}{3}x^3$ de $x = 0$ a $x = 0.5$, con precisión de cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.5031

30. (CG) Use la serie de potencias para aproximar el área comprendida entre la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y el eje x de $x = 0$ a $x = 1$, con precisión de cuatro cifras decimales.

Respuesta: 0.3103

31. Demuestre que la extensión de la serie binomial en el teorema (47.3) es correcta.

[*Sugerencia:* sea $y = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$. Use la derivación término a término para hallar la serie para $\frac{dy}{dx}$ y demuestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{ry}{1+x}$. Luego, derive $y = (1 + x)^r$. Use "variables separables"; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{r\,dx}{1+x}$.]

32. Redefina el polinomio $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ como una serie de potencias en torno a 3 y halle $\int_3^{3.2} f(x)\,dx$.

Respuesta: 1.185

48

Derivadas parciales

Funciones de varias variables

Si se asigna un número real z a cada punto (x, y) de una parte del plano xy, se dice que z es dada como una función, $z = f(x, y)$, de las variables independientes x y y. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen $z = f(x, y)$ es una superficie en espacio tridimensional. De forma semejante pueden definirse las funciones $w = f(x, y, z,\ldots)$ de tres o más variables independientes, aunque no se tenga ninguna representación geométrica.

Hay un número notable de diferencias entre el cálculo de una y de dos variables. Sin embargo, el cálculo de las funciones de tres o más variables difiere sólo levemente del de las funciones de dos variables. El estudio aquí se limitará, fundamentalmente, a las funciones de dos variables.

Límites

Por un *disco abierto* con centro en (a, b) se entiende el conjunto de puntos (x, y) dentro de una distancia fija de δ a (a, b), es decir, una distancia tal que $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$. Por *disco borrado* (*arandela*) en torno a (a, b) se entiende un disco abierto sin su centro (a, b).

Sea f una función de dos variables y supóngase que hay puntos en el dominio de f próximos arbitrariamente a (a, b). Decir que $f(x, y)$ tiene límite L cuando (x, y) tiende a (a, b) significa intuitivamente que $f(x, y)$ puede aproximarse arbitrariamente a L cuando (x, y) está suficientemente próximo a (a, b). Más exactamente,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si, para todo $\in\, > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo (x, y) en el dominio de f y en el disco borrado (arandela) de radio δ alrededor de (a, b), $|f(x, y) - L| < \in$. Esto equivale a afirmar que para todo $\in\, > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ implica $|f(x, y) - L| < \in$ para todo (x, y) en el dominio de f. Nótese que no se ha supuesto que $f(a, b)$ está definido.

Las leyes para los límites análogas a las de las funciones de una variable (teoremas 7.1 a 7.6) también se cumplen aquí con demostraciones semejantes.

EJEMPLO 48.1. Al utilizar estas leyes estándar para los límites se observa que

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \left(\frac{3xy^2}{7+y} + \frac{1}{2}xy\right) = \frac{3(3)(1)}{7+1} + \tfrac{1}{2}(3)(1) = \tfrac{9}{8} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{21}{8}$$

EJEMPLO 48.2. En algunos casos estas leyes estándar no son suficientes.

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = 0$. Con las reglas sobre límites generales se obtendría $\dfrac{0}{0}$, que es indeterminado. Por ello, es necesario un argumento más evolucionado. Supóngase que $\in\, > 0$. Ahora,

$$\left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right| = 3\,|x|\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le 3\,|x| \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = \in$$

si se selecciona $\delta = \in/3$ y se supone que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

EJEMPLO 48.3. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Sea $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo del eje x, donde $y = 0$. Entonces $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$. Entonces, el límite a lo largo del eje x es 1. Ahora sea $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo del eje y, donde $x = 0$. Entonces $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -\dfrac{y^2}{y^2} = -1$. Luego, el límite a lo largo del eje y es –1. Por tanto, no puede haber límite común cuando 1 tiende a (0, 0) y el límite no existe.

EJEMPLO 48.4. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ no existe.

Aquí no se puede utilizar el mismo argumento que el del ejemplo 48.3, porque $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ tiende a 1 cuando (x, y) tiende a (0, 0) tanto a lo largo del eje x como del eje y. Sin embargo, si (x, y) tienden a (0, 0) a lo largo de la recta $y = x$. Entonces, $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2 = 0$. Por tanto, $\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 \to 0$ a lo largo de $y = x$. Como esto es diferente del límite 1 aproximado a lo largo del eje x, no existe límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

Continuidad

Sea f una función de dos variables y se supone que hay puntos en el dominio de f arbitrariamente próximos a (a, b). Entonces f *es continua en* (a, b) si y sólo si f está definida en (a, b), $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe, y $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Se dice que f es continua en un conjunto A si f es continua en cada punto de A.

Esta es una generalización para dos variables de la definición de continuidad para las funciones de una variable. Las propiedades básicas de las funciones continuas de una variable (teorema 8.1) se transfieren fácilmente a dos variables. Además, todo polinomio en dos variables, tales que $7x^5 - 3xy^3 - y^4 + 2xy^2 + 5$, es continuo en todos los puntos. Toda función continua de una variable también es continua como una función de dos variables.

Las nociones de límite y continuidad tienen generalizaciones obvias a funciones de tres o más variables.

Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Si x varía mientras que y permanece fija, z se vuelve una función de x. Entonces, su derivada respecto a x

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se denomina la (*primera*) *derivada* parcial de f respecto a x y se denota con $f_x(x, y)$ o $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ o $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

De igual forma, si y varía en tanto que x se mantiene fija, la (*primera*) *derivada parcial* de f respecto a y es

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

EJEMPLO 48.5. Sea $f(x, y) = x^2$ sen y. Entonces $f_x(x, y) = 2x$ sen y y $f_y(x, y) = x^2 \cos y$.

Se observa que, cuando se calcula f_x, a y se le trata temporalmente como una constante, y cuando se calcula f_y, a x se le trata temporalmente como una constante.

Las derivadas parciales tienen interpretaciones geométricas simples. Se considera la superficie $z = f(x, y)$ en la figura 48.1. Por el punto $P(x, y, z)$, existe una curva APB que es la intersección con la superficie del plano que pasa por P paralelo al plano xz (el plano determinado por el eje x y el eje z). De igual forma, CPD es la curva que pasa por P y que es la intersección con la superficie $z = f(x, y)$ del plano que pasa por P paralelo al plano yz. Cuando x varía y y se mantiene fija, P se mueve a lo largo de la curva APB, y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en (x, y) es la pendiente de la recta tangente a la curva APB en P. De igual forma, cuando y varía mientras x se mantiene fija, P se mueve a lo largo de la curva CPD, y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en (x, y) es la pendiente de la recta tangente a la curva CPD en P.

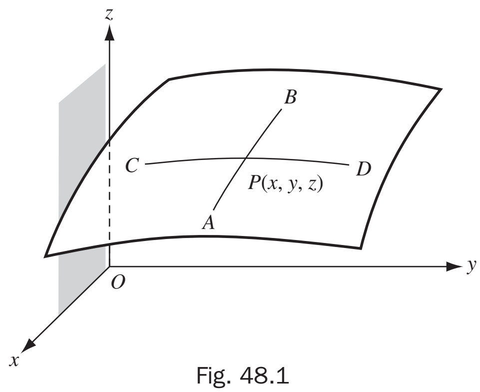


Fig. 48.1

Derivadas parciales de orden superior

Se pueden extraer las derivadas parciales respecto a x y y de $\frac{\partial z}{\partial x}$ para llegar a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

De igual forma, de $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Teorema 48.1. Supóngase que f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas en un disco abierto. Entonces, $f_{xy} = f_{yx}$ en cada punto del disco.

En el problema 30 se presenta una demostración.

EJEMPLO 48.6. Compruebe el teorema 48.1 para $f(x, y) = x^2(\text{sen } yx)$.

$$f_x(x, y) = x^2(\cos yx)(y) + 2x(\text{sen } yx) = x[xy(\cos yx) + 2\text{sen } yx]$$

$$f_y(x, y) = x^2(\cos yx)x + x^3(\cos yx)$$

$$f_{yx}(x, y) = x[x(y(-\text{sen } yx)(x) + \cos yx) + 2(\cos yx)(x)]$$

$$= x^2[-xy \text{ sen } yx + 3 \cos yx]$$

$$f_{xy}(x, y) = x^2(-\text{sen } yx)(y) + 3x^2 \cos yx = x^2[-xy \text{ sen } yx + 3 \cos yx]$$

Las derivadas parciales también pueden definirse para funciones de tres o más variables. Se cumple un análogo del teorema 48.1 para dos ordenamientos cualesquiera de los subíndices dados.

Nótese que las derivadas parciales pueden no existir cuando los límites requeridos no existen.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Evalúe *a*) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} (2xy^4 - 7x^2y^2)$; *b*) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} x\cos\left(\frac{x-y}{4}\right)$.

Como se aplican las leyes de límite estándar, los límites son:

a) $2(3)(2)^4 - 7(3)^2(2)^2 = 96 - 252 = -156$; *b*) $\pi\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

2. Evalúe) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo del eje y, $x = 0$ y $\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \to 0$.

Cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo del eje x, $y = 0$ y $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \to 1$.
Por tanto, el límite no existe.

3. Evalúe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Cuando $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2}$, $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \le |y| \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Entonces,

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

4. La función $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y}$ es continua en todos los puntos salvo en (0, 0) y en la recta $y = -x$, donde no está definida. ¿Puede definirse $f(0, 0)$ de manera que la nueva función sea continua?

Cuando $(x, y) \to (0, 0)$, $x + y \to 0$ y, por consiguiente, $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} \to 1$, ya que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$. Entonces, si $f(0, 0) = 1$, la nueva función será continua en (0, 0). Así que la discontinuidad original era removible.

En los problemas 5 a 9, halle las primeras derivadas parciales.

5. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$.
Al tratar y como una constante y derivando respecto a x resulta $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$.
Al tratar x como una constante y derivando respecto a y resulta $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y$.

6. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.
Al tratar y como una constante y derivando respecto a x se obtiene $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$.
Al tratar x como una constante y derivando respecto a y resulta $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$.

7. $z = \operatorname{sen}(2x + 3y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$$

8. $z = \tan^{-1}(x^2y) + \tan^{-1}(xy^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{1 + x^4y^2} + \frac{y^2}{1 + x^2y^4} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{1 + x^4y^2} + \frac{2xy}{1 + x^2y^4}$$

9. $z = e^{x^2+xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x + y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x^2+xy}$$

10. El área de un triángulo está dada por $K = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$. Cuando $a = 20$, $b = 30$ y $C = 30°$, determine:

a) La razón de cambio de K respecto a a, cuando b y C son constantes.
b) La razón de cambio de K respecto a C, cuando a y b son constantes.
c) La razón de cambio de b respecto a a, cuando K y C son constantes.

a) $\dfrac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\operatorname{sen} C = \frac{1}{2}(30)(\operatorname{sen} 30°) = \frac{15}{2}$

b) $\dfrac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30°) = 150\sqrt{3}$

c) $b = \dfrac{2K}{a\operatorname{sen} C}$ y $\dfrac{\partial b}{\partial a} = -\dfrac{2K}{a^2\operatorname{sen} C} = -\dfrac{2(1/2\ ab\operatorname{sen} C)}{a^2\operatorname{sen} C} = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$

En los problemas 11 a 13, encuentre las primeras derivadas parciales de z respecto a las variables independientes x y y.

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. [Ésta es la ecuación de una esfera de radio 5 y centro en (0, 0, 0).]

Se deriva implícitamente respecto a x, tomando y como una constante, para obtener:

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0. \qquad \text{Por tanto,} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

Se deriva implícitamente respecto a y, tomando x como una constante:

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad \text{Por ende,} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

12. $x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$.

Se deriva implícitamente respecto x:

$$2x(2y+3z) + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

Al resolver para $\frac{\partial z}{\partial x}$ se obtiene: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$.

Se deriva implícitamente respecto a y:

$$2x^2 + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x-4z) - 4y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

Al resolver para $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtiene: $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$.

13. $xy + yz + zx = 1$.

Al derivar respecto a x se obtiene $y + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$; por tanto, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$.

Al derivar respecto a y se obtiene $x + y\frac{\partial z}{\partial y} + z + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; por tanto, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$.

14. Considérese x y y como variables independientes. Encuente $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ cuando $x = e^{2r}\cos\theta$, $y = e^{3r}\operatorname{sen}\theta$.

Primero se derivan las relaciones dadas respecto a x:

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad 0 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r}{\partial x} + e^{3r}\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Luego se resuelven simultáneamente para obtener $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{3\operatorname{sen}\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

Ahora se derivan las relaciones dadas respecto a y:

$$0 = 2e^{2r}\cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad 1 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial r}{\partial y} + e^{3r}\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Entonces, se resuelve simultáneamente para obtener $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2\cos\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

15. Determine las pendientes de las tangentes a las curvas que cortan en la superficie $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ los planos que pasan por el punto (1, 1, 1) y son paralelos a los planos xz y yz.

El plano $x = 1$, paralelo al plano yz, interseca la superficie en la curva $z = 4y^2 - 3$, $x = 1$. Entonces, $\frac{\partial z}{\partial y} = 8y = 8(1) = 8$ es la pendiente requerida.

El plano $y = 1$, paralelo al plano xz, interseca la superficie en la curva $z = 3x^2 + 2$, $y = 1$. Entonces, $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x = 6$ es la pendiente requerida.

En los problemas 16 y 17, encuentre todas las segundas derivadas parciales de z y compruebe el teorema 48.1.

16. $z = x^2 + 3xy + y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3$$

Observe que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

17. $z = x \cos y - y \cos x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \operatorname{sen} y - \cos x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x$$

Observe que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. Sea $f(x, y, z) = x \cos(yz)$. Halle todas las derivadas parciales de primero, segundo y tercer orden.

$f_x = cos(yz)$, $f_{xx} = 0$, $f_{yx} = -z \operatorname{sen}(yz)$, $f_{zx} = -y \operatorname{sen}(yz)$
$f_y = -xz \operatorname{sen}(yz)$, $f_{yy} = -xz^2 \cos(yz)$, $f_{xy} = -z \operatorname{sen}(yz)$
$f_{zy} = -x(zy \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$
$f_z = -xy \operatorname{sen}(yz)$, $f_{zz} = -xy^2 \cos(yz)$, $f_{xz} = -y \operatorname{sen}(yz)$
$f_{yz} = -x(zy \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ y $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{yz} = f_{zy}$.

$f_{xxx} = 0$, $f_{xxy} = f_{xyx} = 0$, $f_{xxz} = f_{xzx} = 0$
$f_{xyy} = -z^2 \cos(yz)$, $f_{xyz} = f_{xzy} = -(zy \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$
$f_{xzz} = -y^2 \cos(yz)$
$f_{yyy} = xz^3 \operatorname{sen}(yz)$, $f_{yxx} = 0$, $f_{yxy} = f_{yyx} = -z^2 \cos(yz)$
$f_{yxz} = f_{yzx} = -(yz \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$
$f_{yyz} = f_{yzy} = -x(-z^2 y \operatorname{sen}(yz) + z \cos(yz) + z \cos(yz))$
$\quad = xz(zy \operatorname{sen}(yz) - 2\cos(yz))$
$f_{yzz} = -x(-y^2 z \operatorname{sen}(yz) + 2y \cos(yz))$
$\quad = xy(z \operatorname{sen}(yz) - 2\cos(yz))$
$f_{zzz} = xy^3 \operatorname{sen}(yz)$, $f_{zxx} = 0$, $f_{zxy} = f_{zyx} = -(zy \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$
$f_{zxz} = f_{zzx} = -y^2 \cos(yz)$
$f_{zyy} = -x(-z^2 y \operatorname{sen}(yz) + 2z \cos(yz)) = xz(zy \operatorname{sen}(yz) - 2\cos(yz))$
$f_{zyz} = f_{zzy} = -x(-zy^2 \operatorname{sen}(yz) + y \cos(yz) + y \cos(yz))$
$\quad = xy(zy \operatorname{sen}(yz) - 2\cos(yz))$

Observe que, en el tercer orden, dos reordenamientos cualesquiera de subíndices serán iguales. Por ejemplo, $f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx} = f_{zxy} = f_{zyx} = -(zy \cos(yz) + \operatorname{sen}(yz))$.

19. Determine si las funciones siguientes son soluciones de la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$:

a) $z = e^x \cos y$ *b*) $z = \frac{1}{2}(e^{x+y})$ *c*) $z = x^2 - y^2$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$

Entonces, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(e^{x+y}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(e^{x+y})$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(e^{x+y}), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}(e^{x+y})$

Entonces, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y} \neq 0.$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

Entonces, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

En los problemas 20 a 24, evalúe los límites dados.

20. $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x - 2y}{x^2 + y}$ *Respuesta:* $-\frac{5}{3}$

21. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$ *Respuesta:* sin límite

22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{2x^2 + y^2}$ *Respuesta:* sin límite

23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ *Respuesta:* sin límite

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ *Respuesta:* 4

25. Determine si cada una de las funciones siguientes puede definirse en (0, 0) de manera que sean continuas:

a) $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ *b*) $\frac{x - y}{x + y}$ *c*) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ *d*) $\frac{x + y}{x^2 + y^2}$

Respuestas: *a*) no; *b*) no; *c*) sí; *d*) no.

26. Para cada una de las funciones z siguientes, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

a) $z = x^2 + 3xy + y^2$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

b) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$

c) $z = \text{sen } 3x \cos 4y$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = 3\cos 3x \cos 4y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -4\text{sen } 3x \text{ sen} 4y$

d) $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

e) $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{9z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{9z}$

f) $z^3 - 3x^2y + 6xyz = 0$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y(x-z)}{z^2 + 2xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-2z)}{z^2 + 2xy}$

g) $yz + xz + xy = 0$ *Respuesta:* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$

27. Para cada una de las funciones z siguientes, halle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

a) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$ *Respuesta:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -5$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

b) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ *Respuesta:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$

c) $z = \text{sen}3x \cos 4y$ *Respuesta:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12\cos 3x \text{ sen}4y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$

d) $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ *Respuesta:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

28. *a*) Si $z = \frac{xy}{x-y}$, demuestre que $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

b) Si $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ y $\beta = \pm\alpha$, demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

c) Si $z = e^{-t}(\text{sen } x + \cos y)$, demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$.

d) Si $z = \text{sen}\,ax \text{ sen}\,by \text{ sen}\,kt\sqrt{a^2 + b^2}$, demuestre que $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

29. Para la fórmula de los gases $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct$, donde a, b y c son constantes, demuestre que

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v-b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v-b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v-b)}$$

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v-b}{c}, \quad \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial p} = -1$$

30. Complete la representación siguiente de una demostración del teorema (48.1). Supóngase que f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas en un disco abierto. Entonces, demuestre que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ en cada punto (a, b) del disco. Sea $\Delta_h = (f(a+h, b+h) - f(a+h, b)) - (f(a, b+h) - f(a, b))$ para h suficientemente pequeño y $\neq 0$. Sea

$F(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$. Entonces, $\Delta_h = F(a + h) - F(a)$. Aplique el teorema del valor medio para obtener a^* entre a y $a + h$, de manera que $F(a + h) - F(a) = F'(a^*)h = [f_x(a^*, b + h) - f_x(a^*, b)]h$, y aplique el teorema del valor medio para obtener b^* entre b y $b + h$ de manera que $f_x(a^*, b + h) - f_x(a^*, b) = f_{xy}(a^*, b^*)h$. Entonces,

$$\Delta_h = h^2 f_{xy}(a^*, b^*) \text{ y } \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h}{h^2} = \lim_{(a^*, b^*)\to(a, b)} f_{xy}(a^*, b^*) = f_{xy}(a, b)$$

Por un argumento semejante utilizando $\Delta_h = (f(a + h, b + h) - f(a, b + h)) - (f(a + h, b) - f(a, b))$ y el teorema del valor medio, se obtiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

31. Demuestre que el teorema (48.1) ya no se cumple si se elimina el supuesto de continuidad para f_{xy} y f_{yx}. Use la función siguiente:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

[Halle las fórmulas para $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$; evalúe $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ y luego $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.]

49

Diferencial total. Diferenciabilidad. Reglas de la cadena

Diferencial total

Sea $z = f(x, y)$. Sean Δx y Δy números cualesquiera. Δx y Δy se denominan *incrementos de* x y *y,* respectivamente. Para estos incrementos de x y y, el *cambio* correspondiente en z, que se representa como Δz, está definido por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{49.1}$$

La *diferencial total dz* está definida por:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = f_x(x,y)\,\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y \tag{49.2}$$

Nótese que si $z = f(x, y) = x$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ y, por consiguiente, $dz = \Delta x$. Entonces, $dx = \Delta x$. De igual forma, $dy = \Delta y$. Por tanto, la ecuación (49.2) se convierte en

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy \tag{49.3}$$

Notación: dz también se denota *df*.

Estas definiciones pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $u = f(x, y, z)$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ &= f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz \end{aligned}$$

EJEMPLO 49.1. Sea $z = x\cos y - 2x^2 + 3$. Entonces, $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y - 4x$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -x \operatorname{sen} y$. Así, la diferencial total para z es $dz = (\cos y - 4x)\,dx - (x \operatorname{sen} y)\,dy$.

En el caso de una función de una variable $y = f(x)$, se utilizó el principio de aproximación $\Delta y \sim f'(x)\,\Delta x = dy$ para estimar los valores de f. Sin embargo, en el caso de una función $z = f(x, y)$ de dos variables, la función f debe satisfacer una condición especial para hacer buenas posibles aproximaciones.

Diferenciabilidad

Se dice que una función $z = f(x, y)$ es *diferenciable* en (a, b) si existen las funciones $\in_1$ y $\in_2$ tales que

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y \tag{49.4}$$

y $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \in_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \in_2 = 0$

Nótese que la fórmula (49.4) puede escribirse como

$$\Delta z = dz + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y \tag{49.5}$$

Se dice que $z = f(x, y)$ es diferenciable en un conjunto A si es diferenciable en cada punto de A.

Como en el caso de una variable, la diferenciabilidad implica continuidad (véase el problema 23).

EJEMPLO 49.2. Observe que $z = f(x, y) = x + 2y^2$ es diferenciable en todos los puntos (a, b). Note también que $f_x(x, y) = 1$ y $f_y(x, y) = 4y$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = a + \Delta x + 2(b + \Delta y)^2 - a - 2b^2 \\ &= \Delta x + 4b\Delta y + 2(\Delta y)^2 = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + (2\,\Delta y)\,\Delta y\end{aligned}$$

Sea $\in_1 = 0$ y $\in_2 = 2\,\Delta y$.

Definición. Por *conjunto abierto* en un plano se entiende un conjunto A de puntos en el plano tales que cada punto de A pertenece a un disco abierto que está incluido en A.

Un ejemplo de conjunto abierto es un disco abierto y el interior de un rectángulo.

Teorema 49.1. Supóngase que $f(x, y)$ es tal que f_x y f_y son continuas en un conjunto abierto A. Entonces, f es diferenciable en A.

En el problema 43 se presenta la demostración.

EJEMPLO 49.3. Sea $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Entonces, $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ y $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$. Por el teorema (49.1), f es diferenciable en el disco abierto de radio 3 y centro en el origen (0, 0) (donde los denominadores de f_x y f_y existen y son continuos). En ese disco, $x^2 + y^2 < 9$ tómese el punto $(a, b) = (1, 2)$ y evalúe el cambio Δz cuando se mueve de (1, 2) a (1.03, 2.01). Por tanto, $\Delta x = 0.03$ y $\Delta y = 0.01$. Aproxime Δz por

$$dz = f_x(1, 2)\,\Delta x + f_y(1, 2)\,\Delta y = \frac{-1}{2}(0.03) + \frac{-2}{2}(0.01) = -0.025$$

La diferencia real Δz es $\sqrt{9 - (1.03)^2 - (2.01)^2} - \sqrt{9 - 1 - 4} \sim 1.9746 - 2 = -0.0254..$

Reglas de la cadena

La regla de la cadena (2 → 1)

Sea $z = f(x, y)$, donde f es diferenciable, y sea $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones diferenciables de una variable. Entonces, $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de una variable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{49.6}$$

Advertencia: nótese el doble significado de z, x y y en (49.6). En $\frac{dz}{dt}$, z significa $f(g(t), h(t))$, en tanto que en $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, z significa $f(x, y)$. En $\frac{\partial z}{\partial x}$, x es una variable independiente, mientras que en $\frac{dx}{dt}$, x significa $g(t)$. De igual forma, y tiene dos significados.

Para demostrar (49.6) observe primero que, por (49.4),

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

Entonces,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \in_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \in_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Si $\Delta t \to 0$, se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0(\Delta x) + 0(\Delta y) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

(Nótese que g y h son diferenciables y por ello continuas. Por consiguiente, como $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$ y, por tanto, $\in_1 \to 0$ y $\Delta_2 \to 0$.)

EJEMPLO 49.4. Sea $z = xy + \operatorname{sen} x$ y sea $x = t^2$ y $y = \cos t$. Observe que $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \cos x$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = x$. Además, $\frac{dx}{dt} = 2t$ y $\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t$. Ahora, como función de t, $z = t^2 \cos t + \operatorname{sen}(t^2)$.

Por la fórmula (49.6),

$$\frac{dz}{dt} = (y + \cos x)2t + x(-\operatorname{sen} t) = (\cos t + \cos(t^2))2t - t^2 \operatorname{sen} t$$

En este ejemplo en particular, puede comprobar el resultado calculando $D_t(t^2 \cos t + \operatorname{sen}(t^2))$.

La regla de la cadena (2 → 2)

Sea $z = f(x, y)$, donde f es diferenciable, y sea $x = g(t, s)$ y $y = h(t, s)$, donde g y h son funciones diferenciables. Entonces, $z = f(g(t, s), h(t, s))$ es una función diferenciable y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{49.7}$$

Aquí, como en la regla de la cadena anterior, los símbolos z, x y y tienen dos significados obvios.

Esta regla de la cadena puede considerarse un caso especial de la regla de la cadena (2 → 1). Por ejemplo, la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial t}$ puede considerarse una derivada ordinaria $\frac{dz}{dt}$, porque s se trata como una constante. Por consiguiente, la fórmula para $\frac{\partial z}{\partial t}$ en (49.7) es la misma fórmula para $\frac{\partial z}{\partial t}$ en (49.6).

EJEMPLO 49.5. Sea $z = e^x \operatorname{sen} y$ y $x = ts^2$ y $y = t + 2s$. Ahora, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$, $\frac{\partial x}{\partial t} = s^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$ y $\frac{\partial y}{\partial t} = 1$. Por tanto, por (49.7)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)s^2 + (e^x \cos y) + e^x(s^2 \operatorname{sen} y + \cos y) = e^{ts^2}(s^2 \operatorname{sen}(t+2s) + \cos(t+2s))$$

De igual forma,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(e^x \operatorname{sen} y)ts + 2(e^x \cos y) = 2e^x(ts \operatorname{sen} y + \cos y) = 2e^{ts^2}(ts \operatorname{sen}(t+2s) + \cos(t+2s))$$

Las generalizaciones de la regla de la cadena (49.47) se cumplen para los casos ($m \to n$), donde $z = f(x, y, \dots)$ es una función de m variables y cada una de ellas es una función de un conjunto de n variables.

Derivación implícita

Supóngase que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define z implícitamente como función de x y y. Entonces, por la regla de la cadena ($3 \to 2$), si se derivan ambos miembros de la ecuación respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial x}=1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

De igual forma, $\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Luego, si $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \tag{49.8}$$

Esto también puede escribirse como $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

EJEMPLO 49.6. La ecuación $xy + yz^3 + xz = 0$ determina z como función de x y y. Sea $F(x, y, z) = xy + yz^3 + xz$. Como $F_z = x + 3yz^2$, $F_x = y + z$, y $F_y = x + z^3$, (49.8) implica que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+3yz^2} \qquad \text{y.} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z^3}{x+3yz^2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas 1 y 2 determine la diferencia total.

1. $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$

Se tiene $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+2xy^2+y^3$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+2x^2y+3xy^2$

Entonces, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(3x^2y+2xy^2+y^3)\,dx+(x^3+2x^2y+3xy^2)\,dy$

2. $z = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x$

Se tiene $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{sen} y - y\cos x$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y-\operatorname{sen} x$

Entonces, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(\operatorname{sen} y - y\cos x)\,dx+(x\cos y-\operatorname{sen} x)\,dy$

3. Compare dz y Δz, dado $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=2x-6y$. Entonces $dz=2(x+y)\,dx+2(x-3y)\,dy$

También,

$$\Delta z=\left[(x+dx)^2+2(x+dx)(y+dy)-3(y+dy)^2\right]-(x^2+2xy-3y^2)$$
$$=2(x+y)\,dx+2(x-3y)\,dy+(dx)^2+2\,dx\,dy-3(dy)^2$$

Así, dz y Δz difieren por $(dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2$.

4. Aproxime el área de un rectángulo de dimensiones 35.02 por 24.97 unidades.

Para las dimensiones x por y, el área $A = xy$, de modo que $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$. Con $x = 35$, $dx = 0.02$, $y = 25$ y $dy = -0.03$ se tiene $A = 35(25) = 875$ y $dA = 25(0.02) + 35(-0.03) = -0.55$. El área es aproximadamente $A + dA = 874.45$ unidades cuadradas. El área real es 874.4494.

5. Calcule la variación en la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de 6 y 8 pulgadas cuando el cateto más corto se alarga $\frac{1}{4}$ pulgadas y el más largo se encoge $\frac{1}{8}$ pulgadas.

Sean x, y y z los catetos menor, mayor y la hipotenusa del triángulo, respectivamente. Entonces,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cuando $x = 6$, $y = 8$, $dx = \frac{1}{4}$ y $dy = -\frac{1}{8}$, entonces $dz = \frac{6(\frac{1}{4}) + 8(-\frac{1}{8})}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{20}$ pulgadas. Por tanto, la hipotenusa se alarga aproximadamente $\frac{1}{20}$ pulgadas.

6. La potencia consumida en una resistencia eléctrica se calcula con $P = \frac{E^2}{R}$ watts. Si $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohmios, ¿cuánto cambia la potencia si E disminuye en 5 voltios y R en 0.2 ohmios?

Se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

Cuando $E = 200$, $R = 8$, $dE = -5$ y $dR = -0.2$, entonces

$$dP = \frac{2(200)}{8}(-5) - \left(\frac{200}{8}\right)^2(-0.2) = -250 + 125 = -125$$

La potencia disminuye aproximadamente 125 watts.

7. Las dimensiones de un bloque rectangular de madera son 10, 12 y 20 pulgadas, con un posible error de 0.05 en cada una de las medidas. Determine, aproximadamente, el máximo error en el área de superficie del bloque y el porcentaje de error en el área producido por esos errores en las medidas individuales.

El área de superficie es $S = 2(xy + yz + zx)$; entonces,

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y + z)\,dx + 2(x + z)\,dy + 2(y + x)\,dz$$

El máximo error en S ocurre cuando los errores en las longitudes de los lados son del mismo signo; por ejemplo, positivos. Así,

$$dS = 2(12 + 20)(0.05) + 2(10 + 20)(0.05) + 2(12 + 10)(0.05) = 8.4 \text{ pulgadas}^2$$

El porcentaje de error es (error/área)(100) = (8.4/1120)(100) = 0.75%.

8. En la fórmula $R = E/C$, determine el máximo error y el porcentaje de error si $C = 20$ con un posible error de 0.1 y $E = 120$ con un posible error de 0.05.

Aquí,

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial C}dC = \frac{1}{C}dE - \frac{E}{C^2}dC$$

El error máximo ocurrirá cuando $dE = 0.05$ y $dC = -0.1$; entonces, $dR = \frac{0.05}{20} - \frac{120}{400}(-0.1) = 0.0325$ es aproximadamente el error máximo. El porcentaje de error es $\frac{dR}{R}(100) = \frac{0.0325}{8}(100) = 0.40625 = 0.41\%$.

9. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 pies, y el ángulo que forman es de 60º. Si los posibles errores son 0.2 pies al medir los lados y 1º en el ángulo, ¿cuál es el máximo error posible en el cálculo del área?

Aquí,

$$A = \frac{1}{2}xy\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2}y\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{2}x\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2}xy\cos\theta$$

y

$$dA = \tfrac{1}{2}y\,\text{sen}\theta\,dx + \tfrac{1}{2}x\,\text{sen}\theta\,dy + \tfrac{1}{2}xy\cos\theta\,d\theta$$

Cuando $x = 150$, $y = 200$, $\theta = 60º$, $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $d\theta = 1º = \pi/80$, entonces,

$$dA = \tfrac{1}{2}(200)(\text{sen}\,60°)(0.2) + \tfrac{1}{2}(150)(\text{sen}\,60°)(0.2) + \tfrac{1}{2}(250)(200)(\cos 60°)(\pi/180) = 161.21 \text{ pies}^2$$

10. Halla dz/dt, dado $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = \text{sen}\,t$, $y = \cos t$.

Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\text{sen}t$$

se tiene que $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x + 3y)\cos t - (3x + 10y)\,\text{sen}t$$

11. Halla dz/dt, dado $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = e^{-t}$, $y = e^t$.

Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

se tiene que $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2 + y^2}e^t = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2}$$

12. Encuentre $\frac{dz}{dx}$, dado $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{ax}$.

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y\frac{dy}{dx} = (2x + 2y) + (2x + 8)ae^{ax} = 2(x + y) + 2a(x + 4y)e^{ax}$$

13. Halle *a*) $\frac{dz}{dx}$ y *b*) $\frac{dz}{dy}$, dado $z = f(x, y) = xy^2 + yx^2$, $y = \ln x$.

a) Aquí x es la variable independiente:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = (y^2 + 2xy) + (2xy + x^2)\frac{1}{x} = y^2 + 2xy + 2y + x$$

b) Aquí y es la variable independiente:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2 + 2xy)x + (2xy + x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

14. La altura de un cono circular recto es de 15 pulgadas y crece a razón de 0.2 pulgadas por minuto (pulg/min). El radio de la base mide 10 pulgadas y disminuye a razón de 0.3 pulg/min. ¿Con qué rapidez está cambiando el volumen?

Sea x el radio y y la altura del cono (figura 49.1). De $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, y considerando x y y como funciones de tiempo t, se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\pi}{3}[2(10)(15)(-0.3) + 10^2(0.2)] = -\frac{70\pi}{3} \text{ pulgadas}^3\text{/min}$$

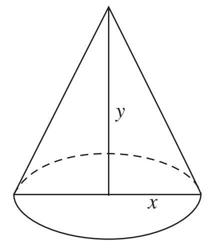


Fig. 49.1

15. Un punto P se mueve a lo largo de la curva que es la intersección de las superficies $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = z$ y $x^2 + y^2 = 5$, con x, y y z expresados en pulgadas. Si x aumenta a razón de 0.2 pulgadas por minuto, ¿con qué rapidez está cambiando z cuando $x = 2$?

De $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$, se obtiene $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{x}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dt}$. Como $x^2 + y^2 = 5$, $y = \pm 1$ cuando $x = 2$; también la derivación da $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$.

Cuando $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1}(0.2) = -0.4$ y $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-0.4) = \frac{5}{36}$ pulgadas/minuto.

Cuando $y = -1$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = 0.4$ y $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-1)(0.4) = \frac{5}{36}$ pulgadas/minuto.

16. Halle $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$, dado $z = x^2 + xy + y^2$; $x = 2r + s$, $y = r - 2s$.

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x + y)(2) + (x + 2y)(1) = 5x + 4y$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x + y)(1) + (x + 2y)(-2) = -3y$$

17. Halle $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ y $\frac{\partial u}{\partial \theta}$, dado $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2$; $x = \rho \operatorname{sen} \beta \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \beta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \operatorname{sen}\beta \cos\theta + 4y \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta + 4z \cos\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x\rho \cos\beta \cos\theta + 4y\rho \cos\beta \operatorname{sen}\theta - 4z\rho \operatorname{sen}\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\rho \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta + 4y\rho \operatorname{sen}\beta \cos\theta$$

18. Resuelva $\frac{du}{dx}$, dado $u = f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $y = \frac{1}{x}$, $z = x^2$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = (y + z) + (x + z)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + (y + x)2x = y + z + 2x(x + y) - \frac{x + z}{x^2}$$

19. Use la derivación implícita [fórmula (49.8)] para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, dado $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x+3y+3z}{3x+2z} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3x-4y}{3x+2z}$$

20. Use la derivación implícita [fórmula (49.8)] para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, dado sen xy + sen yz + sen $zx = 1$.

Sea $F(x, y, z)$ = sen xy + sen yz + sen $zx - 1$; entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos xy + z\cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\cos xy + z\cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y\cos yz + x\cos zx$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y\cos xy + z\cos zx}{y\cos yz + x\cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x\cos xy + z\cos yz}{y\cos yz + x\cos zx}$$

21. Sean u y v están definidas como funciones de x y y por las ecuaciones $f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0$ y $g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0$ halle *a*) $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$; *b*) $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$.

a) Al derivar f y g parcialmente respecto a x se obtiene

$$1 + 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x - y + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Al resolver estas relaciones simultáneamente para $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$ se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y-2x)}{2(u^2 - v^2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x-y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

b) Derivando f y g parcialmente respecto a y se obtiene

$$2y + 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad -x + 2y + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x-2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y-x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)}$$

22. Dado $u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$ y $uv + x - y = 0$, encuentre *a*) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ y *b*) $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

a) Aquí x y y se consideran variables independientes. Al derivar parcialmente las ecuaciones dadas respecto a x se obtiene

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

Se resuelven estas relaciones simultáneamente para obtener $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+v}{u^2+v^2}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v-u}{u^2+v^2}$.

Al derivar parcialmente las ecuaciones dadas respecto a y se tiene

$$2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \qquad \text{y} \qquad v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

Se resuelven simultáneamente para llegar a $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2v-3u}{2(u^2+v^2)}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u+3v}{2(u^2+v^2)}$.

b) Aquí u y v se consideran variables independientes. Se derivan parcialmente las ecuaciones dadas respecto a u y se obtiene

$$2u + 2\frac{\partial x}{\partial u} + 3\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \qquad \text{y} \qquad v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u+3v}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{5}.$$

Se derivan las ecuaciones dadas respecto a v y se obtiene

$$-2v + 2\frac{\partial x}{\partial v} + 3\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \qquad \text{y} \qquad u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

Entonces,
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v - 3u}{5} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2u(u+v)}{5}$$

23. Demuestre que la diferenciabilidad de $z = f(x, y)$ en (a, b) implica que f es continua en (a, b).

De (49.4), $\Delta z = (f_x(a, b) + \epsilon_1)\,\Delta x + (f_y(a, b) + \epsilon_2)\,\Delta y$, donde $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1 = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2 = 0$. Por tanto, $\Delta z \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, lo que implica que f es continua en (a, b).

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

24. Halle la diferencia total de las funciones siguientes:

a) $z = xy^3 + 2xy^3$ — *Respuesta*: $dz = (3x^2 + 2y^2)\,dx + (x^2 + 6y^2)\,dy$

b) $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ — *Respuesta*: $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

c) $z = e^{x^2 - y^2}$ — *Respuesta*: $dz = 2z(x\,dx - y\,dy)$

d) $z = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ — *Respuesta*: $dz = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

25. Use diferenciales para aproximar *a)* el volumen de una caja con base cuadrada de lado 8.005 y altura 9.996 pies; *b)* la diagonal de una caja rectangular de dimensiones 3.03 por 5.98 por 6.01 pies.

Respuestas: *a)* 640.544 pies^3; *b)* 9.003 pies

26. Aproxime el máximo error posible y el porcentaje de error cuando z se calcula mediante la fórmula dada:

a) $z = \pi r^2 h$; $r = 5 \pm 0.05$, $h = 12 \pm 0.1$ — *Respuesta*: 8.5π; 2.8%

b) $1/z = 1/f + 1/g$; $f = 4 \pm 0.01$, $g = 8 \pm 0.02$ — *Respuesta*: 0.0067; 0.25%

c) $z = y/x$; $x = 1.8 \pm 0.1$, $y = 2.4 \pm 0.1$ — *Respuesta*: 0.13; 10%

27. Halle el porcentaje máximo aproximado de error en:

a) $\omega = \sqrt[3]{g/b}$ si hay un error posible de 1% en la medida de g y $\frac{1}{2}$% de error en la medida de b.

(*Sugerencia:* $\ln\omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b)$; $\dfrac{d\omega}{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{dg}{g} - \dfrac{db}{b}\right)$; $\left|\dfrac{dg}{g}\right| = 0.01$; $\left|\dfrac{db}{b}\right| = 0.005$.)

Respuesta: 0.005

b) $g = 2s/t^2$ si hay un posible error de 1% en la medida de s y $\frac{1}{4}$% de error en la medida de t.

Respuesta: 0.015

28. Encuentre du/dt dado:

a) $u = x^2y^3$; $x = 2t^3$, $y = 3t^2$

Respuesta: $6xy^2t(2yt + 3x)$

b) $u = x\cos y + y \operatorname{sen} x$; $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$

Respuesta: $2(\cos y + y\cos x)\cos 2t - 2(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} 2t$

c) $u = xy + yz + zx$; $x = e'$, $y = e^{-t}$, $z = e^t + e^{-t}$

Respuesta: $(x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t}$

29. En cierto instante el radio de un cilindro circular recto mide 6 pulgadas y aumenta a razón de 0.2 pulgadas por segundo (pulg/s), mientras que la altura es de 8 pulgadas y decrece a razón de 0.4 pulg/s. Determine la variación respecto al tiempo, *a*) del volumen y *b*) de la superficie en ese instante.

Respuesta: *a*) 4.8π pulg^3/s; *b*) 3.2π pulg^2/s

30. Una partícula se mueve en un plano de manera tal que en el instante t su abscisa y su ordenada están dadas por $x = 2 + 3t$, $y = t^2 + 4$ con x y y expresados en pies y t en minutos. ¿Cómo cambia la distancia de la partícula al origen cuando $t = 1$?

Respuesta: $5/\sqrt{2}$ pies/minuto

31. Un punto se mueve a lo largo de la curva de intersección de $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ con el plano $x - 2y + 4 = 0$. Cuando $x = 2$ y aumenta a razón de 3 unidades por segundo (unidades/s), encuente *a*) cómo cambia y, *b*) cómo cambia z y *c*) la rapidez del punto.

Respuestas: *a*) creciendo a 3/2 unidades/s; *b*) creciendo a 75/14 unidades/s en (2, 3, 7) y decreciendo en 75/14 unidades/s en (2, 3, –7); *c)* 6.3 unidades/s

32. Halle $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ dado

a) $z = x^2 - 2y^2$, $x = 3s + 2t$, $y = 3s - 2t$ — *Respuesta*: $6(x - 2y)$; $4(x + 2y)$

b) $z = x^2 + 3xy + y^2$, $x = \operatorname{sen} s + \cos t$, $y = \operatorname{sen} s - \cos t$ — *Respuesta*: $5(x + y)\cos s$; $(x - y)\operatorname{sen} t$

c) $z = x^2 + 2y^2$, $x = e^s - e^t$, $y = e^s + e^t$ — *Respuesta*: $2(x + 2y)e^s$; $2(2y - x)e^t$

d) $z = \operatorname{sen}(4x + 5y)$, $x = s + t$, $y = s - t$ — *Respuesta*: $9\cos(4x + 5y)$; $-\cos(4x + 5y)$

e) $z = e^{xy}$, $x = s^2 + 2st$, $y = 2st + t^2$ — *Respuesta*: $2e^{xy}[tx + (s + t)y]$; $2e^{xy}[(s + t)x + sy]$

33. *a*) Sean $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$; demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

b) Sean $u = f(x, y)$ y $x = r\cosh s$, $y = r\operatorname{senh} s$; pruebe que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

34. *a*) Si $z = f(x + \alpha y) + g(x - \alpha y)$, demuestre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. (*Sugerencia*: escriba $z = f(u) + g(v)$, $u = x + \alpha x$, $v = x - \alpha y$.)

b) Sea $z = x^n f(y/x)$; demuestre que $x\,\partial z/\partial x + y\partial z/\partial y = nz$.

c) Sea $z = f(x, y)$ y $x = g(t)$, $y = h(t)$; demuestre que, sujeto a las condiciones de continuidad,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h''$$

d) Sea $z = f(x, y)$; $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$; demuestre que, sujeto a las condiciones de continuidad,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_x g_{rr} + f_y h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_x g_{rs} + f_y h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_x g_{ss} + f_y h_{ss}$$

35. Una función $f(x, y)$ se llama *homogénea de orden n* si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. [Por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ es homogénea de orden 2; $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y/x) + y \cos(y/x)$ es homogénea de orden 1.] Derive $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ respecto a t y remplace t por 1 para demostrar que $xf_x + yf_y = nf$. Compruebe esta fórmula mediante los dos ejemplos dados. Ver también el problema 34*b)*.

36. Si $z = \phi(u, v)$, donde $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y si $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, demuestre que

a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ *b)* $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right)$

37. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, dado

a) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60$ *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x}{5z}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y}{5z}$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20$ *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x+y+4z}{4x+2y+z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+y+2z}{4x+2y+z}$

c) $x + 3y + 2z = \ln z$ *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1-2z}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z}{1-2z}$

d) $z = e^x \cos(y + z)$ *Respuesta*: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1+e^x \operatorname{sen}(y+z)}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1+e^x \operatorname{sen}(y+z)}$

e) $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(y + z) + \operatorname{sen}(z + x) = 1$

Respuesta: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x+y)+\cos(z+x)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}$

38. Encuentre todas las primeras y segundas derivadas parciales de z, dado $x^2 + 2yz + 2zx = 1$.

Respuesta: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+z}{x+y}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{x+y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x-y+2z}{(x+y)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x+2z}{(x+y)^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{(x+y)^2}$

39. Sea $F(x, y, z) = 0$; demuestre que $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

40. Sea $f(x, y) = 0$ y $g(z, x) = 0$; demuestre que $\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z}$.

41. Halle las primeras derivadas de u y v respecto a x y y y las primeras derivadas parciales de x y y respecto a u y v, dado $2u - v + x^2 + xy = 0$, $u + 2v + xy - y^2 = 0$.

Respuesta: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{5}(4x+3y); \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{5}(2x-y); \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}(2y-3x); \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y-x}{5};$

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{4y-x}{2(x^2-2xy-y^2)}; \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y-2x}{2(x^2-2xy-y^2)}; \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3x-2y}{2(x^2-2xy-y^2)}; \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-4x-3y}{2(x^2-2xy-y^2)}$

42. Sea $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, y $w = x^3 + y^3 + z^3$. Demuestre que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x+z}{2(x-y)(y-z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x-z)(y-z)}$$

43. Rellene los vacíos en la representación siguiente de una demostración del teorema (49.1). Suponga que $f(x, y)$ es tal que f_x y f_y son continuas en un conjunto abierto A. Muestre que f es diferenciable en A.

Existe x^* entre a y $a + \Delta x$ tal que

$$f(a + \Delta x, b) - f(a, b) = f_x(x^*, b)\,\Delta x$$

y existe y^* entre b y $b + \Delta y$ tal que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a + \Delta x, b) = f_y(a + \Delta x, y^*)\,\Delta y$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b)\\ &= [f(a+\Delta x, b) - f(a, b)] + [f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a+\Delta x, b)]\\ &= f_x(x^*, b)\,\Delta x + f_y(a+\Delta x, y^*)\Delta y\end{aligned}$$

Sea $\in_1 = f_x(x^*, y) - f_x(a, b)$ y $\in_2 = f_y(a+\Delta x, y^*) - f_y(a, b)$. Luego,

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \in_1 \Delta x + \in_2 \Delta y$$

Para mostrar que $\in_1 \to 0$ y $\in_2 \to 0$, use la continuidad de f_x y f_y.

44. Muestre que la continuidad de $f(x, y)$ no implica diferenciabilidad, aunque f_x y f_y existan. Use la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0)\end{cases}$$

[*Sugerencia:* muestre que f no es continua en (0, 0) y, por consiguiente, no es diferenciable. Muestre la existencia de $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ por un cálculo directo.]

45. Encuentre una función $f(x, y)$ tal que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, y f no es continua en (0, 0). Esto muestra que la existencia de las primeras derivadas parciales no implica continuidad. [*Sugerencia*: defina $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ para $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.]

50

Vectores en el espacio

Igual que en el plano (véase el capítulo 39), un vector en el espacio es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Tres vectores **a**, **b** y **c**, que no estén en un mismo plano ni sean paralelos y que comiencen de un punto común, forman un *sistema de giro a la derecha* (dextrógiro) o *tríada* si **c** tiene la dirección en la que avanza un sacacorchos al girarlo por el ángulo más pequeño en la dirección de **a** hacia **b**, como se indica en la figura 50.1. Nótese que, visto desde un punto en **c**, la rotación sobre el ángulo más pequeño de **a** a **b** se verá en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

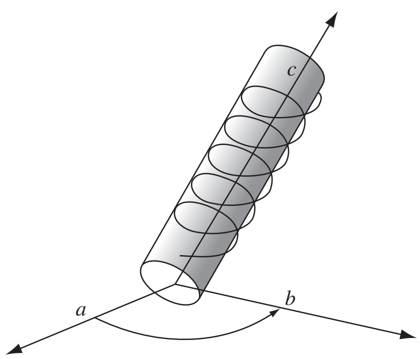


Fig. 50.1

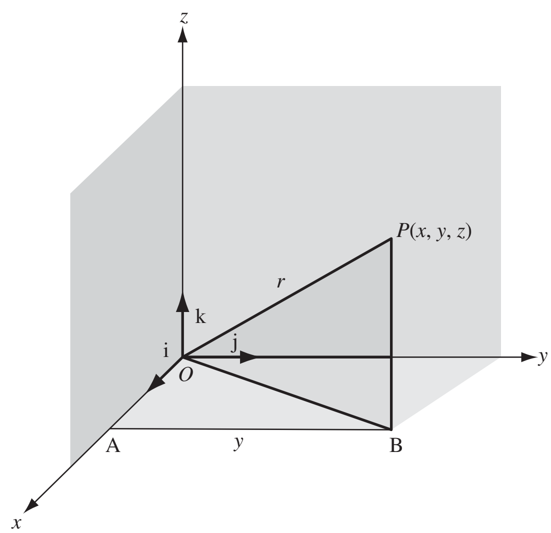


Fig. 50.2

Seleccionemos un sistema de coordenadas rectangular derecho (dextrógiro) en el espacio y sean **i**, **j** y **k** los vectores unitarios a lo largo de los ejes positivos x, y y z, respectivamente, como en la figura 50.2. Los ejes de coordenadas dividen el espacio en ocho partes denominadas *octantes*. Por ejemplo, el *primer octante* consta de todos los puntos (x, y, z) para los que $x > 0$, $y > 0$ y $z > 0$.

Como en el capítulo 39, todo vector **a** puede expresarse como

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Si $P(x, y, z)$ es un punto en el espacio (figura 50.2), el vector **r** que va desde el origen O hasta P se denomina *vector de posición* de P y se puede escribir como

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{50.1}$$

El álgebra de vectores expuesta en el capítulo 39 se cumple aquí sólo con los cambios que la diferencia en dimensiones requiere. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, entonces,

$k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j} + ka_3\mathbf{k}$ para k cualquier escalar

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares

De (50.1), tenemos que

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \, . \, \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{50.2}$$

como la distancia del punto $P(x, y, z)$ al origen. También, si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera (fig. 50.3), entonces

$$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{P_1B} + \mathbf{BP_2} = \mathbf{P_1A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{50.3}$$

es la fórmula ya conocida para la distancia entre dos puntos (véanse los problemas 1 a 3).

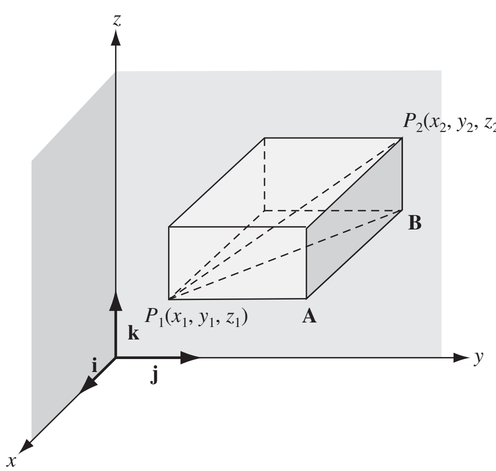


Fig. 50.3

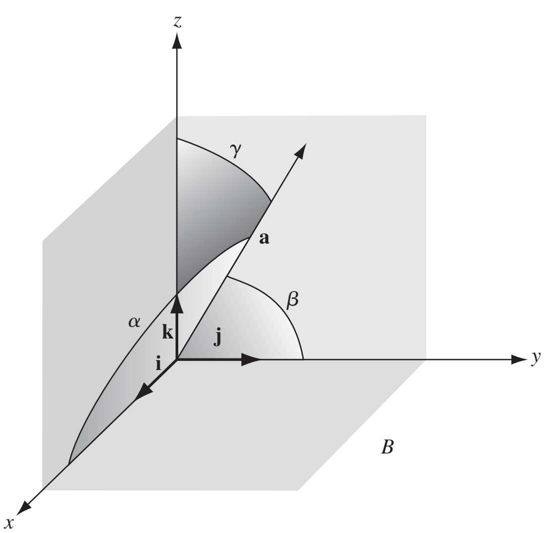


Fig. 50.4

Cosenos directores de un vector

Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ vectores que forman los ángulos α, β y γ, respectivamente, con los ejes positivos x, y y z, como se indica en la figura 50.4. De

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{i}||\mathbf{a}| \cos\alpha = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\beta,\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\gamma$$

se obtiene

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\,.\,\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\,.\,\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\,.\,\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Éstos son los cosenos directores de **a**. Como

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

el vector $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ es un vector unitario paralelo a **a**.

Determinantes

Se supone que se conocen bien los determinantes de 2×2 y 3×3. En particular,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

La expansión del determinante de 3×3 va “a lo largo de la primera fila”. Esto es igual a las expansiones apropiadas a lo largo de las otras filas y hacia abajo en las columnas.

Vector perpendicular a dos vectores

Sean

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \text{ y } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

dos vectores no paralelos con punto inicial común P. Mediante un cálculo sencillo puede demostrarse que

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{50.4}$$

es perpendicular (normal a) tanto a **a** como a **b** y, por ende, al plano de estos vectores.

En los problemas 5 y 6 se demuestra que

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta = \text{área de un paralelogramo con lados } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ no paralelos}$$

Si **a** y **b** son paralelos, entonces $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ y con (50.4) se demuestra que $\mathbf{c} = 0$; es decir, **c** es el vector cero. El vector cero, por definición, tiene magnitud 0 y dirección sin especificar.

Producto vectorial de dos vectores

Se toma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \text{ y } \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

con punto inicial P y represéntese con **n** el vector unitario normal al plano de **a** y **b**, dirigido de forma tal que **a**, **b** y **n** (en ese orden) formen una tríada derecha (dextrógira) en P, como en la figura 50.5. El *producto vectorial* o *producto cruzado* de **a** y **b** se define como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{n} \tag{50.6}$$

donde θ de nuevo es el ángulo más pequeño entre **a** y **b**. Así, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular tanto a **a** como a **b**.

En el problema 6 se muestra que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$ es el área del paralelogramo que tiene **a** y **b** como lados no paralelos.

Si **a** y **b** son paralelos, entonces $\theta = 0$ o π y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Así,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{50.7}$$

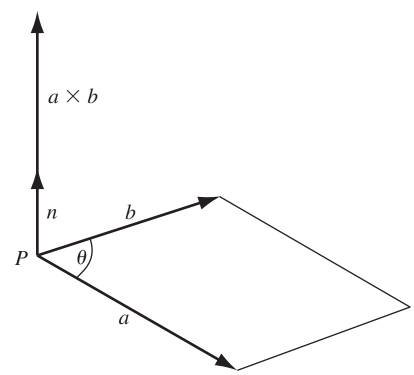


Fig. 50.5

En la figura (50.5), si se invierte el orden de **a** y **b**, entonces **n** debe remplazarse por **–n**; entonces,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{50.9}$$

Los ejes de coordenadas se escogieron como un sistema derecho (dextrógiro), de lo que se sigue que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \tag{50.9}$$

En el problema 8 se prueba que para todo vector **a**, **b** y **c**, la ley distributiva

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{50.10}$$

Al multiplicar (50.10) por –1 y al utilizar (50.8) se obtiene la ley distributiva correspondiente

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \tag{50.11}$$

Entonces también,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{d} \tag{50.12}$$

y

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{50.13}$$

(Véanse los problemas 9 y 10.)

Triple producto escalar

En la figura 50.6, sea θ el ángulo menor entre **b** y **c** y sea ϕ el ángulo más pequeño entre **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Denótese con h la altura y con A el área de la base del paralelepípedo. Entonces, el triple producto escalar es, por definición,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{n} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}| \operatorname{sen} \theta \cos \phi = (|\mathbf{a}| \cos\phi)(|\mathbf{b}||\mathbf{c}| \operatorname{sen} \theta) = hA \\ &= \text{volumen del paralelepípedo}\end{aligned}$$

Puede demostrarse (véase el problema 11) que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{50.14}$$

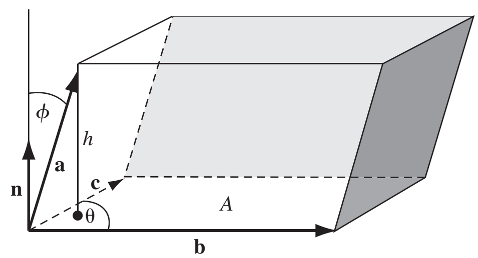


Fig. 50.6

Además

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

en tanto que

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

De igual forma se tiene que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \tag{50.15}$$

y

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \tag{50.16}$$

De la definición de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ como un volumen se sigue que si **a**, **b** y **c** son coplanares, entonces $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ y a la inversa.

Los paréntesis en $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ no son necesarios. Por ejemplo, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ puede interpretarse sólo como $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ o $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Pero $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar, así que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ no tiene sentido (véase el problema 12).

Triple producto vectorial

En el problema 13 observe que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{50.17}$$

Igualmente,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{50.18}$$

Así, excepto cuando **b** es perpendicular tanto a **a** como a **c**, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ y usar paréntesis es indispensable.

Línea recta

Una recta en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puede definirse como el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que P_0P es paralelo a una dirección dada $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores posición de P_0 y P (figura 50.7). Entonces,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \text{ donde } k \text{ es una variable escalar} \tag{50.19}$$

es la ecuación vectorial de la recta PP_0. Al escribir (50.19) como

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})$$

entonces separamos los componentes para obtener

$$x - x_0 = ka_1,\ y - y_0 = ka_2,\ z - z_0 = ka_3$$

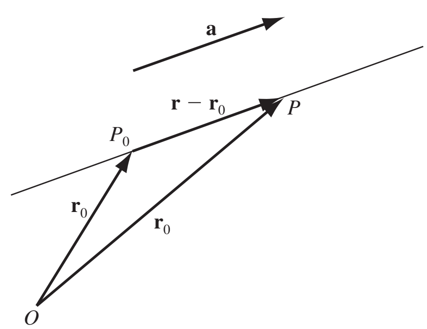


Fig. 50.7

y eliminando k se obtiene

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{50.20}$$

como en las ecuaciones de la recta en coordenadas rectangulares. Aquí, $[a_1, a_2, a_3]$ es un conjunto de *números direccionales* para la recta y $\left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right]$ es un conjunto de *cosenos directores* de la recta.

Si cualquiera de los números a_1, a_2, a_3 es cero, el numerador correspondiente en (50.20) debe ser cero. Por ejemplo, si $a_1 = 0$ pero $a_2, a_3 \neq 0$, las ecuaciones de la recta son

$$x - x_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

El plano

Un plano en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ puede definirse como el lugar de todas las rectas que pasan por P_0 y son perpendiculares (normales) a una recta dada (dirección) $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ (figura 50.8). Sea $P(x, y, z)$ cualquier otro punto en el plano. Entonces, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{P_0P}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y la ecuación del plano es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0 \qquad (50.21)$$

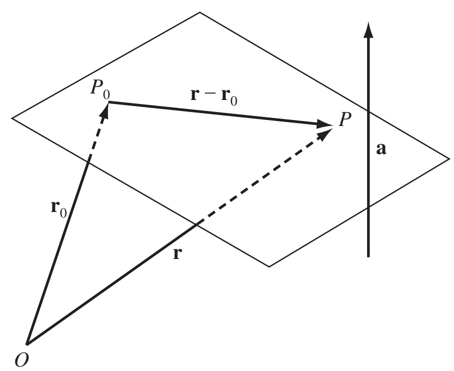


Fig. 50.8

En coordenadas rectangulares esto se convierte en

$$[(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = 0$$

o

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (50.22)$$

donde $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Recíprocamente, sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en la superficie $Ax + By + Cz + D = 0$. Entonces, también $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Si se resta la segunda de estas ecuaciones de la primera se obtiene $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0$ y el vector constante $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal a la superficie en cada uno de sus puntos. Por tanto, la superficie es un plano.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine la distancia del punto $P_1(1, 2, 3)$ a *a)* el origen, *b)* el eje *x*, *c)* el eje *z*, *d)* el plano *xy*, y *e)* el punto $P_2(3, -15)$.

En la figura 50.9,

a) $\mathbf{r} = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; por tanto, $|\mathbf{r}| \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

b) $\mathbf{AP}_1 = \mathbf{AB} + \mathbf{BP}_1 = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; por tanto, $|\mathbf{AP}_1| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

c) $\mathbf{DP}_1 = \mathbf{DE} + \mathbf{EP}_1 = 2\mathbf{j} + \mathbf{i}$; por tanto, $|\mathbf{DP}_1| = \sqrt{5}$.

d) $\mathbf{BP}_1 = 3\mathbf{k}$, así que $|\mathbf{BP}_1| = 3$

e) $\mathbf{P_1P_2} = (3 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (5 - 3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; por tanto, $|\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$.

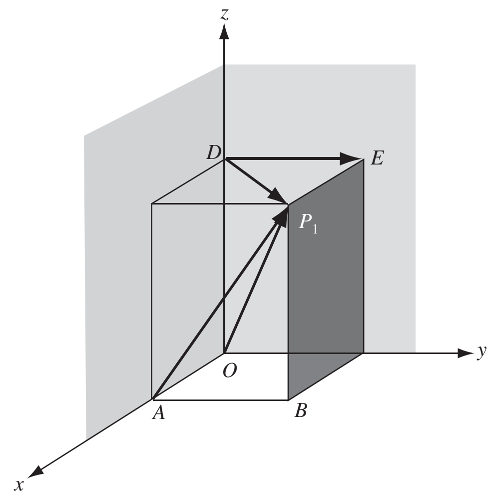


Fig. 50.9

2. Encuentre el ángulo θ entre los vectores que unen O con $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(2, -3, -1)$.

Sea $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Entonces,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2) + 2(-3) + 3(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \theta = 120°$$

3. Determine el ángulo $\alpha = \angle BAC$ del triángulo ABC (figura 50.10) cuyos vértices son $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$.

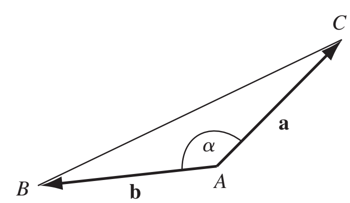


Fig. 50.10

Sea $\mathbf{a} = \mathbf{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Entonces,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-3-1}{\sqrt{22}} \qquad \text{y} \qquad \alpha = 148°31'.$$

4. Determine los cosenos directores de $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Los cosenos directores son $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{3}{13}, \cos\beta = \dfrac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{12}{13}, \cos\gamma = \dfrac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{4}{13}.$

5. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ son dos vectores que salen del punto $\boldsymbol{P}$ y si

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

demuestre que $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo más pequeño entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Se tiene que $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

Por tanto, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$, como se pidió.

6. Halle el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos son **a** y **b**.

De la figura 50.11, $h = |\mathbf{b}|$ sen θ y el área es $h = |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ sen θ.

7. Sean $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, respectivamente, las componentes de **a**, paralela y perpendicular a **b**, como se indica en la figura 50.12. Demuestre que $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$.

Si θ es ángulo entre **a** y **b**, entonces $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}|\cos\theta$ y $|\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}|$ sen θ. Como **a**, $\mathbf{a}_2$ y **b** son coplanares,

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}_2||\mathbf{b}| \text{ sen } \phi\, \mathbf{n} = |\mathbf{a}| \text{ sen } \theta\, |\mathbf{b}|\mathbf{n} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \text{ sen } \theta\, \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Como a_1 y b son paralelos, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$.

8. Demuestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En la figura 50.13, el punto inicial *P* de los vectores **a**, **b** y **c** está en el plano de papel, en tanto que sus puntos terminales se hallan por encima de este plano. Los vectores $\mathbf{a}_1$ y **b** son, respectivamente, las componentes de **a** y **b** perpendiculares a **c**. Entonces, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}$, $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \times \mathbf{c}$ todos están en el plano de papel.

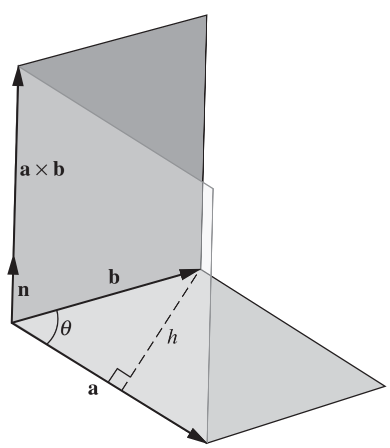


Fig. 50.11

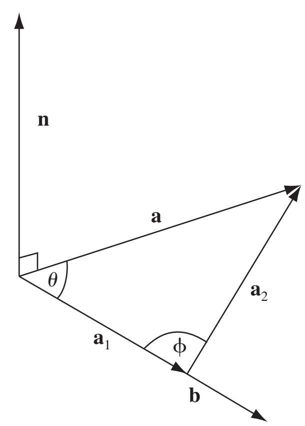


Fig. 50.12

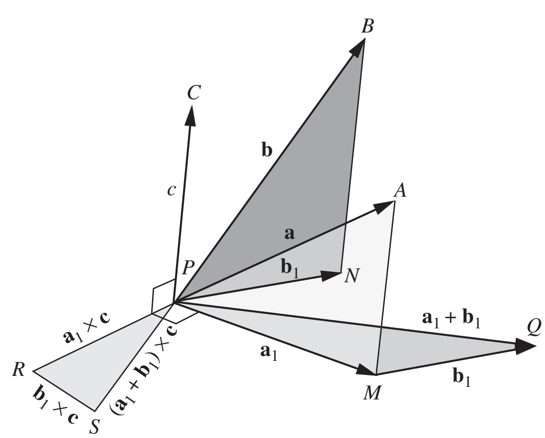


Fig. 50.13

En los triángulos *PRS* y *PMQ*,

$$\frac{RS}{PR} = \frac{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1||\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{MQ}{PM}$$

Por tanto, *PRS* y *PMQ* son semejantes. Ahora, *PR* es perpendicular a *PM* y *RS* es perpendicular a *MQ*; por ende, *PS* es perpendicular a *PQ* y $\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{c}$. Así, como $\mathbf{PS} = \mathbf{PQ} \times \mathbf{c} = \mathbf{PR} + \mathbf{RS}$, tenemos que

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{c})$$

Por el problema 7, $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$ pueden remplazarse por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente, para obtener el resultado solicitado.

9. Cuando $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Se tiene, por la ley distributiva

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= (a_1b_2\mathbf{k} - a_1b_3\mathbf{j}) + (-a_2b_1\mathbf{k} + a_2b_3\mathbf{i}) + (a_3b_1\mathbf{j} - a_3b_2\mathbf{i}) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

10. Deduzca la ley de los senos de la trigonometría plana.

Considere el triangulo *ABC*, cuyos lados $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ son las magnitudes a, b, c, respectivamente, y cuyos ángulos interiores son α, β, γ. Tenemos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Entonces, $\quad \mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad$ o $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

y $\quad \mathbf{b} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad$ o $\quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Así, $\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a},$

de forma que $\quad |\mathbf{a}|\mathbf{b} \text{ sen } \gamma = |\mathbf{b}||\mathbf{c}|\text{sen } \alpha = |\mathbf{c}||\mathbf{a}|\text{sen } \beta$

o $\quad ab \text{ sen } \gamma = bc \text{ sen } \alpha = ca \text{ sen } \beta$

y $\quad \dfrac{\text{sen}\,\gamma}{c} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \dfrac{\text{sen}\,\beta}{b}$

11. Sea $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$; demuestre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Por (50.13),

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot [(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}]$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

12. Demuestre que $a \cdot (a \times c) = 0$

Por (50.14), $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0$

13. Para los vectores **a**, **b** y **c** del problema 11, demuestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Aquí

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times [(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) + \mathbf{j}(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) + \mathbf{k}(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_3c_2)$$

$$= \mathbf{i}b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \mathbf{j}b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + \mathbf{k}b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - [\mathbf{i}c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \mathbf{j}c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \mathbf{k}c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)]$$

$$= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

14. Si l_1 y l_2 son dos rectas en el espacio que no se intersecan, pruebe que la distancia d más corta entre ellas es la distancia desde cualquier punto en l_1 al plano l_2 y es paralelo a l_1; es decir, demuestre que si P_1 es un punto en l_1 y P_2 es un punto en l_2, entonces, aparte el signo, d es la proyección escalar de $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ en una perpendicular común a l_1 y l_2.

Sea l_1 que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en la dirección $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, y sea l_2 que pasa por $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en la dirección $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

Entonces, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular tanto a l_1 como a l_2. Así,

$$d = \left| \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \right| = \left| \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \right|$$

15. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralela a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. ¿Cuáles de los puntos $A(3, 1, -1)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, 4)$, $C(2, 0, 1)$ se hallan sobre esa recta?

De (50.19), la ecuación vectorial es

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \mathbf{k}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

o

$$(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k} = \mathbf{k}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \qquad (1)$$

Las ecuaciones rectangulares (o cartesianas) son

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \qquad (2)$$

Al usar (2) es fácil comprobar que A y B están en la recta, en tanto que C no lo está.

En la ecuación vectorial (1), un punto $P(x, y, z)$ en la recta se halla dando a k un valor y comparando las componentes. El punto A está en la recta porque

$$(3 - 1)\mathbf{i} + (1 - 2)\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

cuando $k = 1$. Igualmente, B se halla en la recta porque

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{1}{4}\mathbf{j}+\mathbf{k}=k(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k})$$

cuando $k = -\frac{1}{4}$. El punto C no está en la recta ya que

$$\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}=k(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-4\mathbf{k})$$

para ningún valor de k.

16. Escriba la ecuación del plano que pasa por

a) $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $3x - 2y + 4z - 5 = 0$
b) $P_0(1, 2, 3)$ y $P_1(3, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z - 5 = 0$
c) $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(3, -2, 1)$ y $P_2(5, 0, -4)$

Sea $P(x, y, z)$ un punto general en el plano requerido.

a) Aquí $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ es normal al plano dado y al plano requerido. La ecuación vectorial de este último es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a} = 0$ y la ecuación cartesiana es

$$3(x-1)-2(y-2)+4(z-3)=0$$

o

$$3x-2y+4z-11=0$$

b) Aquí $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son paralelas al plano requerido, de manera que $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}$ es normal a ese plano. Su ecuación vectorial es $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\cdot[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}] = 0$. La ecuación rectangular (o cartesiana) es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix} = [(x-1)\mathbf{i}+(y-2)\mathbf{j}+(z-3)\mathbf{k}]\cdot[-20\mathbf{i}-14\mathbf{j}+8\mathbf{k}]$$

$$= -20(x-1)-14(y-2)+8(z-3)=0$$

o $20x + 14y - 8z - 24 = 0$.

c) Aquí $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} = 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ son paralelas al plano requerido, de manera que $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\times(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ es normal a éste. La ecuación vectorial es $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\times[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\times(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)] = 0$ y la ecuación rectangular (o cartesiana) es

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -4 & -2\\ 4 & -2 & -7\end{vmatrix} = [(x-1)\mathbf{i}+(y-2)\mathbf{j}+(z-3)\mathbf{k}]\cdot[-24\mathbf{i}+6\mathbf{j}+12\mathbf{k}]$$

$$= 24(x-1)+6(y-2)+12(z-3)=0$$

o $4x + y + 2z - 12 = 0$

17. Halle la distancia d más corta entre el punto $P_0(1, 2, 3)$ y el plano Π dado por la ecuación $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

Una normal al plano es $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Toma $P_1(2, 3, 2)$ como un punto convincente en Π. Entonces, salvo por el signo, d es la proyección escalar de $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{a}$. Por tanto,

$$d=\left|\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right|=\left|\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k})}{\sqrt{38}}\right|=\frac{2}{19}\sqrt{38}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

18. Encuentre la longitud de *a*) el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; *b*) del vector $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; *c*) del vector **c**, que une $P_1(3, 4, 5)$ con $P_2(1, -2, 3)$.

Respuestas: *a*) $\sqrt{14}$; *b*) $\sqrt{115}$; *c*) $2\sqrt{11}$

19. Para los vectores del problema 18:

a) Demuestre que a y b son perpendiculares.
b) Halle el ángulo más pequeño entre a y c, y entre b y c.
c) Determine los ángulos que b forma con los ejes de coordenadas.

Respuestas: *b*) 165° 14′, 85° 10′; *c*) 73° 45′, 117° 47′, 32° 56′

20. Demuestre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.

21. Escriba un vector unitario en la dirección de a y un vector unitario en la dirección de b del problema 18.

Respuestas: *a*) $\frac{\sqrt{14}}{7}\mathbf{i} + \frac{3\sqrt{14}}{14}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{14}}{14}\mathbf{k}$; *b*) $\frac{3}{\sqrt{115}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{115}}\mathbf{j} + \frac{9}{\sqrt{115}}\mathbf{k}$

22. Halle los ángulos interiores β y γ del triángulo del problema 3.

Respuesta: $\beta = 22° \, 12'$; $\gamma = 9° \, 16'$

23. Para el cubo mostrado en la figura 50.14, determine *a)* el ángulo entre su diagonal y un lado, *b)* el ángulo entre su diagonal y una diagonal de una cara.

Respuestas: *a*) 54° 44′; *b*) 35° 16′

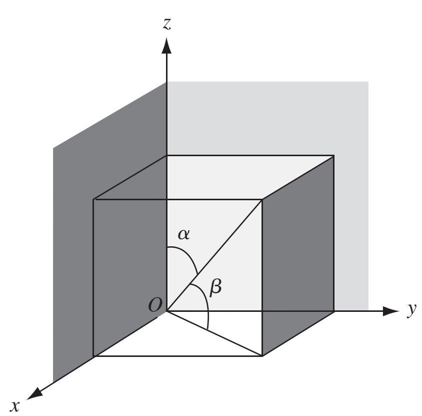


Fig. 50.14

24. Demuestre que la proyección escalar de **b** en a está dada por $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

25. Pruebe que el vector c de (50.4) es perpendicular tanto a **a** como a **b**.

26. Dados a = **i** + **j**, b = **i** – 2**k** y c = 2**i** + 3**j** + 4**k**, confirme las ecuaciones siguientes:

a) a × b = –2**i** + 2**j** – **c**

b) b × c = 6**i** – 8**j** + 3**k**

c) c × a = –4**i** + 4**j** + **k**

d) (a + b) × (a – b) = 4**i** – 4**j** + 2**k**

e) a × (a × b) = 0

f) a × (b × c) = –2

g) a × (b × c) = 3**i** – 3**j** – 14**k**

h) c × (a × b) = –11**i** – 6**j** + 10**k**

27. Determine el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(-2, 1, -1)$
(*Sugerencia:* |AB × AC| = dos veces el área.)

Respuesta: $5\sqrt{3}$

28. Determine el volumen del paralelepípedo cuyos lados son *OA*, *OB* y *OC* para $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(2, 1, 1)$.

Respuesta: 2

29. Sean **u** = **a** × **b**, **v** = **b** × **c**, **w** = **c** × **a**; demuestre que

a) **u** × **c** = **v** × **a** = **w** × **b**

b) **a** × **u** = **b** × **u** = 0, **b** × **v** = **c** × **v** = 0, **c** × **w** = **a** × **w** = 0

c) $\mathbf{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$

30. Demuestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times [(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})] = 2\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

31. Encuentre el menor ángulo de intersección de los planos $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ y $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.
[*Sugerencia*: halle el ángulo entre sus normales.]

Respuesta: 22° 25′

32. Escriba la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos $x + y - z - 5 = 0$ y $4x - y - z + 2 = 0$.

Respuesta: $(x - 1)\mathbf{i} + (y - 5)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k} = k(-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$, donde $P_0(1, 5, 1)$ es un punto en la recta.

33. Determine la distancia más corta entre la recta que pasa por $A(2, -1, -1)$ y $B(6, -8, 0)$ y la recta que pasa por $C(2, 1, 2)$ y $D(0, 2, -1)$.

Respuesta: $\sqrt{6}/6$

34. Defina una recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ como el lugar de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales $\mathbf{P_0P}$ y OP_0 son perpendiculares. Pruebe que su ecuación vectorial es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}_0 = 0$

35. Halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $P_0(2, -3, 5)$ y

a) Es perpendicular a $7x - 4y + 2z - 8 = 0$

b) Es paralela a la recta $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x + 3y + 6z = -12 = 0$

c) Que pasa por $P_1(3, 6, -2)$

Respuestas: *a*) $\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{2}$; *b*) $\frac{x-2}{12} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-5}$; *c*) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-5}{-7}$

36. Halle la ecuación del plano:

a) Que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

b) Que pasa por $P_0(2, -3, 2)$ y la recta $6x + 4y + 3z + 5 = 0$, $2x + y + z - 2 = 0$.

c) Que pasa por $P_0(2, -1, -1)$ y $P_1(1, 2, 3)$ y es perpendicular a $2x + 3y - 5z - 6 = 0$.

Respuestas: *a*) $4x + y + 9z - 33 = 0$; *b*) $16x + 7y + 8z - 27 = 0$; *c*) $9x - y + 3z - 16 = 0$

37. Si $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ son tres vectores de posición, muestre que $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0 = 0$. ¿Qué puede decir de los puntos terminales de estos vectores?

Respuesta: son colineales

38. Si P_0, P_1 y P_2 son tres puntos no colineales y $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son sus vectores de posición, ¿cuál es la posición de $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0$ respecto al plano $P_0P_1P_2$?

Respuesta: normal

39. Demuestre: *a*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

40. Pruebe: *a*) las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un punto; *b*) las perpendiculares trazadas desde los vectores hasta los lados opuestos (prolongados si es necesario) de un triángulo se cortan en un punto.

41. Sean $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 5)$ y $C(4, 1, 3)$ tres vértices del paralelogramo *ABCD*. Halle *a*) las coordenadas de *D*; *b*) el área *ABCD* y *c)* el área de la proyección ortogonal de *ABCD* en cada plano de coordenadas.

Respuestas: *a*) $D(3, 4, 1)$; *b*) $2\sqrt{26}$; *c*) 8, 6, 2

42. Demuestre que el área de un paralelogramo en el espacio es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de las proyecciones del paralelogramo sobre los planos de coordenadas.

51

Superficies y curvas en el espacio

Planos

Se sabe por la fórmula (50.22) que la ecuación de un plano tiene la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector no cero perpendicular al plano. El plano pasa por el origen (0, 0, 0) cuando y sólo cuando $D = 0$.

Esferas

De la fórmula de la distancia (50.3), se observa que una ecuación de una esfera con radio r y centro (a, b, c) es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Así, una esfera con centro en el origen (0, 0, 0) y radio r tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Superficies cilíndricas

Una ecuación $F(x, y) = 0$ define ordinariamente una curva $\mathscr{C}$ en el plano xy. Ahora, si un punto (x, y) satisface esta ecuación, entonces para cualquier z el punto (x, y, z) en el espacio también satisface la ecuación. Por tanto, $F(x, y) = 0$ determina la *superficie* cilíndrica obtenida al mover la curva $\mathscr{C}$ paralela al eje z. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina un círculo en el plano xy con radio 2 y centro en el origen. Si se mueve este círculo paralelo al eje z, se obtiene un cilindro circular recto. De esta manera, lo que ordinariamente se denomina un cilindro es un caso especial de una superficie cilíndrica.

De igual forma, una ecuación $F(y, z) = 0$ determina la superficie cilíndrica obtenida al mover la curva en el plano yz definida por $F(y, z) = 0$ paralela al eje x. Una ecuación $F(x, z) = 0$ determina la superficie cilíndrica al mover la curva en el plano xz definida por $F(x, z) = 0$ paralela al eje y.

Dicho con mayor precisión, las superficies cilíndricas definidas antes se denominan *superficies cilíndricas rectas*. Otras superficies cilíndricas pueden obtenerse al mover la curva dada paralela a la recta que no sea perpendicular al plano de la curva.

EJEMPLO 51.1. La ecuación $z = x^2$ determina una superficie cilíndrica generada al mover la parábola $z = x^2$ que queda en el plano xz paralelo al eje y.

Ahora se verán ejemplos de las superficies determinadas por las ecuaciones de segundo grado en x, y y z. Tales superficie se llaman superficies *cuadráticas*. Para imaginarlas es de gran ayuda la descripción de sus intersecciones con los planos paralelos a los planos de coordenadas. Tales intersecciones reciben el nombre de *trazas*.

Elipsoide

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Las trazas no triviales son elipses (fig. 51.1). En general, la ecuación de un elipsoide tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0 \text{ y } c > 0)$$

Cuando $a = b = c$ se obtiene una esfera.

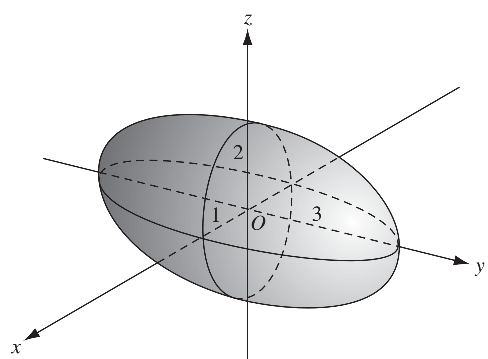


Fig. 51.1

Paraboloide elíptico

$$z = x^2 + y^2$$

La superficie queda por encima del plano xy. Las trazas paralelas al plano xy (para un z fijo positivo) son círculos. Las trazas paralelas al plano xz o yz son parábolas (fig. 51.2). En general, la ecuación de un paraboloide elíptico tiene la forma

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

y las trazas paralelas al plano xy son elipses. Cuando $a = b$, se obtienen un paraboloide circular, como en el ejemplo dado.

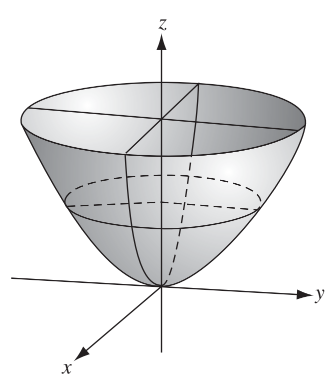


Fig. 51.2

Cono elíptico

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Véase la figura 51.3. Esto es una par de conos ordinarios, que se encuentran en el origen. Las trazas paralelas al plano *xy* son círculos. Las trazas paralelas al plano *xz* o *yz* son hipérbolas. En general, la ecuación de un cono elíptico tiene la forma

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0,\ b > 0 \text{ y } c > 0)$$

y las trazas paralelas al plano *xy* son elipses. Cuando $a = b$, se obtiene un cono circular recto, como en el ejemplo dado.

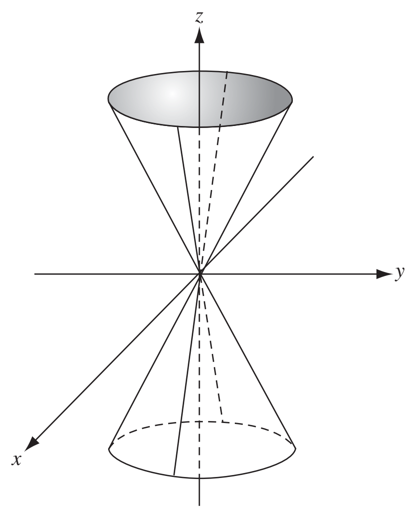


Fig. 51.3

Paraboloide hiperbólico

$$z = 2y^2 - x^2$$

Véase la figura 51.4. La superficie semeja una silla de montar. Las trazas paralelas al plano *xy* son hipérbolas. Las otras trazas son parábolas. En general, la ecuación de un paraboloide hiperbólico tiene la forma

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \quad (a > 0,\ b > 0 \text{ y } c \neq 0)$$

En el ejemplo dado, $c = 1$, $a = 1$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hiperboloide de una hoja

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$$

Véase la figura 51.5. Las trazas paralelas al plano *xy* son círculos y las otras trazas son hipérbolas. En general, un hiperboloide de una hoja tiene una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y las trazas paralelas al plano xy son elipses.

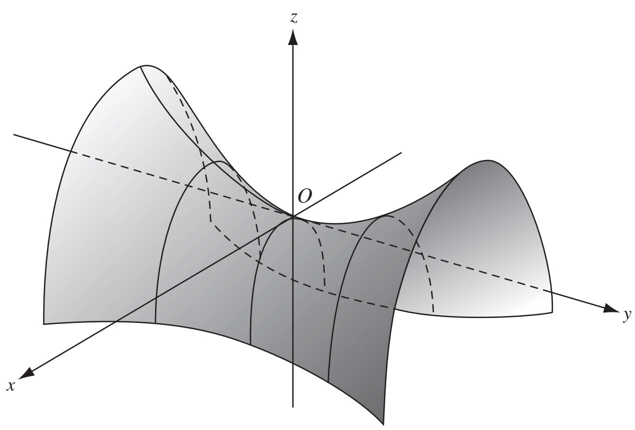


Fig. 51.4

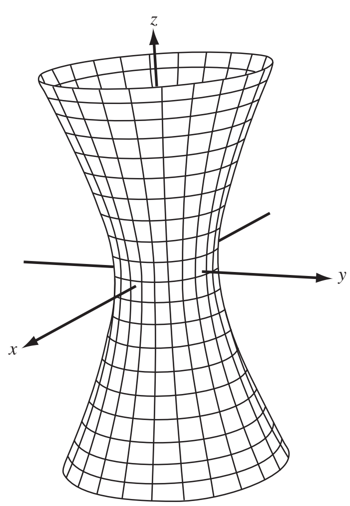


Fig. 51.5

Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{4}-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$$

Véase la figura 51.6. Las trazas paralelas al plano xy son círculos y las otras trazas son hipérbolas. En general, un hiperboloide de dos hojas tiene una ecuación de la forma

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\, b>0,\, c>0)$$

y las trazas paralelas al plano xy son elipses.

En general, se entiende que las ecuaciones dadas anteriormente para varias superficies cuadráticas, por permutación de las variables x, y, z producen las superficies cuadráticas del mismo tipo. Por ejemplo, $\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ también determina un hiperboloide de dos hojas.

Recta tangente y plano normal a una curva en el espacio

Una curva en el espacio puede definirse paramétricamente por las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{51.1}$$

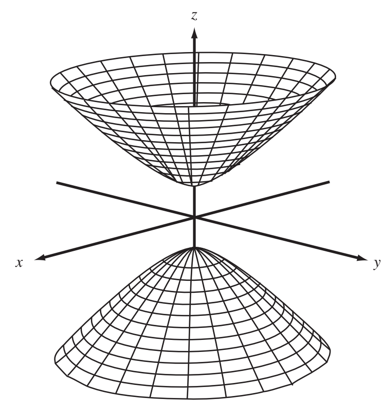


Fig. 51.6

En el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la curva (determinada por $t = t_0$), las ecuaciones de la tangente son

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt} \tag{51.2}$$

y las ecuaciones del plano normal (el plano que pasa por P_0 perpendicular a la recta tangente allí) es

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \tag{51.3}$$

Véase la figura 51.7. Tanto en (51.2) como en (51.3) se entiende que la derivada ha sido evaluada en el punto P_0 (véase los problemas 1 y 2).

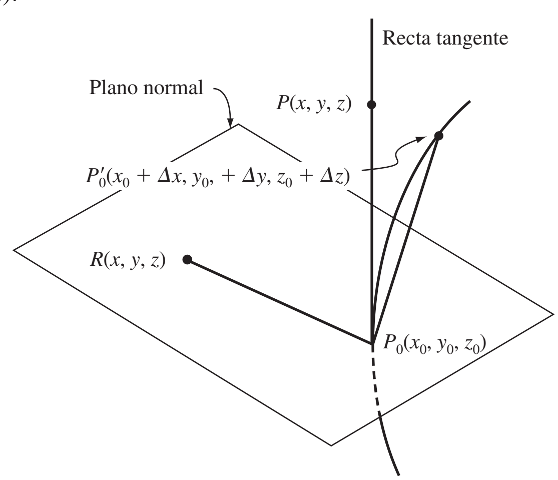


Fig. 51.7

Plano tangente y recta normal a una superficie

La ecuación del plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \tag{51.4}$$

y las ecuaciones de la recta normal en P_0 son

$$\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x}=\frac{y-y_0}{\partial F/\partial y}=\frac{z-z_0}{\partial F/\partial z} \tag{51.5}$$

en el entendido de que las derivadas parciales se han evaluado en el punto P_0 (fig. 51.8) (véase los problemas 3 a 9).

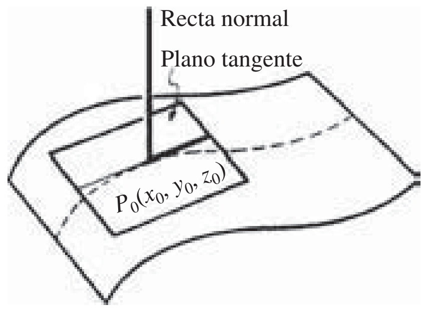


Fig. 51.8

Una curva en el espacio también puede definirse por un par de ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0 \quad G(x, y, z) = 0 \tag{51.6}$$

En el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la curva, las ecuaciones de la recta tangente son

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}} \tag{51.7}$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}(z-z_0)=0 \tag{51.8}$$

En (51.7) y (51.8) se entiende que todas las derivadas parciales se han evaluado en el punto P_0 (véase los problemas 10 y 11).

Superficie de revolución

Sea la gráfica de $y = f(x)$ en el plano xy que gira en torno al eje x. Cuando un punto (x_0, y_0) gira en la gráfica, un punto resultante (x_0, y, z) tiene la distancia y_0 al punto $(x_0, 0, 0)$. Entonces, al elevar al cuadrado dicha distancia se obtiene

$$(x_0 - x_0)^2 + y^2 + z^2 = (y_0)^2 = (f(x_0))^2 \quad \text{y, por consiguiente,} \quad y^2 + z^2 = (f(x_0))^2$$

Entonces, la ecuación de la superficie de revolución es

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2 \tag{51.9}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deduzca (51.2) y (51.3) para la recta tangente y el plano normal a la curva en el espacio $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por el valor $t = t_0$. Remítase a la figura 51.7.

Sea $P_0'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ determinado por $t = t_0 + \Delta t$, otro punto de la curva. Cuando $P_0' \to P_0$ a lo largo de la curva, la cuerda P_0P_0' tiende hacia la recta tangente a la curva en P_0 como posición límite.

Un conjunto simple de números direccionales para la cuerda P_0P_0' es $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$, pero se utilizará $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$. Entonces, cuando $P_0' \to P_0$, $\Delta t \to 0$ y $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right] \to \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$, un conjunto de números direccionales de la recta tangente en P_0. Ahora, si $P(x, y, z)$ es un punto arbitrario en esta tangente, entonces $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ es un conjunto de números direccionales de P_0P. Luego, como los conjuntos de números direccionales son proporcionales, las ecuaciones de la recta tangente en P_0 son

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

Si $R(x, y, z)$ es un punto arbitrario en el plano normal en P_0, entonces, como P_0R y P_0P son perpendiculares, la ecuación del plano normal en P_0 es

$$(x - x_0)\frac{dx}{dt} + (y - y_0)\frac{dy}{dt} + (z - z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

2. Encuentre las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a:

a) La curva $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^3$ en el punto $t = 1$.

b) La curva $x = t - 2$, $y = 3t^2 + 1$ y $z = 2t^3$ en el punto donde atraviesa el plano yz.

a) En el punto $t = 1$, o $(1, 1, 1)$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t = 2$ y $\frac{dz}{dt} = 3t^2 = 3$. Utilizando (51.2) se tiene, para las ecuaciones de la tangente, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$; utilizando (51.3) resulta la ecuación del plano normal $(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$.

b) La curva dada atraviesa el plano yz en el punto donde $x = t - 2 = 0$, es decir, en el punto $t = 2$ o $(0, 13, 16)$. En este punto, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 6t = 12$ y $\frac{dz}{dt} = 6t^2 = 24$. Las ecuaciones de la recta tangente son $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$ y la ecuación del plano normal es $x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = x + 12y + 24z - 540 = 0$.

3. Deduzca (51.4) y (51.5) para el plano tangente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Remítase a la figura 51.8.

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ las ecuaciones paramétricas de cualquier curva en la superficie $F(x, y, z) = 0$ y que pasa por el punto P_0. Entonces, en P_0,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

en el entendido de que todas las derivadas han sido evaluadas en P_0.

Esta relación expresa el hecho de que la recta que pasa por P_0 con números direccionales $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ es perpendicular a la recta que pasa por P_0 que tiene números direccionales $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. El primer conjunto de números direccionales pertenece a la tangente a la curva, la cual queda en el plano tangente de la superficie. El segundo conjunto define la recta normal a la superficie en P_0. Las ecuaciones de esta normal son

$$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$$

y la ecuación del plano tangente en P_0 es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$$

En los problemas 4 y 5, halle las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie dada en el punto indicado.

4. $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$; (2, 1, 3).

Sea $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$. En (2, 1, 3), $\frac{\partial F}{\partial x}=6x=12, \frac{\partial F}{\partial y}=4y=4$, y $\frac{\partial F}{\partial z}=-1$. La ecuación del plano tangente es $12(x-2) + 4(y-1) - (z-3) = 0$ o $12x + 4y - z = 25$.

La ecuación de la recta normal es $\frac{x-2}{12}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

5. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$; (1, –2, 1).

En (1, –2, 1), $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x^2 + 3y + 4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$ y $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$. La ecuación del plano tangente es $0(x-1) - 19(y+2) + 7(z-1) = 0$ o $19y - 7z + 45 = 0$.

Las ecuaciones de la recta normal son $x - 1 = 0$ y $\frac{y+2}{-19}=\frac{z-1}{7}$ o $x = 1$, $7y + 19z - 5 = 0$.

6. Demuestre que la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=1$.

En P_0, $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x_0}{a^2}, \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y_0}{b^2}$, y $\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2z_0}{c^2}$. La ecuación del plano tangente es

$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)-\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$.

Esto se convierte en $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1$, ya que P_0 está en la superficie.

7. Demuestre que las superficies $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ son tangentes en el punto (2, 1, 1).

Se mostrará que las dos superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado. En (2, 1, 1),

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x=4, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=8y=8, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=8z=-8$$

y

$$\frac{\partial G}{\partial x}=2x-6=-2, \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=2y-6=-4, \qquad \frac{\partial G}{\partial z}=2z+2=4$$

Como los conjuntos de números direccionales [4, 8, –8] y [–2, –4, 4] de las rectas normales de las dos superficies son proporcionales, las superficies tienen el plano tangente común

$$1(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0 \quad \text{o} \quad x+2y-2z=2$$

8. Demuestre que las superficies $F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$ y $G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ se intersecan en ángulo recto en el punto (1, 2, 1).

Ha de mostrarse que los planos tangentes a las superficies en el punto son perpendiculares o, lo que es igual, que las rectas normales en el punto son perpendiculares. En (1, 2, 1),

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y-4z=-2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x+z=2, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=y-4x=-2$$

Un conjunto de números direccionales para la recta normal a $F(x, y, z) = 0$ es $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$. En el mismo punto,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -5, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$$

Un conjunto de números direccionales para la recta normal a $G(x, y, z) = 0$ es $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$.

Como $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$, estas direcciones son perpendiculares.

9. Demuestre que las superficies $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ se cortan en el ángulo recto.

En cualquier punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre las dos superficies $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x_0, \frac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$, y $\frac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$; por tanto, $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ es un conjunto de números direccionales para la normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en P_0. De igual forma, $[x_0, 2y_0, -4z_0]$ es un conjunto de números direccionales para la recta normal a $G(x, y, z) = 0$ en P_0. Ahora, como

$$6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0,$$

estas direcciones son perpendiculares.

10. Deduzca (51.7) y (51.8) para la recta tangente y el plano normal a la curva en el espacio C: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

En P_0, las direcciones $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$ y $\left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right]$ son normales, respectivamente, a los planos tangentes de las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Como la dirección

$$\left[\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}\right]$$

es perpendicular a cada una de estas direcciones, es la de la recta tangente a C en P_0. Por tanto, las ecuaciones de la recta tangente son

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}}$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

11. Halle las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x + y + z = 6$ en el punto (1, 2, 3).

Sean $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ y $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$. En (1, 2, 3),

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Con $[1, -2, 1]$ como un conjunto de números direccionales de la tangente, sus ecuaciones son $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$. La ecuación del plano normal es $(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = x - 2y + z = 0$.

12. Determine las ecuaciones de las superficies de revolución generadas al girar la curva dada alrededor del eje indicado: *a)* $y = x^2$ en torno al eje x; *b)* $y = \frac{1}{x}$ en torno al eje y; *c)* $z = 4y$ en torno al eje y.

En cada caso, se utiliza una forma apropiada de (51.9): *a)* $y^2 + z^2 = x^4$; *b)* $x^2 + z^2 = \frac{1}{y^2}$; *c)* $x^2 + z^2 = 16y^2$.

13. Identifique el lugar geométrico de los puntos (x, y, z) que equidistan del punto $(0, -1, 0)$ y el plano $y = 1$.

Al elevar al cuadrado las distancias se obtiene $x^2 + (y + 1^2) + z^2 = (y - 1)^2$, donde $x^2 + z^2 = -4y$, un paraboloide circular.

14. Identifique la superficie $4x^2 - y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 3 = 0$ completando los cuadrados.

Se obtiene

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 2y) + (z^2 + 2z) + 3 = 0$$

$$4(x - 1)^2 - (y - 1)^2 + (z + 1)^2 + 3 = 4$$

$$4(x - 1)^2 - (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 1$$

Se trata de un hiperboloide de una hoja con centro en $(1, 1, -1,)$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

15. Determine las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva dada en el punto indicado:

a) $x = 2t, y = t^2, z = t^3; t = 1$ *Respuesta*: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$; $2x + 2y + 3z - 9 = 0$

b) $x = te^t, y = e^t, z = t; t = 0$ *Respuesta*: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$;; $x + y + z - 1 = 0$

c) $x = t \cos t, y = t \operatorname{sen} t, z = t; t = 0$ *Respuesta*: $x = z, y = 0$; $x + z = 0$

16. Demuestre que las curvas *a)* $x = 2 - t, y = -1/t, z = 2t^2$ y *b)* $x = 1 + \theta, y = \operatorname{sen} \theta - 1, z = 2 \cos \theta$ se intersecan en ángulo recto en $P(1, -1, 2)$. Obtenga las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal de cada curva en P.

Respuesta: *a)* $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$; $x - y - 4z + 6 = 0$; *b)* $x - y = 2, z = 2$; $x + y = 0$

17. Demuestre que las rectas tangentes a la hélice $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$ y $z = bt$ se encuentran en el plano xy en el mismo ángulo.

18. Demuestre que la longitud de la curva (51.1) desde el punto $t = t_0$ hasta el punto $t = t_1$ está dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Halle la longitud de la hélice del problema 17 de $t = 0$ a $t = t_1$.

Respuesta: $\sqrt{a^2 + b^2}\, t_1$

19. Encuentre las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva dada en el punto indicado:

a) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5, 3x - 2y - z = 0$; $(1, 1, 1)$
b) $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0, 3x + y + z - z^2 - 1 = 0$; $(2, -3, 2)$
c) $4z^2 = xy, x^2 + y^2 = 8z$; $(2, 2, 1)$

Respuestas: *a)* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{-8}$; $2x+7y-8z-1=0$; *b)* $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}$, $y+3=0$; $x+z-4=0$; *c)* $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}$, $z-1=0$; $x-y=0$

20. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada en el punto indicado:

a) $x^2+y^2+z^2=14$; $(1,-2,3)$ *Respuesta:* $x-2y+3z=14$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$

b) $x^2+y^2+z^2=r^2$; (x_1,y_1,z_1) *Respuesta*: $x_1x+y_1y+z_1z=r^2$; $\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y+y_1}{y_1}=\frac{z-z_1}{z_1}$

c) $x^2+2z^3=3y^2$; $(2,-2,-2)$ *Respuesta*: $x+3y-2z=0$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{-2}$

d) $2x^2+2xy+y^2+z+1=0$; $(1,-2,-3)$ *Respuesta*: $z-2y=1$; $x-1=0$, $\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

e) $z=xy$; $(3,-4,-12)$ *Respuesta*: $4x-3y+z=12$; $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+12}{1}$

21. *a)* Demuestre que la suma de las intersecciones del plano tangente a la superficie $x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=a^{1/2}$ en cualquiera de sus puntos es a.

b) Pruebe que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las intersecciones del plano tangente a la superficie $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ en cualquiera de sus puntos es a.

22. Demuestre que cada par de superficies es tangente en el punto indicado:

a) $x^2+y^2+z^2=18$, $xy=9$; $(3,3,0)$.
b) $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24=0$, $x^2+3y^2+2z^2=9$; $(2,1,1)$.

23. Pruebe que cada par de superficies es perpendicular en el punto indicado:

a) $x^2+2y^2-4z^2=8$, $4x^2-y^2+2z^2=14$; $(2,2,1)$.
b) $x^2+y^2+z^2=50$, $x^2+y^2-10z+25=0$; $(3,4,5)$.

24. Demuestre que cada una de las superficies *a)* $14x^2+11y^2+8z^2=66$, *b)* $3z^2-5x+y=0$, y *c)* $xy+yz-4zx=0$ es perpendicular a las otras dos en el punto $(1,2,1)$.

25. Identifique las superficies siguientes:

a) $36y^2-x^2+36z^2=9$.
b) $5y=-z^2+x^2$.
c) $x^2+4y^2-4z^2-6x-16y-16z+5=0$.

Respuesta: *a)* hiperboloide de una hoja (en torno al eje x); *b)* paraboloide hiperbólico; *c)* hiperboloide de una hoja, con centro en $(3,2,-2)$

26. Halle la ecuación de una curva que, cuando gira en torno a un eje adecuado, resulta en el paraboloide $y^2+z^2-2x=0$.

Respuesta: $y=\sqrt{2x}$ o $z=\sqrt{2x}$, en torno al eje x.

27. Determine la ecuación de la superficie obtenida al girar la curva indicada en torno al eje dado. Identifique el tipo de superficie: *a)* $x=y^2$ en torno al eje x; *b)* $x=2y$ en torno al eje x.

Respuesta: *a)* $x=y^2+z^2$ (paraboloide circular); *b)* $y^2+z^2=\frac{x^2}{4}$ (cono circular recto).

52

Derivadas direccionales. Valores máximos y mínimos

Derivadas direccionales

Sea $P(x, y, z)$ un punto en una superficie $z = f(x, y)$. Por P pasan los planos paralelos a los planos xz y yz, que cortan la superficie en los arcos PR y PS, y cortan el plano xy en las rectas $P{*}M$ y $P{*}N$, como se muestra en la figura 52.1. Observe que $P*$ es la base de P, que es perpendicular al plano xy. Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, evaluadas en $P{*}(x, y)$ dan, respectivamente, las razones de cambio de $z = P{*}P$ cuando y y cuando x se mantienen fijas. Dicho de otro modo, dan las variaciones de z en las direcciones paralelas a los ejes x y y. Estas razones de cambio son las pendientes de las tangentes de las curvas PR y PS en P.

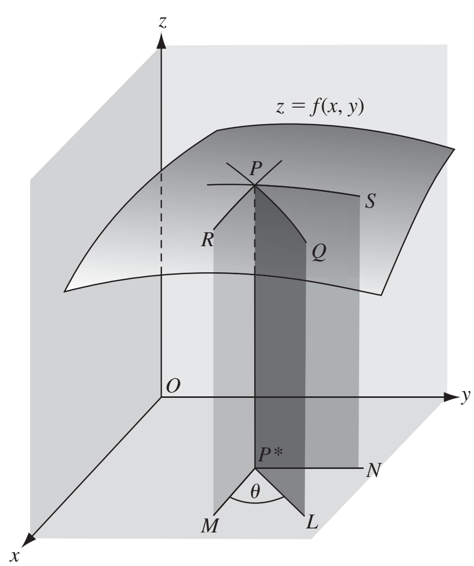


Figura 52.1

Considere ahora un plano que pasa por P, que es perpendicular al plano xy y que forma un ángulo θ con ele eje x. Se que corte la superficie en la curva PQ y el plano xy en la recta $P{*}L$. La *derivada direccional* de $f(x, y)$ en $P*$ en la dirección θ está dada por

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \tag{52.1}$$

La dirección θ es la dirección del vector $(\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$.

Con la derivada direccional se obtiene la razón de cambio de $z = P{*}P$ en la dirección de $P{*}L$; esto es igual a la pendiente de la tangente a la curva PQ en P (véase el problema 1).

La derivada direccional en un punto $P*$ es una función de θ. Más adelante se verá que existe una dirección, determinada por un vector denominado *gradiente* de f en $P*$ (véase el capítulo 53), para el cual la derivada direccional en $P*$ tiene un valor máximo. Ese valor máximo es la pendiente de la tangente más inclinada que pueda trazarse a la superficie en P.

Para una función $w = F(x, y, z)$, la derivada direccional en $P(x, y, z)$ en la dirección determinada por los ángulos α, β, γ está dada por

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$$

Por la dirección determinada por α, β y γ se entiende la dirección del vector $(\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$.

Valores máximos y mínimos relativos

Supóngase que $z = f(x, y)$ tiene un valor máximo (o mínimo) relativo en $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Todo plano que pasa por P_0 perpendicular al plano xy cortará la superficie en una curva que tenga un punto máximo (o mínimo) relativo en P_0. Así, la derivada direcciona $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$ de $z = f(x, y)$ debe ser igual a cero en P_0. En particular, cuando $\theta = 0$, sen $\theta = 0$ y cos $\theta = 1$, de manera que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, sen $\theta = 1$ y cos $\theta = 0$, de modo que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Por tanto, se llega al teorema siguiente.

Teorema 52.1. Si $z = f(x, y)$ tiene un extremo relativo en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en (x_0, y_0), entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en (x_0, y_0).

Vale la pena mencionar, sin la demostración correspondiente, las siguientes condiciones suficientes para la existencia de un máximo o mínimo relativos.

Teorema 52.2. Sea $z = f(x, y)$ que tiene primera y segunda derivada en un conjunto abierto incluido un punto (x_0, y_0) en el cual $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Se define $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$. Supóngase que $\Delta < 0$ en (x_0, y_0). Entonces:

$$z = f(x, y) \text{ tiene } \begin{cases} \text{un } \textbf{mín}\text{imo relativo en } (x_0, y_0) & \text{si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0 \\ \text{un } \textbf{máx}\text{imo relativo en } (x_0, y_0) & \text{si } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \end{cases}$$

Si $\Delta > 0$, no hay un máximo ni un mínimo relativo en (x_0, y_0).

Si $\Delta = 0$, no se tiene información.

Valores máximos y mínimos absolutos

Sea A un conjunto de puntos en el plano xy. Se dice que A está *acotado* si A está incluida en algún disco. Por *complemento* de A en el plano xy se entiende el conjunto de todos los puntos en el plano xy que no está en A. Se dice que A es *cerrado* si el complemento de A es un conjunto abierto.

EJEMPLO 52.1. Los siguientes son ejemplos de conjuntos cerrados y acotados.

a) Todo disco cerrado D, es decir, el conjunto de todos los puntos cuya distancia al punto fijo sea menor o igual que algún número r fijo positivo. (Nótese que el complemento de D es abierto porque cualquier punto que no esté en D puede ser rodeado por un disco abierto que no tenga puntos en D.)

b) El interior y el límite de todo rectángulo. Más generalmente, el interior y el límite de toda "curva simple cerrada", es decir, una curva que no se interseque a sí misma salvo en sus puntos inicial y terminal.

Teorema 52.3. Sea $f(x, y)$ una función continua en un conjunto cerrado y acotado A. Entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en A.

Una demostración del teorema 52.3 remite al lector a textos más avanzados. Para tres o más variables puede deducirse un resultado análogo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deduzca la fórmula (52.1)

En la figura 52.1, sea $P^{**}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un segundo punto en P^*L y denótese por Δs la distancia P^*P^{**}. Supóngase que $z = f(x, y)$ posee primeras derivadas parciales continuas y se obtiene, por el teorema 49.1,

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$. La razón promedio de cambio entre los puntos P^* y P^{**} es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta + \epsilon_1 \cos\theta + \epsilon_2 \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que la recta P^*P^{**} forma con el eje x. Ahora, sea $P^{**} \to P^*$ a lo largo de P^*L. La derivada direccional en P^*, es decir, la razón de cambio instantánea de z, es entonces

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

2. Encuentre la derivada direccional de $z = x^2 - 6y^2$ en P^* (7, 2) en la dirección *a*) $\theta = 45º$; *b*) $\theta = 135º$.

La derivada direccional en cualquier punto $P^*(x, y)$ en la dirección θ es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = 2x\cos\theta - 12y\operatorname{sen}\theta$$

a) En $P^*(7, 2)$ en la dirección $\theta = 45º$,

$$\frac{dz}{ds} = 2(7)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - 12(2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$$

b) En $P^*(7, 2)$ en la dirección $\theta = 135º$,

$$\frac{dz}{ds} = 2(7)(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - 12(2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$$

3. Encuentre la derivada direccional de $z = ye^x$ en $P^*(0, 3)$ en la dirección *a*) $\theta = 30º$; *b*) $\theta = 120º$.

Aquí, $dz/ds = ye^x \cos\theta + e^x \operatorname{sen}\theta$.

a) En (0, 3) en la dirección $\theta = 30º$ $dz/ds = 3(1)(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$.

b) En (0, 3) en la dirección $\theta = 120º$ $dz/ds = 3(1)(-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$.

4. La temperatura T de una placa circular en un punto (x, y) está dada por $T = \dfrac{64}{x^2 + y^2 + 2}$, donde el origen es el centro de la placa. En el punto (1, 2), determine la razón de cambio de T en la dirección $\theta = \pi/3$.

Se tiene que

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2+y^2+2)^2}\cos\theta - \frac{64(2y)}{(x^2+y^2+2)^2}\operatorname{sen}\theta$$

En (1, 2) en la dirección $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{dT}{ds} = -\frac{128}{49}\frac{1}{2} - \frac{256}{49}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{64}{49}(1+2\sqrt{3})$.

5. El potencial eléctrico V en un punto (x, y) está dado por $V = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Determine la razón de cambio de V en el punto (3, 4) según la dirección del punto (2, 6).

Aquí,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2+y^2}\cos\theta + \frac{y}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\theta$$

Como θ es un ángulo del segundo cuadrante y tan $\theta = (6-4)/(2-3) = -2$, cos $\theta = -1/\sqrt{5}$ y sen $\theta = 2/\sqrt{5}$.

Por tanto, (3, 4) en la dirección indicada $\frac{dV}{ds} = \frac{3}{25}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{25}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{25}$.

6. Encuentre la derivada direccional máxima para la superficie y el punto del problema 2.

En $P^*(7, 2)$ en la dirección θ, $dz/ds = 14\cos\theta - 24\operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\frac{dz}{ds}$ es un máximo, sea $\frac{d}{d}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta = 0.$. Entonces, tan $\theta = -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7}$ y θ es un ángulo del segundo o del cuarto cuadrante. Para el ángulo del segundo cuadrante sen $\theta = 12/\sqrt{193}$ y cos $= -7/\sqrt{193}$. Para el ángulo del cuarto cuadrante, sen $\theta = -12/\sqrt{193}$ y cos $\theta = 7/\sqrt{193}$.

Como $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta) = -14\cos\theta + 24\operatorname{sen}\theta$ es negativo para el ángulo del cuarto cuadrante, la derivada direccional máxima es $\frac{dz}{dz} = 14\left(\frac{7}{\sqrt{193}}\right) - 24\left(-\frac{12}{\sqrt{193}}\right) = 2\sqrt{193}$, y la dirección es $\theta = 300^\circ\ 15'$.

7. Encuentre la derivada direccional máxima para la función y el punto del problema 3.

En $P^*(0, 3)$ en la dirección θ, $dz/ds = 3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\frac{dz}{ds}$ es un máximo, sea $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$. Entonces, tan $\theta = \frac{1}{3}$ y θ es un ángulo del primer o del tercer cuadrante.

Como $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = -3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ es negativo para el ángulo del primer cuadrante, la derivada direccional máxima es $\frac{dz}{ds} = 3\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, y la dirección es $\theta = 18^\circ\ 26'$.

8. En el problema 5, demuestre que V cambia más rápidamente a lo largo del conjunto de rectas radiales que pasan por el origen.

En cualquier punto (x_1, y_1) en la dirección θ, $\frac{dV}{ds} = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\cos\theta + \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\operatorname{sen}\theta$. Ahora V cambia más rápidamente cuando $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dV}{ds}\right) = -\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}\operatorname{sen}\theta + \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\cos\theta = 0$ y, entonces, tan $\theta = \frac{y_1/(x_1^2+y_1^2)}{x_1/(x_1^2+y_1^2)} = \frac{y_1}{x_1}$. Así, θ es el ángulo de inclinación de la recta que une el origen y el punto (x_1, y_1).

9. Halle la derivada direccional de $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ en el punto (1, –2, 1) a lo largo de la curva $x = t$, $y = t - 3$, $z = t^2$ en la dirección de z creciente.

Un conjunto de números direccionales da la tangente a la curva en (1, –2, 1) es [1, 1, 2]; los cosenos directores son $\left[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}\right]$. La derivada direccional es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0\frac{1}{\sqrt{6}} + 5\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

10. Analice los valores máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ se satisfacen cuando $x = 2$ y $y = -3$. Como

$$f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^3 + 12$$

es evidente que $f(2, -3) = 12$ es el valor mínimo absoluto de la función. Geométricamente, $(2, -3, 12)$ es el punto mínimo de la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$. Claramente, $f(x, y)$ no tiene valor máximo absoluto.

11. Analice los valores máximos y mínimos de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Se utilizará el teorema 52.2. Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ se satisfacen cuando $x = 0$ y $y = 0$ y cuando $x = -1$ y $y = -1$.

En $(0, 0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$. Entonces,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 9 > 0$$

y $(0, 0)$ no resulta en un mínimo ni un máximo relativo.

En $(-1, -1)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$. Entonces,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -27 < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Por tanto, $f(-1, -1) = 1$ es el valor máximo relativo de la función.

Claramente, no hay valores máximos ni mínimos absolutos. (Cuando $y = 0$, $f(x, y) = x^3$ pueden hacerse arbitrariamente grande o pequeño.)

12. Divida 120 en tres partes no negativas tales que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

Sean x, y, y $120 - (x + y)$ las tres partes. La función por ser analizada es $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$. Como $0 \le x + y \le 120$, el dominio de la función consta del triángulo sólido mostrado en la figura 52.2. El teorema 52.3 garantiza un máximo absoluto.

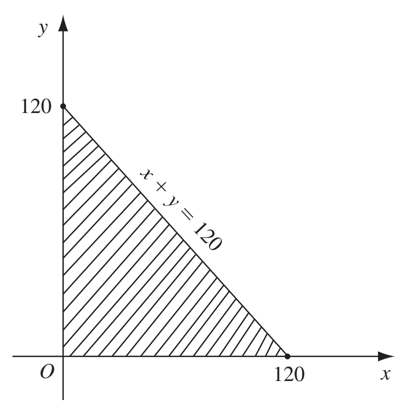


Figura 52.2

Ahora,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y$$

y

$$\frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y$$

Al igualar $\partial S/\partial x = \partial S/\partial y = 0$ resulta $2x + y = 120$ y $x + 2y = 120$.

La solución simultánea da $x = 40$, $y = 40$ y $120 -(x + 4) = 40$ como las tres partes, y $S = 3(40^2) = 4800$. Entonces, si el máximo absoluto ocurre en el interior del triángulo, el teorema 52.1 indica que se ha hallado. Aún es necesario revisar el límite del triángulo. Cuando $y = 0$, $S = x(120 - x)$. Entonces, $dS/dx = 120 - 2x$ y el número crítico es $x = 60$. El valor máximo correspondiente de S es $60(60) = 3600$, que es < 4800. Un resultado semejante se cumple cuando $x = 0$. Finalmente, en la hipotenusa, donde $y = 120 - x$, $S = x(120 - x)$ y se obtiene de nuevo un máximo de 3600. Por consiguiente, el máximo absoluto es 4800 y $x = y = z = 40$.

13. Determine el punto del plano $2x - y + 2z = 16$ más próximo al origen.

Sea (x, y, z) el punto requerido; entonces, el cuadrado de su distancia al origen es $D = x^2 + y^2 + z^2$. Como también $2x - y + 2z = 16$, se tiene que $y = 2x + 2z - 16$ y $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$.

Luego, las condiciones $\partial D/\partial y = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ y $\partial D/\partial z = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ equivalen a $5x + 4z = 32$ y $4x + 5z = 32$, y $x = z = \frac{32}{9}$. Como se sabe que existe un punto para el cual D es un mínimo, $(\frac{32}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{32}{9})$ es ese punto.

14. Demuestre que un paralelepípedo rectangular de volumen máximo V con área de superficie constante S es un cubo.

Sean x, y y z las dimensiones. Entonces, $V = xyz$ y $S = 2(xy + yz + zx)$.

Pueden despejarse z en la segunda relación y sustituirse en la primera, para expresar V como función de x y y. Es preferible evitar este paso simplemente tratando z como una función de x y y. Entonces,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

De las dos últimas ecuaciones, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}$. Al sustituir en las primeras se llega a las condiciones $\frac{\partial V}{\partial x} = yz - \frac{xy(y+z)}{x+y} = 0$ y $\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x+z)}{x+y} = 0$, las cuales se reducen a $y^2(z - x) = 0$ y $x^2(z - y) = 0$. Así, $x = y = z$, como se solicitó.

15. Determine el volumen V del paralelepípedo rectangular más grande que puede inscribirse en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Sea $P(x, y, z)$ un vértice en el primer octante. Entonces, $V = 8xyz$. Considere z como una función de las variables independientes x y y dada por la ecuación del elipsoide. Las condiciones necesarias para un máximo son:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

De la ecuación del elipsoide se obtiene $\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Se elimina $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ entre estas relaciones y (1) para obtener

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\right) = 0$$

y finalmente,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \tag{2}$$

Se combina (2) con la ecuación del elipsoide para obtener $x = a\sqrt{3}/3$, $y = b\sqrt{3}/3$ y $z = c\sqrt{3}/3$. Entonces, $V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$ unidades cúbicas.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

16. Encuentre las derivadas direccionales de la función dada en el punto indicado en la dirección señalada.

a) $z = x^2 + xy + y^2$, (3, 1), $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
b) $z = x^3 - 3xy + y^3$, (2, 1), $\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$.
c) $z = y + x \cos xy$, (0, 0), $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
d) $z = 2x^2 + 3xy - y^2$, (1, 1), hacia (2, 1).

Respuestas: *a*) $\frac{1}{2}(7+5\sqrt{3})$; *b*) $21\sqrt{13}/13$;; *c*) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$; *d*) $11\sqrt{5}/5$

17. Encuentre la derivada direccional máxima para cada una de las funciones del problema 16 en el punto indicado.

Respuestas: *a*) $\sqrt{74}$; *b*) $3\sqrt{10}$; *c*) $\sqrt{2}$; *d*) $\sqrt{26}$

18. Demuestre que la derivada direccional máxima de $V = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ del problema 8 es constante a lo largo de todo círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

19. Sobre una colina representada por $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$, encuentre *a*) la dirección de la máxima pendiente en (1, 1, 2) y *b*) la dirección de la línea de nivel (dirección para la cual z = constante). Nótese que las direcciones son mutuamente perpendiculares.

Respuestas: *a*) $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$, tercer cuadrante; *b*) $\tan^{-1}(-2)$

20. Demuestre que la suma de los cuadrados de las derivadas direccionales de $z = f(x, y)$ en cualquiera de sus puntos es constante para cualquier par de direcciones perpendiculares y es igual al cuadrado de la derivada direccional máxima.

21. Dadas $z = f(x, y)$ y $w = g(x, y)$ tales que $\partial z/\partial x = \partial w/\partial y$ y $\partial z/\partial y = -\partial w/\partial x$. Si θ_1 y θ_2 son dos direcciones mutuamente perpendiculares, pruebe que en cualquier punto $P(x, y)$, $\partial z/\partial s_1 = \partial w/\partial s_2$ y $\partial z/\partial s_2 = \partial w/\partial s_1$.

22. Determine la derivada direccional de la función dada en el punto indicada y en la dirección señalada:

a) xy^2z, (2, 1, 3), [1, –2, 2].
b) $x^2 + y^2 + z^2$, (1, 1, 1) hacia (2, 3, 4).
c) $x^2 + y^2 - 2xz$, (1, 3, 2), a lo largo de $x^2 + y^2 - 2xz = 6$, $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ en la dirección de z creciente.

Respuestas: *a*) $-\frac{17}{3}$; *b*) $6\sqrt{14}/7$; *c*) 0

23. Analice los valores máximos y mínimos relativos para cada una de las funciones siguientes:

a) $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ — *Respuesta:* máximo = 2 cuando $x = 1$, $y = 2$
b) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ — *Respuesta*: mínimo = –1 cuando $x = 1$, $y = 1$
c) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ — *Respuesta*: mínimo = 0 cuando $x = 0$, $y = 0$
d) $z = (x - y)(1 - xy)$ — *Respuesta*: ni máximo ni mínimo
e) $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$ — *Respuesta*: ni máximo ni mínimo
f) $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$ — *Respuesta*: mínimo $= -\sqrt{6}$ cuando $x = -\sqrt{6}/6$, $y = \sqrt{6}/3$; máximo $= \sqrt{6}$ cuando $x = \sqrt{6}/6$, $y = -\sqrt{6}/3$.
g) $z = xy(2x + 4y + 1)$ — *Respuesta*: máximo $= \frac{1}{216}$ cuando $x = -\frac{1}{6}$, $y = -\frac{1}{12}$

24. Halle números positivos x, y, z tales que

a) $x + y + z = 18$ y xyz es un máximo
b) $xyz = 27$ y $x + y + z$ es un mínimo
c) $x + y + z = 20$ y xyz^2 es un máximo
d) $x + y + z = 12$ y xy^2z^3 es un máximo

Respuestas: *a*) $x = y = z = 6$; *b*) $x = y = z = 3$; *c*) $x = y = 5$, $z = 10$; *d*) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

25. Encuentre el valor mínimo del cuadrado de la distancia del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

Respuesta: $D^2/(A^2 + B^2 + C^2)$

26. *a*) El área de la superficie de una caja rectangular sin tapa es de 108 pies^2. Halle su máximo volumen posible.

b) El volumen de una caja rectangular sin tapa es de 500 pies^3. Halle su área de superficie mínima.

Respuestas: *a*) 108 pies^3; *b*) 300 pies^2

27. Encuentre el punto en $z = xy - 1$ más próximo al origen.

Respuesta: $(0, 0, -1)$

28. Encuentre la ecuación del plano que pasa por (1, 1, 2) y que corta el mínimo volumen en el primer octante.

Respuesta: $2x + 2y + z = 6$

29. Determine los valores de p y q de manera que la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos (0, 2), (1, 3) y (2, 5) a la recta $y = px + q$ sea un mínimo. [*Sugerencia*: $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$.]

Respuesta: $p = \frac{3}{2}$; $q = \frac{11}{6}$

53

Derivación e integración de vectores

Derivación vectorial

Sean

$$\mathrm{r} = \mathrm{i}f_1(t) + \mathrm{j}f_2(t) + \mathrm{k}f_3(t) = \mathrm{i}f_1 + \mathrm{j}f_2 + \mathrm{k}f_3$$

$$\mathrm{s} = \mathrm{i}g_1(t) + \mathrm{j}g_2(t) + \mathrm{k}g_3(t) = \mathrm{i}g_1 + \mathrm{j}g_2 + \mathrm{k}g_3$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{i}h_1(t) + \mathrm{j}h_2(t) + \mathrm{k}h_3(t) = \mathrm{i}h_1 + \mathrm{j}h_2 + \mathrm{k}h_3$$

vectores cuyas componentes son funciones de una sola variable escalar t, con primeras y segundas derivadas continuas.

Es posible mostrar, como en el capítulo 39 para vectores en el plano, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot s + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{53.1}$$

Asimismo, a partir de las propiedades de los determinantes cuyas entradas son funciones de una sola variable, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{s} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned} \tag{53.2}$$

y

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u})] = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u}\right) + \mathbf{r} \cdot \left(\mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \tag{53.3}$$

Estas fórmulas se pueden verificar desarrollando los productos antes de derivar.

De (53.2) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u})] &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{s} \times \mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{u}) + \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt} \times \mathbf{u}\right) + \mathbf{r} \times \left(\mathbf{s} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{53.4}$$

Curvas en el espacio

Considere la curva en el espacio

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{53.5}$$

donde $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ tienen primeras y segundas derivadas continuas. Sea el siguiente el vector de posición de un punto general variable $P(x, y, z)$ de la curva:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Como en el capítulo 39, $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ es el vector unitario tangente a la curva. Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto (X, Y, Z) en la tangente en P, la ecuación vectorial de esta recta es (véase el capítulo 50)

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \quad \text{para una variable escalar } k \tag{53.6}$$

y las ecuaciones en las coordenadas rectangulares son

$$\frac{X - x}{dx/ds} = \frac{Y - y}{dy/ds} = \frac{Z - z}{dz/ds},$$

donde $\left[\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right]$ es un conjunto de cosenos directores de la recta. En la correspondiente ecuación (51.2) se utilizó un conjunto de números directores $\left[\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right]$.

La ecuación vectorial del plano normal a la curva en P está dada por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{53.7}$$

donde $\mathbf{R}$ es el vector posición de un punto general del plano.

De nuevo, como en el capítulo 39, $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{t}$. Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario con dirección $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$, entonces

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\mathbf{n},$$

donde $|K|$ es la magnitud de la curvatura en P. El vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} \tag{53.8}$$

se denomina *normal principal* a la curva en P.

El vector unitario $\mathbf{b}$ en P, definido por

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{53.9}$$

recibe el nombre de *binormal* en P. Los tres vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ forman en P una tríada a la derecha (dextrógira) de vectores ortogonales entre sí (véanse los problemas 1 y 2).

En un punto general P de una curva en el espacio (fig. 53.1), los vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$ determinan tres planos perpendiculares entre sí:

1. El *plano osculador*, que contiene a $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$, de ecuación $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathrm{b} = 0$
2. El *plano normal*, que contiene a $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$, de ecuación $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathrm{t} = 0$
3. El *plano rectificador*, que contiene a $\mathbf{t}$ y $\mathbf{b}$, de ecuación $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathrm{n} = 0$

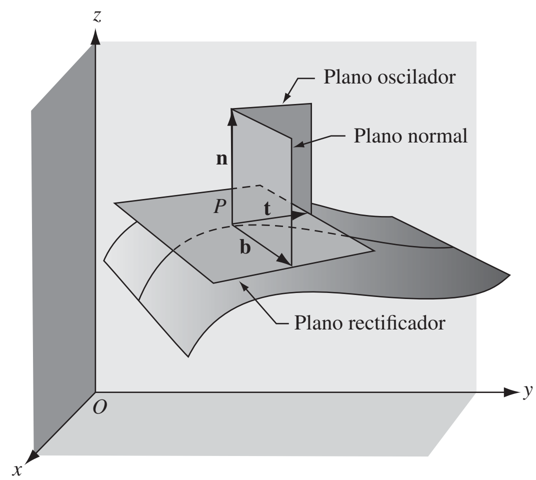


Fig. 53.1

En cada ecuación, **R** es el vector de posición de un punto general en el plano en particular.

Superficies

Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie (véase el capítulo 51). Una representación paramétrica resulta cuando x, y y z se escriben como funciones de dos variables independientes o parámetros u y v; por ejemplo,

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \tag{53.10}$$

Cuando u se sustituye por un valor constante u_0, (53.10) se convierte en

$$x = f_1(u_0, v), \quad y = f_2(u_0, v), \quad z = f_3(u_0, v) \tag{53.11}$$

la ecuación de una curva en el espacio (curva u) que está sobre la superficie. De igual modo, cuando v se remplaza por una constante v_0, (53.10) se convierte en

$$x = f_1(u, v_0), \quad y = f_2(u, v_0), \quad z = f_3(u, v_0) \tag{53.12}$$

la ecuación de otra curva en el espacio (curva u) sobre la superficie. Las dos curvas se intersecan en un punto de la superficie obtenido al sustituir $u = u_0$ y $v = v_0$, simultáneamente, en (53.10).

El vector de posición de un punto general P de la superficie está dado por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}f_1(u, v) + \mathbf{j}f_2(u, v) + \mathbf{k}f_3(u, v) \tag{52.13}$$

Supóngase que (53.11) y (53.12) son las curvas u y v que pasan por P. Entonces, en P,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial v} f_1(u_0, v) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial v} f_2(u_0, v) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial v} f_3(u_0, v)$$

es un vector tangente a la curva u, y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial u} f_1(u, v_0) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial u} f_2(u, v_0) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial u} f_3(u, v_0)$$

es un vector tangente a la curva v. Las dos tangentes determinan un plano que es el plano tangente a la superficie en P (fig. 53.2). Evidentemente, una normal a este plano está dada por $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. La *normal unitaria* a la superficie en P está definida por

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \tag{53.14}$$

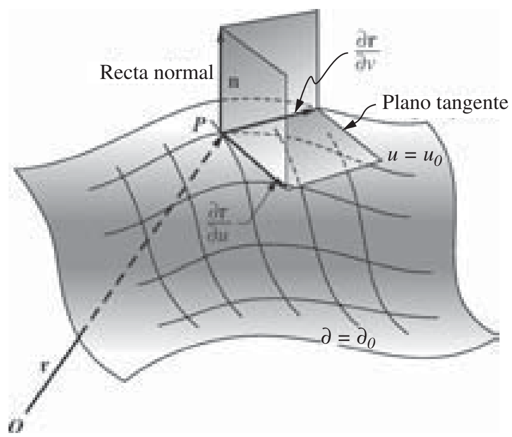


Fig. 53.2

Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto general sobre la normal a la superficie en P, su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \tag{53.15}$$

Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto general en el plano tangente a la superficie en P, su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 0 \tag{53.16}$$

(Véase el problema 3.)

El operador ∇

En el capítulo 52, la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en un punto arbitrario (x, y) y en una dirección que forma un ángulo θ con el eje x positivo se expresa como

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

Se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta) \tag{53.17}$$

Ahora $\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$ es un vector unitario cuya dirección forma un ángulo θ con el eje x positivo. El otro factor en el miembro derecho de (53.17), cuando se escribe como $\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \right) f$, indicada la definición de un operador diferencial vectorial ∇ (del), definido por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{53.18}$$

En el análisis vectorial, $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$ se denomina *gradiente de f* o *grad f*. De (53.17) deducimos que la componente de ∇f en la dirección de un *vector unitario* **a** es la derivada direccional de f en la dirección de **a**.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ el vector de posición de $P(x, y)$. Como

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

y

$$\left|\frac{df}{ds}\right| = |\nabla f| \cos \phi,$$

donde ϕ es el ángulo entre los vectores ∇f y $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, se desprende que $\frac{df}{ds}$ es máximo cuando $\cos \phi = 1$, es decir, cuando ∇f y $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ tienen la misma dirección. Así, el valor máximo de la derivada direccional en P es $|\nabla f|$ y su dirección es la de ∇f. (Compárese con el análisis sobre derivadas direccionales máximas en el capítulo 52.) (Véase el problema 4.)

Para $w = F(x, y, z)$, se define

$$\nabla F = \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}$$

Y la derivada direccional de $F(x, y, z)$ en un punto arbitrario $P(x, y, z)$ en la dirección $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{k}$ es

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{a} \tag{53.19}$$

Como en el caso de funciones de dos variables, $|\nabla F|$ es el valor máximo de la derivada direccional de $F(x, y, z)$ en $P(x, y, z)$, y su dirección es la de ∇F (véase el problema 5.)

Considérese ahora la superficie $F(x, y, z) = 0$. La ecuación del plano tangente a la superficie en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] \cdot \left[\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0 \tag{53.20}$$

en el entendido que las derivadas parciales se evalúan en P_0. El primer factor es un vector arbitrario que pasa por P_0 en el plano tangente; por tanto, el segundo factor ∇F, evaluado en P_0, es normal al plano tangente, es decir, es normal a la superficie en P_0 (véase los problemas 6 y 7)

Divergencia y rotacional

La *divergencia* de una función vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z)$, a veces denominada *del dot*, está definida por

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}f_1 + \frac{\partial}{\partial y}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}f_3 \tag{53.21}$$

La *rotacional* de una función vectorial **F**, o *del cross*, está definida por

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right)\mathbf{k} \qquad (53.22)$$

(Véase el problema 8.)

Integración

La explicación sobre integración se limitará a la integración ordinaria de vectores y a las llamadas *integrales de línea* (curvilíneas). Como ejemplo de la primera, sea

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \text{ sen } u + au\mathbf{k}$$

un vector que depende de la variable escalar u. Entonces,

$$\mathbf{F}'(u) = -\mathbf{i}\text{sen } u + \mathbf{j}\cos u + a\mathbf{k}$$

y

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}'(u)du &= \int (-\mathbf{i}\,\text{sen} u + \mathbf{j}\cos u + a\mathbf{k})\,du \\ &= \mathbf{i}\int -\text{sen } u\ du + \mathbf{j}\int \cos u\ du + \mathbf{k}\int a\ du \\ &= \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\,\text{sen} u + au\mathbf{k} + \text{c} \\ &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{c} \end{aligned}$$

donde **c** es un vector constante arbitrario de u. Además,

$$\int_{u=a}^{u=b} \mathbf{F}'(u)\ du = [\mathbf{F}(u) + c]_{u=a}^{u=b} = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

(Véanse los problemas 9 y 10.)

Integrales de línea (curvilíneas)

Considérese dos puntos P_0 y P_1 en el espacio, unidos por un arco C. El arco puede ser un segmento de una línea recta o una parte de una curva en el espacio $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$, o puede constar de varios subarcos de curvas. En cualquier caso, supóngase que C es continua en cada uno de sus puntos y que no se interseca a sí misma. Considere, además, la función vectorial

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}f_1(x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3(x, y, z),$$

que en todo punto de una región en torno a C, en particular en todo punto C, define un vector de magnitud y dirección conocidas. Se representa por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (53.23)$$

el vector de posición de $P(x, y, z)$ en C. La integral

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{53.24}$$

se denomina *integral de línea* (curvilínea), es decir, una integral a lo largo de un camino C dado.

Como ejemplo, sea $\mathbf{F}$ una fuerza. El trabajo realizado por ella al mover una partícula sobre $d\mathbf{r}$ está dado por (véase el problema 16, del capítulo 39)

$$|\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos \theta = \mathbf{F} \times d\mathbf{r}$$

y el trabajo realizado al mover la partícula de P_0 a P_1 a lo largo del arco C está dado por

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

De (53.23)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$$

y (53.24) se convierte en

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C\ P_0}^{P_1} (f_1\ dx + f_2\ dy + f_3\ dz) \tag{53.25}$$

(Véase el problema 11.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $z = 6t$. Determine la magnitud de su velocidad y su aceleración en los instantes $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto en la curva y

$$\mathrm{r} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k} = 4\mathrm{i} \cos t + 4\mathrm{j} \operatorname{sen} t + 6\mathrm{k}t$$

su vector de posición. Entonces,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -4\mathbf{i} \sin t + 4\mathbf{j} \cos t + 6\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -4\mathbf{i} \cos t - 4\mathbf{j} \operatorname{sen} t$$

En $t = 0$: $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ $\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$

$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}$ $\quad |\mathbf{a}| = 4$

En $t = \frac{1}{2}\pi$: $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ $\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$

$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}$ $\quad |\mathbf{a}| = 4$

2. En el punto (1, 1, 1) o $t = 1$ de la curva en el espacio $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, determine:

a) Las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal.

b) La tangente unitaria, la normal principal y la binormal.

c) Las ecuaciones de la normal principal y la binormal.

Se tiene que

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

En $t = 1$, $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $t = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\right)$.

a) Si **R** es el vector de posición de un punto general (X, Y, Z) en la recta tangente, su ecuación vectorial es $\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$ o

$$\left(X-1\right)\mathbf{i}+\left(Y-1\right)\mathbf{j}+\left(Z-1\right)\mathrm{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}\left(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\right)$$

y sus ecuaciones rectangulares (cartesianas) son

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{3}$$

Si **R** es el vector de posición de un punto general (X, Y, Z) en el plano normal, se ecuación vectorial es $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{t} = 0$ o

$$\left[\left(X-1\right)\mathbf{i}+\left(Y-1\right)\mathbf{j}+\left(Z-1\right)\mathbf{k}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}\left(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\right)=0$$

y su ecuación rectangular (cartesiana) es

$$(X-1) + 2(Y-1) + 3(Z-1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

(Véase el problema 2*a*) del capítulo 51.)

b) $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{(-4t-18t^3)\mathbf{i}+(2-18t^4)\mathbf{j}+(6t+12t^3)\mathbf{k}}{(1+4t^2+9t^4)^2}$

En $t = 1$, $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{98}$ y $\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}} = |K|$.

Entonces, $\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$

y $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -11 & -8 & 9\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$

c) Si **R** es el vector de posición de un punto general (X, Y, Z) en la normal principal, su ecuación vectorial es $\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$, o

$$(X-1)\mathbf{i} + 2(Y-1)\mathbf{j} + 3(Z-1)\mathbf{k} = k\frac{-11\mathbf{i}-8\mathbf{j}+9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

y las ecuaciones en coordenadas rectangulares son

$$\frac{X-1}{-11}=\frac{Y-1}{-8}=\frac{Z-1}{9}$$

Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto general (X, Y, Z) en la binormal, su ecuación vectorial es $\mathbf{R}-\mathbf{r}=k\mathbf{b}$ o

$$(X-1)\mathbf{i}+(Y-1)\mathbf{j}+(Z-1)\mathbf{k}=k\frac{3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{19}}$$

y las ecuaciones en coordenadas rectangulares son

$$\frac{X-1}{3}=\frac{Y-1}{-3}=\frac{Z-1}{1}$$

3. Halla las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $x=2(u+v)$, $y=3(u-v)$, $z=uv$ en el punto $P(u=2, v=1)$.

Aquí

$$\mathbf{r}=2(u+v)\mathbf{i}+3(u-v)\mathbf{j}+uvk,\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+u\mathbf{k}\,,\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+u\mathbf{k}$$

y en el punto P,

$$\mathbf{r}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}\,,\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=9\mathbf{i}-2\mathbf{j}-12\mathbf{k}$$

Las ecuaciones vectorial y rectangular (cartesiana) de la recta normal son

$$\mathbf{R}-\mathbf{r}=k\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

o

$$(X-6)\mathbf{i}+(Y-3)\mathbf{j}+(Z-2)\mathbf{k}=k(9\mathbf{i}-2\mathbf{j}-12\mathbf{k})$$

y

$$\frac{X-6}{9}+\frac{Y-3}{-2}=\frac{Z-2}{-12}$$

Las ecuaciones vectorial y rectangular (cartesiana) del plano tangente son

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)=0$$

o

$$[(X-6)\mathbf{i}+(Y-3)\mathbf{j}+(Z-2)\mathbf{k}]\cdot[9\mathbf{i}-2\mathbf{j}-12\mathbf{k}]=0$$

y

$$9X-2Y-12Z-24=0$$

4. *a*) Encuentre la derivada direccional de $f(x, y)=x^2-6y^2$ en el punto (7, 2) en la dirección $\theta=\frac{1}{4}\pi$.

b) Halle el valor máximo de la derivada direccional en (7, 2).

a) $\nabla f=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2-6y^2)=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-6y^2)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2-6y^2)=2x\mathbf{i}-12y\mathbf{j}$

y

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

En (7, 2), $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ y

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} = (14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \right) = 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$$

es la derivada direccional.

b) En (7, 2), con $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}, \left|\nabla f\right| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$ es la máxima derivada direccional. Puesto que

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{7}{\sqrt{193}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{193}}\mathbf{j} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

la dirección es $\theta = 300°\ 15'$ (véase los problemas 2 y 6 del capítulo 52).

5. *a*) Encuentre la derivada direccional de $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ en $P(1, 1, -1)$ en la dirección $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

b) Determine el valor máximo de la derivada direccional en P.

Aquí

$$\nabla F = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \right)(x^2 - 2y^2 + 4z^2) = 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$$

y en (1, 1, –1), $\nabla F = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

a) $\nabla F \times \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 8$

b) En P, $\left|\nabla F\right| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. La dirección es $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

6. Dada la superficie $F(x, y, z) = x^3 + 3xyz + 2y^3 - z^3 - 5 = 0$ y uno de sus puntos $P_0(1, 1, 1)$, determine *a*) una normal unitaria a la superficie en P_0; *b*) las ecuaciones de la recta normal en P_0, y *c*) la ecuación del plano tangente en P_0.

Aquí

$$\nabla F = (3x^2 + 3yz)\mathbf{i} + (3xz + 6y^2)\mathbf{j} + (3xy - 3z^2)\mathbf{k}$$

y en $P_0(1, 1, 1)$, $\nabla F = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$.

a) $\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ es una normal unitaria en P_0; la otra es $-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

b) Las ecuaciones de la recta normal son $\dfrac{X-1}{2} = \dfrac{Y-1}{3},\ Z = 1,$

c) La ecuación del plano tangente es $2(X - 1) + 3(Y - 1) = 2X + 3Y - 5 = 0$

7. Encuentre el ángulo de intersección de las superficies

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 8 = 0$$

en el punto (2, 1, –2).

Se tiene que

$$\nabla F_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

y

$$\nabla F_2 = \nabla(x^2 + 2y^2 - z - 8) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En $(2, 1, -2)$, $\nabla F_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\nabla F_2 = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Ahora $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1||\nabla F_2| \cos\theta$, donde θ es el ángulo solicitado. Así,

$$(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}||4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos\theta$$

de donde $\cos\theta = \frac{14}{99}\sqrt{33} = 0.81236$, y $\theta = 35° 40$.

8. Cuando $B = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$, encuentre *a*) div $\mathbf{B}$ y *b*) rot $\mathbf{B}$.

a)
$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2yz\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-3yz^2\right)$$
$$= y^2 + 2x^2z - 6yz$$

b)
$$\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2)\right]\mathbf{j}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz + 2xy)\mathbf{k}$$

9. Dado $\mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}$, encuentre *a*) $\int \mathbf{F}(u)\, du$ y *b*) $\int_0^1 \mathbf{F}(u)\, du$.

a)
$$\int \mathbf{F}(u)\, du = \int [u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3\mathbf{u}^2 + u^3)\mathbf{k}]\, du$$
$$= \mathbf{i}\int u\, du + \mathbf{j}\int (u^2 - 2u)\, du + \mathbf{k}\int (3u^2 + u^3)\, du$$
$$= \frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ con c_1, c_2, c_3 escalares arbitrarios.

b)
$$\int_0^1 \mathbf{F}(u)\, du = \left[\frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{4}\mathbf{k}$$

10. La aceleración de una partícula en cualquier instante $t \geq 0$ está dada por $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si en $t = 0$ el desplazamiento es $r = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, halla $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ en un instante t cualquiera.

Aquí

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\, dt = \mathbf{i}\int e^t dt + \mathbf{j}\int e^{2t} dt + \mathbf{k}\int dt$$
$$= e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \text{c}_1$$

En $t = 0$, se tiene que $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ de donde $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{j}$, entonces,

$$\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(e^{2t} + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

y
$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\, dt = e^t\mathbf{i} + \left(\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

En $t = 0$, $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 = 0$, de donde $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$. Así,

$$\mathbf{r} = (e^t - 1)\mathbf{i} + \left(\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\right)\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

11. Determine el trabajo realizado por una fuerza F = $(x + yz)$i + $(y + xz)$j + $(z + xy)$k al mover una partícula del origen O a C (1, 1, 1), *a*) a lo largo de una recta OC; *b*) a lo largo de una curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; *c*) a lo largo de líneas rectas de O a $A(1, 0, 0)$, A a $B(1, 1, 0)$, y B a C.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= [(x + yx)\mathbf{i} + (y + xy)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}]\cdot[\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz]\\ &= (x + yz)dx + (y + xz)dy + (z + xy)dz\end{aligned}$$

a) A lo largo de la recta OC, $x = y = z$ y $dx = dy = dz$. La integral por ser evaluada se convierte en

$$W = \int_{C\,(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 3\int_0^1 (x + x^2)dx = \left[\left(\tfrac{3}{2}x^2 + x^3\right)\right]_0^1 = \tfrac{5}{2}$$

b) A lo largo de la curva dada, $x = t$ y $dx = dt$; $y = t^2$ y $dy = 2t\,dt$; $z = t^3$ y $dz = 3t^2\,dt$. En O, $t = 0$; en C, $t = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 (t + t^5)\,dt + (t^2 + t^4)2t\,dt + (t^3 + t^3)3t^2\,dt\\ &= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5)\,dt = \left[\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{3}{2}t^6\right]_0^1 = \tfrac{5}{2}\end{aligned}$$

c) De O a A: $y = z = 0$ y $dy = dz = 0$, y x varía de 0 a 1.

De A a B: $x = 1$, $z = 0$, $dx = dz = 0$, y y varía de 0 a 1.

De B a C: $x = y = 1$ y $dx = dy = 0$, y z varía de 0 a 1.

Ahora, para la distancia de O a A, $W_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$; ; para la distancia de A a B, $W_2 = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$, y para la distancia de B a C, $W_3 = \int_0^1 (z + 1)\,dz = \frac{3}{2}$. Así, $W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{5}{2}$.

En general, el valor de una integral de línea (curvilínea) depende del camino de integración. Aquí se encuentra un ejemplo de una que es independiente del camino. Es posible demostrar que la integral de línea $\int_c (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ es independiente del camino si existe una función $\phi(x, y, z)$ tal que $d\phi = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$. En este problema el integrando es

$$\left(x + yz\right)dx + \left(y + xz\right)dy + \left(z + xy\right)dz = d\left[\tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xyz\right]$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Encuentre $\dfrac{d\mathbf{s}}{dt}$ y $\dfrac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$, dado *a*) s = $(t + 1)$i + $(t^2 + t + 1)$j + $(t^3 + t^2 + 1)$k, y *b*) s = ie^t cos $2t$ + je^t sen $2t$ + t^2k.

Respuestas: *a*) $\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + (3t^2 + 2t + 1)\mathbf{k}$, $2\mathbf{j} + (6t + 2)\mathbf{k}$
b) $e^t(\cos 2t - 2\,\mathrm{sen}\,2t)\mathbf{i} + e^t(\mathrm{sen}\,2t + 2\cos 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$,
$e^t(-4\,\mathrm{sen}\,2t - 3\cos 2t)\mathbf{i} + e^t(-3\,\mathrm{sen}\,2t + 4\cos 2t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. Dados $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\,\text{sen}\,u$, y $c = 3u^2\mathbf{i} - 4u\mathbf{k}$, calcule primero $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, y $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, y luego encuentre la derivada de cada uno. En seguida halle las derivadas utilizando las fórmulas.

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 3t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = t^3$, donde t es el tiempo. Determine *a*) las magnitudes de su velocidad y su aceleración en el instantes $t = 1$; *b*) las componentes de la velocidad y la aceleración en el instante $t = 1$ en la dirección $a = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Respuestas: *a*) $|v| = 3\sqrt{5}$, $|a| = 2\sqrt{19}$; *b*) 6, $\frac{22}{3}$

15. Por medio de métodos vectoriales, encuentre las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a las curvas del problema 15 del capítulo 51.

16. Resuelva el problema 16 del capítulo 51 empleando métodos vectoriales.

17. Demuestre que las superficies $x = u$, $y = 5u - 3v^2$, $z = v$ y $x = u$, $y = v$, $z = \frac{uv}{4u-v}$ son perpendiculares en $P(1, 2, 1)$.

18. Use métodos vectoriales y encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie:

a) $x = u$, $y = v$, $z = uv$ en el punto $(u, v) = (3, -4)$.
b) $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ en el punto $(u, v) = (2, 1)$.

Respuestas: *a*) $4X - 3Y + Z - 12 = 0$, $\frac{X-3}{-4} = \frac{Y+4}{3} = \frac{Z+12}{-1}$;
b) $4X - 2Y - Z - 3 = 0$, $\frac{X-2}{-4} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-3}{1}$.

19. *a*) Encuentre las ecuaciones de los planos osculador y rectificante a la curva del problema 2 en el punto dado.

b) Halle las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante de $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $z = 2t + t^2$ en $t = 1$.

Respuestas: *a*) $3X - 3Y + Z - 1 = 0$, $11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$;
b) $X + 2Y - z = 0$, $Y + 2Z - 7 = 0$, $5X - 2Y + Z - 6 = 0$

20. Demuestre que la ecuación del plano osculador a una curva en el espacio en P está dada por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$$

21. Resuelva los problemas 16 y 17 del capítulo 52 utilizando métodos vectoriales.

22. Halle $\int_a^b \mathbf{F}(u)\,du$, dado

a) $\mathbf{F}(u) = u^3\mathbf{i} + (3u^2 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 2$; *b*) $\mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-2u}\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 1$

Respuestas: *a*) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; *b*) $(e-1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

23. La aceleración de una partícula en el instante t está dada por $a = dv/dt = (t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 - 2)\mathbf{k}$. Si en $t = 0$, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Halle $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ en el instante t.

Respuesta: $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 - 2t - 1\right)\mathbf{k}$; $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^4\mathbf{j} + \left(\frac{1}{12}t^4 - t^2 - t\right)\mathbf{k}$

24. En cada uno de los casos siguientes, determine el trabajo realizado por una fuerza **F** al mover una partícula de $O(0, 0, 0)$ a $C(1, 1, 1)$ a lo largo de (1) una línea recta $x = y = z$, (2) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, y (3) las rectas que van de O a $A(1, 0, 0)$, de A a $B(1, 1, 0)$ y de B a C.

a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3x\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$.

c) $\mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$.

Respuestas: *a*) 3; *b*) 3; *c*) $\frac{9}{4}, \frac{33}{14}, \frac{5}{2}$

25. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, demuestre que *a*) div r = 3 y *b*) rot r = 0.

26. Si $f = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de orden de por lo menos dos, demuestre que *a*) $\nabla \times \nabla f = 0$; *b*) $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$, y *c*) $\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$.

54

Integrales dobles e iteradas

La integral doble

Considere una función $z = f(x, y)$ que es continua en una región finita R del plano xy. Ahora defina una partición $\mathcal{P}$ de R dibujando una rejilla de rectas horizontales y verticales, que divide la región en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$, respectivamente (fig. 54.1). En cada subregión, R_k, seleccione un punto $P_k(x_k, y_k)$ y cree la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A = f(x_1, y_1)\Delta_1 A + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta_n A \tag{54.1}$$

Defina el diámetro de una subregión como la máxima distancia entre dos puntos cualesquiera dentro o en su frontera, y denote con $d_{\mathcal{P}}$ el máximo diámetro de las subregiones. Supóngase que se seleccionan las particiones de manera que $d_{\mathcal{P}} \to 0$ y $n \to +\infty$. (En otras palabras, se seleccionan cada vez más subregiones y se hacen sus diámetros más y más pequeños.) Entonces, la *integral doble* de $f(x, y)$ sobre R se define como

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A \tag{54.2}$$

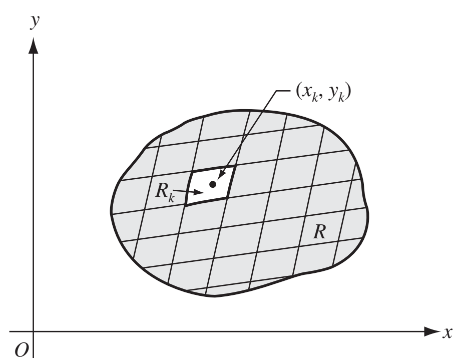


Fig. 54.1

Ésta no es una afirmación sobre límites genuina. Lo que la fórmula (54.2) dice en realidad dice es que $\iint_R f(x,y)\,dA$ es un número tal que, para todo $\in > 0$, existe un entero positivo n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ y toda partición con $d_{\mathcal{P}} < 1/n_0$, y toda suma de aproximación correspondiente $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A$, se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A - \iint_R f(x,y)\,dA\right| < \in$$

Cuando $z = f(x, y)$ es un no negativo en la región R, como se muestra en la figura 54.2, la integral doble (54.2) puede interpretarse como un volumen. Todo término $f(x_k, y_k)\Delta_k A$ de (54.1) da el volumen de una columna vertical cuya base es de área $\Delta_k A$ y cuya altura es la distancia $z_k = f(x_k, y_k)$. Esto, a su vez, puede considerarse una aproximación del volumen de la columna vertical cuya base inferior es la subregión R_k y cuya base superior es la proyección de R_k sobre la superficie. Así, (54.1) es una aproximación del volumen "bajo la superficie" (es decir, el volumen con la base inferior R y base superior en la superficie generada al mover una recta paralela al eje z a lo largo de la frontera de R). Resulta intuitivamente claro que (54.2) es la medida de este volumen.

La evaluación por suma directa de las integrales dobles más simples generalmente plantea muchas dificultades.

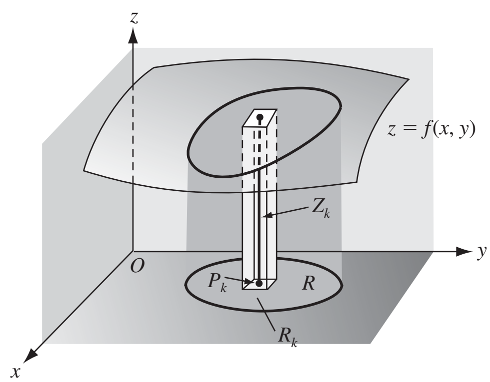


Fig. 54.2

La integral iterada

Considere un volumen definido como antes y supóngase que la frontera de R es tal que ninguna recta paralela al eje x o al eje y la corta en más de dos puntos. Trace las rectas tangentes a la frontera $x = a$ y $x = b$ con puntos de tangencia K y L, y las rectas tangentes $y = c$ y $y = d$ con puntos de tangencia M y N (fig. 54.3). Sea $y = g_1(x)$ la ecuación del arco plano LMK y sea $y = g_2(x)$ la ecuación del arco plano LNK.

Se divide el intervalo $a \le x \le b$ en m subintervalos $h_1, h_2, \ldots, h_m$ de longitudes respectivas $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$ insertando los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ de manera que $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{m-1} < \xi_m = b$. De forma similar, se dividen el intervalo $c \le y \le d$ en n subintervalos $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de longitudes respectivas $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$ insertando los puntos $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ de manera que $c = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{n-1} < \eta_n = d$. Sea λ_m el mayor de los $\Delta_i x$ y sea μ_n el mayor de los $\Delta_j y$. Trace las rectas paralelas $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ y las rectas paralelas $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots$ $y = \eta_{n-1}$, así pues, dividiendo la región R en un conjunto de rectángulos R_{ij} de áreas $\Delta_i x\, \Delta_j y$, más un conjunto de fragmentos no rectangulares a lo largo de la frontera (cuyas áreas serán lo suficientemente pequeñas como para ser ignoradas). En cada subintervalo h_i, se selecciona un punto $x = x_1$ y, en cada subintervalo k_j se selecciona un punto $y = y_j$, lo que determina en cada subregión R_{ij} un punto $P_{ij}(x_i, y_j)$. Con cada subregión R_{ij} se asocia por medio de la ecuación de la superficie, un número $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ y se forma la suma

$$\sum_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} f(x_i, y_j)\,\Delta_i x\,\Delta_j y \tag{54.3}$$

Ahora, (54.3) es simplemente un caso especial de (54.1). Entonces, si el número de rectángulos crece indefinidamente de tal forma que tanto $\lambda_m \to 0$ como $\mu_n \to 0$, el límite de (54.3) debería ser igual a la integral doble (54.2).

Al efectuar este límite, primero se selecciona uno de los subintervalos, digamos h_i, y se forma la suma

$$\left[\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right]\Delta_i x \qquad (i \text{ fijo})$$

de las contribuciones de todos los rectángulos que tienen h_i como una dimensión, es decir, las contribuciones de todos los rectángulos que quedan en la $i$ésima columna. Cuando $n \to +\infty$, $\mu_n \to 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{j=1}^{n} f(x_i,\, y_j)\,\Delta_j y\right]\Delta_i x = \left[\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i,\, y)\,dy\right]\Delta_i x = \phi(x_i)\,\Delta_i x$$

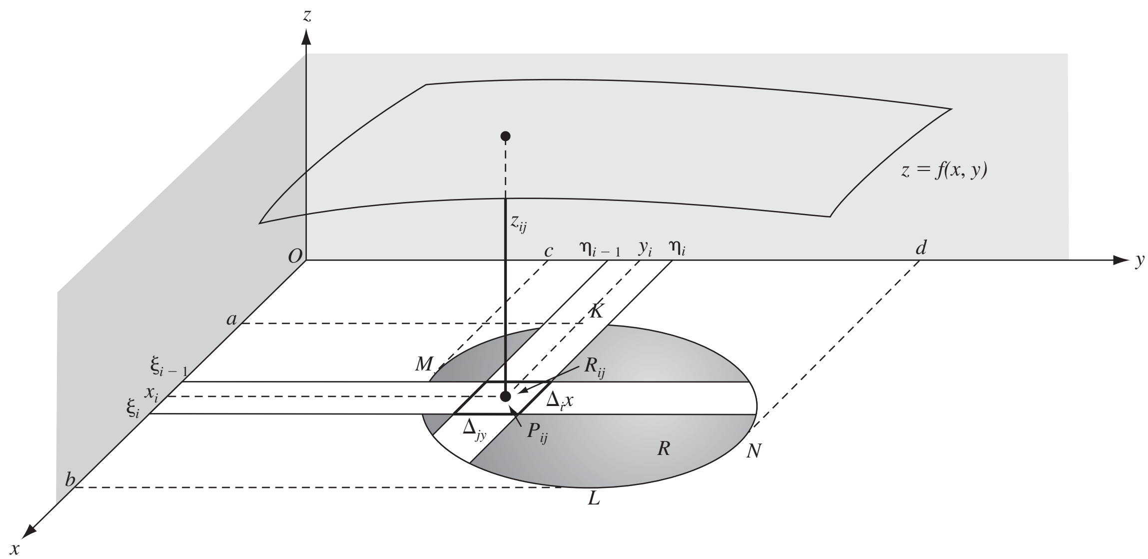


Fig. 54.3

Ahora se suman las m columnas y haciendo $m \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\phi(x_i)\Delta_i x = \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^b\left[\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x,y)\,dy\right]dx \tag{54.4}$$

$$= \int_a^b\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Aunque no se utilizarán corchetes de aquí en adelante, debe entenderse claramente que (54.4) exige el cálculo de dos integrales definidas simples en el orden preestablecido: primero, la integral de $f(x, y)$ con respecto a y (considerando x como una constante) desde $y = g_1(x)$, la frontera inferior de R, hasta $y = g_2(x)$, la frontera superior de R, y luego la integral de este resultado con respecto a x desde la abscisa $x = a$ del punto que queda más hacia la izquierda de R hasta la abscisa $x = b$ del punto que queda más hacia la derecha de R. La integral (54.4) se denomina *integral iterada* o *repetida*.

Se deja como ejercicio sumar primero las contribuciones de los rectángulos que quedan en cada fila y luego sobre todas las filas para obtener la integral iterada equivalente

$$\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{54.5}$$

donde $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$ son las ecuaciones de los arcos planos MKN y MLN, respectivamente.

En el problema 1 se demuestra, por un procedimiento diferente, que la integral iterada (54.4) mide el volumen en cuestión. Para la evaluación de las integrales iteradas ver los problemas 2 al 6.

La principal dificultad al tratar con integrales iteradas en los siguientes capítulos será la inserción de los límites de integración para cubrir la región R. Aquí se asumió la más simple de las regiones; las regiones más complejas se consideran en los problemas 7 a 9.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sea $z = f(x, y)$ no negativa y continua en la región R del plano xy, cuya frontera consta de los arcos de dos curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$ que se intersecan en los puntos K y L, como en la figura 54.4. Hallar una fórmula para el volumen V bajo la superficie $z = f(x, y)$.

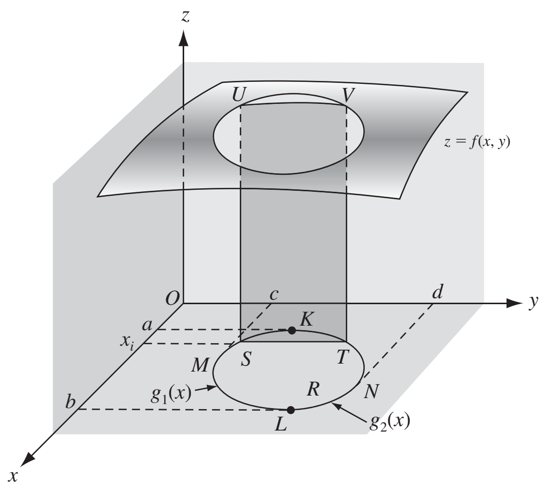


Fig. 54.4

Sea la sección de este volumen cortada por un plano $x = x_i$, donde $a < x_i < b$, interseca la frontera de R en los puntos $S(x_i, g_1(x_i))$ y $T(x_i, g_2(x_i))$, y la superficie $z = f(x, y)$ en el arco UV a lo largo del cual $z = f(x_i, y)$. El área de esta sección $STUV$ está dada por

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy$$

Así pues, las áreas de las secciones transversales del volumen cortadas por los planos paralelas al plano yz son funciones conocidas $A(x) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x, y)\,dy$ de x, donde x es la distancia del plano que se secciona al origen. De acuerdo con la fórmula de la sección transversal del capítulo 30, el volumen requerido está dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x, y)\,dy\right]dx$$

Ésta es la integral iterada de (54.4)

En los problemas 2 a 6, calcule la integral de la izquierda.

2. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\,dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{6}$

3. $\int_1^2 \int_y^{3y} (x + y)dx\,dy = \int_1^2 [\tfrac{1}{2}x^2 + xy]_y^{3y}\,dy = \int_1^2 6y^2 dy = [2y^3]_1^2 = 14$

4. $\int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^2 [xy]_{2x^2-2}^{x^2+x}\,dx = \int_{-1}^2 (x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x)\,dx = \tfrac{9}{4}$

5. $\int_0^\pi \int_0^{\cos\theta} \rho \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta = \int_0^\pi [\tfrac{1}{2}\rho^2 \operatorname{sen}\theta]_0^{\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = [-\tfrac{1}{6}\cos^3\theta]_0^\pi = \tfrac{1}{3}$

6. $\int_0^{\pi/2} \int_2^{4\cos\theta} \rho^3 d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_2^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} (64\cos^4\theta - 4)\,d\theta$

$$= \left[64\left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen}4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 10\pi$$

7. Calcule $\iint\limits_R dA$, donde R es la región en el primer cuadrante limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

La recta y la parábola se intersecan en los puntos (0, 0) y (1, 1) que establecen los valores extremos de x y y sobre la región R.

Solución 1 (Figura 54.5): integrando primero sobre una franja horizontal, es decir, respecto a x desde $x = y$ (la recta) hasta $x = y^{2/3}$ (la parábola), y luego respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 1$, se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y)\,dy = [\tfrac{3}{5} y^{5/3} - \tfrac{1}{2} y^2]_0^1 = \tfrac{1}{10}$$

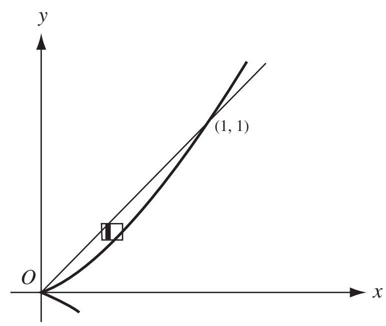


Fig. 54.5

Solución 2 (Figura 54.6): integrando primero sobre una franja vertical, es decir, con respecto a y desde $y = x^{3/2}$ (la parábola) hasta $y = x$ (la recta), y luego, respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 1$, se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^{3/2})\,dx = [\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{2}{5} x^{5/2}]_0^1 = \tfrac{1}{10}$$

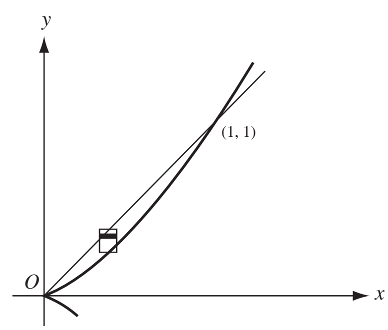


Fig. 54.6

8. Calcule $\iint_R dA$ donde R es la región entre $y = 2x$ y $y = x^2$ que queda a la izquierda de $x = 1$.

Integrando primero sobre la franja vertical (fig. 54.7), se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 (2x - x^2)\,dx = \tfrac{2}{3}$$

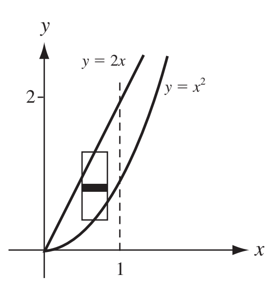


Fig. 54.7

Cuando se utilizan las franjas horizontales (fig. 54.8), son necesarias dos integrales iteradas. Denótese con R_1 la parte R que está por debajo de AB, y R_2 la parte que está por encima de AB. Entonces,

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy = \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{3}$$

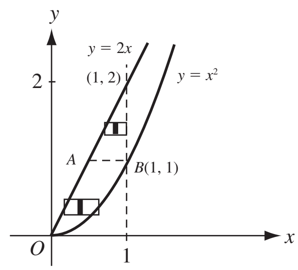


Fig. 54.8

9. Calcule $\iint_R x^2 dA$ donde R es la región en el primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $y = x$, $y = 0$, y $x = 8$ (fig. 54.9).

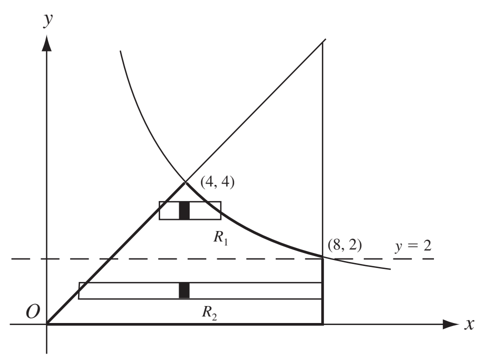


Fig. 54.9

De la figura 54.9 se deduce que R debe separarse en dos regiones, y una integral iterada debe evaluarse para cada una de ellas. Sea R_1 la parte de R que está por encima de la recta $y = 2$, y R_2 la parte que queda por debajo de dicha recta. Entonces,

$$\iint_R x^2 dA = \iint_{R_1} x^2 dA + \iint_{R_2} x^2 dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2 dx\,dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3\right) dy + \frac{1}{3}\int_0^2 (8^3 - y^3)\,dy = 448$$

Como ejercicio para el lector, se puede separar R con la recta $x = 4$ y obtener

$$\iint_R x^2 dA = \int_0^4 \int_0^x x^2 dy\,dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy\,dx$$

10. Calcule $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\,dy$ invirtiendo primero el orden de integración.

La integral dada no puede ser evaluada directamente, porque $\int e^{x^2} dx$ no es una función elemental. La región R de integración (fig. 54.10) está acotada por las rectas $x = 3y$, $x = 3$, y $y = 0$. Para invertir el orden de integración, primero se integra respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = x/3$, y luego, respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 3$. Así,

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} dy\,dx = \int_0^3 [e^{x^2} y]_0^{x/3} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\,dx = [\tfrac{1}{6} e^{x^2}]_0^3 = \tfrac{1}{6}(e^9 - 1)$$

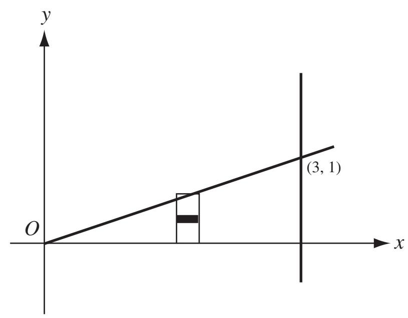


Fig. 54.10

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

11. Calcule cada integral iterada de la izquierda.

a) $\int_0^1 \int_1^2 dx\,dy = 1$

b) $\int_0^2 \int_0^3 (x+y)\,dx\,dy = 9$

c) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{70}{3}$

d) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx = \frac{1}{40}$

e) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2\,dx\,dy = \frac{3}{4}$

f) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (x+y^3)\,dy\,dx = \frac{7}{60}$

g) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \frac{1}{2}e - 1$

h) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\,dx\,dy = \frac{32}{3}$

i) $\int_0^{\tan^{-1}(3/2)} \int_0^{2\sec\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = 3$

j) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}$

k) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan\theta\sec\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{20}$

l) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{49}{32}\pi$

12. Mediante una integral iterada, calcule cada una de las siguientes integrales dobles. Cuando sea factible, calcule las integrales iteradas en ambos órdenes.

a) x sobre la región acotada por $y = x^2$ y $y = x^3$ — *Respuesta*: $\frac{1}{20}$

b) y sobre la región de la parte *a*) — *Respuesta*: $\frac{1}{35}$

c) x^2 sobre la región acotada por $y = x$, $y = 2x$, y $x = 2$ — *Respuesta*: 4

d) 1 sobre cada región del primer cuadrante limitada por $2y = x^2$, $y = 3x$, y $x + y = 4$ — *Respuesta*: $\frac{8}{3}$; $\frac{46}{3}$

e) y sobre la región que está por encima de $y = 0$ acotada por $y^2 = 4x$ y $y^2 = 5 - x$ — *Respuesta*: 5

f) $\dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ sobre la región en el primer cuadrante acotada por $x^2 = 4 - 2y$ — *Respuesta*: 4

13. En los problemas 11 *a*) a *h*), invierta el orden de integración y evalúe la integral iterada resultante.

55

Centroides y momentos de inercia de áreas planas

Área plana por integración doble

Si $f(x, y) = 1$, la integral doble del capítulo 54 se convierte en $\iint_R dA$. En unidades cúbicas, es la medida de un volumen de un cilindro de altura unitaria; en unidades cuadradas, mide el área A de la región R.

En coordenadas polares,

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho \, d\rho \, d\theta$$

donde $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\rho = \rho_1(\theta)$ y $\rho = \rho_2(\theta)$ se seleccionan como fronteras de la región R.

Centroides

El centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de la región plana R se considera intuitivamente de la manera siguiente: si se supone que R tiene una densidad unitaria uniforme, y si R está apoyada desde abajo en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, entonces R se balancea (es decir, R no gira del todo).

Para ubicar $(\bar{x}, \bar{y})$, primero se considera la recta vertical $x = \bar{x}$. Si se divide R en subregiones $R_1, \ldots, R_n$, de áreas $\Delta_1 A, \ldots, \Delta_n A$ como en el capítulo 54, y se seleccionan los puntos (x_k, y_k) en cada R_k, entonces el momento (fuerza rotacional) de R_k en torno a la recta $x = \bar{x}$ es aproximadamente $(x_k - \bar{x})\Delta_k A$. Luego, el momento de R en torno a $x = \bar{x}$ es aproximadamente $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})\,\Delta_k A$. Al hacer la partición (división) de R cada vez más pequeña, se obtiene $\iint_R (x - \bar{x})\, dA$ como el momento de R en torno a $x = \bar{x}$. Para no tener rotación en torno a $x = \bar{x}$, se necesita $\iint_R (x - \bar{x})\, dA = 0$. Pero

$$\iint_R (x - \bar{x})\, dA = \iint_R x\, dA - \iint_R \bar{x}\, dA = \iint_R x\, dA - \bar{x} \iint_R dA$$

Por tanto, se debe tener $\iint_R x\, dA = \bar{x} \iint_R dA$. De igual forma se llega a $\iint_R y\, dA = \bar{y} \iint_R dA$. Luego, el centroide está determinado por las ecuaciones

$$\iint_R x\, dA = \bar{x} \iint_R dA \quad \text{y} \quad \iint_R y\, dA = \bar{y} \iint_R dA$$

Nótese que $\iint_R dA$ es igual al área A de la región R.

Momentos de inercia

Los momentos de inercia de una región plana R respecto a los ejes de coordenadas están dados por

$$I_x = \iint_R y^2 \, dA \quad \text{y} \quad I_y = \iint_R x^2 \, dA$$

El momento polar de inercia (momento de inercia respecto a una recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano del área) de una región plana R está dado por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) \, dA$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine el área acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

Al utilizar las franjas verticales (fig. 55.1) se obtiene

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx = \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

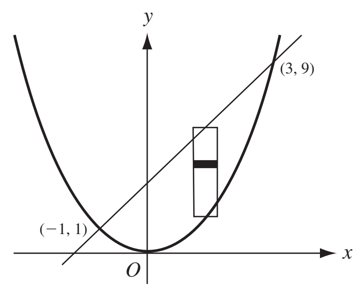


Fig. 55.1

2. Determine el área acotada por las parábolas $y^2 = 4 - x$ y $y^2 = 4 - 4x$.

Al utilizar las franjas horizontales (fig. 55.2) y aprovechando la simetría se obtiene

$$A = 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\, dy = 2\int_0^2 [(4 - y^2) - (1 - \tfrac{1}{4} y^2)]\, dy$$

$$= 6\int_0^2 (1 - \tfrac{1}{4} y^2)\, dy = 8 \text{ unidades cuadradas}$$

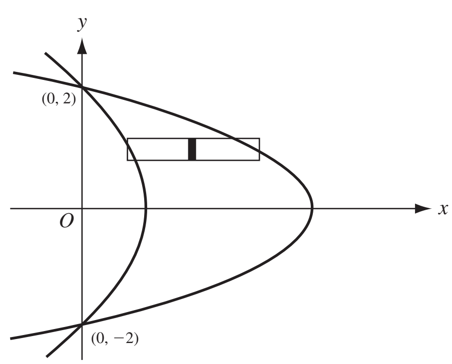


Fig. 55.2

3. Determine el área exterior del círculo $\rho = 2$ e interior de la cardioide $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

Debido a la simetría (fig. 55.3), el área requerida es dos veces el área barrida cuando θ varía de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Por tanto,

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta = 4\int_0^{\pi/2}(2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\left[\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = (\pi + 8) \text{ unidades cuadradas}$$

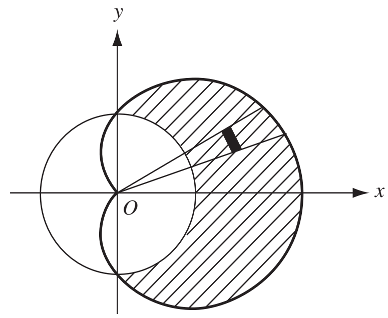


Fig. 55.3

4. Determine el área interior al círculo $\rho = 4$ sen θ y exterior a la lemniscata $\rho^2 = 8$ cos 2θ.

El área requerida es igual al doble de la limitada en el primer cuadrante por las dos curvas y la recta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Observe en la figura 55.4 que el arco AO de la lemniscata se genera al variar θ de $\theta = \frac{\pi}{6}$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$, mientras que el arco AB del círculo se describe al variar θ de $\theta = \frac{\pi}{6}$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$. Esta área debe entonces considerarse dos regiones, una por debajo de la recta $\theta = \frac{\pi}{4}$ y otra por encima de la misma recta. Así,

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{2\sqrt{2\cos 2\theta}}^{4\operatorname{sen}\theta} \rho\, d\rho\, d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{4\operatorname{sen}\theta} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4}(16\operatorname{sen}^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= \left(\tfrac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4\right) \text{ unidades cuadradas}$$

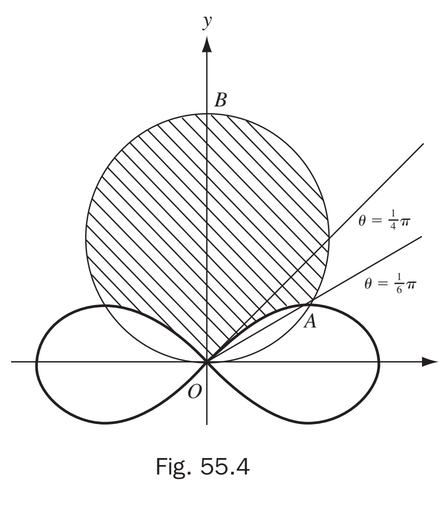


Fig. 55.4

5. Calcule $N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (fig. 55.5).

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ se obtiene

$$N^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA$$

Al cambiar a coordenadas polares $(x^2 + y^2) = \rho^2$, $dA = \rho\, d\rho\, d\rho$ resulta

$$N^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

y $N = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

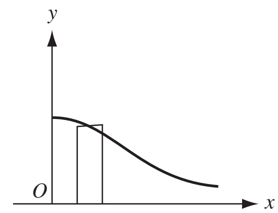


Fig. 55.5

6. Halle el centroide del área plana acotada por la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = x$ (fig. 55.6).

$$A = \iint_R dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\, dx = \int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \frac{125}{6}$$

$$M_y = \iint_R x\, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \frac{625}{12}$$

$$M_x = \iint_R y\, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^5 [(6x - x^2)^2 - x^2]\, dx = \frac{625}{6}$$

Por tanto, $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5}{2}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = 5$, y las coordenadas del centroide son $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$.

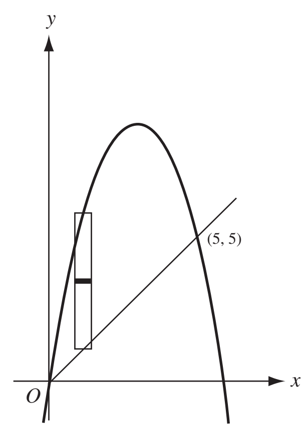


Fig. 55.6

7. Determine el centroide del área plana acotada por las parábolas $y = 2x - x^2$ y $y = 3x^2 - 6x$ (fig. 55.7).

$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\, dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\, dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x\, dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^2 (8x - 4x^3)\, dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\, dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 [(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)]^2\, dx = -\frac{64}{15}$$

Por tanto $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1$, $\bar{y} = \frac{M_x}{A} = -\frac{4}{5}$, y el centroide es $\left(1, -\frac{4}{5}\right)$.

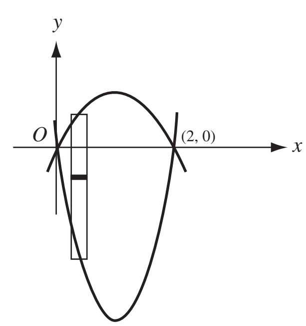


Fig. 55.7

8. Determine el centroide del área plana exterior al círculo $\rho = 1$ e interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\,\theta$.

De la figura 55.8 se deduce que $\bar{y} = 0$ y que $\bar{x}$ es la misma, bien sea que se calcule para el área dada o para la mitad que está por encima del eje polar. Para esta última área

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [(1+\cos\theta)^2 - 1^2]\, d\theta = \frac{\pi+8}{8}$$

$$M_y = \iint_R x\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\,\text{sen}\,2\theta + 3\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi+32}{48}$$

Las coordenadas del centroide son $\left(\frac{15\pi+32}{6(\pi+8)}, 0\right)$.

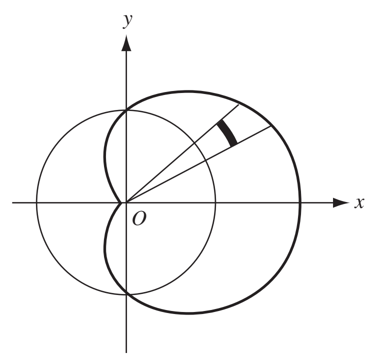


Fig. 55.8

9. Halle el centroide del área interior a $\rho = \text{sen}\,\theta$ y exterior a $\rho = 1 - \cos\,\theta$ (fig. 55.9).

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\text{sen}\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{4-\pi}{4}$$

$$M_y = \iint_R x\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\text{sen}\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \iint_R y\, dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\text{sen}\theta} (\rho\,\text{sen}\,\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\,\text{sen}\theta\, d\theta = \frac{3\pi - 4}{48}$$

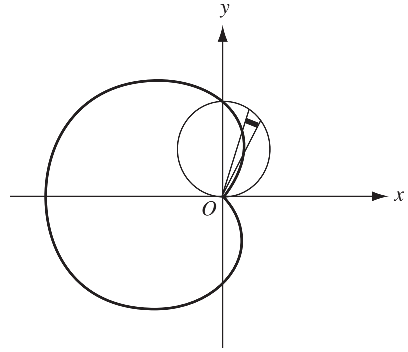


Fig. 55.9

Las coordenadas del centroide son $\left(\frac{15\pi-44}{12(4-\pi)}, \frac{3\pi-4}{12(4-\pi)}\right)$.

10. Halle I_x, I_y e I_0 para el área encerrada por el lazo $y^2 = x^2(2 - x)$ (fig. 55.10).

$$A = \iint_R dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\,dz = -4\left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

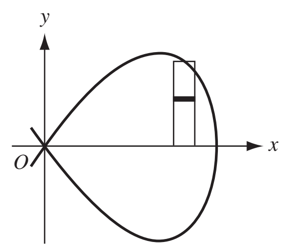


Fig. 55.10

donde se ha utilizado la transformación $2 - x = z^2$. Entonces,

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x^3(2-x)^{3/2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4\,dz = -\frac{4}{3}\left[\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2\,dz = -4\left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13\,312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231}A$$

11. Halle I_x, I_y e I_0 para el área del primer cuadrante exterior al círculo $\rho = 2a$ y para el interior al círculo $\rho = 4a\cos\theta$ (fig. 55.11).

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left[(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\right]d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\left[(4a\cos\theta)^4 - (2a)^4\right]\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta - 1)\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2 A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^2 \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2 A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3}a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}a^2 A$$

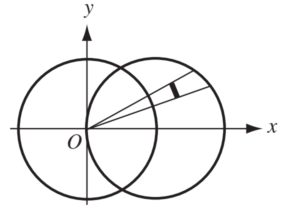


Fig. 55.11

12. Encuentre I_x, I_y e I_0 para el área del círculo $\rho = 2$ (sen θ + cos θ) (fig. 55.12).
Como $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)} \rho^2 \rho\, d\rho\, d\theta = 4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^4\, d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_{-1/4\,\pi}^{3/4\,\pi} = 6\pi = 3A$$

De acuerdo la figura 55.12, $I_x = I_y$. Por tanto, $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{2} A$.

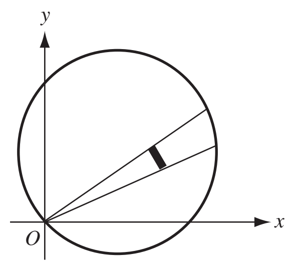


Fig. 55.12

PROBLEMAS RESUELTOS

13. Use la integración doble para hallar el área:

a) Limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ — *Respuesta:* 24 unidades cuadradas

b) Limitada por $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$ — *Respuesta:* 6 unidades cuadradas

c) Limitada por $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$ — *Respuesta:* $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas

d) Interior a $\rho = 2\,(1 - \cos\theta)$ — *Respuesta:* 6π unidades cuadradas

e) Limitada por $\rho = \tan\theta \sec$ y $\pi = \frac{\pi}{3}$ — *Respuesta:* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ unidades cuadradas

f) Exterior a $\rho = 4$ e interior a $\rho = 8\cos\theta$ — *Respuesta*: $8\left(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$ unidades cuadradas

14. Localice el centroide de cada una de las áreas siguientes:

a) El área del problema 13*a*) — *Respuesta:* $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

b) El área del primer cuadrante del problema 13*c*) — *Respuesta:* $\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right)$

c) El área del primer cuadrante acotada por $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 6$ — *Respuesta:* $\left(\frac{18}{5}, \frac{9}{4}\right)$

d) El área acotada por $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$, $x = 0$ — *Respuesta:* $\left(\frac{13}{40}, \frac{26}{15}\right)$

e) El área del primer cuadrante acotada por $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, $x = 0$ — *Respuesta:* $\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$

f) El área del problema 13*e*) — *Respuesta:* $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{6}{5}\right)$

g) El área del primer cuadrante del problema 13*f*) — *Respuesta:* $\left(\frac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \frac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

15. Compruebe que $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)]\, d\theta = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_R dA$; luego, deduzca que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

16. Encuentre I_x e I_y para cada una de las áreas siguientes:

a) El área del problema 13a) *Respuesta:* $I_x = 6A$; $I_y = \frac{32}{3}A$

b) El área cortada desde $y^2 = 8x$ por su lado recto *Respuesta:* $I_x = \frac{16}{5}A$; $I_y = \frac{12}{7}A$

c) El área acotada por $y = x^2$ y $y = x$ *Respuesta:* $I_x = \frac{3}{14}A$; $I_y = \frac{3}{10}A$

d) El área acotada por $y = 4x - x^2$ y $y = x$ *Respuesta:* $I_x = \frac{459}{70}A$; $I_y = \frac{27}{10}A$

17. Encuentre I_x e I_y para un lazo de $\rho^2 = \cos 2\theta$.

Respuesta: $I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}\right)A$; $I_y = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}\right)A$

18. Halle I_0 para *a*) el lazo de $\theta = \operatorname{sen} 2\theta$ y *b*) el área encerrada por $\theta = 1 + \cos\theta$.

Respuesta: *a*) $\frac{3}{8}A$; *b*) $\frac{35}{24}A$

19. *a*) Sea R la región mostrada en la figura 55.13 que tiene un área A y el centroide $(\bar{x}, \bar{y})$. Si R gira en torno al eje x, mostrar que el volumen V del sólido de revolución resultante es igual a $2\pi\bar{x}A$. (*Sugerencia*: use el método de las capas cilíndricas.)

b) Demuestre el teorema de Pappus: si d es la distancia recorrida por el centroide durante la revolución [del inciso *a*)], demueste que $V = Ad$.

c) Pruebe que el volumen del toro generado al girar el disco que aparece en la figura 55.14 en torno al eje x es $2\pi^2a^2b$. (Supóngase que $0 < a < b$.)

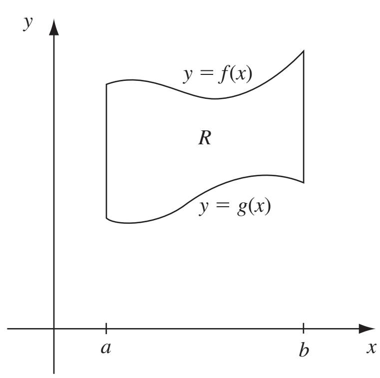


Fig. 55.13

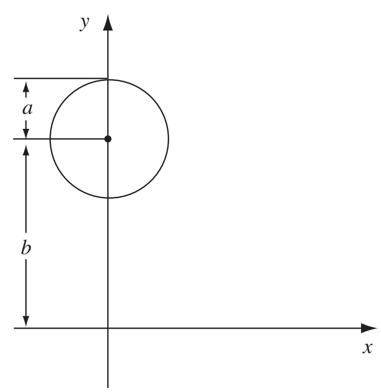


Fig. 55.14

56

Integración doble aplicada al volumen bajo una superficie y al área de una superficie curva

Sea $z = f(x, y)$ o $z = f(\rho, \theta)$ que define una superficie.

El volumen V bajo la superficie, es decir, el volumen de una columna vertical cuya base superior está en la superficie y cuya base inferior está en el plano xy se obtiene con la integral doble

$$V = \iint_R z\,dA \tag{56.1}$$

donde R es la región que forma la base inferior.

El área S de la parte R^* de la superficie que queda por encima de la región R está dada por la integral doble

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA \tag{56.2}$$

Si la superficie está dada por $x = f(y, z)$ y la región R queda en el plano yz, entonces,

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dA \tag{56.3}$$

Si la superficie está dada por $y = f(x, z)$ y la región R queda en el plano xz, entonces

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dA \tag{56.4}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determine el volumen en el primer octante entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$, e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

De la figura 56.1 se deduce que $z = x + y + 2$ va a integrarse sobre el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xy. Por tanto,

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2)\,dy\,dx = \int_0^4 \left(x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{1}{4}x\right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi\right) \text{ unidades cúbicas}$$

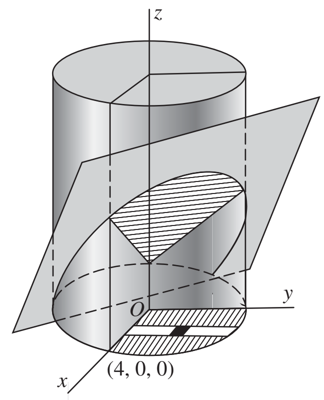


Fig. 56.1

2. Determine el volumen acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

De la figura 56.2 se desprende que $z = 4 - y$ va a integrarse sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy. Por tanto,

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)dx\,dy = 2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)dx\,dy = 16\pi \text{ unidades cúbicas}$$

3. Determine el volumen acotado por arriba por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, por debajo por el plano $z = 0$, y lateralmente por los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$ (fig. 56.3).

El volumen requerido se obtiene al integrar $z = x^2 + 4y^2$ sobre la región R común a las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = y$ en el plano xy. Por ende,

$$V = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{4}{3}y^3\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \tfrac{3}{7} \text{ unidades cúbicas}$$

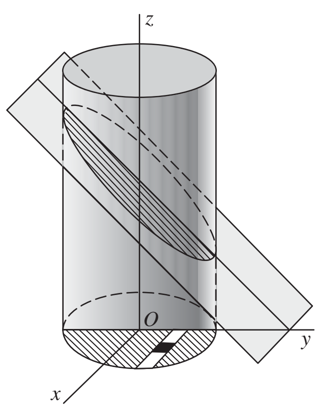


Fig. 56.2

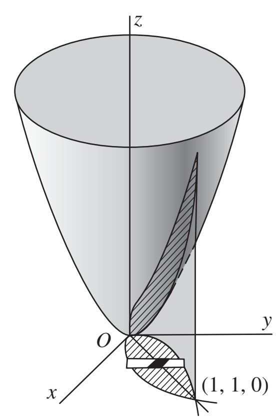


Fig. 56.3

4. Determine el volumen de una de las cuñas que se cortan en el cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ por los planos $z = 0$ y $z = my$ (fig. 56.4).

El volumen se obtiene integrando $z = my$ sobre la mitad de la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$. Por consiguiente,

$$V = 2\int_0^{a/2}\int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\,dy\,dx = m\int_0^{a/2} [y^2]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ unidades cúbicas}$$

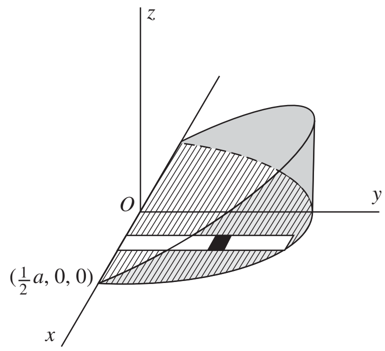


Fig. 56.4

5. Determine el volumen acotado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$ (fig. 56.5).

El volumen requerido se obtiene integrando $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 8y$. Utilizando las coordenadas cilíndricas (véase el capítulo 57), el volumen se obtiene al integrar $z = \frac{1}{4}\rho^2$ sobre el círculo $\rho = 8$ sen θ. Entonces,

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{8\operatorname{sen}\theta} z\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{8\operatorname{sen}\theta} \rho^3 d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\pi}[\rho^4]_0^{8\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 256\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = 96\pi \text{ unidades cúbicas}$$

6. Determine el volumen removido cuando se hace un hoyo de radio a a través de una esfera de radio $2a$, siendo el eje del hoyo un diámetro de la esfera (fig. 56.6).

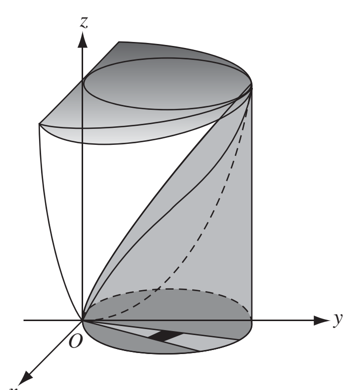


Fig. 56.5

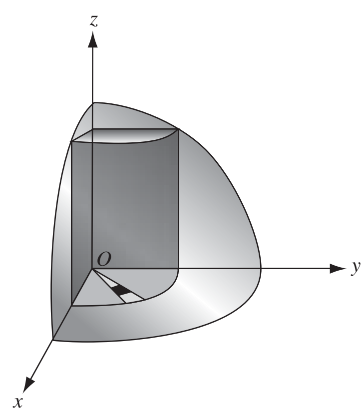


Fig. 56.6

Es evidente, por la figura, que el volumen requerido es ocho veces el volumen en el primer octante acotado por el cilindro $\rho^2 = a^2$, la esfera $\rho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Este último volumen se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$ sobre un cuadrante del círculo $\rho = a$. Por tanto,

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}\sqrt{4a^2 - \rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(8a^3 - 3\sqrt{3}a^3)d\theta = \tfrac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi \text{ unidades cúbicas}$$

7. Deduzca la fórmula (56.2).

Considere una región R^* de área S sobre la superficie $z = f(x, y)$. Por el límite de R^* pasa un cilindro vertical (fig. 56.7 en la siguiente página) cortando el plano xy en la región R. Ahora se divide R en n

subregiones $R_1, \ldots, R_n$ de las áreas $\Delta A_1, \ldots, \Delta A_n$, y se representa como ΔS_i el área de la proyección de ΔA_i sobre $R*$. En dicha i-ésima región de $R*$ se selecciona un punto P_i y se dibuja el plano tangente a la superficie. El área de la proyección R_i sobre este plano tangente se denota mediante ΔT_i. Se utilizará ΔT_i como una aproximación del área de superficie correspondiente ΔS_i.

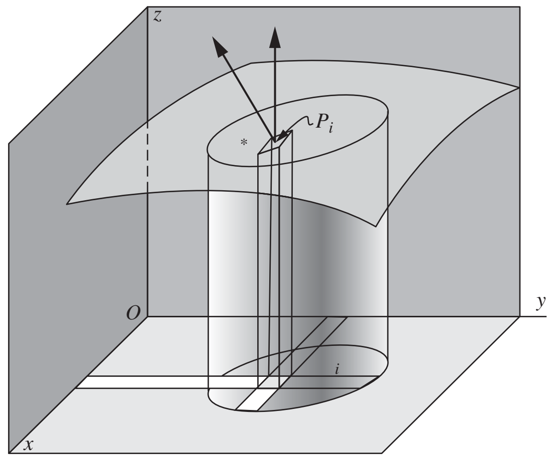


Fig. 56.7

Ahora, el ángulo entre el plano xy y el plano tangente en P_i es el ángulo γ_i entre el eje z con números directores [0, 0, 1] y la normal, $\left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right]$, a la superficie en P_i. Así,

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Entonces (fig. 56.8),

$$\Delta T_i \cos \gamma_i = \Delta A_i \quad \text{y} \quad \Delta T_i = \sec \gamma_i \, \Delta A_i$$

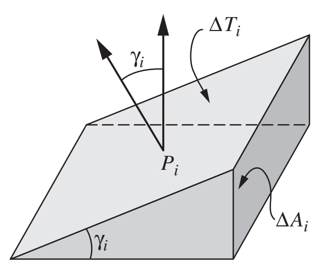


Fig. 56.8

Por tanto, una aproximación de S es $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \Delta A_i$, y

$$S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sec \gamma_i \Delta A_i = \iint_R \sec \gamma \, dA = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA$$

8. Determine el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ que queda arriba del plano xy y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

Solución 1: remítase a la figura 56.9. La proyección del área requerida sobre el plano xy está en la región R encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 4y$. Para el cono,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{y}{z}. \quad \text{Entonces,} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

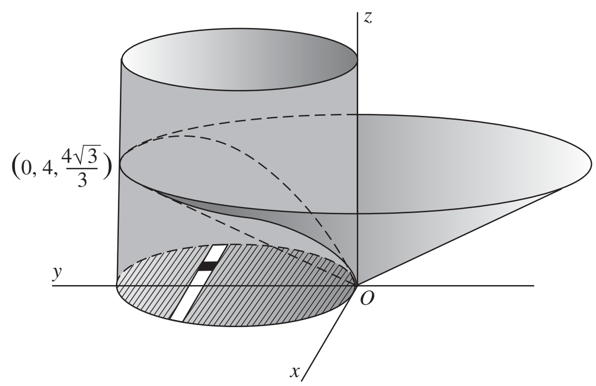


Fig. 56.9

Entonces, $$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA = \int_0^4\int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx\,dy = 2\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\,dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^4 \sqrt{4y-y^2}\,dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades cuadradas}$$

Solución 2: remítase a la figura 56.10. La proyección de la mitad del área requerida en el plano yz es la región R acotada por la recta $y=\sqrt{3}z$ y la parábola $y=\frac{3}{4}z^2$; esta ecuación se obtiene al eliminar x de las ecuaciones de las dos superficies. Para el cono,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x} \text{ y } \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}. \text{ También } 1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2-y^2}.$$

Entonces, $$S = 2\int_0^4\int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{3z^2-y^2}}\,dz\,dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 [\sqrt{3z^2-y^2}\,]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}}dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4\sqrt{4y-y^2}\,dy.$$

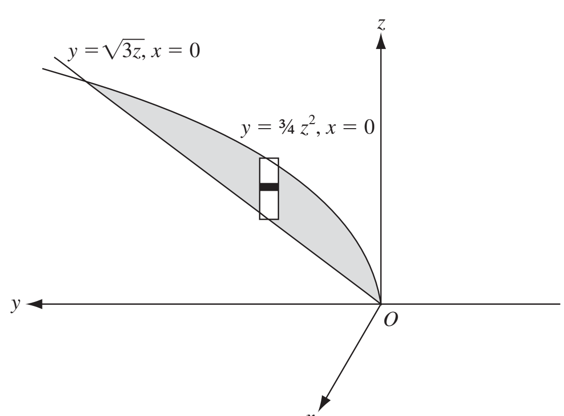


Fig. 56.10

Solución 3: usando las coordenadas polares de la solución 1, se integra $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sobre la región R encerrada por el círculo $\rho = 4 \text{ sen } \theta$. Entonces,

$$S = \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\,dA = \int_0^\pi\int_0^{4\operatorname{sen}\theta}\frac{2}{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\pi [\rho^2]_0^{4\operatorname{sen}\theta}d\theta$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \ \text{ unidades cuadradas}$$

9. Determine el área de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

En la figura 56.11 se muestra la octava parte del área requerida, donde un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$ es su proyección sobre el plano xy. Para el cilindro $x^2 + z^2 = 16$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ entonces, } \; +1\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+z^2}{z^2} = \frac{16}{16-x^2}.$$

Por tanto,
$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\, dy\, dx = 32\int_0^4 dx = 128 \text{ unidades cuadradas}$$

10. Encuentre el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$.

En la figura 56.12 se muestra una cuarta parte del área requerida, donde la región R es su proyección sobre el plano yz acotada por el círculo $y^2 + z^2 = 16$, los ejes y y z, y la recta $z = 1$. Para la esfera,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}. \text{ Entonces, } 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2} = \frac{16}{16-y^2-z^2}.$$

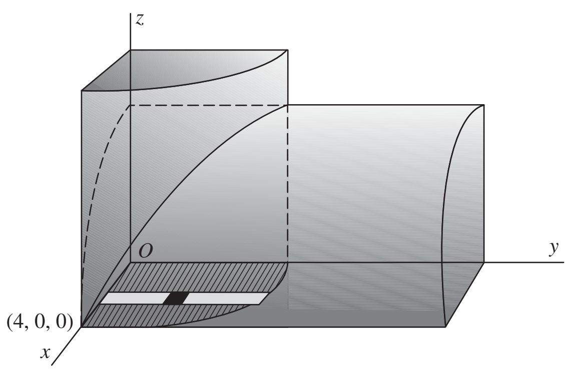


Fig. 56.11

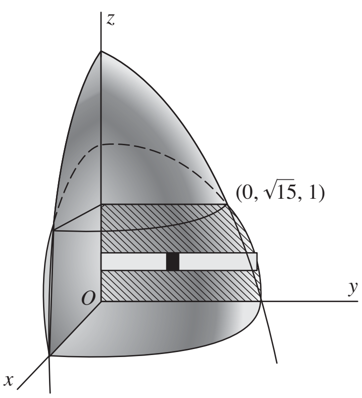


Fig. 56.12

Así,
$$S = 4\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\, dy\, dz$$
$$= 16\int_0^1 \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16\int_0^1 \frac{\pi}{2}\, dz = 8\pi \text{ unidades cuadradas}$$

11. Encuentre el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ situada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

En la figura 56.13 en la siguiente página se muestra una cuarta parte del área requerida. Su proyección en el plano yz es la región R acotada por los ejes z y y y la parábola $z^2 + 6y = 36$; esta última ecuación resulta de eliminar x en la ecuaciones de las dos superficies. Para el cilindro,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{3-y}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0. \text{ Entonces, } 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+9-6y+y^2}{x^2} = \frac{9}{6y-y^2}.$$

Por tanto,

$$S = 4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}\, dz\, dy = 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}}\, dy = 144 \text{ unidades cuadradas}$$

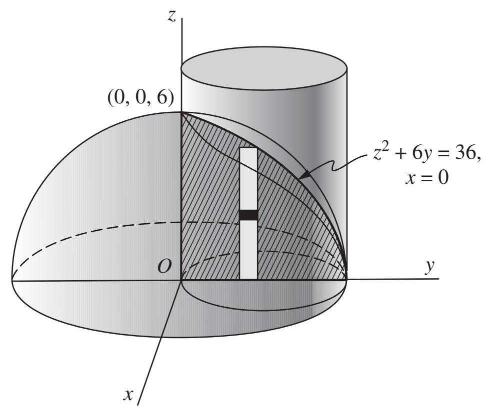


Fig. 56.13

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12. Determine el volumen cortado de $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ por el plano $z = 0$.

Respuesta: 3π unidades cúbicas

13. Determine el volumen bajo $z = 3x$ sobre el área del primer cuadrante acotado por $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, y $x^2 + y^2 = 25$.

Respuesta: 98 unidades cúbicas

14. Determine el volumen en el primer octante acotado por $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$.

Respuesta: 1485/16 unidades cúbicas

15. Determine el volumen en el primer octante acotado por $xy = 4z$, $y = x$, y $x = 4$.

Respuesta: 8 unidades cúbicas

16. Encuentre el volumen en el primer octante acotado por $x^2 + y^2 = 25$ y $z = y$.

Respuesta: 125/3 unidades cúbicas

17. Encuentre el volumen común a los cilindros $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + z^2 = 16$.

Respuesta: 1024/3 unidades cúbicas

18. Determine el volumen en el primer octante interior a $y^2 + z^2 = 9$ y exterior a $y^2 = 3x$.

Respuesta: $27\pi/3$ unidades cúbicas

19. Halle el volumen en el primer octante acotado por $x^2 + z^2 = 16$ y $x - y = 0$.

Respuesta: 64/3 unidades cúbicas

20. Encuentre el volumen frente a $x = 0$ y común a $y^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 + 2x = 16$.

Respuesta: 28π unidades cúbicas

21. Determine el volumen interior a $\rho = 2$ y exterior al cono $z^2 = \rho^2$.

Respuesta: $32\pi/3$ unidades cúbicas

22. Encuentre el volumen interior a $y^2 + z^2 = 2$ y exterior a $x^2 - y^2 - z^2 = 2$.

Respuesta: $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ unidades cúbicas

23. Encuentre el volumen común a $\rho^2 + z^2 = a^2$ y $\rho = a$ sen θ.

Respuesta: $2(3\pi - 4)a^2/9$ unidades cúbicas

24. Determine el volumen interior a $x^2 + y^2 = 9$, acotado por debajo por $x^2 + y^2 + 4z = 16$ y por encima por $z = 4$.

Respuesta: $81\pi/8$ unidades cúbicas

25. Encuentre el volumen cortado del paraboloide $4x^2 + y^2 = 4z$ por el plano $z - y = 2$.

Respuesta: 9π unidades cúbicas

26. Determine el volumen descrito al girar la cardioide $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ en torno al eje polar.

Respuesta: $V = 2\pi \iint y\rho \, d\rho \, d\theta = \frac{64\pi}{3}$ unidades cúbicas

27. Encuentre el volumen generado al girar un pétalo de $\rho =$ sen θ en torno a cualquiera de los ejes.

Respuesta: $32\pi/105$ unidades cúbicas

28. Determine el área de la parte de un cono $x^2 + y^2 = z^2$ en el interior del prisma vertical cuya base es el triángulo acotado por las rectas $y = x$, $x = 0$, y $y = 1$ en el plano xy.

Respuesta: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unidades cúbicas

29. Halle el área de la parte de un plano $x + y + z = 6$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Respuesta: $4\sqrt{3}\pi$ unidades cuadradas

30. Halle el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.

Respuesta: $72(\pi - 2)$ unidades cúbicas

31. Encuentre el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ interior al paraboloide $x^2 + y^2 = z$.

Respuesta: 4π unidades cuadradas

32. Determine el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$.

Respuesta: 20π unidades cuadradas

33. Encuentre el área de la parte de la superficie $z = xy$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Respuesta: $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ unidades cuadradas

34. Halle el área de la superficie del cono $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ sobre el plano $z = 0$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.

Respuesta: $3\sqrt{10}\pi$ unidades cuadradas

35. Encuentre el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está dentro del cilindro elíptico $2x^2 + y^2 = 25$.

Respuesta: 50π unidades cuadradas

36. Halle el área de la superficie $x^2 + y^2 - az = 0$ que queda directamente sobre la lemniscata $4\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Respuesta: $S = \frac{4}{a}\iint \sqrt{4\rho^2 + a^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{a^2}{3}\left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ unidades cuadradas

37. Halle el área de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ que queda directamente sobre la cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$.

Respuesta: $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ unidades cuadradas

57

Integrales triples

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Supóngase que un punto P tiene coordenadas (x, y, z) en un sistema de coordenadas rectangulares dextrógiro (derecho). Las *coordenadas cilíndricas* correspondientes de P son (r, θ, z), donde (r, θ) son coordenadas polares para el punto (x, y) en el plano xy. [Observe el cambio de notación de (ρ, θ) a (r, θ) para las coordenadas polares de (x, y); fig. 57.1.] Por tanto, se tienen las relaciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En coordenadas cilíndricas, una ecuación $r = c$ representa un cilindro recto de radio c con el eje z como su eje de simetría. Una ecuación $\theta = c$ representa un plano que pasa por el eje z.

Un punto P con coordenadas rectangulares (x, y, z) tiene las *coordenadas esféricas* (ρ, θ, ϕ), donde $\rho = |OP|$, θ es el mismo que en las coordenadas cilíndricas y ϕ es el ángulo dirigido desde el eje positivo hasta el vector **OP** (fig. 57.2). En coordenadas esféricas, una ecuación $\rho = c$ representa una esfera de radio c con centro en el origen. Una ecuación $\phi = c$ representa un cono con vértice en el origen y el eje z como su eje de simetría.

Las relaciones adicionales siguientes, deducidas fácilmente de la figura 57.2 y las ecuaciones anteriores, se cumplen entre coordenadas esféricas, cilíndricas y rectangulares:

$$r = \rho\operatorname{sen}\phi, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

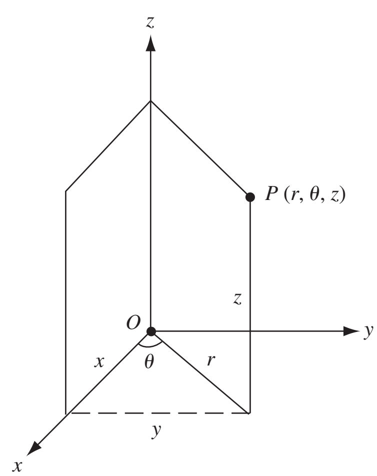


Fig. 57.1

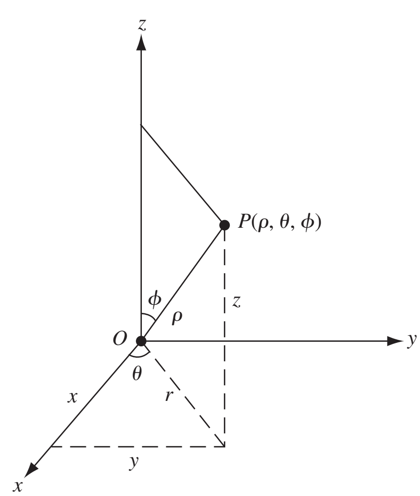


Fig. 57.2

La integral triple

Sea $f(x, y, z)$ una función continua en una región tridimensional R. La definición de integral doble puede extenderse de forma obvia para obtener la definición de la integral triple $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$

Si $f(x, y, z) = 1$, entonces $\iiint_R f(x, y, z)\, dV$ puede interpretarse como la medida del volumen de la región R.

Cálculo de integrales triples

Como en el caso de las integrales dobles, una integral triple puede calcularse en términos de integrales iteradas.

En coordenadas rectangulares,

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy, \text{ etcétera}$$

donde los límites de integración se seleccionan de modo que abarquen la región R.

En coordenadas cilíndricas,

$$\iiint_R f(r, \theta, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

donde los límites de integración se eligen para abarcar la región R (véase el problema 23).

En coordenadas esféricas,

$$\iiint_R f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

donde los límites de integración se seleccionan de modo que cubran la región R (véase el problema 24).

Análisis de las definiciones: considere la función $f(x, y, z)$, continua sobre una región R de espacio ordinario. Después de cortar los planos $x = \xi_i$ y $y = \eta_j$ como en el capítulo 54, se vuelven a cortar estas subregiones mediante planos $z = \zeta_k$. La región R ahora se ha dividido en cierto número de paralelepípedos rectangulares de volumen $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ y un número de paralelepípedos parciales que se ignorarán. En cada paralelepípedo completo se selecciona un punto $P_{ijk}\,(x_i, y_j, z_k)$; luego se calcula $f(x_i, y_j, z_k)$ y se forma la suma

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta V_{ijk} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \tag{57.1}$$

La integral triple de $f(x, y, z)$ sobre la región R se define como el límite de (57.1) cuando el número de paralelepípedos crece indefinidamente, de forma tal que todas las dimensiones de cada uno de ellos tienden a cero.

Al calcular este límite, se puede sumar primero cada conjunto de paralelepípedos que tienen $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$, para i y j fijos, como dos dimensiones y considerar el límite cuando cada $\Delta_k z \to 0$. Se obtiene

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_i, z_k)\,\Delta_k z\, \Delta_i x\, \Delta_j y = \int_{z_1}^{z_2} f(x_i, y_i, z)\, dz\, \Delta_i x\, \Delta_j y$$

Ahora estas son las columnas, las subregiones básicas, del capítulo 54; por tanto,

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty\\ p\to+\infty}} \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V_{ijk} = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Centroides y momentos de inercia

Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del *centroide de un volumen* satisfacen las relaciones

$$\bar{x}\iiint_R dV = \iiint_R x\,dV, \quad \bar{y}\iiint_R dV = \iiint_R y\,dV, \quad \bar{z}\iiint_R dV = \iiint_R z\,dV$$

Los *momentos de inercia de un volumen* respecto a los ejes de coordenadas están dados por

$$I_x = \iiint_R (y^2+z^2)dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2+x^2)\,dV, \quad I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcule las integrales triples dadas:

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz\ dz\ dy\ dx$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2-x} xyz\ dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\frac{xyz^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=2-x} \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5)\ dx = \frac{13}{240}$$

b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 zr^2 \operatorname{sen}\theta\ dz\ dr\ d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\ dr\ d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \operatorname{sen}\theta dr\ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [r^3]_0^1 \operatorname{sen}\theta\ d\theta = -\frac{2}{3}[\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

c) $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\varphi} \operatorname{sen} 2\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$

$$= 2\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\ d\phi\ d\theta = 2\int_0^{\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\ d\theta = (2-\sqrt{2})\pi$$

2. Calcule la integral triple de $F(x, y, z) = z$ sobre la región R en el primer octante acotado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ (fig. 57.3 en la siguiente página.)

Primero se integra respecto a z desde $z = 0$ (el plano xy) hasta $z = \sqrt{4-y^2}$ (el cilindro), luego respecto a x desde $x = 2 - y$ hasta $x = 6 - 2y$, y finalmente respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 2$. Esto resulta en

$$\iiint_R z\ dV = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\ dz\ dx\ dy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} [\tfrac{1}{2}z^2]_0^{\sqrt{4-y^2}}\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4-y^2)\ dx\ dy = \frac{1}{2}\int_0^2 [(4-y^2)x]_{2-y}^{6-2y}\ dy = \frac{26}{3}$$

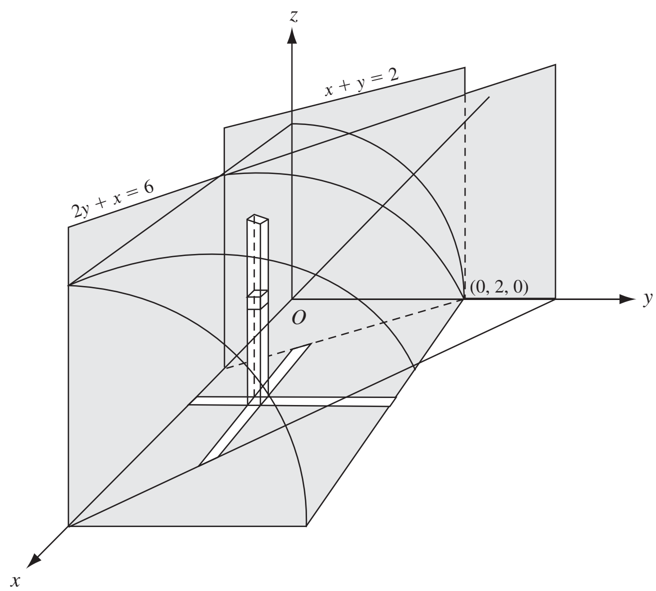


Fig. 57.3

3. Calcule la integral triple de $f(r, \theta, z) = r^2$ sobre la región R acotada por el paraboloide $r^2 = 9 - z$ y el plano $z = 0$ (fig. 57.4).

Primero se integra respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = 9 - r^2$, luego respecto a r, desde $r = 0$ hasta $r = 3$, y finalmente respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Esto resulta en

$$\iiint_R r^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^2(r\,dz\,dr\,d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3(9-r^2)dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{243}{4}d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

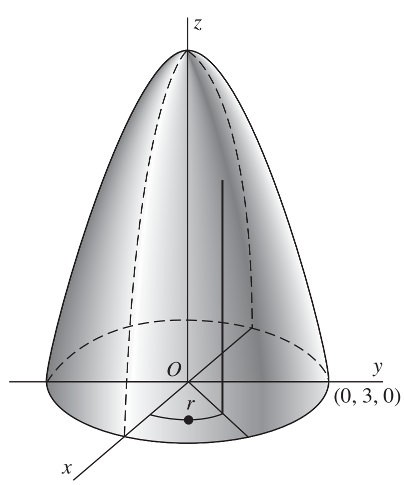


Fig. 57.4

4. Demuestre que las integrales siguientes representan el mismo volumen: *a*) $4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/4}^4 dz\,dy\,dx$, *b*) $\int_0^4\int_0^{2\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy\,dxdz$, y *c*) $4\int_0^4\int_{y^2/4}^4\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\,dz\,dy$.

a) Aquí z varía desde $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ hasta $z = 4$, es decir, el volumen está acotado por debajo por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$ y por encima por el plano $z = 4$. Los rangos de y y x abarcan un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$, la proyección de la curva de intersección del paraboloide con el plano $z = 4$ en el plano xy. Por consiguiente, la integral proporciona el volumen cortado del paraboloide por el plano $z = 4$.

b) Aquí y varía de $y = 0$ hasta $y = \sqrt{4z - x^2}$, es decir, el volumen está acotado a la izquierda por el plano xz y a la derecha por el paraboloide $y^2 = 4z - x^2$. Los rangos de x y z abarcan la mitad del área cortada de la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$, la curva de intersección del paraboloide y el plano xz, por el plano $z = 4$. La región R es la de *a*).

c) Aquí el volumen está acotado por detrás por el plano yz y al frente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$. Los rangos de z y de y abarcan la mitad del área cortada de la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$, la curva de intersección del paraboloide y el plano yz, por el plano $z = 4$. La región R es la de *a*).

5. Calcule la integral triple de $F(\rho, \theta, \phi) = 1/\rho$ sobre la región R en el primer octante acotada por los conos $\phi = \frac{\pi}{4}$ y $\phi = \tan^{-1} 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$ (fig. 57.5).

Se integra primero respecto a ρ, desde $\rho = 0$ hasta $\rho = \sqrt{6}$, luego respecto a ϕ, desde $\phi = \frac{\pi}{4}$ hasta $\phi = \tan^{-1} 2$, y finalmente respecto a θ desde 0 hasta $\phi = \frac{\pi}{2}$. Esto resulta en

$$\iiint_R \frac{1}{\rho}\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1} 2}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1} 2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi\, d\theta$$

$$= -3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

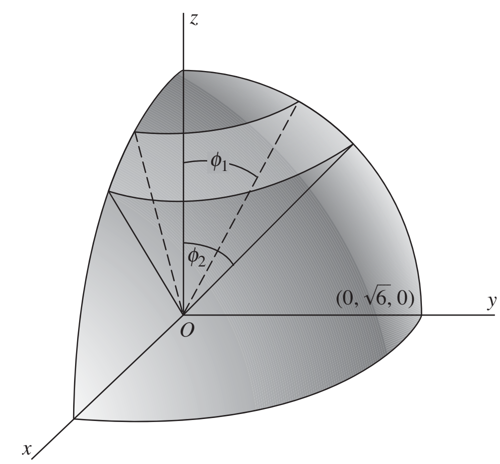


Fig. 57.5

6. Determine el volumen acotado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ (fig. 57.6 en la siguiente página.)

Primero se integra respecto a z, desde $z = 2x^2 + y^2$ hasta $z = 4 - y^2$, luego respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{2 - x^2}$ (se obtiene $x^2 + y^2 = 2$ al eliminar x entre las ecuaciones de las dos superficies), y finalmente respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{2}$ (obtenido al sustituir $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 2$) para determinar un cuarto del volumen requerido. Así,

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\, dy\, dx = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} [(4 - y^2) + (2x^2 + y^2)]\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}}\left[4y - 2x^2 y - \frac{2y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} dx = 4\pi \text{ unidades cubicas}$$

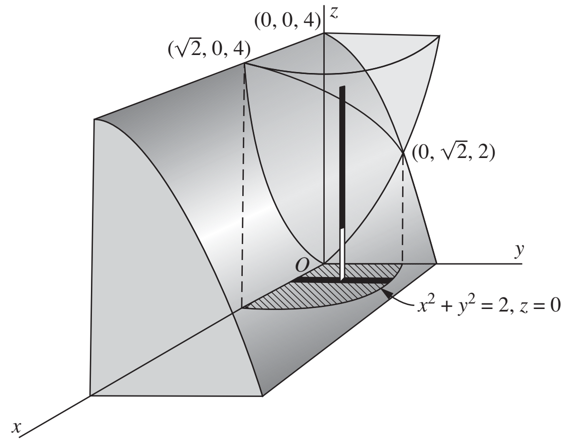


Fig. 57.6

7. Determine el volumen dentro del cilindro $r = 4 \cos \theta$ acotado por encima por la esfera $r^2 + z^2 = 16$ y por debajo por el plano $z = 0$ (fig. 57.7).

Primero se integra respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = \sqrt{16 - r^2}$, luego respecto a r, desde $r = 0$ hasta $r = 4 \cos \theta$, y finalmente respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$ para obtener el volumen requerido. Así,

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{4\cos\theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r\, dz\, dy\, d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{4\cos\theta} r\sqrt{16-r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= -\frac{64}{3} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^3 \theta - 1)\, d\theta = \frac{64}{9}(3\pi - 4) \text{ unidades cúbicas}$$

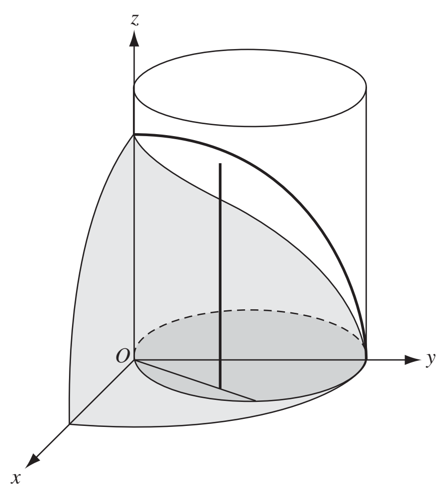


Fig. 57.7

8. Determine las coordenadas del centroide del volumen dentro del cilindro $r = 2 \cos \theta$, acotado por encima por el paraboloide $z = r^2$ y por debajo por el plano $z = 0$ (fig. 57.8 en la siguiente página.)

$$V = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [r^4]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta\, d\theta = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$M_{yz} = \iiint_R x\, dV = 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r^2} (r\cos\theta) r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^4 \cos\theta\, dr\, d\theta = \frac{64}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta\, d\theta = 2\pi$$

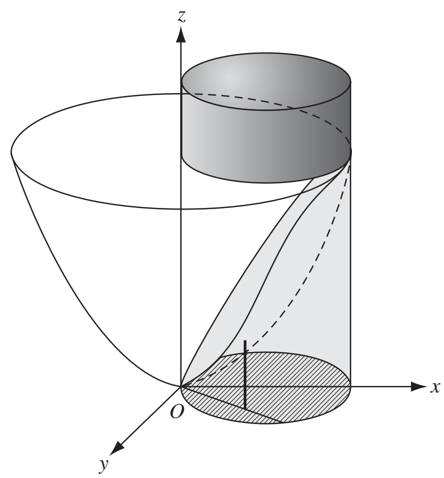


Fig. 57.8

Entonces, $\bar{x} = M_{yz}/V = \frac{4}{3}$. Por simetría, $\bar{y} = 0$. Además

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2} zr\;dz\;dr\;d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^5\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta = \frac{5}{3}\pi$$

y $\bar{z} = M_{xy}/V = \frac{10}{9}$. Así, el centroide tiene coordenadas $(\frac{4}{3}, 0, \frac{10}{9})$.

9. Para el cono circular recto de radio a y altura h, determine *a*) el centroide; *b*) el momento de inercia respecto a sus ejes; *c*) el momento de inercia respecto a cualquier recta que pase por su vértice y sea perpendicular a su eje; *d*) el momento de inercia respecto a cualquier recta que pase por su centroide y sea perpendicular a su eje, y *e*) el momento de inercia respecto a cualquier diámetro de su base.

Tome el cono como en la figura 57.9, de manera que su ecuación es $r = \dfrac{a}{h}z$. Entonces:

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_{hr/a}^h r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\left(hr - \frac{h}{a}r^2\right)dr\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}ha^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi ha^2 \qquad \text{unidades cúbicas}$$

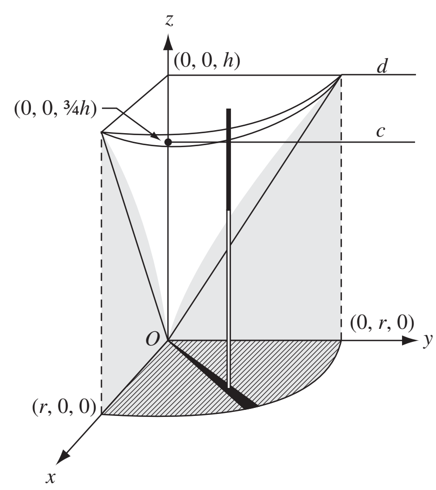


Fig. 57.9

a) El centroide está en el eje z, y se tiene que

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_{hr/a}^h zr\ dz\ dr\ d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^a\left(h^2 r - \frac{h^2}{a^2}r^3\right)dr\ d\theta = \frac{1}{2}h^2a^2\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2 a^2$$

Entonces, $\bar{z} = M_{xy}/V = \frac{3}{4}h$ y el centroide tiene coordenadas $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.

b) $I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_{hr/a}^h (r^2)r\ dz\ dr\ d\theta = \frac{1}{10}\pi h a^4 = \frac{3}{10}a^2V$

c) Tome la recta como el eje y. Luego,

$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_{hr/a}^h (r^2\cos^2\theta + z^2)r\ dz\ dr\ d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\left[\left(hr^3 - \frac{h}{a}r^4\right)\cos^2\theta + \frac{1}{3}\left(h^3 r - \frac{h^3}{a^3}r^4\right)\right]dr\ d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\pi h a^2\left(h^2 + \frac{1}{4}a^2\right) = \frac{3}{5}\left(h^2 + \frac{1}{4}a^2\right)V$$

d) Sea la recta c que pasa por el centroide paralela al eje y.

$$I_y = I_c + V(\tfrac{3}{4}h)^2 \quad \text{e} \quad I_c = \tfrac{3}{5}(h^2 + \tfrac{1}{4}a^2)V - \tfrac{9}{16}h^2V = \tfrac{3}{80}(h^2 + 4a^2)V$$

e) Sea d el diámetro de la base del cono paralelo al eje y. Entonces,

$$I_d = I_c + V(\tfrac{1}{4}h)^2 = \tfrac{3}{80}(h^2+4a^2)V + \tfrac{1}{16}h^2V = \tfrac{1}{20}(2h^2+3a^2)V$$

10. Halle el volumen cortado en el cono $\phi = \frac{1}{4}\pi$ por la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ (fig. 57.10).

$$V = 4\iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

$$= \frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\operatorname{sen}\phi\ d\phi\ d\theta = 2a^3\int_0^{\pi/2}d\theta = \pi a^3 \text{ unidades cúbicas}$$

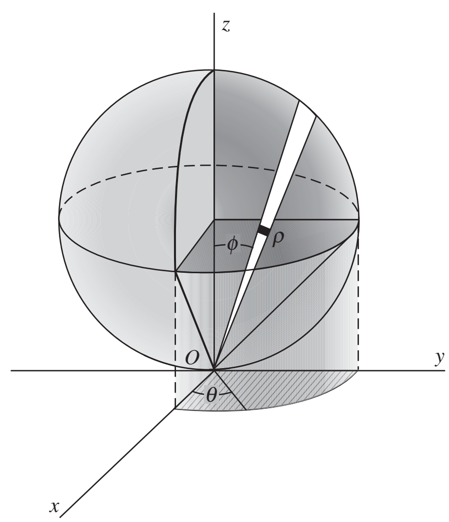


Fig. 57.10

11. Localice el centroide del volumen cortado en la hoja de un cono de ángulo en el vértice de 60° por una esfera de radio 2 cuyo centro está en el vértice del cono.

Se toma la superficie como en la figura 57.11, de manera que $x = y = 0$. En coordenadas esféricas, la ecuación del cono es $\phi = \pi/6$ y la ecuación de la esfera es $\rho = 2$. Entonces,

$$V = \iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 (\rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2\varphi \, d\varphi \, d\theta = \pi$$

y $\bar{z} = M_{xy}/V = \frac{3}{8}(2 + \sqrt{3})$.

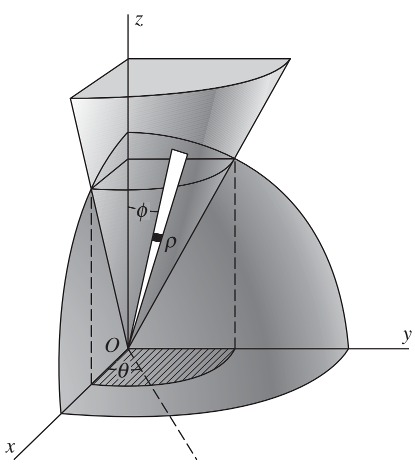


Fig. 57.11

12. Determine el momento de inercia respecto al eje z del volumen del problema 11.

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 (\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{5}(16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5}V$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

13. Describa la curva determinada por cada uno de los pares de ecuaciones siguientes dados en coordenadas cilíndricas: *a*) $r = 1$, $z = 2$; *b*) $r = 2$, $z = \theta$; *c*) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2}$; *d*) $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = r$.

Respuesta: *a*) círculo de radio 1 en el plano $z = 2$ con centro de coordenadas rectangulares (0, 0, 2); *b*) hélice en el cilindro circular recto $r = 2$; *c*) recta vertical que pasa por el punto de coordenadas rectangulares (1, 1, 0); *d*) recta que pasa por el origen en el plano $\theta = \frac{\pi}{4}$, formando un ángulo de 45° con plano *xy*.

14. Describa la curva determinada por cada uno de los pares de ecuaciones siguientes, dados en coordenadas esféricas.

a) $\rho = 1$, $\theta = \pi$; *b*) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\phi = \pi/6$; *c*) $\rho = 2, \phi = \dfrac{\pi}{4}$.

Respuesta: *a*) círculo de radio 1 en el plano xz con centro en el origen; *b*) semirrecta en la intersección del plano $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y cono $\phi = \pi/6$; *c*) círculo de radio $\sqrt{2}$ en el plano $z = \sqrt{2}$ con el centro en el eje z.

15. Transforme cada una de las ecuaciones siguientes, sean coordenadas rectangulares, cilíndricas o esféricas, en ecuaciones equivalentes en los otros dos sistemas de coordenadas: *a*) $\rho = 5$; *b*) $z^2 = r^2$; *c*) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Respuestas: *a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $r^2 + z^2 = 25$; *b*) $z^2 = x^2 + y^2$, $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}$ (es decir, $\phi = \pi/4$ o $\phi = 3\pi/4$); *c*) $r^2 + z^2 = 2z$, $\rho = 2 \cos \phi$

16. Calcule la integral triple de la izquierda en cada uno de los casos siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 dz\, dx\, dy = 1$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{xy} dz\, dy\, dx = \frac{1}{24}$

c) $\displaystyle\int_0^6 \int_0^{12-2y} \int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dx\, dy = 144 \quad \left[= \int_0^{12} \int_0^{6-x/2} \int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dy\, dx \right]$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16 - r^2)^{1/2} rz\, dr\, d\theta = \frac{256}{5}\pi$

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^5 \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2500\pi$

17. Evalúe la integral del problema 16*b*) después de cambiar el orden $dz\, dx\, dy$.

18. Evalúe la integral del problema 16*c*), cambiando el orden $dx\, dy\, dz$ a $dy\, dz\, dx$.

19. Encuentre los volúmenes siguientes utilizando integrales en coordenadas rectangulares:

a) En el interior de $x^2 + y^2 = 9$, por encima por $z = 0$ y por debajo por $x + z = 4$ — *Respuesta:* 36π unidades cúbicas

b) Acotada por los planos de coordenadas y $6x + 4y + 3z = 12$ — *Respuesta:* 4 unidades cúbicas

c) En el interior de $x^2 + y^2 = 4x$, por encima por $z = 0$ y por debajo por $x^2 + y^2 = 4z$ — *Respuesta:* 6π unidades cúbicas

20. Encuentre los volúmenes siguientes utilizando integrales triples en coordenadas cilíndricas:

a) El volumen del problema 4.

b) El volumen del problema 19*c*).

c) El volumen dentro de $r^2 = 16$, por encima por $z = 0$ y por debajo por $2z = y$ — *Respuesta:* *c*) 64/3 unidades cúbicas

21. Encuentre el centroide de cada uno de los volúmenes siguientes:

a) Bajo $z^2 = xy$ y encima del triángulo $y = x$, $y = 0$, $x = 4$ en el plano $z = 0$ — *Respuesta:* $(3, \frac{9}{5}, \frac{9}{8})$

b) El problema 19*b*) *Respuesta:* $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1)$

c) El volumen del primer octante del problema 19*a*) *Respuesta:* $\left(\frac{64-9\pi}{16(\pi-1)}, \frac{23}{8(\pi-1)}, \frac{73\pi-128}{32(\pi-1)}\right)$

d) El problema 19*c*) *Respuesta:* $(\frac{8}{3}, 0, \frac{10}{9})$

e) El problema 20*c*) *Respuesta:* $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

22. Determine los momentos de inercia I_x, I_y, I_z de los volúmenes siguientes:

a) El del problema 4 *Respuesta:* $I_x = I_y = \frac{32}{3}V$; $I_z = \frac{16}{3}V$

b) El del problema 19*b*) *Respuesta:* $I_x = \frac{5}{2}V$; $I_y = 2V$; $I_z = \frac{13}{10}V$

c) El del problema 19*c*) *Respuesta:* $I_x = \frac{55}{18}V$; $I_y = \frac{175}{18}V$; $I_z = \frac{80}{9}V$

d) El cortado de $z = r^2$ por el plano $z = 2$ *Respuesta:* $I_x = I_y = \frac{7}{3}V$; $I_z = \frac{2}{3}V$

23. Demuestre que, en coordenadas cilíndricas, la integral triple de una función $f(r, \theta, z)$ sobre una región R puede representarse por

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

[*Sugerencia:* considere, en la figura 57.12, una subregión representativa de R acotada por dos cilindros que tienen el eje z como su eje y de radios r y $r + \Delta r$, respectivamente, cortada por dos planos horizontales que pasan por $(0, 0, z)$ y $(0, 0, z + \Delta z)$, respectivamente, y por dos planos verticales que pasan por el eje z formando ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$, correspondientemente, con el plano xz. Tome $\Delta V = (r\,\Delta\theta)\,\Delta r\,\Delta z$ como una aproximación de su volumen.]

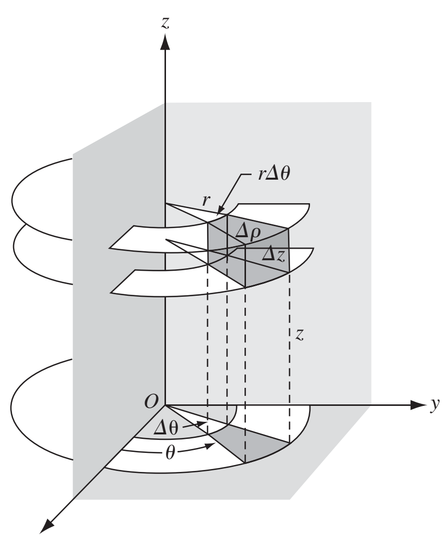


Fig. 57.12

24. Demuestre que, en coordenadas esféricas, la integral triple de una función $f(\rho, \phi, \theta)$ sobre una región R puede representarse por

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)}\int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

[*Sugerencia:* considere, en la figura 57.13, una subregión representativa de R acotada por dos esferas con centro en O, de radios ρ y $\rho + \Delta\rho$, respectivamente, y por dos conos que tienen O como vértice, el eje z como su eje, y los ángulos semiverticales ϕ y $\phi + \Delta\phi$, respectivamente, y por dos planos verticales que pasan por el eje z formando los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$, respectivamente, con el plano yz. Tome $\Delta V = (\rho\Delta\phi)(\rho \operatorname{sen} \phi\, \Delta\theta)(\Delta\rho) = \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$ como una aproximación de su volumen.]

25. Cambie los siguientes puntos de coordenadas rectangulares a cilíndricas; *a*) (1, 0, 0,); *b*) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$; *c*) $(-\sqrt{3}, 1, 5)$

Respuestas: *a*) (1, 0, 0); *b*) $\left(2, \frac{\pi}{4}, 1\right)$; *c*) $\left(2, \frac{5\pi}{6}, 5\right)$

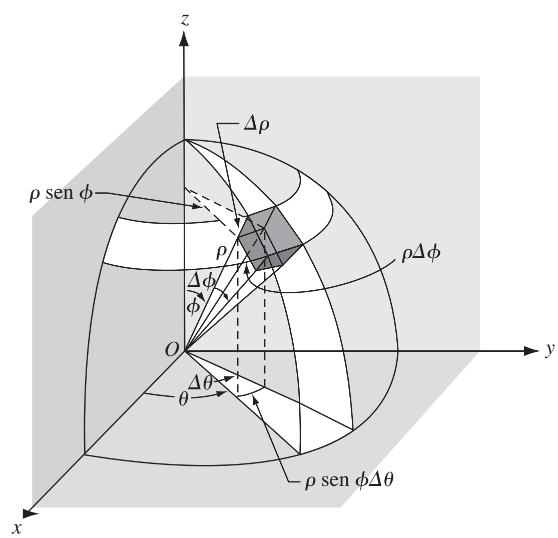


Fig. 57.13

26. Cambie los siguientes puntos de coordenadas cilíndricas a rectangulares: *a*) $\left(5, \frac{\pi}{3}, 1\right)$; *b*) $\left(2, -\frac{\pi}{6}, 0\right)$; *c*) (0, 7, 1)

Respuestas: *a*) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 1\right)$; *b*) $(\sqrt{3}, -1, 0)$; *c*) (0, 0, 1)

27. Cambie los siguientes puntos de coordenadas rectangulares a esféricas: *a*) (1, 0, 0); *b*) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$; *c*) $(1, -1, -\sqrt{2})$

Respuestas: *a*) $\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$; *b*) $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; *c*) $\left(2, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

28. Cambie los siguientes puntos de coordenadas esféricas a rectangulares: *a*) (1, 0, 0); *b*) $(2, 0, \pi)$; *c*) $\left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$

Respuestas: *a*) (0, 0, 1); *b*) (0, 0, -2); *c*) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$

29. Describa las superficies determinadas por las ecuaciones siguientes:

a) $z = r^2$; *b*) $r = 4 \cos \theta$; *c*) $\rho \cos \phi = 4$; *d*) $\rho \operatorname{sen} \phi = 4$; *e*) $\phi = \frac{\pi}{2}$; *f*) $\theta = \frac{\pi}{4}$; *g*) $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi$

Respuestas: *a*) paraboloide circular; *b*) cilindro circular recto $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; *c*) plano $z = 4$; *d*) cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 16$; *e*) el plano xy; *f*) el cono circular recto con el eje z como su eje; *g*) cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$

58

Masas de densidad variable

Las masas homogéneas pueden tratarse como figuras geométricas con densidad $\delta = 1$. La masa de un cuerpo homogéneo de volumen V y densidad δ es $m = \delta V$.

Para una masa no homogénea cuya densidad δ varía continuamente, un elemento de masa dm está dado por:

1. $\delta(x, y)\, ds$ para una curva material plana (por ejemplo, un trozo de alambre fino).
2. $\delta(x, y)\, dA$ para una placa material bidimensional (por citar un caso, una lámina delgada de metal).
3. $\delta(x, y)\, dV$ para un cuerpo material.

El centro de la masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una placa plana distribuida sobre una región R con densidad $\delta(x, y)$ está determinado por las ecuaciones

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad m\bar{y} = M_x, \quad \text{donde} \quad M_y = \iint_R \delta(x, y)x\, dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R \delta(x, y)y\, dA$$

Un resultado análogo se cumple para el centro de masa del cuerpo tridimensional. El razonamiento es semejante al de los centroides expuesto en el capítulo 55.

Los momentos de inercia de una masa plana respecto al eje x y al eje y son $I_x = \iint_R \delta(x, y)y^2\, dA$ y $I_y = \iint_R \delta(x, y)x^2\, dA$. Las fórmulas semejantes con integrales triples se cumplen para cuerpos tridimensionales (por ejemplo, $I_x = \iiint_R \delta(x, y, z)(y^2 + z^2)\, dA$.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre la masa de un alambre semicircular cuya densidad varía como la distancia al diámetro que une los extremos.

Tome el alambre como en la figura 58.1, de manera que $\delta(x, y) = ky$. Entonces, a partir de $x^2 + y^2 = r^2$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{r}{y}\, dx$$

y
$$m = \int \delta(x, y)\, ds = \int_{-r}^{r} ky \frac{r}{y}\, dx = kr\int_{-r}^{r} dx = 2kr^2 \text{ unidades}$$

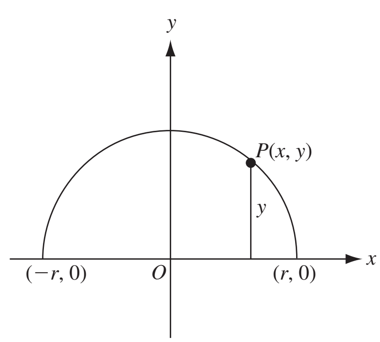


Fig. 58.1

2. Encuentre la masa de una placa cuadrada de lado a si la densidad varía como el cuadrado de la distancia a un vértice.

Tome el cuadrado como en la figura 58.2, y sea el origen el vértice desde donde se miden las distancias. Entonces $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ y

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2)\, dx\, dy = k\int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2)\, dy = \tfrac{2}{3}ka^4 \text{ unidades}$$

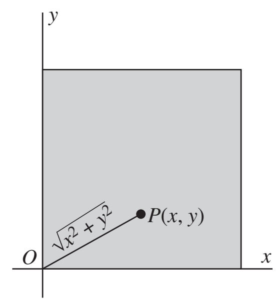


Fig. 58.2

3. Determine la masa de una placa circular de radio r si la densidad varía como el cuadrado de la distancia a un punto en la circunferencia.

Tome el círculo como en la figura 58.3 y sea $A(r, 0)$ el punto fijo en la circunferencia. Entonces, $\delta(x, y) = k[(x - r)^2 + y^2]$ y

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = 2\int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k[(x - r)^2 + y^2]\, dy\, dx = \tfrac{3}{2}k\pi r^4 \text{ unidades}$$

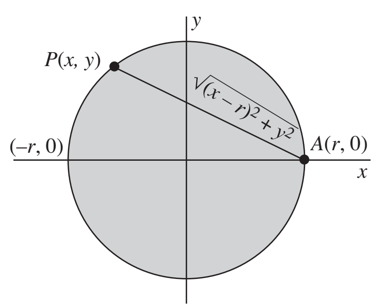


Fig. 58.3

4. Encuentre el centro de masa de una placa cuya forma es similar a los segmentos cortados de la parábola $y^2 = 8x$ por su lado recto $x = 2$, si la densidad varía como la distancia al lado recto (fig. 58.4).

Aquí, $\delta(x, y) = 2 - x$ y, por simetría, $\bar{y} = 0$. Para la mitad superior de la placa,

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{2} k(2 - x)\, dx\, dy = k\int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128}\right) dy = \frac{64}{15}k$$

$$M_y = \iint_R \delta(x, y)x\, dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{2} k(2 - x)x\, dx\, dy = k\int_0^4 \left[\frac{4}{3} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^6}{(24)(64)}\right] dy = \frac{128}{35}k$$

$\bar{x} = M_y / m = \frac{6}{7}$. El centro de la masa tiene coordenadas $(\frac{6}{7}, 0)$.

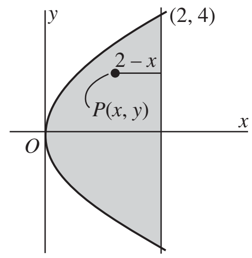


Fig. 58.4

5. Encuentre el centro de masa de una placa en forma de la mitad superior de la cardioide $r = 2(1 + \cos\,\theta)$ si la densidad varía como la distancia al polo (fig. 58.5).

$$m = \iint_R \delta(r,\theta)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} (kr)r\,dr\,d\theta = \tfrac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \tfrac{20}{3}k\pi$$

$$M_x = \iint_R \delta(r,\theta)y\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} (kr)(r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \tfrac{128}{5}k$$

$$M_y = \iint_R \delta(r,\theta)x\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} (kr)(r\cos\theta)r\,dr\,d\theta = 14k\pi$$

Entonces $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{21}{10}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{96}{25\pi}$, y el centro de masa tiene coordenadas $\left(\dfrac{21}{10}, \dfrac{96}{25\pi}\right)$.

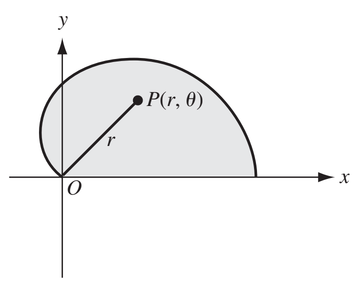


Fig. 58.5

6. Halle el momento de inercia respecto al eje x de la placa cuyos bordes son un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, si su densidad varía con la distancia al eje x.

$$m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}x} ky\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{4}k\pi$$

$$I_x = \iint_R \delta(x,y)y^2\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}x} (ky)(y^2)\,dy\,dx = \tfrac{1}{4}k\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{3}{32}k\pi = \tfrac{3}{8}m$$

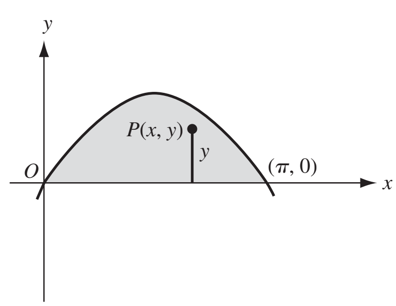


Fig. 58.6

7. Encuentre la masa de una esfera de radio a si la densidad varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro.

Tome la esfera como en la figura 58.7. Luego, $\delta(x, y, z) = \dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{k}{\rho^2}$ y

$$m = \iiint_R \delta(x, y, z)\, dV = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{k}{\rho^2}\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$
$$= 8ka\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi d\theta = 8ka\int_0^{\pi/2} d\theta = 4k\pi a \text{ unidades}$$

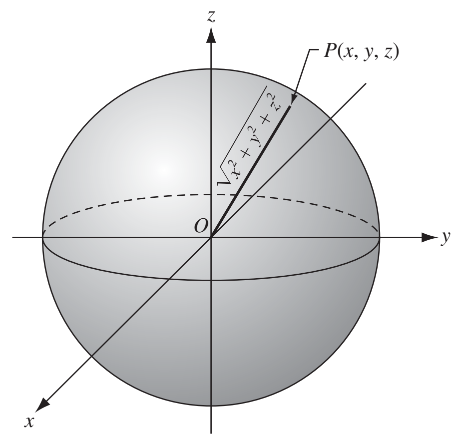


Fig. 58.7

8. Encuentre el centro de masa de un cilindro circular recto de radio a y altura h si la densidad varía como la distancia a la base.

Tome el cilindro como en la figura 58.8, de manera que su ecuación sea $r = a$ y el volumen que se analiza sea la parte del cilindro que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $z = h$. Es claro que el centro de masa queda en el eje z. Entonces,

$$m = \iiint_R \delta(z, r, \theta)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a (kz)r\, dr\, d\theta = 2kh^2\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\, dr\, d\theta$$
$$= kh^2a^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \tfrac{1}{2}k\pi h^2a^2$$
$$M_{xy} = \iiint_R \delta(z, r, \theta)z\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^a\int_0^h (kz^2)r\, dz\, dr\, d\theta = \tfrac{4}{3}kh^3\int_0^{\pi/2}\int_0^a r\, dr\, d\theta$$
$$= \tfrac{2}{3}kh^3a^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \tfrac{1}{3}k\pi h^3a^2$$

y $\overline{z} = M_{xy}/m = \frac{2}{3}h$. Por ende, el centro de masa tiene coordenadas $(0, 0, \frac{2}{3}h)$.

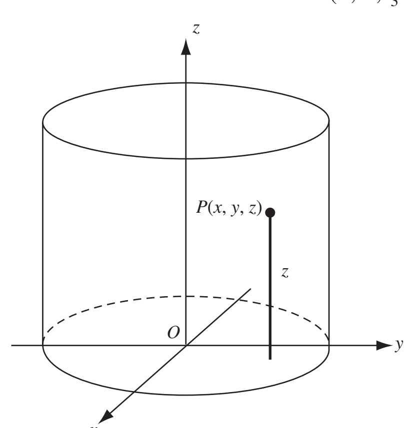


Fig. 58.8

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9. Determine la masa de

a) Una varilla recta de longitud a cuya densidad varía con el cuadrado de la distancia a un extremo.

Respuesta: $\frac{1}{3}ka^3$ unidades

b) Una placa en forma de triángulo rectángulo con catetos a y b, si la densidad varía como la suma de las distancias a los catetos.

Respuesta: $\frac{1}{6}kab\ (a+b)$ unidades

c) Una placa circular de radio a cuya densidad varía como la distancia al centro.

Respuesta: $\frac{2}{3}ka^3\pi$ unidades

d) Una placa en forma de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, si la densidad varía como la suma de las distancias a sus ejes.

Respuesta: $\frac{4}{3}kab(a+b)$ unidades

e) Un cilindro circular de altura b y radio de base a, si la densidad varía con el cuadro de la distancia a su eje.

Respuesta: $\frac{1}{2}ka^4b\pi$ unidades

f) Una esfera de radio a cuya densidad varía como la distancia a un plano diametral fijo.

Respuesta: $\frac{1}{2}ka^4\pi$ unidades

g) Un cono circular de altura b y radio de base a cuya densidad varía como la distancia a su eje.

Respuesta: $\frac{1}{6}ka^3b\pi$ unidades

h) Una superficie esférica cuya densidad varía como la distancia a un plano diametral fijo.

Respuesta: $2ka^3\pi$ unidades

10. Encuentre el centro de masa de:

a) Un cuadrante de la placa del problema 9*c)*.

Respuesta: $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$

b) Un cuadrante de la placa circular de radio a, si la densidad varía como la distancia a un radio de límite (el eje x).

Respuesta: $(3a/8, 3a\pi/16)$

c) Un cubo de arista a, si la densidad varía como la suma de las distancias a las tres aristas adyacentes (sobre los ejes de coordenadas).

Respuesta: $(5a/9, 5a/9, 5a/9)$

d) Un octante de una esfera de radio a, si la densidad varía como la distancia a una de las caras planas.

Respuesta: $(16a/15\pi, 16a/15\pi, 8a/15)$

e) Un cono circular recto de altura b y radio de base a, si la densidad varía como la distancia a su base.

Respuesta: $(0, 0, 2b/5)$

11. Encuentre el momento de inercia de:

a) Una placa cuadrada de lado a respecto a un lado, si la densidad varía como el cuadrado de la distancia a un extremo de ese lado.

Respuesta: $\frac{7}{15}a^2m$

b) Una placa en forma de círculo de radio a respecto a su centro, si la densidad varía como el cuadrado de la distancia al centro.

Respuesta: $\frac{2}{3}a^2m$

c) Un cubo de arista a respecto a una de las aristas, si la densidad varía como el cuadrado de la distancia de un extremo a dicha arista.

Respuesta: $\frac{38}{45}a^2m$

d) Un cono circular recto de altura b y radio de base a respecto a su eje, si la densidad varía como la distancia al eje.

Respuesta: $\frac{2}{5}a^2m$

e) El cono del inciso d, si la densidad varía como la distancia a la base.

Respuesta: $\frac{1}{5}a^2m$

59

Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden

Una ecuación diferencial es una ecuación que supone una función, por ejemplo, y, de una variable, digamos x, y derivadas de y o diferenciales de x y y. Algunos ejemplos son $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+3y-7\operatorname{sen}x+4x=0$ y $dy=(x+2y)\,dx$. La primera ecuación también puede escribirse como $y''+2y'+3y-7\operatorname{sen}x+4x=0$.

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación. La primera de las ecuaciones anteriores es de orden dos, y la segunda es de orden uno.

Una *solución* a una ecuación diferencial es una función y que satisface la ecuación. Una *solución general* de una ecuación es una fórmula que describe todas las soluciones de la ecuación. Una solución general de una ecuación diferencial de orden n contendrá n constantes arbitrarias.

Ecuaciones diferenciales separables

Una ecuación diferencial separable es una ecuación de primer orden que puede representarse en la forma

$$f(x)dx+g(y)dy=0,\qquad \text{lo que equivale a}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f(x)}{g(y)}$$

Una ecuación separable puede resolverse extrayendo las antiderivadas

$$\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy=C$$

El resultado es una ecuación que implica a x y a y que determina a y como una función de x (véase los problemas 4 a 6, y una justificación en el problema 61).

Funciones homogéneas

Una función $f(x, y)$ es *homogénea de grado n* si $f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^n f(x, y)$. La ecuación $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ es *homogénea* si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado. Es fácil comprobar que la sustitución

$$y=vx,\qquad dy=v\,dx+x\,dv$$

transformará una ecuación homogénea en una ecuación separable en las variables x y v.

Factores de integración

Ciertas ecuaciones diferenciales pueden resolverse después de multiplicar por una función apropiada de x y y que producen una combinación integrable de términos. Tal función se denomina *factor de integración* respecto a las ecuaciones. Al buscar combinaciones integrables se observa que:

(i) $d(xy)=x\,dy+y\,dx$

(ii) $d(y/x)=\dfrac{xdy-ydx}{x^2}$

(iii) $d(\ln xy)=\dfrac{xdy+ydx}{xy}$

(iv) $d\left(\dfrac{1}{k+1}u^{k+1}\right)=u^k\,du$

Además, $d(F) + d(G) + \ldots = 0$ resulta en $F + G + \ldots =$ constante (véase los problemas 10 a 14).

Las denominadas *ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*, $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, donde P y Q son funciones de x solamente, tienen la función $\xi(x) = e^{\int P\,dx}$ como factor de integración (véase los problemas 15 a 17).

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, donde $n \neq 0$, 1 y donde P y Q son funciones de x solamente, puede reducirse la forma lineal por la sustitución

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

(Véase los problemas 18 y 19).

Ecuaciones de segundo orden

Las ecuaciones de segundo orden que se resolverán en este capítulo son de los tipos siguientes:

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (véase el problema 23)

$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ (véase los problemas 24 y 25)

$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ (véase los problemas 26 y 27)

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$, donde P y Q son constantes y R es una constante o función de x solamente (véase los problemas 28 a 33).

Si la ecuación $m^2 + Pm + Q = 0$ tiene dos raíces m_1 y m_2, entonces $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$ es la solución general de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$. Si las dos son idénticas, de manera que $m_1 = m_2 = m$, entonces,

$$y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx} = e^{mx}(C_1 + C_2x)$$

es la solución general.

La solución general de $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ se denomina *función complementaria* de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R(x) \tag{59.1}$$

Si $f(x)$ satisface (59.1), entonces la solución general de (59.1) es

$$y = \text{función complementaria} + f(x)$$

La función $f(x)$ se llama *solución particular* de (59.1).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demuestre que *a*) $y = 2e^x$, *b*) $y = 3x$ y *c*) $y = C_1e^x + C_2x$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial $y''(1 - x) + y'x - y = 0$.

a) Derive $y = 2e^x$ dos veces para obtener $y' = 2e^x$ y $y'' = 2e^x$. Sustituya en la ecuación diferencial para obtener la identidad $2e^x(1 - x) + 2e^xx - 2e^x = 0$.

b) Derive $y = 3x$ dos veces para obtener $y' = 3$ y $y'' = 0$. Sustituya en la ecuación diferencial para obtener la identidad $0(1 - x) + 3x - 3x = 0$.

c) Derive $y = C_1e^x + C_2x$ dos veces para obtener $y' = C_1e^x + C_2$ y $y'' = C_1e^x$. Sustituya en la ecuación diferencial para obtener la identidad $C_1e^x(1 - x) + (C_1e^x + C_2)x - (C_1e^x + C_2x) = 0$.

La solución de *c*) es la *solución general* de la ecuación diferencial porque satisface la ecuación y contiene el número apropiado de constantes arbitrarias esenciales. Las soluciones de *a*) y *b*) se denominan *soluciones* *particulares*, ya que cada una puede obtenerse asignando valores particulares a las constantes arbitrarias de la solución general.

2. De la ecuación diferencial cuya solución general es:

a) $y = Cx^2 - x$; *b*) $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$.

a) Derive $y = Cx^2 - x$ una vez para obtener $y' = 2Cx - 1$. Resuelva para $y = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)$ y sustituya en la relación dada (solución general) para obtener $y = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)x^2 - x$ o $y'x = 2y + x$.

b) Derive $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$ tres veces para obtener $y' = 3C_1x^2 + C_2$, $y'' = 6C_1x$, $y''' = 6C_1$. Entonces, $y'' = xy'''$ es la ecuación requerida. Observe que la relación dada es una solución de la ecuación $y^{(4)} = 0$ pero no constituye la solución general, ya que contiene sólo tres constantes arbitrarias.

3. Encuentre la ecuación diferencial de segundo orden de todas las parábolas con eje principal a lo largo del eje x.

El sistema de parábolas tiene la ecuación $y^2 = Ax + B$, donde A y B son constantes arbitrarias. Derive dos veces para obtener $2yy' = A$ y $2yy'' + 2(y')^2 = 0$. Esta última es la ecuación requerida.

4. Resuelva $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$

Aquí $xy^2(1 + x^2)dy + (1 + y^3)dx = 0$, o $\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$ con las variables separadas. Luego, la descomposición por fracciones parciales resulta en

$$\frac{y^2dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0,$$

y la integración da

$$\tfrac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = c$$

o

$$2\ln|1+y^3| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c$$

de donde

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \quad \text{y} \quad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C$$

5. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

Separe las variables $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$. La integración resulta en $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} C$, y entonces

$$y = \tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

6. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Las variables se separan fácilmente para obtener $\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Por tanto, $\sec^2 y\,dy = \operatorname{cosec}^2 x\,dx$ y la integración resulta en $\tan y = -\cot x + C$.

7. Resuelva $2xy\,dy = (x^2 - y^2)dx$.

La ecuación es homogénea de grado dos. La transformación $y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$ resulta en $(2x)(vx)(v\,dx + x\,dv) = (x^2 - v^2x)dx$ o $\frac{2v\,dv}{1-3v^2} = \frac{dx}{x}$. Entonces, la integración da

$$-\tfrac{1}{3}\ln|1-3v^2| = \ln|x| + \ln C$$

de donde $\ln|1 - 3v^2| + 3\ln|x| + \ln C' = 0$ o $C''|x^3(1 - 3c^2)| = 1$.

Ahora $\pm C'x^3(1 - 3v^2) = Cx^3(1 - 3v^2)$, y utilizando $v = y/x$ produce $C(x^3 - 3xy^2) = 1$.

8. Resuelva $x \operatorname{sen}\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) + \cos\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx) = 0$.

La ecuación es homogénea de grado dos. La transformación $y = vx$, $dy = v\,dx - x\,dv$ resulta en

$$x \operatorname{sen} v(vx\,dx + x^2\,dv + vx\,dx) + vx \cos v(x^2\,dv + vx\,dx - vx\,dx) = 0$$

o
$$\operatorname{sen} v(2v\,dx + x\,dv) + xv \cos v\,dv = 0$$

o
$$\frac{\operatorname{sen} v + v\cos v}{v \operatorname{sen} v}dv + 2\frac{dx}{x} = 0$$

Entonces, $\ln|v \operatorname{sen} v| + 2\ln|x| = \ln C'$, de manera que $x^2 v \operatorname{sen} v = C$ y $xy \operatorname{sen}\frac{y}{x} = C$.

9. Resuelva $(x^2 - 2y^2)dy + 2xy\,dx = 0$.

La ecuación es homogénea de grado dos y la transformación estándar resulta en

$$(1 - 2v^2)(v\,dx + x\,dv) + 2v\,dx = 0$$

o
$$\frac{1 - 2v^2}{v(3 - 2v^2)}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

o
$$\frac{dv}{3v} - \frac{4v\,dv}{3(3 - 2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

La integración resulta en $\frac{1}{3}\ln|v| + \frac{1}{3}\ln|3 - 2v^2| + \ln|x| = \ln c$, lo cual puede escribirse como $\ln|v| + \ln|3 - 2v^2| + 3\ln|x| = \ln C'$. Entonces, $x^3(3 - 2v^2) = C$ y $y(3x^2 - 2y^2) = C$.

10. Resuelva $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$.

Integre $x^2\,dx + (y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0$ término a término para obtener

$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = C$$

11. Resuelva $(x + e^{-x} \operatorname{sen} y)dx - (y + e^{-x} \cos y)dy = 0$.

Integre $x\,dx - y\,dy - (e^{-x} \cos y\,dy - e^{-x} \operatorname{sen} y\,dx) = 0$ término a término para obtener

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - e^{-x} \operatorname{sen} y = C$$

12. Resuelva $x\,dy - y\,dx = 2x^3\,dx$.

La combinación $x\,dy + y\,dx$ sugiere $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$. Por tanto, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = \frac{1}{x^2}$ se obtiene $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 2x\,dx$, de donde

$$\frac{y}{x} = x^2 + C \quad \text{o} \quad y = x^3 + Cx$$

13. Resuelva $x\,dy + y\,dx = 2x^2\,y\,dx$.

La combinación $x\,dy + y\,dx$ sugiere $d(\ln xy) = \frac{x\,dy + y\,dx}{xy}$. Por ende, al multiplicar la ecuación dada por $\xi(x, y) = \frac{1}{xy}$ se obtiene $\frac{x\,dy + y\,dx}{xy} = 2x\,dx$, de donde $\ln|xy| = x^2 + C$.

14. Resuelva $x\,dy + (3y - e^x)dx = 0$.

Multiplique la ecuación por $\xi(x) = x^2$ para obtener $x^3\,dy + 3x^2\,y\,dx = x^2e^x\,dx$. Esto produce

$$x^3y = \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

15. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = 6x^3$

Aquí, $P(x) = \dfrac{2}{x}$, $\int P(x) = \ln x^2$, y un factor de integración es $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2$. Multiplique por la ecuación $\xi(x) = x^2$ para obtener $x^2\,dy + 2xy\,dx = 6x^5\,dx$. Así, la integración resulta en $x^2y = x^6 + C$.

Nota 1: después de multiplicar por el factor de integración, los términos del miembro izquierdo de la ecuación resultante son una *combinación integrable*.

Nota 2: el factor de integración de una ecuación no es único. En este problema x^2, $3x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, etc., son todos los factores de integración. Por tanto, se escribe la integral particular más simple de $P(x)\,dx$ en lugar de la integral general, $\ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2$.

16. Resuelva $\tan x\dfrac{dy}{dx} + y = \sec x$.

Como $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \csc x$ se tiene que $\int P(x)dx = \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x|$ y $\xi(x) = e^{\ln|\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$. Entonces, al multiplicar por $\xi(x)$ resulta

$$\operatorname{sen} x\left(\frac{dy}{dx} + y\cot x\right) = \operatorname{sen} x \csc x \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x\,dy + y\cos x\,dx = dx$$

y la integración da

$$y\operatorname{sen} x = x + C$$

17. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$.

Aquí, $P(x) = -x$, $\int P(x)dx = -\frac{1}{2}x^2$ y $\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Esto resulta en

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2}dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

y la integración produce

$$ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C, \quad \text{o} \quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

18. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$.

La ecuación es de la forma $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, con $n = 2$. Aquí se utiliza la sustitución $y^{1-n} = y^{-1} = z$, $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}$. Por conveniencia, se escribe la ecuación original en la forma $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = x$, y se obtiene $-\dfrac{dz}{dx} + z = x$ o $\dfrac{dz}{dx} - z = -x$

El factor de integración es $\xi(x) = e^{\int P\,dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Ello resulta en $e^{-x}dx - ze^{-x}dx = xe^{-x}dx$, de donde $ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C$. Finalmente, como $z = y^{-1}$, se tiene que

$$\frac{1}{y} = x + 1 + Ce^x.$$

19. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = y^3\sec x$

Escriba la ecuación en la forma $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + y^{-2}\tan x = \sec x$. Luego, use la sustitución $y^{-2} = z$, $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ para obtener $\dfrac{dz}{dx} - 2z\tan x = -2\sec x$.

El factor de integración es $\xi(x) = e^{-2\int \tan x\, dx} = \cos^2 x$. Da $\cos^2 x\, dz - 2z \cos x \operatorname{sen} x\, dx = -2 \cos x\, dx$, de donde

$$z \cos^2 x = -2 \operatorname{sen} x + C \quad \text{o} \quad \frac{\cos^2 x}{y^2} = -2 \operatorname{sen} x + C$$

20. Cuando se dispara una bala en un banco de arena, se supone que su desaceleración es igual a la raíz cuadrada de su velocidad de entrada. ¿Cuánto tiempo viajará, si su velocidad de entrada al banco es de 144 pies/segundo?

Sea v la velocidad de la bala t segundos después de entrar en el banco. Entonces, la desaceleración es $-\frac{dv}{dt} = \sqrt{v}$, de modo que $\frac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ y $2\sqrt{v} = -t + C$.

Cuando $t = 0$, $v = 144$ y $C = 2\sqrt{144} = 24$. Por tanto, $2\sqrt{v} = -t + 24$ es la ley que rige el movimiento de la bala. Cuando $v = 0$, $t = 24$; la bala viajará durante 24 segundos antes de detenerse.

21. Un tanque recibe 100 galones de salmuera que contienen 200 libras de sal en solución. El agua que contiene 1 libra de sal por galón fluye al tanque a razón de 3 galones/minuto; la mezcla se mantiene uniforme por agitación, y sale a la misma razón. Determine la cantidad de sal al cabo de 90 minutos.

Sea q el número de libras de sal en el tanque al cabo de t minutos. Entonces, $\frac{dq}{dt}$ es la razón de cambio de la cantidad de sal en el instante t.

Cada minuto entran en el tanque tres libras de sal, y $0.03q$ libras salen. Así, $\frac{dq}{dt} = 3 - 0.03q$. Al reordenar se convierte en $\frac{dq}{3 - 0.03q} = dt$, y la integración da

$$\frac{\ln(0.03q - 3)}{0.03} = -t + C.$$

Cuando $t = 0$, $q = 200$ y $C = \frac{\ln 3}{0.03}$, de modo que $\ln(0.03q - 3) = -0.03t + \ln 3$. Entonces, $0.001q - 1 = e^{-0.03t}$ y $q = 100 + 100e^{-0.03t}$. Cuando $t = 90$, $q = 100 + 100e^{-2.7} \sim 106.72$ libras.

22. En ciertas condiciones, la caña de azúcar en agua se convierte en dextrosa a una razón proporcional a la cantidad que no está convertida en ese momento. Si, de 75 gramos en el instante $t = 0$, 8 gramos se convierten durante los primeros 30 minutos, determine qué cantidad será convertida en 1.5 horas.

Sea q la cantidad convertida en t minutos. Entonces, $\frac{dq}{dt} = k(75 - q)$, de donde $\frac{dq}{75 - q} = k\,dt$ y la integración resulta en $\ln(75 - q) = -kt + C$.

Cuando $t = 0$, $q = 0$ y $C = 75$, de manera que $\ln(75 - q) = -kt + \ln 75$.

Cuanto $t = 30$ y $q = 8$, se tiene que $30k = \ln 75 - \ln 67$; por tanto, $k = 0.0038$ y $q = 75(1 - e^{0.0038t})$.

Cuando $t = 90$, $q = 75(1 - e^{0.34}) \sim 21.6$ gramos.

23. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$.

Aquí, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x$. Por tanto, $\frac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x)dx = xe^x - e^x + \operatorname{sen} x + C_1$, y otra integración produce $y = xe^x - 2e^x - \cos x + C_1x + C_2$.

24. Resuelva $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = a$.

Sea $p = \frac{dy}{dx}$; entonces, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ y la ecuación dada se convierte en $x^2 \frac{dp}{dx} + xp = a$ o $x\,dp + p\,dx = \frac{a}{x}dx$. Entonces, la integración resulta en $xp = a \ln |x| + C_1$, o $x\frac{dy}{dx} = a \ln |x| + C_1$. Cuando esto se escribe como $dy = a \ln|x| \frac{dx}{x} + C_1 \frac{dx}{x}$, al integrar se obtiene $y = \frac{1}{2} a \ln^2 |x| + C_1 \ln|x| + C_2$.

25. Resuelva $xy'' + y' + x = 0$.

Sea $p = \frac{dy}{dx}$. Entonces, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ y la ecuación dada se convierte en $x\frac{dp}{dx} + p + x = 0$ o $x\,dp + p\,dx = -x\,dx$. La integración resulta en $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, y por sustitución de p se obtiene $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x}$, y otra integración da $y = \frac{1}{4}x^2 + C_2 \ln|x| + C_2$.

26. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$.

Como $\frac{d}{dx}[(y')^2] = 2y'y''$, puede multiplicar la ecuación dada por $2y'$ para obtener $2y'y'' = 4yy'$, y luego integre para obtener $(y')^2 = 4\int yy'dx = 4\int y\,dy = 2y^2 + C_1$.

Entonces, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$, de modo que $\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx$ y $\ln|\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}x + \ln C_2$. La última ecuación da $\sqrt{2}y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}$.

27. Resuelva $y'' = \frac{1}{y^3}$.

Multiplique por $2y'$ para obtener $2y'y'' = -\frac{2y'}{y^3}$. Entonces, la integración produce

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \quad \text{de modo que} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + C_1 y^2}}{y} \quad \text{o} \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx$$

Otra integración resulta en $\sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 x + C_2$ o $(C_1x + C_2)^2 - C_1y^2 = 1$.

28. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$.

Aquí se tiene que $m^2 + 3m - 4 = 0$, de donde $m = 1, -4$. La solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

29. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0$.

Aquí, $m^2 + 3m = 0$, de donde $m = 0, -3$. La solución general es $y = C_1 + C_2e^{-3x}$.

30. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$.

Aquí, $m^2 - 4m + 13 = 0$, con raíces $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$. La solución general es

$$y = C_1e^{(2+3i)x} + C_2e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix})$$

En virtud de que $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$, se tiene que $e^{3ix} = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$ y $e^{-3ix} = \cos 3x - i \operatorname{sen} 3x$. Por tanto, la solución puede plasmarse en la forma

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}[C_1(\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x) + C_2(\cos 3x - i \operatorname{sen} 3x)] \\ &= e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} 3x] \\ &= e^{2x}(A\cos 3x + \beta \operatorname{sen} 3x) \end{aligned}$$

31. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$.

Aquí, $m^2 - 4m + 4 = 0$, con raíces $m = 2, 2$. La solución general es $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

32. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$.

Del problema 6, la fracción complementaria es $y = C_1e^x + C_2xe^{2x}$.

Para hallar una solución en particular de la ecuación, observe que el miembro de la derecha es $R(x) = x^2$. Esto indica que la solución en particular contendrá un término en x^2 y quizá otros términos obtenidos mediante derivación sucesiva. Supóngase que será de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, donde se determinarán las constantes A, B, C. Por tanto, se sustituye $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, y $y'' = 2A$ en la ecuación diferencial para obtener

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \quad \text{o} \quad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

Como esta última ecuación es una identidad en x, se tiene que $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$ y $2A + 3B - 4C = 0$. Esto resulta en $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$ y $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ es una solución en particular. Así, la solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

33. Resuelva $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x$.

Aquí, $m^2 - 2m - 3 = 0$, de donde $m = -1, 3$; la función complementaria es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. El miembro de la derecha de la ecuación diferencial indica que una solución particular es de la forma $A \cos x + B \operatorname{sen} x$. Por tanto, se sustituye $y = A \cos x + B \operatorname{sen} x$, $y' = B \cos x - A \operatorname{sen} x$ y $y'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$ en la ecuación diferencial para obtener

$$(-A \cos x - B \operatorname{sen} x) - 2(B \cos x - A \operatorname{sen} x) - 3(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = \cos x$$

o

$$-2(2A + B) \cos x + 2(A - 2B)\operatorname{sen} x = \cos x$$

La última ecuación da $-2(2A + B) = 1$ y $A - 2B = 0$, de donde $A = -\frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{10}$. La solución general es $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} x$.

34. Una pesa suspendida de un resorte sube y baja de manera que la ecuación de movimientos es $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$, donde s es el estiramiento del resorte en el instante t. Si $s = 2$ y $\frac{ds}{dt} = 1$, cuando $t = 0$, encuentre s en términos de t.

Aquí $m^2 + 16 = 0$ resulta en $m = \pm 4i$, y la solución general es $s = A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$. Ahora, cuando $t = 0$, $s = 2 = A$, de forma que $s = 2 \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$.

Asimismo, cuando $t = 0$, $ds/dt = 1 = -8 \operatorname{sen} 4t + 4B \cos 4t = 4B$, y entonces $B = \frac{1}{4}$. Así, la ecuación requerida es $s = 2\cos 4t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t$.

35. La corriente eléctrica en cierto circuito está dada por $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110$. Si $I = 0$ y $\frac{dI}{dt} = 0$, cuando $t = 0$, halle I en términos de t.

Aquí, $m^2 + 4m + 2504 = 0$ da $m = -2 + 50i, -2 - 50i$; la función complementaria es $e^{-2t}(A \cos 50t + B \operatorname{sen} 50t)$. Como el miembro de la derecha es una constante, se encuentra que la solución particular es $I = 110/2504 = 0.044$. Así, la solución general es $I = e^{-2t}(A \cos 50t + B \operatorname{sen} 50t) + 0.044$.

Asimismo, cuando $t = 0$, $dI/dt = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B) \cos 50t - (2B + 50A) \operatorname{sen} 50t] = -2A + 50B$. Entonces, $B = -0.0018$, y la relación requerida es $I = -e^{2t}(0.044 \cos 50t + 0.0018 \operatorname{sen} 50t) + 0.044$.

36. Una cadena de 4 pies de largo comienza a deslizarse desde un techo plano cuando tiene 1 pie colgando desde el borde. Desprecie la fricción y determine *a*) la velocidad con la que se desliza y *b*) el tiempo necesario para hacerlo.

Sea s la longitud de la cadena que cuelga por el borde del techo en el instante t.

a) La fuerza F que hace que la cadena se deslice del techo es el peso de la parte que está colgando del borde. Ese peso es de miligramos/4. Por tanto,

$$F = \text{masa} \times \text{aceleración} = ms'' = \tfrac{1}{4}mgs \qquad \text{o} \qquad s'' = \tfrac{1}{4}\text{ gramos}$$

Multiplicando por $2s'$ se obtiene $2s's'' = \frac{1}{2}gss'$ e integrando una vez resulta $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$.

Cuando $t = 0$, $s = 1$ y $s' = 0$. Por tanto, $C_1 = -\frac{1}{4}g$ y $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\sqrt{s^2-1}$. Cuando $s = 4$, $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ pies/segundo.

b) Como $\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,dt$, la integración da $\ln\left|s+\sqrt{s^2-1}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{gt} + C_2$. Cuando $t = 0$, $s = 1$. Entonces, $C_2 = 0$ y $\ln(s+\sqrt{s^2-1}) = \frac{1}{2}\sqrt{gt}$.

Cuando s = 4, $t = \frac{2}{\sqrt{g}}\ln(4+\sqrt{15})$ segundos.

37. Un bote con masa de 1600 libras tiene una rapidez de 20 pies/s cuando su motor se detiene súbitamente (en $t = 0$). La resistencia del agua, proporcional a la rapidez del bote, es de 200 libras cuando $t = 0$. ¿Qué distancia habrá recorrido el bote cuando su rapidez se reduzca a 5 pies/s?

Sea s la distancia recorrida por el bote t segundos después de haberse detenido el motor. Luego, la fuerza F en el bote es

$$F = ms'' = -Ks' \text{ de donde } s'' = -ks'$$

Para determinar k, se observa que en $t = 0$, $s' = 20$ y $s'' = \frac{\text{fuerza}}{\text{masa}} = -\frac{200g}{1600} = -4$. Entonces, $k = -s''/s' = \frac{1}{5}$. Ahora $s'' = \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{5}$, una integración da $\ln v = -\frac{1}{5}t + C_1$ o $v = C_1e^{-t/5}$.

Cuando $t = 0$, $v = 20$. Entonces, $C_1 = 20$ y $v = \frac{ds}{dt} = 20e^{-t/5}$. Otra integración da $s = -100e^{-t/5} + C_2$.

Cuando $t = 0$, $s = 0$; entonces, $C_2 = 100$ y $s = 100(1 - e^{-t/5})$. Se necesita el valor de s cuando $v = 5 = 20e^{-t/5}$, es decir, cuando $e^{-t/5} = \frac{1}{4}$. Así, $s = 100(1-\frac{1}{4}) = 75$ pies.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

38. Escriba la ecuación diferencial cuya solución es:

a) $y = Cx^2 + 1$
b) $y = C^2x + C$
c) $y = Cx^2 + C^2$
d) $xy = x^3 - C$
e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$
f) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$
g) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$
h) $y = C_1e^x \cos(3x + C_2)$

Respuestas: *a*) $xy' = 2(y-1)$; *b*) $y' = (y - xy')^2$; *c*) $4x^2y = 2x^3y' + (y')^2$; *d*) $xy' + y = 3x^2$; *e*) $y''' = 0$; *f*) $y'' - 3y' + 2y = 0$; *g*) $y'' + y = 0$; *h*) $y'' - 2y' + 10y = 0$

39. Resuelva

a) $y\,dy - 4x\,dx = 0$ — *Respuesta:* $y^2 = 4x^2 + C$
b) $y^2\,dy - 3x^5\,dx = 0$ — *Respuesta:* $2y^3 = 3x^6 + C$
c) $x^3\,y' = y^2(x-4)$ — *Respuesta:* $x^2 - xy + 2y = Cx^2y$
d) $(x - 2y)dy + (y + 4x)dx = 0$ — *Respuesta:* $xy - y^2 + 2x^2 = C$
e) $(2y^2 + 1)y' = 3x^2y$ — *Respuesta:* $y^2 + \ln|y| = x^3 + C$
f) $xy'(2y - 1) = y(1 - x)$ — *Respuesta:* $\ln|xy| = x + 2y + C$
g) $(x^2 + y^2)dx = 2xy\,dy$ — *Respuesta:* $x^2 - y^2 = Cx$
h) $(x + y)dy = (x - y)dx$ — *Respuesta:* $x^2 - 2xy - y^2 = C$
i) $x\,(x + y)dy - y^2\,dx = 0$ — *Respuesta:* $y = Ce^{-y/x}$
j) $x\,dy - y\,dx + xe^{-y/x}\,dx = 0$ — *Respuesta:* $e^{y/x} + \ln|Cx| = 0$
k) $dy = (3y + e^{2x})dx$ — *Respuesta:* $y = (Ce^x - 1)e^{2x}$
l) $x^2\,y^2\,dy = (1 - xy^3)dx$ — *Respuesta:* $2x^3y^3 = 3x^2 + C$

40. La tangente y la normal a una curva en un punto $P(x, y)$ se encuentran en el eje x y T y N, respectivamente, y el eje y en S y M, correspondientemente. Determine la familia de curvas que satisfacen las condiciones:

a) $TP = PS$; *b*) $NM = MP$; *c*) $TP = OP$; *d*) $NP = OP$

Respuestas: *a*) $xy = C$; *b*) $2x^2 + y^2 = C$; *c*) $xy = C$, $y = Cx$; *d*) $x^2 \pm y^2 = C$

41. Resuelva el problema 21 suponiendo que el agua pura fluye en el tanque a una razón de 3 galones/minuto y la mezcla sale al mismo ritmo.

Respuesta: 13.44 libras

42. Resuelva el problema 41 suponiendo que la mezcla sale a una razón de 4 gal/min. (Sugerencia: $dq = -\frac{4q}{100-t}\,dt$).

Respuesta: 0.02 libras

En los problemas 43 a 59, resuelva la ecuación indicada.

43. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ *Respuesta:* $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$

44. $e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$ *Respuesta:* $y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$

45. $\frac{d^2y}{dx^2} = -9\text{sen}3x$ *Respuesta:* $y = \text{sen } 3x + C_1x + C_2$

46. $x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4x = 0$ *Respuesta:* $y = x^2 + C_1x^4 + C_2$

47. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$ *Respuesta:* $y = \frac{x^3}{3} + C_1e^x + C_2$

48. $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$ *Respuesta:* $y = x^4 + C_1x^2 + C_2$

49. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ *Respuesta:* $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

50. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ *Respuesta:* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

51. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ *Respuesta:* $y = C_1 + C_2e^x$

52. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ *Respuesta:* $y = C_2xe^x + C_2 \text{ sen } 3x$

53. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ *Respuesta:* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \text{ sen } 3x$

54. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Respuesta:* $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$

55. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Respuesta:* $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$

56. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ *Respuesta:* $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 2x + 5$

57. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$ *Respuesta:* $y = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x + \dfrac{e^{3x}}{13}$

58. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$ *Respuesta:* $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^{2x} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{2}{27}$

59. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$ *Respuesta:* $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \operatorname{sen} 2x$

60. Una partícula de masa m que se mueve en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad está sujeta a una fuerza de atracción proporcional al desplazamiento. Determine la ecuación del movimiento de la partícula si el instante $t = 0$, $s = 0$, y $s' = v_0$. (*Sugerencia*: aquí $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k_1 \dfrac{ds}{dt} - k_2 s$ o $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2b\dfrac{ds}{dt} + c^2 s = 0$, $b > 0$.)

Respuesta: Si $b^2 = c^2$, $s = v_0 t e^{-bt}$; si $b^2 < c^2$; $s = \dfrac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}} e^{-bt} \operatorname{sen} \sqrt{c^2 - b^2}\,t$ si $b^2 > c^2$,

$s = \dfrac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}} \left(e^{(-b+\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{(-b-\sqrt{b^2-c^2})t}\right)$

61. Justifique el método para resolver una ecuación diferencial separable $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f(x)}{g(y)}$ por integración, es decir, $\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$.

Respuesta: se derivan ambos lados $\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$ respecto a x, lo cual resulta en $f(x) + g(y)\dfrac{dy}{dx} = 0$. Por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f(x)}{g(y)}$ y la solución y satisface la ecuación dada.

Fórmulas trigonométricas

$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$

$\operatorname{sen}2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

$\cos2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

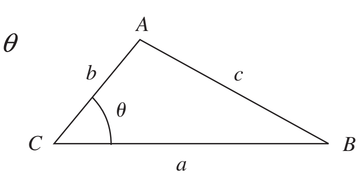
$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{sen}\theta;\ \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta;\ \operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta;\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta;\ \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$

Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

Ley de los senos: $\dfrac{\operatorname{sen}A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}C}{c}$



$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec}x = \frac{1}{\operatorname{sen}x}$$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\tan(x + \pi) = \tan x$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

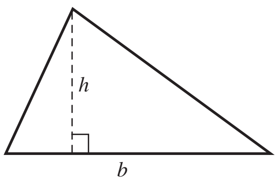
$$\tan(u-v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Apéndice B

Fórmulas geométricas

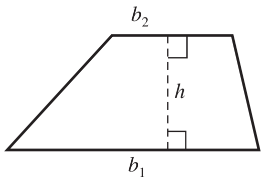
(A = área, C = circunferencia, V = volumen, S = área de la superficie lateral)

Triángulo



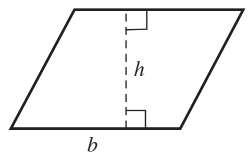
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Trapezoide



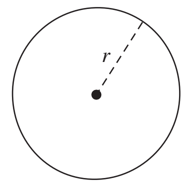
$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

Paralelogramo



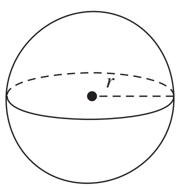
$$A = bh$$

Círculo



$$a = \pi r^2,\ C = 2\pi r$$

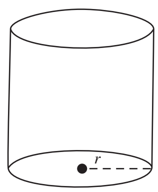
Esfera



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

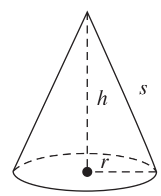
Cilindro



$$V = \pi r^2 h$$

$$S = 2\pi rh$$

Cono



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$S = \pi rs = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$