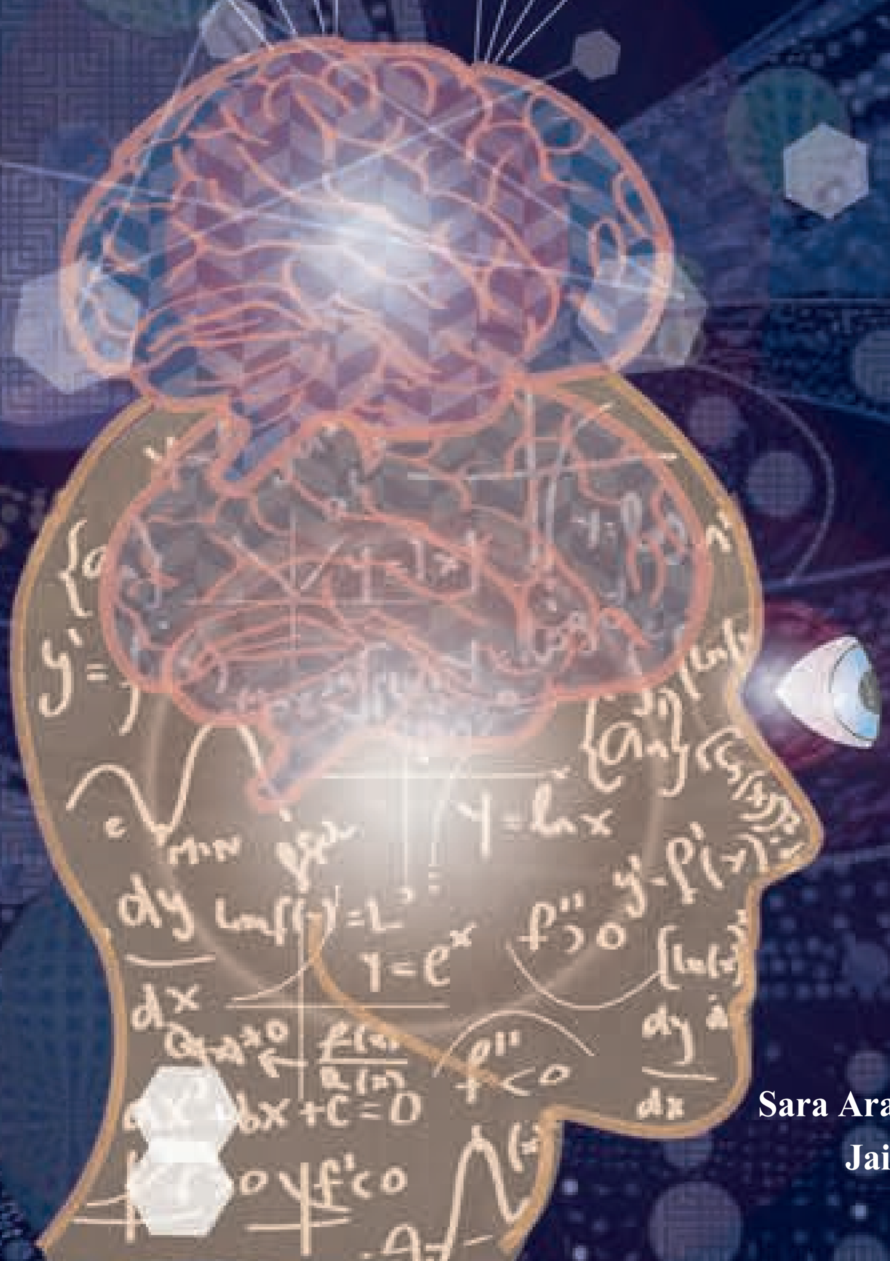
CENGAGE

Cálculo 1

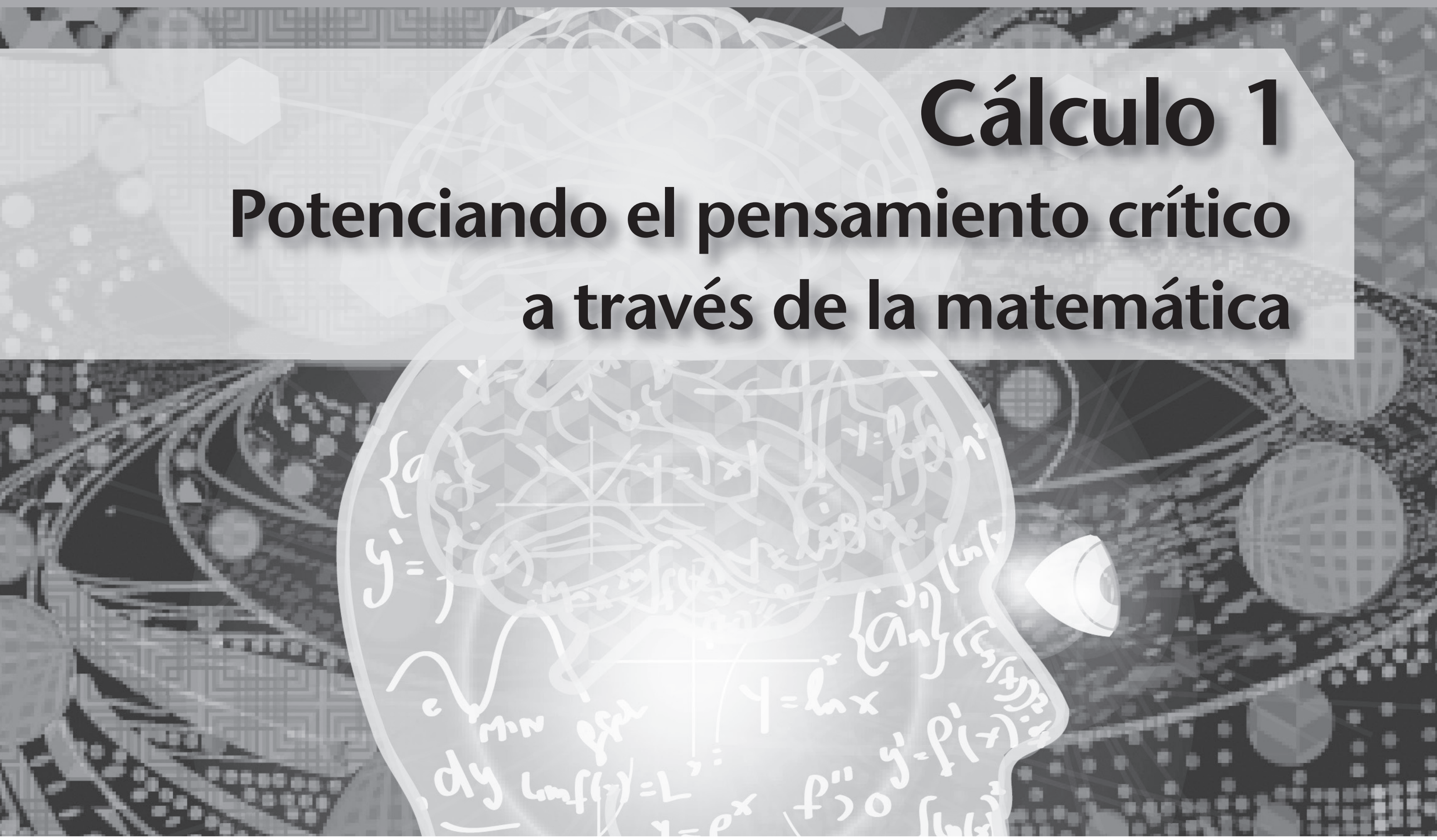
Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática



Sara Arancibia Carvajal

Jaime Mena Lorca

1E



Cálculo 1

Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática

Sara Arancibia Carvajal

Profesora Asociada del Instituto de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Diego Portales.

Académica Adjunta del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile.

Jaime Mena Lorca

Profesor Titular del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

CENGAGE

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Primera edición

Cálculo 1

Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática

Sara Arancibia Carvajal

Profesora y Magíster en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Magíster en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad de Chile, Chile.

Doctora en Ciencias Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, España.

Jaime Mena Lorca

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile.

PhD en Matemáticas de la Universidad de Iowa, USA.

Revisión técnica:

Dr. Ernesto Filio López

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas. Instituto Politécnico Nacional.

CENGAGE

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE

Cálculo 1. Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática. Primera edición
Sara Arancibia Carvajal
Jaime Mena Lorca

Director Higher Education Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente Editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:
Pablo Miguel Guerrero Rosas

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Sybill Schumacher Anex
Edgar Maldonado Hernández

Imagen de portada:
Sybill Schumacher Anex

Composición tipográfica:
Adrián Pando Ñancucheo
Karen Medina

Datos para catalogación bibliográfica:
Arancibia Carvajal, Sara; Mena Lorca, Jaime.
Cálculo 1. Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática, primera edición
ISBN: 978-607-526-705-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 21 20 19 18

CONTENIDO BREVE

Cálculo 1 Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática

CONTENIDO

PREFACIO

En la actualidad, se ha definido el pensamiento crítico como una de las habilidades cruciales del siglo 21. La educación enfrenta el desafío de desarrollar en los estudiantes la capacidad para analizar e interpretar la información existente, evaluar su veracidad, y los posibles sesgos externos que ella integra, para luego a partir de los datos tomar decisiones que permitan abordar los problemas complejos. De esta forma, los objetivos del aprendizaje ya no se limitan a la transmisión de información y contenidos, sino que se espera que los alumnos sean capaces de analizar, interpretar, inferir, elaborar nuevas preguntas y plantear soluciones innovadoras.

Bajo este contexto, en el año 1991, nace en su primera versión el libro de "INTRODUCCION AL CÁLCULO, Matemática para Ingeniería", el cual tenía por objetivo no solo la entrega a los estudiantes de un material de estudio que les permitiera comprender los elementos básicos del cálculo como un pilar base del conocimiento para las carreras de matemáticas o ingeniería, sino que buscaba la generación de un documento que les proporcionara además de las bases teóricas, una variedad de ejercicios resueltos que potenciaran el desarrollo del pensamiento crítico y lógico y les ayudaran a comprender cómo aplicar la teoría en la resolución de problemas y ejercicios. Ya en esos años se incluyeron ejercicios del tipo verdadero o falso, con la finalidad de desarrollar en el alumno la capacidad de análisis y de fundamentación.

A nivel nacional, el libro tuvo una amplia aceptación y un uso particularmente extendido en las carreras de Ingeniería y licenciaturas en Ciencias. En esta nueva versión titulada "CÁLCULO 1: POTENCIANDO EL PENSAMIENTO CRITICO A TRAVÉS DE LA MATEMÁTICA", se busca presentar a los estudiantes conocimientos de la asignatura de Cálculo, incorporando tanto la teoría como la práctica, con ejercicios inéditos que potencien en ellos el desarrollo del pensamiento crítico.

Para cumplir con este objetivo, el libro presenta una variedad de ejercicios de verdadero o falso, desafíos y problemas donde se reta a los alumnos a encontrar el error, entre otros elementos novedosos. Se incluyen soluciones diversas, que invitan a quienes lo lean a plantear diferentes formas de encontrar la solución, estimulando a los alumnos a ampliar sus esquemas de pensamiento, fuera de los límites de procedimientos mecánicos que son erróneamente asociados a la matemática, en el contexto de un pensamiento concreto y no crítico. En este sentido, es fundamental que los estudiantes aprendan a aplicar la teoría, comprender y darle significado a la notación abstracta, relacionándola con hechos o problemas reales.

El conocimiento del Cálculo y la adecuada compresión de sus aplicaciones son parte de las bases fundamentales de la carrera de Ingeniería, Ciencias y otras disciplinas que demandan pensamiento crítico, lo que considera entre otros, el desarrollo del pensamiento abstracto, analítico, y lógico, capacidades de amplio interés en todas las profesiones que requieren enfrentarse a la solución a problemas complejos y planteamientos innovadores.

CAMBIOS EN LA SEGUNDA VERSION

En esta nueva versión se incorporaron nuevos problemas del tipo "Verdadero o Falso" y ejercicios bajo una mirada gráfica. Además, se han introducido dos tipos de problemas novedosos, el Problema "Encuentre el error" y el Problema "Desafío".

Cada capítulo está enriquecido por una gran variedad de problemas resueltos, los que se van complementando con notas explicativas que previenen la ocurrencia de errores comunes. Al respecto, es conocido por los profesores que los estudiantes fallan en el desarrollo de los problemas, por equivocaciones de tipo conceptual, operacional, interpretativo o bien por el lenguaje matemático utilizado. Este libro presenta especial interés en resolver dudas y aclarar este tipo de situaciones. A través del análisis de ejercicios incorrectos, se espera que los estudiantes puedan identificar el error para contrastarlo con la solución entregada al final de cada capítulo.

Otro aspecto importante a señalar es que habitualmente los textos de matemática muestran los problemas y ejercicios de manera ideal, es decir, con los datos necesarios y suficientes para la solución y no agregan más elementos de tipo contextual, de modo que el estudiante cree que si le sobra un dato, entonces ha desarrollado mal el problema. En este texto los problemas están enriquecidos con datos situacionales, como una forma de acercar al estudiante a situaciones más reales, donde hay conjuntos de datos, entre los cuales los estudiantes deben decidir cuáles de ellos son irrelevantes y cuáles son imprescindibles para encontrar la solución.

Los problemas de tipo "Desafío" son variados y se caracterizan por ser novedosos en su estructura de desarrollo, o problemas aplicados a situaciones reales. Estos problemas que son un desafío intentan *"abrir la mente"* al estudiante, dando miradas de aplicación a otras ciencias y haciéndolos reflexionar de cómo la matemática, de manera transversal, puede resolver problemas complejos si se integran los conocimientos con los de otras disciplinas.

Al respecto, una frase célebre que inspira este libro es *"la mente es como un paracaídas, si no se abre no funciona" de Albert Einstein.* Si el lector ve en detalle la portada del libro, podrá apreciar los elementos que interpretan esta frase, dando miradas amplias que potencian el pensamiento crítico.

ESTRUCTURA DEL LIBRO

La versión actualizada que ahora se presenta considera los siguientes capítulos:

Los primeros dos capítulos incluyen los elementos de la matemática necesarios para desarrollar la base de la comprensión del cálculo. Se agregan ejercicios resueltos después de los contenidos teóricos que se van presentando en cada capítulo. El primer capítulo, contiene la presentación de los números reales, cuerpo de números fundamental sobre el que se construye el cálculo; luego se presenta un capítulo extenso de funciones, con un amplio desarrollo de sus propiedades y aplicaciones a problemas. El tercer capítulo, incluye el concepto de sucesión y límites de sucesiones. El cuarto, desarrolla la conceptualización de límites de funciones, continuidad, y finalmente el quinto despliega el concepto de derivada y sus aplicaciones.

Esperamos que este libro sea un aporte para los profesores y estudiantes que buscan teoría y ejercicios, que les brinde distintas miradas y potencie el pensamiento crítico, habilidad fundamental para resolver problemas y que apoya fuertemente la toma de decisiones.

RECONOCIMIENTOS

Nos gustaría realizar un reconocimiento a quienes inspiraron o apoyaron la elaboración de esta nueva versión del libro.

Se reconoce la gran labor de revisar este libro, colaborar con problemas y dar sugerencias de mejora para que el texto sea más comprensible, a los académicos del Instituto de Ciencias Básicas (ICB) de la Facultad de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Diego Portales:
Isabel Arratia Zárate, Magíster en Matemáticas de la USACH y Magíster en Planificación Educacional de la UDP, Chile.
Sandy Schumacher Domínguez, Magíster en Matemáticas de la Universidad de Chile.
Matthieu Maréchal Imbert, Doctor en Matemática Aplicada de la Universidad de Derpignar, Francia.

Nuestro especial reconocimiento a tres grandes maestros de las áreas de Matemática, Física y Estadística del ICB, quienes colaboraron con problemas de sus respectivas áreas con aplicaciones en contexto real.
Rubén Preiss Tuchschneider, Magíster en Ciencias Exactas y egresado del Programa de Doctorado por la Pontificia Universidad Católica de Chile.
Julio Pozo Pérez, Doctor en Física, de la Universidad de Chile.
Hugo Robotham Vargas, Magíster en Estadística Matemática, CIENES, Chile.

Se agradece todo el apoyo y sugerencias de los profesores del ICB y miembros de la comunidad de aprendizaje Epsilon Delta, comunidad que tiene por objetivo “Fomentar el interés de los académicos por compartir, reflexionar e investigar respecto a los factores que inciden en mejores rendimientos, mejores prácticas docentes y metodologías innovadoras que permitan contribuir a la calidad de la educación en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática”. En especial nuestro reconocimiento por su gran apoyo y motivación a: Gabriela López, Ignacio Saavedra, Gladys Matus, Gloria Bravo, Julio López, Tomás Neira, Mauricio Gutiérrez, Fernando Zúñiga y Emilio Martí.

Nuestro reconocimiento a los profesores de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV) quienes han utilizado la primera versión del libro por más de dos décadas en las distintas universidades de la región de Valparaíso, iniciándose con el uso de los primeros fascículos que fueron la base para la primera edición del libro. Se agradece sus sugerencias de mejora y su constante apoyo. En especial al profesor Daniel Jiménez, quien escribió la primera versión del libro en el año 1991.

Un especial reconocimiento al ayudante, Adrián Pando por escribir el libro en programa Látex, crear los gráficos en Geogebra y colaborar en varios problemas, además de su apoyo constante y gran compromiso por llevar adelante este proyecto.

Se agradece la colaboración, apoyo e inspiración en la creación y resolución de problemas a los ayudantes; Ignacio Ponce, Andrés Ojeda, José Klenner, Manuel Faúndez, Boris Solar, Camilo Carrasco, Catalina Urbina, Cristian Rojas, Paula Villar, Gastón Sepúlveda, Gonzalo Moya y Humberto Perera.

Nuestro reconocimiento a Sybill Schumacher por la creación del diseño de la portada, quien logró capturar el concepto de abrir la mente. Se agradece además todo el apoyo, colaboración y motivación a Viviana Vergara y Eduardo Contreras.

Agradecemos a las instituciones universitarias: Universidad Diego Portales, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y Universidad de Chile, que nos han apoyado en nuestra labor académica.

Por último agradecemos infinitamente a nuestras familias, amigos, y personas que siempre están presentes brindando una palabra de motivación o apoyo.

Finalmente, nuestro agradecimiento a todo el equipo de la Editorial Cengage Learning, por su constante apoyo para lograr este proyecto, en especial a Janett Rojas, Jesús Mares, Pablo Guerrero, Jaime Valenzuela y Paola Bustamente. En particular nuestro reconocimiento al Dr Ernesto Filio quien ha sido el revisor técnico del contenido del texto y quien ha realizado la presentación de esta obra en el prólogo.

ACERCA DE LOS AUTORES

Sara Arancibia Carvajal.

Profesora, Licenciada y Magíster en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Magíster en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad de Chile y Doctora en Ciencias Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid. Actualmente se desempeña como directora del Instituto de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería y Ciencias, miembro de la comunidad de aprendizaje Epsilon_Delta en la Universidad Diego Portales (UDP). Es académica de varios programas de formación de postgrados en el Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Chile (UChile), donde ha sido premiada por los estudiantes con reconocimientos por su labor docente. En ambas instituciones universitarias (UDP y UChile) ha guiado tesis de pre y postgrado, además, tesis de doctorado en la Universidad Autónoma de Madrid y Universidad Castilla - La Mancha, de España.

Ha sido directora de varios proyectos de investigación y asesorías, en las líneas de modelación matemática aplicada, entre los cuales se destacan: "Desarrollo de un modelo multicriterio para medir la Calidad de la Infraestructura Escolar de Chile", "Desarrollo de un sistema de evaluación del programa Servicio País de Chile", "Metodologías de apoyo a la innovación y gestión de los programas de intervención social que favorecen la superación de la pobreza en Chile", entre otros. Actualmente su investigación se ha focalizado en la determinación de factores que inciden en la motivación, disposición al aprendizaje, desempeño académico y deserción de los estudiantes de educación universitaria, mediante modelación multivariante.

Mantiene redes internacionales de contacto en investigación con académicos de universidades de Inglaterra, España y México, entre otros. Es autora de varias publicaciones indexadas que ha difundido en congresos internacionales en los ámbitos de gestión del conocimiento, educación, innovación y calidad.

Jaime Mena Lorca.

Licenciado en Matemática de la Universidad de Santiago de Chile, PhD en Matemáticas de la Universidad de Iowa, USA. Profesor del Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, miembro del Claustro del doctorado en Didáctica de la Matemática y decano de la Facultad de Ciencias, PUCV, Chile.

Como investigador ha desarrollado varios proyectos concursables de distintos tipos pero principalmente financiados por CONICYT, iniciándose como investigador en estudios de modelos ecológicos (epidemiológicos y dinámica de poblaciones), centrando su interés y adjudicación en proyectos del área de la didáctica y modelación en la enseñanza de la matemática. Mantiene redes internacionales de contacto en el área vía proyectos con México, Alemania y Francia.

Es autor de varias publicaciones indexadas, en ambas áreas de investigación en las que se ha desenvuelto. Últimamente concentrado en guía de tesis, publicaciones y proyectos en el área de modelación y tecnología en didáctica de la matemática.

En el área de gestión, se ha desempeñado como director del Instituto de Matemáticas, como vicedecano y actualmente como decano lidera diversas iniciativas institucionales financiadas con fondos concursables o internos, todos ellos relativos ya sea a la formación de científicos, como a la formación de profesores de Ciencias y Matemática.

DEDICATORIA

A mis tesoros: Osvaldo, Sofía e Ignacio
A mis maravillosos padres, hermanos y sobrinos por su apoyo y amor incondicional
A mis queridos estudiantes por su disposición a aprender y por potenciar mi motivación de enseñar.

Autora: Sara Arancibia Carvajal

Al Paráclito que puso a Evelyn en mi camino.
En este caminar conjunto me ha permitido disfrutar de hijos,
sus parejas y niet@s que dan evidencia de su compromiso con sus entornos sociales y hábitat.
Gracias Señor.

Autor: Jaime Mena Lorca

PRÓLOGO

La evolución científica ha sido posible, gracias a que grandes mentes se han atrevido a cuestionar los saberes de una cultura dominante; pero dudar de esos saberes no es una ocurrencia. La duda emerge debido a un tipo muy particular de pensamiento llamado *crítico*, que sólo poseen ciertas mentes rebeldes dispuestas a enfrentar conocimientos que, por su aparente solidez, son difíciles de cuestionar. ¿Por qué dudar de la forma plana de nuestro planeta? El sentido común conduce a esta conclusión y afirmar lo contrario es una locura; pero basta con poner a prueba la hipótesis de la forma aceptada de la Tierra para verificar lo débil del saber aceptado durante muchos años. Como este, hay muchos casos en las ciencias físicas y naturales, dónde el pensamiento crítico ha sido un detonador del avance científico. Pero el caso de la Matemática es muy especial. Las afirmaciones matemáticas son tan fundamentadas que dudar de ellas es casi una herejía. Aun así, el pensamiento crítico ha estado presente, sólo que con pequeñas variantes en las técnicas: ¿qué ocurre si el quinto postulado de Euclides no se cumple? ¿qué tipo de números habría más allá de los naturales? ¿hay que considerar el infinito en las afirmaciones matemáticas? La respuesta a preguntas como estas ha dado lugar a estructuras matemáticas muy rígidas, que han cimentado al actual edifico matemático; estructuras que apoyan otras ciencias y áreas del conocimiento actual, que no serían posibles sin una forma crítica de pensar.

Una de las tareas en la formación de nuevos científicos e ingenieros, es el fomento de este tipo de pensamiento, con el fin de que el educando desarrolle la habilidad de resolver problemas de diferentes maneras e identificar la mejor. Un estudiante al que se le entrena con esta idea, lo hace más analítico, discrimina y clasifica información relevante y, paralelamente, desarrolla otras habilidades como la intuición y la lógica. Pero no existen metodologías ni recursos idóneos que apoyen al profesor en esta tarea formativa. Aquí, es dónde esta obra cobra relevancia. Los autores conducen al estudiante a reflexionar sobre afirmaciones que pueden ser falsas o verdaderas, y cuya respuesta depende de la reflexión y replanteamiento de lo supuestamente ya entendido. Estas afirmaciones son, además, una excelente oportunidad para la confrontación de otros puntos de vista de los demás participantes del grupo y una forma de utilizar su propio discurso en la defensa de sus ideas.

Los problemas reto a los que recurren los autores, son momentos que recrean el pensamiento crítico en todo su esplendor. Muestran a los estudiantes la importancia de desconfiar de respuestas que, desde el punto de vista operacional, aparentan ser correctas y coherentes, pero que sutilmente traicionan los fundamentos; así que hay que encontrar el error, tarea que exige la comprensión de los principios teóricos.

Aunque esta obra exhibe algunos problemas clásicos que aparecen en casi todos los textos de Cálculo, también cuenta con problemas inéditos que ilustran la versatilidad del Cálculo como matemática aplicada; no obstante, lo importante es el tratamiento que se da a estos problemas en términos del pensamiento crítico. Discernir si la información disponible es clave para el planteamiento y solución del problema o puede desecharse sin afectación sensible, es un ejercicio al que los autores someten al estudiante. Esto implica, por supuesto, comprender el problema e identificar cuál es la aportación de la información para obtener la solución, lo cual conlleva la coherencia de los conceptos matemáticos con los inherentes al problema.

Uno de los principios que presume la Matemática, es que un problema puede tener diferentes modos de resolverse y llegar a la misma solución. Esta es una libertad que los autores dan a los estudiantes ya que no sugieren una metodología universal para resolver problemas; esta es otra característica a la recurren los autores para fomentar en los estudiantes el pensamiento crítico. Sin embargo, en ningún momento se abandona al estudiante; con frecuencia se le dan pistas que lo guían por dónde o cómo buscar soluciones, aunque conforme avanza el texto estas pistas son cada vez más escasas, bajo el supuesto de que el estudiante confía cada vez más en su intuición. Con estas ideas, los autores pretenden que el alumnado adquiera juicios de valor cada vez más sólidos y se atreva a hacer sus propios planteamientos y metodologías personales.

En este libro de Cálculo se destaca la cualidad de coordinar hábilmente el lenguaje formal, con el rigor y la intuición, cualidad que rara vez se ve en otros textos de esta disciplina matemática. Comenzar con los axiomas de *Cuerpo, Orden* y del *Supremo* es una apertura a la formalidad y fundamentación de los conceptos restantes. La organización de los contenidos a partir de estos axiomas, da cabida al estudio formal de las funciones sin marginar el comportamiento gráfico de éstas, así como a la definición del concepto de *sucesión.* Con estos conceptos de respaldo, la noción de límite se incorpora de un modo muy natural, para dar entrada al estudio del alma del Cálculo Diferencial: la *función derivada.* Aquí, las clásicas aplicaciones de la derivada, se combinan con problemas muy novedosos, recurriendo en todo momento al pensamiento crítico que le da sentido al propósito con el que fue concebida esta obra. La coherencia con la que desarrollan los contenidos, en relación con este estilo de pensamiento, hacen de este libro, una excelente y recomendable obra.

Dr. Ernesto Filio López
CINVESTAV. México
efilio@ipn.mx

Capítulo 3

SUCESIÓN

Capítulo 3

Sucesión

3.1. Introducción

En este capítulo profundizaremos en los contenidos del cálculo con un nivel de abstracción más alto, donde daremos a conocer el concepto de sucesión y sus características, además de introducir el concepto de límite de una sucesión, el cual será clave para comprender ciertos límites de funciones.

El capítulo presenta muchos ejemplos y da énfasis a la demostración de proposiciones fundamentales, lo que permite una mayor comprensión de los conceptos y de la lógica del razonamiento matemático.

3.2. Conceptos Básicos y Ejemplos

Entre las funciones hay unas de particular importancia, llamadas sucesiones. Ellas aparecen naturalmente, por ejemplo en los algoritmos provenientes del análisis numérico, indicando ellas (en este caso) un proceso de iteración; también aparecen en el estudio de la estabilidad de ciertos puntos en la teoría de sistemas dinámicos.

Consideremos la función $f(x) = x^2$ y veamos que ocurre si aplicamos reiteradas veces f a un punto x_0, $x_0 \in]0, 1[$, es decir, queremos ver que ocurre con x_0, x_0^2, $(x_0^2)^2$, $((x_0^2)^2)^2, ...$, etc. Esto se puede ver graficamente en la figura 3.1-a, donde están dibujadas la recta $x = y$ y la parábola $f(x) = x^2$.

El objeto de dibujar la recta $x = y$ es que la recta que une los puntos $(0, f(x_0))$ y $(x_0, f(x_0))$ corta a tal recta, la coordenada x de este corte nos indica geométricamente la posición de $f(x_0)$ en el eje x (Domf), ubicación que necesitamos posteriormente para calcular $f(f(x_0))$. Este proceso se puede repetir varias veces y así se puede conocer al valor a que "tiende" $f(f(\cdots(f(x_0))\cdots))$. El proceso consiste en viajar desde la parábola a la recta $y = x$,

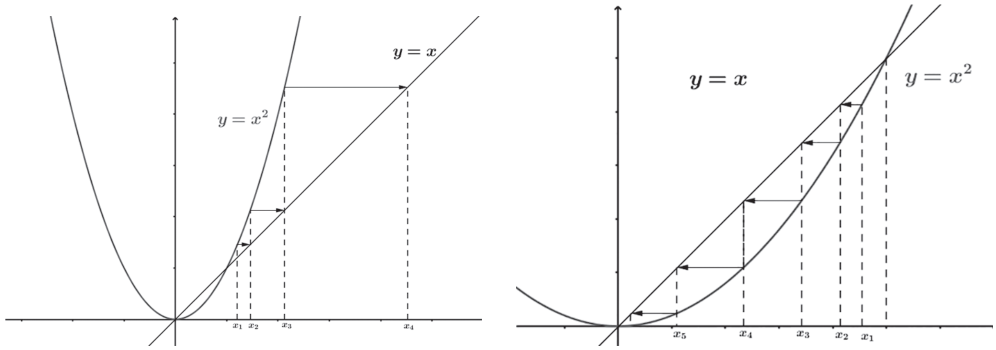


Figura 3.1: - a - b.

paralelamente al eje x, (cuando llega a la recta $y = x$) se viaja desde ese punto de corte a la parábola, pero ahora paralelamente al eje y.

En figura 3.1-a vemos que si aplicamos $f(x)$ reiterativamente a $x_0 \in]0,1[$, tenemos que el valor resultante de este proceso es 0, a diferencia de la figura 3.1-b que nos muestra que el mismo proceso realizado a un punto $x_0 > 1$, tiende a un valor infinitamente grande.

Vea Ud. que ocurre en otros casos tales como $x_0 \in]-1,0[,\ x_0 < -1,\ x_0 = 1$, etc.

El proceso anterior se puede describir mediante una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rrcl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & x(n) = x_n \end{array}$$

donde n indica las veces que se ha aplicado la función $f(x)$ y x_n indica la resultante, es decir

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f(x_0) \\ x_2 & = & f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 & = & f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\ x_4 & = & f(f(f(f(x_0)))) = f^4(x_0), \ldots, \text{ etc.} \end{array}$$

Volviendo a la notación de funciones, si esta sucesión es

$$\begin{array}{rrcl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & \frac{1}{2n} \end{array}$$

los elementos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$$

El décimo término es $\frac{1}{20}$, el cuarto término es $\frac{1}{8}$, el n-ésimo término es $\frac{1}{2n}$.

Si n es "súper grande", ¿Cerca de qué valor se encuentra x_n ?

Ejemplo 67. $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$. *En extenso la sucesión es*

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots$$

El quinto término es $\frac{5}{6}$. *Si* n *es "súper grande", ¿Cerca de qué valor se encuentra* x_n *?*

Ejemplo 68. *En la sucesión*

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \cdots$$

el quinto término es $\sqrt{5}$

¿x_n *se acerca a un número real cuando* n *es grandote?*

Ejemplo 69. *Muchas veces las sucesiones son definidas en forma recursiva, por ejemplo*

Sea $x_0 \in]0,1[$ *se define*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_0 \\ x_n & = & x_{n-1}^2 \ si\ n > 1 \end{array}$$

Si queremos esta sucesión como un listado, debemos calcular $x_2,\ x_3,\ x_4, \cdots$ *etc.*

Por ejemplo el cuarto término es

$$x_4 = (x_3)^2 = ((x_2)^2)^2 = (((x_1)^2)^2)^2 = (((x_0)^2)^2)^2 = x_0^8$$

Así la sucesión es

$$x_0,\ x_0^2,\ x_0^4,\ x_0^8,\ x_0^{16},\ x_0^{32}, \cdots$$

Si $x_0 = \frac{1}{2}$ *la sucesión es*

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \cdots$$

¿A qué valor "tiende" x_n *si* $x_0 = \frac{1}{2}$*?*

La respuesta también fue dada en la figura 3.1-a

3.3. Sucesiones

Definición 3.1. *Una sucesión de números reales*[1] *es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o subconjunto* D *de* $\mathbb{N}$ *de la forma* $D = [a, \infty[\cap \mathbb{N}$ *y su recorrido es un subconjunto de los reales.*

Se escribe $\begin{array}{rrcl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & x(n) = x_n \end{array}$ *o* $\begin{array}{rrcl} x: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & x(n) = x_n \end{array}$

[1] En el caso de una sucesión de números *complejos* se cambia $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$

Recordemos que una función es en particular una relación; así una sucesión x es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, es decir, la sucesión x es el conjunto

$$\{(1, x(1)), (2, x(2)), (3, x(3)), \cdots (n, x(n)), \cdots\}$$

pero a cambio de esto se anota simplemente

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$$

donde x_n indica el valor de $x(n)$ llamado n-ésimo término

Notación: Otras formas resumidas de anotar sucesiones son:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n\geq 1}, \quad \{x_n\}_{n\geq 1},$$

o extremando la simplificación se anota simplemente (x_n) o $\{x_n\}$

Ejemplo 70. $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$,

Observación 27. ***No confundir una sucesión con su recorrido.***

No se debe confundir una sucesión con su recorrido. En el caso de la sucesión $(x_n) = (-1)^n$, es decir, la sucesión $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ tiene como recorrido el conjunto $\{-1, 1\} = \mathrm{Rec}(x)$. Una sucesión siempre tiene infinitos términos, el quinto término de ésta es -1, el décimo término es 1.

Definición 3.2. *Diremos que una sucesión (x_n) es* ***acotada*** *si su recorrido es un conjunto acotado, es decir:*

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n| < K.$$

Análogamente se define sucesión acotada superiormente y acotada inferiormente.

Definición 3.3. *Diremos que una sucesión (x_n) es* ***creciente*** *si ella como función es creciente, es decir:*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \cdots$$

Análogamente se define ***estrictamente creciente***, ***decreciente***, ***estrictamente decreciente***.

De una manera más formal

1. *(x_n) es una* ***sucesión creciente*** *si y sólo si:*

$$(\forall n \in D)(x_n \leq x_{n+1})$$

2. *(x_n) es una* ***sucesión estrictamente creciente*** *si y sólo si:*

$$(\forall n \in D)(x_n < x_{n+1})$$

3. (x_n) *es una* ***sucesión decreciente*** *si y sólo si:*

$$(\forall n \in D)(x_n \geq x_{n+1})$$

4. (x_n) *es una* ***sucesión estrictamente decreciente*** *si y sólo si:*

$$(\forall n \in D)(x_n > x_{n+1})$$

Diremos que una sucesión (x_n) *es* ***monótona*** *si y sólo si es creciente o bien decreciente.*

Definición 3.4. *Sea* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión estrictamente creciente de números naturales y sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión arbitraria de números reales, la compuesta* $x \circ k$*, es decir,* $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *es llamada* ***subsucesión*** *de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Ejemplo 71. *La sucesión* $(\frac{1}{n})$ *es acotada pues existe* $k = 1 \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene;* $|\frac{1}{n}| \leq 1$.

Por otra parte $(\frac{1}{n})$ *es estrictamente decreciente (monótona). En efecto:*

Es claro que para todo $n \in \mathbb{N},\ n < n+1$ *entonces por propiedad de los números reales se tiene*

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

luego $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ x_n > x_{n+1}$

Ejemplo 72. *La sucesión* $(n)_{n=1}^{\infty}$ *no es acotada pues no existe* k *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $|n| \leq K$ *(Recordar que el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *no es acotado).*

Sin embargo es claro que (n) *es estrictamente creciente, pues*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n < n+1$$

Ejemplo 73. $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n}{n+1})_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión acotada (1 es una cota superior) y monótona, (estrictamente creciente).*

Ejemplo 74. $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n^2}{n+3})_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión no acotada superiormente sólo inferiormente,* x_n *es estrictamente creciente.*

Ejemplo 75. $(x_n) = (\frac{(-1)^n}{2n})$ *es una sucesión acotada, no es monótona y tiene a* $(\frac{1}{16n^2})_{n=1}^{\infty}$ *como subsucesión ya que la sucesión de números naturales* $(8n^2)_{n=1}^{\infty}$ *es estrictamente creciente. Considerando la sucesión* $(3n)_{n=1}^{\infty}$ *se tiene que* $(\frac{(-1)^{3n}}{6n})_{n=1}^{\infty}$ *también es una subsucesión de* x_n.

Problema "Verdadero o Falso" 20. *Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.*

1. *Toda sucesión acotada es mónotona*
2. *Toda sucesión mónotona es acotada*
3. *La sucesión* $(\frac{(-1)^n}{n})$ *es monótona*

4. *La sucesión (n) es una subsucesión de $(\sqrt{n})$*

Solución:

1. Falso. La sucesión $((-1)^n)$ es acotada pero no es creciente ni decreciente.
2. Falso. La sucesión (n) es creciente luego es monótona pero no es acotada.
3. Falso. Sea $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ entonces $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{-1}{3}$.

   Luego $x_1 < x_2$ pero $x_2 > x_3$ Así x_n no es creciente ni decreciente por lo tanto no es monótona.
4. Verdadero. Sea $x_n = \sqrt{n}$ y sea $k_n = n^2$. Claramente (k_n) es una sucesión de naturales creciente y
   $$(x \circ k)(n) = x(k_n) = x(n^2) = \sqrt{n^2} = n$$
   luego $((x \circ k)_n) = (n)_n$ es una subsucesión de (x_n).

Observación 28. ***Subsucesión.***

Observar que una sucesión (y_n) es una subsucesión de una sucesión (x_n) si (y_n) están incluidos en los términos de la sucesión (x_n) y además existe una sucesión (k_n) de naturales creciente tal que $(x \circ k)(n) = y_n$.
Algunas sucesiones de interés en cursos posteriores son las que estudiaremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 76. *Si $r \in \,]0,1[$ entonces la sucesión $(x_n) = (r^n)$ es acotada y estrictamente decreciente.*

Demostración: Sea $r \in]0,1[$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $r > 0$ entonces $r^n > 0$, luego (r^n) está acotada inferiormente por 0. Ocupando el hecho que la función exponencial $\exp_r$ es estrictamente decreciente se tiene que
$$n > 0 \Rightarrow r^n < r^0$$
es decir, $r^n < 1$. En consecuencia (r^n) está acotada superiormente por 1.

Por el mismo argumento se tiene que
$$n < n + 1 \Rightarrow r^{n+1} < r^n$$

Por lo tanto (r^n) es estrictamente decreciente.

Ejemplo 77. *Si $r > 1$ entonces (r^n) es estrictamente creciente, pero no es acotada.*

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N},\ r > 1$
$$n < n + 1 \Rightarrow \exp_r(n) < \exp_r(n+1) \Rightarrow r^n < r^{n+1}$$
luego (r^n) es estrictamente creciente.

Ahora probaremos que (r^n) no es acotada si $r > 1$ (Por método del absurdo).

Supongamos que (r^n) es acotada luego, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$r^n \leq k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

pero

$$r^n \leq k \Longleftrightarrow r^n \leq r^{\log_r(k)} \Longleftrightarrow n \leq \log_r(k)$$

Así

$$n \leq \log_r k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $\log_r(k)$ es cota superior del conjunto de los números naturales, lo cual es una contradicción (pues $\mathbb{N}$ no es acotado).

Nota: Otra forma de probar que (a^n) no es acotado (si $a > 1$) es la siguiente:

Como a se puede escribir $a = 1 + h$ con $h > 0$, tenemos por el desarrollo del binomio que:

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots + nh^{n-1} + h^n$$

y como todos los sumandos son positivos obtenemos la desigualdad de Bernoulli

$$a^n > 1 + nh \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

como la sucesión $(x_n) = (1 + nh)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada, tampoco lo es (a^n) pues (x_n) es estrictamente creciente. Con base en la sucesión anterior definamos una nueva sucesión:

Ejemplo 78. *Dado $r \in]0,1[$, se define la sucesión* [2] (x_n) *recursivamente como sigue*

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 1 \\ x_n & = & x_{n-1} + r^n, \quad n \geq 1 \end{array}$$

así la sucesión es

$$1,\ 1+r,\ 1+r+r^2,\ 1+r+r^2+r^3, \cdots$$

El n-ésimo término es $x_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{i=0}^{n} r^i$ que corresponde a la suma de $n+1$ términos de una progresión geométrica de razón r, así que

$$x_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota: La igualdad anterior se puede probar por inducción. Claramente se ve que (x_n) es estrictamente creciente y es acotada superiormente por $\frac{1}{1-r}$.

Como caso particular de la sucesión anterior tomemos $r = \frac{1}{2}$; el término n-ésimo nos queda

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) < 2$$

quién es acotada por 2, es decir, $|x_n| < 2$ para todo n.

[2] No cambia la definición si se toma $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_0$ en la definición de sucesión

Ejemplo 79. *Una sucesión muy utilizada en cálculo es la sucesión que tiene como n-ésimo término a*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es claramente creciente. Ella es acotada por* 3*, como se puede ver en la desigualdad*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3$$

ya que esta última sucesión es acotada (como se vio anteriormente).

Ejemplo 80. *Sea* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión que tiene como término general (es decir, n-ésimo término)* $y_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Por el desarrollo de Binomio de Newton se tiene que

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(3)(2)(1)}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Observemos que todos los factores de los sumandos del término y_n *son positivos, además se tiene, en cada sumando, que el factor que acompaña* $\frac{1}{k!}$ *es menor que 1, así comparando sumando por sumando con la sucesión* x_n *del ejemplo anterior, obtenemos que*

$$y_n \; < \; x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es acotado, se tiene que* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *es también acotada.*

¿Es $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente?*

Ejemplo 81. *La sucesión* $(z_n)_{n=1}^{\infty} = \sqrt[n]{n}$ *es decreciente a partir de un* n_0 *apropiado y claramente es acotada inferiormente por cero, también se puede ver que es acotada superiormente comparándola con* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *.*

3.4. Límite de una Sucesión

En esta sección clarificaremos el significado de "x_n tiende a L", $L \in \mathbb{R}$. Veamos los siguientes ejemplos

- $a_n = \frac{1}{n}$ tiende a 0
- $b_n = (\frac{1}{2})^n + 1$ tiende a 1
- $c_n = (-1)^n$ tiende a 1 y a -1
- $d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$ tiende a 2
- $e_n = n^3$ tiende a infinito

Se usa también "se acerca"pero esto induce a pensar que (x_n) se mueve, el que cambia en n. Para esto necesitamos el concepto de vecindad.

Definición 3.5. *Sea $p \in \mathbb{R}$. Una **vecindad** o **vecindad abierta** del punto p es simplemente un conjunto, que contiene a p, del tipo*

$$V_{p,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-p| < \varepsilon\} \quad , \ donde\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

Desarrollando la inecuación que define a $V_{p,\varepsilon}$ tenemos que la vecindad $V_{p,\varepsilon}$ es el intervalo abierto que tiene como centro[3] a p, es decir,

$$V_{p,\varepsilon} =]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$$

Ejemplo 82. *Si $p = 2$, son vecindades de 2, los intervalos]1, 3[;]1.9, 2.1[;]1.99999, 2.00001[y en general $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ representa todas las vecindades (simétricas respecto al punto) de 2, basta tomar $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. En el primer ejemplo $\varepsilon = 1$, después $\varepsilon = 0.1$ y en el último $\varepsilon = 0.00001$.*

Esta última vecindad corresponde al tipo de vecindades que usaremos. La idea es tomar ε pequeño (súper pequeño).

Definición 3.6. *Sea $L \in \mathbb{R}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, diremos que x_n **converge a** L cuando n tiende a infinito o que el **límite de** x_n **es** L, cuando n tiende a infinito o simplemente x_n converge a L si se tiene que para cualquier vecindad de L, $V_{L,\varepsilon}$, que se tome (es decir, aún que ε sea "súper pequeño") siempre quedará sólo una cantidad finita de términos de la sucesión fuera de la vecindad $V_{L,\varepsilon}$ (y por lo tanto todos los otros infinitos términos quedan adentro).*

Notación:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \text{o} \quad \lim_{\infty} x_n = L \quad \text{o} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \quad \text{o} \quad \lim_{n} x_n = L$$

En otras palabras; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ si para toda vecindad de L, $V_{L,\varepsilon}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a partir de N (es decir, para $n > N$) los términos x_n pertenece a $V_{L,\varepsilon}$

En el caso de sucesiones crecientes o decrecientes se anota

$$x_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} L \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\searrow} L$$

[3]Se puede definir vecindad de p como intervalo abierto que contiene a p, no siendo necesariamente el punto p el centro de ésta. Ambas definiciones son equivalentes. Pruébelo

Para poder trabajar con la definición anterior llevemos esas frases a un lenguaje más formal

Como la vecindad $V_{L,\varepsilon}$ está determinada por ε, decir cualquier vecindad equivale a decir $\forall\varepsilon,\ \varepsilon > 0$. "Una cantidad finita de términos quedan afuera"; supongamos que $x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3}, \cdots,\ x_{n_k}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots < n_k$ son los términos ordenados que quedarán fuera de $V_{L,\varepsilon}$, entonces lo que ocurre es que los términos siguientes de x_{n_k}, es decir, $x_{n_k+1},\ x_{n_k+2},\ x_{n_k+3}, \cdots$ etc. todos están en el interior de la vecindad $V_{L,\varepsilon}$.

Así tenemos que hay un índice, (en este caso n_k) tal que si tomamos un término x_n con índice n mayor que ese n_k, este término pertenece a $V_{L,\ \varepsilon}$.

Es natural pensar que si $\varepsilon > \delta$ la cantidad de términos de la sucesión que quedan afuera de $V_{L,\delta}$ es mayor, probablemente, a la cantidad de términos que quedan fuera de $V_{L,\ \varepsilon}$, por lo tanto el índice n_k mencionado anteriormente, a partir del cual todos los términos de la sucesión queda en $V_{L,\delta}$ es mayor que el obtenido por $V_{L,\ \varepsilon}$. Esto nos ilustra la dependencia del n_k de la vecindad $V_{L,\ \varepsilon}$ indicando esto por $n_k(\ \varepsilon)$.

Resumiendo todo lo anterior nos queda

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N \text{ se tiene } x_n \in V_{L,\ \varepsilon}$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N\ \Rightarrow\ |x_n - L| < \ \varepsilon$$

Definición 3.7. *Una sucesión que tiene límite se dice* ***convergente*** *y en caso contrario,es decir, si no tiene límite, se dice* ***divergente.***

Ejemplo 83. *La sucesión constante (c) es convergente a c, pues $\lim_{n\to\infty} c = c$*

La sucesión (2^n) es divergente, pues no existe $\lim_{n\to\infty} 2^n$, ya que por el ejemplo anterior tenemos que es creciente y no acotada.

Ejemplo 84. *Recordemos la propiedad Arquimediana que satisfacen los números reales.*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que } 0 < \frac{1}{N} < \ \varepsilon$$

Con esta propiedad se puede probar que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2n} + 1)_{n=1}^{\infty}$ es convergente ya que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Para probar esta última igualdad debemos tomar $\varepsilon > 0$ arbitrario (ya que es $\forall\ \varepsilon > 0$) y para ese número real debemos encontrar un N tal que si $n > N$ se tenga que

$$|x_n - 1| < \ \varepsilon,\ \textit{lo que equivale a,} \quad -\ \varepsilon < \frac{1}{2n} < \ \varepsilon$$

como $\frac{1}{2n} > 0$, debemos preocuparnos de probar que $0 < \frac{1}{2n} < \ \varepsilon$ pero como $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, si logramos probar que $0 < \frac{1}{n} < \ \varepsilon$ a partir de un N (es decir, si $n > N$) obtenemos la desigualdad buscada.

Por demostrar: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$[4]

Por propiedad Arquimediana tenemos

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{N} < \ \varepsilon$$

por lo tanto

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N$$

$$0 < \tfrac{1}{2n} < \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{N} < \ \varepsilon$$

Así

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N,\ -\varepsilon < \tfrac{1}{2n} < \ \varepsilon$$

que es equivalente[5] a

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ (n > N \Rightarrow |x_n - 1| < \ \varepsilon)$$

Análogamente se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nh} = 0$, si $h \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplo 85.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ \textit{con}\ 0 < r < 1$$

Ya que $0 < r < 1,\ \frac{1}{r} > 1$*; por lo tanto existe* $h > 0$ *tal que* $\frac{1}{r} = 1 + h$*, luego tenemos*

$$\frac{1}{r^n} = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots + h^n \geq nh$$

Así

$$r^n = \frac{1}{1 + nh + \cdots + h^n} \leq \frac{1}{nh}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nh} = 0$ *se tiene que*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \ \textit{tal que}\ n > N \Rightarrow 0 < \frac{1}{nh} < \ \varepsilon$$

De esta forma

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N (\textit{el mismo anterior})\ \textit{tal que}\ n > N \Rightarrow |r^n - 0| < \frac{1}{nh} < \ \varepsilon$$

[4]Note que en este caso (y muchos otros) nunca $(x_n) = 1$, pero si el límite es uno.

[5]Note que ε es arbitrario, pero se piensa siempre que es pequeño, $\varepsilon = 1$ sería muy grande

Ejemplo 86. *Demostremos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n+1} = 2$$

Por demostrar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| < \varepsilon)$$

Antes de comenzar con la demostración determinemos un real apropiado al cual aplicarle la propiedad Arquimediana.

Notemos que

$$\left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-5-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-7}{n+1}\right| = \frac{7}{n+1} < \frac{7}{n} \tag{3.1}$$

Dado $\varepsilon > 0$, queremos probar que existe un natural N tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ con $n > N$, se tenga que

$$\left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Es claro por (3.1) que: si existe N tal que $\frac{7}{n} < \varepsilon$ para $n > N$, tendremos la desigualdad (3.2). Por lo tanto busquemos tal N.

Observemos que $\frac{7}{n} < \varepsilon$ equivale a $\frac{7}{\varepsilon} < n$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, consideremos el real $\frac{7}{\varepsilon}$ y usando la propiedad Arquimediana demostraremos (3.2).

Sea $\varepsilon > 0$, entonces por propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{7}{\varepsilon}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, pero $N > \frac{7}{\varepsilon}$, luego $n > \frac{7}{\varepsilon}$, lo que equivale a $\frac{7}{n} < \varepsilon$ pero

$$\frac{7}{n+1} < \frac{7}{n} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| = \frac{7}{n+1}$$

por lo tanto $\left|\frac{2n-5}{n+1} - 2\right| < \frac{7}{n} < \varepsilon$. Así hemos probado (3.1).

Ejercicio 63. *Demuestre*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0$$

dado $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:
Por demostrar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \frac{1}{n^{p/q}} < \varepsilon)$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, entonces consideremos el real $(\frac{1}{\varepsilon})^{q/p}$

Por propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{q/p} \tag{3.3}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces por (3.3)

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{q/p}$$

de donde

$$\varepsilon > \left(\frac{1}{n}\right)^{p/q} \quad \text{para } n > N$$

Así, para $\varepsilon > 0$ dado encontramos N tal que si $n > N$ se tiene

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{p/q} < \varepsilon$$

Por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p/q}} = 0$.

Ejemplo 87. *La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge ya que si tomamos la vecindad $V_{1,\frac{1}{4}}$,es decir, $L = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{4}$, deja infinitos términos de la sucesión fuera de ella (los términos con índice n impar); lo mismo ocurre con $V_{-1,\frac{1}{4}}$*

Con este mismo ejemplo vemos la necesidad de demostrar que el límite de una sucesión es único por eso usamos "el" y no "los".

Teorema 3.8 (Unicidad del Límite)**.** *El límite de una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es único, es decir,*

$$\lim_n x_n = a \ \wedge \ \lim_n x_n = b \ \Rightarrow \ a = b$$

Demostración: Procederemos por el absurdo, esto significa que supondremos que $a \neq b$ y llegaremos a una contradicción.

Esencialmente haremos lo mismo que en el ejemplo anterior.
Como $a \neq b$ se tiene que el número $\frac{|a-b|}{4} \neq 0$ y positivo. Ya que $\lim x_n = a$, para $\varepsilon = \frac{|a-b|}{4}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, $x_n \in V_{a,\,\varepsilon}$; por otra parte se tiene que $\lim x_n = b$, así para el mismo ε existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$, $x_n \in V_{b,\,\varepsilon}$.
Note que $V_{a,\,\varepsilon} \cap V_{b,\,\varepsilon} = \phi$ con $a = -1$ y $b = 1$, pero si tomamos n tal que $n > N \wedge n > M$ se tiene que $x_n \in V_{a,\,\varepsilon} \wedge x_n \in V_{b,\,\varepsilon}$, es decir, $x_n \in V_{a,\,\varepsilon} \cap V_{b,\,\varepsilon}$, así $V_{a,\,\varepsilon} \cap V_{b,\,\varepsilon} \neq \phi$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Este teorema es muy útil para mostrar que una sucesión es divergente, por ejemplo

- $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (-1)^n(3 + \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ diverge
- $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}n))_{n=1}^{\infty}$ diverge

Teorema 3.9. *Si la sucesión (x_n) converge a L entonces* ***toda*** *subsucesión de ella también converge a L.*

Notemos que es un teorema del tipo $p \Rightarrow q$.

Demostración: Sea (x_{k_n}) una subsucesión de (x_n).

Como k_n es una función creciente en $\mathbb{N}$ se tiene

$$1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots \leq k_n \text{ con } n \leq k_n$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ se tiene que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ n > N \Rightarrow x_n \in V_{L,\ \varepsilon}$$

luego (en particular)

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ k_n > n > N \Rightarrow x_{k_n} \in V_{L,\ \varepsilon}$$

Así

$$\lim_{k\to\infty} x_{k_n} = L$$

Corolario 3.10. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$*

Lo que dice el corolario es que para estudiar la convergencia de una sucesión no importa lo que ocurra con los primeros términos (los k primeros términos). Ésto nos dice que ver la tendencia de los primeros cien mil números no basta, es necesario buscar argumentos de convergencia.

Ejemplo 88. *La sucesión*

$$x_n = \begin{cases} 2^n & n \leq 1000 \\ \frac{1}{n} & n > 1000 \end{cases}$$

converge a cero (por Corolario 3.10).

Aplicaremos el teorema anterior, en forma directa, para obtener el límite de sucesiones en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 89. $(\frac{1}{2n^2})_{n=1}^{\infty}$ *converge a cero ya que ella es una subsucesión de* $(\frac{1}{2n})_{n=1}^{\infty}$*, y ésta es una subsucesión de* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Ejercicio 64. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$$

si se sabe que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = L.$

Solución:
Ya que $\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}$ forma una subsucesión de $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ (tomando n^2 como la función creciente) entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = L$$

Nota: Una consecuencia del teorema es que si una sucesión tiene dos subsucesiones convergentes a límites distintos, entonces la sucesión inicial no tiene límite ya que se contradice la unicidad del límite.

Ejemplo 90. *La sucesión*

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

no es convergente, pues la subsucesión x_{2n} formada por los términos de lugar par converge a 1, sin embargo la subsucesión x_{2n+1} formada por los términos de lugar impar converge a 0.

Ejemplo 91. *La sucesión $((-1)^n)$ no converge, pues existen las subsucesiones constantes $(x_{2n}) = (1)$ y $(x_{2n+1}) = (-1)$ que convergen a 1 y -1 respectivamente.*

Observe que si $(x_{k_n}) \to L$ no se tiene necesariamente que $(x_n) \to L$. Esto se puede visualizar con $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (sen(\frac{n\pi}{2}))_{n=1}^{\infty}$. La subsucesión $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 pero $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge.

Así podemos notar que el teorema anterior es de la forma $p \Rightarrow q$ y no $p \Longleftrightarrow q$. Un teorema del mismo tipo es el siguiente.

Teorema 3.11. *Toda sucesión convergente es acotada*

Demostración: Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a L, para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $x_n \in V_{L,1}$ (es decir, $L-1 < x_n < L+1$).

Sean

$$\alpha = \max\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{N-1}, x_N, L+1\}$$

y

$$\beta = \min\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{N-1}, x_N, L-1\}$$

así para todo $n \geq 1$ se tiene $x_n \in [\beta, \alpha]$ por lo tanto el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente por α e inferiormente por β, por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

El siguiente ejemplo muestra, que el teorema 3.11 es sólo de la forma $p \Rightarrow q$.

Ejemplo 92. *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\cos(\frac{\pi n}{8}) + \frac{(-1)^n}{4})_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es acotada (acotada superiormente por* $\frac{5}{4}$ *e inferiormente por* $-\frac{5}{4}$*) pero no es convergente.*

El siguiente teorema es importante y su demostración se apoya fuertemente en el axioma de completitud de los números reales.

El teorema más bien es de existencia del límite de una sucesión dada, a diferencia de los teoremas que permiten calcular un límite. Pero tiene importancia conocer este teorema ya que puede validar algún límite obtenido computacionalmente, ya que el límite obtenido es único y cualquier subsucesión tiene el mismo límite.

Teorema 3.12. *Toda sucesión monótona acotada es convergente*

Demostración: Recordemos que monótona puede significar que la sucesión es creciente o decreciente.

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y acotada (análogo para los otros casos, como estrictamente decreciente, etc), así

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

Sea $\alpha = \sup(A)$ donde $A = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Por caracterización de supremo de A se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe un elemento de A, x_N tal que

$$\alpha - \ \varepsilon < x_N \leq \alpha$$

pero si $n > N$ se tiene $x_N \leq x_n$ (creciente) y $x_n \leq \alpha$ ($\alpha = \sup A$). Así, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$

$$\alpha - \ \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \ \varepsilon$$

es decir

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow x_n \in V_{\alpha,\ \varepsilon})$$

lo que significa que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$

Observación 29. ***Límites de sucesiones crecientes y decrecientes.***

Si (x_n) es decreciente y acotada inferiormente entonces $\lim x_n = \beta$, donde

$$\beta = \inf\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Si (x_n) es creciente y acotada superiormente entonces $\lim x_n = \alpha$, donde

$$\alpha = \sup\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplo 93. *La sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *con*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

es claramente creciente y acotada superiormente por 3 (analizada en detalle anteriormente), por lo tanto (x_n) *converge a algún valor* L.

Use la calculadora para ver cuál sería el valor de L[6].

Este valor se anota $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$ o $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ o el usado en una función que usted ya vio.

Ejemplo 94. *La sucesión* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *con*

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es creciente y acotada por 3 por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = S$ *(existe).*

Use la calculadora para obtener S*. ¿Que relación existe entre* S *y* L *(*L *del ejemplo anterior).*

Note que si n es muy grande $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una buena aproximación de S, pero no es S.

3.5. Cálculo de límites

Los teoremas que veremos a continuación son principalmente utilizados para calcular límites

Teorema 3.13 (Cero Aniquila)**.** *Sea* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión acotada entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$*, es decir, las sucesiones convergentes a cero aniquilan a las acotadas.*

Por demostrar que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |x_n y_n| < \varepsilon$$

Demostración: Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $|y_n| < k,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Además como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 se tiene que

$$\forall\, \bar{\varepsilon} > 0\ \exists \bar{N} \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > \bar{N}(\bar{\varepsilon}),\ |x_n| < \bar{\varepsilon}$$

[6] Este valor ya fue usado en el capítulo de funciones.

Luego, si $|x_n| < \bar{\varepsilon}$ entonces $|x_n y_n| < \bar{\varepsilon} k$, por lo tanto; dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{k}$, [7] y para este valor tenemos que existe $\bar{N}$ tal que $n > \bar{N} \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{k}$, así $|x_n y_n| < k|x_n| < \varepsilon$.

Por lo tanto

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N = \bar{N}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \text{ tal que } n > N \Rightarrow |x_n y_n| < \varepsilon$$

Ejemplo 95. *Un ejemplo donde se puede utilizar este último teorema es en la sucesión*

$$\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{nx}{n^2+20}\right)\right)\right\}$$

donde x es fijo.

Esta sucesión tiene como factores a las sucesiones $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ y $\{y_n\} = \{\cos(\frac{nx}{n^2+20})\}$ que satisfacen las hipótesis del teorema, así que $z_n \to 0$.

Ejemplo 96. *Demostraremos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n} = 0$$

En efecto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y $\{sen(n)\}$ es acotada, luego por teorema del cero aniquila tenemos la demostración.

Aparentemente este último teorema es sólo aplicable para cálculo de límites que sean cero, pero no es así por la siguiente proposición.

Proposición 3.14.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - L) = 0$$

Ejemplo 97. *Si $a \in \,]0,1[$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a + \cdots + a^n) = \dfrac{1}{1-a}$*

Demostración: Como $1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a + \cdots + a^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Usando la proposición anterior, la demostración consiste en probar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right) = 0$$

Pero

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = -\frac{a^{n+1}}{1-a} = a^{n+1}\left(\frac{-1}{1-a}\right)$$

[7] Para evitar el truco $\bar{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{k}$ pruebe que si $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$ es equivalente a $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |x_n - L| < k\varepsilon$ donde k es un fijo positivo.

y como

$$\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0 \ \ y \ \ \left(\frac{-1}{1-a}\right) \ \ \textit{es una sucesión acotada,}$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a}\right) = 0$$

que es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n) = \frac{1}{1-a}$$

Teorema 3.15 (Álgebra de Límites). *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim_n x_n = a$ *y* $\lim_n y_n = b$. *Entonces*

1) $\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n = a + b$

2) $\lim_n (x_n \cdot y_n) = \lim_n x_n \cdot \lim_n y_n = a \cdot b$

3) $\lim_n \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n} = \frac{a}{b}$ *si* $b \neq 0 \ \wedge \ y_n \neq 0, \ \forall n$

4) $\lim_n (\beta x_n) = \beta \lim_n x_n = \beta a, \ \beta \in \mathbb{R}$

(Basta tomar la sucesión constante $(\beta)_{n=1}^{\infty}$ *en 2 y se obtiene la igualdad)*

5) $\lim_n (x_n - y_n) = \lim_n x_n - \lim_n y_n = a - b$

(Basta tomar $\beta = -1$ *en 4) y luego usar 1 para obtener la igualdad)*

Si bien es cierto que el teorema se refiere a igualdades, debe tenerse en mente que el teorema también habla de la convergencia de las sucesiones $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$, etc, es decir, el teorema se refiere a la existencia de los límites puestos a la izquierda de las igualdades y además se refiere al valor que convergen.

Demostración: (1) Límite de la suma. Como $x_n \to a$ es decir

$$\forall \ \varepsilon_a > 0 \ \exists N_a \text{ tal que } n > N_a \Rightarrow |x_n - a| < \ \varepsilon_a$$

Como $y_n \to b$, $\forall \ \varepsilon_b > 0 \ \exists N_b$ tal que $n > N_b \Rightarrow |y_n - b| < \ \varepsilon_b$

$\forall \ \varepsilon > 0$ (tomando $\varepsilon_a = \ \varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2}$) $\exists N = \max\{N_a, N_b\}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \ \varepsilon_a \wedge |y_n - b| < \ \varepsilon_b$$

Por otra parte $|x_n + y_n - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$. Así se tiene, por lo anterior, que si $n > N$

$$|x_n + y_n - (a+b)| < \ \varepsilon_a + \ \varepsilon_b = \ \varepsilon$$

Por lo tanto, $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |x_n + y_n - (a+b)| < \ \varepsilon$.

(2) Límite del producto. Para mostrar 2 usaremos teorema y proposición anterior, así como la igualdad

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= x_n y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= x_n(y_n - b) + (x_n - a)b \end{aligned}$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente, ella es acotada. La sucesión constante $(b)_{n=1}^{\infty}$ también es acotada.

Por proposición anterior $\lim\limits_{n}(y_n - b) = 0$ y $\lim\limits_{n}(x_n - a) = 0$. Por teorema cero aniquila y límites de la suma

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = \lim_{n\to\infty} x_n(y_n - b) + \lim_{n\to\infty}(x_n - a)b = 0 + 0 = 0$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$$

(3) Límite del cuociente. Consideremos la igualdad

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = (by_n - ax_n)\frac{1}{by_n}$$

y el hecho que $(\frac{1}{y_n b})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada.

Por (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = ba - ab = 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 98. *Calculemos el límite de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $x_n = \frac{n^2+2}{5n^2+n}$.*

Como

$$x_n = \frac{n^2+2}{5n^2+n} = \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}}$$

y ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) = 1$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \dfrac{1}{n}\right) = 5$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{5}$$

Observemos que para calcular este límite, no podemos usar directamente la parte (3) del teorema anterior pues no existen los límites $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^2 + n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + 2)$. (En este caso tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^2 + n) = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + 2) = \infty$ pero $\infty \notin \mathbb{R}$.

En general, se puede demostrar usando el álgebra de límites que:

$$1)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_0} = \frac{a_k}{b_k}$$

(en este caso multiplicando por $\frac{1/n^k}{1/n^k}$).

$$2)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \text{no existe} & \text{si } l < k \end{cases}$$

Ejemplo 99. *La sucesión* $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^3+2}\right\}$ *converge a* 0.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} \cdot \frac{1/n^3}{1/n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n + 1/n^3}{1 + 2/n^3} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (1/n + 1/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2/n^3)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2} = 0$.

Ejercicio 65. *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{n^2+1}$ *no existe*

Solución:
(Por el método del absurdo)

Suponga que el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{n^2+1}$ existe y su valor es $L \in \mathbb{R}$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{n^2+1}$ existe (por ejemplo anterior) entonces por álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} \text{ existe}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} = L \cdot 0 = 0$$

Por otra parte, simplificando, es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \tag{3.4}$$

Así, por (3.5) y (3.4) y por la unicidad del límite se tiene que $0 = 1$, lo que es una contradicción. La contradicción se produjo al suponer que existía el límite, por lo tanto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$ no existe.

Ejercicio 66. *Calcular*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(-4)^n + 5^n}{(-4)^{n+1} + 2(5)^n}$$

Solución:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{-4}{5})^n + 1}{(-4)(\frac{-4}{5})^n + 2}$$

Pero $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^n = 0$ pues $|\frac{-4}{5}| < 1$

Luego por álgebra de límites

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{-4}{5})^n + 1}{(\frac{-4}{5})^n + 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} ((\dfrac{-4}{5})^n + 1)}{\lim\limits_{n\to\infty} (-4)(\dfrac{-4}{5})^n + 2} = \frac{1}{2}$$

Proposición 3.16 (Mantención del signo del límite en una sucesión)**.** *Si* $\lim\limits_n x_n = L$*, con* $L \in \mathbb{R}^+$ *se tiene que existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N$ *entonces* $x_n \in \mathbb{R}^+$

Demostración: Como $x_n \to L$ se tiene que

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad (n > N \Rightarrow x_n \in V_{L,\ \varepsilon})$$

Así, tomando un ε bien particular $\varepsilon = \frac{L}{4} > 0$ se tiene que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ por lo tanto si $n > N$ se tiene

$$0 < \frac{3L}{4} = L - \frac{L}{4} = L - \varepsilon < x_n$$

Corolario 3.17. *Si* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *y si se tiene la desigualdad* $x_n \leq y_n$ *a partir de un índice* N_0*, entonces:*

$$\lim_n x_n \ \leq\ \lim_n y_n \ \textit{(o equivalentemente } a \leq b\textit{)}$$

Teorema 3.18 (Teorema del Acotamiento o del Sándwich)**.** *Sean* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *a partir de un índice* N *en adelante.*
Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$

Demostración: Como $x_n \to L$, se tiene que para $\varepsilon_1 > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon_1$, para todo $n > N_1$.

Como $y_n \to L \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon_2 > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$ entonces $|y_n - L| < \varepsilon_2$,

por lo tanto tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ se tiene simultáneamente que si $n > N$

$$L - \varepsilon_1 < x_n < L + \varepsilon_1 \quad \wedge \quad L - \varepsilon_2 < y_n < L + \varepsilon_2 \quad \wedge \quad x_n \leq z_n \leq y_n$$

así, usando la transitividad de la desigualdad, se obtiene

$$L - \varepsilon_1 < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon_2 \text{ si } n > N$$

Tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (inicialmente) se tiene que
$\exists N$ tal que si $n > N$ entonces $|z_n - L| < \varepsilon$, es decir, $z_n \to L$

Ejemplo 100. *Probemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{sen(n)}{n} = 0$ *usando el teorema de acotamiento*

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$-1 \leq \text{sen}(n) \leq 1$$

de donde

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, entonces por teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$$

Ejemplo 101. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión acotada entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$

Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada entonces

$$\exists k \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que, } |x_n| \leq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$-k \leq x_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica

$$-\frac{k}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{k}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{k}{n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{n} = 0$, por teorema del acotamiento se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

Ejercicio 67. *Calcular*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n + sen(n)}{n - (-1)^n}$$

Solución:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}$$

pero para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Luego por el teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Así, por álgebra de límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo 102. *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \cos(n)}{3^n}$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-2^n}{3^n} \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, entonces por el teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

Por otra parte

$$\frac{-1}{3} \leq \frac{\cos(n)}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

además, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Luego por teorema del acotamiento o cero aniquila

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{3^n} = 0$$

En consecuencia, por álgebra de límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \cos(n)}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{3^n} = 0$$

Problema “Encuentre el Error” 21. *Calcular* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *donde* $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} - \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} \;\; \text{no existen}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \;\; \text{no existe}$$

El desarrollo es incorrecto, ver la solución correcta al final del capítulo.

Ejercicio 68. *Demostrar : Si* $|r| < 1$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} nr^n = 0$

Solución:
Considerando dos casos, el primero $0 < r < 1$ y el segundo $-1 < r \leq 0$

1) Considerando $0 < r < 1$, entonces $\dfrac{1}{r} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{r} - 1 > 0$

Sea $h = \frac{1}{r} - 1$

Para $n \geq 2$, se tiene

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n+1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \geq \frac{n(n+1)}{2}h^2$$

Luego, ya que $\dfrac{1}{r} = 1 + h$ o $r = \dfrac{1}{1+h}$

$$0 < nr^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{n(n-1)/2} = \frac{2n}{n(n-1)}$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1} = 0$$

Por teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$$

2) Sea $-1 < r \leq 0$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} n|r|^n = 0$ pues $0 \leq |r| < 1$ entonces por teorema del acotamiento se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} nr^n = 0$.

Ejemplo 103. *Retomemos las sucesiones*

$$x_n = \quad 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots \tfrac{1}{n!}$$

$$y_n = \quad \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n})(\cdots)(1 - \tfrac{n-1}{n})$$

Como $y_n \leq x_n$ y ambas convergen, se tiene

$$L_2 = \lim_n y_n \leq \lim_n x_n = L_1$$

por lo tanto $L_2 \leq L_1$.

Nuestro objetivo es probar que $L_1 = L_2$ por lo tanto sólo nos falta ver que $L_1 \leq L_2$

Para p fijo la sucesión $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ con

$$p_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(\cdots)(1 - \frac{p-1}{n})$$

converge (por operatoria de límites) al término x_p cuando n tiende a ∞.

Pero para cada p fijo se tiene $y_n \geq p_n$ (puesto que p_n contiene a los primeros $p+1$ sumandos de y_n), tomando límite cuando $n \to \infty$ se obtiene, mediante el uso del corolario 3.17, que $L_2 \geq x_p$

Ahora podemos hacer tender $p \to \infty$, así

$$L_2 \geq \lim_{p\to\infty} x_p = L_1$$

por lo tanto

$$L_2 \geq L_1$$

Así, las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ convergen ambas al mismo valor, llamado e (Usando la cálculadora y cualquiera de las sucesiones anteriores visualice que $e = 2{,}7182818...$)

Problema "Encuentre el Error" 22. *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+4}\right)^n$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(1 - \frac{3}{n})}{n(1 + \frac{4}{n})}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{4}{n}\right)^n}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+4}\right)^n = 1$$

El desarrollo es incorrecto, ver la solución correcta al final del capítulo.

Observación 30. ***Límites de sucesiones*** $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Justificaremos sólo en parte esta observación. Si $k=\frac{1}{p}$, $p\in\mathbb{N}$, la sucesión se puede ver como una subsucesión de $x_m=(1+\frac{1}{m})^m$ ya que

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{pn}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{pn}\right)^{pn}\right)^k$$

donde $m=pn$ y con ayuda del teorema 3.9 podemos obtener la observación.

Ejemplo 104. *Calculemos*

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+4}\right)^n$$

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n} = \frac{e^{-1}}{e^1} = e^{-2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{5n+4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n(1-\frac{3}{2n})}{5n(1+\frac{4}{5n})}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{3}{2n})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{4}{5n})^n} = 0\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{4}{5}}} = 0$$

Ejercicio 69. *Suponiendo que la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge. Calcular su límite, donde la sucesión* x_n *es definida recursivamente como sigue*

$$x_1>0 \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \qquad a\in\mathbb{R}^+$$

Solución:
Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \neq 0$ tomando límite en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} \lim_n x_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(\lim_n x_n + \frac{a}{\lim\limits_n x_n}) \\ L &= \tfrac{1}{2}(L + \tfrac{a}{L}) \end{aligned}$$

así, $L^2 = \frac{1}{2}(L^2 + a)$. Por lo tanto $L^2 = a$ y de esta forma $L = \sqrt{a}$ ó $L = -\sqrt{a}$, pero como la sucesión es positiva $L = \sqrt{a}$. Note que: aún no sabemos si $x_n \to \sqrt{a}$, todo se basó en la convergencia de x_n. Por otra parte si x_1 hubiese sido negativo $x_n \to -\sqrt{a}$.

Ejemplo 105. *Sea $x_n = \sqrt[n]{a},\ a \in \mathbb{R}^+$. Podemos ver que x_n converge, ya que:*

a) $a > 1$ entonces x_n es decreciente y acotada inferiormente o bien si

b) $a \in]0, 1[$ entonces x_n es creciente y acotada superiormente

Por lo tanto $\{\sqrt[n]{a}\}$ converge, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = L$ existe

Si $a > 1 \quad L = \inf\{\sqrt[n]{a} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ y si $0 < a < 1$, $L = \sup\{\sqrt[n]{a} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Por ver que en ambos casos $L = 1$, claramente se ve que $L \neq 0$

Como $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ tiene como subsucesión $a^{\frac{1}{n(n+1)}}$ por teorema 3.9 tenemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

pero

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{-\frac{1}{n+1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$$

luego

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\lim\limits_n a^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_n a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{L}{L} = 1$$

Así, $L = 1$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 70. *Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$*

Solución:
Se sabe que $y_n = \sqrt[n]{n}$ forma una sucesión decreciente (a partir del tercer término) y acotada inferiormente; por lo tanto converge.

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, claramente $L \geq 1$, como $\sqrt[2n]{2n}$ es una subsucesión de y_n se tiene que su límite también es L

Por lo tanto se tiene

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[2n]{2n})^2 = \lim_{n\to\infty} (2n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} = 1 \cdot L$$

luego $L^2 = L$, así $L = 1$, por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Proposición 3.19. *Sea* $p \in \mathbb{Z}^+ \quad p > 1$. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

Ejemplo 106. *Calculemos*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} (8 + \frac{2}{n^3})} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ejercicio 71. *Calcular*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n} + 1} + \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}} \right)$$

Solución:
Como

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \qquad n \geq 2$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n}) = 1$, entonces por teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Por otra parte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, por álgebra de límites

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} + \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 72. *Calcular*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n+2}-n^2}{n+n!}\cos(n!)$$

Solución:
Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n+2}-n^2}{n+n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{(\sqrt{n^4+3n+2}+n^2)(n+n!)}$$

pero

$$0 < \frac{3n+2}{(\sqrt{n^4+3n+2}+n^2)(n+n!)} < \frac{3n+2}{\sqrt{n^4+3n+2}+n^2}$$

además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n^4+3n+2}+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^4}}+1} = 0$$

Luego por teorema del acotamiento

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n+2}-n^2}{n+n!} = 0$$

y como la función coseno es acotada se tiene por teorema 3.13 que $L = 0$

Es importante hacer notar algunos límites fundamentales (ya mencionados) que debemos tener presente para el cálculo de otros límites.

Límites Fundamentales

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c, \quad c \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{nh} = 0, \quad h \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0, \quad \text{si } |r| < 1$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} hn}{n} = 0, \quad h \in \mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a \in \mathbb{R}^+$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

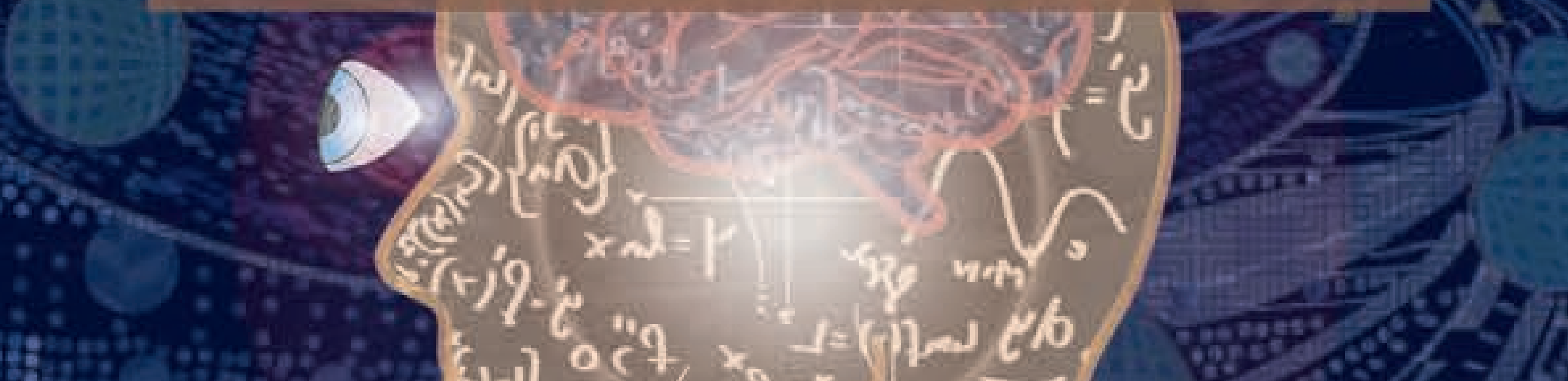
El pensamiento crítico es una de las habilidades cruciales en el siglo XXI. En la actualidad los objetivos del aprendizaje ya no se limitan a la transmisión de información y contenidos, sino que se espera que los alumnos sean capaces de analizar, interpretar, inferir, identificar los errores, elaborar nuevas preguntas y plantear soluciones innovadoras, comprender y darle significado a la notación abstracta, relacionándola con hechos o problemas reales.

En este libro se expone la teoría y práctica indispensable para un curso de Cálculo. Entre sus contenidos incluye: los números Reales, funciones, sucesiones y límites de sucesiones, límites de funciones y continuidad, y finalmente la derivada y sus aplicaciones.

Entre las principales características de la obra, se destacan las siguientes:

- Contiene una variedad de ejemplos y ejercicios resueltos.
- Presenta nuevos problemas del tipo “encuentre el error”.
- Plantea problemas del tipo “Verdadero o Falso”.
- Desarrolla problemas en un contexto real.
- Propone y desarrolla problemas de desafío, que son planteamientos de la vida real en diversas disciplinas.

El conocimiento del Cálculo y la adecuada compresión de los conceptos y sus aplicaciones, son parte de las bases fundamentales de la Ingeniería, Ciencias y otras disciplinas que demandan pensamiento crítico, lo que considera, entre otros, el desarrollo del pensamiento abstracto, analítico y lógico, capacidades de amplio interés en todas las profesiones que requieren enfrentarse a la solución de problemas complejos y planteamientos innovadores.



CENGAGE

ISBN-13: 978-607-526-705-0
ISBN-10: 607-526-705-0

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com