INGENIERIA ECONOMICA

Baca Currea

CON CD

OCTAVA EDICIÓN

FEP

FONDO EDUCATIVO PANAMERICANO

INGENIERIA ECONOMICA

INGENIERIA ECONOMICA

Guillermo Baca Currea

Profesor titular del

Politécnico Grancolombiano

Bogotá, D.C., Colombia

Revisión Técnica

CARLOS A. BACA CORREDOR

Economista

FONDO EDUCATIVO PANAMERICANO

Presentación

Esta obra ha sido el resultado de mi experiencia como docente durante más de 30 años en diferentes universidades en las áreas de matemática financiera y evaluación financiera de proyectos, por lo cual me he decidido a plasmarlo en este libro con el objeto de facilitar a estudiantes su aprendizaje y a los profesores para que tengan una herramienta más en su labor docente.

Agradezco a mis estudiantes de las universidades Politécnico grancolombiano, Piloto y EAN porque con sus preguntas en clase me han dado la oportunidad de investigar más profundamente la aplicación de los conceptos entregados en este texto y a su ves darle una mejor presentación didáctica.

Por lo anterior he decidido no trabajar con tablas financieras, como antiguamente se hacía, sino procurar que el estudiante analice y utilice fórmulas matemáticas que a la postre le van a dejar un mayor dominio de la materia e incentivar la utilización de la moderna tecnología como es el uso de las calculadoras financieras y los software utilizados en la actualidad.

A continuación detallo una breve guía de la forma como se ha orientado la octava edición:

En el capítulo uno se trata el interés simple únicamente con sus aplicaciones más importantes. En el capítulo dos se analiza en detalle el interés compuesto en lo pertinente a equivalencia de tasas y ecuaciones de valor. En el capítulo tres se desarrollan las principales aplicaciones del interés compuesto como son las aplicaciones al mercado bursátil, el manejo de inversiones en CDT y en monedas extranjeras. En el capítulo cuarto se estudian las anualidades ordinarias y anticipadas usando un enfoque moderno. Con el capítulo cinco se completa en estudio de las anualidades. Debido a la inflación, los gradientes son el modelo matemático que más se ajusta al proceso económico, por tal razón, se ha dejado el capítulo seis para hacer un detallado estudio sobre este tema. En el capítulo siete se estudian diferentes sistemas de amortización y de capitalización, incluyendo períodos de gracia, cuotas extras pactadas, prepagos, amortizaciones en valor constante y de deudas en otra monedas cancelando las cuotas en pesos. En el capítulo ocho se explica el manejo del software que viene en el CD (suministrado con la séptima edición) utilizable en el Excel 2000 y también se explica el manejo del software que viene en el disquete de las ediciones anteriores de este mismo libro, el cual es aplicable en las versiones anteriores de Excel, el anterior software permite elaborar tablas de amortización y de capitalización y calcular la tasa a la cual se cancela una deuda. En los capítulos nueve al doce se presenta y explica el uso de índices para evaluar financieramente proyectos y decidir entre diferentes alternativas de inversión. En el capítulo trece se analizan proyectos de inversión en situación de incertidumbre. En el capítulo catorce se analiza la época en que un bien de capital debe ser reemplazado y se estudia el concepto de sensibilidad en las decisiones En el capítulo quince se entra a estudiar el costo del capital y las diferentes fuentes de financiación. Finaliza el libro con el capítulo diecisiete dedicado al estudio de los planes de amortización en UVR.

De lo anterior podemos concluir: Los siete primeros capítulos son suficientes para cubrir un curso completo de matemática financiera durante un semestre con una intensidad de 4 horas a la semana, sin embargo, incluyendo el capítulo dieciséis y la elaboración de tablas de amortización por computador será necesario aumentar la intensidad horaria a 6 horas a la semana. En este último caso será de gran ayuda el texto EXCEL Y LA CALCULADORA FINANCIERA aplicados a la ingeniería económica tercera edición, del mismo autor y publicado por el Fondo Educativo Panamericano, en este último texto se explica cómo utilizar la calculadora financiera HEWLETT PACKARD modelos 17BII y 19BII y el Excel en la solución de los problemas propuestos en el libro de INGENIERIA ECONOMICA. Los capítulos del ocho al quince son suficientes para un curso de evaluación financiera de proyectos con intensidad de 4 horas a semana durante un semestre.

El libro contiene más de 200 problemas resueltos paso a paso que le proporcionan al estudiante la destreza necesaria para resolver los más de 330 problemas propuestos con su respectiva respuesta los cuales sirven para enriquecer la obra.

Este texto es aplicable a carreras técnico-administrativas tales como Administración de empresas, Economía, Contaduría, Ingeniaría financiera, Ingeniería Industrial y carreras afines.

El autor

Contenido

CAPITULO 4

Anualidades ordinarias y anticipadas

CAPITULO 5

Anualidades diferidas perpetuas y generales

CAPITULO 6

Gradientes

CAPÍTULO 7

Amortización y capitalización

CAPÍTULO 8

Aplicación a los sistemas

CAPÍTULO 9

Valor presente neto

CAPÍTULO 10

Costo anual uniforme equivalente (CAUE)

CAPÍTULO 11

Tasa interna de retorno TIR

CAPÍTULO 12

Relación beneficio costo

CAPÍTULO 13

Proyectos en situación de incertidumbre

CAPÍTULO 14

Análisis de reemplazo y sensibilidad

CAPÍTULO 15

Fuentes de financiación y el costo del capital

CAPITULO 16

Bonos

CAPÍTULO 17

El sistema UVR

Interés simple

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo daremos definiciones y conceptos básicos utilizados en las finanzas, los cuales serán indispensables para el desarrollo del presente texto. Este enfoque analítico nos permite la optimización de los recursos económicos, lo cual viene a ser el objetivo final de este texto.

VALOR DEL DINERO A TRAVÉS DEL TIEMPO

No es lo mismo tener hoy $100 000 que tener $100 000 dentro de un año, porque lo que hoy se puede hacer con ese dinero es más de lo que se podrá hacer dentro de un año debido a que normalmente todos los artículos suben de precio, por tal motivo cuando se habla de una suma de dinero debe especificarse la fecha o de lo contrario la información es incompleta. Lo anterior se puede expresar en una forma muy simple; el dinero cambia de valor a través del tiempo.

El concepto anterior está íntimamente ligado con el concepto de **equivalencia** que consiste en que, sumas de dinero diferentes en épocas distintas tienen el mismo poder adquisitivo, así por ejemplo, si dentro de un año necesito $120 000 para hacer lo que hoy hago con $100 000 entonces diré que estas sumas son equivalentes en el tiempo.

Interés

Todos los bienes son susceptibles de ser entregados a otra persona en arriendo y por ello cobrar un canon de arrendamiento, por lo que es posible dar una casa en arriendo y cobrar una suma mensual por el uso de esa casa, también es posible entregar en arriendo un vehículo o una máquina etc. De la misma forma es posible entregar en arriendo un dinero y el canon del arrendamiento del dinero recibe el nombre de interés el cual representaremos por I.

Otra forma de ver el concepto de interés es como la retribución económica que devuelve el capital inicial por período transcurrido, de forma tal que compense la desvalorización de la moneda, que cubra el riesgo y que pague el alquiler del dinero como premio al dueño por no haberlo consumido.

Tasa de interés

Es el porcentaje (%) que se paga por el alquiler del dinero, lo representaremos por i. Por ejemplo si tengo que pagar $4 de interés por un préstamo de $100, entonces la tasa de interés será del 4 por ciento que se puede escribir como 4% y si tengo que pagar 3 centavos por el préstamo de $1 la tasa será 0.03 por uno que también se puede escribir como 3% puesto que 3% = 3/100 = 0.03. La tasa de interés simple se expresa como nominal anual. Mientras no se dé ninguna especificación las tasas de interés se entenderán como anuales.

Tiempo

Es la duración de la inversión; y lo representaremos por n En interés simple la unidad de tiempo es el año.

CAPITAL INICIAL

Es la cantidad de dinero que se invierte, también se le conoce con el nombre de principal, valor actual, valor inicial o valor presente y lo representaremos por P.

POSTULADO BÁSICO DE LAS FINANZAS

El postulado básico de las finanzas establece que el interés es una función directa que depende de 3 variables: el capital inicial (mientras más grande sea el capital mayor deberá ser el interés) la tasa (la tasa depende de las fuerzas del mercado, cuando hay escasez de dinero o cuando los precios en general están al alza la tasa será mayor) y del tiempo (mientras más tiempo dure la inversión mayor será el interés)

FORMULA DE INTERÉS SIMPLE

De acuerdo al postulado anterior podemos establecer la siguiente ecuación:

$$\boxed{I = Pin} \qquad \{1\}$$

CLASES DE INTERÉS SIMPLE

No hay un criterio único para la aplicación de la fórmula del interés simple; este problema es muy antiguo y se originó cuando algunas personas para simplificar operaciones usaron un año de 360 días, y al interés así calculado lo llamaron ordinario. Como esto cálculo causa diferencias cuando se trata de un préstamo o una inversión considerable y el error puede llegar a ser significativo; otras personas utilizaron un año de 365 días y al interés así calculado lo llamaron interés exacto.

¿Cómo calcular el tiempo que dura la inversión cuando es inferior a un año? De dos maneras: en forma aproximada suponiendo que todos los meses son de 30 días o en forma exacta teniendo en cuenta los días que tenga el mes según el calendario.

De lo anterior se concluye que existen 4 clases de interés simple las cuales vamos a explicar mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Calcular el interés mensual, en cada caso, suponiendo un préstamo de $5 000 efectuado en el mes de febrero del 2000 (el año 2000 es año bisiesto y cada cuatro años es bisiesto), cobrando una tasa del 30% nominal anual.

Solución: en todos los casos la fórmula es la misma I = Pin en el cual P = 5 000, i = 30% = 30/100 = 0.3 y la aplicación del tiempo n se hace de diferentes formas las cuales vemos en el siguiente cuadro:

I=Pin	ORDINARIO	con tiempo exacto	I = 5 000 x 0.3 x 29/360 =120.83	(1)
		con tiempo aproximado	I = 5 000 x 0.3 x 30/360 = 125.00	(2)
	EXACTO	con tiempo exacto	I = 5 000 x 0.3 x 29/366 = 118.85	(3)
		con tiempo exacto sin bisiesto	I = 5 000 x 0.3 x 28/365 = 115.07	(4)
		con tiempo aproximado	I = 5 000 x 0.3 x 30/366 = 122.95	(5)

(1) Se conoce con el nombre de interés bancario y se obtiene dividiendo el tiempo días reales entre un año de 360 días (R/360)

(2) Se conoce con el nombre de interés comercial ó interés base 360 (porque está basado en un año de 360 días y en meses de 30 días los cálculos se facilitan mucho debido a la posibilidad de hacer simplificaciones (30/360)

(3) Comúnmente llamado interés racional, exacto o verdadero, es el único que produce un resultado exacto (R/R)

(4) Se le llama interés base 365 es muy similar al interés exacto, no se incluye el día bisiesto y el año base es de 365 aún en años bisiestos. (R sin bisisesto/365)

(5) No tiene nombre, solamente existe en teoría, es el más barato y no tiene utilización.

GRAFICA DE FLUJO DE CAJA

A fin de facilitar la comprensión de los problemas mediante una gráfica, se ha adoptado la siguiente convención: la línea horizontal representa el tiempo y allí escribiremos las fechas y los períodos de tiempo; de esta línea salen unas flechas hacia arriba y otras hacia abajo, las que están hacia arriba representan ingresos y las que están hacia abajo representan egresos.

Nota. En este texto las fechas las daremos en la forma: DD-MM-AA (DÍA MES AÑO) por ejemplo el día 15 de septiembre de 1998 lo representaremos así: 15-09-98

Capital final

Es el capital inicial mas los intereses, también se le denomina monto, valor final, valor *futuro, la suma o acumulado* y *lo representaremos por S. De acuerdo a la definición la* fórmula será:

$S = P + I$, y si reemplazamos a I por Pin tendremos que

$S = P + Pin$ y factorizando P se tiene:

$$\boxed{S = P(1+in)} \qquad \{2\}$$

EJEMPLO 2

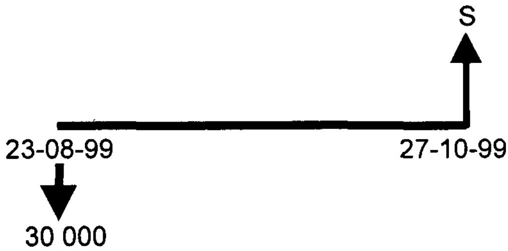
Calcular el monto exacto de $30 000 desde el 23 de agosto de 1999 hasta el 27 de octubre del mismo año al 35% nominal anual.

Solución: el problema consiste en invertir $30 000 el día 23 de agosto (implica una flecha hacia abajo por ser un egreso) y recuperar $S el día 27 de octubre (flecha hacia arriba por ser un ingreso).

Primero calculamos los días exactos que hay entre esas dos fechas; para ello podemos usar una tabla de días, un almanaque o cualquier otro procedimiento moderno como una calculadora financiera o el programa EXCEL.

Usando la tabla de días del anexo1 se tiene:

El 27 de octubre corresponde al 300 del año y el 23 de agosto corresponde al día 235 del mismo año, por tanto la diferencia 300 - 235 = 65 corresponde a los días que hay entre esas dos fechas.



$$S = 30\,000(1 + 0.35 \text{ x } \frac{65}{365} = \$31\ 869.86$$

CAPITAL INICIAL

Si despejamos P de la fórmula del monto se tiene una nueva fórmula que nos permite calcular el valor inicial a partir de valor final representado por la fórmula:

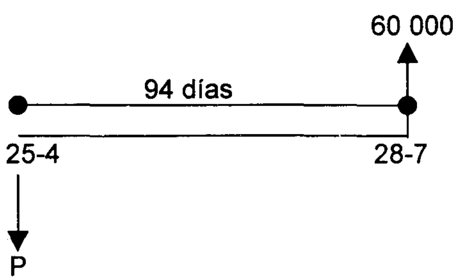
$$\boxed{P = S/(1+in)} \qquad \{3\}$$

Ejemplo 3

¿Cuánto dinero debo depositar hoy 25 de abril en una cuenta que paga el 23% simple real para que el 28 de julio pueda retirar $60 000?

Nota cuando no se especifique el año, en los cálculos deberá usarse un año que no sea bisiesto.

Solución:

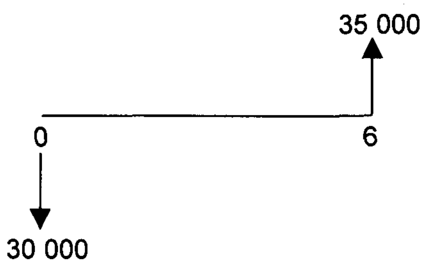


$$P = \frac{60000}{1 + 0.23\,\frac{94}{365}} = 56644.77$$

Ejemplo 4

¿A qué tasa de interés comercial, \$30 000 se convertirán en \$35 000 en 6 meses?

Solución:



Podemos aplicar la fórmula del monto o la fórmula del valor presente. Usando esta última tenemos:
30 000 = 35 000/ (1+i x 6/12) y al despejar se tiene que i = 0.3333 = 33.33%

Interés anticipado

El interés anticipado consiste en cobrar los intereses al principio del periodo.

Tasa anticipada

La tasa anticipada es la que genera el interés anticipado y la representaremos por "d", como veremos más adelante también se le denomina tasa de descuento

Descuento simple

El descuento simple consiste en cobrar intereses por anticipado calculados sobre el valor final.

Ya vimos que la fórmula del interés simple vencido es I= pin y por similitud, la fórmula del descuento que corresponde al interés simple anticipado será:

$$\boxed{D = Sdn} \qquad \{4\}$$

Donde D es la cantidad descontada

Valor líquido

Se denomina valor líquido o valor de transacción al valor nominal menos el descuento. De acuerdo a esta definición la fórmula del valor líquido será:

$$VT = S - D$$
$$VT = S - Sdn = S(1\text{-}dn)$$
$$\boxed{VT = S(1\text{-}dn)} \qquad \{5\}$$

Para explicar los conceptos anteriores utilizaremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5

Supongamos que el 17 de abril de 1999 una persona necesita comprar mercancías por valor de $800 000 para surtir su almacén y además solicita a la fábrica un plazo de 3 meses para el pago de la factura. Naturalmente que la fábrica está interesada en hacer la venta y para ello le otorgará un crédito pero le exige un documento como seguridad del pago de la deuda a su vencimiento; éste puede ser una letra que quedará en poder de la fábrica y será cobrada a su vencimiento.

Los $800 000 constituyen el valor nominal de la letra que tendrá por vencimiento el 17 de julio del mismo año.

Ahora supongamos que el 20 de junio a la fábrica se le presentó un gasto inesperado y que necesita dinero en efectivo para cubrir esta contingencia; la fábrica puede ir al banco ABC a ofrecerle en venta la letra, pero es obvio que el banco no le pagará $800 000 por el documento sino que sobre el valor nominal hará un descuento, es decir que cobrará un interés por anticipado sobre el valor final de la letra.

Ahora supongamos que el banco ABC en este tipo de operaciones cobra una tasa anticipada anual del 36% simple bancario (d = 36%) aplicable al valor final del documento. Es a esta tasa a la que denominaremos tasa de descuento.

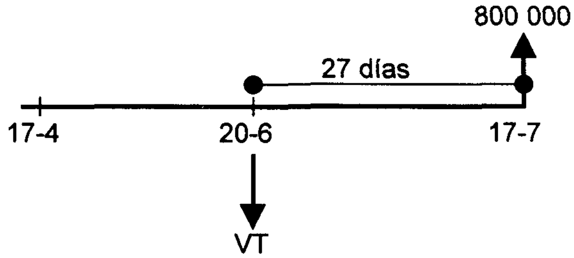
¿Cuál es el valor líquido?

Por ser un interés bancario habrá que calcular los días exactos que transcurren entre la fecha de transacción 20 de junio y la fecha de vencimiento o maduración del documento 17 de julio.

Entonces el primer paso para calcular el descuento será hallar los días de diferencia entre esas dos fechas

$$17 - 07 = 198$$
$$20 - 06 = 171$$
$$\overline{\text{diferencia} = 27}$$

Continuando con el problema, la gráfica de flujo de caja se presenta a continuación:



El valor líquido o valor de transacción es la cantidad que le entregará el banco a la fábrica y se puede calcular con la fórmula {5}

$$VT = S(1\text{-}dn) = 800\ 000(1\text{-}0.36 \times 27/360) = \$778\ 400$$

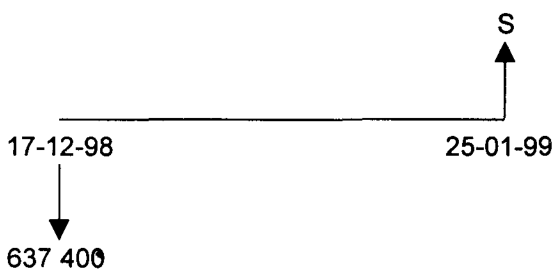
En consecuencia, la fábrica recibirá el 20 de junio $778 400 con lo cual solucionará su problema de iliquidez

Ejemplo 6

¿Cuál debe ser el valor nominal de un documento que va a ser descontado por un banco al 38% nominal anual periodo anticipado entre el 17 de diciembre de 1998 y el 25 de enero de 1999 si el valor líquido es $637 437?

Solución: calculamos los días que hay entre esas dos fechas los cuales vienen a ser 39 días

La gráfica de flujo de caja será:



Si despejamos S de la fórmula {5} tenemos que $S = \dfrac{VT}{(1\text{-}dn)}$ y reemplazando tenemos:

$$S = \frac{637437}{1\text{-}0.38\ \dfrac{39}{360}} = \$664\ 804.80$$

En consecuencia el valor nominal del documento debe ser $664 804.80

Tasa realmente cobrada en una operación de descuento.

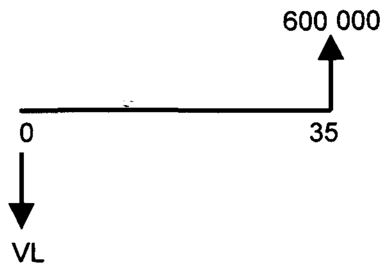
La tasa de descuento se aplica al valor final del documento, pero en el interés simple la tasa se aplica al valor inicial, en consecuencia con el mismo valor de tasa se obtendrán diferentes resultados de interés cobrado. Para calcular la tasa que realmente se cobra en una operación de descuento se aplica la fórmula del monto simple.

Ejemplo 7

Una letra por valor de $600 000 va a ser descontada por un banco 35 días antes del vencimiento al 38%. Calcular la tasa bancaria que realmente está cobrando el banco.

Solución:

La gráfica de flujo de caja es:

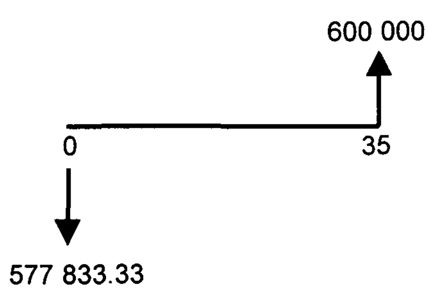


primero calculamos el valor líquido aplicando la fórmula (5) a la gráfica

$$VT = S(1-dn)$$

$$VT = 600\,000(1-0.38 \times 35/360) = 577\,833.33$$

Observamos que hoy el banco invierte $577 833.33 y a los 35 días obtiene $600 000



Para calcular la tasa bancaria que verdaderamente se está cobrando aplicamos la fórmula (2) y tenemos:

$$S = P(1+in)$$

$$60000 = 577833.33\left(1 + i\,\frac{35}{360}\right)$$

Despejando se tiene que i = 39.46% que es superior al 38% que cobra en operación de descuento.

Descuentos en cadena.

Es usual que sobre una misma factura ocurran varios descuentos, tal es el caso cuando una fábrica vende mercancía a un almacén, en este caso la fábrica ofrece una serie de descuentos que son aplicables a la misma factura. Tales descuentos pueden ser:

1. Descuento por volumen, consiste en otorgar un descuento que será progresivo conforme al valor de la factura, (en ocasiones el descuento se otorga con base en el número de unidades vendidas)

   Este tipo de descuento intenta incentivar al comprador para que haga un pedido mayor con lo cual sus ganancias aumentarán al tener un mayor descuento

   Un ejemplo de tabla de descuento al por mayor puede ser la siguiente:

Valor de la factura	Descuento
menor de $100 000	0%
más de $100 000 y menos de $200 000	10%
más de $200 000 y menos de $300 000	15%
más de $300 000 y menos de $400 000	20%
más de $400 000 y menos de $500 000	25%
más de $500 000	30%

2. Descuento por pronto pago: tiene por objeto incentivar al comprador a que pague lo más pronto posible, el descuento estará en relación inversa con el plazo para pagar la factura, un ejemplo de tabla puede ser:

Plazo	Descuento
Al contado	10%
30 días	6%
60 días	3%
90 días	0%

3. Descuento por embalaje: hay almacenes que venden la mercancía empacada con el logotipo del fabricante; en ocasiones hacen el pedido y solicitan que llegue sin empacar, entonces la fábrica concede un descuento adicional igual al costo del

empaque, otras veces puede ser que la mercancía llegue con un empaque más económico que el normal, o con un empaque de lujo el cual tendrá un recargo
4. Descuento por temporada: a fin de incentivar las ventas en épocas de baja demanda las fábricas ofrecen un descuento adicional para los pedidos que sean cancelados dentro de ciertas fechas.
5. Descuento por fidelidad: también se conoce con el nombre de descuento por antigüedad, es un pequeño porcentaje que se otorga a los clientes más leales

Las anteriores son las principales razones para otorgar descuentos, sinembargo estos nunca se suman unos con otros sino que una vez que se aplicó el primero al saldo de la factura se le aplica el siguiente descuento y así sucesivamente hasta agotarlos todos; la respuesta final no varía si se cambia el orden de aplicar los descuentos según se puede deducir del siguiente análisis

Valor de la factura antes del descuento	Tasa de descuento	Valor del descuento	Valor de la factura después del descuento
A	d_1	Ad_1	$A - Ad_1 = A(1-d_1)$
$A(1-d_1)$	d_2	$A(1-d_1)d_2$	$A(1-d_1) - A(1-d_1)d_2 = A(1-d_1)(1-d_2)$
$A(1-d_1)(1-d_2)$	d_3	$A(1-d_1)(1-d_2)d_3$	$A(1-d_1)(1-d_2) - A(1-d_1)(1-d_2)d_3 =$ $A(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)$
|	|	|	|
|	|	|	|
|	|	|	|
|	|	|	
$A(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_{n-1})$	d_n	$A(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_{n-1})d_n$	$A(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_n)$

El descuento total será el valor inicial de la factura menos el valor final de la factura, esto es:

$$D = A - A(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_n)$$

$$\boxed{D = A[1-(1-d1)(1-d2)...(1-dn)]} \qquad \{6\}$$

Al dividir el valor final de la factura entre el valor inicial de la misma factura y luego simplificando la A se obtiene la fórmula para calcular la tasa promedio de descuento, esto es:

$$\boxed{d = 1-(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_n)} \qquad \{7\}$$

Puede observarse que en la serie de paréntesis $(1-d_1)(1-d_2)...(1-d_n)$ podemos cambiar el orden de los paréntesis y el resultado no se altera, por tal razón el orden de los descuentos no importa.

Ejemplo 8

El valor inicial de una factura, es decir sin descuentos es de $1 236 150. Hallar el descuento promedio y el valor final de la factura cuando se conceden los siguientes descuentos sobre la misma factura:

A) Por pago al contado 10%

B) Por compra al por mayor 25%

C) Por temporada 8%

Solución: para calcular el descuento promedio aplicamos la fórmula {7}

$$d = 1-(1-0.1)(1-0.25)(1-0.08) = 0.379 = 37.9\%$$

Para hallar el valor final de la factura aplicamos el descuento promedio al valor inicial así:

$$0.379 \times 1\,236\,150 = \$468\,500.85$$

y si quisiéramos averiguar el valor que hay que pagar vasta restar esta cantidad del valor inicial

$$1\,236\,150 - 468\,500.85 = \$767\,649.15$$

Pagos parciales

Hay ocasiones en que al otorgar un crédito se convenga que, a más tardar, será cancelado en una fecha convenida, pero el deudor puede hacer abonos parciales a la deuda. Cada vez que se haga un pago parcial se liquidarán los intereses hasta la fecha en que se efectúe y el excedente del pago se abonará a la deuda. Con frecuencia este sistema es utilizado por el comercio en los créditos de consumo.

Ejemplo 9

Una mercancía vale al contado $430 000, si el 17 de marzo se paga una cuota inicial del 30% y el saldo será cancelado con interés racional del 32% y un plazo máximo de 4 meses, determinar el valor final que deberá pagarse al vencimiento suponiendo que se efectuaron los siguientes pagos parciales:

a) el 25 de abril $130 000
b) el 18 de junio $50 000
c) el 7 de julio $94 000

Solución: Como el plazo máximo es de 4 meses que se cuentan a partir de la fecha de compra se concluye que la fecha de vencimiento del crédito será el 17 de julio. Cada vez que se haga un pago liquidamos los intereses causados hasta esa fecha descontamos el abono para encontrar un nuevo saldo.

Deuda inicial (0.7 x 430 000)	$301 000.00
Intereses causados hasta el 25 de abril (301 000 x 0.32 x 39/365)	10 291.73
Abono el 25 de abril	130 000.00
Saldo el 25 de abril	181 291.73
Intereses causados hasta el 18 de junio (181 291.73 x 0.32 x 54/365)	8 582.80
Abono el 18 de junio	50 000.00
saldo el 18 de junio	139 874.53
Intereses causados hasta el 7 de julio (139 874.53 x 0.32 x 19/365)	2 329.96
Abono el 7 de julio	94 000.00
Saldo el 7 de julio	48 204.49
Intereses causados hasta el 17 de julio (48 204.49 X 0.32 X 10/365)	422.61
Saldo el 17 de julio	48 627.10

Si el 17 de julio el deudor no se presenta a cancelar la suma de $48 627.10 entonces a partir de esa fecha se comienzan a cobrar intereses en mora.

Ejercicios propuestos.

1. Calcular el interés simple comercial de $300 000 desde el del 18 de marzo al 18 de junio del mismo año al 3.4% mensual.

   Respuesta: $ 30 600

2. Una persona invierte $250 000 al 40% desde el 15 de septiembre de 1998 hasta el 18 de noviembre de 1998. Calcular:
   a) el monto racional y
   b) el monto bancario.

   Respuestas: a) $267 534.25, b) $2677 777.78

3. ¿Cuánto debe invertirse hoy 17 de octubre en un fondo que garantiza el 28% simple real para que el 20 de marzo del siguiente año pueda retirar la suma de $150 000?

   Respuesta: $134 151.72

4. Hallar el valor presente de $500 000 en 31/2 años al 3% mensual

   Respuesta: $221 239

5. Hace 6 años compré un lote en $900 000 y hoy se vendió en $6 millones. Hallar la tasa de interés comercial que gane en este negocio.

   Respuesta: 94.44%

6. ¿Qué tan rentable es un documento que hoy se puede comprar en $75 000 el cual devolverá al cavo de 3 años la suma de $330 000?

   Respuesta: 113.33%

7. Se recibe un préstamo por $1 millón al 42% nominal anual período vencido el día 8 de agosto de 1999 con vencimiento el 8 de marzo del 2000. Hallar el valor final del préstamo calculando los intereses:
   a) interés exacto o racional
   b) interés comercial o base 360
   c) interés bancario
   d) interés base 365
   Tenga en cuenta que el año 2000 es un año bisiesto

   Respuestas: a) $1 244 426.23; b) $1 245 000; c) $1 248 500; d) $1 243 945.21

8. Un pagaré con valor presente de $300 000 emitido el 15 de septiembre de 1999 con plazo de 270 días a una tasa de interés del 30% nominal anual período vencido. Hallar el valor futuro y la fecha de vencimiento en:
   a) interés exacto o racional
   b) interés comercial o base 360
   c) interés bancario
   d) interés base 365

   Respuestas: a) $366 393.44; 11-06-00; b) $367 500; 15-06-00; c) $367 500; 11-06-00; d) $366 575.34; 12-06-00

9. Una letra por $550 000 madura el 23 de agosto de 1998 y va a ser descontada el 17 de julio del mismo año al 38%. Determinar el valor de la transacción.

   Respuesta: $528 519.44

10. El 15 de diciembre de 1999 una empresa recibe un pagaré por $2 millones a un plazo de 3 meses al 25% nominal anual vencido de interés comercial simple. El 14 de enero lo negocia con un banco que lo adquiere a una tasa de descuento del 29% nominal anual anticipado en interés bancario.¿Cuánto recibirá la empresa por el pagaré y cuánto ganará el banco en la operación de descuento?

    Respuestas: la empresa recibe $2 020 579.86; el banco gana $104 420.14

11. Halle el valor de maduración de un pagaré con vencimiento el 20 de abril si va a ser descontado el 13 de marzo del mismo áño al 40% y su valor de transacción es de $ 78 400

    Respuesta: $81 856.15

12. Una persona solicita un préstamo a un banco por la suma de $800 000, a un plazo de 90 días y le cobran una tasa anticipada del 38%.
    a) ¿Cuál es el valor líquido que le entregan?
    b) Suponga que el banco cobra $15 000 por el estudio del crédito, ¿cuál será el valor líquido?

    Respuestas: a) $724 000; b) $709 000

13. ¿Cuál es el valor del documento que queda en poder de un banco, si el prestatario recibe un valor líquido de $50 000 por un documento con maduración en 90 días, si le cobran una tasa de descuento del 41%?
    a) Sin tener en cuenta costos de apertura del crédito y
    b) Teniendo en cuenta que el banco cobra $2 000 por estudio del documento

    Respuestas: a) $55 710.31; b) $57 938.72

14. Un documento de valor inicial $70 000 es fechado el 25 de septiembre de 1998 a un plazo de 325 días y un interés del 32%. Si es descontado por un banco el 18 de marzo de 1999 al 40% determinar:
    a) la fecha de vencimiento
    b) El valor al vencimiento
    c) El valor de transacción
    Usar interés bancario

    Respuestas: a) 16-08-99; b) $90 222.22; c) $75 084.94

15. Hallar la verdadera tasa bancaria que cobra un banco cuando descuenta un documento con valor de maduración de $400 000 si es descontado 25 días antes del vencimiento al 41% nominal anual anticipado.

    Respuesta: 42.2% nominal anual vencido

16. Un almacén ofrece los siguientes descuentos, sobre una mercancía cuyo costo inicial es de $200 000:
    30% por venta al por mayor,
    10% por pago al contado y
    5% por enviar la mercancía sin empaque.
    a) ¿Cuál es el valor final de la factura?
    b) ¿Cuál es el descuento promedio que se otorgó?

    Respuestas: a) $119 700 b) 40.15%

17. Una fábrica ofrece un descuento del 25% en ventas al por mayor, el 5% por pronto pago y el 4% por embalaje. ¿Cuál debe ser el descuento adicional que puede ofrecerse a los empleados de la misma fábrica para que el descuento total no sea superior al 35%?

    Respuesta: 4.971%

18. Se compra un artículo por $870 000 el día 25 de noviembre y se acuerda que será cancelado mediante el sistema de pagos parciales, con un plazo máximo de 3 meses. Si el día de la compra se da una cuota inicial del 30%, el 12 de diciembre se hace un abono parcial de $200 000 y el 20 de enero del siguiente año se hace otro abono parcial de $150 000 ¿cuál debe ser el valor del pago final que hecho al vencimiento cancelará la deuda? Suponga que se carga un interés bancario del 34%.

Respuesta: $293 865.71

Interés compuesto CAPITULO 2

INTRODUCCION

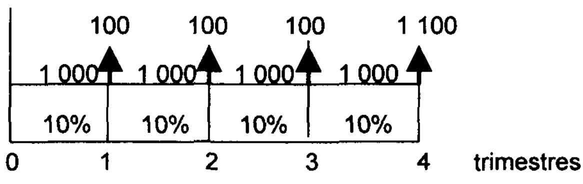
La gran mayoría de las operaciones financieras se realizan a interés compuesto con el objeto de tener en cuenta la reinversión de los intereses, es por esta razón que este capítulo es de gran importancia en el desarrollo de todas las finanzas.

CONCEPTO

La diferencia fundamental que existe entre el interés simple y el interés compuesto esta en que en el interés simple los intereses deben ser pagados cada vez que se liquidan mientras que en el interés compuesto cada vez que se liquidan se acumulan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a liquidar intereses.

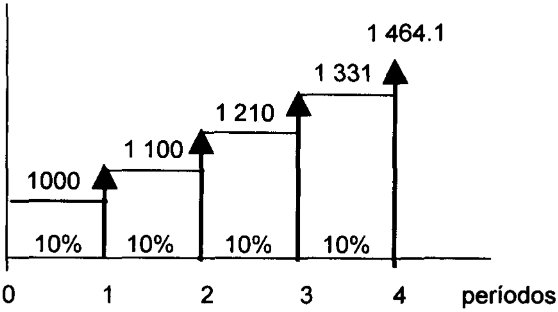
Ejemplo 1

Supongamos que tenemos un capital de $1 000 que será invertido al 10% trimestralmente durante un año, primero hacemos la inversión en interés simple y después hacemos la inversión en interés compuesto. El comportamiento del capital a lo largo del año en cada caso se muestra en las siguientes gráficas:
Interés simple



Al final del primer trimestre se liquida un interés de 1 000 x 0.1 = $100 y se pagan en consecuencia el capital de $1 000 no se modifica y así para el siguiente trimestre la liquidación de intereses vuelve a dar $100, solamente al final del cuarto trimestre el capital a pagar será de $1 100 correspondiente a los $1 000 de la inversión inicial más los $100 de los intereses.

Interés compuesto



Al final del primer trimestre se liquidan los primeros intereses 1 000 x 0.1 = $100 y se acumulan al capital para obtener el primer monto por $1 100.

Al final del segundo período se liquidan los segundos intereses, pero esta vez sobre el monto anterior, esto es: 1 100 x 0.1 = $110 y al acumularlo obtenemos un nuevo monto 1100+110 = 1210 y así sucesivamente hasta llegar a un monto final de $1 464.10

Algebraicamente podemos representar el resultado anterior en la siguiente forma:

Periodo	capital inicial	interés	capital final
1	P	Pi	$S_1 = P+Pi = P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$S_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2 i$	$S_3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^3$
4	$P(1+i)^3$	$P(1+i)^3 i$	$S_4 = P(1+i)^3 + P(1+i)^3 i = P(1+i)^4$
n	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1} i$	$S_n = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1} i = P(1+i)^n$

Con lo que llegamos a concluir que la fórmula del interés compuesto es:

$$\boxed{S = P(1+i)^n}$$

Donde S = valor final o monto
P = valor presente o inicial
i = tasa del período
n = número de períodos
Ahora daremos algunas definiciones.

Tasa efectiva

La tasa del período la denominaremos tasa efectiva y la representaremos por i, en el ejemplo 1 la tasa efectiva es el 10%, pero como el período es el trimestre diremos que la tasa es el 10% efectivo trimestral y se puede escribir como 10%ET, cuando los períodos sean meses se puede decir que la tasa es efectiva mensual, cuando sean semestres se dirá que la tasa es efectiva semestral y así sucesivamente. Como podemos observar existen muchas posibilidades por lo que a continuación de la tasa debe indicarse la efectividad por ejemplo 3% EM significa que es efectiva mensual.

En el caso particular en que el período es el año se dirá que la tasa es efectiva anual y solo en este caso puede omitirse el nombre de efectivo anual porque toda tasa que no tenga nombre se asume que es efectiva anual, por tal motivo i = 35% = 35% EA, pero hacemos énfasis que esto es válido solo en el caso de las tasas efectivas anuales.

Observación: En algunos textos asumen que la única tasa efectiva es la anual, pero esta restricción dificultará algunas operaciones, razón por la cual es más aconsejable definir la tasa periódica como tasa efectiva. En Colombia la Superintendencia Bancaria solo reconoce como tasa efectiva la que tiene por período el año y es la que nosotros denominamos como efectiva anual, a la que denominamos como tasa efectiva mensual la Superintendencia la denomina periódica mensual, a la efectiva semestral la denomina periódica semestral y así sucesivamente.)

Tasa nominal

La tasa del año la denominaremos tasa nominal y la representaremos por j, pero como dentro del año puede haber varias liquidaciones habrá que indicar cuántas hay.

En el ejemplo 1 tenemos que i = 10% ET (o periódica trimestral) lo que significa que la tasa del trimestre es el 10% y como un año tiene 4 trimestres puede concluirse que para todo el año se cobrará el 40% pero trimestralmente liquidaremos los intereses, esto se puede representar de 3 maneras diferentes: Primero por j = 40% CT donde CT significa convertible trimestralmente o capitalizable trimestralmente.

Segunda forma: Por j = 40% NT que significa nominal trimestral y por una tercera forma muy típica en Colombia: por j = 40%TV que significa que en todo el año se paga el 40% pero que se paga por trimestres vencidos. Esta última forma se presta para equívocos fuera de Colombia, por tal razón en este texto solo será utilizado en forma esporádica. Como ejemplo veamos el siguiente caso:

Si el período es el semestres i = 15% ES = 15% período semestre y
j = 30% CS = 30%NS = 30%SV

Relación entre la tasa efectiva y la tasa nominal

De lo visto anteriormente se puede concluir que la tasa nominal es igual a la efectiva multiplicada por el número de períodos que hay en un año, el número de períodos que hay en un año lo representaremos por m. Así llegamos a las siguientes fórmulas:

$$\boxed{j = i \times m}$$

$$\boxed{i = \frac{j}{m}}$$

La tasa nominal anual se emplea en el interés simple porque esta tasa no tiene en cuenta la capitalización de intereses; la tasa efectiva o periódica es la que se debe usar en las fórmulas del interés compuesto.

Ejemplo 2

a) Dado el 3% EM entonces $m = 12$ y $j = 3 \times 12 = 36\%$ CM = 36% NMV
b) Dado el 5% EB (efectivo bimestral) entonces $m = 6$ y $j = 5 \times 6 = 30\%$ CB = 30% NBV
c) Dado el 28% NS entonces $m = 2$ y podemos establecer que $i = \frac{28}{2} = 14\%\text{ES}$

Ejemplo 3

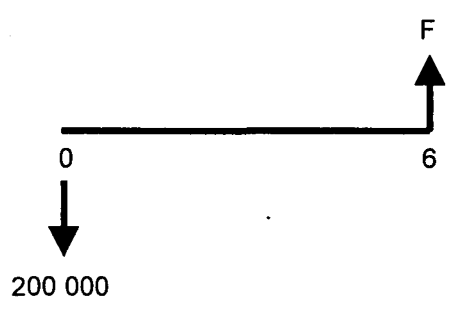
Se invierte $200 000 en un depósito a termino fijo de 6 meses en un banco que paga el 28.8%NM. Determinar el monto de la entrega al vencimiento.

Solución:

Puesto que la tasa es nominal mensual concluimos que los períodos son meses y el número de períodos que hay en un año es 12 (m = 12) Por tanto:

$$i = \frac{28.8}{12} = 2.4\%\text{EM}$$

Además, el número de períodos que dura la inversión es 6 (n = 6)

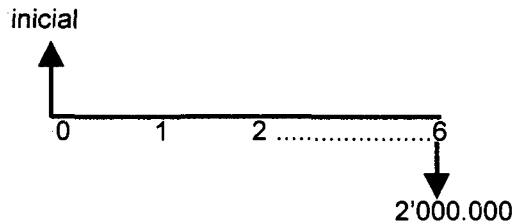


Observe que P = 200 000 y los hemos dibujado hacia abajo porque desde el punto de vista del inversionista se presenta un egreso en el momento de constituir el depósito a término fijo y F lo dibujamos hacia arriba porque el cobro al vencimiento le representa un ingreso. La aplicación de la fórmula es:

$$S = P(1+i)^n = 200\,000(1+0.024)^6 = \$230\,584.30$$

Ejemplo 4

Una persona debe pagar en 18 meses la suma de $2'000.000 ¿Cuál debe ser el valor del depósito que se haga hoy en una cuenta que paga el 8% efectivo trimestral para poder retirar esa suma? (Gráfica hecha para la cuenta)



Tomamos 6 períodos porque como la tasa es efectiva trimestral los períodos son trimestres y en 18 meses habrá 6 períodos.

Al reemplazar en la fórmula del interés compuesto tenemos:

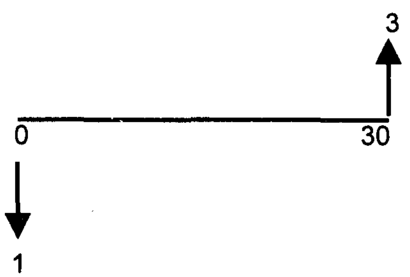
$2'000.000 = P(1+0.08)^6$ y al despejar se obtiene: P = $1'260.339,25

EJEMPLO 5

¿A qué tasa efectiva mensual se triplica un capital en 2 ½ años?

Solución:

Para triplicar un capital podemos pensar en invertir $1 y que éste se convierta en $3, además como los períodos son meses, entonces en los 2 ½ años hay 30 períodos y la gráfica será:



Aplicando la fórmula del interés compuesto se tiene:

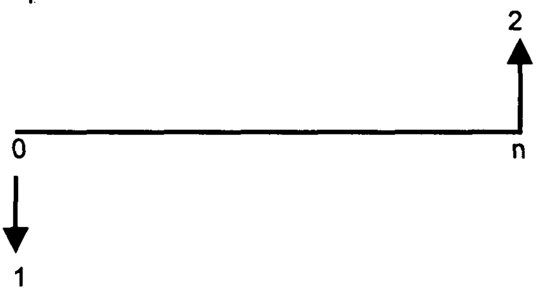
$3 = 1(1+i)^{30}$ y despejando $i = (3)^{1/30} - 1 = 0.0373 = 3.73\%$

Ejemplo 6

¿En cuanto tiempo se duplica un capital al 24% nominal mensual vencido?

Solución:

Para duplicar un capital podemos tomar cualquier valor y lo más elemental es tomar $1 y convertirlo en $2 en n períodos



Solución:

La tasa del 24 % nominal mensual corresponde a una tasa del 2% efectivo mensual. Y al aplicar la fórmula del interés compuesto se tendrá:

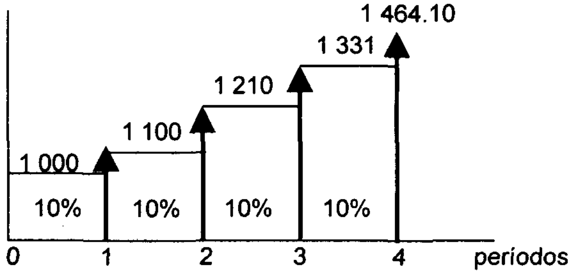
$$2 = 1(1+0.02)^n \text{ y al despejar se tiene: } n = \frac{\log 2}{\log 1.02} = 35.002788781$$

De donde se concluye que el número de períodos es 35

Equivalencia de tasas

Definición: tasas equivalentes son aquellas que teniendo diferente efectividad producen el mismo monto al final de un año.

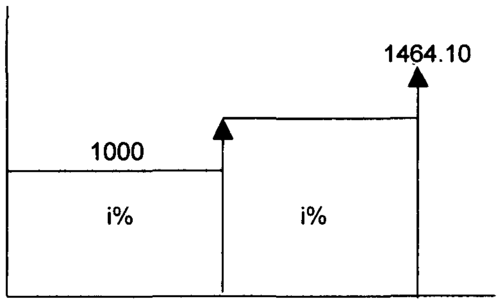
Al inicio de este capítulo vimos que si invertíamos un capital de $1000 durante un año al 10% efectivo trimestral al final del año tendríamos un resultado de $1464.10 tal como se aprecia en la gráfica.



El monto final también se puede calcular usando la fórmula del interés compuesto así:

$$S = 1000(1+0.1)^4$$

Ahora bien, supongamos que se quieren hacer liquidaciones semestrales pero que el resultado final sea el mismo que el obtenido con liquidaciones trimestrales, entonces con una tasa i% efectivo trimestral la gráfica quedará así:



El monto final también se puede calcular usando la fórmula del interés compuesto así:

$$S = 1000(1+i)^2$$

Es obvio, que de la gráfica anterior es muy fácil calcular el valor que tendrá la tasa i%, pero no lo haremos en forma directa sino que seguiremos un camino más largo con el fin de buscar otro objetivo.

Como el resultado final debe ser igual en ambos casos se tendrá que:

$$1000(1+0.1)^4 = 1000(1+i)^2$$

al simplificar por 1000 a cada lado tenemos:

$$(1+0.1)^4 = (1+i)^2 \qquad [1]$$

Si despejamos i de la ecuación anterior la respuesta es: i = 21% semestral (tendrá efectividad semestral puesto que los nuevos períodos son semestres.

La conclusión a la que llegamos es que el 10% trimestral = 21% semestral

Sin embargo hay algo más con relación a la equivalencia de tasas y es que producirán el mismo monto sin importar el capital o el tiempo, por ejemplo: el monto de \$30 000 en 3 años al 10% trimestral será:

$$S = 30\,000(1+0.1)^{12} = \$94\,152.85$$

Y el mismo monto calculado al 21%semestral será:

$$S = 30\,000(1+0.21)^{6} = \$94152.85$$

Volvamos a la ecuación [1] y la escribiremos como:

$$(1+i_1)^{m1} = (1+i_2)^{m2} \qquad [2]$$

donde: i_1 = tasa conocida o inicial en el caso anterior es 10%
i_2 = nueva tasa o sea la que se va a calcular
m1 = períodos iniciales que hay en un año en este caso como los períodos son trimestres entonces m1 = 4
m2 = períodos de la nueva tasa, como la nueva tasa debe tener efectividad semestral entonces m2 = 2

Al reemplazar los datos anteriores en la ecuación [2] resulta: $(1+0.1)^4 = (1+i)^2$ que es la misma ecuación [1].

La ecuación [2] nos permite en una forma muy fácil cambiar de efectividad, simplemente hay que reemplazar las variables por los datos conocidos y por esta razón la llamaremos la ecuación del cambio de efectividad.

Observación: Para unificar los procedimientos de trabajo y por facilidad la incógnita siempre la ubicaremos en el miembro derecho de la ecuación [2].

Ejemplo 7

Dado el 5% EB (efectivo bimestral o periódica bimestral) calcular una tasa efectiva trimestral que sea equivalente.

Solución:

Los datos conocidos son: $i_1 = 0.05$, m1 = 6 porque en un año hay 6 bimestres, m2 = 4 porque se desea una tasa hallar una tasa efectiva trimestral entonces los nuevos períodos son trimestres y en un año habrá 4 períodos. Al reemplazar estos valores en la ecuación del cambio de efectividad tenemos:

$$(1+0.05)^6 = (1+i_2)^4 \text{ y al despejar } i_2 = 7.592983042\% \text{ trimestral}$$

La equivalencia de tasas también se puede dar entre tasas nominales

Ejemplo 8

Dado el 36%NM hallar una tasa nominal semestral equivalente.

Solución:

La tasa del 36%NM la convertimos en efectiva usando la fórmula

$$i = \frac{j}{m} = \frac{36}{12} = 3\% mensual$$

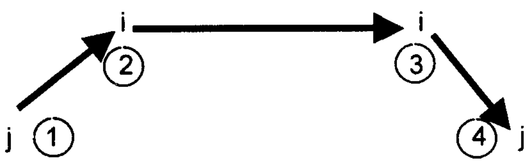
La tasa efectiva del 3% mensual la convertiremos en semestral usando la fórmula [2]

$(1+0.03)^{12} = (1+i)^2$ de donde se obtiene que i = 19.405229653% senestral

y esta última tasa la convertiremos en nominal

j = 19.405229653 x 2 = 38.81%NS

La solución del problema anterior implicó partir del punto 1 y llegar al punto 4 pasando por los puntos intermedios 2 y 3 de acuerdo a la siguiente gráfica:



En el punto 1 j = 36%NS, en el punto 2 i = 3%mensual, en el punto 3 i = 19.405229653% semestral y en el punto 4 j = 38.81%NS

Ejemplo 9

Dado el 2.5% EM hallar una tasa nominal trimestral equivalente

Según la gráfica anterior la solución consiste en pasar del punto 2 al punto 4 pasando por el punto 3 es decir, que se debe seguir la trayectoria 2 3 4

En el punto 2 i = 2.5% mensual

Para el paso del punto 2 al 3 reemplazamos en la ecuación [2] y tenemos:

$(1+0.025)^{12} = (1+i_2)^4$ y despejando i_2 = 7.6890625% trimestral

para pasar de 3 a 4 solo basta aplicar la fórmula [1]

Punto 4 j = 7.6890625 x 4 = 30.756% nominal trimestral

Relación entre una tasa anticipada y una tasa vencida.

La tasa de interés viene a ser la relación entre el interés ganado sobre el capital invertido, esto es:

$$\boxed{i=\frac{I}{P}}$$

pero I = Sd y además:

Según la fórmula valor líquido del capítulo primero se tiene que: VL = S(1-dt) entonces al final de un período VL = S(1-d) y teniendo en cuenta que P viene a ser el valor líquido se tendrá:

$$i=\frac{I}{P}=\frac{Sd}{S(1-d)}=\frac{d}{1-d}$$

Como la tasa anticipada es la misma tasa de descuento, se tiene que conociendo una tasa anticipada se puede hallar la tasa vencida aplicando la fórmula;

$$\boxed{i=\frac{d}{1-d}}$$

La tasa d es una tasa de descuento que equivale a una tasa anticipada, por esta razón podemos representarla más bien por i_a, de tal forma que la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\boxed{i=\frac{i_a}{1-i_a}}$$

Si despejamos a i_a de la fórmula anterior llegamos a:

$$\boxed{i_a=\frac{i}{1+i}}$$

Naturalmente también existen las tasas nominales anticipadas que representaremos por J_a y por similitud con las tasas vencidas se tendrá

$$\boxed{j_a = i_a \times m}$$

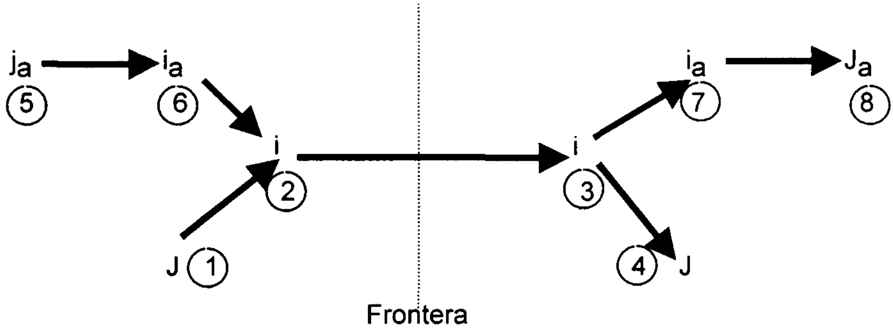
Y

$$\boxed{i_a = j_a \div m}$$

Las fórmulas se pueden incluir en la gráfica del ejemplo 8 para obtener un completo panorama sobre la equivalencia de tasas.

Gráfica de equivalencia de tasas

Los puntos que se han colocado del 1 al 8 solo sirven para identificación y no es más que una ampliación de la gráfica mostrada en el ejemplo 8



i = tasa ordinaria o vencida
i_a = tasa efectiva anticipada (tasa periódica anticipada)
j = tasa nominal vencida
J_a = tasa nominal anticipada

Observación: Para el uso de la gráfica equivalencia de tasas. Siempre se debe comenzar de un punto de la izquierda y seguir la trayectoria hasta llegar a otro punto situado en la parte de la derecha.[1]

Ejemplo 10

Dado EL 36% nominal mensual hallar:

a) una tasa efectiva anual
b) una tasa nominal semestral
c) una tasa efectiva bimestral
d) una tasa nominal semestre anticipado

Solución.

Parte a)

En el punto 1 j = 36%NM

[1] Para el manejo de equivalencia de tasas ver Baca Currea Guillermo "EXCEL Y LA CALCULADORA FINANCIERA APLICADOS A LA INGENIERIA ECONOMICA" Fondo Educativo Panamericano, primera edición Bogotá 1999.

En el punto ② $i = j \div m = 36 \div 12 = 3\%$ EM

Para el paso de② a③ planteamos la ecuación $(1+0.03)^{12} = (1+i)^{1}$ Obsérvese que el primer paréntesis se eleva a la potencia 12 porque la tasa del 3% tiene periodicidad mensual y en un año hay 12 períodos; el segundo paréntesis se eleva a la potencia 1 porque la tasa debe tener una periodicidad anual, es decir una efectividad anual; al despejar i de esta ecuación se tiene: i = 42.576088685%EA

Parte b)

El punto de partida es el punio 1 y el punto de llegada debe ser el punto 4

En el punto ① j = 36%NM

En el punto ② $i = j \div m = 36 \div 12 = 3\%$ mensual

Para el paso de ② a ③planteamos la ecuación $(1+0.03)^{12} = (1+i)^{2}$ Obsérvese que el segundo paréntesis se elevó a la potencia 2 porque la tasa debe tener una efectividad semestral y en un año hay 2 semestres. Al despejar i de esta ecuación se tendrá: i = 19.405229653% período semestre.

Para el paso de ③a ④simplemente multiplicamos el resultado anterior por 2 porque en el lado derecho de la frontera los períodos son semestres y así tenemos: j = 19.405229653 x 2 = 38.81%NS

Parte c)

El punto de partida es el punto 1 y el punto de llegada es el punto 3

En los puntos①y ②se tienen los mismos resultados de la parte a) o de la parte b) por consiguiente en② i = 3%EM

El paso de ②a ③implica el planteo de la ecuación $(1+0.03)^{12} = (1+i)^{6}$ Obsérvese que el exponente del segundo paréntesis debe ser 6 porque en la parte derecha de la frontera los períodos son bimestres y en un año hay 6 bimestres. Al despejar se obtiene: i = 6.09%EB que también podemos escribir como 6.09% período semestral

Parte d)

El punto inicial es el ① y el punto de llegada debe ser el punto⑧

En los puntos ① y ②los resultados son los mismos que los mostrados en las partes a), b) o c)

El paso de (2) a (3) implica el planteamiento de la ecuación $(1+0.03)^{12} = (1+i)^2$ y al despejar se tiene que i = 19.405229653 ES

El paso de (3) a (7) implica plantear la ecuación:

$$i_a = \frac{i}{1+i} = \frac{0.19405229653}{1+0.19405229653} = 16.2515743317\%$$ periódica semestre anticipada

El paso de (7) a (8) implica multiplicar el resultado anterior por 2 y se tiene:

16.2515743317 x 2 = 32.5%NSA

EJEMPLO 11

Dado el 30% nominal trimestre anticipado calcular una tasa efectiva mensual anticipada que sea equivalente

Solución

Nos situamos en el punto (5) como punto de partida que corresponde a una tasa nominal anticipada y nuestro destino final será el punto (7) que corresponde a una tasa efectiva anticipada

En el punto (5) j_a = 30%NTA

En el punto (6) $i_a = j_a \div m = 30 \div 4 = 7.5\%$ trimestre anticipado

Para llegar al punto (2) aplicamos la fórmula

$$i = \frac{i_a}{1-i_a} = \frac{0.075}{1-0.075} = 8.108108\% trimestral$$

El paso de (2) a (3) implica el planteo de la ecuación $(1+0.08108108)^4 = (1+i)^{12}$ Obsérvese que el primer paréntesis quedó elevado a la potencia 4 porque la tasa tiene efectividad trimestral y el segundo paréntesis quedó elevado a la potencia 12 porque los nuevos períodos deben ser meses, así i = 2.632779103%EM

El paso de (3) a (7) implica el planteo de la ecuación

$$i_a = \frac{i}{1+i} = \frac{0.02632779103}{1+0.02632779103} = 2.565\% EMA$$ = 2.565% periódica mes anticipado

Ejemplo 12

Dada el 28% nominal con período de 258 días hallar una tasa efectiva anual.

Solución:

La tasa nominal con intereses vencidos pagadero por períodos de 258 días la podemos representar por: N258dv.

Solución:

Iniciamos en ① y vamos a ③

En ① j = N258dv

Para llegar a ② Sabemos que $i = \frac{j}{m}$ Como el período tiene 258 días, entonces en un año habrá $\frac{365}{258} = 1.414729$ períodos y al remplazar en la fórmula anterior tenemos:

$$i = \frac{0.28}{1.414729} = 0.197918 = 19.7918\% \text{ período 258 días}$$

Para el paso de ② a ③

$$(1 + 0.197918)^{365/258} = (1 + i)^1$$

Despejando se tiene que i = 29.10797% efectivo anual

Ejemplo 13

Dada 20% período 200 días anticipada, calcular una tasa nominal vencida con período 150 días

Solución:

Una tasa con período 200 días anticipada se representa por i_a.

Por lo tanto salimos del punto ⑥ y vamos al punto ④

En ⑥ i_a = 20% en ② $i = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0.2}{1 - 0.2} = 0.25$

Para el paso de ② a ③ debemos tener en cuenta que si un período tiene 200 días entonces en 1 año habrá 365/200 períodos, en igual forma si un período tiene 150 días en un año habrá 365/150 períodos, por tanto podemos plantear la siguiente ecuación:

$$(1 + 0.25)^{365/200} = (1 + i)^{365/150}$$

Para despejar a i es necesario desbaratar el paréntesis de la derecha y para ello es necesario que quede elevado a la potencia 1, por tanto, habrá que multiplicar los exponentes de la ecuación anterior por 150/365, entonces la ecuación queda así:

$$(1 + 0.25)^{(365/200)\,(150/365)} = (1 + i)^{(365/150)\,(150/365)}$$

$$(1 + 0.25)^{(150/200)} = (1 + i)^{1}$$

$$1.1821770 = 1 + i$$

Despejando se tiene: i = 18.2177% período 150 días que corresponde al punto 3

Para llegar al punto 4 se aplica la fórmula j = i x m

Entonces j = 18.2177 x (365/150) = N44.33% 150dv

Ecuaciones de valor:

Es muy frecuente cambiar una o varias obligaciones por otra u otras nuevas obligaciones. La solución de este problema es elemental y para solucionarlo es necesario usar una ecuación de valor, que es una igualdad de valores ubicados en una sola fecha denominada fecha focal.

La fecha focal se representa gráficamente por una línea a trazos y por las letras ff y es la fecha en que debe hacerse la igualdad entre ingresos y egresos. La ubicación de la fecha focal no altera la respuesta final, por tal motivo la ubicación de la fecha focal se deja a libre elección de la persona que va a resolver el problema. (En interés simple, la posición de la fecha focal sí causa variación en la respuesta final y por esta razón normalmente es el acreedor quien decide dónde ubicarla.)

El principio fundamental de una ecuación de valor, que viene a ser el mismo principio fundamental de las finanzas, establece que la sumatoria de los ingresos debe ser igual a la sumatoria de los egresos ubicados ambos en la fecha focal, esto es:

$$\boxed{\sum \text{Ingresos} = \sum \text{Egresos (en la ff)}}$$

Naturalmente que el traslado a al fecha focal de cada una de las cantidades debe hacerse usando la fórmula del monto o la fórmula del valor presente utilizando una tasa de interés llamada el rendimiento normal del dinero que es la tasa que en promedio cobra el sistema financiero

El enunciado de una ecuación de valor también puede ser expresado así:

$$\boxed{\sum \text{Deudas} = \sum \text{Pagos (en la ff)}}$$

Mirando un balance el principio puede ser expresado así:

$$\boxed{\sum \text{Activos} = \sum \text{Pasivos} + \text{capital (en la ff)}}$$

Como en cualquier proyecto los ingresos se representan por flechas hacia arriba y los egresos se representan por flechas hacia abajo entonces, mirando la gráfica de flujo de caja podemos expresar el principio fundamental de una ecuación de valor de esta otra forma:

$$\boxed{\sum \text{de lo que está para arriba} = \sum \text{de lo que está para abajo (en la ff)}}$$

La sumatoria de los ingresos en pesos de hoy menos la sumatoria de los egresos en pesos de hoy recibe el nombre de valor presente neto o valor actual neto (en la calculadora se representa por VAN y en el EXCEL se representa por VNA.)

La tasa a la cual la sumatoria de los ingresos es igual a la sumatoria de los egresos se denomina tasa interna de retorno que en el texto se representará por TIR

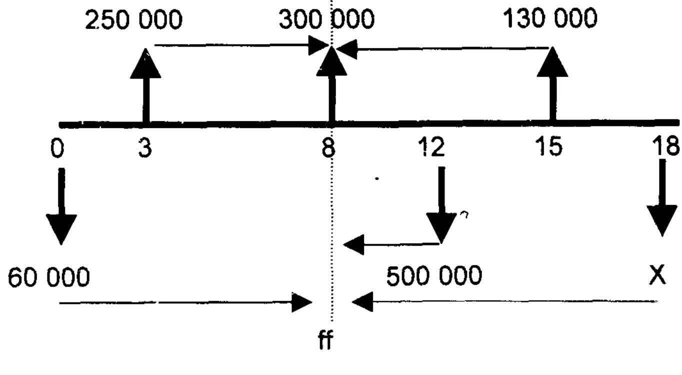
En capítulo posterior analizaremos más en detalle los conceptos de VAN y de TIR

Ejemplo 14

Una persona se comprometió a pagar $250 000 en 3 meses, $300 000 en 8 meses y $130 000 en 15 meses. Ante la dificultad de cumplir con las obligaciones tal como están pactadas solicita una nueva forma de pago así: $60 000 hoy, $500 000 en 12 meses y el saldo en 18 meses. Suponiendo que el rendimiento normal de la moneda es del 3% efectivo mensual, determinar el valor del saldo.

Solución:

Podemos hacer dos gráficas, una para las obligaciones originales y otra para el nuevo plan de pagos, pero para simplificar el flujo de caja podemos hacer una sola gráfica poniendo las obligaciones originales hacia arriba y dejando las nuevas obligaciones hacia abajo. La fecha focal se puede poner en cualquier parte, sinembargo la vamos a poner en el mes 8.



El análisis de la figura anterior es el siguiente:

a) Para la deuda del mes 3: hay que pagar \$250 000 en el mes 3, pero si se pagan en el mes 8 entonces su valor será: $250\,000(1+0.03)^{5}$

b) Para la deuda del mes 8: como se deben pagar \$300 000 en el mes 8 y es ahí donde está la fecha focal esto implica que la cantidad no se modifica por tanto la dejamos como está

c) Para la deuda del mes 15: En 15 meses hay que pagar \$130 000 pero si se llegan a pagar antes es justo que se pague menos y su valor será $130\,000(1+0.03)^{-7}$

d) Para el pago que se haría en el día de hoy: como hoy se pagan \$60 000 esto equivale a que en el mes 8 hubiese pagado $60\,000(1+0.03)^{8}$

e) Para el pago que se hace en 12 meses: hay un compromiso de pagar \$500 000 en 12 meses pero si se llegan a pagar antes entonces la cifra debe ser menor $500\,000(1+0.03)^{-4}$

f) Para el pago que se haría en 18 meses el compromiso es pagar \$X en 18 meses pero si se llegan a pagar en el mes 8 es apenas lógico que tengo que pagar una cantidad menor por pagarlos antes de tiempo y su valor será: $X(1+0.03)^{-10}$

Entonces la ecuación de valor puede ser escrita así:

$$250000(1.03)^{5} + 300000 + 130000(1.03)^{-7} = 60000(1.03)^{8} + 500000(1.03)^{-4} + X(1.03)^{-10}$$

Al despejar X de esta ecuación se tiene: X = \$235 549.16

Ejemplo 15

Una deuda de \$15 000 contraída hace 2 meses vencimiento en 4 meses y tiene intereses del 24% NT; y otra de \$25 000 contraida hace 1 mes con vencimiento en 8 meses e intereses al 28%NS, se van a cancelar mediante dos pagos de igual valor, efectuados el primero el día de hoy y el segundo en 6 meses. Con un interés del 30% NM (esto significa que el rendimiento normal de la moneda es del 30% NM) determinar el valor de los pagos.

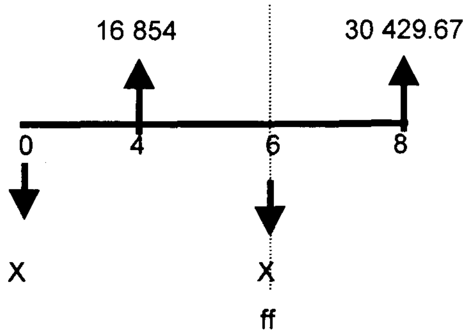
Solución:

Primero debemos liquidar el valor de cada deuda en la fecha de vencimiento.

$$15\,000(1+0.06)^{2} = 16\,854$$

$$25\,000(1+0.14)^{1.5} = 30\,429.67$$

si ponemos la fecha focal en 6 meses, la gráfica de flujo de caja será:



El planteamiento de la ecuación de valor será:

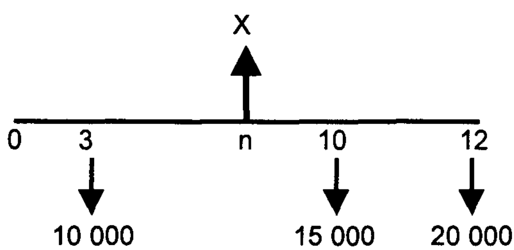
$$16854(1+0.025)^{2}+30429.67(1+0.025)^{-2}=X(1+0.025)^{6}+X$$

Cuya solución es: X = $21 609.84

Ejemplo 16

Una persona debe pagar $10 000 con vencimiento en 3 meses; $15 000 a 10 meses y $20 000, con vencimiento en un año. Si hace un pago único de $45 000, hallar la fecha en que debe hacerse, suponga una tasa del 18% nominal mensual.

Solución:



Solución:

$$10\,000(1+0.015)^{9}+15\,000(1+0.015)^{2}+20\,000=45\,000(1+0.015)^{12-n}$$

$$46\,887.27=45\,000(1.015)^{12-n}$$

$$\frac{46887.27}{45000}=45000(1+0.015)^{12-n}$$

$$1.00419394=1.015^{12-n}$$

$$\log 1.0419394=(12-n)\log 1.015$$

$$12 - n = \frac{\log 1.0419394}{\log 1.015} = 2.759409869$$

$$n = 9.240959 \text{ meses}$$

En la respuesta anterior existen 9 meses + 0.24059 de mes, y mediante una proporción se puede establecer el número de días que hay en la fracción de mes así:

Un mes tiene 30 días, en 0.24059 de mes ¿Cuántos días hay?

MES	DIAS
1	30
0.24	X

despejando se tiene que X = 7.2177 días

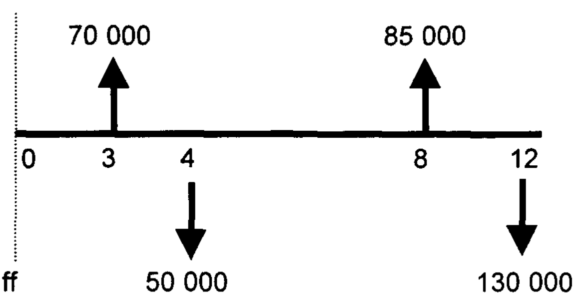
Luego la respuesta final será 9 meses y 7 días

Ejemplo 17

Una persona debe pagar $70 000 en 3 meses y $85 000 en 8 meses; ante la imposibilidad de cancelar las deudas en las fechas previstas le ofrece al acreedor que le cancelará $50 000 en 4 meses y $130 000 en 12 meses. Si el acreedor acepta esta nueva forma de pago ¿Qué tasa de interés efectiva mensual estará pagando?

Solución:

Si ponemos el plan de pago original hacia arriba de la línea de tiempo, el plan propuesto en la misma línea de tiempo pero hacia abajo y la fecha focal en 0 tendremos:



La incógnita es la tasa i, en consecuencia el planteo de la ecuación de valor será:

$$70\,000\,(1+i)^{-3} + 85\,000\,(1+i)^{-8} = 50\,000\,(1+i)^{-4} + 130\,000\,(1+i)^{-12}$$

primero solucionaremos este problema en forma manual aunque la solución no es sencilla debido a que se trata de una ecuación de grado 12, el procedimiento será el siguiente:

igualamos la ecuación a cero y simplificamos por 1000, nos va quedando así:

$$70(1+i)^{-3}-50(1+i)^{-4}+85(1+i)^{-8}-130(1+i)^{-12}=0$$

para resolver esta ecuación utilizaremos el método de ensayo y error combinado con una interpolación, el método consiste en escoger una tasa i_1 y calcular el valor que toma la función f_1, luego hacemos lo mismo con otra tasa i_2 y calculamos el valor que toma la función f_2, lo importante es que el valor de las funciones f_1 y f_2 sean de signo diferente, si al hacer los ensayos las funciones salen del mismo signo habrá que hacer nuevos ensayos hasta que obtengamos las funciones con signo diferente.

De acuerdo a lo anterior hacemos un primer ensayo con $i_1 = 2\%$, entonces al remplazar en la ecuación esta ya no va a ser igual a 0 y su resultado será:

$$70(1+0.02)^{-3}-50(1+0.02)^{-4}+85(1+0.02)^{-8}-130(1+0.02)^{-12}=-10.18714$$

Ahora procedemos a hacer un nuevo ensayo con otra tasa $i_2 = 3\%$ y la ecuación con su resultado será:

$$70(1+0.03)^{-3}-50(1+0.03)^{-4}+85(1+0.03)^{-8}-130(1+0.03)^{-12}=-4.44404$$

Como el valor de la función en ambos casos es negativo entonces tenemos que hacer un nuevo intento con otra tasa hasta que cambie de signo, por eso ensayamos con $i_3 = 4\%$ y la ecuación será:

$$70(1+0.04)^{-3}-50(1+0.04)^{-4}+85(1+0.04)^{-8}-130(1+0.04)^{-12}=+0.40058$$

Tomamos los resultados correspondientes al 3% y al 4% por ser los más cercanos y los que presentan diferente signo y los colocaremos de la siguiente forma:

Valor de la tasa		Valor de la función
3%	$\longrightarrow$	- 4.44404
X	$\longrightarrow$	0
4%	$\longrightarrow$	+0.40058

Ahora planteamos una proporción, teniendo en cuenta las diferencias mostradas en los corchetes y siempre manteniendo el mismo orden, por ejemplo: la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado izquierdo igual que la diferencia pequeña es a la diferencia grande del lado de la derecha.

$$\frac{3-x}{3-4}=\frac{-4.44404-0}{-4.44404-0.40058}$$

Al despejar X de la ecuación anterior tenemos: X = 3.9173% mensual

Observación: la interpolación produce un error que es despreciable siempre y cuando el intervalo que se toma para interpolar no sea muy grande, en la práctica financiera un punto porcentual es el máximo permitido para que el error sea despreciable, en este caso hemos usado un punto porcentual porque hemos interpolado entre el 3% y el 4%. La respuesta exacta con 7 decimales es: 3.9104765%

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Se invierten $35 000 en un depósito a término fijo de 3 años al 28%NTV. Determinar el monto de la entrega al vencimiento del documento.

Respuesta: $78 826.71

2 Hallar el monto de $48 000 en 127 días suponiendo una tasa del 30%EA, use un año de 360 días.

Respuesta: $52 654.79

3 ¿Qué capital debo invertir hoy para poder retirar un millón de pesos dentro de 18 meses suponiendo que el capital invertido gana el 28%NSV?

Respuesta: $674 971.52

4 ¿Cuál es el valor presente de $800 000 en 36 días al 32% EA? Use un año de 360 días.

Respuesta: $778 094.95

5 Halle la rentabilidad anual de un documento que se adquiere en $30 000 y se vende 6 meses más tarde en $50 000.

Respuesta: 177.78%

6 ¿A qué tasa efectiva mensual se duplica un capital en 2½ años?

Respuesta: 2.34%EM

7 ¿A qué tasa nominal trimestral se triplica un capital en 4 años?

Respuesta: 28.43%NTV

8 Una compañía dedicada a la intermediación financiera desea hacer propaganda para captar dineros del público, la sección de mercadeo le dice al gerente de la compañía que una buena estrategia de mercado es duplicar el dinero que depositen los

ahorradores. Si la junta directiva de la compañía autoriza pagar por la captación de dinero un máximo de 2.5% EM. ¿Cuánto tiempo debe durar la inversión?

Respuesta: 28.07 meses

9 ¿En cuánto tiempo se triplica un capital al 8% periódico trimestral, sabiendo que el interés solo se paga por trimestres completos?

Respuesta: 15 trimestres (con 14 trimestres no alcanza a triplicar el capital)

10 Usando la comparación de tasas, decidir la mejor alternativa entre invertir en una compañía de financiamiento comercial que en depósitos a término fijo paga el 28% nominal trimestral vencido, o invertir en una empresa de turismo que garantiza triplicar el capital en 3 años y 6 meses.

Respuesta: Es mejor la empresa de turismo.

11 Una máquina que actualmente está en uso llegará al final de su vida útil al final de 3 años, para esa época será necesario adquirir una nueva máquina y se estima costará unos US$20 000, la máquina que actual para esa época podrá ser vendida en US$5 000. Determinar el valor que se debe depositar hoy en un depósito a término fijo de 3 años que garantiza el 7.5%EA.

Respuesta: US$12 074.41

12 a) Hallar una tasa efectiva trimestral equivalente al 7% efectivo trimestre anticipado

b) Hallar una tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 3% efectivo mensual

Respuestas: a) 7.527%periódica trimestral, b) 2.913%período mes anticipado

13 a) Hallar una tasa nom. semestral vencido equivalente al 24% nom. trimestral vencido
b) Hallar una tasa nominal trimestre anticipado equivalente al 2.5% periódica mensual

Respuestas: a) 24.72%NS b) 28.56NTA

14) a) Hallar una tasa efectiva mensual anticipada equivalente al 41.12%EA
b) Hallar una tasa efectiva mensual equivalente al 36% nominal mes anticipado

Respuestas: a) 2.83% periódica mes anticipado b) 3.093% mensual

15) a) Dado el 28%NTA hallar una tasa nominal semestral equivalente
b) Dado el 27%NSV Hallar una tasa nominal mes anticipado equivalente

Respuestas: a) 31.24%NSV b) 25.061%NMA

16) a) Hallar una tasa efectiva anual, equivalente al 25% efectivo anual anticipado
b) Hallar una tasa efectiva anual anticipada, equivalente al36% efectivo anual

c) Hallar una tasa efectiva anual anticipada, equivalente al 2.5% período mensual

Respuestas: a) $i = 33.33$EA, b) $i_a = 26.47$ EAA c) $i_a = 25.64\%$ EAA

17) Dado el 15% periódico semestral hallar una tasa equivalente para un quinquenio.
Respuesta: 304.56% período 5 años

18) Dado el 208% período 3 años hallar una tasa periódica equivalente para 2 años.
Respuesta: 111.69% período 2 años.

19) Dado el 31% N205dv hallar una tasa efectiva anual equivalente. Base 365 días.

Respuesta: 33.08079% EA

20) Dado el 40% N185dv hallar una tasa efectiva anual equivalente. Base 365 días.

Respuesta: 43.9383467% EA

21) Dado el 35% N160dv hallar una tasa N300dv equivalente. Base 365 días.

Respuesta: 37.3349% N300dv

22) Dado el 43% N200dA hallar una tasa N111dv equivalente. a) Base 360 días y b) Base 365 días.

Respuestas: a) 53.05304% N111dv b) 52.8799% N111dv

23) Dado el 32% EA hallar: a) la tasa nominal 158 días vencidos y
b) la tasa nominal 205 días anticipados
base 365 días

Respuestas: a) 29.500356% N158dv b) 25.7068698% N205dA

24) Una persona tiene dos deudas una de $25 000 pagadera en 3 meses y otra de $40 000 pagadero en 7 meses. Si desea cambiar la forma de cancelarlas mediante dos pagos iguales de $X c/u con vencimiento en 5 meses y 12 meses respectivamente, determinar el valor de los pagos suponiendo una tasa del 36%NM.

Respuesta: $35 423.66

25) Una empresa tiene dos deudas con un banco, la primera deuda es de $100 000 con interés del 30%NM, se adquirió hace 6 meses y hoy se vence; la segunda por $200 000 al 32%NM se contrató hace 2 meses y vence en 4 meses, debido a la incapacidad de cancelar la deuda, la empresa propone al banco refinanciar su deuda, llegándose a un acuerdo entre las partes de la siguiente forma: Hacer 3 pagos iguales con vencimiento en 6m, 9m y 12m, con una tasa del 33% nominal mensual. ¿Cuál es el valor de cada pago?

Respuesta: $138 452.64

26) Un almacén va a ser vendido el 20 de agosto. Los inventarios realizados el mismo 20 de agosto arrojaron el siguiente resultado:

a) En caja $80 000
b) En bancos $250 000
c) Cuentas por cobrar
   C_1 cheque por $65 000 para el 30 de septiembre
   C_2 depósito a término fijo de 6 meses por $235 000 e intereses al 28%NM, la inversión se efectuó hace 3 meses.
d) Mercancías por $950 000
e) Cuentas por pagar:
   d_1 cheque por $150 000 para el 21 de septiembre
   d_2 letra por $400 000 para el 18 de noviembre.

Con un interés del 30% EA usando interés bancario determine el valor del almacén el día de la venta.

Respuesta: $1 074 317

27) Hoy se contrae una deuda por $50 000 con intereses al 30%NT y vencimiento en 6 meses y hay una deuda por $80 000 contraida hace 3 meses con intereses al 32%NS y vencimiento en 1 año. ¿En qué fecha deberá hacer un pago de $170 000 para cancelar las deudas suponiendo que el rendimiento normal del dinero es del 2.5% mensual?

Respuesta: 9.027 meses

28) Hallar el tiempo en que debe hacerse un pago de $30 000, para cancelar dos deudas: una de $15 000, con vencimiento en 6 meses y otra de $15 000 con vencimiento en 26 meses. Suponga una tasa del 30% NM

Respuesta: 1 año, 2 mese y 23 días

29) Resuelva el problema anterior suponiendo una tasa del 30%NT

Respuesta: 1 año, 2 meses y 24 días

30) Se deben pagar: $80 000 en 3 meses, $100 000 en 10 meses y $90 000 en 15 meses y se van a cancelar en dos pagos el primero por $170 000 en 9 meses, ¿en qué fecha deberá pagar $85 510.96 para saldar las deudas suponiendo que el dinero rinde el 8%trimestral?

Respuesta: 3.71 meses = 3 meses + 21 días

31) En el desarrollo de un proyecto hubo necesidad de una inversión inicial de $70 000 y se obtuvieron ingresos por $50 000 en 3 meses y $45 000 a los 10 meses. Hallar la rentabilidad efectiva mensual que generó el proyecto?
Respuesta: 5.21% periódica mensual

32) Una empresa debe cancelar hoy 15 de febrero de 1998 una deuda por $70 000 con intereses del 30%CT adquirida el 15 de agosto de 1997 y otra deuda por $100 000 obtenida el 15 de diciembre/97 con vencimiento el 15 de junio/98 a la misma tasa de la deuda anterior, ante la dificultad de la empresa para cancelar la deuda, el acreedor propone cancelar las deudas con un pago de $20 000 ahora y otro de $220 000 en 10 meses. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual de refinanciación que se está cobrando?

Respuesta: 42.76%EA

33) Una empresa tiene tres deudas así:

Valor	Tasa	Fecha de Desembolso	Fecha de Vencimiento
2 000 000	51% EA	15-06-98	15-06-99
3 000 000	42% NTV	11-10-98	15-12-99
6 000 000	40% NMV	5-12-98	5-12-99

La empresa se declara en concordato y en reunión con sus acreedores reestructura sus pasivos con las siguientes fechas y montos:

Pago	Fecha
7 700 000	15-06-00
7 800 000	24-11-00
8 000 000	10-04-01

Encontrar la tasa de renegociación usando base 365

Respuesta: 51.995%

Aplicaciones del interés compuesto CAPITULO 3

Muchas son las aplicaciones que tiene la fórmula del interés compuesto, aquí solo daremos algunas, las que consideramos que están más de acuerdo con el plan del texto. Para empezar examinaremos los depósitos a término fijo o certificados de depósito a término.

Depósitos a término fijo

La misión de un intermediario financiero consiste en conseguir dinero prestado generalmente del público y volverlo a prestar a otras personas pero a una tasa más alta. Para conseguir el dinero del público debe ofrecer una tasa de interés e incentivar a los inversionistas a que le traigan sus ahorros, a esta tasa se le denomina tasa de captación. Cuando va a prestar estos dineros lo hace a una tasa mayor denominada tasa de colocación.

A la tasa de captación también se le denomina tasa pasiva porque cuando el intermediario financiero recibe el dinero debe registrar en el pasivo una obligación la cual genera unos intereses que deberá pagarle al inversionista, de ahí el nombre de tasa pasiva.[1]

[1] En Colombia el promedio ponderado semanal de las tasas de captación con certificados de depósito a 90 días pagando los intereses por anticipado de: bancos, corporaciones financieras, compañías de financiamiento comercial y de las corporaciones de ahorro y vivienda recibe el nombre de tasa DTF. El promedio de la tasa de captación de los depósitos a 90 días hechos únicamente en las corporaciones financieras recibe el nombre de tasa TCC, esto significa que la TCC es un subconjunto de la DTF. Normalmente no debe haber mucha diferencia entre una tasa y otra porque si esto se llega a ocurrir el inversionista invertirá en el sector que le sea más rentable y el otro sector a fin de no quedarse sin dinero decidirá aumentar la tasa.
Los depósitos a término fijo de menos de un mes reciben el nombre de CDAT y pagan una tasa menor. La DTF es una tasa de captación que llega con un atraso hasta de 8 días por cuanto es un promedio semanal y a un inversionista puede ser que no le sirva la información con tanto atraso, por esta razón la Superintendencia Bancaria diseñó una nueva tasa denominada TBS que significa tasa básica del sector, que se calcula diariamente y que es un promedio de las tasas que pagan los: CDAT de 2 A 14 días, los CDAT de entre 15 días y menos de 30 días, los CDT a 1 mes, los CDT a 2 meses, los CDT a 3 meses, lòs CDT a 6 meses, los CDT a 12 meses Y los CDT de más de 12 meses sin importar si las tasas son vencidas o anticipadas pero tomándolas por separado en cada sector de los nombrados anteriormente. (Cuando se publica la TBS y no se hace referencia a un sector especial ésta corresponde a CDT a 90 días del sector bancario)

A la tasa de colocación también se le denomina tasa activa porque en el momento en que la entidad financiera presta el dinero registra en el activo una cuenta por cobrar, como éstos dineros generan intereses que van a los activos, de ahí el nombre de tasa activa.

La diferencia entre tasa activa menos tasa pasiva recibe el nombre de margen de intermediación que no es exactamente la ganancia del intermediario financiero porque intervienen otros factores tales como impuestos, encajes etc.

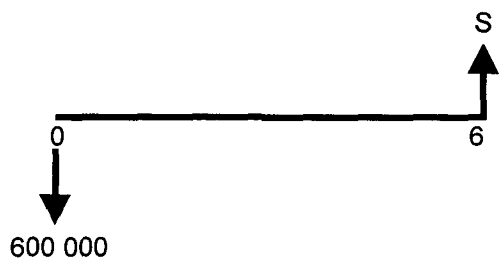
En los depósitos a término fijo es importante tener en cuenta que la ganancia por concepto de intereses es gravada con un impuesto que se cobra al momento en que se hace el pago y se denomina retención en la fuente

Ejemplo 1

Supongamos que una persona invierte $600 000 en un depósito a término fijo de 6 meses, si le garantizan una tasa del 24%NM, determinar el valor final del documento suponiendo un impuesto del 7% sobre las utilidades.

Solución:

La gráfica correspondiente será:



La inversión inicial es de $600 000

el monto antes de impuestos que deberá calcularse con tasa efectiva será:

$$S = 600\,000\,(1+0.02)^6 = \$675\,697.45$$

Los intereses vienen a ser la diferencia entre el valor final y el valor inicial, esto es:

$$S\text{-}P = 675\,697.45 - 600\,000 = \$75\,697.45$$

La retención en la fuente es el 7% de los intereses o sea: 0.07 x 75 697.45 = $5 298.82

Redondeando las cifras a pesos tenemos que el monto después de impuestos será:

$$\$675\,687 - 5\,299 = \$670\,398$$

La rentabilidad después de impuestos se puede calcular así:

670 398 = 600 000 $(1 + i)^6$ de donde se obtiene i = 1.865979% EM

Por equivalencia de tasas i = 24.84%EA.

También hubiera podido obtenerse la tasa efectiva anual despejando i de la siguiente ecuación:

$$670\ 398 = 600\ 000\ (1+i)^{1/2} \text{ de donde } i = 24.84\%EA$$

De lo visto hasta el momento podemos concluir que si el depósito a término fijo gana el 2%EM significa que nos estará dando el 26.824%EA pero antes de impuestos y que después de impuestos se reduce al 24.84%EA, sin embargo esto no es más que una utopía porque el inversionista entregó al principio $600 000 los cuales tenían un cierto poder adquisitivo y cuando le devuelven el dinero su poder de compra se ha disminuido por efectos de la inflación.

La inflación.

El proceso económico en el cual se presenta un aumento general de precios se denomina inflación que se representa por f. Para calcular la inflación se toma una serie de artículos que conforman la canasta familiar. Es probable que en un lapso de tiempo determinado algunos artículos de esa canasta familiar suban de precio, otros se mantienen estables y algunos podrán bajar de precio, el resultado de todo lo que pasa con la canasta familiar se mide con el índice IPC que significa Indice de Precios al Consumidor.[2]

Con el hecho que suba de precio un solo artículo de los que conforman la canasta familiar habrá inflación aunque por tratarse de un solo artículo la incidencia que tenga cobre el IPC será muy poca. Naturalmente hay artículos que tienen más incidencia en el IPC que otros, por ejemplo: cuando sube el precio de los combustibles, pongamos por caso la gasolina, se aumentan las tarifas del transporte y con ello el precio de otros productos como los alimentos; en consecuencia un aumento del precio de los combustibles traerá una cadena de alzas en varios de los artículos que conforman la canasta familiar y por lo tanto tendrá más incidencia en el IPC que por ejemplo el aumento de las pensiones en el sector de la educación.

Lo contrario de la inflación se denomina deflación, significa una disminución general de precios y en este caso el IPC disminuye.

En el sector de la producción, la "canasta familiar" en vez de bienes de consumo, incluye materias primas, salarios, energía y demás insumos necesarios para la producción, por lo tanto tiene un valor diferente que se mide con el índice IPP (índice de precios al productor) el cual varía de un sector a otro.

---

[2] Los productos que conforman la canasta familiar deben ir cambiando periódicamente para incluir nuevos productos y para retirar otros de acuerdo a los cambios en los hábitos de consumo en los hogares.

Hacemos énfasis en que la inflación y la deflación son fenómenos internos a un país. (La devaluación si es un fenómeno económico externo a un país).

La devaluación

La pérdida de valor de una moneda frente a otra moneda se denomina devaluación, por ejemplo habrá devaluación si inicialmente hay que pagar $1 500 por un dólar y un año más tarde hay que pagar $2 000 por el mismo dólar. En este caso la devaluación del año es igual a la variación de precio sobre el precio inicial, esto es:

$$\text{Devaluación} = \frac{2000 - 1500}{1500} = 0.3333 = 33.33\%$$

Lo contrario de la devaluación se denomina revaluación que significa que habrá que pagar menos pesos por el mismo dólar, por ejemplo si al principio del año hay que pagar $1500 por un dólar y al final del año hay que pagar $1 200 entonces la revaluación será variación de precio sobre el precio inicial así:

$$\frac{1200 - 1500}{1500} = -0.2 = -20\%$$

En 1944 en Bretton Woods, una pequeña población de Estados Unidos, se reunieron los delegados de los países occidentales y acordaron que el oro ya no sería el patrón universal y que de ahí en adelante el patrón universal sería la moneda del país que tuviera el mayor comercio; después de los estudios correspondientes se concluyó que esta moneda era el dólar de los Estados Unidos

En Colombia en el año de 1991 durante la administración del presidente Gaviria se redefinieron las funciones del Banco de la República, se acabó con el control de cambios (vigente desde 1967) y encomendó a la Junta Directiva del Banco de la República la responsabilidad de manejar el tipo de cambio.

El tipo de cambio (llamada ahora Tasa Representativa del Mercado, TRM), se obtiene de promediar la tasa de compra y la tasa de venta de la divisa norteamericana del mercado bancario y casas de cambio, (libre juego de oferta y demanda). La abundancia de dólares en el país hará bajar el tipo de cambio, exceso de demanda subirá la tasa de cambio. Esta es la razón por la cual los efectos políticos afectan el tipo de cambio: una crisis pone en alerta a los inversionistas extranjeros y nacionales.

Sin embargo para evitar las fuertes variaciones de la tasa de cambio por coyunturas económicas o por incertidumbre política, el precio del dólar varía conforme sean las proyecciones macroeconómicas que establezcan: Planeación Nacional, Ministerio de Hacienda y el Banco de la República. Estas proyecciones darán confianza en el sistema económico a inversionistas nacionales y extranjeros y al comercio exterior.

La devaluación como fenómeno afecta al sector externo de un país en varios frentes de la economía, un aspecto benéfico de la devaluación está en las exportaciones ya que los exportadores recibirán más pesos por la venta de sus productos en el exterior e incentiva a muchos industriales a vender sus productos en otros países incrementando así las reservas internacionales. Pero la devaluación también trae sus efectos indeseables como es el aumento de la deuda externa en términos de pesos; las importaciones aumentan de valor lo que provoca una mayor inflación y reduce la inversión extranjera debido a que los efectos de la devaluación reduce la rentabilidad de los inversionistas extranjeros.

Por ejemplo, si se ha proyectado que la devaluación sea del 14% anual esto implica que si el precio del dólar a principio del año es de $1.000 a los seis meses debe estar próximo a los $1070 y al final del año debe estar rondando los $1.140 pero como se mencionó anteriormente el precio del dólar depende no sólo de las proyecciones macroeconómicas sino de la oferta y demanda de la divisa y de la situación política actual del país, por esto se establecieron unos límites dentro de los cuales puede variar la TRM (tasa representativa del mercado) sin afectar las metas macroeconómicas del Gobierno Nacional que son del 9% por encima o por debajo de la tasa de devaluación proyectada. A éstos límites se le denomina el corredor o banda cambiaria. Al límite superior se le llama techo y al inferior piso.

Cuando se presenta escasez de dólares en el mercado por una fuerte demanda, la TRM sube y a fin de mantener las proyecciones sobre la devaluación, el Banco de la República interviene en el mercado vendiendo dólares (de las reservas internacionales) haciendo que la TRM baje llevándola al punto medio de la banda

Por el contrario, cuando hay abundancia de dólares en el país (por ejemplo por bonanza cafetera, por exportaciones petroleras o por exportaciones no legales) esto provoca una baja en la TRM y si tiende a cruzar el piso de la banda cambiaria el Banco de la República interviene comprando dólares (aumentándose las reservas internacionales) reduciendo así la oferta de dólares y finalmente haciendo subir el precio de la divisa hacia el punto medio de la banda,

El 27 de septiembre/99 el Banco de la República resolvió eliminar la banda cambiaria y adoptó el sistema de cambio libre.

En el mercado de capitales internacionales una tasa de devaluación alta genera fuga de capitales nacionales al exterior mientras que la baja tasa de devaluación provoca la llegada de capitales extranjeros aprovechando las altas tasas de interés en el país.

Ejemplo 2

Un inversionista residente en Colombia adquiere un documento que vale US$300, gana un interés del 6% en dólares[3] y tiene un plazo de un año, el tipo de cambio actual es

---

[3] La tasa que en promedio cobran los bancos de Estados Unidos a sus clientes preferidos se denomina PRIME RATE (esto significa que es una tasa preferencial). La gran mayoría de los préstamos que efectúan los bancos de los Estados Unidos lo hacen a la Prime Rate más unos puntos adicionales por el riesgo en que se incurre, estos puntos adicionales reciben el nombre de SPREAD.
En Europa la tasa LIBOR corresponde a la tasa promedio que cobran los bancos de Londres a sus clientes preferenciales.

US\$1 = \$1500 y se estima una devaluación durante ese año del 20%. Calcular la rentabilidad que se podía obtener.

Solución:

Las condiciones iniciales son: US\$300 y en pesos 300 x 1 500 = \$450 000

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \text{US\$} & \$ \\ \text{Condiciones iniciales} & 300 \arrow[r, "\text{US\$1} = \$1500"] & 450\,000 \end{tikzcd}$$

Las condiciones finales en dólares son: $300(1 + 0.06)^1 =$ US\$318

Para calcular las condiciones finales en pesos primero debemos calcular el tipo de cambio que regirá dentro de un año

Como la devaluación es del 20%, dentro de un año un dólar valdrá $1500\,(1+0.2)^1 = \$1800$
Y los US\$318 valdrán 318 x 1800 = \$572 400 tal como se aprecia en la gráfica.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \text{US\$} & \$ \\ \text{Condiciones iniciales} & 300 \arrow[r, "\text{US\$1} = \$1500"] \arrow[d] & 450\,000 \arrow[d, dotted] \\ \text{Condiciones finales} & 318 \arrow[r, "\text{US\$1} = \$1800"] & 572\,400 \end{tikzcd}$$

Como el inversionista reside en Colombia la rentabilidad que él necesita conocer se obtiene aplicando la formula del interés compuesto a los valores iniciales y finales en pesos (si el inversionista fuera residente en E.E.U.U. la rentabilidad se obtendría entre valores iniciales y finales pero en dólares.) Entonces:

$572\,400 = 450\,000(1+i)^1$ y al despejar se obtiene: $i = 27.2\%$

Obsérvese que el 27.2% no corresponde a la suma del 20% con el 6%

Tasas combinadas

En el caso anterior el inversionista ganaría dos tasas, una la tasa de interés en dólares 6% y otra la tasa de devaluación 20% (porque al finalizar el año va a recibir más pesos por el mismo dólar).

Cuando se combina una tasa i_1 con una tasa i_2, con el objeto de facilitar los cálculos se puede utilizar la tasa combinada i. El siguiente análisis nos permitirá deducir una fórmula para hallar esa tasa:

El monto al final de un período a la tasa i_1 será: $(1+i_1)$

El monto de $\$(1+i_1)$ a la tasa i_2 será: $(1+i_1)(1+i_2)$ [1]

El monto al final del mismo período de \$1 a al tasa i será: $(1+i)$ [2]

Al igualar [1] con [2] estamos igualando los dos montos y tenemos: $(1+i) = (1+i_1)(1+i_2)$ [3]

Al despejar i de la ecuación [3] se tiene:

$$\boxed{i = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2} \qquad [4]$$

Ejemplo 3

Resolver el ejemplo 2 usando la tasa combinada.

Solución:

Sea $i_1 = 6\%$ y sea $i_2 = 20\%$ entonces: $i = 0.06 + 0.2 + 0.06 \times 0.2 = 0.272 = 27.2\%$

Tasa deflactada o tasa real

Al hacer análisis sobre proyectos de inversión es necesario tener en cuenta que la inflación afecta la rentabilidad real del proyecto y que siempre se desea obtener una rentabilidad superior a la inflación. Para calcular la rentabilidad real podemos hacer uso de la fórmula [4] asumiendo que la inflación $f = i_1$, que la rentabilidad real $i_R = i_2$ y que la rentabilidad que en total paga es i, por tanto se tiene:

$$\boxed{i = f + i_R + f \times i_R} \qquad [5]$$

despejando i_R se tiene:

$$\boxed{i_R = \frac{i - f}{1 + f}} \qquad [6]$$

Ejemplo 4

Calcular la rentabilidad real que gana el inversionista del ejemplo 3 teniendo en cuenta que la inflación para el año en el que se hizo la inversión fue del 18%
Solución:

Observación. La inflación siempre se da como una tasa efectiva anual, por esta razón no hay necesidad de agregarle las letras EA.

Sea i la rentabilidad total esto es i = 27.2% y sea f = 18% entonces la rentabilidad real o tasa deflactada se obtiene aplicando la fórmula [6]

$$i_R = \frac{0.272 - 0.18}{1 + 0.18} = 0.077966 = 7.8\%$$

Lo anterior indica que el intermediario financiero ofrece pagarle al inversionista el 24%NM que equivale al 26.82%EA, después de pagar impuestos le queda el 27.2% EA y descontada la inflación solo le queda el 7.8%EA

Equivalencia de tasas referenciales

Hay muchos créditos atados a una tasa principal por ejemplo a la inflación más unos puntos adicionales, estos puntos adicionales se denomina el SPREAD, suponiendo que la inflación fuera del 10% efectivo anual y que el spread sea de 5 puntos, entonces la tasa a la cual se cancelaría el crédito se puede calcular aplicando la fórmula de las tasa combinadas:

$$i = 0.1 + 0.05 + 0.1 \times 0.05 = 0.155 = 15.5\% \text{ efectivo anual}$$

Cuando la tasa principal viene dada en forma efectiva anual para agregarle el spread se usa la fórmula de combinación de tasas pero si el spread se le adiciona a una tasa nominal entonces el spread simplemente se suma a la tasa principal por ejemplo:

Si un préstamo para vivienda se otorga a la DTF (tasa principal) más 8 puntos y suponiendo que la DTF sea del 17% TA (significa 17% nominal trimestre anticipado), entonces la tasa del crédito será:

$$0.17 + 8 = 25\% \text{ TA}$$

Por equivalencia de tasas se concluye que es equivalente al 29.45% efectivo anual.

Observación: Para créditos es costumbre que la DTF lo mismo que la TCC se expresen en nominal trimestre anticipado y en tasa de captación de la DTF y de la TCC se expresa en efectivo anual.

Ejemplo 7

Supongamos que una persona tiene un préstamo hipotecario al IPC + 4 puntos. ¿Cuál debe ser el spread si se cambia a otro plan cuya tasa es la DTF + X? Suponga que el IPC = 8%,EA y que la DTF = 18.67%TA (Las siglas TA significan nominal trimestre anticipado)

Solución:

Planteamos la siguiente ecuación:

$$\text{IPC} + 4 = \text{DTE} + X \qquad [7]$$

Pero debemos tener en cuenta que el IPC tiene efectividad anual mientras que la DTF está dada como nominal trimestre anticipada

La igualdad debe realizarse en las mismas unidades y el spread en cada caso viene a quedar en las mismas unidades de la tasa principal, en este caso 4 viene a ser efectivo anual y X viene a ser nominal trimestral anticipada.

Recordemos que para sumar dos tasas efectivas se aplica la fórmula de tasa combinadas, por tanto el primer miembro de la ecuación [7] será:

$$\text{IPC} + 4 = 0.08 + 0.04 + 0.08 \times 0.04 = 0.1232 = 12.32\% \text{ efectivo anual}$$

Como la incógnita que está en el otro miembro de la ecuación está dada en nominal trimestre anticipado entonces esta tasa la convertiremos en nominal trimestre anticipado

$$(1 + 0.1232) = (1 + i)^4 \text{ de donde } i = 2.947137112\% \text{ período trimestre vencido}$$

$$i_a = \frac{i}{1+i} = \frac{0.02947137112}{1+0.02947137112} = 2.86275\%TA$$

$j_a = 2.86275 \times 4 = 11.451\%$ TA y este valor corresponde al primer miembro de la ecuación [7]

La suma de dos tasas nominales se obtiene efectuando una suma simple de manera que el segundo miembro de la ecuación [7] será:

$$\text{DTF} + X = 0.187 + X \text{ nominal trimestre anticipado}$$

Finalmente la ecuación quedará así:

$$0.11451 = 0.1867 + X \text{ de donde } X = -0.07219 = -7.219\%TA$$

Finalmente podemos concluir que si se cambia de plan tendrá que ser a la DTF menos 7.219%

Observación 1 En Colombia el spread se da en puntos que son adicionales a la tasa principal, en Europa y Estados Unidos el Spread se acostumbra a dar en puntos básicos. Un punto básico es igual a 0.01% de forma que 400 puntos básicos corresponden a un spread de 4 puntos.

Observación 2 A pesar de que la Libor es una tasa efectiva, es costumbre que el spread simplemente se sume la Libor sin hacer uso de la tasa combinada. La razón, es que estas tasa son muy pequeñas y la diferencia de resultados entre un método y otro es prácticamente nula.

Ejemplo 8

Un industrial tiene actualmente contratado un préstamo con una corporación financiera a la tasa del TCC + 3 puntos ¿Cuál debe ser el spread en puntos básicos de forma tal que financieramente sea indiferente el préstamo en la corporación financiera o en el mercado de Londres. Suponga los siguientes índices:

TCC = 15.3%TA, i_{DEV} = 22% EA, Libor = 5.2% EA.[5]

Solución:

El préstamo que se realice en Londres se efectuará en Libras Esterlinas y obviamente una devaluación del peso frente a la libra Esterlina afectará el costo del crédito, por tal razón la siguiente ecuación incluye la tasa de devaluación.

$$i_{DEV} + (\text{Libor} + X) = \text{TCC} + 3$$

Trabajemos primero el miembro de la derecha.

TCC + 3 = 15.3%TA + 3%TA = 18.3%TA (desde que son tasas nominales se pueden sumar directamente)

Por equivalencia de tasas podemos convertir la tasa nominal trimestre anticipado en una tasa efectiva anual obteniéndose el siguiente resultado:

$$18.3\%\text{NTA} = 20.601\%\ \text{EA}$$

[5] La tasa Libor es la tasa que los principales bancos europeos cobran a sus mejores clientes, la Libor siempre se expresa como efectiva anual para diferentes plazos, 1 mes, 3 meses, 6 meses, un año. La tasa Libor no es exclusiva del mercado de Londres también existe Libor en París (Pibor), Madrid (Mibor), Zurich (Zibor), etc.

Ahora trabajaremos el miembro de la izquierda:

$$i_{DEV} + (\text{Libor} + X) = 22\% + (5.2 + X)\ \%$$

(5.2 + X)% se puede escribir como $\dfrac{(5.2+X)}{100} = 0.052 + 0.0X$

La suma del 22% y del (5.2 + X)% debe realizarse usando la combinación de tasas así:

$$22\% + (5.2 + X)\% + 22\%\ (5.2 + X)\% = 0.22 + 0.052 + 0.0X + 0.22 \times 0.052 + 0.0022X$$

que al simplificarlo da:

$$0.28344 + 0.0122X$$

Igualando el miembro de la izquierda con el miembro de la derecha tenemos:

$$0.28344 + 0.0122X = 0.20601$$

Despejando X se tiene: $X = -6.35\%$

Lo que significa que cobrar TCC +3 puntos es lo mismo que cobrar devaluación más Libor menos 6.35 puntos

ACEPTACIONES BANCARIAS Y FINANCIERAS

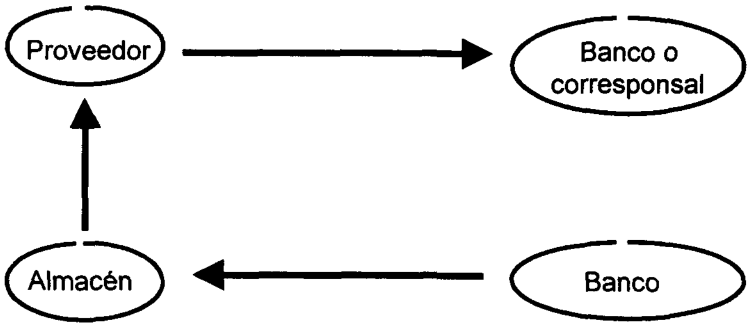
Las aceptaciones bancarias y financieras son letras de cambio con cargo a un comprador de bienes manufacturados que una entidad financiera avala o garantiza su pago al poseedor de la aceptación al vencimiento. El plazo máximo es de un año. Cuando la entidad financiera que da el aval es un banco se denomina aceptación bancaria, si es otro tipo de entidad financiera se denomina aceptación financiera.

Las aceptaciones en general son títulos que se expiden a la orden del proveedor, no son divisibles, no son gravables en el mercado primario.

Ejemplo 9

Supongamos que un proveedor de bicicletas (puede ser la fábrica) recibe un pedido de compra de 50 unidades para un almacén por valor de $5 millones pero el almacén pide un plazo de 90 días para pagar. El proveedor acepta el pedido pero solicita que una entidad financiera garantice el pago futuro, por tal motivo el dueño del almacén se dirige a su banco y le solicita que expida una aceptación bancaria por $5 millones con vencimiento en 90 días, el banco le entrega al almacén la aceptación y éste se la entrega al proveedor, este último puede guardar la aceptación y cobrarla al banco a su vencimiento o puede negociarla en el mercado secundario.

Gráficamente podemos representar la operación anterior así:

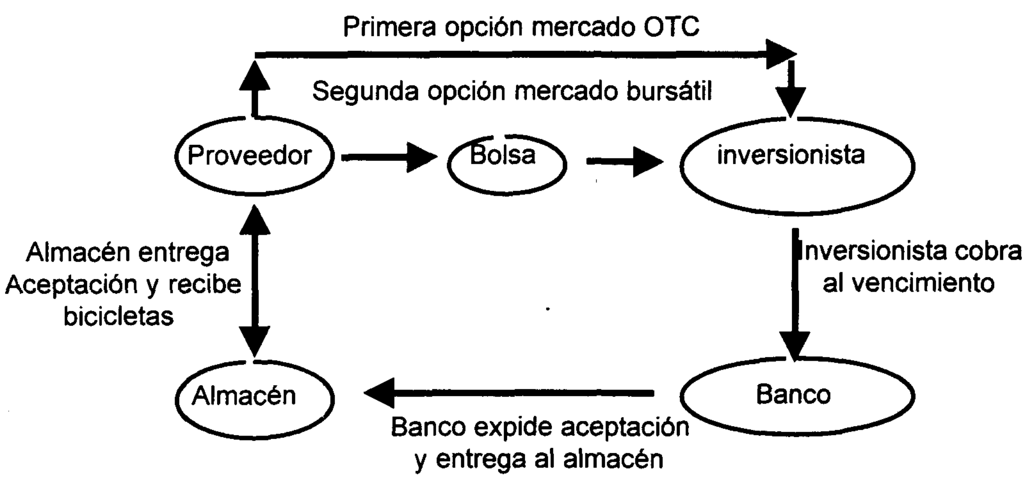


Puede ocurrir que el fabricante se encuentre en un país distinto al del almacén y si el banco no tiene sucursal en ese otro país deberá tener corresponsales (es decir bancos que lo representen en ese otro país).

Si el proveedor necesita el dinero antes del vencimiento, puede ofrecer en venta la aceptación y para ello tiene dos opciones: Venderla en el mercado extrabursátil conocido como mercado OTC (over the counter) o también se le conoce como mercado mostrador que tiene la ventaja de no pagar comisiones a intermediarios porque se negocia en forma directa o venderla en el mercado bursátil, es decir en una bolsa de valores, a través de un intermediario de bolsa conocido como corredor de bolsa que cobra una comisión por sus servicios de intermediación.

Es obvio que al vencimiento de la aceptación, el dueño del almacén deberá cancelar al banco el valor de ésta, e independientemente de si el almacén le paga o no al banco la aceptación, el banco sí tendrá que pagar en la fecha de vencimiento el valor nominal de la aceptación al tenedor de ésta.

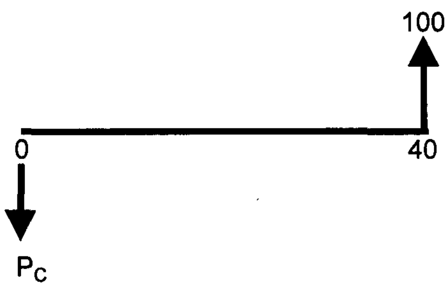
A continuación presentamos una gráfica más completa donde se muestra la trayectoria de la aceptación bancaria



Primera opción: Supongamos que faltando 40 días para el vencimiento, el proveedor debido a un estado de iliquidez, decide vender la aceptación en el mercado OTC, (el inversionista que adquiere esta aceptación puede ser un particular, una compañía de financiamiento comercial, una leasing etc.) Supongamos que la tasa de descuento convenida es del 30%, el valor que recibe el vendedor se denomina precio del vendedor que en este caso será igual al precio del comprador (P_C) puesto que no hay que pagar ninguna comisión.

Es costumbre calcular el P_C como un porcentaje del valor que tendrá la aceptación al vencimiento. (El valor al vencimiento se denomina valor de maduración o valor de redención y lo representaremos por VF).

Haciendo el cálculo por cada $100 de valor de maduración se tendrá:



Teniendo en cuenta que la fórmula del monto compuesto es $S = P_C(1+i)^n$ entonces la fórmula para calcular el valor presente será: $P_C = S(1+i)^{-n}$ de manera que el valor presente P_C de la aceptación por cada $100 de valor de maduración será:

Observación: Como la tasa está es efectiva anual el tiempo también debe darse en años

$$P_C = VF(1+i)^{-n} = 100(1+0.3)^{-40/365} = \$97.1657$$

Esto significa que el precio de compra es el 97.1657% por cada $100 de maduración y si el valor de maduración es de $5,000,000 entonces el precio de compra será:

$$5{,}000{,}000 \times 97.1657\% = \$4{,}858{,}285$$

Segunda opción: El proveedor decide descontar la aceptación en el mercado bursátil y en tal caso debe recurrir a un corredor de bolsa (quienes son los únicos autorizados para negociar en la bolsa) y supongamos que el corredor le dice que en la bolsa este tipo de operaciones se está registrando al 30% efectivo anual, esta tasa se denomina tasa de registro porque es la tasa que queda registrada en las computadoras de la Bolsa y la representaremos por i_R

Con base en la tasa de registro se puede calcular el precio de registro así:

$$P_R = 100(1+0.30)^{-40/365} = \$97.1657 \text{ equivalente al } 97.1657\%$$

El precio de registro en pesos será: 97.1657% x 5,000,000 = $4,858,285

De esta forma en las computadoras de la Bolsa va a aparecer en venta esta aceptación por valor del 97.1657% de su valor de redención y que a ese precio produce una rentabilidad del 30%.

Pero además el corredor le dice que para que la aceptación sea inscrita en bolsa tendrá que pagar una comisión que representaremos por COM_V (comisión de venta)

Supongamos que la comisión de venta sea del 0.5% en rentabilidad entonces la tasa total de descuento será:

$$i_R + COM_V = 30\% + 0.5\% = 30.5\%$$

Esta nueva tasa se denomina tasa de cesión o tasa del vendedor

Con base en la tasa de cesión podemos calcular el valor de cesión o sea el valor que recibe el vendedor por la aceptación. El valor de cesión lo representaremos por P_V (precio de venta)

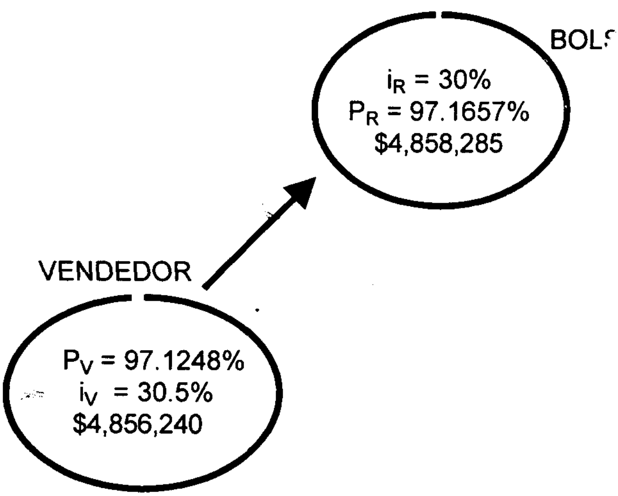
$$P_V = 100(1+0.305)^{-40/365} = \$97.1248 \text{ equivalente al } 97.1248\%$$

El precio de venta en pesos o precio de cesión en pesos será: 5,000,000 x 0.971248 = $4,856,240

Observación: El valor de la comisión de venta se puede hallar por la diferencia entre los precios de venta y el precio de registro esto es:

$$4{,}858{,}285 - 4{,}856{,}240 = \$2{,}045$$

La siguiente gráfica nos permite visualizar lo visto hasta el momento.



Ejemplo 10

Supongamos que un inversionista desea adquirir la aceptación bancaria del ejemplo anterior la cual figura con una tasa de registro del 30% y con precio de 97.1657% pero él *también sabe que para adquirirla deberá pagar una comisión a un corredor de bolsa lo* cual hará variar el precio que él debe pagar y también la rentabilidad que él pueda obtener.

Supongamos que la comisión que cobra un corredor por la compra es del 0.475% en rentabilidad entonces la tasa i_C o rentabilidad para el comprador será:

$$i_C = 30\% - 0.475\% = 29.525\%$$

Con base en la tasa del comprador podemos calcular el precio para el comprador así:

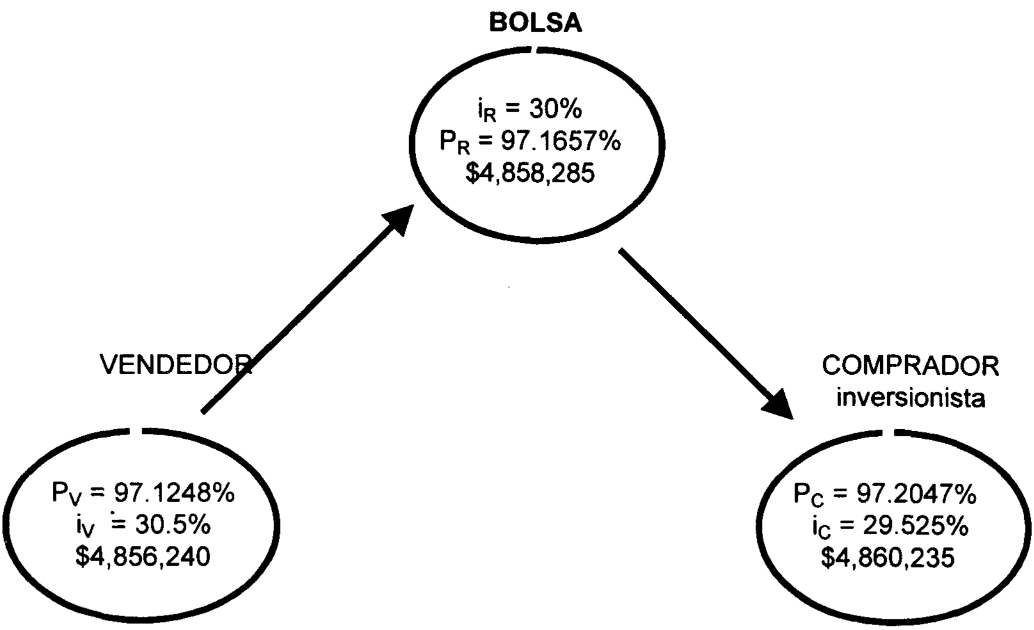
$$P_C = 100(1+0.29525)^{-40/365} = \$97.2047 \text{ equivalente al } 97.2047\%$$

En pesos el comprador deberá pagar: 97.2047% x 5,000,000 = $4,860,235

La comisión de compra se puede hallar por diferencia entre el precio en pesos de registro y el precio en pesos del comprador así:

$$P_C - P_R = 4{,}860{,}235 - 4{,}858{,}285 = \$1{,}950$$

Completando la gráfica anterior con esta nueva operación se tendrá:



Observación: En el mercado bursátil el precio del vendedor es diferente al precio del comprador debido a la comisión de los corredores de bolsa, pero en el mercado extrabursátil estos valores son iguales dado que no hay comisión.

En el ejemplo anterior hemos mostrado el procedimiento de negociación en los mercados OTC y bursátil pero por simplicidad no hemos incluido el impuesto. En el siguiente ejemplo incluiremos este factor.

Ejemplo 11

Dijimos que el dueño del almacén solicita al banco una aceptación bancaria por $5 millones, que el dueño del almacén se la entrega al proveedor (fabricante) para que le entreguen la mercancía al almacén, sin embargo, para que el banco preste este servicio le cobra al dueño del almacén una comisión sobre el valor nominal de la aceptación que puede ser del orden del 1% por mes pagadero en un solo contado en forma anticipada sobre el valor de la aceptación esto es: 1% x 5,000,000 = $50,000 por cada mes y por los 3 meses que dura la aceptación será: 50,000 x 3 = $150,000, además sobre la comisión del banco habrá que pagar otra carga impositiva que es el IVA, que en el momento de escribir estas líneas es del 16 %, así que en pesos el IVA será: 16% x 150,000 = $24,000 de manera que el costo total de apertura de la aceptación bancaria para el dueño del almacén viene a ser 150,000 + 24,000 = $174,000

Si el proveedor se queda con la aceptación hasta su vencimiento el banco le pagará la suma completa establecida en la aceptación es decir $5,000,000, sin embargo, si el fabricante decide vender la aceptación antes del vencimiento lo puede hacer, como ya vimos, en el mercado extrabursátil o en el mercado bursátil.

Si lo vende en el mercado extrabursátil no es suficiente endosar la aceptación sino que ambos vendedor y comprador deben autenticar las firmas en notaría y después se la presenten al banco para que este sepa a quien debe pagar la aceptación al vencimiento.

En el caso de venderla en el mercado bursátil, es la Bolsa quien se encarga de informar al banco el cambio de beneficiario, ya no habrá IVA (puesto que ya fue pagado en el momento de la apertura de la aceptación.) pero en cambio habrá otra carga impositiva que grava las utilidades sobre activos financieros denominada retención en la fuente la cual representaremos por RF cuya tarifa actual (1.999) es del 7%, de las utilidades, es decir que se aplica a la diferencia entre el valor de redención y el precio de registro.

Si la aceptación es vendida en el mercado bursátil 40 días antes del vencimiento a un inversionista, según el ejemplo 10, el precio de registro es $4,858,258, en consecuencia la retención en la fuente la podemos calcular así:

$$0.07 \times (5{,}000{,}000 - 4{,}858{,}285) = \$9{,}920$$

En consecuencia, el comprador (que viene a ser el inversionista) deberá pagar el precio de compra más la retención en la fuente lo cual viene a dar:
4,860,235 + 9,920 = $4,870,155

Ejemplo 12

Supongamos que faltando 10 días para el vencimiento el inversionista del ejemplo anterior decide venderlo y para esta época se están negociando en Bolsa con una tasa de descuento del 28%, por tanto la tasa de registro debe ser el 28% y el precio de registro será:

$$P_R = 100\,(1+0.28)^{-10/365} = 99.32595\%$$

En pesos el precio de registro será: 99.32595% x 5, 000,000 = $4,966,298

Por tanto la retención en la fuente será: RF = 0.07 x (5,000,000 – 4,966,298) = $2,359

Suponiendo que las comisiones de compra y de venta sean c/u del 0.5% en rentabilidad la tasa del vendedor viene a ser 28% + 0.5% = 28,5% y el precio de venta será:

$$100(1+0.285)^{-10/365} = 99.3153\% \text{ equivalente a } 99.3153\% \times 5{,}000{,}000 = \$4{,}965.765$$

Por tanto el vendedor además de recibir los $4,965,765 también debe recibir lo correspondiente a la retención en la fuente ($2,359) puesto que el vendedor ya había pagado la retención total y en este caso la Bolsa lo que hace es trasladar la retención en la fuente del comprador al vendedor. En consecuencia el vendedor recibirá:

$$4{,}965{,}765 + 2{,}359 = \$4{,}968{,}124$$

Para el comprador se tiene:

$$\text{Tasa de compra} = 28\% - 0.5\% = 27.5\%$$

Precio de compra:

$$100\,(1+0.275)^{-10/365} = 99.3366\% \text{ equivalente a } 99.3366\% \times 5{,}000{,}000 = \$4{,}966{,}830$$

El total que debe pagar el comprador será el precio de compra más la parte de retención en la fuente que la Bolsa le devuelven al vendedor, esto es:

$$4{,}966{,}830 + 2{,}359 = \$4{,}969{,}189$$

Observación 1: El primer inversionista pagó por retención en la fuente 9,920 y le reintegraron 2,359 esto significa que en total pagó: 9,920 – 2,359 = $7,561 y el segundo inversionista pagó $2,359.

Observación 2: La constitución de aceptaciones no implica desembolsos de dinero en forma inmediata ni por parte de la entidad financiera ni por parte del comprador, salvo el IVA y la comisión del intermediario financiero, lo demás es una obligación futura.

Observación 3: Si una aceptación no es cobrada al vencimiento, el emisor debe consignar el valor de esta en el Banco Agrario, sin embargo el emisor da un período de gracia antes de hacer la correspondiente consignación.

Ejemplo 13

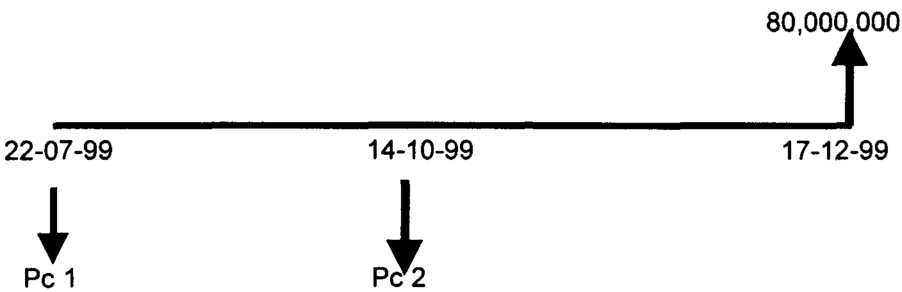
Una aceptación bancaria por $80 millones con fecha de vencimiento el 17 de diciembre de 1999 es adquirida el 22 de julio de 1999 por un primer inversionista con un descuento del 28% y es cedida a un segundo inversionista el 14 de octubre de 1999. Si el segundo inversionista desea ganarse el 32%

Utilice un interés comercial (año de 360 días)

a) ¿Cuál es la ganancia en pesos del primer inversionista?
b) ¿Cuál es la rentabilidad efectiva anual del primer inversionista?

Solución:

Representemos por Pc 1 y por Pc 2 el precio de compra del primer inversionista y del segundo inversionista respectivamente.



Si tomamos en cuenta que debemos usar un año de 360 días entonces los días que hay entre el 22 de julio y el 17 de diciembre son 145 que se calculan así:

Del 22-07 al 22-08	30
Del 22-08 al 22-09	30
Del 22-09 al 22-10	30
Del 22-10 al 22-11	30
Del 22-11 al 30-11	8
Hasta el 17-12	17
Total......................	145

Los días que hay entre el 14 de octubre y el 17 de diciembre se calculan así:

Del 14-10 al 14-11	30
Del 14-11 al 14-12	30
Del 14-12 al 17-12	3
Total	63

El precio de compra del primer inversionista será:

$$Pc\ 1 = 80{,}000{,}000\ (1+0.28)^{-(145/360)} = \$72{,}428{,}283.64 \text{ aproximado a } \$72{,}428{,}284$$

Dado que no estamos tomando en cuenta comisiones el precio de compra del segundo inversionista es el mismo precio de venta del primer inversionista y se calcula así:

$$Pc\ 2 = 80{,}000{,}000\ (1+0.32)^{-(63/360)} = \$76{,}206{,}067.13 \text{ aproximado a } \$76{,}206{,}067$$

La ganancia del primer inversionista será:

$$76{,}206{,}067 - 72{,}428{,}284 = \$3{,}777{,}783$$

La rentabilidad del primer inversionista se obtiene aplicando la fórmula del interés compuesto y tomando el tiempo que tubo en su poder la aceptación.

En este caso el tiempo se puede hallar calculando los días que hay entre el 22 de julio y el 14 de octubre usando el procedimiento anterior, o, también por diferencia de días entre el total que es 145 y los que hay entre la fecha de compra del segundo inversionista y la fecha de vencimiento que vienen a ser 63, entonces esta diferencia viene a ser: 145 – 63 = 82

$$S = P_C(1+i)^n$$

Reemplazando se tiene:

$$76{,}206{,}067 = 72{,}428{,}284\ (1+i)^{82/360}$$

de donde se obtiene que i = 25.01%

La rentabilidad del segundo inversionista obviamente es del 32%

Problemas propuestos.

1) Se constituye un CDT a 180 días por $650 000, con una tasa del 26% NT y teniendo en cuenta que la retención en la fuente es del 7% determinar:
   a) la rentabilidad antes de impuestos.
   b) La rentabilidad después de impuestos y

c) El valor que le entregan al vencimiento
d) Suponiendo una inflación del 18% determinar la tasa real obtenida.

Respuestas: a) 28.647% b) 26.524% c) $731 139.01 d) 7.224%

2) Un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 8% ¿A qué tasa debe invertir suponiendo que la inflación va a ser del 18%?

Respuesta: 27.44%

3) Un artículo es fabricado en Estados Unidos y se vende en Colombia en $50.000 ¿Cuanto valdrá el artículo en Colombia y en Estados Unidos al final de un año, suponiendo los siguientes índices económicos: cambio actual US$1 = $2000, inflación en Estados Unidos 3%, devaluación del peso 18%

Respuestas: $60 770, US$25.75

4) Un artículo es fabricado en Colombia y cuesta $68.000, cuando el cambio es de US$1 = $2000. Suponiendo que el IPP de este sector en Colombia es del 22%, y que la devaluación del peso frente al dólar sea del 18%, hallar el precio del mismo artículo en cada país al final de un año.

Respuestas: $82 960, US$35.15.

5) Dos inversionistas de origen alemán, uno residente en Alemania y el otro residente en Colombia, han decidido realizar un negocio en Alemania y cada uno aportará el 50%. El negocio exige una inversión inicial de marcos 300.000 y al final de 3 años devolverá la suma de marcos 400.000. Hallar las tasas totales y reales para cada uno de los socios suponiendo que los siguientes indicadores económicos se mantuvieron estables durante los 3 años.
a) tasa promedio de inflación en Colombia 22% anual
b) tasa promedio de inflación en Alemania 2% anual
c) tasa de devaluación del peso frente al dólar: primer año 18%,segundo año 20% y tercer año 17%, devaluación marco frente al dólar: años 1 y 2 el 2%, para el tercer año hay una revaluación del 3%
d) cambio actual US$ = DM$2,23 US$ = $1.300

Respuestas: En marcos 10.06% y 7.9%, en pesos: 29.85% y 6.43%

6) El señor Yukimoto residente en el Japón y Mr Jones residente en Estados Unidos se asocian para comprar un banco en Colombia, el valor de cada acción del banco es de $9.000 y esperan venderla al final de 3 meses en $9.700. (Trabajar con 5 decimales)
a) Calcule la rentabilidad anual total y la rentabilidad real anual de cada uno de los socios
b) ¿cuánto tendrá cada uno en su respectiva moneda al final de los 3 meses?
Tome en cuenta la siguiente información:

Inflación en: Colombia 18%, en Estados Unidos 3.5%, en Japón 2.3%
tasa de devaluación del peso frente al dólar 22%
tasa de devaluación del dólar frente al Yen 1%
Cambio actual US$1 = $2000; US$1 = Yen105

Respuestas: Yukuimoto: $i = 9.49465\%$, $i_R = 7.0347\%$
Mr Jones $i = 10.60066\%$, $i_R = 6.86054\%$

7) Si en el problema anterior el valor del banco es de ochenta mil millones de pesos y Yuquimoto participa en el 40% de la compra y Mr Jones participa con el resto, determinar la cantidad que recibirá c/u en su respectiva moneda.

Respuestas: Yuquimoto Yenes 1 718 530 911.17 Mr Jones dólares 24 612 204.16

8) En el país A cuya moneda es el ABC, un par de zapatos vale 24.000 de ABC, existe una inflación del 22% y el cambio actual es de US$1=ABC1.000. En el país X rige el dólar americano y se prevé una inflación promedio del 6.5% anual. Al final de un año ¿cuál debe ser la tasa de devaluación en A con respecto al dólar a fin de no perder competitividad en los mercados de X?

Respuesta: 14.554%

9) Un inversionista desea que todas sus inversiones le den una rentabilidad real del 8%. ¿Qué tasa efectiva anual debe ofrecérsele si la inflación esperada es del 17% de forma tal que satisfagan los deseos del inversionista?

Respuesta: 26.36%

10) Un ahorrador consigna en una corporación de ahorro y vivienda la suma de $300.000 el día 1 de marzo y el día 20 de junio consigna $200.000. ¿Cuánto podrá retirar el 31 de agosto si la corporación paga el 27% efectivo anual de corrección monetaria para los meses de marzo y abril y el 25%efectivo anual para el resto del período (mayo, junio, julio y agosto).
a) elabore los cálculos en pesos
b) elabore los cálculos en UPAC sabiendo que el primero de marzo upac1 = $6.650

Respuestas: $545 389, UPAC73.1415

11) Se estima que la corrección monetaria del primer año será del 18% y la del segundo año del 17%:
   a) calcular la cantidad que antes de impuestos le entregarán a un inversionista que invierte la suma de $800.000 a <u>dos años</u> en una cuenta de ahorros en UPAC que la garantiza pagar la corrección monetaria mas el 4% efectivo anual de interés sobre los UPAC. Suponga
   b) calcule la rentabilidad obtenida antes de impuestos que el cambio actual es UPAC 1 = $14 000

c) Si la retención en la fuente es del 7% sobre los intereses, calcular la rentabilidad después de impuestos
d) Calcular la cantidad final que le entregarán después de impuestos.

Respuestas: a) $1 194 605.57, b) 22.199%, c)21.876%, d)$1 188 296.78

12) Hallar la tasa efectiva anual de:
a) DTF + 6 puntos
b) IPC + 7 puntos
c) Libor + 8 puntos
Asuma que: DTF = 15%TA, IPC = 10%, Libor = 5.14%NS

Respuestas: a) 24.07%, b) 17.7% 13.57%

13) Suponiendo IPC = 8.5%, CM = 12% (CM = corrección monetaria), DTF = 15%TA y TCC = 15.5%TA, TBS (CF 180 días) = 19.27%EA, TBS (Bancos 360 días) = 19.19% EA Hallar X de las siguientes igualdades:

Observación: TBS (CF 180 días) significa tasa básica del sector corporaciones financieras a 180 días

a) IPC + 10 = CM + X
b) CM + 14 = TCC + X
d) DTF + 8.6 = IPC + X
e) TBS(CF 180 días) + 6 = DTF+ X
f) TCC+3.5 = DTF+ X
g) IPC + 4 = DTF + X

Respuestas: a) 6.56%EA, b) 8.2%TA, c) 17.55%EA, e) 7.775%TA, f) 4%TA, g) -3.1%TA

14) Asumiendo que i_{DEV} = 25%, IPC = 9%, Prime Rate = 8.25%, DTF = 14.5%TA y Libor = 5% resolver las siguientes ecuaciones:
a) i_{DEV} + 10 = IPC +X
b) i_{DEV} + (Prime + 200 p.b.) = DTF +X
c) i_{DEV} + (Libor + 500 p.b.) = DTF +X

Respuestas: a) 26.148%EA, b) 16.32%TA, c) 16.11%TA

15) ¿Cuál es la rentabilidad efectiva anual del comprador y el precio de compra para el que adquiere una aceptación financiera a 180 días si se conserva hasta su maduración, se registra en bolsa a un precio de 86.225% y la comisión de compra es del 0.5% en rentabilidad?

Respuestas: i_C = 34%, P_C = 86.387%

16) ¿Cuál es la comisión en pesos para el problema anterior suponiendo que la aceptación financiera tiene un valor nominal de $278 000?

Respuesta: $450

17) ¿Cuál es la rentabilidad efectiva anual que obtiene un inversionista que adquiere en el mercado secundario una aceptación bancaria emitida a 90 días con un precio de registro de 97.254% y le faltan 28 días para su maduración.? Suponga una comisión de compra del 0.4% en rentabilidad. base 360.

Respuesta: 42.645%

18) Un exportador recibe una aceptación bancaria por sus mercancías la cual vence en 180 días, tiene una tasa de emisión del 28%NS. El mismo día en que le entregan la aceptación la ofrece en bolsa. Si las comisiones de compra y de venta son de 0,4% y 0.6% respectivamente, calcular:
   a) la tasa de registro
   b) la tasa del comprador
   c) La tasa del vendedor
   d) El precio de registro
   e) El precio de compra

Respuestas: a) 29.36%, b) 28.96%, c) 29.96%, d) 87.922%, e) 88.059%.

19) Un inversionista compró el 14 de junio/98 al 29.4% EA una Aceptación Bancaria con vencimiento el 15 de mayo/99 por $250 millones, un segundo inversionista está dispuesto a adquirilo el día 10 de septiembre/98 a una tasa del 34% EA.

   a) ¿Cuál será la utilidad en pesos del primer inversionista?

   b) ¿Cuál es la rentabilidad del primer inversionista? (use un interés comercial es decir un año de 360 días).

Respuestas: a) $7 598 455 b) 17.14% EA.

20) Resuelva el problema anterior pero el segundo inversionista lo adquiere al 23.5% EA.

Respuestas: a) $19 296 120 b) 47.8% EA.

21) Suponga que el señor X posee una aceptación financiera con valor de vencimiento de $6,758,000 y desea venderla en Bolsa faltándole 57 días para vencerse y quiere ganarse un 29.5% y la adquiere el señor Y. Suponga que la comisión de venta y de compra son 0.5% y 0.47% respectivamente en rentabilidad. Base 365.
   a) ¿Cuál es la tasa de registro?
   b) ¿Cuál es el precio de registro?
   c) ¿Cuál la tasa que gana el señor Y?

d) ¿Cuál es el precio quepaga el señor Y?
e) ¿Cuál es la comisión de compra en pesos?

Respuestas: a) i_R = 29%, b) P_R = \$6,494,534 c) i_C = 28.53%, d) P_C = \$6,498,237, e) \$3,703.

22) El señor XX posee una aceptación bancaria por valor de \$10 millones y la vende en Bolsa faltándole 87 días para su maduración, la adquiere el señor YY y el cual desea ganar el 32% después de comisión pero antes de impuestos. Si la comisión de compra es del 0.4% y la de venta el 0.375% usando un año de 360 días determinar:

a) La tasa de registro
b) El precio de registro
c) La tasa de cesión
d) El precio de cesión
e) El precio al comprador
f) La retención en la fuente
g) La cantidad que debe pagar YY
h) La cantidad que recibe XX
i) La rentabilidad después de impuestos que gana YY

Respuestas: a) 32.4%, b) \$9'344.234, c) 32.775%, d) \$9'337.850, e) \$9'351.070, f) \$45.904, g) \$9'396.974, h) \$9'383.754, i) 29.352%.

23) En el problema 21 calcule el valor que recibe el vendedor y el valor que paga el comprador suponiendo que la retención en la fuente es del 7% sobre utilidades.

Respuestas: El comprador paga \$6,516,680, Vendedor recibe \$6,509,055.

24) El 27 de abril de 1999 se compra una aceptación bancaria de \$36 millones en el mercado bursátil, con vencimiento el 27 de julio de 1999 y con tasa de registro del 26% EA. Si después de transcurridos 34 días la vende. ¿Qué precio se debe cobrar si el vendedor desea obtener una rentabilidad durante la tenencia del 26.5% EA? Base 365.

Respuesta: \$34,736,688.

25) Resuelva el problema anterior suponiendo que el corredor cobra una comisión del 0.1% en rentabilidad y que de todas maneras el vendedor quiere ganarse el 26.6% durante la tenencia.

Respuesta: \$34,746,123.

Anualidades ordinarias y anticipadas

CAPITULO **4**

INTRODUCCION

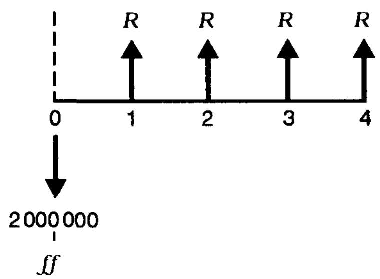
Una interesante introducción a este capítulo pude lograrse con la solución del siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Una persona compra un terreno cuyo valor, al contado, es de \$2 millones. Si le dan la facilidad para pagarlo en cuatro cuotas trimestrales de \$*R* c/u, que se efectuarán al final de cada trimestre y, además se le cargaría un interés del 40% CT, hallar el valor de la cuota trimestral de amortización.

Solución.

Primero construimos un dibujo que muestre las fechas, el valor de la deuda y el valor de los pagos (esto también se conoce con el nombre de flujo de caja). Puesto que la tasa tiene efectividad trimestral y los pagos son trimestrales usaremos el trimestre como período.



Si planteamos la ecuación de valor poniendo la fecha focal en cero nos quedaría la ecuación así:

$$2\,000\,000 = R\,(1+0.1)^{-1} + R\,(1+0.1)^{-2} + R\,(1+0.1)^{-3} + R\,(1+0.1)^{-4}$$

factorizando *R* se tendrá:

$$2\,000\,000 = R\,[(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + (1.1)^{-4}]$$

$$2\,000\,000 = R\,[3.169865]$$

$$R = \$630\,941.61$$

si hubiésemos planteado la ecuación de valor con fecha focal al final nos habría quedado así:

$$2\,000\,000(1.1)^4 = R\,(1.1)^0 + R\,(1.1)^1 + R\,(1.1)^2 + R\,(1.1)^3$$

factorizando se tiene:

$$2\,000\,000(1.1)^4 = R\,[(1.1)^0 + (1.1)^1 + (1.1)^2 + (1.1)^3]$$

$$2\,928\,200 = R\,[4.641]$$

$$R = \$630\,941.61$$

Se observa a primera vista que la ecuación tiene una presentación muy distinta pero el resultado final es el mismo.

El problema anterior no presentó dificultad para resolverlo; pero, si el número de pagos hubiese aumentado considerablemente, la solución no hubiese sido tan sencilla, como en el caso de pagar una deuda mediante pagos mensuales, durante 20 años. La solución de éste problema a dado origen a un modelo matemático llamado anualidad. Antes de entrar a estudiar las anualidades daremos algunas definiciones.

RENTA

Es el pago periódico de igual valor que corresponde a los $\$R$ del ejemplo anterior. A la renta tambien se le conoce como: cuota, depósito, retiro o pago, según sea el caso.

PERIODO DE RENTA

Es el tiempo que transcurre entre dos pagos periódicos consecutivos.

ANUALIDAD

Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor.
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo
3. A todos los pagos se les aplica la misma tasa de interés
4. El número de pagos es igual al número de períodos

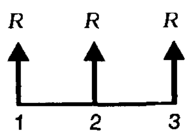
Las condiciones anteriores obedecen a ciertas normas y tienen algunas implicaciones, por ejemplo, la primera condición es indispensable para poder factorizar tal como se hizo cuando se plantearon las ecuaciones de valor del ejemplo 1.

La segunda condición establece que los pagos deben hacerse a iguales intervalos de tiempo, esto es necesario para que los exponentes sean ascendentes o descendentes tal como se ve en las ecuaciones del ejemplo anterior. Esta condición se cumple aún si los pagos son trimestrales, semestrales o anuales y sinembargo a la serie se le sigue denominando anualidad.

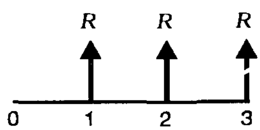
La tercera condición establece que todos los pagos deben ser llevados a valor presente o a valor final, según el caso, a la misma tasa de interés. Esto nos garantiza que todos los términos dentro del paréntesis angular tienen la misma base, por lo tanto, la serie que está dentro del paréntesis angular forma una progresión geométrica.

La cuarta condición establece que el número de pagos debe ser igual al número de períodos.

Por tanto la serie que se muestra en la siguiente gráfica no representa una anualidad porque tiene 3 pagos y solo hay 2 períodos.

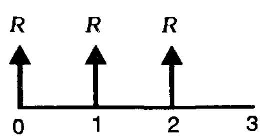


Para que la gráfica anterior represente una anualidad bien conformada es necesario agregarla un período que bien puede quedar al principio o al final. En el primer caso se tendrá:



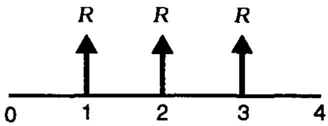
la anualidad así conformada recibe el nombre de *Anualidad Ordinaria o Anualidad Vencida* que viene a ser aquella en que los pagos se efectúan al final del período por ejemplo el pago de los sueldos de un empleado (primero viene el período de trabajo y después viene el pago)

En el segundo caso se tendrá:



la anualidad así conformada recibe el nombre de *Anualidad Anticipada* porque los pagos se efectúan al principio del período por ejemplo el pago mensual del arriendo de una casa (primero paga y después tiene derecho a ocupar la casa durante el mes que pagó).

El siguiente dibujo no representa una anualidad porque hay 3 pagos y hay 4 períodos



Claramente puede observarse que cuando se inicia el dibujo con pago y se termina con pago, como ocurre en la gráfica 1, no hay una anualidad bien conformada y cuando el dibujo inicia con período y termina con período, como en el caso de la gráfica 4, tampoco hay una anualidad bien conformada. Las gráficas 2 y 3 si representan anualidades bien conformadas y tienen una característica en común, que su inicio y fin son diferentes, en la gráfica 2 se inicia con período y se termina con pago y en la gráfica 3 se inicia con pago y se termina con período.

En conclusión para que una anualidad este bien conformada su inicio y fin deben ser diferentes.

PLAZO DE UNA ANUALIDAD

El tiempo que transcurre entre el inicio del primer período y el final del último período se denomina el plazo de una anualidad y se representa por n.

Una anualidad tiene dos valores el valor final y el valor presente en el primer caso, todos los pagos son trasladados al final de la anualidad y en el segundo caso todos los pagos son trasladados al principio de la anualidad.

VALOR FINAL

Hagamos los cálculos para hallar el valor final de una anualidad ordinaria. El valor final puede ser representado de dos maneras:

La primera usando la notación tradicional:

$$(F/A,n,i\,\%)$$

donde F significa valor final, A significa que se trata de una anualidad, n indica el número de pagos de la anualidad y la $i\%$ significa la tasa a la cual todos los pagos son trasladados a valor final.

La segunda forma de representación es con la notación actuarial:

$$S_{\overline{n}|i}$$

donde la S significa valor final, la n (cantidad que se escribe dentro del ángulo) indica el número de pagos y la i indica la tasa a la cual serán llevados todos los pagos a valor final.

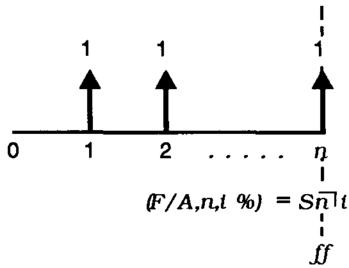
Debido a que la notación actuarial es mas condensada le sugerimos al lector que utilice ésta forma.

Ahora procederemos a calcular el valor final de una anualidad. No se pierde generalidad si suponemos que la renta es de \$1, pues como se puede apreciar (reproducimos la ecuación del ejemplo 1 después de factorizar la R)

$$2\,000\,000 = R\left[(1.1)^{-1} + (1.1)^{-2} + (1.1)^{-3} + (1.1)^{-4}\right]$$

lo que está dentro del paréntesis angular es el valor presente de \$1 en un período, seguido del valor presente de \$1 en dos períodos y así sucesivamente hasta llegar al valor presente de \$1 en 4 períodos.

En forma general se tendrá:



Para plantear la ecuación de valor con fecha focal en n trasladamos cada uno de los pagos de \$1 a valor final usando la ecuación del interés compuesto $S = P\,(1+i)^n$ a cada pago, pero en cada caso, $P = 1$. El pago que está en 1 se traslada por $n-1$ períodos, el que está en 2 se traslada por $n-2$ períodos y así sucesivamente hasta llegar al pago que está en n el cual no se traslada por estar en la fecha focal entonces:

$$S_{\overline{n|}\,i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} \qquad [1]$$

si la ecuación [1] la multiplicamos por $(1+i)$ obtenemos la ecuación [2] entonces:

$$S_{\overline{n|}\,i}\,(1+i) = (1+i)+(1+i)^2+ \ldots +(1+i)^n \qquad [2]$$

Substrayendo la ecuación [1] de la ecuación [2], tenemos la ecuación [3]:

$$S_{\overline{n|}\,i}\,(1+i) = (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^n \qquad [2]$$
$$S_{\overline{n|}\,i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1} \qquad [1]$$

$$S_{\overline{n|}\,i}\,(1+i) - S_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^n - 1 \qquad [3]$$

factorizando $S_{\overline{n}|i}$ se tiene la ecuación [4]

$$S_{\overline{n}|i}\,(i) = (1+i)^n - 1 \qquad [4]$$

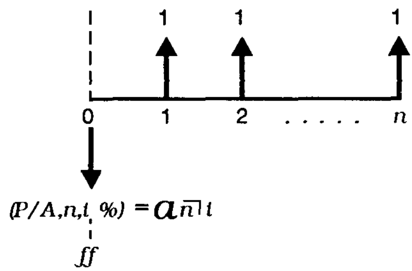
finalmente despejando $S_{\overline{n}|i}$ se tiene la ecuación [5]

$$\boxed{(F/A,n,i\%) = S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

VALOR PRESENTE

El caso del valor presente lo representaremos por $a_{\overline{n}|i}$ en la notación actuarial y por $(P/A,n,i\%)$ en la notación tradicional y significará el valor presente de una anualidad de n pagos puestos en valor presente a la tasa i %.

La fórmula se obtiene al plantear la ecuación de valor con fecha focal al principio y trasladando todos los pagos a valor presente a la tasa i (nuevamente, no se pierde generalidad si se supone que todos los pagos son de \$1)



$$(P/A,n,i\%) = a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n}$$

Para simplificar esta ecuación, podría seguirse un procedimiento similar al, realizado para el valor final; sinembargo el camino más corto consiste en actualizar el valor final

$$a_{\overline{n}|i} = S_{\overline{n}|i}(1+i)^{-n}$$

si reemplazamos $S_{\overline{n}|i}$ por su equivalente $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, se tiene:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

de donde se concluye que:

$$\boxed{(P/A,n,i\%) = a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Las fórmulas anteriores fueron deducidas para una renta de $1 pero si la renta hubiese sido de $\$R$, el valor final VF o el valor presente VP hubiese sido R veces mayor. Por tanto podemos escribir:

$$\boxed{VF = R\, s_{\overline{n}|i}} \quad \text{y también} \quad \boxed{VP = R\, a_{\overline{n}|i}}$$

Ejemplo 2

Un documento estipula pagos trimestrales de $80 000, durante 6 años. Si este documento se cancela con un solo pago de:

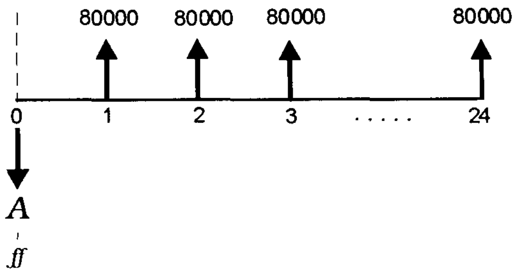
a) $\$A$ al principio o,
b) $\$S$ al final, con una tasa del 32% CT.

Solución:

El número de pagos es $n = 4x6 = 24$, $R = \$80\ 000$,

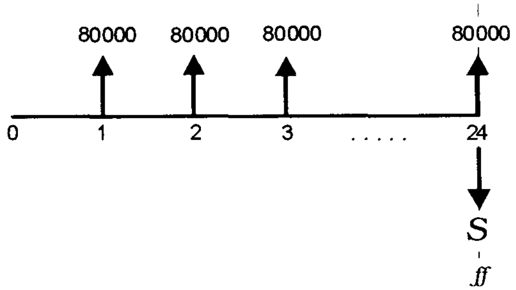
$$i = \frac{32}{4} = 8\% \text{ efectivo trimestral}$$

a)



$$A = 80\ 000\ \frac{1-(1+0.08)^{-24}}{0.08} = \$842\ 301$$

b)

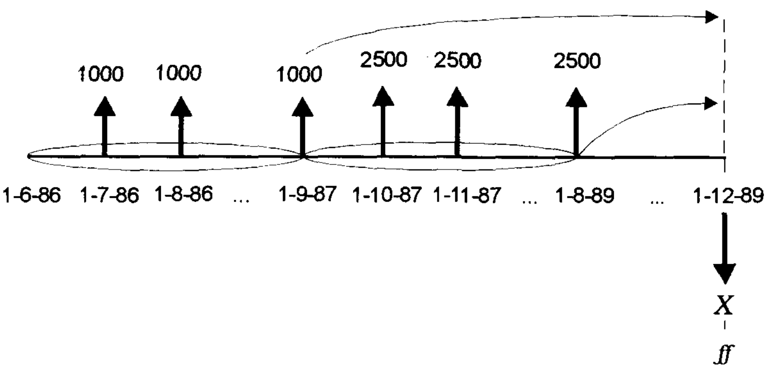


$$S = 80\ 000 \frac{(1+0.08)^{24} - 1}{0.08} = \$5\ 341\ 181$$

Ejemplo 3

Una persona empieza el día primero de julio de 1986 a hacer depósitos de $1 000 mensualmente el día primero de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que le paga el 24% CM; pero, a partir del primero de octubre de 1987, decidió que de ahí en adelante, sus depósitos serían de $2 500. El último depósito lo hizo el primero de agosto de 1989. Si el primero de diciembre de 1989 decide cancelar la cuenta. ¿Cuál será el monto de sus ahorros?.

Solución:



Observemos que hay 2 anualidades: la de renta de $1 000 y la de renta de $2 500. La primera anualidad empieza el 1-6-86 (primero de junio de 1986) y termina el 1-9-87 (primero de septiembre de 1987) y la segunda anualidad empieza el 1-9-87 y termina el 1-8-89. De ésta forma la primera anualidad tendrá 15 períodos y su valor final deberá ser trasladado por 27 períodos para llevarlo a la fecha focal (desde el 1-9-87 hasta el 1-12-89). La segunda anualidad tendrá 23 períodos y su valor final lo debemos trasladar por 4 períodos y así la ecuación de valor será:

$$1\ 000\ S_{\overline{15}|}2\%(1.02)^{27} + 2\ 500\ S_{\overline{23}|}2\%(1.02)^{4} = X$$

de donde se obtiene que: $X = \$107\ 574.69$

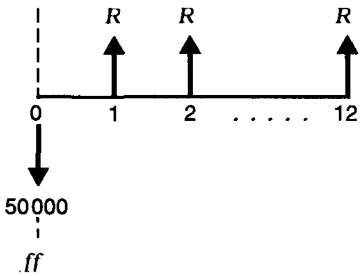
Comentario: Al cambiar de posición la fecha focal por ejemplo: si en lugar de ponerla al final la hubiéramos puesto al principio la respuesta no varía, aunque a primera vista la ecuación de valor es muy distinta, porque en vez de usar $S_{\overline{n}|i}$ hubiéramos podido utilizar $a_{\overline{n}|i}$, el uso de los factores anteriores depende de la posición de la fecha focal

Ejemplo 4

Una deuda de $50 000 se va a cancelar mediante 12 pagos uniformes de $R. Con una tasa del 2% efectivo para el período, hallar, el valor de la cuota R situando:

a) la fecha focal el día de hoy y
b) poniendo la fecha focal en 12 meses.

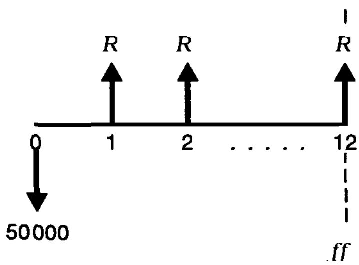
Solución:



En este caso se usa $a_{\overline{n}|i}$ porque todo el flujo de caja debe ser puesto al principio que es donde está la fecha focal y la ecuación de valor quedará así:

$$50\,000 = R\, a_{\overline{12}|2\%} \text{ de donde } R = \$4\,727.98$$

b)



En este caso puede usarse $s_{\overline{n}|i}$ porque todo el flujo de caja debe ser puesto en el punto 12 que es donde está la fecha focal, pero la deuda de los $50 000 sigue en 0 lo cual implica que deberá ser trasladada a valor final junto con todos los pagos, entonces la ecuación quedará así:

$$50\,000(1.02)^{12} = R\, s_{\overline{12}|2\%} \text{ y vuelve a dar } R = \$4\,727.98$$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Como ya dijimos, una anualidad anticipada es aquella en que los pagos se hacen al principio del período. El valor presente y el valor final se representarán respectivamente por:

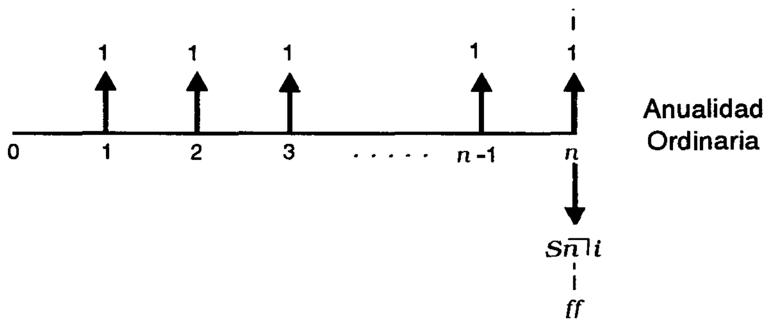
$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} \quad \text{y} \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i} \quad \text{o por} \quad (P/\ddot{A},n,i\,\%) \quad \text{y} \quad (F/\ddot{A},n,i\,\%)$$

Los dos puntos o diéresis indican que es anticipado.

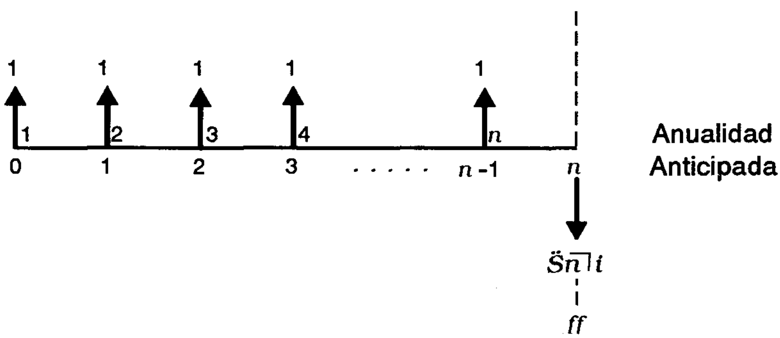
Existen relaciones entre las anualidades ordinarias y las anualidades anticipadas, las cuales podrán ser deducidas del análisis de las siguientes gráficas:

a) Para facilitar el planteamiento de la ecuación de valor comenzamos con el pago que está en n, siguiendo con el que está en $n-1$ y así sucesivamente hasta llegar al pago situado en 1, entonces para valor final con anualidad ordinaria la ecuación de valor quedará así:

$$S_{\overline{n|}i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n$$



Para la anualidad anticipada en valor final, la gráfica del flujo de caja quedará así:



Observe que en este caso hemos usado una doble numeración la que está encima de la línea de tiempo indica el número del pago, mientras que la que se encuentra debajo de la línea de tiempo señala los períodos y así en el período 0 que es el comienzo del primer período se está haciendo el pago número 1, en el período 1 que es el final del primer período pero a su vez es el comienzo del segundo período y por eso se realiza el segundo pago y así sucesivamente hasta que lleguemos al punto $n-1$ debajo de la línea de tiempo que representa el final del período $n-1$ pero también es el comienzo del período n y por tanto ahí debe estar el pago n y su ecuación de valor será:

$$\ddot{S}_{\overline{n|}i} = (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n$$

La diferencia entre las dos anualidades estriba en que la serie de la anualidad ordinaria empieza con 1 y termina con $(1+i)^{n-1}$, en cambio, la serie de la anualidad anticipada comienza con $(1+i)$ y termina con $(1+i)^n$. Si a la serie anticipada se le agrega un *1* y se le resta al final y, si además, le introducimos el paréntesis angular, el resultado no se altera.

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}i = \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1}\right] + (1+i)^n - 1$$

Obsérvese que la parte que está dentro del paréntesis es igual a la serie ordinaria, por tanto, podemos decir que:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}i = S_{\overline{n}|}i + (1+i)^n - 1$$

si reemplazamos $S_{\overline{n}|}i$ por su equivalente $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ se tendrá:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} + (1+i)^n - 1$$

reduciendo a un común denominador el miembro de la derecha se tendrá:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}i = \frac{(1+i)^n - 1}{i} + i\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

si factorizamos $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ se tendrá:

$$\ddot{S}_{\overline{n}|}i = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) \text{ pero como } \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S_{\overline{n}|}i$$

entonces se tiene que:

$$\boxed{\ddot{S}_{\overline{n}|}i = S_{\overline{n}|}i\,(1+i)}$$

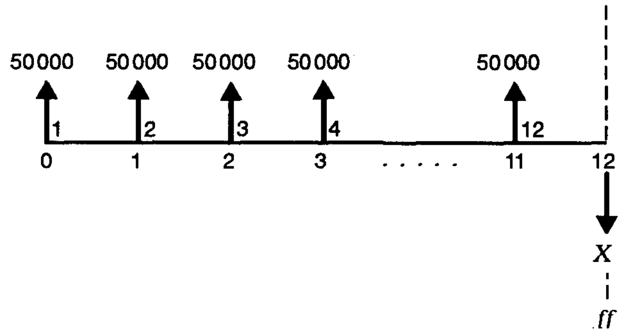
que es equivalente a:

$$(F/\ddot{A},n\ i\%) = (F/A,n,i\%)(1+i)$$

Ejemplo 5

Una persona arrienda una casa en \$50 000 pagaderos por mes anticipado, Si tan pronto como recibe cada arriendo, lo invierte en un fondo que le paga el 2% efectivo mensual. ¿Cuál será el monto de sus ahorros al final de un año?

Solución :

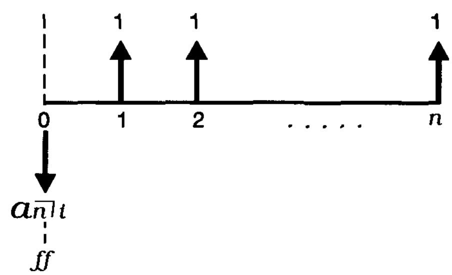


Obsérvese que de todos modos hay 12 períodos y 12 pagos. El valor final de ésta anualidad está en el punto 12 (porque si comienza con pago debe terminar con período) y la ecuación será:

$$X = 50\,000\, \ddot{S}_{\overline{12}|}2\% = 50\,000\, S_{\overline{12}|}2\%(1.02) = \$684\,016.58$$

Anualidad Ordinaria en Valor Presente

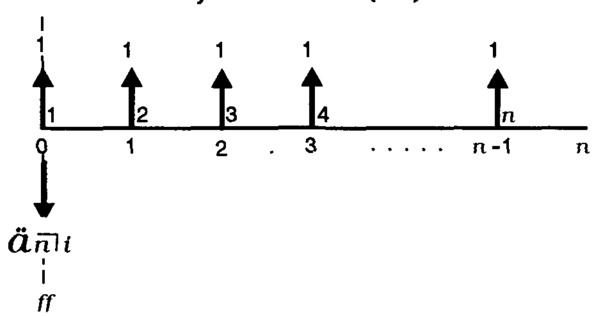
La ecuación de valor la comenzamos a plantear con el pago que ésta en *1* y terminando con el pago que esté en *n*.



$$(P/A,n,i\%) = a_{\overline{n}|}i = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Anualidad Anticipada en Valor Presente

La diferencia entre las dos series estriba en que la ordinaria empieza con 1 y termina con $(1+i)^{-n}$ y la anticipada comienza con 1 y termina con $(1+i)^{-(n-1)}$



y la correspondiente ecuación de valor quedará así:

$$(P/\ddot{A},n,i\%) = \ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-(n-1)}$$

Si a la serie de la anualidad anticipada le agregamos $(1+i)^{-n}$ y le restamos esa misma cantidad y además le introducimos un paréntesis angular, el resultado no se altera entonces:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}\right] - (1+i)^{-n}$$

ahora podemos observar que la serie que está dentro del paréntesis angular corresponde a la serie ordinaria, por tanto podemos decir que:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + a_{\overline{n|}i} - (1+i)^{-n} = a_{\overline{n|}i} + 1 - (1+i)^{-n}$$

si los dos últimos términos de la ecuación anterior se encierran en un paréntesis angular y se multiplican y dividiendo por i, no se altera la igualdad, por tanto se tiene:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} + \frac{i\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} = a_{\overline{n|}i} + i a_{\overline{n|}i}$$

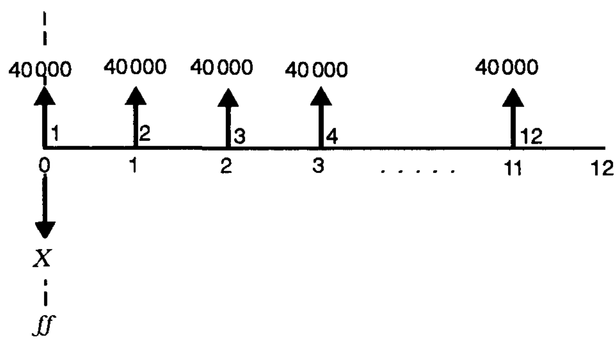
factorizando $a_{\overline{n|}i}$ se tiene la fórmula final

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i}(1+i)}$$

Ejemplo 6

El contrato de arriendo de una casa estipula pagos mensuales de $40 000, al principio de cada mes, durante un año. Si suponemos un interés del 30% CM. ¿Cuál será el valor del pago único que, hecho al principio del contrato, lo cancelaría en su totalidad?

Solución:

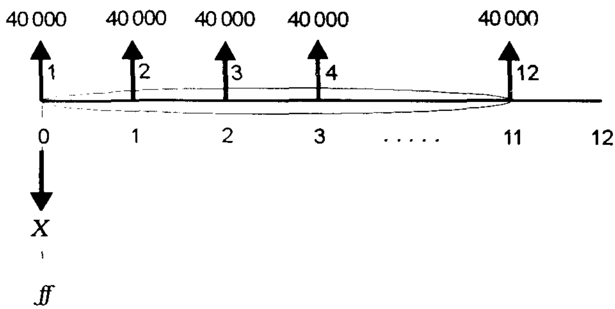


$$X = 40\,000\,\ddot{a}_{\overline{12|}2.5\%} = 40\,000\,a_{\overline{12|}2.5\%}(1+0.025)$$

$$X = \$420\,568.35$$

OTRO ENFOQUE DE LAS ANUALIDADES ANTICIPADAS

Podemos calcular el valor presente de la anualidad anticipada como si fuera una anualidad ordinaria, de la siguiente manera, si retiramos el pago que está en 0 y también retiramos el período que se inicia en 11 y termina en 12, nos queda una serie ordinaria de 11 pagos con 11 períodos, luego forma una anualidad ordinaria porque empieza en período y termina con pago, el pago que está en cero se puede considerar como un pago adicional que no pertenece a la anualidad, tal como se aprecia en la gráfica anterior. El planteamiento de la ecuación de valor quedará así:

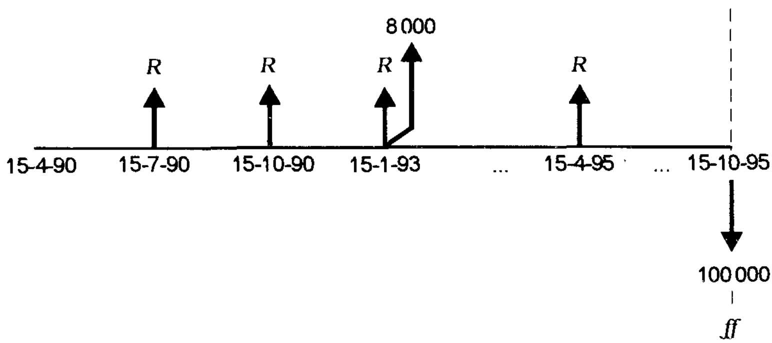


$$X = 40\,000 + 40\,000\, a_{\overline{11}|}2.5\% = \$420\,568.35$$

Ejemplo 7

Una persona necesita tener reunidos \$100 000 para el día 15-10-95, para tal fin constituye un fondo mediante depósitos trimestrales de $\$R$ efectuándose el primero el día 15-7-90 y el último el 15-4-95 además se efectuará un depósito extraordinario de \$8 000 el 15-1-93.si el fondo paga el 24% CT. ¿Cuál es el valor de $\$R$?

Solución:



Como los períodos son trimestres, la anualidad debe comenzar el 15-4-90 y terminaría el 15-4-95 así se empezaría con período y se terminaría con pago, luego, la anualidad tiene 20 períodos que se calculan así:

punto final	15-4-95
punto inicial	15-4-90
diferencia	0-0-05

de los 5 años se obtienen 20 períodos, por lo tanto hay 20 pagos.

Por otra parte es necesario trasladar la anualidad desde el 15-4-95 hasta el 15-10-95.

punto final	15-10-95
punto inicial	15-04-95
	0-06-00

o sea que hay 6 meses que corresponde a 2 períodos

El depósito extraordinario también debe ser llevado a la fecha focal así y la ecuación de valor será:

$$R\, S_{\overline{20|}6\%}(1.06)^2 + 8\,000(1.06)^{11} = 100\,000$$

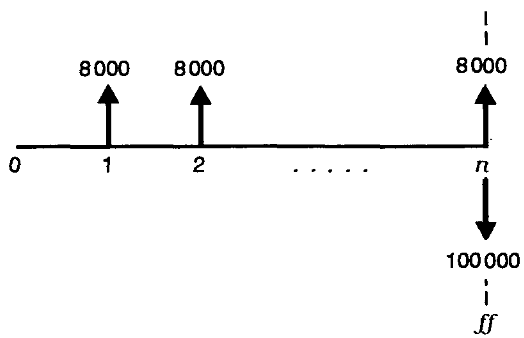
de donde se obtiene que $R = \$2\,051.99$

Ejemplo 8

Se desea reunir $100 000 mediante depósitos trimestrales de $8 000 c/u, tanto tiempo como fuere necesario, en un fondo que paga el 24% CT.

a) ¿Cuántos depósitos completos de $8 000 deberán hacerse?
b) ¿Con qué depósito final, hecho simultáneamente con el último depósito de $8 000, completará el fondo?
c) ¿Con qué depósito final hecho 3 meses después del último depósito de $8 000, completará el fondo?

Solución:



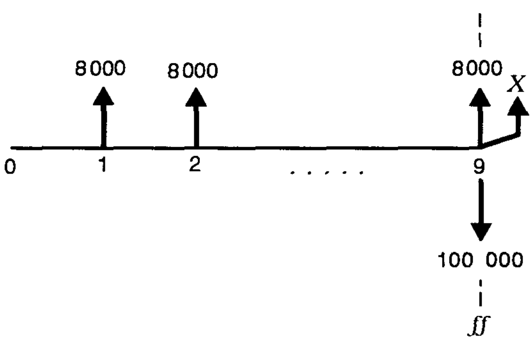
Con n depósitos de \$8 000 se deben completar los \$100 000, entonces, la ecuación de valor será:

$$8\,000 \frac{(1+0.06)^n - 1}{0.06} = 100\,000$$

despejando n se tiene:

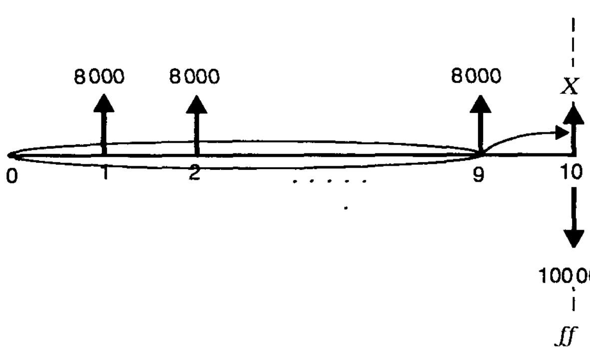
$$(1.06)^n - 1 = 0.75$$
$$1.06^n = 1.75$$
$$n\,(\log 1.06) = \log 1.75$$
$$n = \frac{\log 1.75}{\log 1.06} = 9.604$$

Esto significa que hay exactamente 9 pagos de \$8 000, pero, no alcanza a completar los \$100 000 y si llegase a hacer 10 pagos se pasaría de los \$100 000. La parte b) se refiere al pago adicional que debe hacerse conjuntamente con el pago noveno de \$8 000.



$$100\,000 = 8\,000\, S_{\overline{9}|}6\% + X \quad \text{de donde} \quad X = \$8\,069.47$$

c) Si el pago adicional se hace 3 meses después del último pago de \$8 000, es decir, en el período 10 entonces posponemos un período la fecha en que se deben ser reunidos los \$100 000 y la ecuación de valor será:



Obsérvese que la anualidad empieza en 0 y termina en 9 y habrá que trasladarla un período para llevarlo a la fecha focal

$$8\,000\,\frac{(1+0.06)^9-1}{0.06}(1.06)^1+X=100\,000$$

de donde $X = \$2\,553.64$

AMORTIZACION

La amortización consiste en pagar una deuda, mediante una serie de pagos; el comportamiento de la deuda y los intereses se pueden mostrar en una tabla denominada tabla de amortización.

Una tabla de amortización debe tener como mínimo, cinco columnas: la primera muestra el número del período, la segunda nos muestra el saldo de la deuda, es decir, el capital insoluto a medida que van pasando los períodos, la tercera nos muestra los intereses que se van causando período a período, la cuarta columna nos muestra la cuota o cantidad que se paga en cada período y la quinta columna nos muestra la porción de la cuota que se usa para disminuir la deuda, es decir, la cantidad que se amortiza, también se le denomina abono a capital.

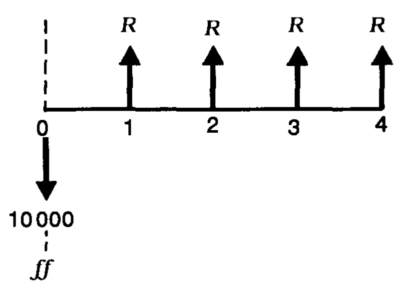
Haciendo uso del ejemplo 9 explicaremos la forma de construir una tabla de amortización.

Ejemplo 9

Elaborar una tabla para amortizar la suma de $10 000 en 4 pagos iguales, suponiendo un interés del 10% efectivo para el período.

Solución:

Primero elaboramos una gráfica del flujo de caja y calculamos el valor de la cuota.



$10\,000 = R\, a_{\overline{4}|}10\%$ de donde se obtiene $R = \$3\,154.70$

PER.	CAPITAL INSOLUTO	INTERESES	PAGO	AMORTIZACION
0	10 000.00	–	–	–
1	7 845.30	1 000.00	3 154.70	2 154.70
2	5 475.13	784.53	3 154.70	2 370.17
3	2 867.94	547.51	3 154.70	2 607.19
4	0.03	286.79	3 154.70	2 867.91

Según la gráfica en el período cero todo lo que hay es la deuda por valor inicial de \$10 000, por esta razón en la tabla figura 10 000 como capital insoluto del período cero. Al llegar al punto 1 de la gráfica, el deudor disfrutó de un préstamo de \$10 000 por un período por lo cual deberá pagar unos intereses que equivalen a 10 000 x 0.1 = \$1 000 los cuales figuran en la tabla en la columna titulada intereses, como en el punto 1 el deudor hace un pago de \$3 154.70 y los intereses en este momento son de \$1 000 entonces le queda para amortizar la suma de 3 154.70 – 1 000 = \$2 154.70 que aparecen en la columna titulada amortización. Ahora el nuevo capital insoluto será el capital insoluto anterior menos la amortización, que corresponde a: 10 000 – 2 154.70 = \$7 845.30. El resto de la tabla sigue con el mismo procedimiento hasta llegar al último período que en este caso es el 4 y allí el capital insoluto debe ser \$0, sinembargo hay ocasiones en que esta cantidad difiere ligeramente de cero pero, esto se debe a errores de aproximación en la liquidación de intereses o en la aproximación en el cálculo de la cuota, lo cual no tiene mucha importancia.

La tabla anterior fue muy fácil elaborarla en forma manual, porque solo tenía 4 períodos, pero si en lugar de 4 hubiesen sido 120 períodos que corresponde a una amortización mediante pagos mensuales durante 10 años, la solución manual viene a ser muy dispendiosa razón por la cual deben usarse los ordenadores, la tabla anterior puede ser fácilmente elaborada haciendo uso del programa **AMORT1** el cual viene grabado en el *diskette* que se suministra con el presente texto (el manejo de este programa se explica en el capítulo correspondiente a *Aplicaciones de los Sistemas*).

CAPITALIZACION

La palabra capitalización tiene otros significados afines, en este libro por capitalización entenderemos el reunir un capital mediante depósitos periódicos.

Una tabla de capitalización nos muestra, período a período, la forma como se va reuniendo un capital, su conformación es similar a la de amortización y básicamente debe tener 5 columnas que en su orden las denominaremos: período, capital reunido o monto, intereses, depósito o cuota y la última columna que se denomina capitalización o incremento por período.

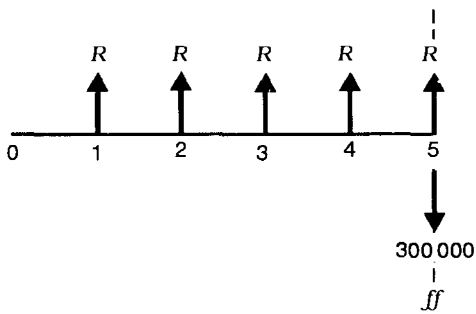
La explicación de la forma de elaborar una tabla de capitalización la daremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

Elaborar una tabla para capitalizar la suma de $300 000 en 15 meses, haciendo depósitos trimestrales iguales en un fondo que paga el 32% CT.

Solución:

Primero elaboraremos la gráfica, colocando el capital que se desea reunir al final. En toda capitalización para que la ecuación de valor resulte lo mas sencilla posible, es aconsejable colocar la fecha focal al final.



Ahora procederemos a plantear la ecuación de valor y calcular la cuota.

$$300\ 000 = R\,S_{\overline{5}|}8\% \quad \text{de donde se obtiene que} \quad R = \$51\ 136.94$$

En este caso no tiene objeto que empecemos la tabla con el período cero, porque según la gráfica, no hay ninguna cantidad en cero y tampoco hay intereses, así que comenzaremos la tabla en el período 1

PER.	ACUMULADO	INTERESES	DEPOSITO	INCREMENTO
1	51 136.94	0.00	51 136.94	51 136.94
2	106 364.84	4 090.96	51 136.94	55 227.90
3	166 010.97	8 509.19	51 136.94	59 646.13
4	230 428.79	13 280.88	51 136.94	64 417.82
5	300 000.00	18 434.27	51 136.94	69 571.21

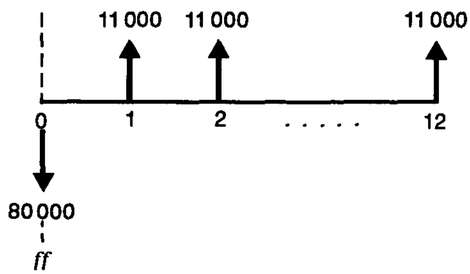
El análisis de las cantidades correspondientes a los períodos 1 y 2 es el siguiente: al final del primer período se hace un depósito de $51 136.94. Intereses no hay puesto que estos se calculan sobre el capital acumulado al final del período inmediatamente anterior y en ese momento es cero. El incremento es la variación total que sufre el fondo, por concepto de intereses mas depósito y como dijimos que en el primer período no había intereses entonces el incremento será igual al depósito o sea $51 136.94. Para el segundo período calculamos los intereses aplicando la tasa al capital acumulado en el período anterior, esto es: 0.08 x 51 136.94 = $4 090.96, el incremento es igual a intereses mas depósito, esto es: 4 090.96 + 51 136.94 = $55 227.90. El acumulado es igual al acumulado anterior mas el incremento esto es: 51 136.94 + 55 227.90 = $106 364.84. El resto de la tabla continúa en forma similar.

El problema anterior se resolvió manualmente porque el número de períodos no era muy grande, en caso contrario habría habido necesidad de usar el programa **CAP1** el cual viene grabado en el *diskette* que se suministra con el presente texto.

Ejemplo 11

Calcular la tasa a la cual una deuda de $80 000 se cancela mediante el pago de doce cuotas iguales de $11 000.

Solución:



La ecuación de valor será:

$$80\,000 = 11\,000\, a_{\overline{12}|i}$$

La solución al problema consiste en hallar la tasa i a la cual la igualdad es cierta, para ello, podemos resolver el problema manualmente usando la interpolación, vista en el capítulo anterior, para lo cual igualamos la ecuación a cero y hallamos dos valores de i tal que la función sea una vez positiva y otra vez negativa así:

$$80\,000 - 11\,000\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 0$$

buscando el valor correspondiente al 8% y al 9% se tiene:

$$\left[\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{l} 8\% \\ X \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} -2\,869.86 \\ 0 \end{array}\right] \\ 9\% & +1\,232.02 \end{array}\right]$$

planteando las proporciones se tiene:

$$\frac{8-9}{8-X} = \frac{-2\,869.86 - 1\,232.02}{-2\,869.86 - 0}$$

de donde se obtiene que $X = 8.7\%$ efectivo mensual

También se puede hacer uso del programa **TIR1** el cual viene grabado en el *diskette* que se suministra con el presente texto y en tal caso la respuesta es 8.693% efectivo mensual. La diferencia está en que al hacerlo manualmente hemos tenido que interpolar con lo cual obtenemos una aproximación a la respuesta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Hallar el monto y el valor presente de 20 pagos de $2 000 c/u, suponga una tasa del 18%.

   Respuesta: $293 255.94; $10 705.49

2) Para la compra de un automóvil que vale $6 000 000; se exige una cuota inicial del 40% y el resto se cancela en 36 cuotas mensuales, ¿a cuánto ascenderá la cuota, si los intereses son del 3.5% efectivo mensual?

   Respuesta: $177 422.99

3) Si en el problema anterior se ofrecen 2 cuotas extraordinarias: la primera de $350 000 en el mes 5, y la segunda de $500 000, en el mes 18, ¿cuál será el valor de la cuota ordinaria?

   Respuesta: $149 633.07

4) Una persona va a comprar una máquina que vale $800 000, con el objeto de poder disponer de esa cantidad el 15 de diciembre de 1989. Comienza a hacer depósitos mensuales de ***$R***, en un fondo que paga el 30% CM. Si el primer depósito lo hace el; 15 de febrero de 1988, hallar el valor del depósito mensual.

   Respuesta: $26 157.10

5) Un documento estipula pagos trimestrales de $10 000. iniciando el primer pago el 20 de enero de 1987 y terminando el 20 de julio de 1995. Si se desea cambiar este documento por otro que estipule pagos trimestrales de *$R*, comenzando el 20 de abril de 1988 y terminando el 20 de julio de 1989, hallar el valor de la cuota. Suponga una tasa del 20% CT.

   Sugerencia: El valor de los documentos debe ser igual en el punto que escoja como fecha focal

   Respuesta: $41 172.87

6) Una persona se compromete a pagar $60 000 mensuales, a partir del 8 de julio de 1988 hasta el 8 de diciembre de 1989. para dar cumplimiento a ese contrato, se propone hacer depósitos mensuales de *$R* c/u, en una cuenta de ahorros que como mínimo le garantiza el 1.5% efectivo mensual. si el primer depósito lo efectúa el 8 de marzo de 1986, ¿cuál será el valor de *$R*, suponiendo que el último depósito lo hará:

   a) el 8 de diciembre de 1989
   b) el 8 de julio de 1988
   c) el 8 de junio de 1988
   d) el 8 de abril de 1987

   Respuestas: a) $18 749; b) $26 514; c) $27 271; d) $49 411

7) Una deuda de $800 000 va a ser cancelado en pagos trimestrales de $78 000 durante tanto tiempo como fuere necesario. Suponiendo una tasa del 30% CT.

   a) ¿Cuántos pagos de $78 000 deben hacerse?
   b) ¿Con qué pago final hecho 3 meses después del último pago de $78 000 cancelará la deuda?

   Respuesta: a) 20; b) $22 054.42

8) Resuelva el problema anterior si la tasa es del 42% CT. Justifique su respuesta desde el punto de vista matemático y desde el punto de vista financiero.

   Respuesta: No hay solución.

9) Desean reunirse exactamente $60 000 mediante depósitos mensuales de $1 000, en un fondo que paga el 36% CM.

   a) ¿Cuántos depósitos de $1 000 deberán hacerse?
   b) ¿Qué depósito adicional hecho conjuntamente con el último depósito de $1 000 completará los $60 000?

c) ¿Qué depósito adicional hecho un mes después del último depósito de $1 000 completará los $60 000?

Respuestas: a) 34 pagos; b) $2 270; c) $538

10) Resolver el problema anterior, incluyendo un depósito adicional de $7 000, en el período 10.

Respuesta: a) 29 pagos; b) $2 507; c) $782

11) Para cancelar una deuda de $80 000, con intereses al 24% CM, se hacen pagos mensuales de $3 000 cada uno.
a) ¿Cuántos pagos de $3 000 deben hacerse?
b) ¿Con qué pago adicional, hecho conjuntamente con el último pago de $3 000 se cancelará la deuda?
c) ¿Qué pago adicional, hecho un mes después del último pago de $3 000, cancelará la deuda?

Respuestas: a) 38 pagos; b) $1 439; c) $1 468

12) Resolver el problema anterior suponiendo que se hace un pago adicional de $10 000, con la décima cuota.

Respuestas: a) 32 pagos; b) $2 622; c) $2 675

13) Una máquina cuesta al contado $600 000, para promover las ventas, se ofrece que puede ser vendida en 24 cuotas mensuales iguales, efectuándose la primera el día de la venta. Si se carga un interés del 3% efectivo mensual, calcular el valor de cada pago.

Respuestas: $34 396.55

14) Un fondo para empleados presta a un socio la suma de $2 millones para ser pagado en 3 años, mediante cuotas mensuales uniformes, con intereses sobre saldos al 24% CM. Si en el momento de pagar la sexta cuota, decide pagar en forma antícipada las cuotas 7,8 y 9:
a) ¿cuál debe ser el valor a cancelar al vencimiento de la sexta cuota?
b) ¿cuál debe ser el valor de los intereses descontados?

Respuestas: a) $304 751.66; b) $9 111

15) Una persona adopta un plan de ahorros del fondo ABC, que establece depósitos mensuales de $1 000, comenzando el primero de febrero de 1986 hasta el primero de abril de 1987 y, depósitos mensuales de $2 000, desde el primero de mayo de 1987 hasta el primero de diciembre de 1987. El capital así reunido permanecerá en

el fondo hasta el primero de junio de 1988, fecha en la cual le será entregado al suscriptor junto con intereses calculados al 12% CM.

El plan anterior estaba funcionando perfectamente según lo proyectado pero, por razones comerciales la junta directiva del fondo ABC decidió que, a partir del primero de octubre de 1986, el fondo pagará a todos sus clientes de ahorros el 18% CM. ¿Cuál será el capital que, el primero de junio de 1988, le entregarán a la persona que a decidido adoptar el plan?

Sugerencia:

$$1\,000\, S\overline{9}|1\%(1+0.015)^{20} + 1\,000\, S\overline{6}|1.5\%(1+0.015)^{14}$$

$$+ 2\,000\, S\overline{8}|1.5\%(1+0.015)^{6}$$

Respuesta: $38 733

16) Un contrato de arriendo por un año establece el pago de $20 000 mensuales al principio de cada mes. Si ofrecen cancelar todo el contrato a su inicio, ¿cuánto deberá pagar, suponiendo:

a) tasa del 30% CM;
b) tasa 3% efectivo mes anticipado.

Respuesta: a) $210 284; b) $204 105

17) Una máquina produce 2 000 unidades mensuales las cuales deben venderse a $80 c/u. El estado actual de la máquina es regular y si no se repara podría servir durante 6 meses mas y luego desecharla, pero si hoy le hacemos una reparación total a un costo de $800 000, se garantizaría que la máquina podría servir durante un año contado a partir de su reparación. Suponiendo una tasa del 4% efectivo mensual, ¿será aconsejable repararla?

Respuesta: no es aconsejable.

18) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $3 millones en pagos trimestrales durante 15 meses con una tasa del 46% CT

Respuesta parcial: Cuota: $821 945.32 Trimestral

19) Elaborar una tabla para capitalizar la suma de $2 millones mediante depósitos semestrales durante 3 años. Suponga una tasa del 42% CS

Respuesta parcial: Depósito: $196 405.92 Semestral

20) Una persona desea reunir $800 000 mediante depósitos mensuales de *$R* c/u

durante 5 años en una cuenta que paga el 30% CM. ¿Cuál es el total de intereses ganados hasta el mes 30?

Respuesta: $81 785.81

21) Para cancelar una deuda de $2 millones con intereses al 36% CM se hacen pagos mensuales de ***$R*** c/u, durante 15 años.

    a) Calcular el valor de la deuda después de haber hecho el pago número 110
    b) Calcular el total de los intereses pagados hasta el mes 110

    Sugerencia: para la parte a) calcule el valor presente en el mes 110 de los 70 pagos que falta por cancelar, para la parte b) halle la diferencia entre el total pagado y el total amortizado.

    Respuestas: a) $1 755 991.89; b) $6 388 423.79

22) Se necesita $1 millón, para realizar un proyecto de ampliación de una bodega, una compañía A ofrece prestar el dinero, pero exige que le sea pagado en 60 cuotas mensuales vencidas de $36 132.96 c/u. La compañía B ofrece prestar el dinero, pero para que le sea pagado en 60 pagos mensuales de $19 000 c/u y dos cuotas adicionales así: la primera de $250 000, pagadera al final del mes 12, la segunda, de $350 000, pagadera al final del mes 24. Hallar la tasa efectiva mensual que cobra cada uno, para decidir que préstamo debe utilizar.

    Respuesta: A 3% efectivo mensual; B 2.35%efectivo mensual Utilice B

23) Un equipo de sonido cuesta $400 000 al contado, pero puede ser cancelado en 24 cuotas mensuales de $33 000 c/u efectuándose la primera el día de la venta. ¿Qué tasa efectiva mensual se está cobrando?

    Respuesta: 7.159% efectivo mensual.

24) ¿A qué tasa nominal, convertible mensualmente, está siendo amortizada una deuda de $300 000, mediante pagos mensuales de $10 000, durante 4 años?

    Respuesta: 25.32% CM.

25) ¿A qué tasa nominal, convertible trimestralmente, está reuniéndose un capital de $400 000, mediante depósitos trimestrales de $20 000 c/u durante 3 años?

    Respuesta: 35.53% CT

26) Una entidad financiera me propone que le deposite mensualmente $10 000 durante 3 años comenzando el primer depósito el día de hoy y me promete devolver al final

de este tiempo la suma de $7 000 000. ¿Que tasa efectiva mensual me va a pagar?

Respuesta: 13% efectivo mensual.

27) Un señor compró un automóvil, dando una cuota inicial del 20% y el saldo lo cancela con cuotas mensuales de $317 689.78 durante 3 años. Después de efectuar el pago de la cuota 24 ofrece cancelar el saldo de la deuda de un solo contado y le dicen que su saldo en ese momento asciende a la suma de $3 060 928.56.

a) Calcular con 2 decimales exactos la tasa efectiva mensual que le están cobrando.
b) Calcular la tasa efectiva anual equivalente que le cobran.
c) ¿Cuál es el costo total del automóvil?

Respuestas: a) 3.55% efectivo mensual; b) 52% efectivo anual; c) $8 millones

Anualidades diferidas, perpetuas y generales

CAPITULO **5**

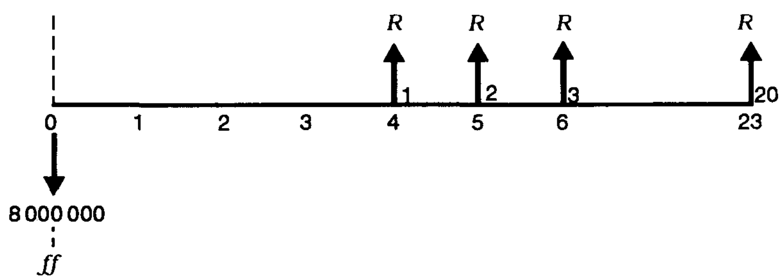
ANUALIDADES DIFERIDAS

Las anualidades vistas en el capítulo anterior eran inmediatas porque con el primer pago se encontraba el primer período, pero puede ser que el primer pago se encuentre después de haber pasado cierta cantidad de períodos, en este caso se denomina anualidad diferida, tal como se puede apreciar en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1

Un industrial vende toda su producción y si pudiera producir mas vendería mas, por tal motivo le ha solicitado al banco de donde él es cliente que le presten $8 millones para ser cancelado en 20 pagos trimestrales de ***$R*** c/u, pero también solicita que le permitan efectuar el primer pago exactamente al año de que se le conceda el préstamo, ésta solicitud la hace debido a que con el dinero del préstamo va a comprar en el exterior la maquinaria necesaria para hacer las ampliaciones en su fábrica lo cual requiere del tiempo necesario para la importación, nacionalización, transporte, período de montaje y pruebas hasta dejarla a punto para la producción. Calcular ***$R*** con una tasa del 36% CT.

Solución:



Obsérvese que el primer pago está en el período 4, que corresponde al final del año 1. La anualidad debe comenzar en el punto 3 y terminar en el punto 23, además su valor presente deberá trasladarse al punto 0 donde hemos puesto la fecha focal. (la doble numeración no siempre es necesaria, aquí la hemos puesto para dar mayor claridad al ejemplo) La ecuación de valor será:

$$8\,000\,000 = R\,\frac{1-(1.09)^{-20}}{0.09}\,(1.09)^{-3}$$

de donde $$R = \$1\,134\,926.90$$

ANUALIDADES PERPETUAS

Una anualidad que tiene infinito número de pagos, se denomina anualidad infinita o perpetua, en realidad, las anualidades infinitas no existen, porque en este mundo todo tiene fin, pero, supondremos que una anualidad es infinita cuando el número de pagos es muy grande o cuando no se sabe cuántos pagos son, pero se sospecha que son muchos.

Este tipo de anualidad se presenta, cuando se coloca un capital y únicamente se retiran los intereses.

Al deducir la fórmula de una anualidad infinita debe tenerse en cuenta que solo existe el valor presente, porque el valor final de una anualidad infinita sería infinito

$$VP = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-0}{i} = \frac{R}{i}$$

$$\boxed{VP = \frac{R}{i}}$$

Ejemplo 2

Hallar el valor presente de una renta perpetua de $10 000 mensuales, suponiendo un interés del 33% CM.

Solución.

$$VP = \frac{R}{i} = \frac{10\,000}{0.0275} = \$363\,636.36$$

ANUALIDADES GENERALES

Las anualidades vistas hasta el momento son aquellas en que el período de interés coincide con el período de pago. Todas ellas se denominan *Anualidades Simples*. Por ejemplo: una serie de pagos mensuales con una tasa efectiva mensual es una anualidad simple, también lo sería una serie de pagos trimestrales con una tasa efectiva trimestral, pero el caso de una anualidad general es cuando el período de pago no coincide con el período de interés, por ejemplo: si tenemos una serie de pagos mensuales con una tasa efectiva anual o una serie de pagos trimestrales con una tasa efectiva semestral.

Una anualidad general puede ser reducida a una anualidad simple, si hacemos que los períodos de tiempo y los períodos de interés coincidan, hay dos formas como podemos realizarlo:

La primera forma consiste en calcular pagos equivalentes que deben hacerse en concordancia con los períodos de interés. Dicho en otras palabras, consiste en encontrar el valor de los pagos que, hechos al final de cada período de interés, sean equivalentes al pago único que se hace al final de un período de pago.

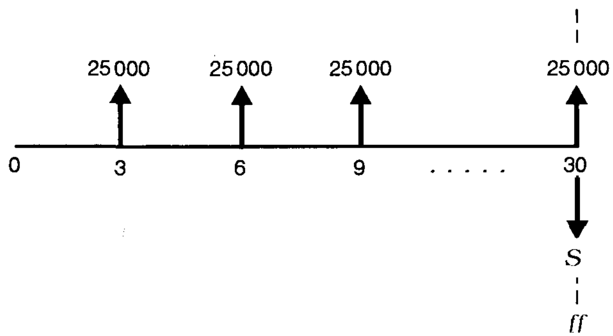
La segunda forma consiste en modificar la tasa, haciendo uso del concepto de tasas equivalentes, para hacer que coincidan los períodos de interés y de pago.

Ejemplo 3

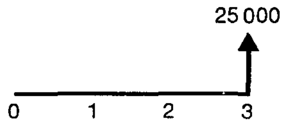
Hallar el monto S de 30 pagos trimestrales de $25 000 c/u suponiendo una tasa del 24% CM. Use modificar los pagos.

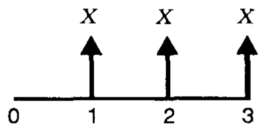
Solución:

La situación planteada en el problema es la siguiente:



Para poder aplicar el simbolo $S_{\overline{n}|i}$ tiene que haber coincidencia entre el período de pago y el período de interés y para llegar a ésta coincidencia cambiaremos los pagos de trimestrales a mensuales, entonces un pago de \$25 000 deberá ser reemplazado por tres pagos mensuales de $\$X$ que se calcularían así:



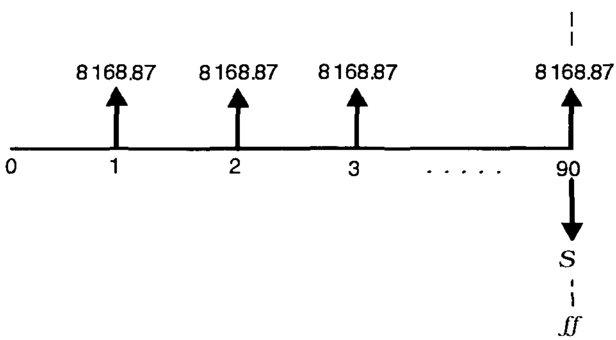


como el valor final de cada una de las gráficas debe ser igual, entonces:

$$25\,000 \frac{(1+0.02)^3 - 1}{0.02} = X$$

de donde se obtiene que: $X = \$8\,168.87$

Esto significa que cada pago de \$25 000 podrá ser reemplazado por tres pagos mensuales de \$8 168.87 de manera resultarán 90 pagos y la línea de tiempo que hemos dibujado inicialmente podrá ser reemplazada por:



$$S = 8\,168.87 \frac{(1.02)^{90} - 1}{0.02} = \$2\,018\,990$$

Ejemplo 4

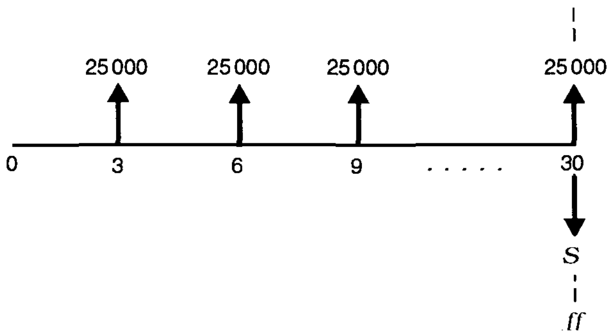
Resuelva el ejemplo anterior modificando la tasa.

Solución.

Buscamos una tasa efectiva trimestral equivalente al 24% CM.

$$(1 + 0.02)^{12} = (1 + i)^4$$

entonces $i = 6.1208\%$ efectivo trimestral

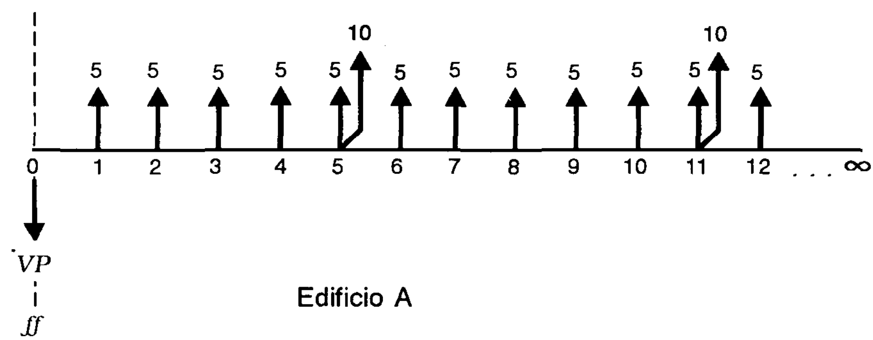


$$S = 25\,000 \frac{(1.061298)^{30} - 1}{0.061208} = \$2\,018\,990$$

Ejemplo 5

Una entidad estatal puede usar el edificio A que requiere \$5 millones cada año como costo de mantenimiento y \$6 millones cada 5 años para reparaciones o, puede usar el edificio B que requiere \$5.1 millones cada año como costo de funcionamiento y \$1 millón cada 2 años para reparaciones. Suponiendo una tasa del 30% efectivo anual y que el edificio que se ocupe será por tiempo indefinido, ¿cuál de los dos edificios le resulta mas conveniente utilizar?

Solución.



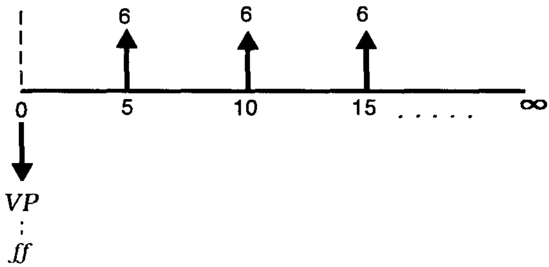
Edificio A

Para saber cuánto cuesta, en pesos de hoy, utilizar el edificio A, debemos calcular el valor presente de las dos anualidades, la primera será la anualidad infinita simple de \$5 millones al año, la segunda una anualidad infinita del tipo general de \$6 millones cada 5 años.

El valor presente de la primera anualidad es:

$$\frac{5\,000\,000}{0.3} = \$16\,666\,666.67$$

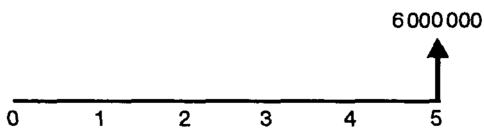
La segunda anualidad se puede representar así:



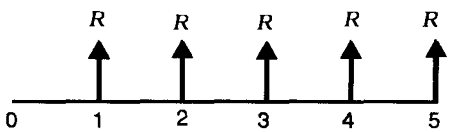
Hay dos formas para hallar su valor presente:

a) Reemplazamos pagos de \$6 millones cada 5 años por pagos de **\$*R*** cada año así:

un ciclo de 5 añois será:



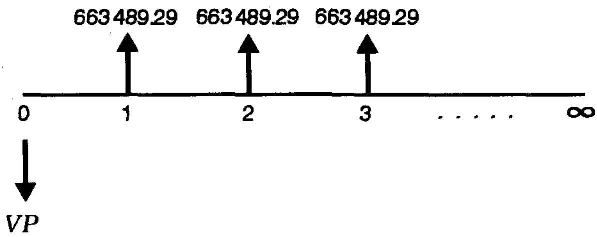
reemplazado por:



$$R\,\frac{(1+0.3)^5-1}{0.3} = 6\,000\,000$$

despejando $\quad R = \$663\,489.29$

y la gráfica de \$6 millones cada 5 años se puede cambiar a



cuyo valor presente será:

$$\frac{R}{i} = \frac{663\,489.29}{0.3} = \$2\,211\,630.97$$

Por tanto, el costo total en pesos de hoy por utilizar el edificio A será:

$$16\,666\,666.67 + 2\,211\,630.97 = \$18\,878\,297.64$$

b) Hallamos una tasa efectiva quinquenal equivalente al 30% efectivo anual así:

$$(1 + 0.3)^5 = (1 + i)^1$$

despejando $i = 271.239\%$ efectivo cada 5 años

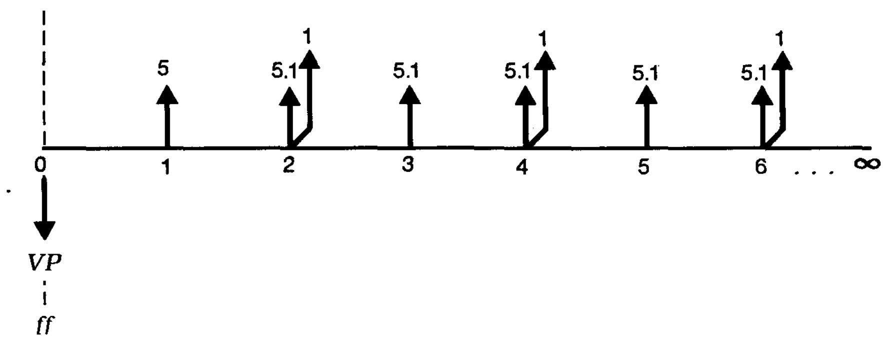
El valor presente de la anualidad será:

$$\frac{6\,000\,000}{2.271293} = \$2\,211\,630.97$$

y el costo total por usar el edificio A será:

$$16\,666\,666.67 + 2\,211\,630.97 = \$18\,878\,297.64$$

El costo del edificio B se puede representar mediante la siguiente gráfica:

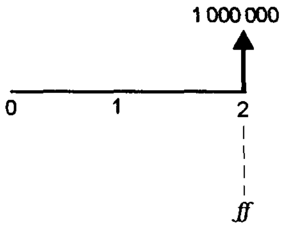


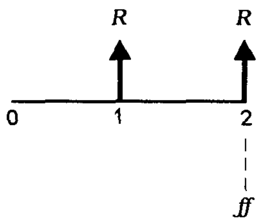
Como se puede apreciar el valor presente está compuesto por dos anualidades infinitas, la primera de $5 100 000 anuales cuyo valor presente será:

$$\frac{5\,100\,000}{0.3} = \$17\,000\,000$$

La segunda es del tipo general con pago de $1 millón cada 2 años cuyo valor presente puede ser calculado de dos formas diferentes tal como se hizo para el edificio A:

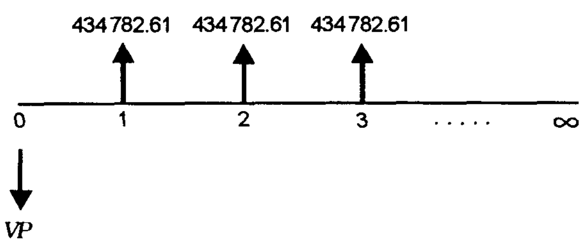
a) reemplazamos pagos de $1 cada 2 años por pagos anuales de *$R* así:





$$R\, s_{\overline{2}|30\%} = 1\,000\,000 \quad \text{de donde} \quad R = \$434\,782.61$$

y $1 000 000 cada 2 años podrá ser reemplazado por $434 782.61 cada año,



cuyo valor presente será: $$\frac{434\,782.61}{0.3} = \$1\,449\,275.36$$

otra forma de hacer el cálculo sería modificando la tasa.

b) Calculamos una tasa efectiva cada 2 años equivalente al 30% efectivo anual así:

$$(1 + 0.3)^2 = (1 + i)^1$$

entonces i = 69% efectivo cada 2 años

Ahora calculamos el valor presente de $1 millón cada 2 años a la tasa efectiva del 69%

$$\frac{1\ 000\ 000}{0.69} = \$1\ 449\ 275.36$$

Entonces el costo de usar el edificio B será:

$$17\ 000\ 000 + 1\ 449\ 275.36 = \$18\ 449\ 275.36$$

Al comparar los costos de los 2 edificios se observa que resulta mas conveniente usar el edificio B.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Cuando su hijo cumple 12 años, un padre hace un depósito de ***$X*** en una fiduciaria, con el objeto de asegurar sus estudios universitarios, los cuales iniciará cuando cumpla 20 años. Suponiendo que para esa época el valor de la matrícula anual en la universidad será de $300 000 y que permanecerá constante durante los seis años que duran los estudios universitarios, ¿cuál debe ser el valor de ***$X***? Suponga una tasa del 30%.

   Respuesta: $126 349.41

2) Una persona necesita comprar hoy una máquina, el modelo A cuesta $300 000; el modelo B, $500 000, el C $700 000 y el modelo D, $900 000. Si la persona puede hacer 36 pagos mensuales de máximo $30 000 durante 3 años, pero comenzando el primer pago al final de 6 meses ¿cuál será el modelo mas costoso que podrá comprar? Suponga una tasa del 30% CM.

   Respuesta: el valor presente de lo que puede pagar es $624 608.81 por tanto decida modelo B

3) Una persona solicita un préstamo el día 1 de marzo de 1989 y planea efectuar pagos mensuales de $12 000, desde el 1 de octubre de 1989, hasta el 1 de agosto de 1990. Si le cobran un interés del 3.5% efectivo mensual, ¿cuál será el valor del préstamo?

   Respuesta: $87 873.21

4) Un filántropo ha creado una institución de caridad y desea asegurar su funcionamiento a perpetuidad. Se estima que esta institución necesita para su funcionamiento $100 000, al final de cada mes, durante el primer año; $200 000,

al final de cada mes, durante el segundo año y $300 000, al final de cada mes, en forma indefinida. Suponiendo una tasa del 30% CM, hallar el valor de la dote (se denomina dote al valor único que, entregado al principio, asegura el mantenimiento a perpetuidad, en el caso de las personas el mantenimiento es vitalicio).

Respuesta: $9 185 725

5) Un señor deposita el primero de abril de 1986 $10 000, en un fondo que paga el 36% CS.

   a) ¿cuántos retiros semestrales de $8 000 podrá hacer, si el primer retiro lo hace el primero de abril de 1989?
   b) ¿cuál será el valor del retiro adicional que hecho un período después del último pago de $8 000 cancelará el fondo?

   Respuesta: a) 4 períodos b) $3 104.68

6) Suponiendo una tasa del 36% CM, ¿cuál será el valor presente de: a) $200 000, al final de cada mes, en forma indefinida; b) $200 000, al principio de cada mes indefinidamente?

   Respuesta: a) $6 666 666.67; b) $6 866666,67

7) Un inversionista deposita hoy $100 000 y $300 000, en 3 años; al final del año 5, comienza a hacer depósitos anuales de $50 000, durante 6 años, ¿cuánto dinero podrá retirarse en forma indefinida, comenzando al final del año 14? Utilice una tasa del 20% efectivo anual.

   Respuesta: $757 080.

8) Un grupo de benefactores decide dotar a un hospital de los equipos de laboratorio que necesita, se estima que el costo de los equipos el día primero de julio de 1990 será de $4 millones y que necesitará $300 000 trimestralmente, como costo de funcionamiento en forma indefinida, a partir del primero de abril de 1991, fecha en la cual entrará en funcionamiento. ¿Cuál debe ser el valor de la donación que se haga el día primero de enero de 1990 si el dinero es invertido inmediatamente en una fiduciaria que garantiza el 24% CT?

   Respuesta: $7 520 454

9) Una empresa pretende tomar una casa-lote que requiere la suma de $2.000.000 anuales como costo de mantenimiento y de $3.000.000 cada 4 años para reparaciones adicionales.Por otra casa-lote que le ofrecen, se requerirá de una suma de $3.000.000 anuales para mantenimiento y de $2.500.000 cada tres años para reparaciones adicionales. Si la casa-lote se usará por tiempo indefinido y

suponiendo una tasa de interés del 35% efectivo anual, ¿cuál de las dos alternativas es más conveniente tomar?

Respuesta: primera alternativa $7 006 550; segunda alternativa $10 283 318.
Decidir primera alternativa.

10) Con intereses al 24% CT, ¿cuál debe ser el valor de los pagos semestrales vencidos que, hechos por 10 años, amortizarán una deuda de $1 200 000?

Respuesta: $164 293

11) Resolver el problema anterior si los pagos son anticipados.

Respuesta: $146 220

12) Una persona compra un artículo por $600 000. sí da una cuota inicial del 40% y cancela el saldo, en cuotas trimestrales vencidas, de $50 000 c/u tanto tiempo como fuere necesario, y suponiendo intereses al 36% CM, hallar el número de pagos de $50 000 y el pago final que hecho tres meses después del último pago de $50 000, cancelará la deuda.

Respuesta: 12 pagos de $50 000, y un pago final de $21 631

13) Si se deposita mensualmente la suma de $1 000 en un fondo que paga el 27% CM y adicionalmente, deposita $2 000 cada 3 meses ¿Cuánto se habrá acumulado, al final de 5 años?

Respuesta: $205 578

14) *Con el objeto de poder hacer 10 retiros semestrales de $70 000, se depositan* hoy un capital en una cuenta de ahorros que paga el 21% CT. Si el primer retiro lo hace al final de un año, ¿cuál debe ser el valor de la cuenta?

Respuesta: $375 673

15) Un señor desea comprar una póliza de seguro que garantice a su esposa el pago de $40 000 mensuales durante 10 años y adicionalmente $50 000 al final de cada año durante este mismo período. Si el primer pago se efectúa al mes del fallecimiento del señor, hallar el valor de la póliza de seguro suponiendo que la compañía de seguros garantiza el 24% CM.

Respuesta: $1 983 299.51

16) Se desea cancelar una deuda de $900 000 en pagos mensuales de R durante 3 años, el primero al final de un mes, y además se efectuaran abonos semestrales

extraordinarios de una y media veces la cuota ordinaria, el primero de estos al final de 6 meses. Suponiendo una tasa del 36% CM. ¿Cuál debe ser el valor de las cuotas ordinarias y el de las cuotas extraordinarias?

Respuesta: $33 463.38; $50 195.07

17) Se compra un carro en $12.000.000 mediante el pago de 48 cuotas mensuales vencidas de ***$R*** c/u y cuotas trimestrales vencidas de $400.000 c/u durante 4 años. Si se cobra una tasa del 44% efectivo anual, determinar el valor de ***$R***.

Respuesta: $353 137.09

18) Con una tasa del 25% efectivo anual, ¿cuál debe ser el valor presente de una anualidad infinita de $600 000 al final de cada 4 años? Utilice cambio de tasa.

Respuesta: $416 260

19) Resuelva el problema anterior modificando los pagos.

Respuesta: $416 260

20) Reemplazar pagos de $200 000 hechos cada 2 años por pagos equivalentes cada 5 años suponiendo una tasa del 30% efectivo anual.

Respuesta: $786 356.52 cada 5 años

21) Con una tasa del 20% efectivo anual, ¿qué es más conveniente para una universidad, recibir una renta perpetua de $800 000 cada 5 años comenzando el primer pago en el cuarto año, o, recibir $200 000 anuales de renta perpetua comenzando el primero dentro de un año?

Respuesta: la primera opción le representa $645 022.58 pesos de hoy y la segunda opción le representa $1 millón en pesos de hoy, por tanto, es mejor la segunda opción.

22) Una máquina llegará al final de su vida útil dentro de 2 años, para esa época una nueva máquina que se adquiera costará $900 000 y se estima que la máquina vieja podrá ser recibida en parte de pago de la nueva en la suma de $200 000. ¿Qué depósito trimestral debo hacer en una cuenta que paga el 30% CM con el objeto de hacer la compra en el momento oportuno si el primer depósito lo hago al final de 6 meses?

Respuesta: $79 200.82

23) **Una fábrica se puede comprar en la suma de $1 millón, la cual produce 2 000 unidades mensuales de un cierto artículo que podrá ser vendido durante los primeros 6 meses a $30 la unidad y en $50 la unidad durante los siguientes 6 meses. El inversionista piensa que podrá vender la fábrica al final de un año en la suma de $1.2 millones. Si el inversionista gana normalmente en todos sus negocios el 5% efectivo mensual, le aconsejaría usted que comprara la fábrica?**

Respuesta: **Si porque en pesos de hoy los ingresos suman $1 351 502.38 y los egresos son $1 millón**

24) **Calcular la tasa que gana el inversionista del problema anterior.**

Respuesta: **8.54% efectivo mensual**

25) Hoy primero de noviembre de 1999 se tiene una obligación a la que le restan 18 cuotas mensuales anticipadas de $827 643 c/u para terminar de pagarse. El acreedor desea cambiar la forma de pago de su deuda y pacta realizar 10 pagos trimestrales vencidos de $2 965 345.96 c/u. ¿En qué fecha deberá realizar el primer pago de la nueva anualidad? Utilice una tasa del 38.5% efectivo anual.

Respuesta: Primero de agosto del año 2001.

26) Se concede un préstamo de $20 millones para se pagado en cuotas mensuales en la siguientes condiciones:
a) En los primeros 6 meses no se efectuara ningún pago pero los intereses si se causan (esto es un período de gracia)
b) En los siguientes 6 meses se pagará la suma de $600 000 mensualmente
c) De el mes 13 en adelante se pagará mensualmente la suma de $R
d) Plazo total 3 años. (En este tiempo queda incluido el período de gracia)
e) Durante el primer año se cobrará un interés del 12% nominal mensual,durante te el segundo año se cobrara una tasa del 18% nominal mensual y,durante el tercer año se cobrará una tasa del 24% nominal mensual.
Determinar el valor de $R

Respuesta: R=$954 066.98

27) Por un préstamo de 15 millones se exige el pago de $450 000 mensuales durante los primeros 12 meses, de $600 000 por los siguientes 12 meses, de $1 millón mensual por los siguientes 12 meses y un pago final de $2 millones en el mes 37. ¿Cuál es la tasa de interés periódica mensual que se está cobrando?

Respuesta: 2.725% periódico mensual.

28) Resolver el problema anterior suponiendo que a partir del segundo año se cobra una tasa de interés igual al doble de la que se cobra en el primer año. Sugerencia resuelva el problema por Excel.

Respuesta: tasa del primer año 1.4356% mensual y de ahí en adelante el 2.8712% mensual.

Gradientes

CAPITULO **6**

INTRODUCCION

Debido a la inflación, se observa que casi todos los renglones de la economía van aumentando de precios, por esta razón, es necesario elaborar modelos matemáticos que ajustándose a los índices de inflación puedan compensar los efectos erosionantes en el dinero, a través del tiempo, entre los modelos matemáticos que pueden suplir esta necesidad están los gradientes.

DEFINICION

Un gradiente es una serie de pagos que cumple que cumple con las siguientes condiciones:

1) Todos los pagos cumplen con una ley de formación.
2) Los pagos se efectúan a iguales intervalos de tiempo.
3) Todos los pagos se trasladan al principio o al final a la misma tasa de interés
4) El número de pagos es igual al número de períodos

La ley de formación, de la que habla la primera condición, puede ser de varias clases, sin embargo, las más utilizadas son: la que corresponde al gradiente lineal o aritmético y la que corresponde al gradiente geométrico.

Las anualidades, vienen a ser un caso particular de los gradientes, en el cual, el crecimiento es cero, lo que hace que todos los pagos sean de igual valor, por tal motivo el manejo de los gradientes es similar al manejo de las anualidades.

Las otras tres leyes son las mismas de las anualidades.

GRADIENTE ARITMETICO

En el gradiente aritmético cada pago es igual al anterior, mas una constante L; si esta constante es positiva, el gradiente será creciente; si la constante es negativa, el gradiente será decreciente. Obviamente, si $L = 0$ todos los pagos son iguales y la serie se convierte en una anualidad.

Como en un gradiente todos los pagos son de diferente valor, será necesario distinguir un pago de otro y por eso al primer pago lo representaremos por R_1; el segundo pago por R_2 y así sucesivamente, el último pago lo representaremos por R_n

De acuerdo a la definición de gradiente lineal se tendrá:

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_1 + L \\
R_3 &= R_2 + L = R_1 + 2L \\
R_4 &= R_3 + L = R_1 + 3L \\
&\;\; . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&\;\; . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
R_n &= R_{n-1} + L = R_1 + (n-1)L
\end{aligned}
$$

De lo anterior se deduce que la fórmula del último término será:

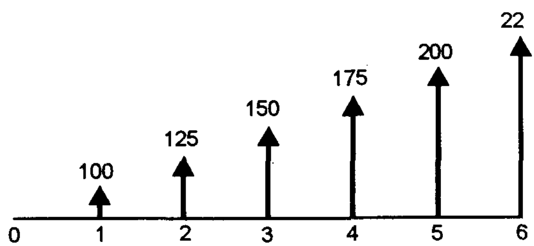
$$\boxed{R_n = R_1 + (n-1)L}$$

Ejemplo 1

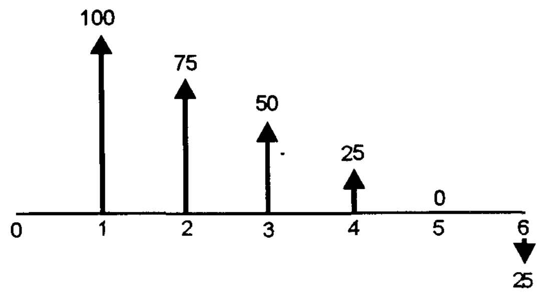
Hacer la gráfica de un gradiente aritmético de 6 pagos con primera cuota de $100 y a) crecimiento de $25 y b) decreciente en $25

Solución:

a)

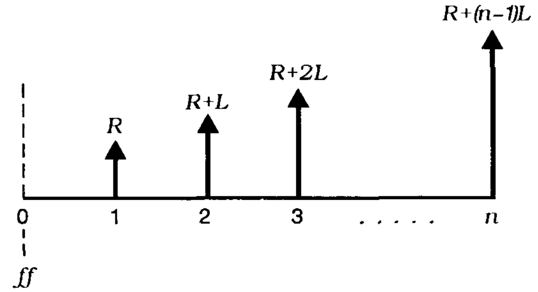


b)



Obsérvese en la figura b) que, en el período 5, el pago es cero y que, en el período 6, el valor del pago viene a ser $-\$25$, lo cual se representa colocándolo como positivo pero al otro lado de la línea de tiempo.

Fórmula del valor presente de un gradiente aritmético



En igual forma como se hizo con las anualidades, planteamos la ecuación de valor, trasladando cada uno de los pagos a la fecha focal, usando la tasa efectiva i; entonces:

$$VP = R(1+i)^{-1} + (R+L)(1+i)^{-2} + (R+2L)(1+i)^{-3} + ... + [R+(n-1)L](1+i)^{-n}$$

si eliminamos los paréntesis donde se encuentra R y escribimos primero los términos que contienen R y, después, los términos que contienen L, tenemos:

$$VP=R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} +...+ R(1+i)^{-n} + L(1+i)^{-2} + 2L(1+i)^{-3} +...+ (n-1)L(1+i)^{-n}$$

Se observa que los términos que contienen R son los mismos de la ecuación de valor de una anualidad ordinaria en valor presente, y si además, factorizamos L de los términos restantes se tiene:

$$VP = R a_{\overline{n}|\,i} + L\left[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + ... + (n-1)(1+i)^{-n}\right] \quad (*)$$

Supongamos que W es igual a la serie que está dentro del paréntesis angular; en consecuencia:

$$W = (1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-4} + ... + (n-1)(1+i)^{-n}$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por $(1+i)$ tenemos:

$$W(1+i) = (1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + 3(1+i)^{-3} + ... + (n-1)(1+i)^{-(n+1)}$$

Si substráemos $W(1+i) - W$ resulta:

$$W(1+i) - W = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + ... + (1+i)^{-(n+1)} - (n-1)(1+i)^{-n}$$

Simplificando:

$$W\,i = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-(n+1)} + (1+i)^{-n} - n(1+i)^{-n}$$

$$W\,i = a_{\overline{n}|}\,i - n(1+i)^{-n}$$

$$W = \frac{1}{i}\left[a_{\overline{n}|}\,i - n(1+i)^{-n}\right]$$

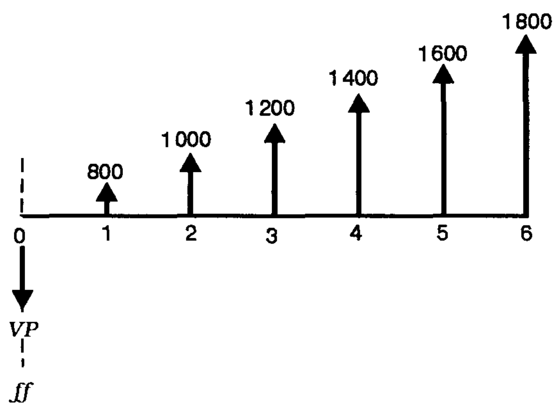
Si reemplazamos W en (*) tenemos:

$$\boxed{VP = R\,a_{\overline{n}|}\,i + \frac{L}{i}\left[a_{\overline{n}|}\,i - n(1+i)^{-n}\right]}$$

En la fórmula anterior figura R sin indicar cuál de todas las cuotas es pero, en la deducción de la fórmula hemos trabajado con base en que R es el primer pago. En consecuencia cuando en cualquier fórmula aparezca R sin indicar cuál es, deberá asumirse que se trata de la primera cuota.

Ejemplo 2

Hallar el valor presente con interés al 5% de al siguiente serie:



Solución:

En la gráfica se observan varias cosas:

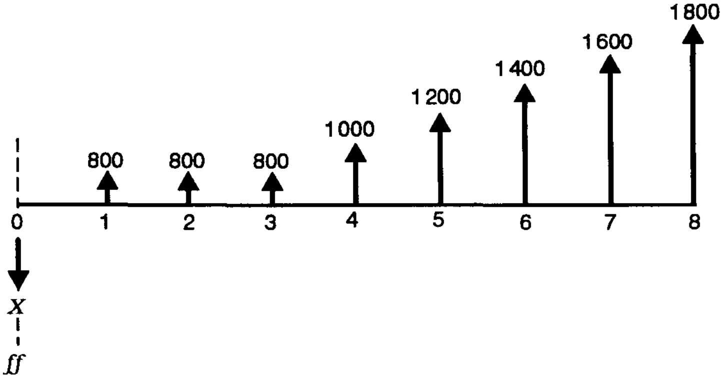
a) El gradiente tiene un crecimiento de \$200; entonces $L = 200$
b) El primer pago es \$800; entonces $R = 800$;
c) El número de pagos es 6; entonces $n = 6$

reemplazando en la fórmula se tiene:

$$VP = 800\,a_{\overline{6}|}5\% + \frac{200}{0.05}\left[a_{\overline{6}|}5\% - 6(1+0.05)^{-6}\right] = \$6\,454.15$$

Ejemplo 3

Hallar el valor presente de la siguiente serie con tasa del 5%



Solución:

primera forma: podemos considerar que el gradiente se inicia en el período 2; entonces su primer pago será de $800 (el que está en 3); los otros pagos de $800 ubicados en 1 y 2 forman una anualidad:

$$X = \underbrace{800\, a_{\overline{2}|5\%}}_{\substack{\text{Anualidad}\\ \text{de 2 pagos}}} + \underbrace{\left\{800\, a_{\overline{6}|5\%} + \frac{200}{0.05}\left[a_{\overline{6}|5\%} - 6(1+0.05)^{-6}\right]\right\}}_{\substack{\text{Valor presente del Gradiente}\\ \text{en el punto 2} = \$6\,454}} \underbrace{(1+0.05)^{-2}}_{\substack{\text{para ubicar}\\ \text{en la f.f.}}}$$

$$X = \$7\,342$$

segunda forma: podemos suponer que el gradiente empieza en el punto 3; así, su primer pago será de $1 000, y tendrá 5 períodos

$$X = \underbrace{800\, a_{\overline{3}|5\%}}_{\substack{\text{Anualidad}\\ \text{de 3 pagos}}} + \underbrace{\left\{1\,000\, a_{\overline{5}|5\%} + \frac{200}{0.05}\left[a_{\overline{5}|5\%} - 5(1+0.05)^{-5}\right]\right\}}_{\substack{\text{Valor presente del Gradiente}\\ \text{en el punto 3} = \$5\,977}} \underbrace{(1+0.05)^{-3}}_{\substack{\text{para ubicar}\\ \text{en la f.f.}}}$$

$$X = \$7\,342$$

Fórmula del valor final del gradiente aritmético

Para hallar el valor final, basta tomar el valor presente y multiplicarlo por $(1+i)^n$, así:

$$VF = VP\,(1+i)^n$$

Haciendo las operaciones respectivas y simplificando se concluye que:

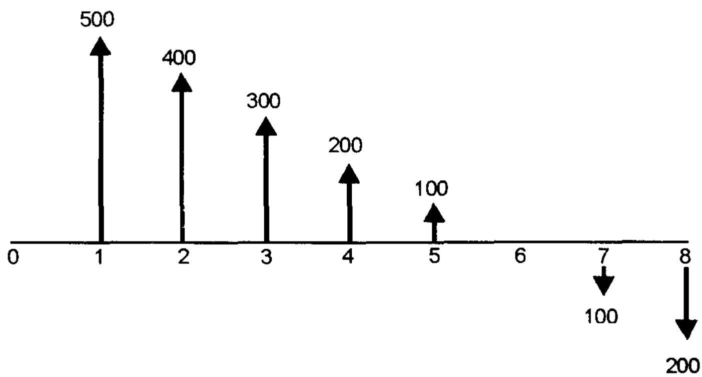
$$\boxed{VF = R\, S\overline{n|}\, i + \frac{L}{i}\left[S\overline{n|}\, i - n\right]}$$

Observación: nuevamente hacemos énfasis en que R representa a la primera cuota del gradiente.

Ejemplo 4

Hallar el monto de la siguiente gráfica; suponga una tasa del 15%

Observación: los 2 últimos valores son negativos



Solución: $n = 8$, $L = -100$, $R = 500$

$$VF = 500\ S\overline{8|}15\% + \frac{-100}{0.15}\left[S\overline{8|}15\% - 8\right] = \$3\ 045.53$$

AMORTIZACION CON CUOTA CRECIENTE

Debido a las altas tasas de inflación, en muchos países se ha impuesto la moda de utilizar una cuota creciente en los sistemas de amortización, lo que ha impulsado el desarrollo y de nuevas técnicas.

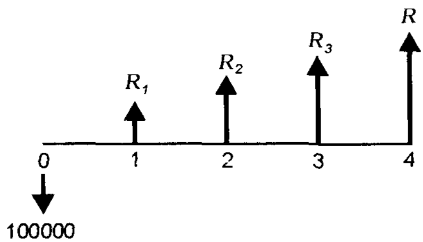
Actualmente, los sistemas de amortización más utilizados son los que usan una cuota creciente.

Ejemplo 5

Amortizar la suma de \$100 000, en 4 pagos, suponiendo una tasa del 8% y;
a) crecimiento lineal de la cuota de \$12 000
b) decremento lineal de la cuota de \$12 000

Solución:

a)



$$100\,000 = R\, a_{\overline{4}|}8\% + \frac{12\,000}{0.08}\left[a_{\overline{4}|}8\% - 4(1+0.08)^{-4}\right]$$

de donde se obtiene que R_1 = \$13 344.56

Las demás cuotas se pueden calcular con la fórmula del último termino del gradiente lineal o aritmético $R_n = R_1 + (n-1)L$

$$R_2 = 13\,344.56 + 12\,000 = 25\,344.56$$

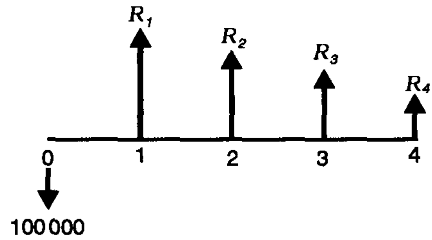
$$R_3 = 13\,344.56 + 2 \times 12\,000 = 37\,344.56$$

$$R_4 = 13\,344.56 + 3 \times 12\,000 = 49\,344.56$$

Con los datos anteriores podemos elaborar la tabla en la misma forma como se trabajo con anualidades.

PER.	SALDO DEUDA	INTERESES	PAGO	AMORTIZACION
0	100 000.00	–	–	–
1	94 655.44	8 000.00	13 344.56	5 344.56
2	76 883.31	7 572.43	25 344.56	17 772.13
3	45 689.41	6 150.66	37 344.56	31 193.90
4	0.00	3 655.15	49 344.56	45 689.41

Observación: la tabla anterior puede ser elaborada haciendo uso del programa AMORT2L b)



$$100\,000 = R\, a_{\overline{4}|}8\% + \frac{-12\,000}{0.08}\left[a_{\overline{4}|}8\% - 4(1+0.08)^{-4}\right]$$

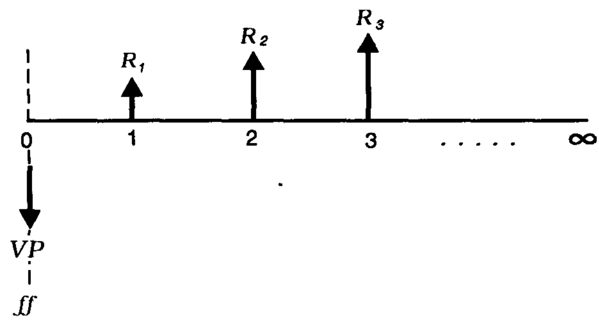
de donde se obtiene que $R_1 = \$47\,039.60$

PER.	SALDO DEUDA	INTERESES	PAGO	AMORTIZACION
0	100 000.00	–	–	–
1	60 960.40	8 000.00	47 039.60	39 039.60
2	30 797.63	4 876.83	35 039.60	30 162.77
3	10 221.84	2 463.81	23 039.60	20 575.79
4	0.00	817.76	11 039.60	10 221.84

Observación: la tabla anterior puede ser elaborada mediante el programa AMORT2L

GRADIENTE ARITMETICO INFINITO

Igual que en las anualidades, solo tiene sentido el valor presente de un gradiente infinito. Su principal aplicación es el cálculo del costo del capital, tema que se discutirá en un capítulo posterior.



El planteamiento de la ecuación de valor será:

$$VP = \lim_{n\to\infty} \left\{ R a_{\overline{n}|i} + \frac{L}{i}\left[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right]\right\} \quad [1]$$

$$VP = \lim_{n\to\infty} R a_{\overline{n}|i} + \lim_{n\to\infty} \frac{L}{i} a_{\overline{n}|i} - \lim_{n\to\infty} \frac{L}{i} n(1+i)^{-n} \quad [2]$$

pero $$\lim_{n\to\infty} R a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{R}{i} \quad [3]$$

también $$\lim_{n\to\infty} \frac{L}{i} a_{\overline{n}|i} = \frac{L}{i} \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{L}{i}\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{L}{i^2} \quad [4]$$

además $$\lim_{n\to\infty} \frac{L}{i} n(1+i)^{-n} = \frac{L}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n}$$

Aplicando la regla de L'ôpital, tenemos:

$$\frac{L}{i} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1+i)^{n-1}} = 0 \quad [5]$$

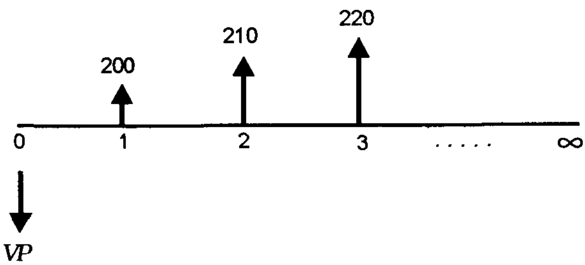
Reemplazando [3],[4], y [5] en [2], se tiene:

$$\boxed{VP = \frac{R}{i} + \frac{L}{i^2}}$$

Ejemplo 6

Calcular el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen en $10, si el primer pago vale $200 y la tasa es del 3%.

Solución:



$$VP = \frac{200}{0.03} + \frac{10}{(0.03)^2} = \$17\ 777.78$$

Esto significa que si colocamos \$17 777.78 al 3% efectivo, podremos pagar \$200 al final del primer período, \$210 al final del segundo período, \$220 al final del tercer período y así sucesivamente.

GRADIENTE GEOMETRICO

Un gradiente geométrico es una serie de pagos, en la cual cada pago es igual al anterior, multiplicado por una constante que representaremos por $1+G$. Si G es positivo el gradiente será creciente, si G es negativo el gradiente será decreciente y, si $G = 0$ el gradiente se convierte en una anualidad.

En un gradiente geométrico, el primer pago será: R_1

el segundo pago $R_2 = R_1(1+G)$

el tercer pago $R_3 = R_2(1+G) = R_1(1+G)^2$

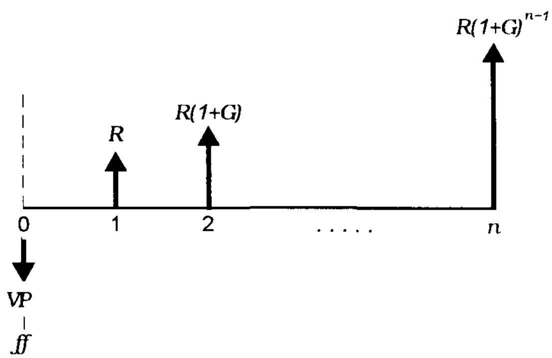
$. \quad \dots \quad \dots \quad . \quad = \quad \dots \quad \dots$

el último pago $R_n = R_{n-1}(1+G) = R_1(1+G)^{n-1}$

entonces:

$$\boxed{R_n = R_1(1+G)^{n-1}}$$

Fórmula del valor presente del gradiente geométrico



El planteo de la ecuación de valor será:

$$VP = R(1+i)^{-1} + R(1+G)(1+i)^{-2} + R(1+G)^2(1+i)^{-3} + \dots + R(1+G)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

si multiplicamos la ecuación anterior, por $(1+G)(1+i)^{-1}$, tenemos:

$$VP\,(1+G)(1+i)^{-1} = R(1+G)(1+i)^{-2} + R(1+G)^2(1+i)^{-3} + R(1+G)^3(1+i)^{-4} + \ldots + R(1+G)^n(1+i)^{-n-1}$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, tenemos:

$$VP(1+G)(1+i)^{-1} - VP = R(1+G)^n(1+i)^{-n-1} - R(1+i)^{-1}$$

Factorizando, se tiene:

$$VP\left[(1+G)(1+i)^{-1}-1\right] = R(1+i)^{-1}\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right] =$$

$$\frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{(1+i)}$$

$$VP = \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{(1+i)\left[(1+G)(1+i)^{-1}-1\right]} = \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{\left[(1+G)-(1+i)\right]}$$

y finalmente se llega a:

$$VP = \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{G-i} \quad si\ \ G \neq i$$

Cuando $G = i$, se presenta una indeterminada, que puede ser removida usando la regla de L'ôpital y derivando con respecto a i:

$$\lim_{i \to G} \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{G-i} = \lim_{i \to G} R\,\frac{d/di\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{d/di\,(G-i)}$$

$$= R \lim_{i \to G} \frac{-n(1+G)^n(1+i)^{-n-1}}{1} = R\left[n(1+i)^n(1+i)^{-n-1}\right] = \frac{R(n)}{(1+i)}$$

Por tanto podemos concluir que:

$$\boxed{VP = \begin{cases} \dfrac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{G-i} & si\ \ G \neq i \\[2ex] \dfrac{R(n)}{(1+i)} & si\ \ G = i \end{cases}}$$

Fórmula del valor final del gradiente geométrico

Si deseamos calcular el valor final, basta multiplicar a VP por $(1+i)^n$ y así tenemos:

$$VF = \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{G-i}(1+i)^n = \frac{R\left[(1+G)^n-(1+i)^n\right]}{G-i} \quad si \quad G \neq i$$

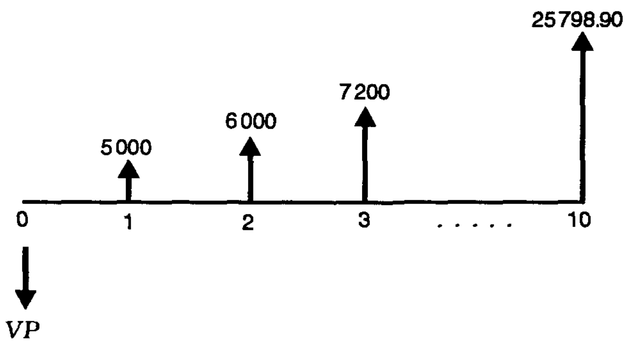
También $$VF = \frac{R(n)}{(1+i)}(1+i)^n = R(n)(1+i)^{n-1} \quad si \quad G = i$$

$$\boxed{VF = \begin{cases} \dfrac{R\left[(1+G)^n-(1+i)^n\right]}{G-i} & si \quad G \neq i \\ R(n)(1+i)^{n-1} & si \quad G = i \end{cases}}$$

Ejemplo 7

Hallar el valor presente de 10 pagos anuales, si el primer pago es de $5 000 y cada pago subsiguiente crece un 20%. Suponga una tasa del 20%

Solución:



como $G = i = 20\%$ se tiene que $VP = \dfrac{5\,000(10)}{(1+0.2)} = \$41\,666.67$

Ejemplo 8

Hallar el valor presente de 15 pagos que crecen un 25%, si el primer pago es de $800 y suponiendo una tasa del 20%

Solución:

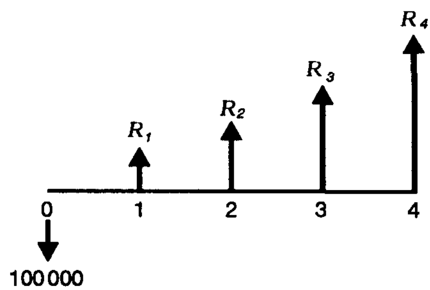
$$VP = \frac{800\left[(1+0.25)^{15}(1+0.2)^{-15}-1\right]}{0.25-0.2} = \$13\,516$$

Ejemplo 9

Elaborar una tabla para amortizar la suma de $100 000 en 4 pagos, suponiendo una tasa efectiva del 8% y:
a) crecimiento geométrico de la cuota en 10%;
b) decrecimiento geométrico de la cuota en –10%

Solución:

a)



$$100\,000 = \frac{R_1\left[(1+0.1)^4(1+0.08)^{-4}-1\right]}{0.1-0.08}$$

de donde $R_1 = \$26\,261.47$

$R_2 = 26\,261.47(1+0.1) = \$28\,887.61$

$R_3 = 26\,261.47(1+0.1)^2 = \$31\,776.38$

$R_4 = 26\,261.47(1+0.1)^3 = \$34\,954.01$

PER.	SALDO DEUDA	INTERESES	PAGO	AMORTIZACION
0	100 000.00	–	–	–
1	81 738.53	8 000.00	26 261.47	18 261.47
2	59 390.00	6 539.08	28 887.61	22 348.53
3	32 364.82	4 751.20	31 776.38	27 025.18
4	0.00	2 589.19	34 954.01	32 364.82

Observación: La tabla anterior puede ser elaborada haciendo uso del programa AMORT2G

b)

$$100\,000 = \frac{R_1\left[(1-0.1)^4(1+0.08)^{-4}-1\right]}{-0.1-0.08}$$

de donde se obtiene que:

$$R_1 = \$34\,766.02$$

$$R_2 = 34\,766.02(1\text{-}0.1)^1 = \$31\,289.42$$

$$R_3 = 34\,766.02(1\text{-}0.1)^2 = \$28\,160.48$$

$$R_4 = 34\,766.02(1\text{-}0.1)^3 = \$25\,344.43$$

PER.	SALDO DEUDA	INTERESES	PAGO	AMORTIZACION
0	100 000.00	–	–	–
1	73 233.98	8 000.00	34 766.02	26 766.02
2	47 803.28	5 858.72	31 289.42	25 430.70
3	23 467.06	3 824.26	28 160.48	24 336.22
4	0.00	1 877.37	25 344.43	23 467.06

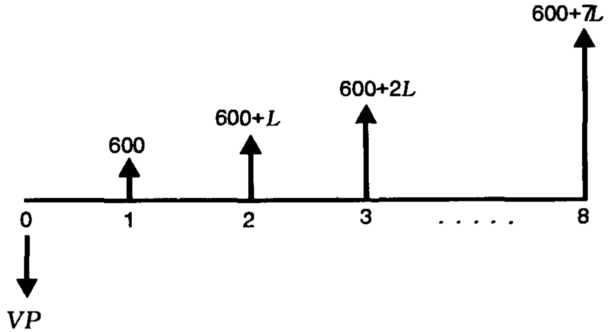
Observación: La tabla anterior puede ser elaborada haciendo uso del programa AMORT2G

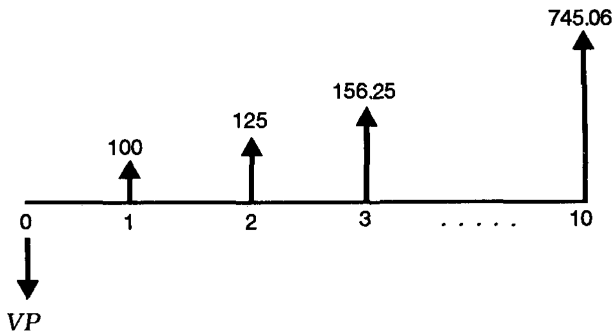
Ejemplo 10

¿Cuánto debe crecer linealmente una serie de 8 pagos, efectuados al final de cada período y cuyo primer pago es de $600 para que, puesta en valor presente, sea equivalente a una serie de 10 pagos que crecen geométricamente en un 25% y cuyo primer pago es de $100? Suponga una tasa del 3% efectivo para el período.

Solución:

Hagamos la suposición que el gradiente lineal es creciente



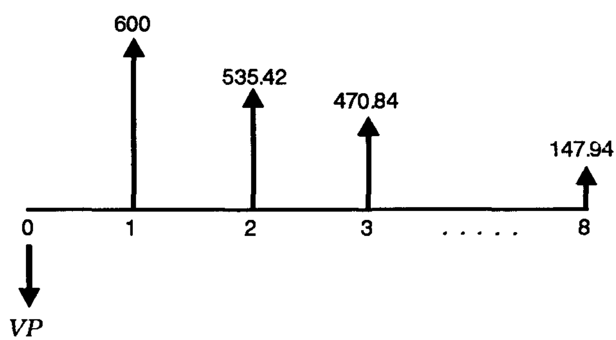


Debemos igualar el valor de las dos series y despejar L

$$600\, a_{\overline{8}|}3\% + \frac{L}{0.03}\left[a_{\overline{8}|}3\% - 8(1+0.03)^{-8}\right] =$$

$$\frac{100\left[(1+0.25)^{10}(1+0.03)^{-10}-1\right]}{0.25-0.03}$$

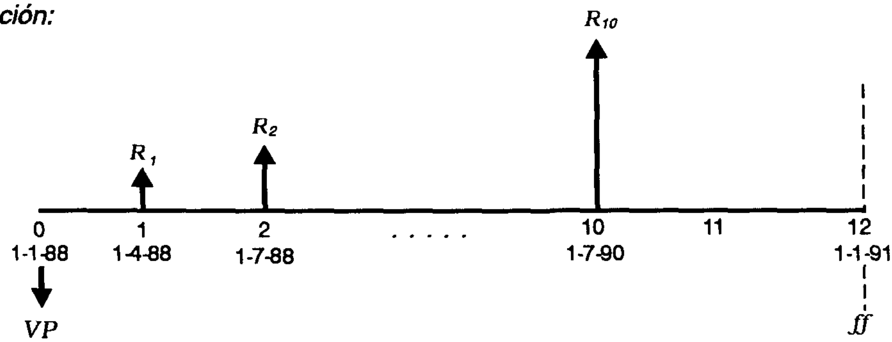
de donde se obtiene que $L = -\$64.58$, lo que significa que el gradiente es decreciente, como se muestra en la gráfica:



Ejemplo 11

Se hacen depósitos trimestrales crecientes en un 5%, en una cuenta que paga el 5.25% efectivo trimestral, con el fin de tener disponibles $500 000 el primero de enero de 1991. Si el primer depósito se hace el primero de abril de 1988 y el último el primero de julio de 1990, determinar el valor del primer depósito.

Solución:



$$500\,000 = \frac{R\left[(1+0.05)^{10}-(1+0.0525)^{10}\right]}{0.05-0.0525}(1+0.0525)^2$$

despejando se obtiene que R = $28 784.88 como primera cuota.

GRADIENTE GEOMETRICO INFINITO

Una de las aplicaciones que tiene este tipo de gradientes está en el análisis sobre emisión de acciones, que se estudiará en capítulos posteriores. Solo tiene sentido el análisis del valor presente.

$$VP = \lim_{n\to\infty} \frac{R\left[(1+G)^n(1+i)^{-n}-1\right]}{G-i} = \frac{R}{G-i}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^n - 1\right]$$

si $G > i$ entonces la expresión $\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^n$ es mayor que 1 y la expresión no tendrá límite cuando $n\to\infty$

si $G < i$ entonces la expresión $\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^n = 0$ porque el valor de la cantidad entre el paréntesis será menor de 1 de lo anterior se deduce que:

$$VP = \frac{R}{G-i}\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^n - 1\right] = \frac{R}{G-i}\left[0-1\right] = \frac{R}{G-i} = \frac{R}{i-G}$$

Cuando $G = i$ la fórmula del valor presente es:

$$VP = \frac{R(n)}{1+i} \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{R(n)}{1+i} = \infty$$

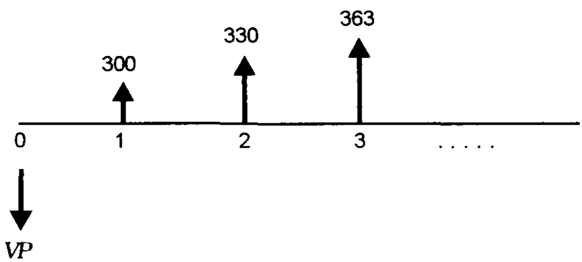
significa que no hay límite cuando $G = i$

$$\boxed{VP = \begin{cases} \dfrac{R}{i - G} & si\ G < i \\ \infty & si\ G \geq i \end{cases}}$$

Ejemplo 12

Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen un 10%, si la tasa de interés es del 20% y el primer pago es $300

Solución:



$$VP = \frac{300}{0.2 - 0.1} = \$3\ 000$$

significa que, si colocamos $3 000 al 20% podremos hacer infinito número de retiros crecientes, en un 10%, con un primer retiro de $300

GRADIENTES ESCALONADOS

En este capítulo haremos una breve introducción al tema de los gradientes escalonados, pero en el siguiente capítulo, para poder analizar algunos sistemas de amortización, es necesario volver sobre este asunto y analizarlo con más detalle.

Un gradiente escalonado es una serie de pagos que permanecen constantes durante cierto tiempo, pero que crecen o decrecen periódicamente.

Para trabajar con gradientes escalonados es más conveniente elaborar dos gráficas en la primera, que denominaremos el gradiente escalonado, se colocan los pagos en la misma forma en que van a ser pagadas las cuotas, y en la segunda gráfica que denominaremos el gradiente simple, se colocará el valor final de cada serie de pagos iguales.

En la primera gráfica a todos los datos tales como pagos, tasa y período se les antepone el prefijo sub o inter así: interpago o intercuota, intertasa e interperíodo, en la segunda gráfica no habrá cambios.

Normalmente sólo se da la información de una de las dos tasas bien sea la intertasa o la tasa, lo importante es que la que no se conoce se puede calcular a partir de la que se conoce mediante la equivalencia de tasas.

Representaremos por *m* el número de intercuotas por cada cuota y se le denominará tamaño del escalón.

Se recomienda que al frente de cada dibujo se coloquen los respectivos datos a fin de evitar confusiones.

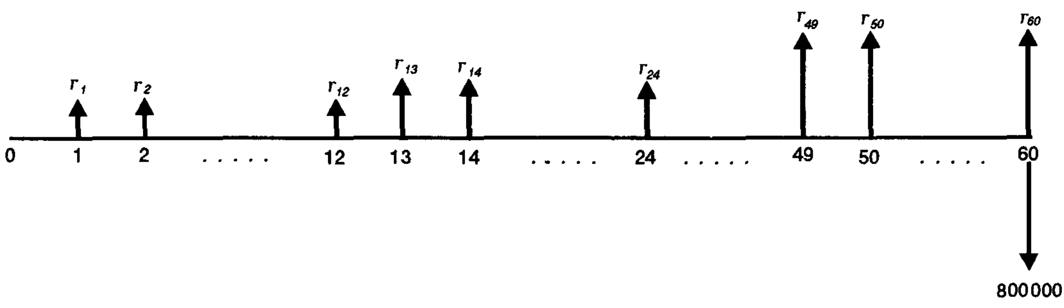
Observación: en este capítulo, no se hará gran énfasis en este tipo de gradientes, porque su principal aplicación está en la forma de elaborar planes de amortización que corresponde al siguiente capítulo, donde se le dará toda la importancia que merece.

Ejemplo 13

Supongamos que se va a reunir $800 000 mediante depósitos mensuales durante 5 años, pero con la siguiente condición: los depósitos durante el primer año son iguales; para comenzar el segundo año aumentan un 15% y permanecerán constantes durante ese mismo año; al comenzar el tercer año vuelven a subir otro 15% y permanecen constantes durante ese año y así sucesivamente.

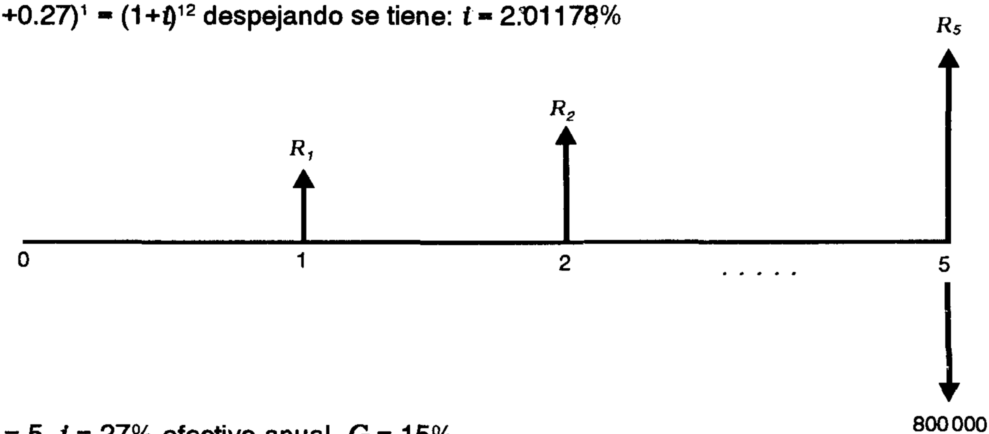
Con una tasa del 27% efectivo anual: calcular el valor del primer depósito y el valor del último depósito del gradiente escalonado.

Solución:



tamaño del escalón, $m = 12$, intertasa = 2.01178% efectivo mensual; la intertasa se calculó mediante tasas equivalentes así:

$(1+0.27)^1 = (1+i)^{12}$ despejando se tiene: $i = 2.01178\%$



$n = 5$, $i = 27\%$ efectivo anual, $G = 15\%$

Primero comenzamos los cálculos con el gradiente simple y hallamos el valor de las cuotas R_1 y R_5

$$800\,000 = \frac{R\left[(1.15)^5 - (1.27)^5\right]}{0.15 - 0.27}$$

De donde se obtiene que $R_1 = \$74\,275.83$ y el valor de $R_5 = 74\,275.83(1.15)^4 = \$129\,908.88$

Ahora pasamos al gradiente escalonado y observamos que el valor final de las primeras 12 intercuotas (que son del mismo valor) debe ser igual a la primera cuota.

$$r_1 S_{\overline{12}|2.01178\%} = 74\,275.83$$

$$r_1 = \$5\,534.31$$

En igual forma la última cuota se podrá calcular así:

$$r_{60} S_{\overline{12}|2.01178\%} = 129\,908.88$$

$$r_{60} = \$9\,679.54$$

Observación: cuando se quiere calcular el valor final o el valor presente de todo el gradiente escalonado se puede calcular mediante la segunda gráfica, es decir, que se calcula con el gradiente simple.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Un documento exige hacer 12 pagos mensuales vencidos. Si el primer pago es de \$6 000 y c/u disminuye en \$800;
a) ¿cuál será el valor del último pago?
b) ¿cuál será el valor final de todos ellos, suponiendo una tasa del 36% CM?

Respuestas: a) – \$2 800; b) \$26 698.06

2) Hallar el valor presente de 15 pagos que decrecen linealmente en \$400, si el primer pago es de \$5 000 y la tasa efectiva es del 4%

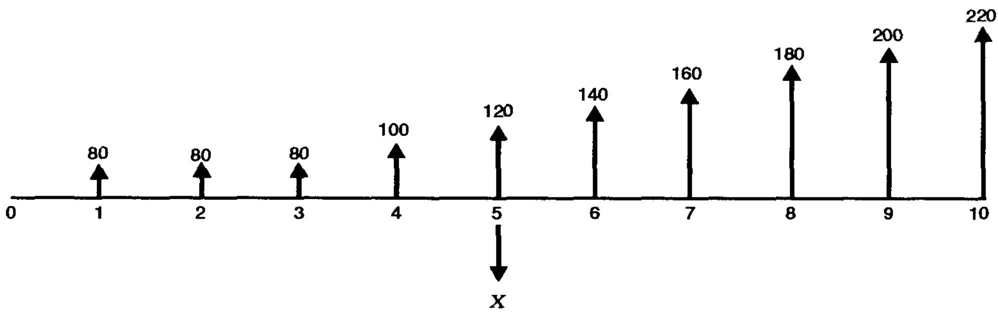
Respuesta: \$27 697.74

3) Con interés efectivo del 10%, hallar el valor final del siguiente flujo de caja:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor	6 000	4 500	3 000	1 500	0	–1 500	–3 000	–4 500

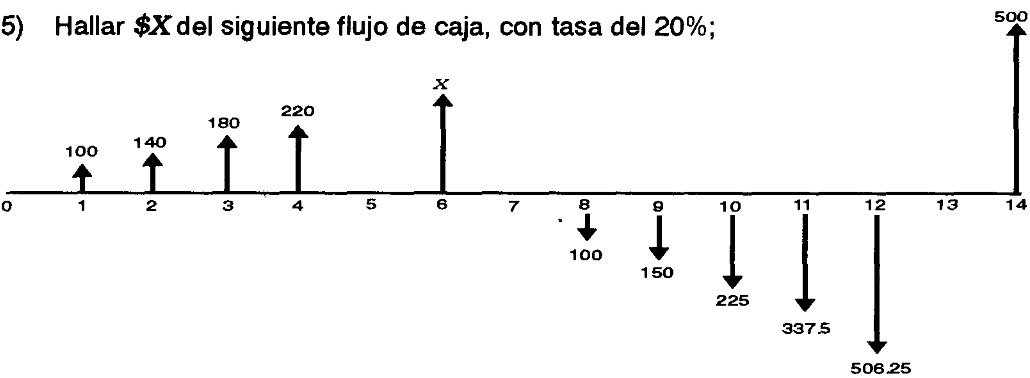
Respuesta: \$17 077

4) Hallar el valor de ***\$X*** del siguiente flujo de caja, con intereses al 30%



Respuesta: \$1 203.02

5) Hallar ***\$X*** del siguiente flujo de caja, con tasa del 20%;



Respuesta: $X = -\$713.33$. Significa que X tiene sentido opuesto al que aparece en la gráfica.

6) Con tasa del 25%, hallar $\$X$ del siguiente flujo de caja

Período	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor	2 000	2 500	3 125	3 906.25	4 882.81	0	X	− 50 000

Respuesta: $1 853.03

7) Hallar el primer pago de un gradiente lineal creciente en $300, que tenga 50 pagos y que sea equivalente a 50 pagos que crecen un 20%, con primer pago de $1 000, suponga una tasa del 20%

Respuesta: $6 835.90

8) Una persona quiere comprar un automóvil, que actualmente cuesta $4 millones; para tal fin, decide establecer un fondo mediante depósitos mensuales crecientes en un 4%. Si el primer depósito es de $60 000, que se hace al final de un mes, ¿cuánto tiempo le llevará reunir el dinero necesario para la compra, si el automóvil sube de precio cada mes un 1%? Suponga una tasa del 4% efectivo mensual.

Sugerencia: calcule el tiempo por interpolación.

Respuesta: 29.35 meses, luego debe esperar 30 meses.

9) ¿Cuántos pagos mensuales deben hacerse para cancelar una deuda de $2 millones, con intereses del 36% CM, suponga que la primera cuota es de $50 000 y que la cuota crece en $500 mensualmente.

Respuesta: por interpolación 96.29 períodos, luego debe esperar 97 períodos.

10) Con interés efectivo del 14% hallar el valor final de la siguiente serie:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valor	300	500	700	900	1 100	1 300	1 000	700	400	100	–200	–500

Respuesta: $16 673.39

11) Con interés efectivo del 10% hallar el valor presente de la siguiente serie utilizando gradientes:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor	30	45	60	80	90	105	125	135

Sugerencia: divida las cuotas de los períodos 4 y 7, de forma tal que una parte esté de acuerdo con la ley de formación del gradiente y el excedente lo puede considerar como cuota adicional.

Respuesta: $406. 46

12) Con interés efectivo del 10% hallar el valor presente de la siguiente serie utilizando gradientes:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	30	45	60	80	90	105	120	130	150	165	180

Respuesta: $591.87

13) Con una tasa del 6% hallar el valor presente de la siguiente serie usando gradiente.

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	60	60	60	60	72	86.4	103.68	124.42	158.7	179.16	215

Respuesta: $776.86

14) Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos si el primero vale $1 000 y son crecientes en un 10%. Suponga una tasa efectiva del 8%

Respuesta: infinito

15) ¿Cuál es el valor presente de una serie infinita de pagos mensuales que crecen cada mes en $3 000 y cuyo primer pago es de $20 000. Suponga una tasa del 2.5% efectivo mensual.

Respuesta: $5 600 000

16) Para mantener en buen estado una carretera veredal, los hacendados de la región desean establecer un fondo, para proveer las reparaciones futuras. Estas se estiman en un millón de pesos para el próximo año; también, se estima que su costo se incrementará todos los años en un 18%. Hallar el valor del fondo, suponiendo un interés del 28% efectivo anual.

Respuesta: $10 000 000

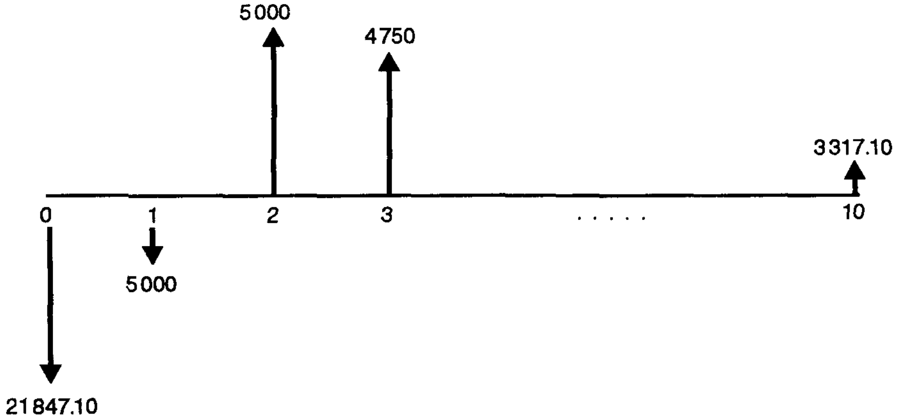
17) Hallar el valor presente de 24 pagos mensuales que crecen cada mes un 2%. Suponga una tasa del 2% efectivo mensuaal y que el primer pago es de $5 000.

Respuesta: $117 647.06

18) Hallar el valor presente de un gradiente infinito de pagos mensuales que crecen un 2% y cuyo primer pago es de $8 000
   a) Suponga una tasa del 3% efectivo mensual
   b) Suponga una tasa del 1.5% efectivo mensual.

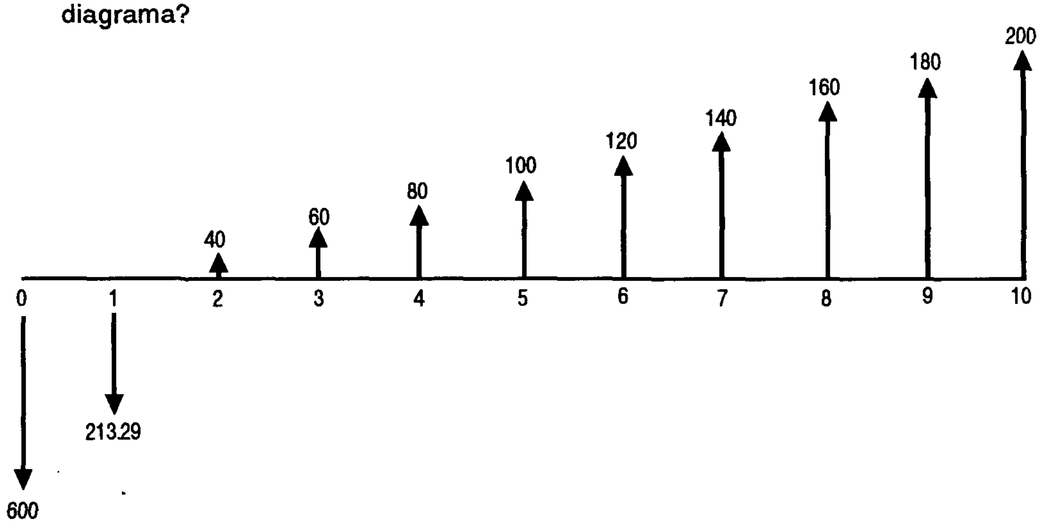
   Respuesta: a) $800 000 b) infinito

19) ¿A qué tasa efectiva se cumplen las condiciones mostradas en el siguiente diagrama?



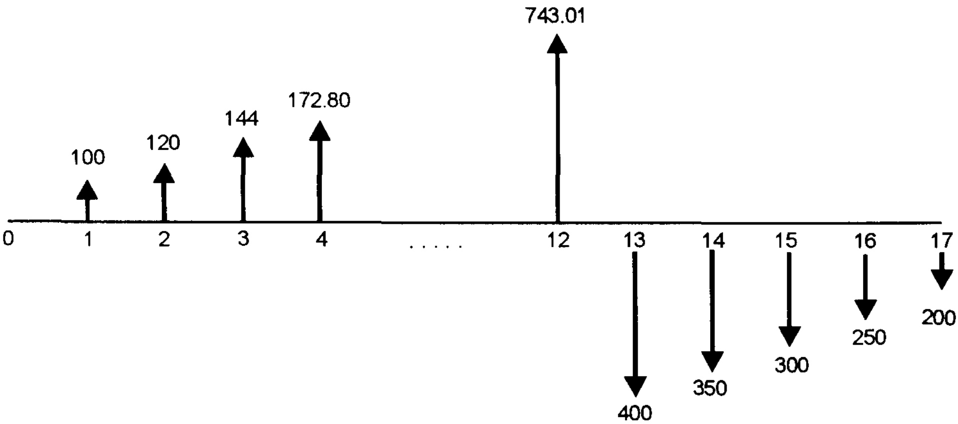
   Respuesta: 6.25%

20) ¿A qué tasa efectiva se cumplen las condiciones mostradas en el siguiente diagrama?



   Respuesta: 4.3%

21) Reemplazar el siguiente flujo de caja, por una serie uniforme, de igual número de pagos, con una tasa del 20% efectivo.



Respuesta: \$187.10

22) Un padre desea reunir una cantidad mediante depósitos anuales uniformes, comenzando hoy (primero de enero de 1984) y terminando el primero de enero de 1990, en un fondo que paga el 28% nominal semestral, su objetivo es el de garantizar a su hijo el estudio universitario, que se estima durará unos 6 años y empezará el primero de enero de 1990. Actualmente, la matrícula semestral cuesta \$30 000, pero aumentará todos los semestres un 8%. Calcular el valor de los depósitos anuales.

Sugerencia: calcular el valor de la matrícula el primero de enero de 1990.

Respuesta: siete depósitos de \$39 014.33

23) Una entidad financiera presta a un cliente \$3 millones, con un interés del 34.8% CM. El deudor tiene un plazo de 15 años para amortizar la deuda, mediante pagos mensuales. Suponiendo que la primera cuota es de \$10 000 y vence al final del primer mes, ¿cuál debe ser el porcentaje de reajuste mensual de la cuota, para cancelar la deuda?

Respuesta: $G = 3.47\%$

24) Se ofrece la administración de un restaurante durante un año y se garantiza que comprarán exactamente 6 000 almuerzos mensuales durante ese año, los cuales serán pagaderos en un solo contado a razón de \$500 cada uno, pero su valor total será cancelado al final del año sin intereses, la persona calcula que el costo de los insumos de cada almuerzo será de \$200 los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes y su valor aumentará cada mes un 5%. El costo

mensual de mano de obra se considera estable en $250 000 y además, se requerirá una inversión inicial de $1 millón para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3%. Calcular cuál será el valor de su ganancia: a) en pesos de hoy y b) en pesos futuros.

Respuestas: a) $5 719 285 b) $8 154 333

25) Resuelva el problema anterior suponiendo que en el mes 6 debe pagar a sus empleados, además de su sueldo, una bonificación de $125 000 y en el mes 12 deberá pagar adicionalmente $400 000 por prestaciones sociales.

Respuestas: a) $5 334 048; b) $7 605 077

26) Resuelva el problema 24 suponiendo que el valor de los almuerzos sea pagadero al final de cada mes.

Respuestas: a) $10 331 622; b) $14 730 422

27) Una fábrica tiene costos fijos de $600 000 mensuales y costos variables de $150 por unidad. Durante los primeros 6 meses no hay producción porque este tiempo se dedicará a pruebas y ajustes. En el mes 7 se iniciará la producción con 300 unidades y cada mes la producción aumentará en 200 unidades hasta llegar al tope de 2 500 al mes. Si se espera vender la fábrica al final de 3 años, calcular el costo total de la producción en estos 3 años en pesos de hoy. suponga una tasa del 3% efectivo mensual.

Respuesta: $17 791 600

28) Una máquina produce una utilidad de un millón de pesos durante el primer año, sin embargo, la utilidad de la máquina disminuye $35 000 cada año debido al desgaste. Calcular en pesos de hoy el total de las ganancias suponiendo que la máquina va a trabajar por 10 años. Utilice una tasa del 30% efectivo anual.

Respuesta: $2 815 488

29) Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes en dólares de Estados Unidos a razón de US$200 la tonelada. Según la experiencia se observa que el peso se devalúa a razón del 2.5% mensual con relación al dólar. Si el cambio actual es de US$1 = $400 hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año a) en pesos de principio de año y b) en pesos de final del año. Suponga que la fábrica trabaja con una tasa del 3% efectivo mensual.

Respuestas: a) $74 782 334; b) $106 621 727

30) Resuelva el problema anterior suponiendo que el fabricante efectúa las importaciones mediante cartas de crédito las cuales deberá cancelar a los 2 meses de su emisión.

Respuestas: a) $74 058 054; b) $105 589 077

31) Una empresa está preparando su plan quinquenal de gastos. La nómina mensual actual vale $2 millones y se estima que cada año el salario mensual se incrementará en un 25%. ¿Cuál debe ser el valor de la provisión en pesos de hoy para el presente quinquenio? suponga que la empresa utiliza una tasa de interés del 35% EA.

Respuesta: $88 292 236

32) El banco ABC concede un préstamo para adquirir un local comercial por $5 millones el día primero de octubre de 1992, en las siguientes condiciones: plazo 12 años, pagos mensuales crecientes en un 1% y tasa del 36% nominal mensual vencido. El día primero de agosto de 1999 el deudor solicita al banco XYZ la refinanciación de la deuda que en ese momento tiene contraída con el banco ABC. El nuevo préstamo se efectúa en las siguientes condiciones: cuotas mensuales crecientes en un 1.2%, tasa 30% nominal mensual vencido, plazo 15 años. ¿Cuál será el valor de la cuota que el primero de septiembre de 1999 pagaría al banco ABC en caso de no haber refinanciación? y ¿Cuál sería el valor de la cuota que en esa misma fecha pagaría al banco XYZ en caso de refinanciación?

Respuesta: cuota en ABC = $240 404.90, cuota en XYZ = $122 215.46.

Amortización y capitalización

CAPITULO 7

Uno de los aspectos más importantes en las finanzas es la amortización, porque es la forma más fácil de pagar una deuda; también lo es la capitalización, porque así podremos reunir un capital mediante ahorros periódicos. El objetivo en ambos casos viene a ser la financiación de un proyecto. Una manera de visualizar mejor el flujo de caja y el comportamiento de la deuda o del capital a través del tiempo, es mediante el uso de tablas.

AMORTIZACION CON CUOTAS UNIFORMES Y CUOTAS EXTRAORDINARIAS

La amortización con cuotas uniformes fueron estudiadas en el capítulo 3, ahora analizaremos el caso en los cuales se incluyen cuotas adicionales o extraordinarias que se pueden dar de dos formas:

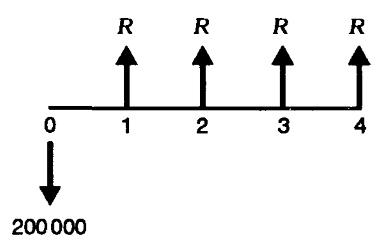
A) CUOTAS EXTRAS PACTADAS

Son aquellas en las que deudor y acreedor acuerdan las fechas en que se van a efectuar tales cuotas extraordinarias en el mismo momento en que se contrata el crédito.

Con el siguiente ejemplo analizaremos el valor de la cuota periódica, primero sin cuotas extras (vista en el capítulo 3) y después con cuotas extras pactadas.

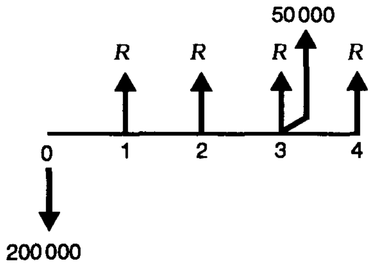
Ejemplo 1

Se va a cancelar una deuda por $200 000 en 4 pagos trimestrales de $\$R$ c/u con una tasa de interés del 32% CT, la cuota ordinaria resulta de:



$$200\,000 = R\,a_{\overline{4}|8\%} \quad \text{de donde se obtiene que,} \quad R = \$60\,384.16$$

Pero si se hace un pago adicional de $50 000 al final del mes 9, la cuota ordinaria debe bajar porque al plantear la ecuación de valor se debe incluir un pago más y en este caso se dice que esa cuota extra es *"pactada"* y el diagrama de flujo de caja quedará así:



la ecuación de valor será:

$$200\,000 = R\,a_{\overline{4}|8\%} + 50\,000(1+0.08)^{-3}$$
$$R = \$48\,400.44$$

Al elaborar la tabla de amortización, se debe tener presente que en el período 3 el valor del pago debe ser igual al pago ordinario más el pago extraordinario, tal como se ve en la siguiente tabla:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	200 000.00	–	–	–
1	167 599.56	16 000.00	48 400.44	32 400.44
2	132 609.08	13 407.96	48 400.44	34 992.48
3	44 815.21	10 608.57	98 400.44	87 791.87
4	0.00	3 585.23	48 400.44	44 815.21

B) CUOTAS EXTRAS NO PACTADAS

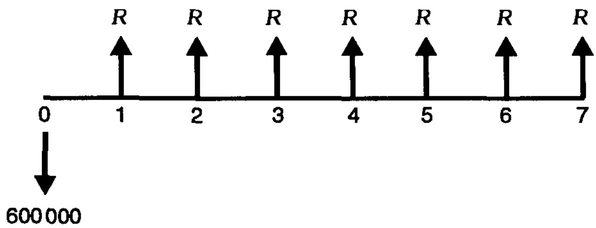
Cuando se está realizando una amortización y el deudor desea hacer un abono extra que no se habia convenido en un principio al obtener el crédito, en este caso se dice que la cuota extra es *"no pactada"*, es apenas lógico, que ésta cuota no aparecerá en la ecuación de valor inicial porque no se habia pactado inicialmente y se presentan dos situaciones, la primera opción consiste en abonarlo al saldo de su deuda y dejar que las cuotas ordinarias se sigan haciendo del mismo valor, en este caso la deuda se cancelará antes del plazo previsto, la segunda situación consiste en hacer el abono al saldo de la deuda y efectuar la reliquidación de la cuota ordinaria periódica con el fin de conservar el plazo originalmente pactado, obviamente el valor de la nueva cuota ordinaria será inferior a la liquidada originalmente.

Ejemplo 2

Una deuda de $600 000 se va a cancelar en 7 pagos trimestrales con un interés del 9% efectivo trimestral. Si al momento de efectuar el pago Nº 3 se efectúa un abono extraordinario, no pactado, de $250 000 se pide: a) elaborar una tabla suponiendo que la cuota extra se abona a capital sin reliquidar la cuota y b) elaborar la tabla si al hacer el abono extra se pide reliquidación de la cuota.

Solución:

Primero calculamos la cuota sin tener en cuenta el abono extra puesto que por no ser pactado no se sabe si éste se llegará a efectuar o no.



$600\ 000 = R\, a_{\overline{7}|9\%}$ de donde se obtiene que $R = \$119\ 214.31$

Ahora elaboramos la tabla sin tener en cuenta ninguna cuota extra puesto que no se han pactado.

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	600 000.00	–	–	–
1	534 785.69	54 000.00	119 214.31	65 214.31
2	463 702.09	48 130.71	119 214.31	71 083.60
3	386 220.97	41 733.19	119 214.31	77 481.12
4	301 766.55	34 759.88	119 214.31	84 454.42
5	209 711.23	27 158.99	119 214.31	92 055.32
6	109 370.93	18 874.01	119 214.31	100 340.30
7	0.00	9 843.38	119 214.31	109 370.93

La primera forma se puede presentar cuando, al cancelar la tercera cuota, el deudor decide efectuar un abono de $250 000, adicional a su cuota ordinaria periódica, entonces la tabla quedará así:

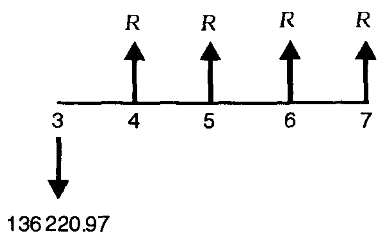
PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	600 000.00	–	–	–
1	534 785.69	54 000.00	119 214.31	65 214.31
2	463 702.09	48 130.71	119 214.31	71 083.60
3	136 220.97	41 733.19	369 214.31	327 481.12
4	29 266.55	12 259.89	119 214.31	106 954.42
5	0.00	2 633.99	31 900.54	29 266.55

El pago del período 5 debe ser igual a los intereses más el saldo de la deuda, esto es:

$$2\,633.99 + 29\,266.55 = \$31\,900.54$$

Obsérvese que la deuda se canceló antes de lo previsto.

La segunda forma se puede presentar cuando, al momento de efectuar el pago de la tercera cuota, el deudor desea hacer un abono extra de $250 000, pero exige reliquidación de la cuota para conservar el plazo originalmente pactado, entonces el capital insoluto o saldo de la deuda del período 3 deberá ser cancelada en los 4 períodos restantes, por tanto la nueva cuota será:



Después del abono extraordinario de $250 000 el saldo de la deuda es ahora de $136 220.97 que se tomará como nuevo capital inicial, por lo tanto:

$$136\,220.97 = R\,a_{\overline{4}|}9\% \quad \text{de donde se obtiene} \quad R = \$42\,047.14$$

y la tabla debe ser modificada así:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	600 000.00	–	–	–
1	534 785.69	54 000.00	119 214.31	65 214.31
2	463 702.09	48 130.71	119 214.31	71 083.60
3	136 220.97	41 733.19	369 214.31	327 481.12
4	106 433.72	12 259.89	42 047.14	29 787.25
5	73 965.61	9 579.03	42 047.14	32 468.11
6	38 575.37	6 656.90	42 047.14	35 390.24
7	0.00	3 471.77	42 047.14	38 575.37

Obsérvese: que la cuota ordinaria baja de $119 214.31 a $42 047.14 pero se mantiene el plazo originalmente pactado.

AMORTIZACION CON PERIODOS DE GRACIA

El período de gracia consiste en que, después de efectuado el préstamo, va a pasar cierto tiempo antes de que se empiecen a efectuar pagos y básicamente, existen dos modalidades de préstamo con períodos de gracia:

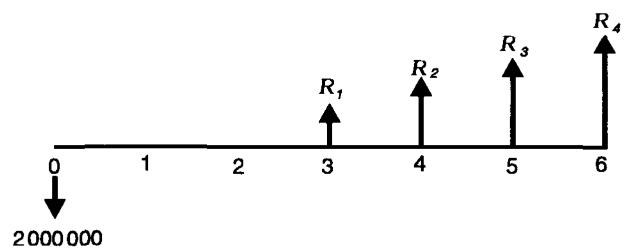
a) **Período de gracia muerto**: consiste en que, durante cierto tiempo, no hay pagos de ninguna clase, a este tiempo se le denomina *"período de gracia muerto"*. Lógicamente, esto no se hace gratuitamente, sino que los intereses causados van acumulándose a la deuda; es decir, que durante el período de gracia muerto, la deuda se incrementa.

b) **Período de gracia con cuota reducida**: consiste en que, durante cierto tiempo se pagan unas cuotas reducidas equivalentes al valor de los intereses que se causan, pero sin hacer amortización al capital, en consecuencia, la deuda permanece constante, porque en la medida que se van causando los intereses se van pagando. Este tipo de préstamo está especialmente dirigido al sector industrial y lo denominaremos *"período de gracia con cuota reducida"*. Obviamente, en un mismo préstamo pueden existir las dos modalidades, lo cual puede dar origen a una tercera modalidad. En este caso el período de gracia muerto siempre figurará de primero, le seguirá el período de gracia con cuota reducida y, a continuación, las cuotas ordinarias.

Ejemplo 3

Se concede un préstamo de $2 000 000, con un plazo de gracia muerto de 6 meses seguido de 4 cuotas trimestrales ordinarias crecientes en un 10% y con un interés del 44% CT. Elaborar la tabla de amortización

Solución:



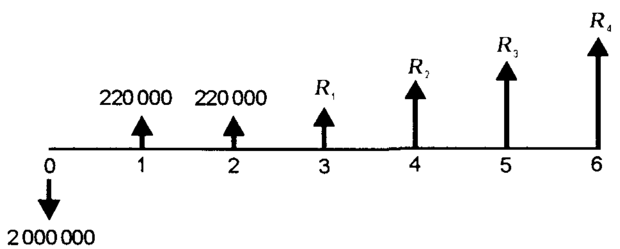
$$2\ 000\ 000 = \frac{R_1\left[(1+0.1)^4(1+0.11)^{-4}-1\right]}{0.1-0.11}(1+0.11)^{-2}$$

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	2 000 000.00	–	–	–
1	2 220 000.00	220 000.00	0.00	– 220 000.00
2	2 464 200.00	244 200.00	0.00	– 244 200.00
3	2 042 236.06	271 062.00	693 125.94	422 063.94
4	1 504 332.50	224 634.97	762 438.53	537 803.56
5	831 126.69	165 476.58	838 682.39	673 205.81
6	0.00	91 423.94	922 550.63	831 126.69

Ejemplo 4

Resolver el problema anterior suponiendo que el plazo de gracia es con cuota reducida

Solución:



$$2\,000\,000 = \frac{R_1\left[(1+0.1)^4\ (1+0.11)^{-4}-1\right]}{0.1-0.11}(1+0.11)^{-2} + 220\,000\ \frac{1-(1+0.11)^{-2}}{0.11}$$

$$R_1 = \$562\,556{,}56$$

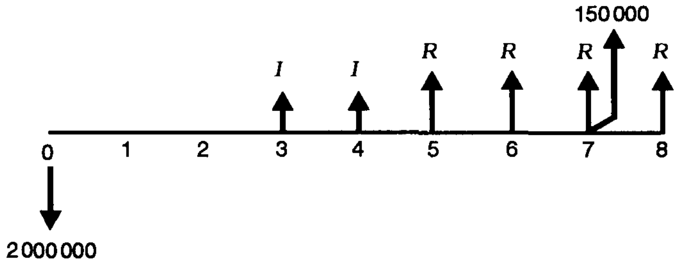
PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	2 000 000.00	0.00	0.00	0.00
1	2 000 000.00	220 000.00	220 000.00	0.00
2	2 000 000.00	220 000.00	220 000.00	0.00
3	1 657 443.44	220 000.00	562 556.56	342 556.56
4	1 220 950.00	182 318.78	618 812.22	436 493.44
5	674 561.06	134 304.50	680 693.44	546 388.94
6	0.00	74 201.72	748 762.78	674 561.06

Ejemplo 5

Elaborar una tabla para amortizar la suma de $2 millones, en las siguientes condiciones:

a) plazo de gracia muerto 6 meses
b) plazo de gracia con cuota reducida 6 meses
c) cuotas trimestrales ordinarias uniformes 4
d) cuota extraordinaria pactada $150 000, en el período 7
e) tasa 21% CT.

Solución:



los períodos 1 y 2 son de gracia muertos; los períodos 3 y 4 son de gracia con cuota reducida; los períodos 5 al 8 son de cuota ordinaria; en el período 2 la deuda será:

$$2\,000\,000\,(1+0.0525)^2 = \$2\,215\,512.50$$

el valor del interés I de los períodos 3 y 4, se calcula aplicando la tasa a la deuda que hay en el período 2

$$2\,215\,512.50 \times 0.0525 = \$116\,314.41$$

la ecuación de valor quedará así:

$$2\,000\,000 = 116\,314.41\,a_{\overline{2}|5.25\%}(1.0525)^{-2} + R\,a_{\overline{4}|5.25\%}(1.0525)^{-4} + 150\,000(1.0525)^{-7}$$

al despejar R se obtiene $R = \$591\,940.10$ y la tabla será:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	2 000 000.00	–	–	–
1	2 105 000.00	105 000.00	0.00	–105 000.00
2	2 215 512.50	110 512.50	0.00	–110 512.50
3	2 215 512.50	116 314.41	116 314.41	0.00
4	2 215 512.50	116 314.41	116 314.41	0.00
5	1 739 886.81	116 314.41	591 940.10	475 625.69
6	1 239 290.77	91 344.06	591 940.10	500 596.04
7	562 413.44	65 062.77	741.940.10	676 877.33
8	0.00	29 526.66	591 940.10	562 413.44

Observaciones:

1) La amortización de los períodos 1 y 2 es negativa; esto significa que hay una

desamortización o aumento de deuda.

2) La amortización de los períodos 3 y 4 es cero, debido a que se pagan los intereses.
3) El valor del pago en el período 5 es igual a la suma del pago ordinario, más el pago extraordinario 591 940.10 + 150 000 = $741 940.10

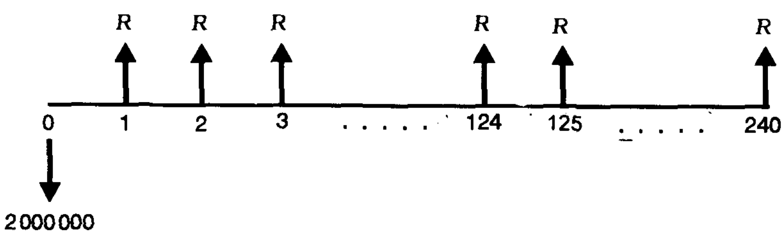
DISTRIBUCION DE UN PAGO

Cada cuota de amortización está compuesta de dos partes: la que corresponde a *intereses y la que corresponde a amortización; sinembargo, no es necesario construir* la tabla para establecer la proporción en que una cuota dada se divide entre interés y amortización. Basta con calcularle los intereses al capital insoluto del período inmediatamente anterior y luego, restarselo al valor de la cuota, para conocer la parte que corresponde a amortización.

Ejemplo 6

Hallar la distribución del pago número 125, en una amortización de $2 millones, mediante pagos mensuales durante 20 años, suponiendo una tasa del 30% CM.

Solución:



Como todos los pagos son iguales, entonces el valor del pago 125 se obtiene de la siguiente ecuación:

$$2\ 000\ 000 = R\,\frac{1-(1+0.025)^{-240}}{0.025} \text{ de donde } R = \$50\ 133.78$$

Por otra parte se sabe que la porción de la cuota 125 que se utiliza para pagar intereses es igual a la tasa, multiplicada por la deuda que queda inmediatamente después de haberse efectuado el pago número 124. Entonces, para hallar la deuda, en ese momento, debemos calcular el valor presente de los pagos que faltan por hacer.

Como en total hay 240 pagos y se han hecho 124 entonces faltan por hacer 116 pagos. El valor presente de estos pagos en el punto 124 será:

$$50\,133.78\ \frac{1-(1+0.025)^{-116}}{0.025} = \$1\,891\,004.92 = \text{deuda en } 124$$

y los intereses serán:

$$I = 1\,891\,004.92 \times 0.025 = \$47\,275.12$$

finalmente, la amortización será igual a la cuota menos intereses

$$A = 50\,133.78 - 47\,275.12 = \$2\,858.66$$

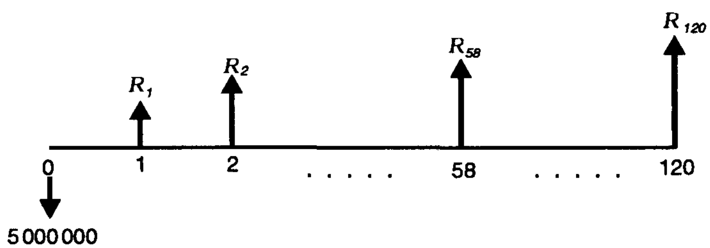
Con la información obtenida anteriormente, si queremos, podemos elaborar la tabla de amortización a partir del período 125

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
124	1 891 004.92			
125	1 888 146.26	47 275.12	50 133.78	2 858.66

Ejemplo 7

Hallar la distribución del pago 58 en una amortización de $5 millones en pagos mensuales durante 10 años. Suponga que los pagos son crecientes en un 2% y que la tasa es del 3% efectivo mensual.

Solución:



Primero debemos calcular R_1 con el fin de poder hallar el valor de R_{58} y saber qué es lo que va a repartir

$$5\,000\,000 = \frac{R_1\left[(1.02)^{120}(1.03)^{-120} - 1\right]}{0.02 - 0.03} \quad \text{entonces,}$$

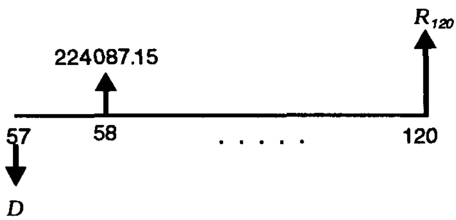
$$R_1 = \$72\,478.16$$

Para conocer el valor de R_{58} se aplica la fórmula del último término de un gradiente geométrico

$$R_n = R_1(1+G)^{n-1} \quad \text{entonces} \quad R_{58} = 72\,478.16(1+0.02)^{57} = \$224\,087.15$$

Para saber qué tanto del pago 58 se destina a intereses, es necesario conocer la deuda en el punto 57 y este valor se multiplica por la tasa de interés.

Entonces la deuda en el punto 57 será igual al valor presente en ese punto de lo que falta por pagar, pero lo que falta por pagar es un gradiente geométrico de 63 períodos (120–57 = 63) cuyo primer pago es de \$224 087.15, por lo tanto, la deuda en el período 57 será:



$$D = \frac{224\,087.15\left[(1.02)^{63}\,(1.03)^{-63} - 1\right]}{0.02 - 0.03} = \$10\,289\,273.19$$

Los intereses para el período 58 serán: 10 289 273.19 X 0.03 = \$308 678.20

Amortización = pago – interés = 224 087.15 – 308 678.20 = – \$84 591.05

Observación: Estos resultados también se pueden obtener corriendo el programa AMORT2G y observando la forma de distribuirse el pago 58.

AMORTIZACION MEDIANTE ABONO CONSTANTE A CAPITAL CON INTERES ANTICIPADO

Una de las formas más difundidas de amortización utilizada por los bancos consiste en cobrar intereses por anticipado y amortización constante al final de cada período, es de advertir que aquí, el pago periódico o cuota es variable, lo que es fijo es la amortización o abono a capital.

Por tal motivo, la amortización puede calcularse dividiendo la deuda por el número de pagos a realizarse, esto es:

$$A = \frac{D}{N}$$

Los intereses, por ser anticipados, se calculan aplicando la tasa al capital insoluto del mismo período y la cuota será igual a la amortización, mas los intereses.

Ejemplo 8

Una persona solicita a una entidad bancaria un préstamo por $500 000. Lo cancelará en pagos trimestrales, durante un año, con amortización constante e intereses del 33% nominal trimestre anticipado. Elaborar una tabla de amortización.

Solución:

$$i_a = \frac{J_a}{m} = \frac{33}{4} = 8.25\% \text{ efectivo trimestre anticipado}$$

La deuda debe ser cancelada con 4 pagos trimestrales, por lo tanto la amortización será:

$$\frac{500\,000}{4} = \$125\,000$$

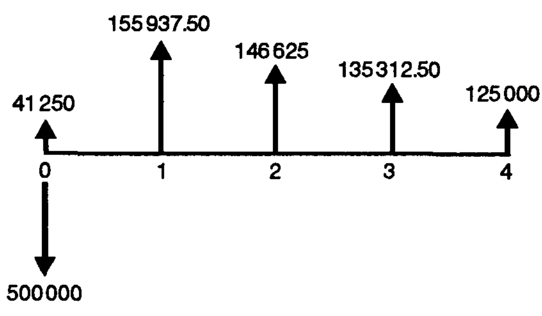
Al comienzo de la deuda, es decir en el período cero, se cobran intereses de:

$$500\,000 \times 0.0825 = \$41\,250$$

Puesto que en el período cero no hay abono a capital, la cuota será igual a los intereses es decir a $41 250. En el punto 1 de la línea de tiempo, esto es, al final del primer trimestre, debe hacerse un abono a capital de $125 000, quedando una deuda de $375 000 y, habrá que pagar los intereses por anticipado sobre $375 000, entonces, el pago total deberá ser de:

$$R_1 = 125\,000 + 375\,000 \times 0.0825 = \$155\,937.50$$

la gráfica y la correspondiente tabla se muestran a continuación.



PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	500 000.00	41 250.00	41 250.00	0.00
1	375 000.00	30 937.50	155 937.50	125 000.00
2	250 000.00	20 625.00	145 625.00	125 000.00
3	125 000.00	10 312.50	135 312.50	125 000.00
4	0.00	0.00	125 000.00	125 000.00

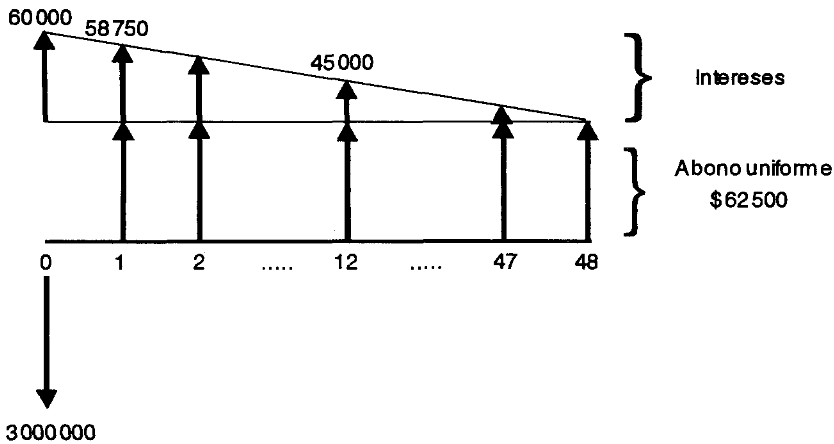
Observación: la tabla también pude ser elaborada mediante un ordenador personal usando el programa AMORT4A.

Ejemplo 9

Hallar el valor de la cuota total que debe ser pagada al final del mes 12, para amortizar una deuda de $3 millones con pago anticipado de interés y abonos mensuales constantes a capital, durante 4 años, con un interés del 2% efectivo mes anticipado.

Solución:

Se puede observar que entre el primer pago de intereses que se hace en el período cero (por ser anticipado) y el último pago de intereses (período 47) forman un gradiente lineal decreciente, mientras que el primer abono a capital se hace en el período 1 (por ser vencido).



Como los intereses forman un gradiente lineal decreciente, necesitamos calcular el valor L de decrecimiento en la siguiente forma:

Interés del período cero: 3 000 000 x 0.02 = $60 000
Deuda al final del primer período: 3 000 000 – 62 500 = $2 937 500
Interés al final del primer período: 2 937 500 x 0.02 = $58 750

Variación del interés $L = -\$1\ 250$

Ahora, necesitamos calcular los intereses al final del período 12 que corresponden al pago número 13 del gradiente:

$$R_{13} = R_1 + (n-1)L = 60\ 000 + (13-1)(-1\ 250) = \$45\ 000$$

El pago que debe hacerse al final del período 12 será igual a la suma de la cuota de interés, más la cuota de abono a capital, esto es:

$$45\ 000 + 62\ 500 = \$107\ 500$$

Otra forma de resolver el problema anterior es calculando la deuda en el punto 12 y multiplicando por la tasa.

Como en total hay 48 pagos y ya se han hecho 12, faltan 36 pagos por hacer, esto es:

$$36 \times 62\ 500 = \$2\ 250\ 000$$

intereses: $2\ 250\ 000 \times 0.02 = \$45\ 000$

valor total de la cuota: $62\ 500 + 45\ 000 = \$107\ 500$

AMORTIZACION MEDIANTE GRADIENTES ESCALONADOS

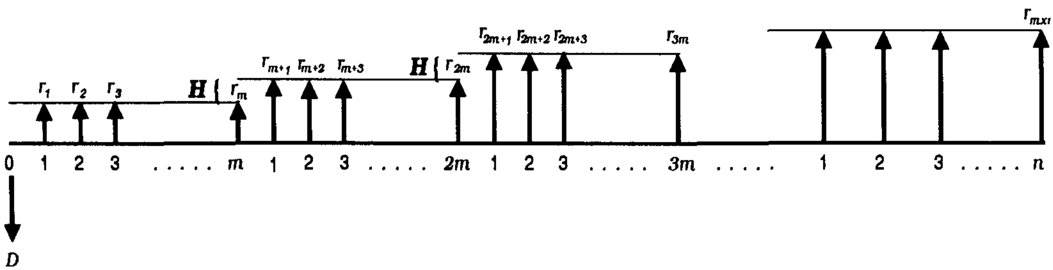
Los sistemas escalonados pueden ser lineales o geométricos y éstos a su vez pueden ser crecientes o decrecientes; mediante éste sistema se logra combinar cuotas constantes con cuotas crecientes o decrecientes. Es decir que conservaremos constante la cuota de amortización, durante un tiempo determinado, al final del cual se incrementa o decrementa, según el caso.

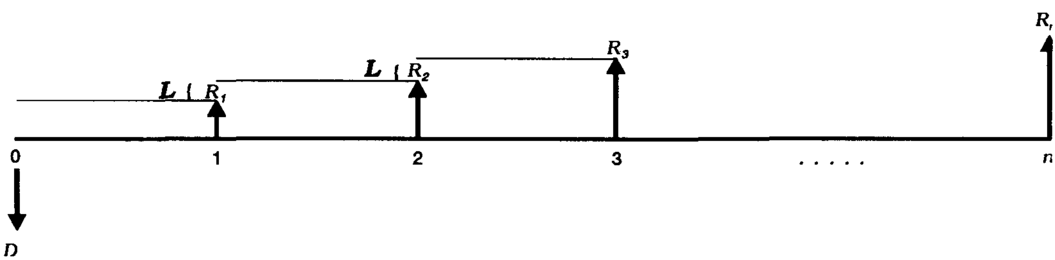
Examinaremos dos situaciones, la primera será la fusión de una cuota constante con un gradiente geométrico; la segunda será la fusión de una cuota constante con un gradiente lineal; en ambos casos será necesario construir dos gráficas. La primera corresponde a la forma como se van a pagar las cuotas y en la segunda cada serie de cuotas iguales será reemplazada por una sola cuota al final del período. A la primera gráfica se le denominará gradiente escalonado y la segunda gráfica corresponde al gradiente simple.

Las definiciones que hemos dado con anterioridad continuarán vigentes para la segunda gráfica, pero para la primera gráfica a todas las definiciones se les antepondrá el prefijo inter o el prefijo sub, por tanto el valor de cada pago lo denominaremos intercuota o subcuota y lo representaremos por "*r*" (minúscula), el tiempo que transcurre entre dos intercuotas lo denominaremos interperíodo y la tasa correspondiente al interperíodo se denominará intertasa o subtasa

El número de intercuotas que hay por cada cuota es constante y se representará por m e indicará el tamaño del escalón, además, la altura del escalón vendrá dada por la diferencia que hay entre dos intercuotas cualesquiera pero de escalones contiguos y la representaremos por H.

Es conveniente resaltar la diferencia que hay entre L y H; L es la diferencia entre 2 cuotas contiguas del gradiente simple y es constante tal como se vió en el capítulo anterior. H es la diferencia entre 2 intercuotas de escalones contiguos y es constante tal como se puede apreciar en las siguientes gráficas:





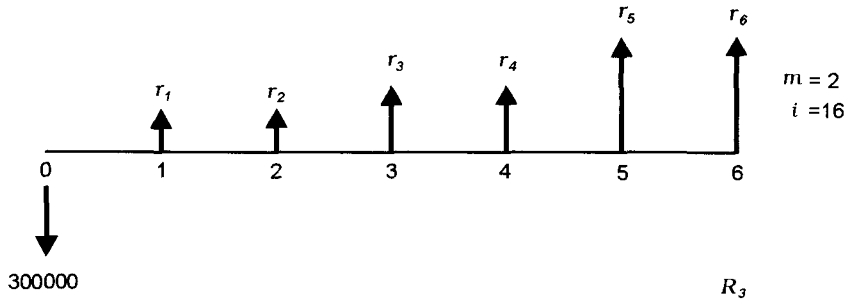
Ejemplo 10

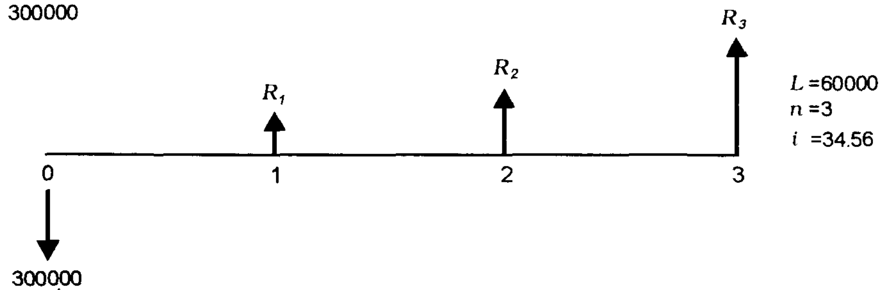
Elaborar una tabla para amortizar la suma de $300 000, con un interés del 32% nominal semestre vencido, mediante pagos semestrales, durante 3 años, bajo las siguientes condiciones:

a) la cuota anual aumenta en $60 000
b) la intercuota aumenta en $25 000 cada año
c) la intercuota aumenta un 25% cada año

Solución:

a) Primero construimos una gráfica que muestre la forma como va a ser pagada la deuda (esto corresponde a la gráfica del gradiente escalonado), en seguida, construimos la gráfica que muestra los pagos anuales crecientes linealmente en $60 000 (que corresponde al gradiente lineal simple)





Como los períodos del gradiente son anuales, debemos buscar una tasa efectiva anual equivalente al 16% efectivo semestral; entonces:

$$(1 + 0.16)^2 = (1 + i)^1 \quad \text{despejando} \quad i = 34.56\% \text{ efectivo anual}$$

Ahora planteamos la ecuación de valor del gradiente simple.

$$300\,000 = R_1 a_{\overline{3}|}34.56\% + \frac{60\,000}{0.3456}\left[a_{\overline{3}|}34.56\% - 3(1+0.3456)^{-3}\right]$$

de donde se obtiene que, $R_1 = \$127\,563.13$

$$R_2 = \$187\,563.13 \text{ y } R_3 = 247\,563.13$$

Ahora pasamos a trabajar con el gradiente escalonado, teniendo en cuenta que cada cuota de gradiente debe ser reemplazada por dos intercuotas:

El valor final de las intercuotas r_1 y r_2 debe ser equivalente a R_1; el valor final de las intercuotas se calcula con la tasa efectiva semestral del 16%, debido a que las intercuotas son semestrales y partiendo del supuesto que $r_1 = r_2$ se tiene:

$$R_1 = r_1 s_{\overline{2}|}16\% \quad \text{de donde} \quad r_1 = r_2 = \frac{127\,563.13}{2.16} = \$59\,057$$

$$R_2 = r_3 s_{\overline{2}|}16\% \quad \text{de donde} \quad r_3 = r_4 = \frac{187\,563.13}{2.16} = \$86\,834.78$$

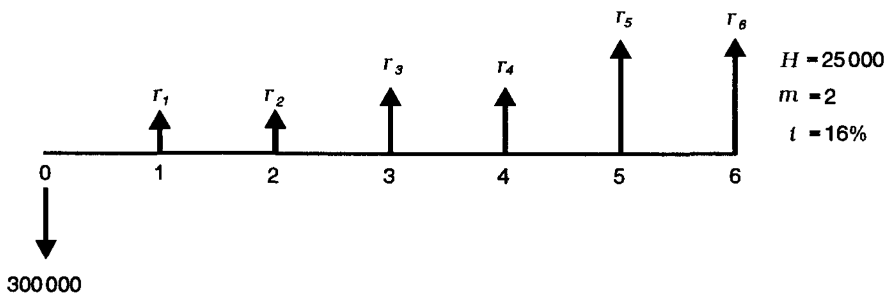
$R_3 = R_5 S\overline{2}\rceil 16\%$ de donde $\quad r_5 = r_6 = \dfrac{247\,563.13}{2.16} = \$114\,612.56$

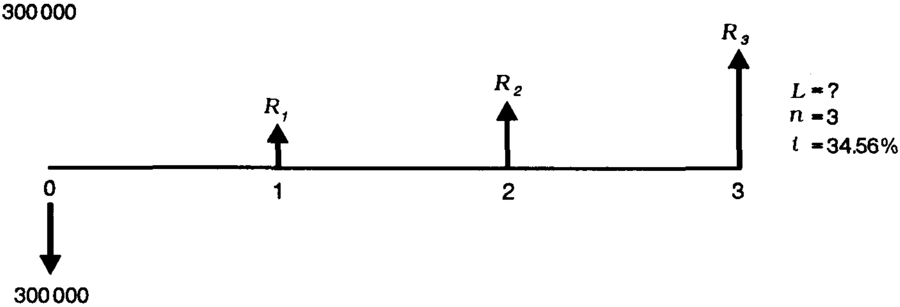
Ahora, procedemos a elaborar la tabla de amortización usando las intercuotas y una tasa del 16% efectivo semestral

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	300 000.00	–	–	–
1	288 943.00	48 000.00	59 057.00	11 057.00
2	276 116.88	46 230.88	59 057.00	12 826.12
3	233 460.80	44 178.70	86 834.78	42 656.08
4	183 979.75	37 353.73	86 834.78	49 481.05
5	98 803.95	29 436.76	114 612.56	85 175.80
6	0.00	15 808.61	114 612.56	98 803.95

Observación: la tabla anterior se puede hacer usando el programa AMORT3L.

b) Con altura del escalón de $25 000.





Observese que la diferencia entre estas dos gráficas y las dos anteriores está, en que en las dos primeras, se conocia $L = 60\,000$ y en las dos gráficas de arriba L es desconocido pero sabemos que $H = 25000$.

Lo primero que debemos hacer es calcular el valor de L, puesto que el dato que tenemos es la altura del escalón. Si la altura del escalón H es $25 000 corresponderá a la diferencia entre $r_3 - r_2$, o también $r_5 - r_4$ entonces:

$$L = R_2 - R_1$$

$$r_3 S_{\overline{2}|}16\% - r_2 S_{\overline{2}|}16\% = (r_3 - r_2) S_{\overline{2}|}16\% = H S_{\overline{2}|}16\%$$

de donde se concluye que:

$$L = 25\,000\ S_{\overline{2}|}16\% = \$54\,000$$

si reemplazamos en la fórmula tenemos:

$$300\,000 = R_1 a_{\overline{3}|}34.56\% + \frac{54\,000}{0.3456}\left[a_{\overline{3}|}34.56\% - 3(1+0.3456)^{-3}\right]$$

De donde se obtiene R_1 = $132 392.88

y r_1 = 132 392.88 $S_{\overline{2}|}16\%$, entonces $r_1 = r_2$ = $61 293.00

en igual forma se pueden calcular las otras intercuotas, sinembargo, como sabemos que crecerán en forma escalonada en $25 000 puede usarse este otro procedimiento:

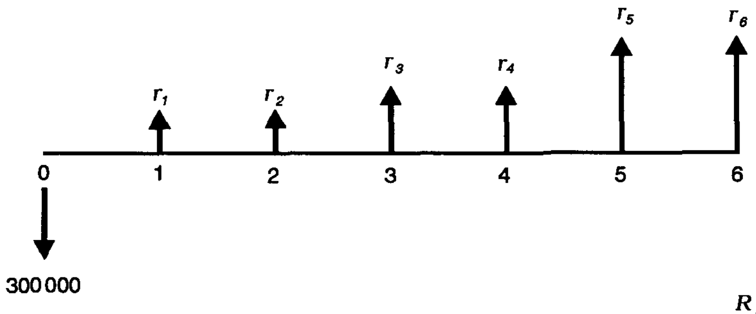
$$r_3 = r_4 = 61\,293.00 + 25\,000.00 = \$86\,293.00$$

$$r_5 = r_6 = 86\,293.00 + 25\,000.00 = \$111\,293.00$$

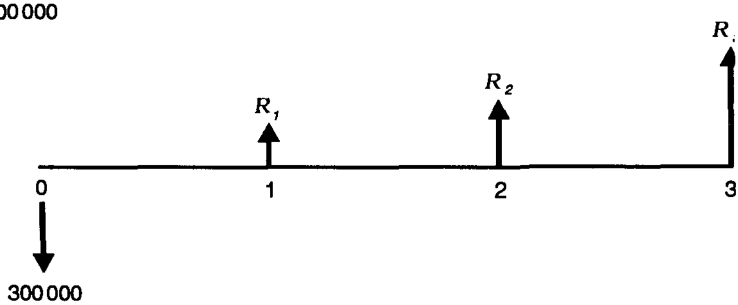
PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	300 000.00	–	–	–
1	286 707.00	48 000.00	61 293.00	13 293.00
2	271 287.12	45 873.12	61 293.00	15 419.88
3	228 400.06	43 405.94	86 293.00	42 887.06
4	178 651.07	36 544.01	86 293.00	49 748.99
5	95 942.24	28 584.17	111 293.00	82 708.83
6	0.00	15 350.76	111 293.00	95 942.24

Observación: la tabla anterior también se puede hacer usando el programa AMORT3H.

c) Crecimiento anual del gradiente 25%.



$m = 2$
$i = 16\%$



$G = 25\%$
$n = 3$
$i = 34.56\%$

Procedemos en forma similar a como lo hicimos en el caso a), pero usaremos la fórmula del gradiente geométrico; entonces:

$$300\,000 = \frac{R_1\left[(1+0.25)^3(1+0.3456)^{-3} - 1\right]}{0.25 - 0.3456}$$

de donde se obtiene que $R_1 = \$225\,920.73$

El cálculo de las intercuotas se hace en forma similar, al realizado en el literal a)

$$r_1 = r_2 = \$66\,939.48;\; r_3 = r_4 = \$83\,674.34;\; r_5 = r_6 = \$104\,592.93$$

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	300 000.00	–	–	–
1	281 060.52	48 000.00	66 939.48	18 939.48
2	259 090.72	44 969.68	66 939.48	21 969.80
3	216 870.90	41 454.52	83 674.34	42 219.82
4	167 895.90	34 699.34	83 674.34	48 975.00
5	90 166.31	26 863.34	104 592.93	77 729.59
6	0.00	14 426.62	104 592.93	90 166.31

Observación: la tabla anterior se puede hacer usando el programa AMORT3G.

AMORTIZACION EN VALOR CONSTANTE

Muchos créditos se otorgan en valor constante, lo cual significa que las cuotas y los saldos insolutos deben ser ajustados en un porcentaje, igual al índice de corrección monetaria. Es de advertir que éste índice tendrá, en el futuro, variaciones desconocidas (ver capítulo 2, sistema en valor constante), pero que pueden ser estimadas con gran aproximación, si el plazo futuro no es muy largo.

La explicación de éste sistema podrá hacerse más fácilmente a través del siguiente ejemplo:

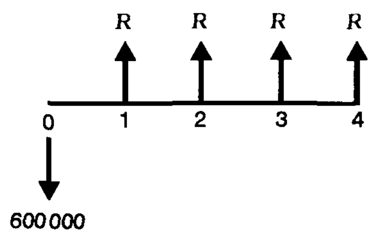
Ejemplo 11

Elaborar una tabla para amortizar la suma de $600 000 en 4 pagos anuales e iguales, pero en valor constante, suponga una tasa de interés del 8% y que:

a) la corrección monetaria permanecerá constante en el 22% durante los 4 años.
b) la corrección monetaria es del 22% en los 2 primeros años, del 24% para el tercer año y del 27% para el cuarto año.

Solución:

a) primero calculamos el valor de la cuota haciendo caso omiso de la corrección monetaria



$$600\,000 = R\, a_{\overline{4|}8\%} \qquad \text{despejando} \qquad R = \$181\,152.48$$

El valor de $181 152.48 corresponde al valor de las cuotas pero en pesos de hoy, sin embargo, cuando se vaya a pagar la primera cuota este valor se debe incrementar debido a la corrección monetaria y será:

primera cuota: $181\,152.48 \times (1+0.22) = 221\,006.03$
segunda cuota: $181\,152.48 \times (1+0.22)^2 = 269\,627.35$
tercera cuota: $181\,152.48 \times (1+0.22)^3 = 328\,945.37$
cuarta cuota: $181\,152.48 \times (1+0.22)^4 = 401\,313.35$

Así como hemos corregido el valor de las cuotas tenemos que corregir los saldos de la deuda y para ello será necesario incluir en la tabla una nueva columna que denominaremos *"capital insoluto ajustado"*, donde colocaremos, los saldos de la deuda ajustados con la corrección monetaria al final de cada período.

El saldo insoluto ajustado del período cero se obtiene al aplicarle la corrección monetaria al saldo insoluto del período cero, esto es:

$$600\,000 \times (1+0.22) = 732\,000$$

Sobre los 732 000 se calculan los intereses así:

$$732\,000 \times 0.08 = 58\,560.00$$

Si al saldo ajustado del período cero se le resta la amortización se tendrá el saldo (sin ajustar) al comienzo del primer período así:

$$732\,000 - 162\,446.03 = 569\,553.97$$

este saldo se deberá ajustar para saber cuál es la deuda al final del mismo período, entonces se tendrá:

$$569\,553.97 \times (1+0.22) = 694\,855.84$$

al saldo insoluto ajustado del período 1 se le aplica la tasa de interés para obtener los intereses así:

$$694\,855.84 \times 0.08 = 55\,588.47$$

el resto de la tabla continúa en forma similar:

PER.	SALDO AJUSTADO	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	600 000.00	732 000.00	–	–	–
1	569 553.97	694 855.84	58 560.00	221 006.03	162 446.03
2	480 816.96	586 596.69	55 588.47	269 627.35	214 038.88
3	304 579.06	371 586.45	46 927.74	328 945.37	282 017.64
4	0.00	0.00	29 726.90	401 313.35	371 586.45

b) Igual que en la parte a) calculamos el valor de la cuota haciendo caso omiso de la corrección monetaria y el valor de ésta, resulta ser en pesos de hoy, $181 152.48, y el valor de lo que se debe pagar anualmente, será:

primera cuota: 181 152.48 x (1+0.22) = 221 006.03

segunda cuota: 181 152.48 x $(1+0.22)^2$ = 269 627.35

tercera cuota: 181 152.48 x $(1+0.22)^2$ x (1+0.24) = 334 337.91

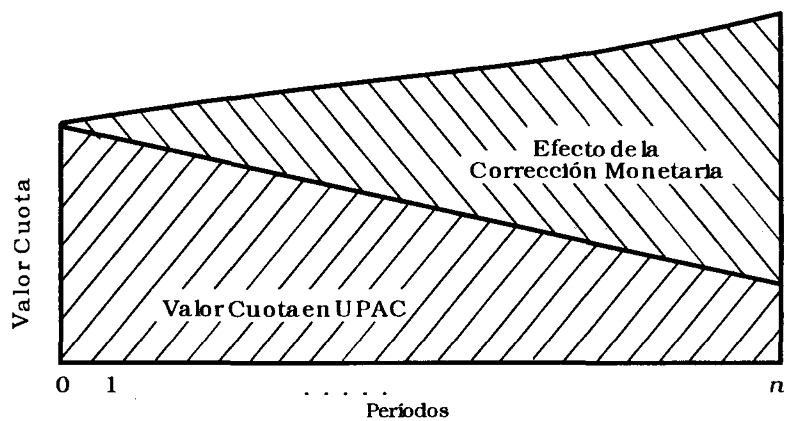
cuarta cuota: 181 152.48 x $(1+0.22)^2$ x (1+0.24) x (1+0.27) = 424 609.15

al elaborar la tabla debe tenerse en cuenta que el factor de ajuste del capital insoluto del período 2 será: (1+0.24) y el factor de ajuste del capital insoluto del período 3 será (1+0.27) y la tabla quedará así:

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	600 000.00	732 000.00	–	–	–
1	569 553.97	694 855.84	58 560.00	221 006.03	162 446.03
2	480 816.96	596 213.03	55 588.47	269 627.35	214 038.88
3	309 572.16	393 156.64	47 697.04	334 337.91	286 640.87
4	0.00	0.00	31 452.51	424 609.15	393 156.64

AMORTIZACION CON GRADIENTE ESCALONADO EN VALOR CONSTANTE.

En Colombia, algunas entidades financieras, tales como las corporaciones de ahorro y vivienda han diseñado planes de amortización, utilizando para el cálculo de las cuotas un gradiente decreciente y poniéndolo posteriormente en valor constante. Esto se hace con el fin de ir contrarrestando el aumento de la cuota debido a la corrección monetaria con la disminución de la cuota establecida en un gradiente decreciente, tal como puede observarse en la siguiente gráfica:

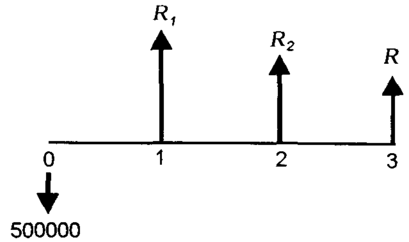


El siguiente ejemplo nos muestra lo anteriormente expuesto.

Ejemplo 12

Amortizar en valor constante la suma de $500 000 mediante 3 pagos anuales que decrecen en $20 000; suponga un interés del 10% y una tasa única de corrección monetaria del 24% efectivo anual.

Solución:



Procedemos a calcular la primera cuota en pesos de hoy.

$$500\,000 = R_1\, a_{\overline{3}|}10\% + \frac{-20\,000}{0.1}\left[a_{\overline{3}|}10\% - 3(1+0.1)^{-3}\right]$$

$$R = \$219\,788.52$$

y el valor de las cuotas ya corregidas será:

$$R_1 = 219\,788.52 \times (1+0.24)^1 = \$272\,537.76$$

$$R_2 = 199\,788.52 \times (1+0.24)^2 = \$307\,194.83$$

$$R_3 = 179\,788.52 \times (1+0.24)^3 = \$342\,789.12$$

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTI-ZACION
0	500 000.00	620 000.00	–	–	–
1	409 462.24	507 733.18	62 000.00	272 537.76	210 537.76
2	251 311.67	311 626.47	50 773.32	307 194.83	256 421.51
3	0.00	0.00	31 162.65	342 789.12	311 626.47

Ejemplo 13

Resolver el problema anterior, suponiendo que el gradiente es escalonado con pagos semestrales.

Solución:

comenzamos por hallar la tasa de interés efectiva semestral.
$(1+0.1)^1 = (1+i)^2$ entonces $i = 4.8808848\%$ efectivo semestral
ahora hallaremos la tasa de corrección efectiva semestral
$(1+0.24)^1 = (1+i)^2$ entonces $i = 11.3552873\%$ efectivo semestral

Si dividimos cada R del ejemplo anterior en dos intercuotas nos queda el valor de cada intercuota en pesos de hoy.

$$r_1 S_{\overline{2}|}4.8808848\% = \$107\,276.24$$

$$r_3 S_{\overline{2}|}4.8808848\% = \$97\,614.48$$

$$r_5 S_{\overline{2}|}4.8808848\% = \$87\,752.71$$

y las cuotas ya corregidas quedarán así:

$$r_1 = 107\,276.24 \times (1+0.113552873)^1 = \$119\,457.77$$

$$r_2 = 107\,276.24 \times (1+0.113552873)^2 = \$133\,022.54$$

$$r_3 = 97\,514.48 \times (1+0.113552873)^3 = \$134\,648.54$$

$$r_4 = 97\,514.48 \times (1+0.113552873)^4 = \$149\,938.26$$

$$r_5 = 87\,752.71 \times (1+0.113552873)^5 = \$150\,250.09$$

$$r_6 = 87\,752.71 \times (1+0.113552873)^6 = \$167\,311.42$$

y ahora procederemos a elaborar la tabla teniendo en cuenta que la tasa para ajustar el saldo será 11.3552873% y la tasa para calcular los intereses será el 4.8808848%

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	500 000.00	556 776.44	–	–	–
1	464 494.29	517 238.95	27 175.62	119 457.77	92 282.15
2	409 562.25	455 957.86	25 245.84	133 022.54	107 776.70
3	343 564.10	382 576.79	22 254.78	134 648.54	112 393.76
4	251 311.66	279 848.82	18 673.13	149 938.26	131 265.13
5	143 257.83	159 525.17	13 659.10	150 250.09	136 590.99
6	0.00	0.00	7 786.24	167 311.41	159 525.17

AMORTIZACION EN MONEDAS EXTRANJERAS

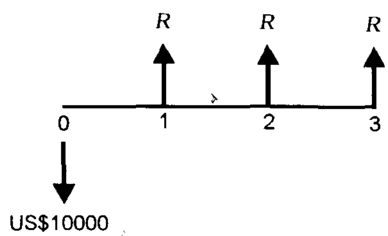
Cuando se va a amortizar con cuotas en pesos, una deuda en moneda extranjera, su metodología es idéntica a la cancelación de una deuda en valor constante, que en este caso la tasa de devaluación reemplazará a la tasa de corrección monetaria.

Ejemplo 14

Elaborar una tabla para amortizar una deuda de US$10 000 en 3 pagos anuales efectuados en pesos, con una tasa del 18% efectivo anual. Suponga que el tipo de cambio actual es US$1 = $900 y que la tasa de devaluación del peso frente al dólar es para el primer año del 15%, del 27% para el segundo año y del 13% para el tercer año.

Solución:

Primero calculamos las cuotas en dólares así:



10 000 = $R\,a_{\overline{3}|}18\%$ de donde se obtiene que R = US$4 599.24

Cada año habrá que pagar US$4 599.24, pero como la deuda se va a cancelar en pesos entonces cada año habrá que pagar más pesos por los mismos dólares, por tanto el valor en pesos de cada cuota será:

R_1 = US$4 599.24 x 900(1+0.15) = $4 760 213

R_2 = US$4 599.24 x 900(1+0.15)(1+0.27) = $6 045 471

R_3 = US$4 599.24 x 900(1+0.15)(1+0.27)(1+013) = $6 831 382

En el período 0, el saldo se ajusta con la tasa de devaluación del 15% y así se obtiene el saldo ajustado en cero 9 000 000 x (1+0.15) = 10 350 000.

Sobre este último capital se calculan los intereses al 18%

10 350 000 x 0.18 = 1 863 000

la amortizacíón será: cuota – intereses = 4 760 213 – 1 863 000 = 2 897 213

El nuevo saldo será: saldo ajustado anterior – amortización =

10 350 000 – 2 897 213 = 7 452 787

Este último saldo se ajusta con el 27% así: 7 452 787 x (1+0.27) = 9 465 039

los intereses: 9 465 039 x 0.18 = 1 703 707

amorlización: 6 045 471 – 1 703 707 = 4 341 764

Saldo: 9 465 039 – 4 341 764 = 5 123 275

Saldo ajustado: 5 123 275 x (1 + 0.13) = 5 789 301

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTI-ZACION
0	9 000 000.00	10 350 000.00	–	–	–
1	7 452 787.00	9 465 039.00	1 863 000.00	4 760 213.00	2 897 213.00
2	5 123 275.00	5 789 301 .00	1 703 707.00	6 045 471 .00	4 341 764.00
3	6.00	6.00	1 042 074.00	6 831 382.00	5 789 307.00

La diferencia en el resultado final se debe a errores de aproximación en el cálculo de las cuotas, en la liquidación de intereses y en el cálculo del saldo ajustado.

AMORTIZACIÓN CON ABONOS PACTADOS A CAPITAL

Este sistema consiste en pactar, entre deudor y acreedor, que en cada período se va a hacer un abono a capital en un porcentaje que puede ser variable, generalmente se pactan unos porcentajes pequeños al principio y mayores al final, esto, porque como los intereses van disminuyendo debido a que la deuda es cada vez menor, permite un porcentaje mayor de abono a la deuda.

Ejemplo 15

Una deuda de $30 millones a una tasa del 6% periódica, se va a cancelar mediante 5 pagos en la siguiente forma: (el porcentaje de abono a la deuda ha sido pactado inicialmente entre deudor y acreedor).

período	% abono a capital
1	5
2	10
3	20
4	30
5	35

Los abonos a capital serán:			saldo deuda
Primer período 0.05 x 30 000 000	=	1 500 000	28 500 000
Segundo período 0.1 x 30 000 000	=	3 000 000	25 500 000
Tercer período 0.2 x 30 000 000	=	6 000 000	19 500 000
Cuarto período 0.3 x 30 000 000	=	9 000 000	10 500 000
Quinto período 0.35 x 30 000 000	=	10 500 000	0
Total	=	30 000 000	

Los intereses se liquidan vencidos sobre el saldo de la deuda, por tanto los intereses serán:

en el segundo período 28 500 000 x 0.06 = $1 548 000,
en el tercer período 25 500 000 x 0.06= $1 530 000 y así sucesivamente.

El pago de cada período se obtiene sumando los intereses con la amortización, así para el primer período será: 1 800 000 + 1 500 000 = 3 300 000

La tabla total es la siguiente:

PER	SALDO	INTERÉS	PAGO	AMORTIZA
2	30 000 000			
1	28 500 000	1 800 000	3 300 000	1 500 000
2	25 500 000	1 548 000	4 548 000	3 000 000
3	19 500 000	1 530 000	7 530 000	6 000 000
4	10 500 000	1 170 000	10 170 000	9 000 000
5	0	630 000	11 130 000	10 500 000

AMORTIZACIÓN CON CUOTA FIJA Y TASA VARIABLE

Normalmente los deudores desean que sus créditos sean cancelados mediante cuotas fijas, pero por otra parte, el acreedor también desea que los créditos que otorgue no tengan una tasa fija, sobre todo cuando los plazos son mayores de un año, porque si las tasa del mercado suben ellos estarían perdiendo rentabilidad.
El sistema de amortización con cuota fija y tasa variable logra conciliar estas dos situaciones, para ello la tasa del crédito debe ser atada a algún índice que refleje el estado de la economía. En Colombia los índices más adecuados podrían ser el IPC o la DTF, siendo este último índice el más utilizado. (Generalmente para créditos se utiliza la DTF NTA y para captaciones la DTF EA.)

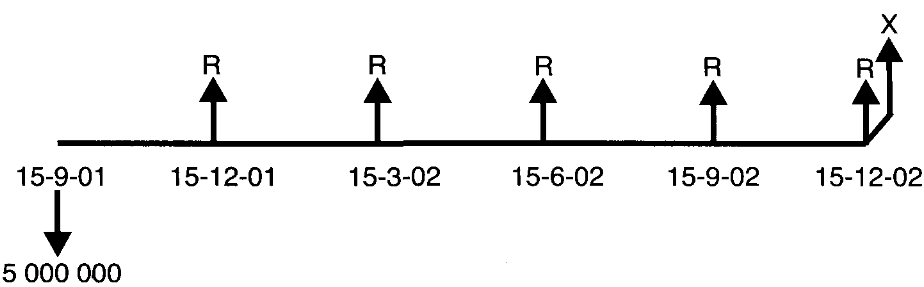
Al elaborar el plan de amortización debe usarse una tasa inicial para calcular la cuota fija, y al final del crédito se hacen los ajustes necesarios que por concepto de intereses se hayan presentado de acuerdo a los cambios que haya sufrido el índice base.

Ejemplo 16

Supongamos que el día 15 de septiembre de 2001 se concede un préstamo por $5 millones a la tasa DTF + 15 puntos, pagadero en cuotas trimestrales vencidas a un plazo de 15 meses. Elaborar la tabla de amortización:

Solución:

Primero debemos establecer la tasa con la cual calculamos la cuota fija.
EL día 15-09-2001, fecha en la cual se concede el crédito, la DTF vigente era del 13.776% NTA, entonces la tasa del crédito será: 13.776 + 15 = 28.776% NTA.
Como las cuotas son trimestrales debemos usar la tasa periódica trimestral.
28.776 ÷ 4 = 7.194% ET
La siguiente gráfica nos muestra el plan de amortización. La R representa la cuota fija y la X es el pago final que debe hacerse conjuntamente con la última cuota fija para



Cálculo de la cuota fija:

$$5\,000\,000 = R a_{\overline{5|}\,7.194\%} \text{ de donde } R = \$1\,225\,794.51$$

Los intereses se calculan con la tasa DTF NTA vigente en la fecha en que se debe pagar la cuota, por tanto, no se puede elaborar la tabla total desde un principio, sino en la medida en que se va llegando a la fecha de pago de la cuota, la tabla completa solo se podrá tener el 12-12-02

Aquí daremos las tasas vigentes en cada fecha.

FECHA	DTF NTA
15-09-01	13.776%
15-12-01	10.721%
15-03-02	10.081%
15-06-02	8.247%
15-09-02	7.586%
15-12-02	7.368%

Para calcular los intereses el 15-12-01 se debe utilizar la DTF vigente en ese día y se le agregan los puntos adicionales, las demás tasas resultantes fueron:

DTF (15-12-01) = 10.721% + 15 = 25.721% NTA = 6.430% efectiva trimestral
DTF (15-03-02) = 10.081% + 15 = 25.081% NTA = 6.270% efectiva trimestral
DTF (15-06-02) = 8.247% + 15 = 23.247% NTA = 5.812% efectiva trimestral
DTF (15-09-02) = 7.586% + 15 = 22.586% NTA = 5.647% efectiva trimestral
DTF (15-12-02) = 7.368% + 15 = 22.368% NTA = 5.592% efectiva trimestral

La amortización del 15-12-02 ($974 453.95) debe ser igual a la deuda el 15-09-02.
La forma de calcular el pago del 15-12-02 ($1 028 945.41) debe ser igual a la suma de la amortización con el interés, esto es: 974 453.95 + 54 491.46 = 1 028 945.41
La tabla queda así:

FECHA	SALDO	INTERÉS	PAGO	AMORTIZACIÓN	TASA
15-09-01	5 000 000.00				
15-12-01	4 095 705.49	321 500.00	1 225 794.51	904 294.51	6.430%
15-03-02	3 126 711.71	256 800.73	1 225 794.51	968 993.78	6.270%
15-06-02	2 082 641.68	181 724.48	1 225 794.51	1 044 070.03	5.812%
15-09-02	974 453.95	117 606.78	1 225 794.51	1 108 187.73	5.647%
15-12-02	0	54 491.46	1 028 945.41	974 453.95	5.592%

Observación: En el caso anterior, el deudor salió favorecido porque su última cuota fue inferior a las anteriores, esto se debió a que el cálculo de la cuota fija se hizo con base en una DTF mayor (7.194% ET), pero, esta tasa vino disminuyendo a lo largo del crédito, si hubiese venido aumentando entonces, el pago del 12-12-02 habría sido mayor.
Como consecuencia de lo anterior se deduce que este sistema es más equitativo porque al final se ajusta el pago de acuerdo al comportamiento de las tasas del mercado.

CAPITALIZACION

En el capítulo 3 vimos los conceptos básicos sobre la capitalización, ahora veremos otros conceptos más avanzados relacionados con el mismo tema.

CAPITALIZACION DIFERIDA

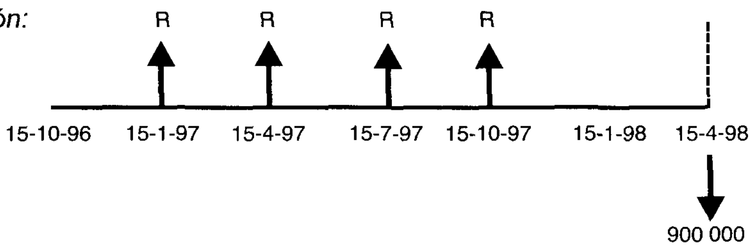
Se entiende por capitalización diferida a la capitalización que tiene uno o varios períodos en los cuales no se efectúan depósitos, pero el capital ahorrado si gana intereses. Es obvio que éstos períodos se encontrarán entre la fecha del último depósito y la fecha de retiro del capital.

Ejemplo 17

Para el día 15 de abril de 1998 debe haberse reunido la suma de $900 000 para tal fin se efectúan depósitos trimestrales de $\$R$ c/u en un fondo que paga el 32% CT. Si el primer depósito se hace el 15 de enero de 1997 y el último el 15 de octubre de 1997:

a) Calcular el valor del depósito trimestral
b) Elaborar una tabla de capitalización

Solución:



a) La ecuación de valor será:

$$R\,S_{\overline{4|}8\%}(1.08)^2 = 900\,000$$

despejando se tiene que: $R = \$171\,235.19$

b)

PER.	ACUMULADO	INTERESES	DEPOSITO	CAPITALIZACION
1	171 235.19	—	171 235.19	171 235.19
2	356 169.20	13 698.82	171 235.19	184 934.01
3	555 897.93	28 493.54	171 235.19	199 728.73
4	771 604.95	44 471.83	171 235.19	215 707.02
5	833 333.35	61 728.40	—	61 728.40
6	900 000.02	66 666.67	—	66 666.67

Observación: el error de $0.02 se debe a la aproximación en el valor de la cuota.

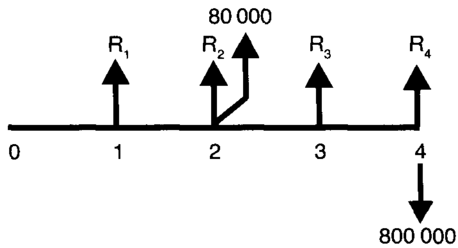
CAPITALIZACION CON CUOTAS EXTRAS PACTADAS

Las bases teóricas necesarias para elaborar la tabla son las mismas de la amortización pero poniendo la ecuación en valor final, en consecuencia no entraremos en más detalles.

Ejemplo 18

Se desean reunir $800 000 en 4 depósitos periódicos crecientes en un 20% más una cuota extra pactada de $80 000 en el período 2. Con una tasa del 20% efectiva para el período elabore la tabla de capitalización.

Solución:



En este caso se trata de un gradiente geométrico en el cual $G = i = 20\%$ por lo tanto la ecuación de valor será:

$$800\,000 = R_1(4)(1+0.2)^3 + 80\,000(1+0.2)^2$$

y despejando R se tiene:

$$R_1 = 99\,074.07$$
$$R_2 = 99\,074.07(1+0.2)^1 = 118\,888.89 + 80\,000 = 198\,888.89$$
$$R_3 = 99\,074.07(1+0.2)^2 = 142\,666.67$$
$$R_4 = 99\,074.07(1+0.2)^3 = 171\,200.00$$

PER.	ACUMULADO	INTERESES	DEPOSITO	CAPITALIZACION
1	99 074.07	—	99 074.07	99 074.07
2	317 777.77	19 814.81	198 888.89	218 703.70
3	524 000.00	63 555.56	142 666.67	206 222.23
4	800 000.00	104 800.00	171 200.00	276 000.00

FONDOS DE AMORTIZACIÓN

Un fondo de amortización es básicamente un fondo de ahorros donde se hacen depósitos periódicos que van ganando interés. Su objetivo es reunir un capital para una fecha específica con el cual se cancelará una deuda o para la adquisición de un bien o servicio.

COSTO PERIODICO DE UNA DEUDA

Cuando el fondo está destinado a cancelar una deuda y los depósitos en el fondo son uniformes entonces se denomina costo periódico de una deuda a la cantidad que debemos disponer en cada período para pagar los intereses de la deuda y hacer el depósito correspondiente en el fondo. Según la duración del período, se dice que la deuda tiene un costo trimestral, mensual, etc.

Ejemplo 19

Supongamos que tenemos que pagar la suma de \$800 000 al final de 2 años y mientras tanto debemos pagar intereses a la tasa del 3% mensual vencido. Con el fin de ir reuniendo el dinero necesario para cancelar la deuda se constituye un fondo mediante depósitos mensuales iguales que ganan un interés del 2.5% efectivo mensual. Calcular el costo mensual de la deuda.

Solución:

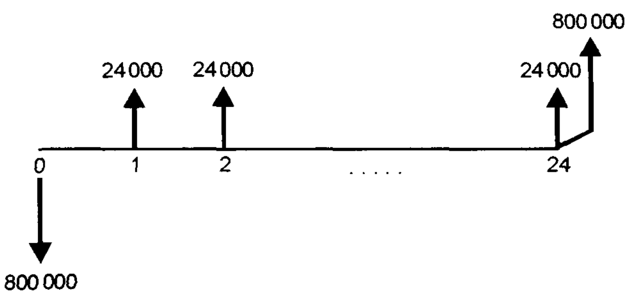
Mensualmente debemos pagar un interés de 800 000 x 0.03 = \$24 000

Por otra parte, el depósito mensual en el fondo será:

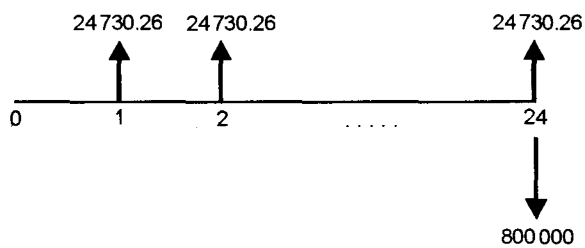
$800\,000 = R\, S_{\overline{24}|2.5\%}$ entonces R = \$24 730.26

y el costo mensual de la deuda será: 24 000 + 24 730.26 = \$48 730.26

primera gráfica



segunda gráfica



La primera gráfica representa el pago de intereses y la deuda, la segunda gráfica representa los depósitos en el fondo y el capital reunido, al final de los 2 años se cancela el fondo y con ese dinero se paga la deuda.

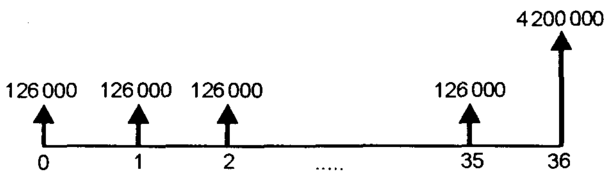
Observación: cuando la capitalización se hace mediante cuotas crecientes, por ejemplo con un gradiente, entonces el costo de la deuda de cada período es variable.

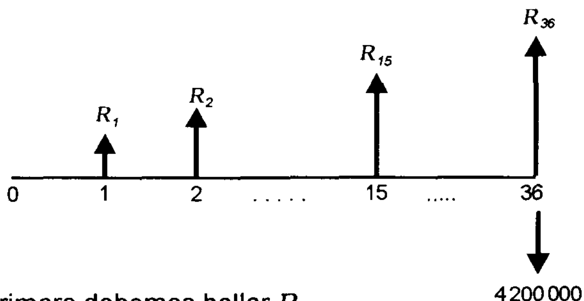
Ejemplo 20

Se adquiere una propiedad a un costo de seis millones de pesos dando una cuota inicial del 30% y el saldo será pagadero al final de 3 años, mientras tanto se pagarán intereses por mes anticipado al 3%. Con el objeto de cancelar la deuda a su vencimiento, se constituye un fondo que paga el 33% CM mediante depósitos mensuales ordinarios crecientes en $2 000. Determinar el costo del período 15.

Solución:

Interés: $4\ 200\ 000 \times 0.03 = \$126\ 000$





Para hallar R_{15} primero debemos hallar R_1

$$4\ 200\ 000 = R_1 s_{\overline{36|}2.75\%} + \frac{2\ 000}{0.0275}\left[s_{\overline{36|}2.75\%} - 36\right]$$

de donde se obtiene que: $R_1 = \$40\ 531.73$

como $R_n = R_1 + (n-1)L$ entonces:

$$R_{15} = 40\ 531.73 + (15-1)(2\ 000) = \$68\ 531.73$$

Esto significa que en el período 15 el deudor debe disponer de $194 531.73 de los cuales $126 000 los dedica al pago de intereses y el resto ($68 531.73) se deposita en el fondo.

Observación: el costo de la deuda en el período 36 será únicamente el valor de la cuota R_{36} que es igual a $110 531.73

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $300 000 en 4 pagos trimestrales uniformes con una cuota extraordinaria de $50 000 en el período 3, suponga una tasa del 10% efectivo para el período.

   Respuesta parcial: cuota ordinaria $82 790.35

2) Un automóvil cuesta $4 000 000, se puede financiar al 60% para ser pagado en cuotas mensuales durante 3 años con un interés del 36% CM. Hallar la cuota mensual.

   Respuesta: $109 929.11

3) Si en el problema anterior se ofrecen cuotas extraordinarias cada 6 meses del doble de la cuota ordinaria. ¿Cuál sería el valor de la cuota ordinaria?

   Sugerencia: observe que hay dos anualidades, una simple y otra del tipo general.

   Respuesta: $83 966.95

4) Elaborar una tabla para amortizar $800 000 en 5 pagos semestrales mediante el sistema de abono constante a capital y con una tasa del 30% nominal semestre anticipado.

5) Hallar el valor de la cuota de amortización de una deuda de $1 000 000 la cual va a ser cancelada en las siguientes condiciones:

   a) número de pagos ordinarios 4;
   b) número de períodos de gracia muertos 2
   c) tasa 10% efectiva para el período
   e) elabore la tabla de amortización

   Respuesta: $381 719.70

6) Resolver el problema anterior suponiendo que el plazo de gracia es de cuota reducida (plazo en el que solo se pagan los intereses). Elabore la tabla de amortización.

   Respuesta: $315 470.80

7) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $300 000, bajo las siguientes condiciones:

a) número de pagos ordinarios: 5;
b) plazo de gracia muerto: 1 período;
c) cuotas extraordinarias: 2; la primera de $35 000, en el período 3 y la segunda de $50 000 en el período 5;
d) tasa 8% efectiva para el período.

Respuesta: $64 427.83

8) El día primero de abril de 1986, se contrae una deuda de $200 000, para ser pagada en cuotas trimestrales ordinarias; la primera se efectuará el primero de octubre de 1986 y la última el primero de julio de 1987, más una cuota extraordinaria de $50 000, el primero de enero de 1987. Suponiendo una tasa del 36% nominal trimestre vencido, elaborar la tabla de amortización.

Respuesta parcial: valor de la cuota ordinaria $54 299.76

9) Una deuda de $1 millón viene siendo amortizada en pagos trimestrales durante 2 años, con un interés del 42% CT.Inmediatamente después de efectuar el tercer pago trimestral el deudor hace un abono extraordinario no pactado de $300 000 y solicita que le presenten un plan de amortización tomando en cuenta dos alternativas, la primera, abonar a capital acortando el tiempo y manteniendo inalteradas las cuotas trimestrales y la segunda, abonar a capital y reliquidar la cuota dejando inalterado el número total de pagos. Elabore una tabla para la amortización del saldo en cada caso.

Respuesta:

primera alternativa:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
3	414 396.63	-	-	-
4	267 039.00	43 511.65	190 869.28	147 357.63
5	104 208.81	28 039.09	190 869.28	162 830.19
6	0.00	10 941.93	115 150.74	104 208.81

segunda alternativa:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
3	414 396.63	-	-	-
4	347 191.66	43 511.65	110 716.63	67 204.97
5	272 930.16	36 455.12	110 716.63	74 261.50
6	190 871.20	28 657.67	110 716.63	82 058.95
7	100 196.06	20 041.48	110 716.63	90 675.14
8	0.00	10 520.57	110 716.63	100 196.06

10) Elaborar una tabla de capitalización para reunir la suma de $350 000 en cuatro depósitos ordinarios de *$R* c/u, más un depósito extraordinario de $60 000, que se hará conjuntamente con el tercer depósito ordinario. Suponga una tasa del 9% efectivo para el período.

Respuesta: $62 233.10

11) Elaborar una tabla, para que el día primero de septiembre de 1988 se hayan reunido $500 000 en las siguientes condiciones:

a) depósitos semestrales ordinarios de *$R* c/u; el primer depósito se efectuará el primero de marzo de 1986; el último depósito se efectuará el primero de septiembre de 1987;
b) se hará un depósito extraordinario de $70 000 el primero de marzo de 1987;
c) tasa 30% CS.

Respuesta:

FECHA	PER.	ACUMULADO	INTERES	DEPOSITO	INCREMENTO
1-3-86	1	59 593.33	–	59 593.33	59 593.33
1-9-86	2	128 125.66	8 939.00	59 593.33	68 532.33
1-3-87	3	276 937.84	19 218.85	129 593.33	148 812.18
1-9-87	4	378 071.85	41 540.68	59 593.33	101 134.01
1-3-88	5	434 728.63	56 710.78	0.00	56 710.79
1-9-88	6	500 000.00	65 217.37	0.00	65 217.37

12) Una deuda de $2 millones está siendo amortizada mediante pagos mensuales uniformes, durante 15 años, con un interés del 27.6% CM. Determinar qué parte del pago número 64 se utiliza a pagar intereses y cuánto a amortización.

Respuesta: intereses $43 510.12; amortización, $3 270.52

13) Se están reuniendo $2 millones, mediante depósitos mensuales uniformes durante 5 años, en un fondo que paga el 30% CM. Determinar cuál es el crecimiento del fondo, por concepto de intereses en el período 41.

Respuesta: $24 781.88

14) Una deuda de $1 000 000 está siendo amortizada en pagos mensuales durante 15 años, con intereses al 30% CM. Elaborar una tabla de amortización que muestre, únicamente, los períodos 108,109 y 110.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
107	845 045.48			
108	840 874.59	21 126.14	25 297.01	4 170.87
109	836 599.44	21 021.86	25 297.01	4 275.15
110	832 217.42	20 914.99	25 297.01	4 382.02

15) Se está reuniendo un capital de $1 000 000, mediante depósitos mensuales iguales durante 8 años en un fondo que paga el 30% CM. Además, se ha acordado que, al momento de efectuar el depósito ordinario número 56, se hará un depósito extraordinario de $70 000. Construir una tabla que muestre, únicamente los períodos 55, 56 y 57.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	DEPOSITO	CAPITALIZACION
54	233 832.52			
55	241 770.66	5 845.81	2 902.33	7 938.14
56	319 907.25	6 044.27	72 092.33	78 136.60
57	329 997.27	7 997.68	2 092.33	10 090.01

16) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $600 000 en 6 pagos trimestrales, con cobro anticipado de intereses del 8.5% trimestral y abonos vencidos e iguales a capital.

17) Hallar el valor de la cuota total (intereses + amortización) que debe pagarse al final del mes 20 en una amortización de $3 millones en pagos mensuales, durante 3 años, con cobro anticipado de intereses y abono a capital mensuales e iguales. Suponga una tasa del 2.5% efectivo mensual anticipado.

Respuesta: $116 666.73

18) Hallar la primera cuota de amortización necesaria, para cancelar una deuda de $100 000 en las siguientes condiciones:

a) plazo de gracia muerto: 2 períodos;
b) número de cuotas ordinarias: 4;
c) cuota extraordinaria pactada de $20'000, en el período 4 (coincide con el segundo pago ordinario);
d) tasa 10% efectivo para el período;
e) característica de la cuota ordinaria:

e_1) creciente lineal en $6 000
e_2) decreciente lineal en –$6 000

Respuestas: e_1) $24 670.57; e_2) $41 244.58

19) Hallar la primera cuota de amortización necesaria, para cancelar una deuda de $100 000 en las siguientes condiciones:

a) plazo de gracia muerto: 2 períodos;
b) número de cuotas ordinarias: 4;
c) cuota extraordinaria pactada de $20 000, en el período 4 (coincide con el segundo pago ordinario);
d) tasa 10% efectivo para el período;
e) característica de la cuota ordinaria:
e_1) creciente geométrica en 20%
e_2) decreciente geométrico en – 20%

Respuestas: e_1) $41 244.58; e_2) $25 095.34

20) Elaborar una tabla en períodos anuales, que muestre la amortización de $300 000 en 4 pagos, pero cada pago se efectúa cada 2 años y son crecientes en un 30%. Suponga una tasa del 24% efectivo anual.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	300 000.00	–	–	–
1	372 000.00	72 000.00	0.00	–72 000.00
2	315 520.48	89 280.00	145 759.52	56 479.52
3	391 245.40	75 724.92	0.00	-75 724.92
4	295 656.92	93 898.89	189 487.37	95 588.48
5	366 614.58	70 957.66	0.00	–70 957.66
6	208 268.50	87 987.50	246 333.58	158 346.08
7	258 252.94	49 984.44	0.00	–49 984.44
8	0.00	61 980.72	320 233.66	258 252.94

21) Elaborar una tabla de amortización para cancelar una deuda de $700 000 en 3 años mediante pagos semestrales bajo las siguientes condiciones: tasa de interés 28% CS. dentro de cada año, el pago permanece constante pero; cada año:

a) el valor del pago aumenta un 20%
b) el valor del pago disminuye un 20%

Respuestas: a)

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	644 862.59	98 000.00	153 137.41	55 137.41
2	582 005.94	90 280.76	153 137.41	62 856.65
3	479 721.88	81 480.83	183 764.89	102 284.06
4	363 118.05	67 161.06	183 764.89	116 603.83
5	193 436.71	50 836.53	220 517.87	169 681.34
6	0.00	27 081.16	220 517.87	193 436.71

b)

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	584 863.05	98 000.00	213 136.95	115 136.95
2	453 606.93	81 880.83	213 136.95	131 256.12
3	346 602.34	63 504.97	170 509.56	107 004.59
4	224 617.11	48 524.33	170 509.56	121 985.23
5	119 655.86	31 446.40	136 407.65	104 961.25
6	0.00	16 751.79	136 407.65	119 655.86

22) Resuelva el problema anterior suponiendo que:

a) el pago global anual aumenta en \$15 000 (esto equivale a decir que: el valor de los pagos del gradiente aumentan en \$15 000 pero la diferencia entre las intercuotas no es de \$15 000)
b) el pago global anual disminuye en \$15 000

Respuestas: a)

PER.	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	623 788.35	98 000.00	174 211.65	76 211.65
2	536 907.07	87 330.37	174 211.65	86 881.29
3	430 853.06	75 166.99	181 221.00	106 054.01
4	309 951.49	60 319.43	181 221.00	120 901.57
5	165 114.35	43 393.21	188 230.35	144 837.14
6	0.00	23 116.00	188 230.35	165 114.35

b)

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	612 191.16	98 000.00	185 808.84	87 808.84
2	512 089.08	85 706.76	185 808.84	100 102.08
3	404 982.06	71 692.47	178 799.49	107 107.02
4	282 880.06	56 697.49	178 799.49	122 102.00
5	150 693.12	39 603.21	171 790.15	132 186.94
6	0.00	21 097.03	171 790.15	150 693.12

23) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $900 000 en pagos semestrales durante 3 años, con la condición de aumentar cada año el valor de los pagos en $60 000 pero dentro de cada año el valor de los pagos permanecen constantes. Utilice una tasa del 38% CS.

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	900 000.00	–	–	–
1	853 410.44	171 000.00	217 589.56	46 589.56
2	797 968.86	162 147.98	217 589.56	55 441.58
3	671 993.38	151 614.08	277 589.56	125 975.48
4	522 082.56	127 678.74	277 589.56	149 910.82
5	283 688.69	99 195.69	337 589.56	238 393.87
6	0.00	53 900.86	337 589.56	283 688.70

24) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $800 000 en pagos semestrales durante 3 años, pero que crecen cada año en $50 000, con una tasa del 42% nominal semestre vencido.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	800 000.00	–	–	–
1	759 028.06	168 000.00	208 971.94	40 971.94
2	709 452.01	159 395.89	208 071.94	49 576.05
3	599 464.99	148 984.92	258 971.94	109 987.02
4	466 380.70	125 887.65	258 971.94	133 084.29
5	255 348.71	97 939.95	308 971.94	211 031.99
6	0.00	53 623.23	308 971.94	255 348.71

25) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $100 000 en dos años, mas un período de gracia muerto de 6 meses, con intereses al 30% CM, mediante pagos trimestrales iguales, pero con crecimiento anual de la cuota del 21% (escalonado). Además, se efectuará un pago extraordinario de $20 000, al final del mes 18.

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	100 000.00	–	–	–
1	107 689.06	7 689.06	0.00	– 7 689.06
2	115 969.34	8 280.28	0.00	– 8 280.28
3	108 929.75	8 916.95	15 956.54	7 039.59
4	101 348.89	8 375.68	15 956.54	7 580.86
5	93 185.13	7 792.78	15 956.54	8 163.76
6	64 393.65	7 165.06	35 956.54	28 791.48
7	50 037.51	4 951.27	19 307.41	14 356.14
8	34 577.52	3 847.42	19 307.41	15 459.99
9	17 928.80	2 658.69	19 307.41	16 648.72
10	0.00	1 378.61	19 307.41	17 928.80

26) Elaborar una tabla para capitalizar $200 000 en 3 años, más un período de gracia de un año, mediante depósitos semestrales ordinarios que crezcan cada año un 25%, pero dentro de cada año el valor de los depósitos es constante; además se efectuará un depósito extraordinario de $40 000 en el período 3. Suponga un interés del 32% CS.

Respuesta:

PER.	ACUMULADO	INTERES	DEPOSITO	INCREMENTO
1	7 894.12	–	7 894.12	7 894.12
2	17 051.30	1 263.06	7 894.12	9 157.18
3	69 647.17	2 728.21	49 867.66	52 495.87
4	90 658.58	11 143.55	9 867.66	21 011.21
5	117 498.29	14 505.34	12 334.57	26 839.91
6	148 632.59	18 799.73	12 334.57	31 134.30
7	172 413.80	23 781.21	0.00	23 781.21
8	200 000.00	27 586.20	0.00	27 586.20

27) Desea amortizarse la suma de $5 millones, en cuotas mensuales, durante 20 años, con la condición de aumentar cada cuatro años la cuota mensual en un 50%. Si suponemos una tasa del 32% efectivo anual, calcular el valor del primero y del último pago.

Respuestas: $90 966.36 y $460 517.19

28) Una deuda de $2 millones está siendo amortizada en pagos mensuales, durante 15 años, con intereses al 30% CM y crecimiento mensual de la cuota de $300. Hallar la distribución del pago 105, entre intereses y abono a capital.

Respuesta: intereses: $66 323.59; amortización: $4 111.98

29) Se está reuniendo la suma de $5 millones mediante depósitos mensuales durante 8 años. Si los depósitos aumentan de valor cada mes $200 y suponiendo un interés del 27% CM:

a) calcular el capital reunido hasta el período 63
b) ¿qué tanto del incremento al fondo en el período 64 es debido a intereses?.

Respuestas: a) $1 840 961.97; b) $41 421.64

30) Una persona se compromete a cancelar una deuda de $400 000, con intereses al 36% CT, mediante pagos trimestrales durante 10 años. Cada año, el valor de las cuotas crece un 15%, pero dentro de cada año la cuota no varía. Determinar el valor de la cuota número 14, su distribución entre intereses y abono a capital y el saldo insoluto, inmediatamente después de haberse efectuado el pago número 14.

Respuestas: valor de la cuota: $39 942; intereses: $48 590.21;
amortización: –$8 648.22; saldo: $548 539.49

31) Una deuda de $2 millones está siendo amortizada en pagos mensuales, durante 15 años, con la condición de incrementar la cuota cada año en un 18% pero dentro de cada año la cuota permanece constante. Suponiendo un interés del 27% CM, determinar:

a) el valor del primer pago;
b) el valor del último pago;
c) la deuda, inmediatamente después de haber efectuado el pago 100;
d) la distribución del pago 101.

Respuestas: a) $23 706.16; b) $240 552.22; c) $4 976 930.72;
d) interés: $111 980.94, amortización: – $22 872.81

32) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $700 000, en pagos semestrales, con las siguientes condiciones:

a) el primer año se otorga, como período de gracia muerto (significa que no hay pagos y los intereses que se causan se abonan a capital)
b) el segundo año se otorga como período de gracia con cuota reducida(significa que solo, se pagan intereses pero no hay abono a capital)
c) en los siguientes 2 años se efectuarán pagos semestrales ordinarios crecientes en un 15%

d) debe incluirse una cuota extra de $50 000 en el período 6 (la cuota extra coincide con el segundo pago ordinario)
e) tasa de interés: 30% CS.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	805 000.00	105 000.00	0.00	–105 000.00
2	925 750.00	120 750.00	0.00	–120 750.00
3	925 750.00	138 862.50	138 862.50	0.00
4	925 750.00	138 862.50	138 862.50	0.00
5	809 328.94	138 862.50	255 283.56	116 421.06
6	587 152.18	121 399.34	343 576.10	222 176.76
7	337 612.50	88 072.83	337 612.51	249 539.68
8	0.00	50 641.89	388 254.39	337 612.50

33) Resolver el problema anterior, suponiendo que el crecimiento es escalonado anual del 15%.

Respuesta:

PER.	SALDO	INTERES	PAGO	AMORTIZACION
0	700 000.00	–	–	–
1	805 000.00	105 000.00	0.00	–105 000.00
2	925 750.00	120 750.00	0.00	–120 750.00
3	925 750.00	138 862.50	138 862.50	0.00
4	925 750.00	138 862.50	138 862.50	0.00
5	772 465.39	138 862.50	292 147.11	153 284.61
6	546 188.09	115 869.81	342 147.11	226 277.30
7	292 147.12	81 928.21	335 969.18	254 040.97
8	0.00	43 822.06	335 969.18	292 147.12

34) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $800 000, en valor constante, mediante pagos trimestrales, durante 15 meses, suponiendo un interés del 30% CT y que el índice de corrección monetaria permanecerá constante en el 8% efectivo trimestral.

Respuesta:

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTI-ZACION
0	800 000.00	864 000.00	–	–	–
1	715 249.68	772 469.65	64 800.00	213 550.32	148 750.32
2	599 770.52	647 752.17	57 935.22	230 634.35	172 699.13
3	447 248.49	483 028.37	48 581.41	249 085.09	200 503.68
4	250 243.60	270 263.09	36 227.13	269 011.90	232 784.77
5	0.00	0.00	20 269.76	290 532.85	270 263.09

35) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $600 000, en cuatro pagos trimestrales decrecientes en $50 000; pero en valor constante, utilice un interés del 8% CT y suponga que la tasa de corrección monetaria permanecerá constante en el 22% CT.

Respuesta:

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTI-ZACION
0	600 000.00	633 000.00	–	–	–
1	401 599.76	423 687.75	12 660.00	244 060.24	231 400.24
2	230 329.20	242 997.31	8 473.75	201 832.30	193 358.55
3	93 636.25	98 786.24	4 859.95	154 221.01	149 361.06
4	0.00	0.00	1 975.69	100 761.93	98 786.24

36) Elaborar una tabla para amortizar en valor constante la suma de $600 000, en 3 pagos anuales que decrecen anualmente en un 20%. Suponga que la corrección monetaria permanece constante en el 22% efectivo anual y que se cobra un interés del 10% efectivo anual.

Respuesta:

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERES	PAGO	AMORTI-ZACION
0	600 000.00	732 000.00	–	–	–
1	448 316.48	546 946.11	73 200.00	353 883.52	283 683.52
2	253 322.41	309 053.34	54 694.61	348 318.31	293 623.70
3	0.00	0.00	30 905.33	339 958.67	309 053.34

37) Suponga que en el problema anterior el gradiente es escalonado, con pagos semestrales.

Respuesta:

PER.	SALDO	SALDO AJUSTADO	INTERÉS	PAGO	AMORTIZACION
0	600 000.00	662 721.66	0.00	0.00	0.00
1	537 363.45	593 537.33	32 346.68	157 704.89	125 358.21
2	448 316.46	495 181.72	28 969.87	174 190.74	145 220.87
3	365 431.00	403 631.73	24 169.25	153 919.97	129 750.72
4	253 322.37	279 803.70	19 700.80	170 010.16	150 309.36
5	143 234.71	158 207.91	13 656.90	150 225.89	136 568.99
6	0.00	0.00	7 721.95	165 929.92	158 207.91

38) Un préstamo por valor de $3 millones a 15 años con una tasa del 2.75% efectivo mensual va ser amortizado en pagos mensuales durante 15 años con la condición de aumentar anualmente la cuota mensual en un 18% durante los primeros 8 años y de ahí en adelante las cuotas mensuales crecerán anualmente en un 12%. Calcular el valor de las cuotas durante el primer año y el valor da las cuotas durante el noveno año.

Respuestas: cuota mensual primer año $49 900.69
cuota mensual noveno año $178 032.24

39) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $12 millones si el crédito es concedido por una entidad financiera que cobra la tasa Libor + 8 puntos, para ser pagado en cuatro cuotas trimestrales vencidas en dólares. Al momento de otorgar el crédito se conoce la siguiente información:

a) Cambio US$1 = $3 000
b) Tasa de devaluación proyectada 7% EA, se asume que la devaluación es uniforme a través del año.
c) Tasa Libor = 2% EA, se presume que no va a variar.

Elabore una tabla que como mínimo muestre, en pesos, el saldo y el pago.
Trabajar cualquier tasa con 5 decimales.
Recuerde que cuando sume dos tasa efectivas debe usar la tasa combinada.

Respuesta:

PER	VALOR US$ 1 =	SALDO US$	SALDO $	INTERÉS US$	PAGO US$	PAGO $	AMORTIZA US$
0	3,000.00	4,000.00	12,000,000.00	.			
1	3,051.18	3,035.98	9,263,318.78	97.94	1061.96	3,240,226.33	964.02
2	3,103.22	2,048.36	6,356,527.29	74.34	1061.96	3,295,499.73	987.62
3	3,156.16	1,036.56	3,271,544.46	50.16	1061.96	3,351,716.02	1 ,01 1.80
4	3,210.00 -	0.02 -	65.96	25.38	1061.96	3,408,891.26	1 ,036.58

40) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $3 millones a la tasa del 18% NS a un plazo de 3 años con cuotas semestrales por el sistema de abonos pactados a capital.

Se ha pactado que en cada uno de los semestres 1 y 2 se amortiza el 10% de la deuda.

En cada uno de los semestres 3 y 4 se amortiza el 20% de la deuda.

En cada uno de los semestres 5 y 6 se amortiza el 25% de la deuda.

Respuesta parcial: el valor de los pagos será:

$270 000, 243 000, 216 000, 175 500, 135 000, 67 500

41) Elaborar una tabla para amortizar la suma de $4 millones en pagos trimestrales durante un año por el sistema de cuota fija con tasa variable. Tasa de interés DTF +14 puntos.

En el momento de otorgar el crédito la DTF = 7.5% NTA.

A los 3 meses la DTF = 7.7% NTA
A los 6 meses la DTF = 7.9% NTA
A los 3 meses la DTF = 8.3% NTA
A los 3 meses la DTF = 7.8% NTA

Trabajar las tasa con 5 decimales

Respuesta parcial: Cuota fija $1 145 927.48, valor del último pago $1 158 346.26.

42) Una empresa necesita cambiar de vehículo cada 3 años dando en parte de pago el vehículo usado y el resto se cancelará al contado con dineros provenientes de un fondo que paga el 33% nominal mes vencido. Calcular el valor del depósito mensual uniforme necesario suponiendo las siguientes condiciones:

a) el precio actual, del vehículo nuevo es de $6 millones y cada 3 meses aumenta de precio un 4.8%.
b) el vehículo, que se compre actualmente, a pesar de su uso y debido a procesos inflacionarios sube de precio cada 3 meses a razón del 3.2%.

Respuesta: $29 491.33

43) Suponga que en el ejemplo anterior el fondo paga el 32% nominal trimestre vencido y se constituye mediante depósitos trimestrales crecientes en un 8%. Hallar el depósito en el fondo del primero y del último trimestre.

Respuestas: $63 452.34 y $147 947.94

44) Actualmente se contrae una deuda de $600 000 para ser cancelada al final de 2 años y mientras tanto se deberá pagar un interés del 40% CT. A fin de dar cumplimiento al pago de la deuda en su debida oportunidad se constituye un fondo de amortización que paga el 36% CT mediante depósitos trimestrales iguales.

a) calcular el costo trimestral de la deuda.
b) si en lugar de constituir el fondo de amortización se hace una amortización usando como cuota de amortización el costo trimestral de la deuda. ¿A qué tasa nominal capitalizable trimestralmente se estaría amortizando la deuda?

Respuestas: a) $114 404.13 b) 41.89% CT.

45) En el problema anterior. ¿Qué tanto del incremento al fondo en el período 7 es debido a intereses?

Respuesta: $36 837.38

46) Elabore una tabla para el fondo.

47) Una persona deposita $1 000 000 en un fondo de amortización que paga el 21% CM. Un año después comenzó a depositar en la misma cuenta $20 000 mensuales. ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar para completar como mínimo $2 000 000?

Respuesta: 29 meses.

48) Una persona depositó $10 000 trimestrales en un fondo de capitalización que pagaba el 28% CT. Estos depósitos los hizo durante 5 años. A partir de ahí comenzó a retirar por semestre vencido la suma de $50 000. ¿Durante cuánto tiempo podrá retirar?

Respuesta: infinitos retiros

49) Usted desea capitalizar $10 millones. Para eso abre una cuenta hoy con $100 000 en un fondo de capitalización que paga el 2% efectivo mensual y piensa depositar en esa cuenta $5 000 al final de cada mes. ¿Cuánto tiempo tendrá que estar haciendo estos abonos para que como mínimo alcance la meta que se propone?

Respuesta: 171 meses

50) Una deuda de $1 000 000 con intereses al 20% CS, se va a cancelar en pagos semestrales vencidos durante 10 años. Inmediatamente después de efectuar el pago 12 deudor y acreedor acuerdan suspender los pagos semestrales y cancelar el saldo de la deuda de un solo contado a su vencimiento con sus respectivos intereses. Para dar cumplimiento al pago se constituye un fondo de amortización mediante depósitos mensuales iguales que ganan un interés del 2.8% efectivo mensual.

a) ¿Cuáles son los derechos del deudor y acreedor inmediatamente después del pago 12?
b) ¿Cuál debe ser el valor de los depósitos en el fondo?

Respuestas: a) deudor $373 361.60; acreedor $626 638.40; b) $13 606.66

Aplicación a los sistemas

CAPITULO 8

INTRODUCCION

En el capítulo anterior se estudió y analizó la manera de elaborar las tablas, ahora veremos la forma de hacerlo empleando el ordenador. Las tablas de amortización y capitalización son procesos rutinarios fáciles de hacer manualmente siempre y cuando el número de períodos sean pocos, pero cuando el número de períodos es demasiado grande se hace indispensable el uso de los ordenadores.

Adjunto al presente libro viene un CD con programas de amortización elaborados en Excel para la versión del OFICE 2000. Este programa no funciona en las versiones anteriores, por lo cual, los diskette que venía en las ediciones anteriores de este mismo libro serán de gran utilidad si se desea trabajar en Lotus, en Quattro PRO, o en Excel versión 5.0 o anteriores. Los ejemplos 1, 2 y 3 muestran la forma de correr los programas en estas versiones.

Para correr las macros del CD que viene con la séptima edición basta con oprimir CTRL.+A y la información necesaria va siendo solicitada.

Los programas elaborados en Lotus 1-2-3 tienen la extensión ".wk1" y los elaborados en Quattro Pro tienen la extensión ".wq1", el contenido de los archivos para ambas versiones son exactamente iguales, simplemente se hizo así para dar más opciones al estudiante dependiendo de la disponibilidad del *software* que se disponga.

Los programas de amortización se representan genéricamente por AMORT seguido de un número y las más de las veces le seguirá una letra, los cuales servirán de identificación, así por ejemplo, la tabla de amortización con cuota fija tiene el nombre de AMORT1, las tablas de amortización cuyas cuotas cumplen con una ley de formación tendrán el número 2 seguido de una letra que indica el tipo de gradiente por ejemplo, una amortización cuyas cuotas cumplen con un gradiente lineal simple se representará por AMORT2L, si las cuotas cumplen con una ley de formación de un gradiente geométrico se representará por AMORT2G, las tablas de amortización que están elaboradas con base en gradientes escalonados se representarán con el número 3 seguido de la letra que identifica el tipo de gradiente así por ejemplo AMORT3G representará una amortización con gradiente geométrico escalonado, por AMORT3L se representará la amortización con gradiente lineal escalonado donde L representa la diferencia entre dos cuotas de gradiente contiguas y por AMORT3H se representará una tabla de amortización con gradiente escalonado donde H será la diferencia entre dos intercuotas pertenecientes a escalones contiguos. Las tablas de amortización que trabajan con amortización constante tienen por nombre AMORT4A si el interés es anticipado y AMORT4V si el interés es vencido.

Los programas que elaboran tablas de capitalización se representan genéricamente por CAP seguido de un número y una letra para identificar el programa en la misma forma como se hizo con los programas AMORT la única excepción es el programa CAP1 que es la capitalización con cuota fija.

Los programas que calculan la tasa a la cual se hace una amortización se representan genéricamente por TIR y tendrán los mismos números y letras de identificación de los programas AMORT.

El siguiente cuadro es un resumen de lo dicho anteriormente

Cuota Fija	AMORT1	CAP1	TIR1
Cuota Creciente	$\text{AMORT2}\begin{matrix}\nearrow L\\ \searrow G\end{matrix}$	$\text{CAP2}\begin{matrix}\nearrow L\\ \searrow G\end{matrix}$	$\text{TIR2}\begin{matrix}\nearrow L\\ \searrow G\end{matrix}$
Escalonado	$\text{AMORT3}\begin{matrix}\nearrow L\\ \rightarrow H\\ \searrow G\end{matrix}$	$\text{CAP3}\begin{matrix}\nearrow L\\ \rightarrow H\\ \searrow G\end{matrix}$	$\text{TIR3}\begin{matrix}\nearrow L\\ \rightarrow H\\ \searrow G\end{matrix}$
Amortización Constante	$\text{AMORT4}\begin{matrix}\nearrow A\\ \searrow V\end{matrix}$		

Ejemplo 1

Elaborar una tabla que muestre la amortización de \$3 millones mediante pagos mensuales durante 3½ años con una tasa del 3% efectivo mensual.

Solución:

Montamos el programa AMORT1 y en pantalla aparecerá:

AMORTIZACION

DEUDA INICIAL..1 000 000.00
TASA POR UNO..0.03000
NUMERO DE PERIODOS..4

PERIOD	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	1 000 000.00	0.00	0.00	0.00
1	760 972.95	30 000.00	269 027.05	239 027.05
2	514 775.18	22 829.19	269 027.05	246 197.86
3	261 191.31	15 443.25	269 027.05	253 583.79
4	0.00	7 835.74	269 027.05	261 191.31

Para introducir la información situamos el cursor en E4, digitamos 3 000 000 que corresponde a la nueva deuda, luego situamos el cursor en E5 y digitamos la nueva tasa 0.03 pero usando el punto como separador de los decimales (esto depende de la configuración del software que se esté empleando), en E6 digitamos el número de períodos que es 42, enseguida corremos la macro A oprimiendo simultáneamente las teclas ALT y A y automáticamente se elabora la nueva tabla y en la pantalla aparecerá:

AMORTIZACION

DEUDA INICIAL.......................................3 000 000.00
TASA POR UNO..0.03000
NUMERO DE PERIODOS.......................................42

PERIODO	SALDO	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION
0	3 000 000.00	0.00	0.00	0.00
1	2 963 424.98	90 000.00	126 575.02	36 575.02
2	2 925 752.71	88 902.75	126 575.02	37 672.27
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
42	0.00	3 686.65	126 575.02	122 888.37

Oprimiendo simultáneamente las teclas ALT y B se invoca la macro B y nos muestra en la pantalla una gráfica donde se puede observar cómo va disminuyendo la deuda a medida que se van efectuando los pagos y también la cantidad de intereses que se han pagado hasta un período determinado (ver gráfica No. 7.1)

Para invocvar la macro C oprimimos simultáneamente las teclas ALT y C se imprimirá la tabla y si se corre la macro D (solo disponible en QPRO) se imprimirá la gráfica que se elaboró con la macro B

Moviendo el cursor a la columna F de la hoja electrónica, aparecerá en la tabla otra columna titulada suma de intereses y a la derecha de esta columna encontraremos las *ordenes correspondiente a las macros con su respectivo documentación.*

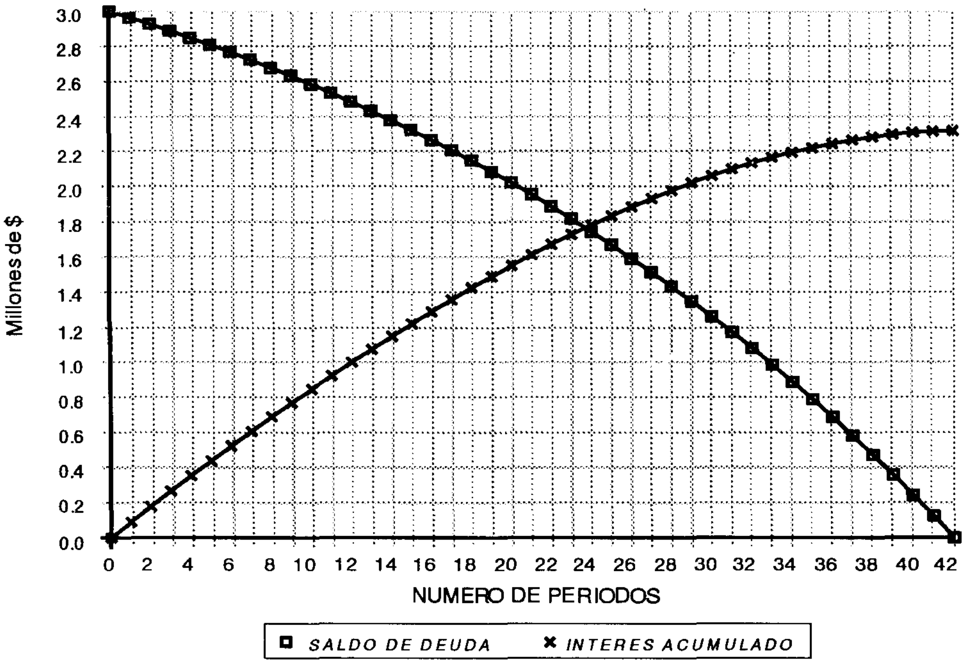
Ejemplo 2

Elaborar una tabla para capitalizar $800 000 mediante depósitos mensuales durante un año pero que sean crecientes en un 5% y con una tasa del 2½% efectivo mensual

Solución:

GRAFICA No. 7.1

AMORTIZACION



Recuperamos el programa CAP2G e inmediatamente aparecerá en pantalla:

CAPITALIZACION

CAPITAL FINAL..1 000 000.00
TASA EN POR UNO... 0.02
NUMERO DE PERIODOS..4
CRECIMIENTO DE LA CUOTA EN POR UNO....................0.5000

PER.	ACUMULADO	INTERES	DEPOSITO	INCREMENTO
1	225 438.33	0.00	225 438.33	225 438.33
2	466 657.33	4 508.77	236 710.24	241 219.01
3	724 536.23	9 333.15	248 545.75	257 878.90
4	1 000 000.00	14 490.72	269 973.04	275 463.77

Con el cursor en la posición E3 digitamos 800 000 que corresponde al nuevo capital final, luego situamos el cursor en E4 y digitamos 0.025 que corresponde a la nueva tasa (debe usarse el punto como separador de los decimales), luego situamos el cursor sobre E5 y digitamos 12 que corresponde al a los períodos que hay en un año, finalmente ponemos el cursor en la posición E6 y digitamos 0.05 (siempre usando el punto) que corresponde al crecimiento de la cuota y damos ENTER.

Una vez que se han introducido los nuevos datos invocamos la macro A oprimiendo simultáneamente las teclas ALT y A, se construirá la nueva tabla de capitalización con base en los nuevos datos.

C A P I T A L I Z A C I O N

CAPITAL FINAL.. 800 000.00
TASA EN POR UNO...0.02500
NUMERO DE PERIODOS..12
CRECIMIENTO DE LA CUOTA EN POR UNO....................0.0500

PER.	ACUMULADO	INTERES	DEPOSITO	INCREMENTO
1	44 349.09	0.00	44 349.09	44 349.09
2	92 024.37	1 108.73	46 566.55	47 675.28
3	143 219.85	2 300.61	48 894.88	51 195.49
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
12	800 000.00	17 662.15	75 852.00	93 514.15

Oprimiendo simultáneamente las teclas ALT y B se invoca la macro B la cuál nos muestra la gráfica del crecimiento del capital en la medida en que se van efectuando los depósitos (ver gráfica No. 7.2).

La macro C imprimirá la tabla y la macro D (solo disponible en QPRO) imprimirá la gráfica.

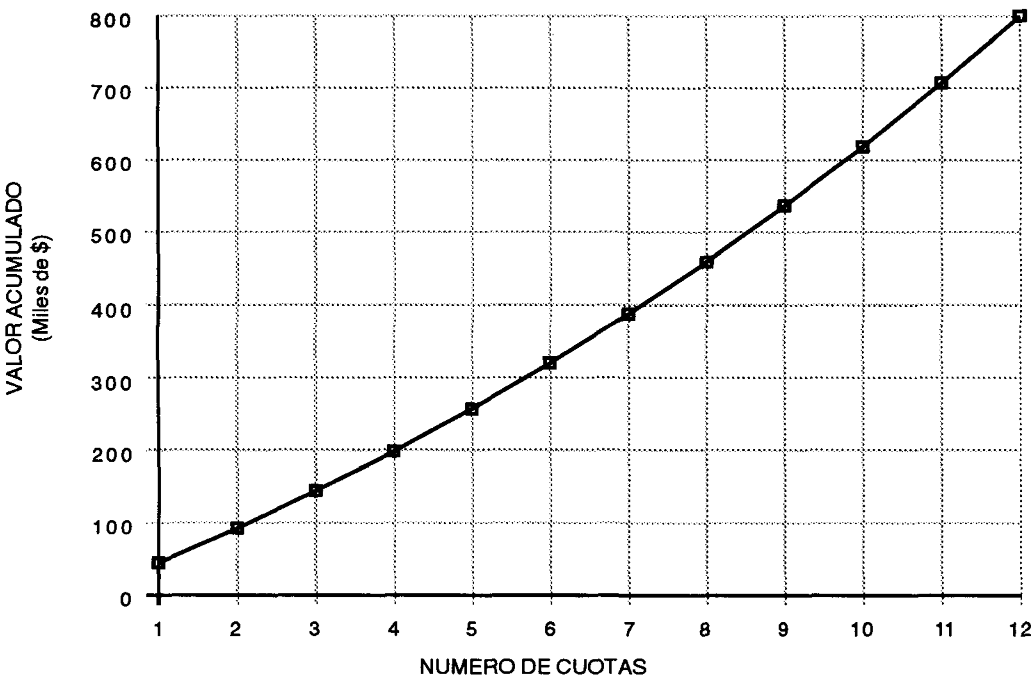
Ejemplo 3

Supongamos que una deuda de $2 000 000 se va a cancelar mediante pagos mensuales uniformes de $115 000 durante 2 años. Calcular la tasa a la cuál se está haciendo la amortización.

Solución:

GRAFICA No. 7.2

CAPITALIZACION



Recuperamos el programa TIR1 e inmediatamente aparecerá en la pantalla:

DEUDA INICIAL.............................3 000 000
NUMERO DE PERIODOS.........................60
CUOTA..113 800

MACRO A

TASA .... 3.2301929 %

NUMERO DE VECES QUE HACE EL CALCULO..........25

Situamos el cursor en la posición E4 digitamos 2000000, en la posición E5 digitamos 24 que corresponde al número total de pagos y en la posición E6 digitamos el valor del pago 115 000, ahora invocamos la macro A y aparecerá frente al letrero tasa en por uno:

TASA .... 2.755002481 %

NUMERO DE VECES QUE HACE EL CALCULO............31

Lo que significa que la tasa a la cual se hace la amortización es del 2.755% en forma aproximada.

El número de veces que hace el cálculo no es relevante, mas bien es una curiosidad de saber cuantos cálculos o interpolaciones de tasa hizo el ordenador, para dar una respuesta con varios decimales de exactitud.

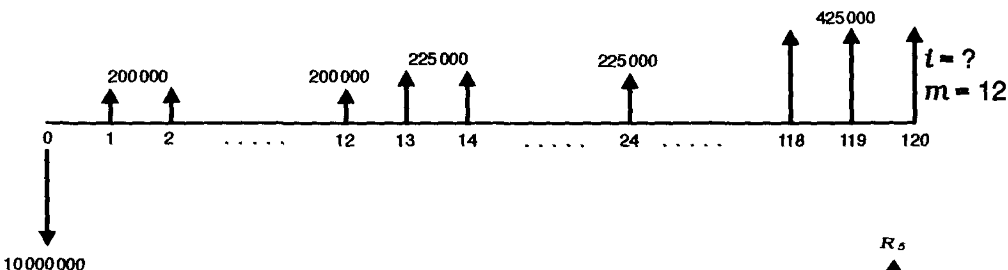
Al invocar la macro C imprimimos lo que está viendo en pantalla (no existen macros B y D)

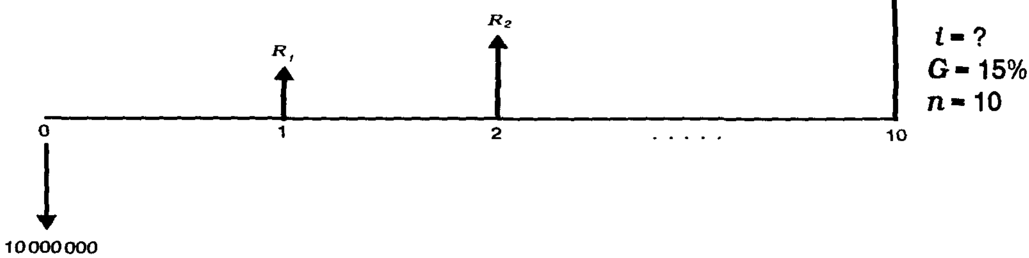
Ejemplo 4

Calcular la tasa a la cual una deuda de $10 000 000 se puede amortizar mediante pagos mensuales durante 10 años con primer pago de $200 000 que permanece constante durante cada año, pero en cada aniversario la intercuota crece en $25 000

Solución:

La gráfica de flujo de caja del problema es el siguiente:





Recuperamos el programa TIR3H e inmediatamente aparecerá en pantalla:

DEUDA INICIAL..	600 000.00
PRIMERA INTERCUOTA...........................	142 709.96
ALTURA DEL ESCALON EN PESOS.........	25 000.00
NUMERO DE PERIODOS DEL GRADIENTE.... .	3
TAMAÑO DEL ESCALON..................................	2

MACRO A

INTERTASA..	16.00000%
TASA	34.56000%

NUMERO DE VECES QUE HACE AL CALCULO 23

Situamos el cursor en E4 y digitamos 10 000 000, situamos el cursor en E5 y digitamos 200 000 que es el valor de cuota, situamos el cursor en E6 y digitamos 25 000 que corresponde al valor de crecimiento anual de las intercuotas, situamos el cursor en E7 y digitamos 10 que corresponde al número de períodos del gradiente, finalmente, situamos el cursor en E8 y digitamos 12 que corresponde al tamaño del escalón, es decir, al número de intercuotas por cada cuota.

Ahora invocamos la macro A y se obtienen las siguientes respuestas:

INTERTASA...	0.02454699
TASA..	0.33777355

NUMERO DE VECES QUE HACE EL CALCULO 30

Las respuestas en forma aproximada son: intertasa 2.45% y tasa 33.78%

PLAZO OPTIMO DE AMORTIZACION

El común de la gente piensa que entre más tiempo haya para cancelar una deuda es mejor porque la cuota será más baja, esto no es mas que un sofisma de distracción y la verdadera situación se podrá ver si :

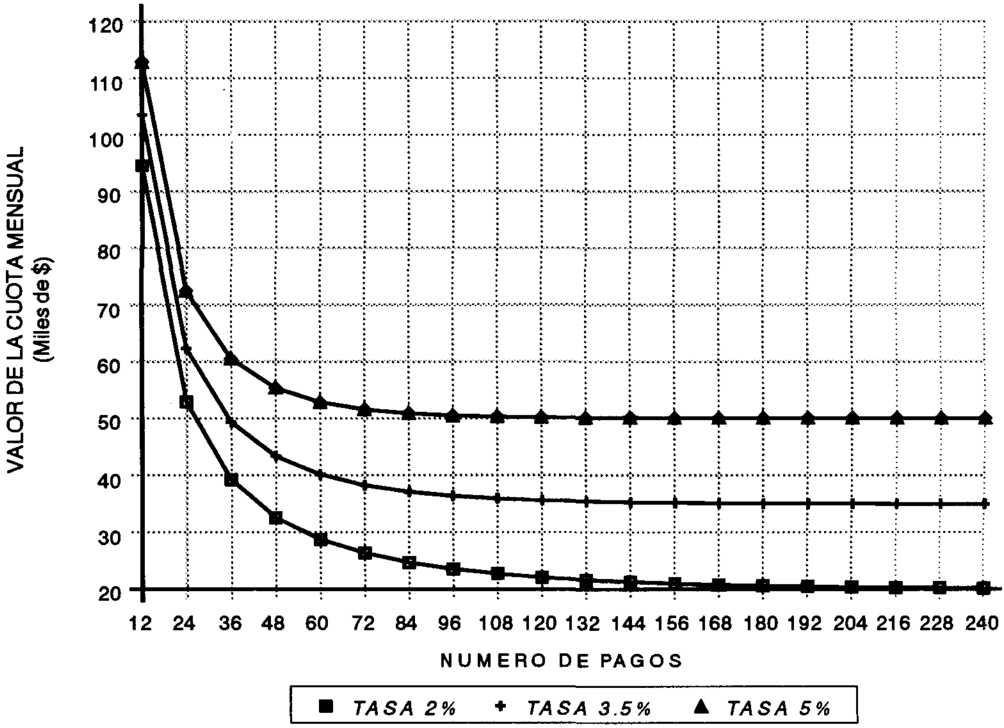
A) analizamos lo que ocurre cuando mantenemos fijo el valor de la deuda y el valor de la tasa y comenzamos a variar el número de pagos por ejemplo:

Supongamos una deuda de $1 000 000 y una tasa del 2% efectivo mensual y que se utiliza una cuota fija, entonces calculamos el valor de la cuota cuando el número de pagos es 12, después calculamos la cuota cuando el número de pagos es 24, cuando es 36 etc. Tabulamos los resultados y se traza la curva, se observa que la variación en el valor de la cuota es muy sensible cuando los períodos son pocos pero a medida en que se aumentan los períodos el valor de la cuota tiende a estabilizarse. Si volvemos a repetir el proceso anterior pero con tasa del 3.5% y después con tasa del 5% podemos observar que las curvas son similares pero desplazadas un poco mas arriba tal como se puede apreciar en la Gráfica No. 7.3.

En conclusión, no es conveniente aceptar un préstamo con un número muy grande de períodos. Subjetivamente podríamos tomar las siguientes decisiones:

GRAFICA No. 7.3

VARIACION DE LA CUOTA MENSUAL SEGUN EL NUMERO DE PAGOS



Con tasa del 2% EM se puede tomar un plazo máximo de 9 años; para el 3.5% EM, 7 años y para el 5% EM, 6 años.

B) Analizamos el caso anterior cuando mantenemos fijo el valor de la deuda y el valor de la tasa y comenzamos a variar el número de pagos, pero los pagos en esta oportunidad serán crecientes en un 1%, la gráfica que se obtendría sería muy similar a la Gráfica No. 7.3 y de allí podríamos concluir que, no es conveniente aceptar el préstamo con un número muy grande de períodos. Subjetivamente podríamos tomar las siguientes decisiones:

Con tasa del 2% EM se puede tomar un plazo máximo de 12 años, para el 3.5% EM 10 años y para el 5% EM 7 años.

Se pueden hacer otras gráficas y así llegaremos a la siguiente conclusión de carácter general: a medida que se aumenta el porcentaje de crecimiento de la cuota se puede ir aumentando el número de períodos.

Acontinuación presentamos los símbolos de diagramación y algunos de los diagramas de flujo que sirvieron de base para elaborar los programas anteriores.

DIAGRAMA DE FLUJO

El conjunto de figuras geométricas unidas o relacionadas por medio de segmentos de recta, con flechas que determinan el orden lógico a seguir y según la forma de la figura geométrica que se presenta, indica la acción a seguir para alcanzar la solución a un problema, a este proceso se le llama diagrama de flujo.

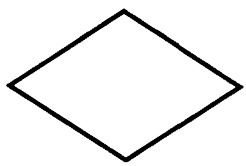
Con base en los diagramas de flujo, el programador podrá codificar el proceso respectivo al lenguaje de programación que desee aplicar, tales como Basic, Pascal, Fortran, Lenguaje C, etc.

SIMBOLOS DE DIAGRAMACION

INICIACION O TERMINACION

ENTRADA DE DATOS

TOMA DE DECISION



PROCESO

MOSTRAR EN PANTALLA O IMPRIMIR

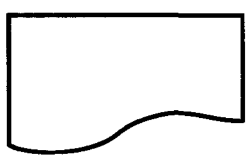


DIAGRAMA DE FLUJO PARA ELABORAR UNA TABLA DE AMORTIZACION CON CUOTA FIJA

SIMBOLOGIA

D = Deuda
R = Cuota de Amortización
T = Tasa de interés
I = Interés
N = Número de Períodos
A = Amortización
K = Contador de Períodos

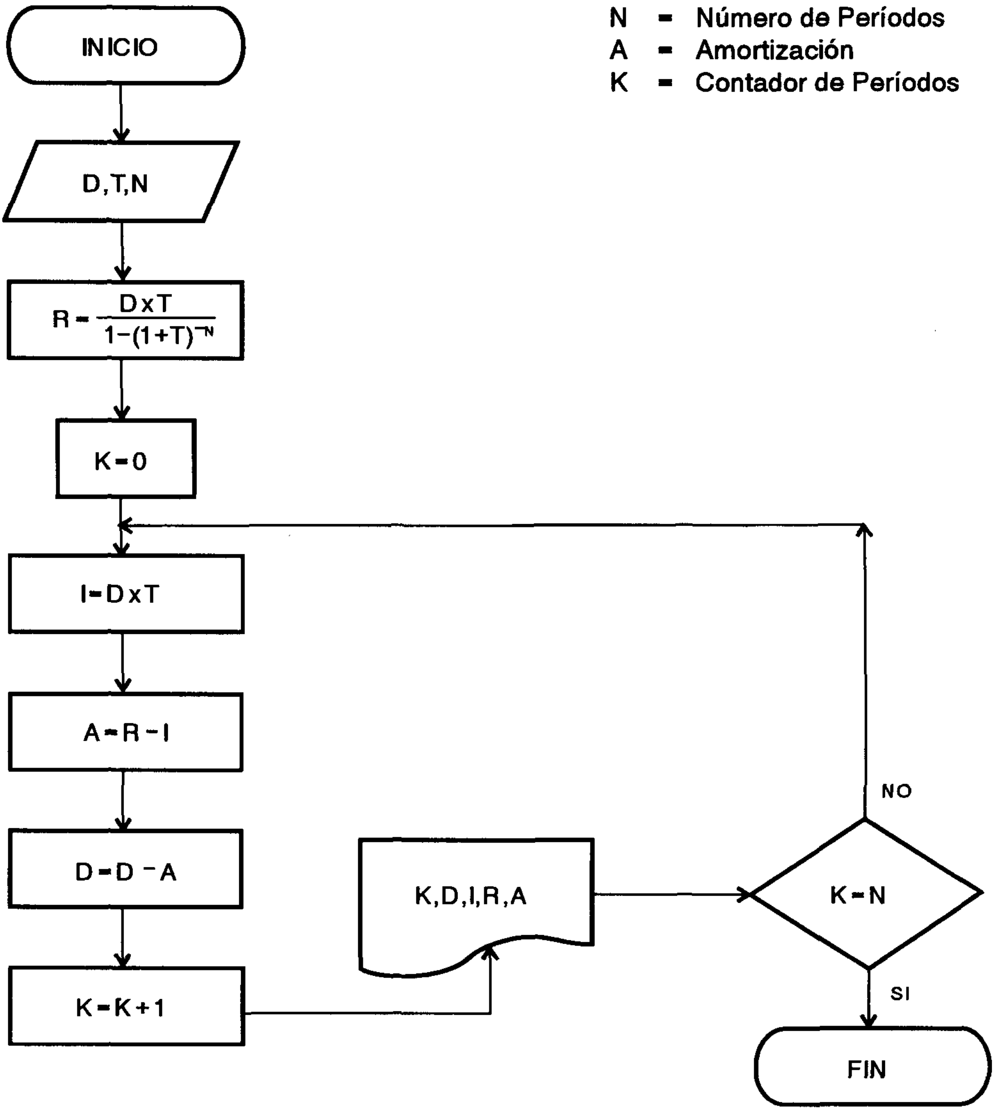


DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL CALCULO DE LA TIR

Por TIR representamos la Tasa Interna de Retorno, es decir la tasa que se cobra cuando se conoce el valor de la deuda, el número de períodos y la cuota.

SIMBOLOGIA

D = Deuda
R = Cuota Fija
N = Número de Períodos
T1 = Tasa de interés
T2 = Tasa menor
T = Tasa promedio
K = Contador de Períodos
E = Error de estimación

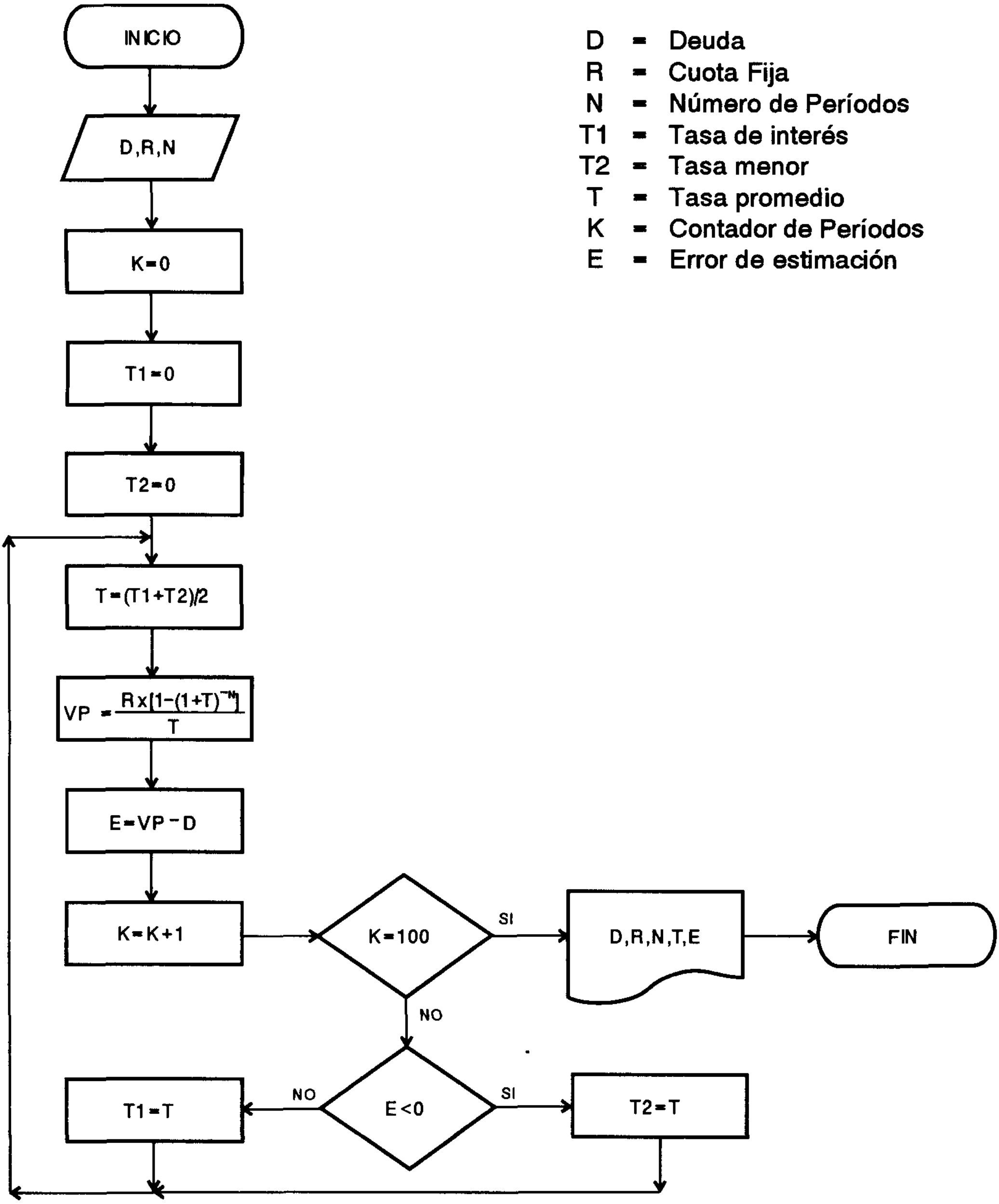


DIAGRAMA DE FLUJO AMORTIZACION CON GRADIENTE GEOMETRICO

El programa AMORT2 elabora una tabla de amortización cuando el valor de los pagos va variando de acuerdo a una ley de formación, para lo cual estan los programas AMORT2G y AMORT2L que corresponden a amortizaciones con gradiente geométrico y lineal respectivamente. Aquí se muestra el programa AMORT2G.

SIMBOLOGIA

D = Deuda
R = Cuota Fija
N = Número de Períodos
I = Interés
A = Amortización
G = Gradiente Geométrico
T = Tasa de interés
K = Contador de Períodos

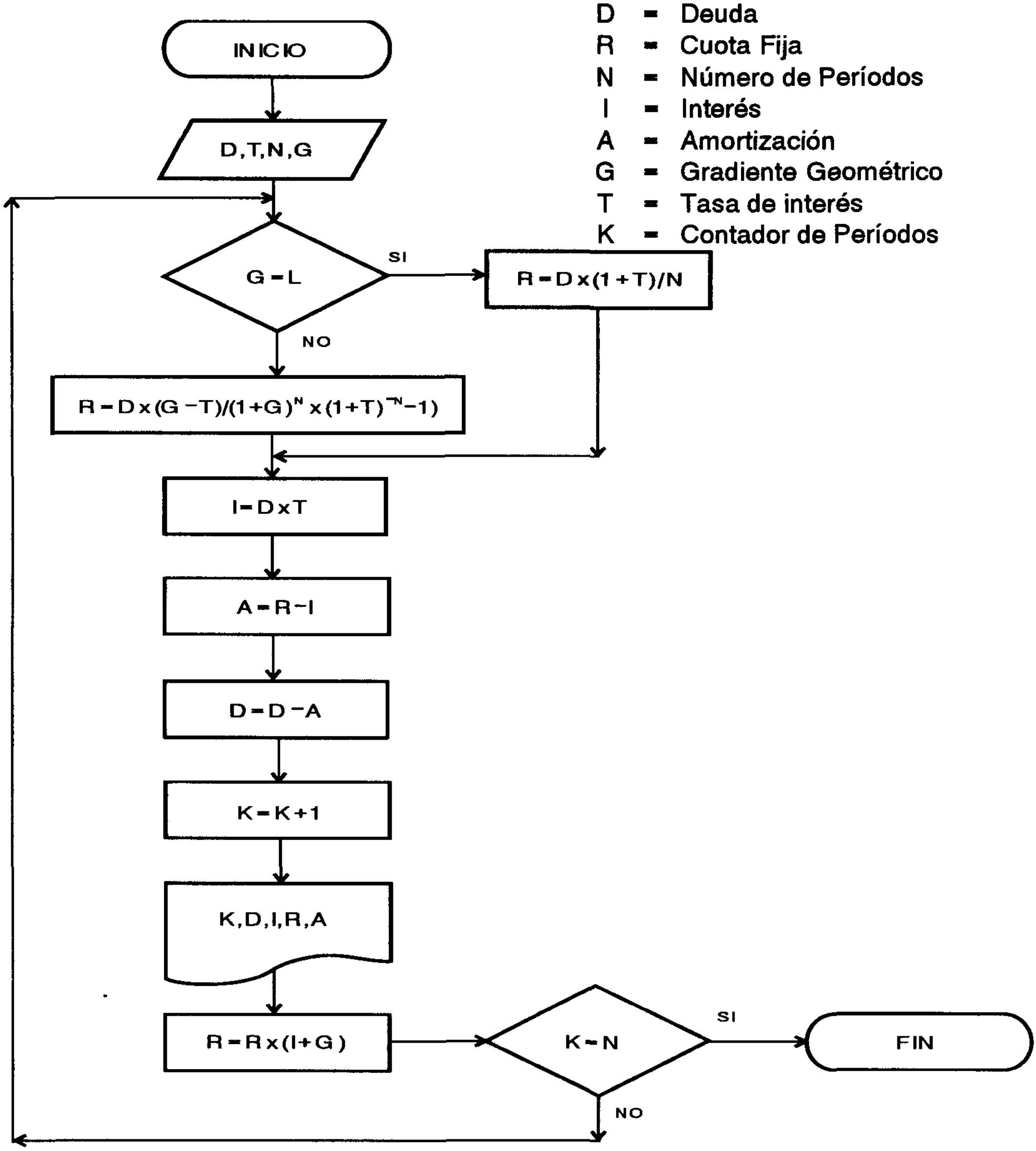


DIAGRAMA DE FLUJO PARA GRADIENTES ESCALONADOS

El programa AMORT3G elabora una tabla de amortización mediante gradiente escalonado geométrico.

SIMBOLOGIA

D = Deuda
IT = Intertasa
M = Tamaño del escalón
N = Número de período, gradiente
R = Cuota del gradiente
r1 = Intercuota
T = Tasa de interés, gradiente
I = Interés
A = Amortización
G = Gradiente Geométrico
L = Contador de interperíodos
K = Contador de Períodos

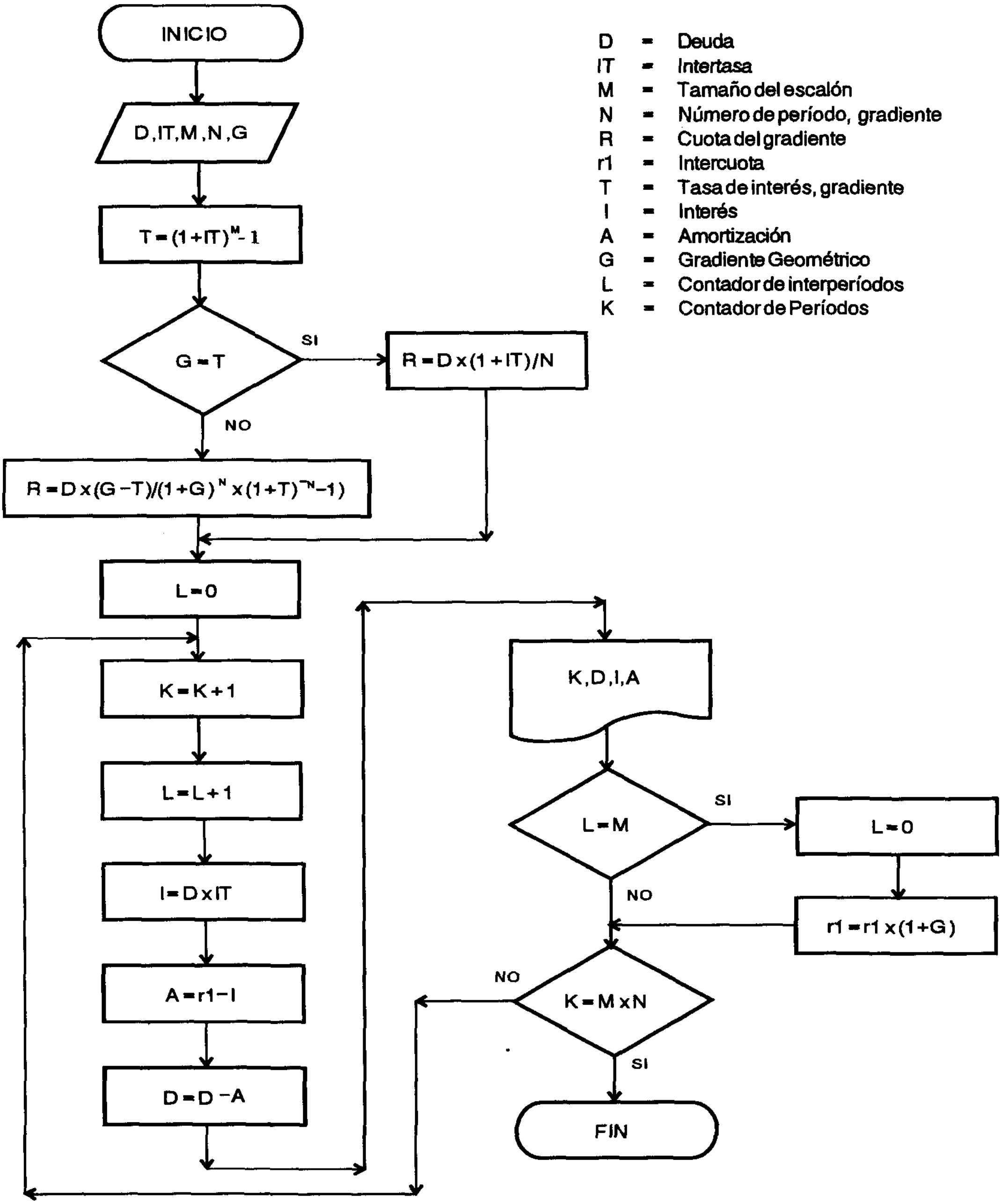
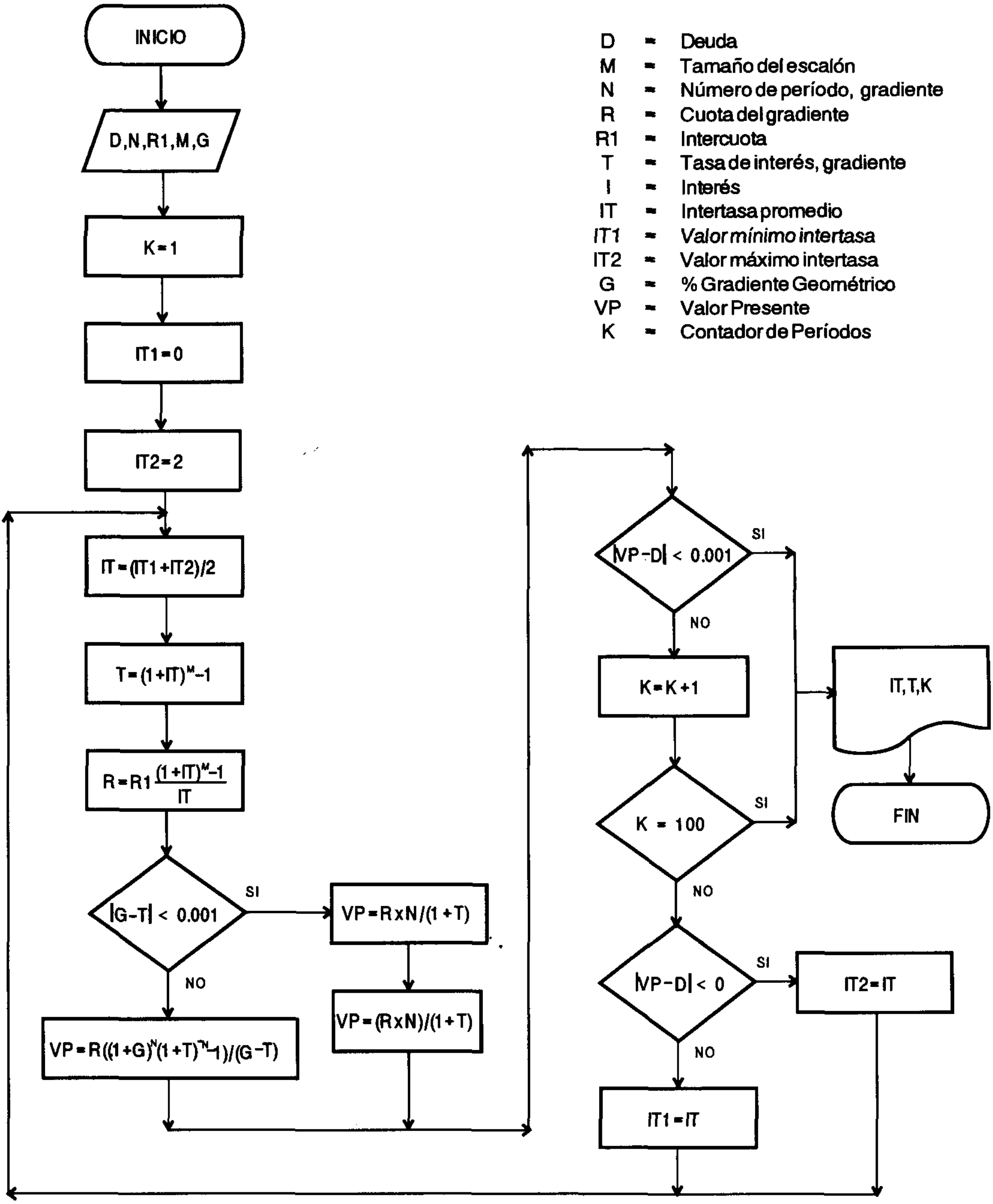


DIAGRAMA DE FLUJO PARA GRADIENTES ESCALONADOS

El programa TIR3G calcula la intertasa y la tasa de una amortización con un gradiente escalonado geométrico.

SIMBOLOGIA

D	=	Deuda
M	=	Tamaño del escalón
N	=	Número de período, gradiente
R	=	Cuota del gradiente
R1	=	Intercuota
T	=	Tasa de interés, gradiente
I	=	Interés
IT	=	Intertasa promedio
IT1	=	Valor mínimo intertasa
IT2	=	Valor máximo intertasa
G	=	% Gradiente Geométrico
VP	=	Valor Presente
K	=	Contador de Períodos



Valor presente neto CAPITULO 9

INTRODUCCIÓN:

Antes de realizar un proyecto de inversión es necesario evaluarlo financieramente para averiguar si es bueno realizar el proyecto o no es aconsejable. Para tal efecto estudiaremos el concepto y aplicación de índices tales como el VPN, el CAUE, la TIR, la relación beneficio costo, el VPNE, el PPA etc.

VALOR PRESENTE NETO

El valor presente neto, VPN, es el más utilizado porque pone en pesos de hoy tanto los ingresos futuros como los egresos futuros, lo cual facilita la decisión desde el punto de vista financiero, de realizar o no un proyecto. Al usar el VPN recordemos que los ingresos se toman con el signo positivo y en la línea de tiempo estarán ubicados en la parte superior y los egresos se tomarán con el signo negativo y estarán ubicados de la línea de tiempo hacia abajo.

Si el VPN>0 el proyecto es bueno porque, en pesos de hoy, los ingresos son mayores que los egresos, si el VPN<0 significa que en pesos de hoy los ingresos son menores que los egresos y por lo tanto el proyecto no debe realizarse, y si el VPN=0 los ingresos serán iguales a los egresos y financieramente le será indiferente al inversionista

Desde el punto de vista matemático el VPN es la sumatoria de los flujos de caja puestos en el día de hoy, lo cual podemos representar por:

$$VPN = \sum F_n (1+i)^{-n} = F_0 + F_1(1+i)^{-1} + F_2(1+i)^{-2} + \ldots + F_n(1+i)^{-n}$$

Donde i es la tasa a la cual son descontados los flujos de caja, esa tasa i la denominaremos TIO

Definición de tasa de interés de oportunidad (TIO).

La tasa de interés de oportunidad (que se representa por TIO) es la tasa de interés más alta que un inversionista sacrifica con el objeto de realizar un proyecto.

La definición anterior la podemos explicar mediante el siguiente ejemplo:

Supongamos que el inversionista A tiene las siguientes posibilidades para invertir su dinero

a) Comprar una máquina que le producirá una rentabilidad del 3% mensual
b) Prestar el dinero a un amigo que le pagará un interés del 2.5% mensual
c) Invertir en sus negocios normales los cuales le dan una rentabilidad del 2.8% mensual.
d) Invertir en una cuenta de ahorros que la paga el 1.5% mensual
e) Invertir en un CDT que le garantiza el 2% mensual

El inversionista B solo tiene dos posibilidades

a) Invertir en la cuenta de ahorros con rentabilidad del 1.5% mensual y
b) Invertir en CDT que la paga una tasa del 2% mensual

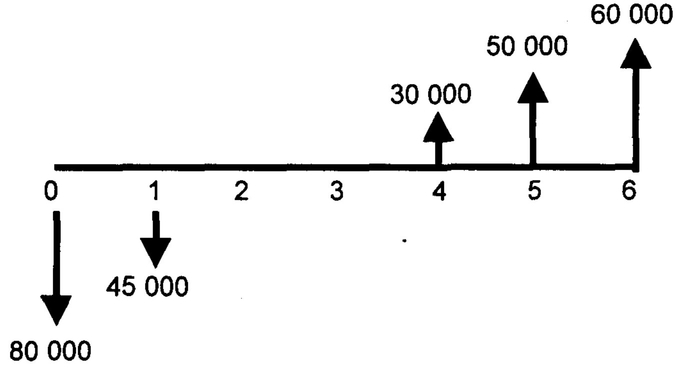
De acuerdo con el planteamiento anterior la tasa más alta que el inversionista sacrifica con el objeto de realizar el proyecto será: para el inversionista A el 3% mensual, por tanto la TIO de A es el 3% mensual y para el inversionista B la TIO será del 2% mensual.

Ejemplo 1

Supongamos que para realizar un proyecto se necesita realizar una inversión inicial de $80 000 y otra inversión de $45 000 al final del primer mes, en los meses 2 y 3 los ingresos son equivalentes a los egresos pero a partir del mes 4 se producen ingresos así: mes 4 $30 000, mes 5 $50 000, mes 6 $60 000. Determinar si el proyecto lo pueden realizar los inversionistas A o B mencionados anteriormente.

Solución:

Construimos el diagrama de flujo teniendo en cuenta que los ingresos son positivos y los egresos negativos.



Como ya dijimos el VPN consiste en poner en pesos de hoy tanto ingresos como egresos, es decir, que debemos trasladar al punto 0 todos los valores y para ello es necesario utilizar la tasa TIO.

Ahora procederemos a calcular el VPN para el inversionista A con TIO= 3%

$$VPN = -80\,000 - 45\,000(1+0.03)^{-1} + 30\,000(1+0.03)^{-4} + 50\,000(1+0.03)^{-5} + 60\,000(1+0.03)^{-6}$$

$$VPN = -3\,655$$

Lo cual indica que este proyecto no es bueno para el inversionista A porque de realizarlo tendría una pérdida de $3 655.21 (más exactamente, se estaría ganando el 3% menos $3 655.21 en pesos de hoy).

Ahora veamos lo que ocurriría con el inversionista B haciendo los cálculos con TIO = 2%

$$VPN = -80\,000 - 45\,000(1+0.02)^{-1} + 30\,000(1+0.02)^{-4} + 50\,000(1+0.02)^{-5} + 60\,000(1+0.02)^{-6}$$

$$VPN = +\,2\,162.54$$

Como en este caso el VPN>0 significa que si puede realizar el proyecto porque en pesos de hoy además de ganarse el 2% obtiene una ganancia de $2 162.54

Obsérvese que entre más alta sea la tasa con que se evalúa un proyecto es más difícil que este sea aprobado.

De lo visto anteriormente podemos deducir que si un proyecto es bueno para un inversionista no necesariamente es bueno para otro inversionista, esto depende del valor de la tasa TIO

Símbolos

Con el fin de facilitar la construcción de gráficas y para simplificar la escritura adoptaremos los siguientes símbolos.

C_0 = Costo inicial o inversión inicial
C_1 = Costo en el período 1 o inversión en el período 1
C_2 = Costo en el período 2 o inversión en el período 2
.
.
.
C_n = Costo en el período n o inversión en el período n

K = Vida útil (expresada en años, en meses o en unidades producidas)
S = valor de salvamento
CAO = Costo anual de operación o serie neta uniforme de costo de operación, cuando los costos son mensuales se representará por CMO
I_0 = Ingreso del período cero (por lo general no existe)
I_1 = Ingreso del período 1
I_2 = Ingreso del período 2
.
.
.
I_n = Ingreso del período n

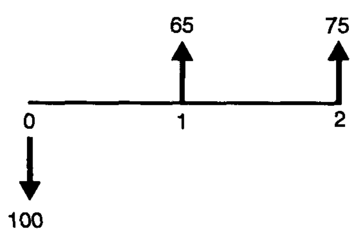
UTILIZACION DEL *VPN*

El *VPN* puede utilizarse en proyectos individuales o en la decisión sobre alternativas de inversión, en el primer caso solo basta conocer el signo del *VPN* para tomar la decisión como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Un proyecto requiere de una inversión inicial de $100 y se cree que generará unos ingresos de $65 al final del primer año y de $75 al final del segundo año. Evaluar el proyecto para el inversionista A cuya tasa es del 20% y para el inversionista B cuya tasa es del 40%

Solución:



Considerando los egresos como negativos y los ingresos como positivos el *VPN* (que consiste en poner todos los dineros en pesos de hoy) será:

Inversionista A $\quad VPN = -100 + 65(1+0.2)^{-1} + 75(1+0.2)^{-2} = \$6.25$

y el proyecto puede ser aceptado.

Inversionista B $\quad VPN = -100 + 65(1+0.4)^{-1} + 75(1+0.4)^{-2} = -\$15.31$

y el proyecto debe ser rechazado.

Ejemplo 2

Se desea adquirir una máquina cuyo costo es de $700 000, tendrá una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de $600 000, se piensa que producirá unos ingresos anuales crecientes en un 20% estimándose los del primer año en aproximadamente $250 000, los costos de operación y mantenimiento se estiman en $100 000 y se supone que cada año crecerán en unos $30 000. Evaluar el proyecto con tasa a) del 30% y b) del 20%

Solución:

cifras en millones de pesos

a) con el 30%

$$VPN = -700\,000 + \frac{250\,000\left[(1.2)^{6}(1.3)^{-6} - 1\right]}{0.2 - 0.3} + 600\,000(1.3)^{-6}$$

$$-\left\{100\,000\, a_{\overline{6}|}30\% + \frac{30\,000}{0.3}\left[a_{\overline{6}|}30\% - 6(1.3)^{-6}\right]\right\} = -\$26\,500$$

y el proyecto no debe ser aceptado.

b) con el 20%

$$VPN = -700\,000 + \frac{250\,000\,(6)}{1 + 0.2} + 600\,000(1.2)^{-6}$$

$$-\left\{100\,000\, a_{\overline{6}|}20\% + \frac{30\,000}{0.2}\left[a_{\overline{6}|}20\% - 6(1.2)^{-6}\right]\right\} = +\$220\,970$$

y el proyecto puede ser aceptado.

ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

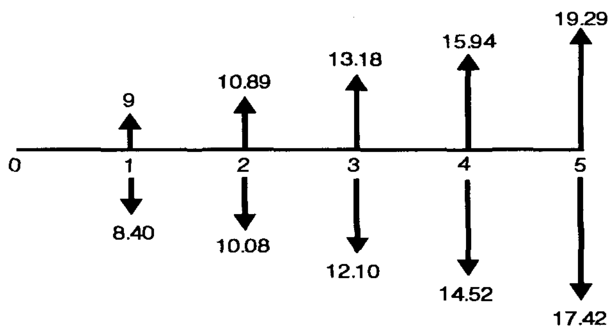
Puede ocurrir que simultáneamente se presenten varios proyectos, pero la ejecución de uno de ellos excluye la posibilidad de ejecución de cualquiera de los otros, en este caso se debe evaluar cada alternativa por separado, pero siempre usando el mismo horizonte de planeación a fin de poderlos comparar.

Ejemplo 3

Una fábrica produce actualmente en forma manual 1 000 unidades de un determinado artículo, para ello utiliza artesanos a los cuales les paga $8 400 000 al año y es costumbre que cada año se les aumente el sueldo en aproximadamente un 20%. El precio de venta de cada artículo es de $9 000 y se estima que este precio podrá ser aumentado todos los años en un 21%. Ahora se ha presentado la oportunidad de adquirir una máquina a un costo de $10 millones con una vida útil de 5 años, un valor de salvamento de $2 millones la cual requiere de 2 técnicos para su operación, el sueldo anual de cada uno de los técnicos puede ser de $600 000 con aumentos anuales de sueldo del 20%. ¿Cuál de las dos alternativas es mejor suponiendo que la tasa del inversionista es del 30%?

Solución:

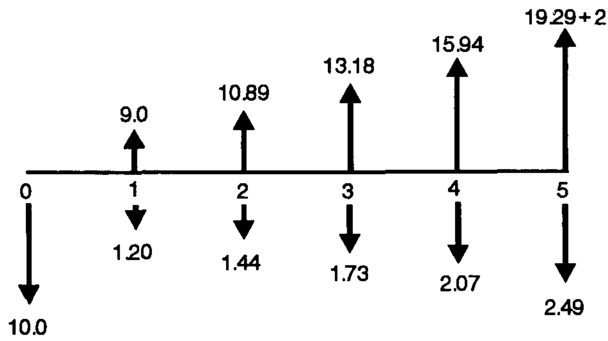
Supongamos que la Alternativa I es no hacer nada, es decir, seguir utilizando a los artesanos, entonces el primer ingreso será 9 000(1 000) = $9 000 000 y de ahí en adelante los ingresos se incrementarán todos los años un 21%. El egreso del primer año será de $8 400 000 y crecerán un 20% los demás años. La gráfica será:



cifras en millones de pesos

$$VPN = \frac{9\left[(1+0.21)^5(1+0.3)^{-5}\right]}{0.21-0.3} - \frac{8.4\left[(1+0.2)^5(1+0.3)^{-5}-1\right]}{0.2-0.3} = \$2\,437\,836$$

Alternativa II



cifras en millones de pesos

$$VPN = \frac{9\left[(1.21)^{5}(1.3)^{-5}-1\right]}{0.21-0.3} + 2(1.3)^{-5} - \frac{1.2\left[(1.2)^{5}(1.3)^{-5}-1\right]}{0.2-0.3} = \$16\ 723\ 756$$

Decisión: comprar la máquina.

ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES CON DIFERENTE VIDA UTIL

Dado que el *VPN* exige que el horizonte de planeación sea de igual número de períodos en cada alternativa y en éste caso cada alternativa tiene diferente número de períodos entonces se hace necesario tomar un horizonte de planeación que sea igual al mínimo común múltiplo de la vida útil de cada una de las alternativas.

Ejemplo 4

El jefe de producción de una fábrica debe decidir entre el motor A y el motor B, con una tasa del 36% determinar la mejor alternativa.

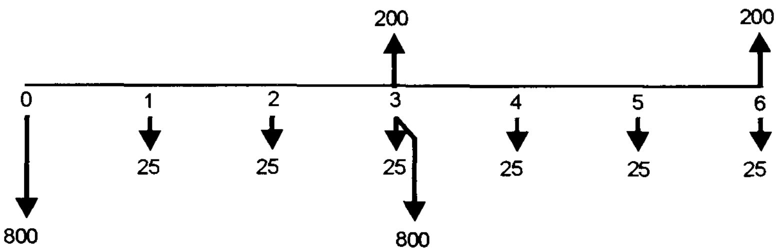
Las características de cada uno son:

	Motor A	Motor B
C	$ 800 000	$ 600 000
K	3	2
S	200 000	150 000
CAO	25 000	30 000

El mínimo común múltiplo de la vida útil de las dos alternativas es 6 años, así que el horizonte de planeación será de 6 años.

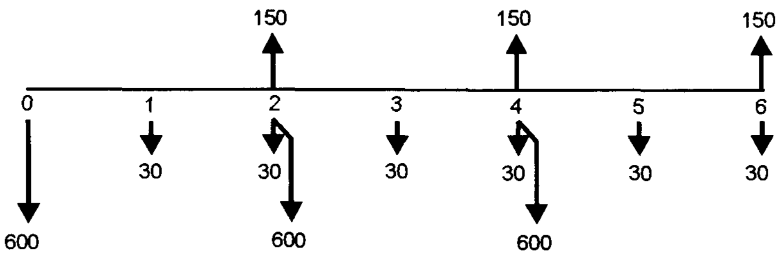
Para la Alternativa I tendríamos que al final de 3 años, adquirir otra máquina de las mismas características y en la Alternativa II tendríamos que adquirir 3 máquinas, una el día de hoy, otra a los 2 años y la tercera al final de 4 años. El diagrama de flujo de caja en cada caso en millones de pesos será:

Alternativa I

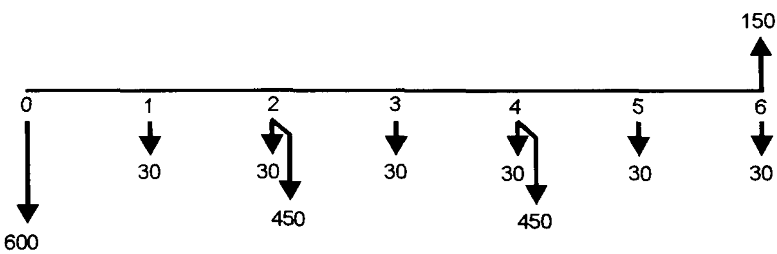


$$VPN = -800 - 800(1.36)^{-3} + 200(1.36)^{-3} - 25a_{\overline{6}|}36\% + 200(1.36)^{-6} = -\$1\ 065\ 338$$

Alternativa II



la gráfica anterior puede ser simplificada teniendo en cuenta que 150 – 600 = –450



y el *VPN* se puede calcular así:

$$VPN = -600 - 30\,\frac{1-(1.36)^{-6}}{0.36} - 450(1.36)^{-2} - 450(1.36)^{-4} + 150(1.36)^{-6} = -\$1\ 021\ 293$$

como en ambas alternativas no se conocían los ingresos salvo los salvamentos, los *VPN* fueron negativos, esto indica que en ambos casos habría pérdida, pero la situación es que la fábrica obligatoriamente necesita adquirir un motor y por tal motivo escogemos la alternativa que menos pérdida dé y en tales circunstancias nos decidimos por la alternativa B.

Observación: En el ejemplo anterior se ha supuesto que el precio de los motores no cambia a través del tiempo y que el costo anual de operación tampoco aumenta, lo cual implica suponer un estancamiento de la tecnología y una inflación del 0%, pero esto no tiene importancia puesto que si lo que se pretende es escoger la mejor alternativa, el error cometido en una alternativa se compensa con el error cometido en la otra alternativa debido a que se hacen los mismos supuestos. Esta libertad nos la podemos tomar cuando se trata de escoger la mejor alternativa entre varias, pero cuando se trata de evaluar financieramente un solo proyecto no puede olvidarse el avance de la tecnología y el efecto pernicioso de la inflación.

Ejemplo 5

Una fábrica produce en forma manual un cierto artículo y para ello utiliza obreros a quienes les paga actualmente sueldos por valor de $5 millones al año y anualmente tendrá que aumentarles el sueldo aproximadamente de acuerdo al índice de inflación que se estima en un 25% como promedio durante los próximos 5 años. También podría fabricarse el artículo mediante una máquina totalmente automatizada especialmente diseñada para producir este artículo y únicamente este artículo. El costo de la máquina es de $10 millones, tiene una vida útil de 10 años y podrá suplir a los obreros, pero será necesario contratar el servicio de mantenimiento con el fabricante el cual cobra $1 millón por el primer año y se sabe que todos los años acostumbra a reajustar el precio de los contratos de mantenimiento en un 35%. Por el estudio de mercados se sabe que el producto se volverá obsoleto en 5 años saliendo del mercado y la máquina no podrá ser vendida a ningún precio por ser una máquina prototipo. Actualmente se fabrican y venden 10 000 unidades al año a un precio de $5 000 c/u pero como se está restringiendo el mercado se espera una disminución anual en las ventas de 500 unidades, con el propósito de no acelerar la salida del producto del mercado, el precio del producto se podrá aumentar como máximo el 70% del valor de la inflación mientras que los costos de materia prima que ahora son de $1 000 por unidad se elevarán de acuerdo al índice de inflación. Los propietarios de la fábrica consideran que el negocio es tan bueno que a pesar de todo vale la pena adquirir la máquina. Suponiendo una tasa del 36% efectivo anual ¿Aconsejaría usted la adquisición de la máquina?

Solución:

Primero elaboraremos un cuadro que nos permita hallar los ingresos, en la primera columna colocaremos los años, en la segunda columna colocaremos las unidades que podrán ser vendidas y que debe ser igual a la producción, las demás columnas se explican por si solas. Cabe anotar que del segundo año en adelante el aumento de precio unitario es de 0.7(0.25) = 0.175 = 17.5%

AÑO	PRODUCCION	PRECIO UNITARIO	INGRESO	COSTO UNITARIO	COSTO MAT. PRIMA
1	10 000.00	5 000.00	50 000 000.00	1 000.00	10 000 000.00
2	9 500.00	5 875.00	55 812 500.00	1 250.00	11 875 000.00
3	9 000.00	6 903.00	62 127 000.00	1 562.50	14 062 500.00
4	8 500.00	8 111.00	68 943 500.00	1 953.13	16 601 605.00
5	8 000.00	9 531.00	76 248 000.00	2 441.41	19 531 280.00

Alternativa I

Para obtener el flujo de caja tomamos la columna de ingresos y la columna de costo de materia prima del cuadro anterior, la agregamos la columna que muestra el costo de mano de obra y la columna señalada con *FCN* significa flujo de caja neto, que se obtiene así:

$$FCN = Ingreso - Costo\ Materia\ Prima - Costo\ Mano\ de\ Obra$$

La sumatoria de la última columna titulada $FCN(1+i)^{-n}$ nos muestra el *VPN* con la tasa del 36%

AÑO	INGRESO	COSTO DE MAT. PRIMA	COSTO DE MANO OBRA	FCN	$FCN(1+i)^{-n}$
1	50 000 000	10 000 000	5 000 000	35 000 000	25 735 294
2	55 812 500	11 875 000	6 250 000	37 687 500	20 376 027
3	62 127 000	14 062 500	7 812 500	40 252 000	16 001 870
4	68 943 500	16 601 605	9 765 625	42 576 270	12 445 489
5	76 248 000	19 531 280	12 207 031	44 509 689	9 566 653
					VPN = $84 125 333

Alternativa II compra de la máquina

Tomamos las columnas Ingreso y costo del contrato, este último para el primer año será $1 000 000 y cada año se incrementa en un 35%, el *FCN* y el $FCN(1+i)^{-n}$ se calculan de la misma manera que en la Alternativa I. El ingreso y el flujo de caja neto del año cero será igual a – $10 000 000 porque corresponde al costo de la máquina.

AÑO	INGRESO	COSTO DE MAT. PRIMA	MANTE-NIMIENTO	FCN	$FCN(1+i)^{-n}$
0	–10 000 000	–	–	–10 000 000	–10 000 000
1	50 000 000	10 000 000	1 000 000	39 000 000	28 676 471
2	55 812 500	11 875 000	1 350 000	42 587 500	23 025 249
3	62 127 000	14 062 500	1 822 500	46 242 000	18 383 148
4	68 943 500	16 601 605	2 460 375	49 881 520	14 580 890
5	76 248 000	19 531 280	3 321 506	53 395 214	11 476 456

VPN = $86 142 214

Decisión: comprar máquina.

ALTERNATIVAS CON VIDA UTIL INFINITA

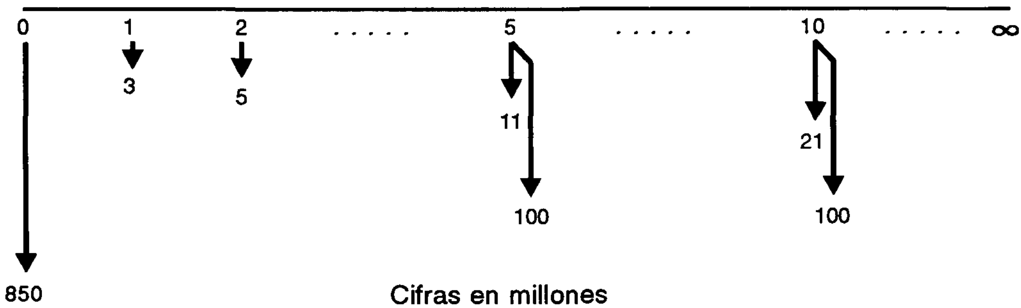
Cuando las alternativas tienen una vida útil muy grande como en el caso de universidades, organizaciones de caridad,obras civiles tales como represas, puentes, o construcciones con vida útil superior a 40 años puede considerarse que su vida útil es infinita y que no tienen salvamento y el error que pueda cometerse viene a ser despreciable (para tasas de interés inferiores a un 10% deben tomarse mínimo 50 años), para su evaluación se utiliza el método del *Costo Capitalizado* que representaremos por *C.C.* y que consiste en hallar un *VPN* en donde se involucran anualidades infinitas o gradientes infinitos, este método también se utiliza para hallar el punto de equilibrio de dos alternativas

Ejemplo 6

Se plantea la construcción de un puente y se han presentado dos proyectos, el primero es un puente colgante a un costo de $850 millones y cada año habrá que darle mantenimiento a la plataforma de asfalto a un costo de $3 millones, se estima que las reparaciones serán cada vez mayores y que éstas aumentarán de precio en $2 millones cada año y además cada 5 años habrá que cambiar los cables que sostienen el puente y su costo será de $100 millones y no se prevé que éste valor vaya a cambiar. La segunda alternativa es un puente en concreto a un costo de $900 millones y cada 3 años habrá que reacondicionar las bases a un costo fijo de $25 millones, el costo anual de mantenimiento se puede considerar fijo en $5 millones. Con una tasa del 25% determinar la mejor alternativa.

Solución:

Puente colgante:



Cifras en millones

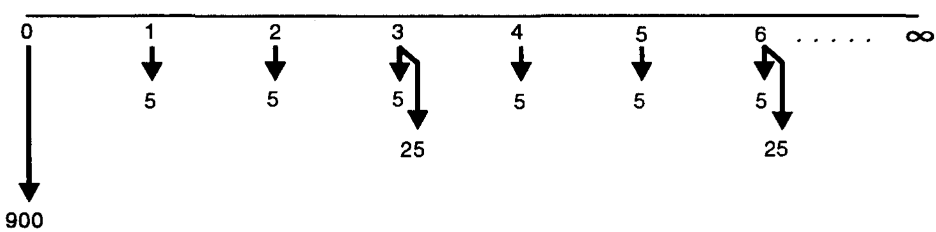
El cambio de cables forma una anualidad infinita del tipo general (\$100 millones cada 5 años) y el cálculo del valor presente puede hacerse de dos maneras, la primera hallando pagos anuales equivalentes a \$100 millones cada 5 años y la segunda hallando una tasa efectiva equivalente para cada 5 años. Por considerar más sencillo utilizaremos la segunda forma esto es haciendo un cambio de tasa así:

$(1+0.25)^5 = (1+i)^1$ entonces $i = 205.1757812\%$ efectivo cada 5 años.

$$VPN = -850 - \frac{100}{2.051757812} - \left(\frac{3}{0.25} + \frac{2}{0.0625}\right) = -\$942.7$$

cifras en millones

Puente de concreto:



cifras en millones

En forma similar al caso anterior convertimos la anualidad general de \$20 millones cada 3 años en una anualidad simple usando el método de cambiar la tasa.

$(1+0.25)^3 = (1+i)^1$ entonces $i = 95.3125\%$ efectivo cada 3 años

$$VPN = -900 - \frac{5}{0.25} - \frac{.\ 25}{0.953125} = -\$946.23$$

Decidir construcción puente colgante

EVALUACION DESPUES DE IMPUESTOS

Al evaluar un proyecto es muy importante tener en cuenta los impuestos que deben pagarse, a tal punto, que una decisión que se tome con base en cálculos efectuados antes de impuestos puede ser contraria a la decisión que se tome después de impuestos.

Un aspecto que influye notablemente en la liquidación de impuestos es la depreciación, debido a que los activos físicos tales como edificios, maquinaria, herramientas,etc. son susceptibles de deterioro debido al uso y por ésta razón su valor va disminuyendo con el tiempo; por ello, si en la inversión inicial de un proyecto hay activos físicos, su depreciación afecta a los ingresos haciendo que se reduzcan los impuestos y esto causa que se aumente el flujo de caja, pero debe quedar muy claro que la depreciación no es dinero efectivo sino que es un asunto puramente contable pero que en forma indirecta afecta el flujo de caja, dado que la base para calcular los impuestos[1] que son un porcentaje de la base y se halla así:

$$Base = Ingreso - Costo - Depreciación$$

Ejemplo 7

Una industria puede adquirir una máquina a un costo de $6 millones, tendrá una vida útil de 5 años y prácticamente no tendrá valor de salvamento, la máquina será depreciada totalmente en 3 años por partes iguales, el estudio de mercados indica que los ingresos del primer año serán aproximadamente de $3 millones y aumentarán todos los años un 30%, por otra parte se estima que el costo de producción del primer año será de $800 000 y cada año aumentará en $200 000. Suponiendo una tasa impositiva del 38% determinar la viabilidad del proyecto con un horizonte de planeación de 5 años y que la tasa del inversionista es del 40%.

Solución:

primero buscamos la base para el cálculo de los impuestos así:

$$Base = Ingreso - Costo - Depreciación$$

después calculamos el impuesto y el flujo de caja:

$$Impuesto = 0.38 \times Base$$

$$Flujo\ Neto\ de\ Caja = Ingreso - Costos - Impuesto$$

1 En algunos países como en el caso de Estados Unidos se puede presentar el caso de una base negativa (normalmente al inicio del proyecto o cuando haya habido pérdidas). La liquidación de un impuesto negativo no implica que el estado devuelva ese dinero sino que posteriormente cuando haya impuestos positivos se crucen para formar un nuevo saldo. En Colombia si la base es negativa no se liquidan impuestos.

PER.	INGRESO	COSTO	DEPRECIAC.	BASE	IMPUESTO	FNC
0	–6 000 000	0	0	0	0	–6 000 000
1	3 000 000	800 000	2 000 000	200 000	76 000	2 124 000
2	3 900 000	1 000 000	2 000 000	900 000	342 000	2 558 000
3	5 070 000	1 200 000	2 000 000	1 870 000	710 600	3 159 400
4	6 591 000	1 400 000	–	5 191 000	1 972 580	3 218 420
5	8 568 300	1 600 000	–	6 968 300	2 647 954	4 320 346

$$VPN = -6\,000\,000 + 2\,124\,000(1+0.4)^{-1} + 2\,558\,000(1+0.4)^{-2}$$

$$+ 3\,159\,400(1+0.4)^{-3} + 3\,218\,420(1+0.4)^{-4} + 4\,320\,346(1+0.4)^{-5}$$

$VPN = -\$385\,288$ y el proyecto debe ser rechazado.

FLUJO DE CAJA LIBRE DEL INVERSIONISTA

Otro procedimiento muy utilizado consiste en presentar el cuadro utilizando el formato de Estado de Resultados. Para ello debemos utilizar las siguientes fórmulas, en donde relacionamos las principales cuentas:

Utilidad bruta = ingresos – egresos

En ingresos figuran ventas,

En egresos figuran todos los costos directos de producción tales como: materia prima, honorarios, salarios, depreciaciones de máquinas y equipos utilizados directamente en la producción, gastos generales de la planta como energía agua etc.

Utilidad operativa = utilidad bruta – gastos operacionales.

La cuenta de gastos operacionales incluyen todos los gastos en que se incurren indirectamente en la producción tales como: depreciación de muebles y enseres utilizados en la administración, gastos administrativos, propaganda etc.

Utilidad antes de impuestos = utilidad operativa + otros ingresos – otros egresos

En la cuenta de otros ingresos figuran los intereses por activos financieros, tales como CDT´s etc.

En la cuenta de otros egresos figuran los intereses pagados por préstamos, venta de activos, salvamentos, etc.

Utilidad después de impuestos = utilidad antes de impuestos – impuestos.

Flujo neto de caja para el inversionista = Utilidad después de impuestos – inversiones – amortizaciones + depreciaciones

Es con el flujo neto de caja, también llamado flujo libre de caja, con el que se evalúan los proyectos, sin embargo como veremos más adelante existen dos clases de flujo de caja.

A continuación, presentamos el cuadro que resulta de resolver el ejemplo 7 utilizando este formato.

ESTADO DE RESULTADOS

AÑO	0	1	2	3	4	5
INGRESOS		3.000.000	3.900.000	5.070.000	6.591.000	8.568.300
COSTOS PROD		800.000	1.000.000	1.200.000	1.400.000	1.600.000
DEPRECIACIÓN		2.000.000	2.000.000	2.000.000		
UTILIDAD BRUTA		200.000	900.000	1.870.000	5.191.000	6.968.300
GASTOS OPERACIONALES	0	0	0	0	0	
UTILIDAD OPERACIONAL		200.000	900.000	1.870.000	5.191.000	6.968.300
GASTOS FINANCIEROS		0	0	0	0	0
UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS		200.000	900.000	1.870.000	5.191.000	6.968.300
IMPUESTOS		76.000	342.000	710.600	1.972.580	2.647.954
UTILIDAD DESPUES DE IMPUESTOS		124.000	558.000	1.159.400	3.218.420	4.320.346
INVERSIONES	6.000.000					
FLUJO NETO DE CAJA	-6.000.000	2.124.000	2.558.000	3.159.400	3.218.420	4.320.346
TIO =	40%					
VAN =	-385.288					

La evaluación hecha anteriormente es una evaluación para el inversionista y el flujo de caja se llama flujo de caja libre del inversionista que podemos representar por FCLI, pero hay otra evaluación que se hace con base en el flujo de caja libre del proyecto que representaremos por FCLP.

FLUJO DE CAJA LIBRE DEL PROYECTO

Este flujo consiste en suponer que la totalidad de los recursos invertidos en el proyecto son recursos propios, es decir asumir que no hay financiación, en consecuencia, no se toman en cuenta ni los intereses ni las cuotas de amortización, en este caso deberán utilizarse las siguientes fórmulas:

Impuestos = (utilidad antes de impuestos + Intereses) x Tasa impositiva

Flujo de caja libre del proyecto = utilidad antes de impuestos + Intereses + depreciaciones + amortizaciones – impuestos – inversiones.

Es obvio que este sistema solo se puede utilizar cuando hay financiación.

El índice VAN de un proyecto aplicado al flujo de caja del inversionista puede ser que indique que el proyecto es bueno, sin embargo, no necesariamente debe ser aceptado pues si se evalúa con el flujo de caja libre del proyecto puede ser que indique que no debe aceptarse. Esto puede ocurrir cuando el proyecto es apalancado financieramente y que la tasa de financiación sea inferior a la TIO, pero si se le retira el apalancamiento el proyecto se vuelve malo

Cuando se utiliza financiamiento se corre el riego de trabajar con proyectos indeseables, este riesgo se elimina si lo evaluamos retirando la financiación, es decir, evaluando con el flujo libre del proyecto.[1]

Cuando se evalúa un proyecto con el flujo de caja del proyecto es más difícil que el proyecto sea aceptado porque éste es más exigente que el flujo de caja del inversionista.

De lo anterior se concluye que la evaluación con el flujo de caja libre del proyecto minimiza el riego de pérdida cuando las variables proyectadas cambian desfavorablemente durante la ejecución del mismo

Ejemplo 8

Un proyecto necesita adquirir una máquina a un costo de $8 millones de los cuales $3 serán financiados por un banco que cobra un interés del 20% EA. La máquina será depreciada en línea recta en 3 años. Los ingresos anuales se estiman en $7 millones y los egresos anuales en $1 millón. Suponiendo que los inversionistas esperan ganarse un 40%. Con un horizonte de planeación de 3 años y una tasa impositiva del 35% determinar la viabilidad financiera del proyecto

a) usando el flujo de caja para el accionista (FCLA) y

b) usando el flujo de caja libre del proyecto (FCLP).

Compare y analice los resultados.

Solución:

Con flujo de caja libre para el inversionista y utilizando el formato de estado de Estado de Resultados se tiene:

ESTADO DE RESULTADOS

año	0	1	2	3
INGRESOS		7.000:000	7.000.000	7.000.000
EGRESOS		1.000.000	1.000.000	1.000.000
DEPRECIACION		2.666.667	2.666.667	2.666.666
UTILIDAD BRUTA		3.333.333	3.333.333	3.333.334
GASTOS OPERACIONALES		0	0	0
UTILIDAD OPERACIONAL		3.333.333	3.333.333	3.333.334
GASTOS FINANCIEROS		600.000	435.165	237.363
UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS		2.733.333	2.898.168	3.095.971
IMPUESTOS		956.667	1.014.359	1.083.590
UTILIDAD DESPUES DE IMPUESTOS		1.776.666	1.883.809	2.012.381
- INVERSIONES	5.000.000			
- AMORTIZACION		824.176	989.011	1.186.813
+ DEPRECIACIONES		2.666.667	2.666.667	2.666.666
FNC PARA INVERSIONISTA	-5.000.000	3.619.157	3.561.465	3.492.234
TIO =	40%			
VAN =	674.867			

[1] Ver Decisiones de inversión una aproximación al análisis de alternativas Vélez Pareja Ignacio CEJA 1998.

Como en el flujo de caja libre del proyecto y en el flujo de caja libre del inversionista la utilidad antes de impuestos es la misma, entonces comenzamos copiando la utilidad antes de impuestos del cuadro anterior y aplicando las fórmulas correspondientes al FCLP se obtiene el siguiente resultado.

año	0	1	2	3
UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS		2.733.333	2.898.168	3.095.971
+ INTERESES(20%)		600.000	435.165	237.363
IMPUESTOS		1.166.667	1.166.667	1.166.667
FLUJO DE CAJA LIBRE PROYECTO				
+ UTILIDAD ANTES DE IMPUESTOS		2.733.333	2.898.168	3.095.971
+ INTERESES		600.000	435.165	237.363
- IMPUESTOS		1.166.667	1.166.667	1.166.667
+ DEPRECIACIONES		2.666.667	2.666.667	2.666.666
- INVERSIONES	8.000.000			
F C. LIBRE DEL PROYEC	-8.000.000	4.833.333	4.833.333	4.833.333
TIO =	40%			
VAN =	-320.214			

El VAN calculado con el flujo de caja para el inversionista da +$674 867 indica que el proyecto es bueno y al evaluarlo con el flujo de caja libre del proyecto el VAN resulta – $320 214 que indica que el proyecto no es bueno.

En conclusión el proyecto en sí no es bueno.

Utilizando el sistema de columnas los resultados de flujo de caja y VAN coinciden con los obtenidos anteriormente y tendremos:

Flujo de caja libre para el accionista:

PER	INVERSION	INGRESOS	EGRESOS	INTERES	CUOTA	DEPRECIA	BASE	IMP	FNC
0	5.000.000	0							-5.000.000
1		7.000.000	1.000.000	600.000	1.424.176	2.666.666	2.733.334	956.667	3.619.157
2		7.000.000	1.000.000	435.165	1.424.176	2.666.666	2.898.169	1.014.359	3.561.465
3		7.000.000	1.000.000	237.363	1.424.176	2.666.666	3.095.971	1.083.590	3.492.234

TIO = 40%
VAN = 674.866

El flujo de caja libre del proyecto es:

PER	INVERSION	INGRESO	EGRESO	DEPRECIA	BASE	IMPUESTO	FNC
0	8.000.000						-8.000.000
1		7.000.000	1.000.000	2.666.667	3.333.333	1.166.667	4.833.333
2		7.000.000	1.000.000	2.666.667	3.333.333	1.166.667	4.833.333
3		7.000.000	1.000.000	2.666.667	3.333.333	1.166.667	4.833.333

TIO = 40%
VAN = -320.214

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) El ejecutivo de una fábrica propone adquirir una prensa, cuyo costo es de \$2 millones; el dinero necesario puede ser adquirido mediante un préstamo del banco ABC, el cuál exige le sea cancelado en pagos mensuales uniformes, durante 3 años con un interés del 36% CM. La prensa tiene una vida útil de 3 años y un valor de salvamento de \$400 000, se espera que la prensa produzca ingresos mensuales por \$83 000. Si el inversionista espera ganarse una tasa del 42% CM. ¿Debe adquirirse la prensa?

   Respuesta: VPN = – \$58 719.16 No adquirir

2) Un ingeniero solicita una máquina cuyo costo es de \$3 millones, se dispone de \$1 millón y el resto deberá ser financiado por un banco que presta el dinero faltante pero pide que le sea cancelado en pagos mensuales uniformes durante 3 años con intereses al 36% CM. Con ésta máquina se espera incrementar los ingresos mensuales en \$150 000, el *CMO* de la máquina se estima en \$40 000, tendrá una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$300 000. Si el dueño de la fábrica se gana en todos sus negocios el 42% CM. ¿aconsejaría usted la compra?

   Respuesta: No porque el VPN = – \$76 762.49

3) Un laboratorio requiere un aislamiento térmico en paredes y cielo raso; para mantener una temperatura constante, se requiere el auxilio de calentadores y equipo de aire acondicionado. Existen en el mercado 3 tipos de aislamiento, que cumplen con las condiciones requeridas y, en todos los casos, prácticamente el valor de salvamento es nulo; además, se conoce la siguiente información:

Aislamiento	A	B	C
C	400 000	500 000	700 000
CAO	20 000	20 000	30 000
K	4	5	30
Ahorro de energía en el primer año	100 000	200 000	300 000

   La tarifa de energía sube anualmente un 8%. Si se espera conservar el laboratorio por 10 años, ¿qué tipo de aislamiento debe utilizar? Suponga una tasa del 20% efectivo anual.

   Respuesta: $VPN(A)$ = – \$227 010 $VPN(B)$ = \$300 748 $VPN(C)$ = \$802 530.
   Decidir aislamiento C

4) Una fábrica está considerando la compra de una máquina que puede ser semiautomática, automática o electrónica. Los datos para cada máquina se encuentran consignados en la siguiente tabla:

Aislamiento	A	B	C
C	400 000	700 000	750 000
CAO	125 000	20 000	5 000
S	10 000	80 000	300 000
K	8	4	8

Decidir cuál máquina comprar usando una tasa del 30%

Respuesta: *VPN* (Semiautomática) = –$764 362; *VPN* (Automática) = –$965 766
VPN (Electrónica) = –$727 847
En todos los casos hay pérdida debido a que prácticamente no hay ingresos, en consecuencia, si es indispensable decidirnos por una de ellas lo haremos por la electrónica.

5) Un industrial compró una máquina hace 3 años, en $600 000 y aún siguiendo las instrucciones del fabricante, su *CAO* se elevó a $220 000. Ahora un vendedor le ofrece otra máquina que está más de acuerdo con sus necesidades; esta nueva máquina cuesta $550 000 y le garantizan que su *CAO* no será superior a $100 000. Un avalúo que le hicieron a la máquina actual fué de $120 000 y por esta cantidad hay oferta de compra, ¿será aconsejable el cambio, suponiendo una tasa del 28%, que el valor de salvamento de ambas máquinas es prácticamente nulo y que se toma un horizonte de planeación de 10 años?

Respuesta: *VPN* (Antigua) = – $839 162; *VPN* (Nueva) = – $876 892
No es aconsejable el cambio

6) Como director de planeación de una ciudad debe decidir entre dos propuestas para la construcción de un parque recreacional. La primera propuesta requiere de un inversión inicial de $12 millones y una ampliación dentro de ocho años a un costo de $5 millones. Se estima que los costos anuales de operación serán de $190 000 para el primer año, $210 000 para el segundo año, $230 000 para el tercer año y así sucesivamente. El ingreso será de $230 000 durante los primeros ocho años y de allí en adelante aumentará $30 000 por año hasta el año doce. Luego permanecerán constantes. La segunda propuesta requiere una inversión inicial, de $20 millones y tiene un costo anual de operación de $400 000. Se espera que los ingresos sean de $400 000 para el primer año y aumenten en $70 000 por año hasta el año 10 y de allí en adelante permanecerán constantes. Con una tasa del 20% decidir cuál es la mejor propuesta.

Respuesta: *VPN* (1ª propuesta) = – $13 354 470
VPN (2ª propuesta) = – $18 589 162
Con ambas se pierde, pero decidir 1ª propuesta.

7) Una compañía está considerando la compra de una máquina manual que cuesta \$30 000 y se espera tenga una vida útil de 12 años, con un valor de salvamento de \$3 000. Se espera que los costos anuales de operación sean de \$9 000 durante los primeros 4 años pero que desciendan en \$400 anuales durante los siguientes ocho años. La otra alternativa es comprar una máquina automatizada a un costo de \$58 000. Esta máquina solo duraría 6 años a causa de su alta tecnología y diseño delicado. Su valor de salvamento será de \$15 000. Por su automatización los costos de operación serán de \$4 000 al año. Seleccionar la máquina usando una tasa del 20%

Respuesta: VPN (manual) = – \$66 970; *VPN* (automática) = – \$88 475.
Decidir máquina manual.

8) Una ciudad necesita comprar equipos para hacer el aseo de sus calles y se presentan a estudio dos alternativas. La primera comprar tres máquinas con las siguientes características: costo de adquisición \$1 000 000 cada una; *CAO* año 1 \$500 000 y de ahí en adelante se va incrementando en \$200 000 cada año; salvamento \$100 000; vida útil 8 años. La segunda sería utilizar los servicios de 10 obreros que tendrían cada uno un salario de \$35 000 mensuales mas \$70 000 pagaderos al final de cada año por prestaciones sociales todo esto para el primer año, pero en cada uno de los siguientes años habrá un incremento del 25%. Determinar la mejor alternativa con una tasa del 28%

Respuesta: VPN (máquinas) –\$11 783 993; *VPN* (obreros) –\$31 193 899
Seleccionar máquinas

9) Determinar la mejor alternativa que tiene una fábrica para almacenar su materia prima y sus productos terminados, si ésta fábrica solo espera trabajar 4 años; al final de los cuales entrará en liquidación. La Alternativa A consiste en comprar un terreno en \$20 millones y construir una bodega, a un costo de \$46 millones; al final de los 4 años el terreno con la construcción podrán ser vendidos en \$120 millones. El *CAO* para el primer año, será de \$200 000 y, cada año siguiente, se incrementará en un 15%. La Alternativa B consiste en tomar en alquiler una bodega, a un costo de \$10 millones por año anticipado y, cada año, el valor del arriendo sube un 20%. Determinar la mejor alternativa, suponiendo que la tasa es del 20%.

Respuesta: VPN(A) = – \$8 755 775; *VPN(B)* = – \$40 000 000
Decidir construcción.

10) Determinar la mejor opción desde el punto de vista financiero, entre las siguientes opciones con vida útil indefinida: construir un puente colgante a un costo de \$300 millones con un costo anual de mantenimiento de \$300 000; cada 10 años, habrá que hacerle reparaciones mayores a un costo de \$3.5 millones. La otra alternativa es construir un puente en concreto, a un costo de \$250 millones con un costo anual de mantenimiento de \$100 000; cada 3 años deberá repavimentarse a un costo de \$2 millones y cada 10 años habrá que reacondicionar las bases del puente, a un costo de \$50 millones. Suponga un interés del 20%

Respuesta: Costo Capitalizado para el puente colgante = \$302 174 148
Costo Capitalizado puente concreto = \$262 877 942
Decidir puente concreto

11) Un artículo tiene un precio de lista de \$900 000 pero puede ser adquirida al contado con un descuento del 10% o puede ser vendida a plazos con una cuota inicial del 40% y el saldo en 10 cuotas mensuales de \$63 000. Suponiendo una tasa del 3.5% efectivo mensual, ¿Qué alternativa debe decidir?

Respuesta: *VPN* (Contado) = \$810 000; *VPN* (Crédito) = \$883 946
Decidir contado

12) Una fábrica tiene en estudio la posibilidad de comprar una máquina empacadora a un precio de \$800 000 y un costo mensual de mantenimiento de \$3 000 durante el primer año y de \$5 000 durante el segundo año y al final de éste tiempo podrá ser vendida en la suma de \$500 000. Con ésta máquina se puede suprimir un empleado que gana \$25 000 mensuales y para el segundo año habrá que aumentarle el sueldo en un 20%. Si la fábrica normalmente gana el 3.5% efectivo mensual en todas sus inversiones. ¿Es aconsejable adquirirla?

Respuesta: *VPN* (Máquina) = – \$641 987; *VPN* (Empleado) = – \$433 434
No se debe adquirir

13) Si en el problema anterior se supone que la máquina trabajará durante 7 años y que en cada año se aumenta el costo mensual de mantenimiento en \$2 000 y que al final de este tiempo la máquina no tendrá valor de salvamento. ¿La decisión anterior se mantendría si al empleado se le aumenta el sueldo todos los años un 25%?

Sugerencia: el crecimiento anual del gradiente que corresponde al mantenimiento es: L = \$29 203.92

Respuesta: *VPN* (Maquina) = – \$964 307; *VPN* (Empleado) = – \$1 027 626
Si debe adquirir.

14) Una almacén contrata los servicios de una empresa de sistemas que le suministra toda la información que necesite a un costo fijo de \$600 000 mensuales con un incremento anual pactado del 25% para los próximos 10 años, sinembargo es posible rescindir el contrato actualmente si se paga una multa de \$1 millón y en tal caso habría que adquirir un computador a un costo de \$2 millones el cual se volverá obsoleto al cabo de 5 años y para esa época podrá ser vendido en la suma de \$1 millón debiéndose adquirir uno nuevo a un costo estimado de \$20 millones el cuál tendrá una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$12 millones. Además será necesario contratar un empleado al cual se le puede pagar un sueldo mensual de \$100 000 y cada año habrá que aumentarle el sueldo en un 23% y al final de cada año se le reconocerá el valor de 2 sueldos adicionales por prestaciones sociales. ¿Qué alternativa debe escoger suponiendo una tasa del 4% efectivo mensual.

Respuesta: *VPN* (Contrato) = – \$23 521 349; *VPN* (Compra) = – \$8 957 818
Decidir compra.

15) Una máquina cuesta \$100 000, tiene una vida útil de un año y no tiene valor de salvamento. Una segunda máquina tiene un costo de \$500 000, una vida útil de 8 años y un valor de salvamento de \$100 000. Suponiendo un interés del 20% efectivo anual, decida cuál comprar. Use el *C.C.*

Respuesta: comprar la primera máquina

16) Un terreno debe ser cercado en alambre de púas, cada poste de madera cuesta \$40 y tiene una vida útil de 4 años; pero, si siendo nuevos se les hace un tratamiento químico, se puede prolongar la vida útil en 3 años más, ¿cuánto podrá pagarse por el tratamiento suponiendo una tasa del 28%? use *C.C.*

Respuesta: \$12.42

17) A una fábrica que utiliza actualmente una máquina que vale \$800 000, con una vida útil de 4 años y un valor de salvamento de \$150 000 le ofrecen otro modelo de máquina cuyo costo es de \$1 200 000, con vida útil de 10 años y valor de salvamento de \$200 000. Suponiendo una tasa del 22% debe cambiar de modelo? use *C.C.*

Respuesta: no debe cambiar de modelo.

18) Si la fábrica del ejemplo anterior se decide a cambiar de modelo, ¿cuánto podrá pagar por el nuevo modelo, de forma tal que su *costo capitalizado* no supere al modelo que tiene actualmente en uso?

Respuesta: \$1 179 474.

19) Un equipo de laboratorio tiene un costo inicial de \$200 000 y una vida útil de 10 años, al cabo de los cuales deberá sustituirse al mismo costo. ¿Cuánto podrá pagarse por un equipo similar que tiene una vida útil de 8 años y un valor de reposición de \$25 000 más que el costo inicial? Suponga que no hay valor de salvamento y una tasa del 25%. Use *C.C.*

Respuesta: \$182 272

20) Una fábrica desea comprar una máquina para su planta de acabados. El vendedor ofrece dos alternativas: la máquina A, cuyo costo es de \$500 000, tiene una vida útil de 3 años y un valor de salvamento \$100 000 y la máquina B, cuyo costo es de \$730 000, vida útil de 6 años y un valor de salvamento de \$250 000. ¿Por cuál máquina debe decidirse suponiendo un interés de: a) 30% b) 20% Use *C.C.*

Respuesta: a) Máquina A; b) Maquina B.

21) Una compañía minera utiliza camiones para llevar el mineral, desde la mina hasta el puerto de embarque. Cada camión cuesta $5 millones, tiene una vida útil de 2 años y un valor de salvamento de $500 000. Haciéndoles un tratamiento anticorrosivo al momento de la compra y luego al segundo año, la vida útil podrá alargarse a 4 años y tendrá un valor de salvamento de $1 000 000. ¿Cuánto podrá pagarse por este tratamiento, suponiendo un interés del 28% ? Use ***C.C.***

Respuesta: $1 821 246. A este costo es indiferente hacer o no el tratamiento anticorrosivo; por tanto para que sea atractivo, deberá pagarse una suma inferior a la indicada en la respuesta porque ese es el punto de equilibrio.

22) Para producir cierto artículo, una fábrica necesita hacer una inversión de $7 millones de los cuales, $2 millones deberán ser financiados por un banco que exige se le cancele el préstamo en 3 pagos anuales iguales, con intereses al 38%. La capacidad máxima de la fábrica es de 20 000 unidades al año, pero el primer año solo estará en capacidad de producir el 40%; el segundo año, el 50%; el tercer año, el 75%; el cuarto año, el 90% y el quinto año, el 100%. Cada artículo puede venderse en $2 000, durante el primero y segundo año; y en $2 400, del tercer año en adelante. Los costos de producción serán: materia prima $1 000 por unidad y cada año aumentará un 10%; por sueldos, la nómina del primer año será de $2 500 000 y aumentará todos los años un 20%. La maquinaria por valor de $5 millones será depreciada así: el primer año el 40%; el segundo año, el 30% y el tercer año, el 30%. Suponiendo una tasa de impuestos del 30% y un horizonte de planeación de 5 años, calcular:

a) el flujo neto de caja de cada año
b) evaluar el proyecto con una tasa del 45%

Respuesta:

a)

AÑO	0	1	2	3	4	5
FNC	– 5 000 000	3 451 190	3 597 974	9 299 535	10 445 400	9 473 800

b) *VPN* = $5 982 793

23) Para Montar una fábrica de helados es necesario adquirir refrigeradores y equipos a un costo de $10 millones y equipos de oficina con muebles y enseres por un costo de $5 millones. El aporte de los socios es de $12 millones y el resto será financiado por un banco que exige se le pague el préstamo en 4 años mediante pagos anuales uniformes, con intereses del 26% efectivo anual.

Los refrigeradores y equipos de producción pueden ser depreciados en línea recta durante 10 años y el equipo de oficina, muebles y enseres se depreciará en 5 años.

Para manejar la maquinaria es necesario contratar a un técnico al cual se le puede pagar la suma de $5 millones al año, con un incremento anual del 10%, por otra parte, al gerente y su secretaria se les puede pagar, entre ambos, la suma de $8 millones al año. Con un incremento anual del 9%.

Será necesario tomar en arriendo una bodega a un costo anual de $4 millones con incremento anual pactado del 8%. Del área total de esta bodega se destinará el 80% para la instalación de la planta y el resto para la administración.

El precio de venta, a los distribuidores, de cada helado puede ser de $2.200 y se cree que cada año podría incrementarse el precio en un 9%.

El estudio de mercados establece unas ventas para el primer año de 15.000 unidades, para el segundo año 23.000, para el tercer año 28.000 y del cuarto año en adelante las ventas se estabilizarían alrededor de unas 30.000 unidades.

El costo de la materia prima es de $400 por unidad y se estima que tenga un incremento anual del 8%.

Los costos de transporte serán para el primer año de $300.000 con un incremento anual del 9%.

El costo unitario de cada empaque es de $50 y se estima un incremento anual del 8%.

Se ha llegado a un acuerdo en el sentido de efectuar propaganda durante los primeros 3 años del proyecto a un costo anual de $5 millones y posteriormente de $1 millón por año.

La tasa impositiva es del 37.5%.

Suponiendo que los inversionistas desean una rentabilidad del 40% sobre la inversión determinar la viabilidad financiera del proyecto con un horizonte de planeación de 10 años.

a) determinar el flujo de caja del accionista y

b) calcular el VAN

c) calcular el precio mínimo de venta

d) el porcentaje máximo del incremente de la materia prima.

Respuesta:

Flujo de caja

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	–12 000 000	2 218 252	12 267 610	20 207 394	27 696 564	31 574 501

Año	6	7	8	9	10
Flujo	34 133 007	37 337 857	40 838 967	44 663 526	48 841 202

VAN = $30 980 852

precio mínimo de venta $1 524

incremento máximo de materia prima 39.7%

24) Calcular el VAN del problema anterior con un flujo de caja libre del proyecto.

Respuesta:

Año	0	1	2	3	4	5
FNC	–15 000 000	13 218 750	13 318 125	21 320 931	28 889 508	31 574 501

Año	6	7	8	9	10
FNC	34 133 007	37 337 857	40 838 967	44 663 526	48 841 202

VAN = $29 947 812

Costo anual uniforme equivalente

CAPITULO 10

El índice *Costo Anual Uniforme Equivalente, CAUE,* consiste en reducir todos los ingresos y todos los egresos a una serie uniforme equivalente de pagos de esta forma los costos durante un año de una alternativa se comparan con los costos durante un año de la otra alternativa.

Normalmente el período de comparación es un año de ahí el nombre *Costo Anual Uniforme Equivalente*, sinembargo, puede darse el caso de existir el costo mensual uniforme equivalente o con otra clase de período.

La ventaja de éste índice es que no exige que se tenga que tomar tiempos iguales como en el caso del *VPN* sino que únicamente se comparan los costos que en forma equivalente se hayan causado durante un año.

Al hacer las gráficas de la línea de tiempo utilizaremos la convención ya establecida, ingresos con flechas hacia arriba y egresos con flechas hacia abajo.

También puede ser utilizado en aquellos casos en que el uso del *VPN* puede ser dispendioso, como en el caso en que el mínimo común múltiplo de las vidas útiles de las alternativas sea muy grande.

Ejemplo 1

Se necesita adquirir un motor para la planta de acabados de una fábrica, en el mercado existen dos marcas de motores que cumplen con las especificaciones técnicas de potencia, velocidad, eficiencia, etc.

La información que desde el punto de vista económico se proporciona, es la siguiente:

		A	B
1)	Costo inicial	100 000	500 000
2)	Costo mensual de operación	5 000	10 000
3)	Años de vida útil	5	20
4)	Valor de salvamento	15 000	150 000
5)	Reparación general al año 12.	–	200 000

Con una tasa del 2.5% efectivo mensual hallar la mejor alternativa.

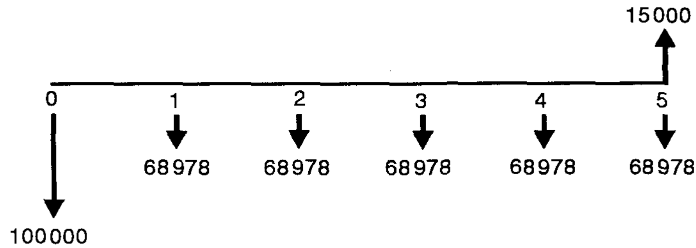
Solución:

Alternativa A

El costo mensual de operación se puede reducir a un costo anual de operación así:

$$CAO = 5\,000\ S_{\overline{12}|2.5\%} = \$68\,978$$

y la Alternativa A puede ser reducida a:



Ahora debemos hallar una tasa anual equivalente al 2.5% efectivo mensual debido a que los $68 978 son costos anuales.

$$(1+0.025)^{12} = (1+i)^{1} \quad \text{entonces} \quad i = 34.489\% \text{ efectivo anual}$$

Para calcular el *CAUE* será necesario:

a) Dividir los $100 000 en 5 pagos anuales uniformes de **$*X*** c/u así:

$$100\,000 = X\ a_{\overline{5}|34.489\%} \qquad \text{entonces} \qquad X = \$44\,633$$

b) Dividir los $15 000 en 5 pagos anuales uniformes de **$*Z*** así:

$$15\,000 = S_{\overline{5}|34.489\%} \qquad \text{entonces} \qquad Z = \$1\,522$$

Usando el signo negativo para los egresos, el *CAUE* será :

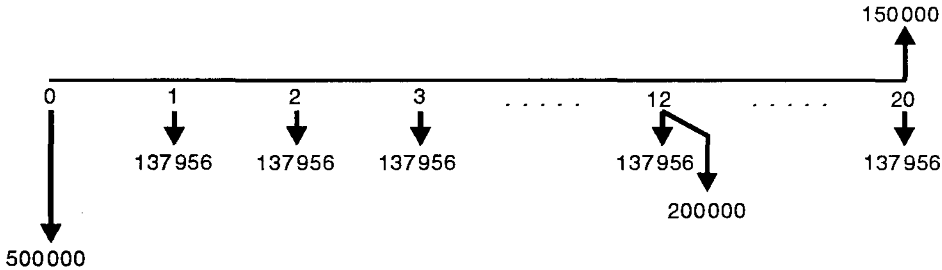
$$-68\,978 - 44\,633 + 1\,522 = -\$112\,089$$

Alternativa B

En igual forma que en la Alternativa A, el costo mensual de operación de $10 000 deberá ser convertido en un *CAO* así:

$$CAO = 10\,000\ S_{\overline{12}|2.5\%} = \$137\,956$$

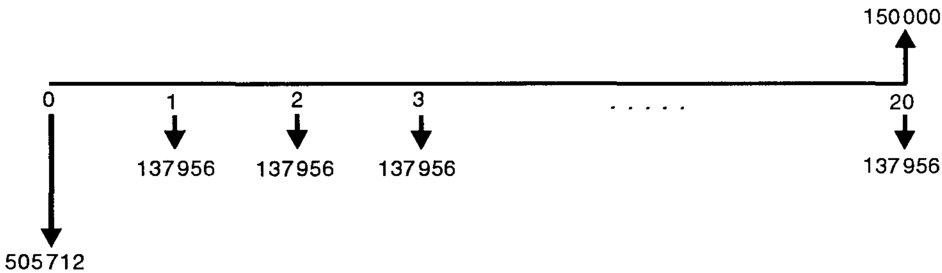
y la Alternativa B puede ser reducida a:



Los \$200 000 que figuran en el año 12 pueden ser llevados a valor presente y luego sumados con los \$500 000 así:

$$200\,000(1+0.34489)^{-12} + 500\,000 = \$505\,712$$

y la gráfica puede ser reducida a:



Para calcular el *CAUE* será necesario:

a) dividir los \$505 712 en 20 pagos anuales de **\$*X*** c/u

$$505\,712 = X\, a_{\overline{20}|}34.489\% \quad \text{entonces} \quad X = \$174\,882$$

b) dividir los \$150 000 en 20 pagos anuales de **\$*Z*** c/u

$$150\,000 = Z\, S_{\overline{20}|}34.489\% \quad \text{entonces} \quad Z = \$138$$

Finalmente: $-174\,882 - 137\,956 + 138 = -\$312\,700$

Decisión optar por el motor de la marca A

Observese que para hallar la cuota anual de una cantidad que está al principio se divide por $a_{\overline{n}|}i$ y si está al final se divide por $S_{\overline{n}|}i$

Ejemplo 2

El jefe de producción de una fábrica debe decidir entre dos máquinas A y B. Las caracterízticas de cada una son:

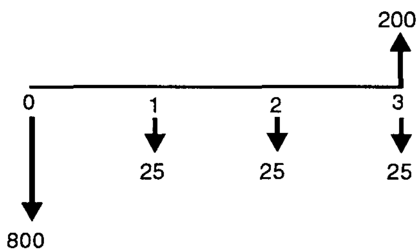
Maq.	*C*	*K*	*S*	*CAO*
A	$800 000	3 años	200 000	25 000
B	$600 000	2 años	150 000	30 000

Con una tasa del 36% determinar la mejor alternativa.

Solución:

Alternativa A

La gráfica correspondiente a un solo ciclo es:



cifras en miles de pesos

Para calcular el *CAUE* será necesario:

a) dividir los $800 000 en 3 pagos anuales uniformes de **$X** c/u

$$800\,000 = X\, a_{\overline{3}|}36\% \quad \text{entonces} \quad X = \$478\,042$$

b) dividir los $200 000 en 3 pagos anuales uniformes de **$Y** c/u

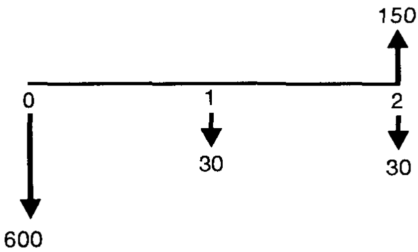
$$200\,000 = Y\, s_{\overline{3}|}36\% \quad \text{entonces} \quad Y = \$47\,510$$

Usando el signo negativo para los egresos, el *CAUE* será:

$$-478\,042 - 25\,000 + 47\,510 = -\$455\,532$$

$$CAUE \text{ Alternativa A} = -\$455\,532$$

Alternativa B:



cifras en miles de pesos

Para calcular el *CAUE* será necesario:

a) dividir los $600 000 en 2 pagos anuales de *$X* c/u

$$600\ 000 = X a_{\overline{2}|36\%} \quad \text{entonces} \quad X = \$470\ 237$$

b) dividir los $150 000 en 2 pagos anuales de *$Y* c/u

$$150\ 000 = Y S_{\overline{2}|36\%} \quad \text{entonces} \quad Y = \$63\ 559$$

$$-470\ 237 - 30\ 000 + 63\ 559 = -\$436\ 678$$

CAUE de la Alternativa B = – $436 678

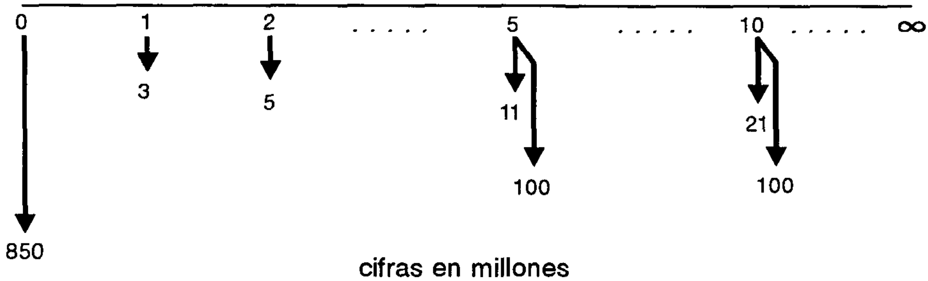
Decisión: Alternativa B

Ejemplo 3

Se plantea la construcción de un puente y se han presentado dos proyectos, el primero es un puente colgante a un costo de $850 millones, cada año habrá que darle mantenimiento a la plataforma de asfalto a un costo de $3 millones, se estima que las reparaciones serán cada vez mayores y que éstas aumentarán de precio todos los años en $2 millones y cada 5 años habrá que cambiar los cables que sostienen el puente a un costo fijo de $100 millones, el segundo proyecto es un puente en concreto a un costo de $900 millones, cada 3 años habrá que reacondicionar las bases a un costo de $25 millones, el costo anual de mantenimiento se puede considerara fijo en $5 millones. Con una tasa del 25% determinar la mejor alternativa.

Solución:

Puente colgante:



cifras en millones

El procedimiento para calcular el *CAUE* será el siguiente:

a) calculamos el valor presente de un gradiente lineal infinito (correspondiente al mantenimiento de la plataforma de asfalto) y lo dividimos en una serie infinita de pagos de *$X* al final de cada año así:

$$VP = \frac{3}{0.25} + \frac{2}{(0.25)^2} = \$44 \text{ millones}$$

Los $44 millones de hoy, se dividen en una serie infinita de pagos anuales de $X, para ello, reemplazamos en:

$$VP = \frac{R}{i}$$

que corresponde a la fórmula del valor presente de una anualidad infinita, entonces:

$$44 = \frac{X}{0.25} \quad \text{de donde} \quad X = \$11 \text{ millones}$$

b) dividimos un pago de $100 millones en una serie uniforme de 5 pagos de *$Y* al final de cada año así:

$$100 = Y\, S_{\overline{5}|}25\% \quad \text{entonces} \quad Z = \$12.18 \text{ millones}$$

c) dividimos los $850 millones en una serie infinita de pagos de *$Z* al final de cada año así:

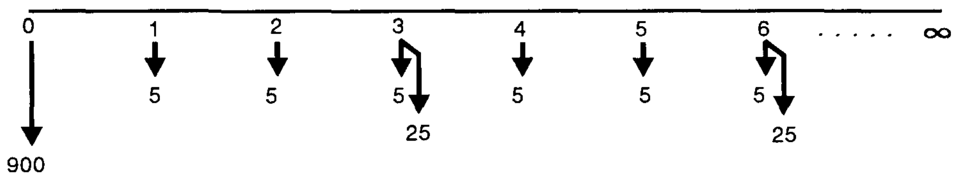
$$850 = \frac{Z}{0.25} \quad \text{entonces} \quad Z = \$212.5 \text{ millones}$$

d) Entonces el *CAUE* del puente colgante será:

$$X + Y + Z = 11 + 12.18 + 212.5 = \$235.68 \text{ millones}$$

pero le agregamos el signo negativo desde que todas las cantidades son egresos, esto es: – $235.68 millones

Puente de concreto:



cifras en millones

El procedimiento para calcular el *CAUE* será el siguiente:

a) dividimos los $900 millones en una serie infinita de pagos de $\$X$ c/u, al final de cada año así:

$$900 = \frac{X}{0.25} \quad \text{entonces} \quad X = \$225 \text{ millones}$$

b) dividimos un pago de $25 millones en una serie uniforme de 3 pagos de $\$Y$ c/u hechos al final de cada año.

$$25 = Y S_{\overline{3}|}25\% \text{ de donde se obtiene: } Y = \$6.56 \text{ millones}$$

c) El costo anual de mantenimiento ya viene dado en $5 millones

d) El *CAUE* del puente de concreto será:

$$X + Y + 5 + 22.5 + 6.56 + 5 = \$236.56 \text{ millones}$$

pero como todas las cantidades son egresos le agregamos el signo negativo y quedará así: – $236.56 millones

Observación: la decisión es la misma si se hubiera utilizado el *VPN*

Ejemplo 4

Una fábrica está transladando sus productos semielaborados a la unidad de acabados, en una forma muy rudimentaria; utiliza carros arrastrados por caballos, a un costo actual de $1 860 000 y estima que cada año aumentará su costo en un 23%; por lo tanto, ha estudiado dos posibilidades para aumentar su eficiencia. La primera consiste en una banda transportadora con una extensión de 850 metros; el costo actual del metro es de

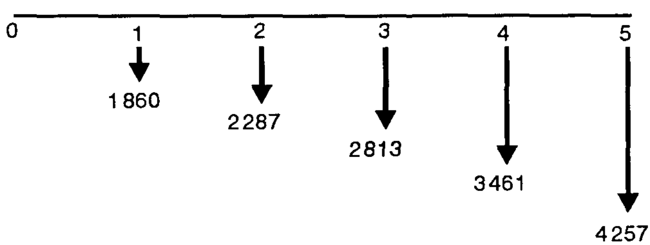
$4 000 y se estima que tendrá una vida útil de 5 años. El costo anual de operación se espera sea de $800 000, para el primer año, y cada uno de los siguientes años, sus costos se elevarán constantemente en $85 000, al final de los cuales no habrá valor de salvamento. La segunda posibilidad consiste en utilizar un tren conformado por 3 vagones remolcados por un tractor; además, será necesario construir un puente de madera a un costo de $1 500 000, con una vida útil de 5 años. El costo del tractor es de $3 000 000 y el de cada vagón, de $200 000; la vida útil de todo el tren se espera sea de unos 5 años, tendrá un valor de salvamento de $1 300 000 y se estima que su costo anual de operación sea constante en unos $400 000; pero, al final del tercer año, deberá hacerse una reparación general a un costo de $600 000. Suponiendo una tasa del 25%, ¿qué debe hacer?

Solución :

Realmente se presentan tres alternativas; la primera sería; la de no hacer nada es decir, seguir trabajando en forma rudimentaria la segunda sería la compra de la banda transportadora y la tercera sería la compra del tren.

Comenzamos el análisis calculando el *CAUE* para la alternativa de no hacer nada.

Año	1	2	3	4	5
CAO	1 860 000	2 287 800	2 813 994	3 461 213	4 257 952

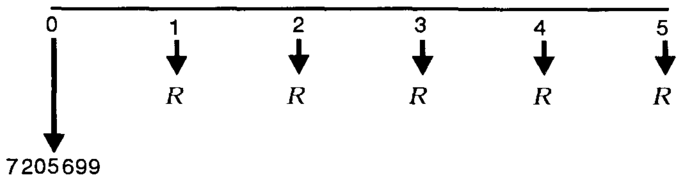


en miles de $

Para calcular el *CAUE*, debemos convertir este gradiente en una serie de pagos anuales uniformes; entonces, el primer paso será hallar el valor presente de la serie de pagos haciendo uso de la fórmula del gradiente geométrico:

$$X = \frac{-1\,860\,000\left[(1+0.23)^{5}(1+0.25)^{-5}\right]}{0.23-0.25} = -\$7\,205\,699$$

El valor presente del gradiente lo dividimos en una serie uniforme de 5 pagos anuales de *$R* así:



$$-7\,205\,699 = R\, a_{\overline{5}|25\%}, \quad \text{de donde se obtiene que} \quad R = -\$2\,679\,416$$

el signo negativo indica que es un costo que se tiene cada año:

$$CAUE \text{ (no hacer nada)} = -\$2\,679\,416$$

Ahora analizaremos la compra de la banda transportadora:

$$\text{Costo total} = 850 \times 4\,000 = \$\,3\,400\,000$$

Año	1	2	3	4	5
CAO	800 000	885 000	970 000	1 055 000	1 140 000

Igual que en la alternativa anterior, hallamos el valor presente de la serie de pagos pero, usando la fórmula del valor presente del gradiente lineal.

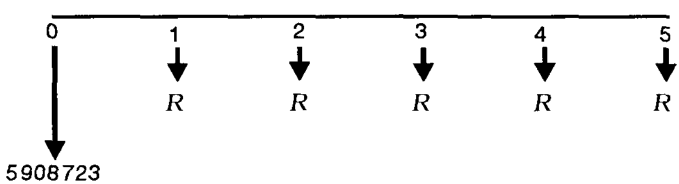
$$X = 800\,000\, a_{\overline{5}|25\%} + \frac{85\,000}{0.25}\left[a_{\overline{5}|25\%} - 5(1+0.25)^{-5}\right]$$

$$X = \$2\,508\,723$$

A este valor habrá que adicionarle el costo de la banda transportadora, por lo tanto, el costo total será:

$$2\,508\,723 + 3\,400\,000 = \$5\,908\,723$$

Para calcular el *CAUE* dividimos el valor anterior en una serie de 5 pagos anuales de **$R** c/u así:



$$-5\,908\,723 = R\, a_{\overline{5}|25\%} \quad \text{entonces} \quad R = -\$2\,197\,139$$

como todos son costos el *CAUE* será negativo

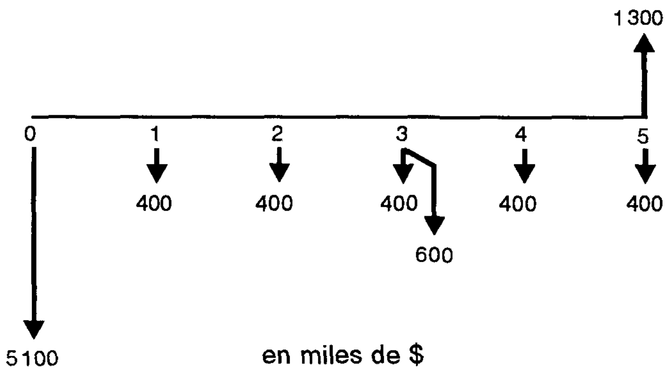
$$CAUE \text{ (banda transportadora)} = -\$2\,197\,139$$

Ahora analizaremos lo que pasa con el tren.

El costo total será:

Valor del tractor	=	3 000 000
Valor de los 3 vagones	=	600 000
Costo del puente	=	1 500 000
Total		$5 100 000

El dibujo correspondiente a esta alternativa será:



en miles de $

$$CAUE = \frac{-5\,100\,000}{a_{\overline{5}|}25\%} - 400\,000 - \frac{600\,000(1+0.25)^{-3}}{a_{\overline{5}|}25\%} + \frac{1\,300\,000}{s_{\overline{5}|}25\%}$$

$$CAUE \text{ (tren)} = -\$2\,252\,249$$

Como el *CAUE* más barato es el que corresponde a la banda transportadora nos decidimos por esta alternativa.

Otro aspecto que debe tenerse en cuenta en este caso es el factor social, puesto que con esta alternativa se dejarían cesantes a las personas encargadas de manejar los carros de caballos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Una ciudad planea canalizar el rio que la atraviesa, a un costo de $100 millones, el *CAO* es de $ 5 millones y, cada 4 años, se requerirá un mantenimiento general, a un costo de $30 millones; además, la señalización del canal tendrá que ser

restaurada cada 5 años, a un costo de \$6 millones. Se supone que la obra de canalización tiene una duración indefinida. Calcular el *CAUE*, con tasa del 20%

Respuesta: CAUE: \$31 394 952

2) El ejecutivo de una fábrica propone adquirir una prensa, cuyo costo es de \$2 millones; el dinero necesario puede ser adquirido con un préstamo del banco ABC, el cual exige le sea devuelto en pagos mensuales uniformes, durante 3 años y con un interés del 33% CM. La prensa tiene una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de \$400 000. Si se espera que la prensa produzca unos ingresos mensuales de \$70 000 y que la tasa del inversionista es del 45.6% CM. ¿Debe adquirirse?

Respuesta: representaremos por *CMUE* al costo mensual uniforme equivalente. *CMUE* = – \$1 153 no adquirir.

3) Determinar el edificio que deberá construirse si el edificio A tendrá un costo de \$50 millones y producirá unos ingresos netos anuales de \$2 millones y el edificio B tendrá un costo de \$57 millones e ingresos netos anuales de \$2.8 millones. En ambos casos se estima una vida útil de unos 30 años; el valor del salvamento será prácticamente nulo y se requerirá una inversión adicional de \$5 millones para la compra del terreno, el cual podrá ser vendido al cabo de 30 años en \$1 200 millones. Suponga que la tasa del inversionista es de a) 36% y b) 12%

Respuestas: a) *CAUE* (A) = – \$17 759 357, *CAUE* (B) = – \$19 479 606. En este caso es mejor no construir porque hay pérdidas en ambos situaciones. b) *CAUE* (A) = \$144 488, *CAUE* (B) = \$75 482 Ahora la decisión está por el edificio A

4) Una empresa requiere que sus vendedores se movilicen en vehículo por razones de distancia, ahorro de tiempo y prestigio; estos vehículos no pueden ser de más de 3 años de antigüedad. Se han presentado a estudio dos posibilidades: la primera tomar en arriendo los vehículos, cuyo costo sería el siguiente: primer año \$450 000 y, después, se incrementa cada año un 20%. Estas sumas serán pagaderas al principio de cada año. La segunda alternativa es comprar vehículos a un costo inicial de \$4 millones c/u; el costo de seguros e impuestos es del orden de \$400 000 todos los años y se estima el *CAO* en \$25 000 para el primer año, \$30 000 el segundo año y \$38 000 el tercer año. Debido a un proceso inflacionario, el valor del vehículo al cabo de los tres años se estima en \$7 millones. Si la empresa utiliza una tasa del 25%, determinar la mejor alternativa.

Respuesta: CAUE arriendo \$664 303, *CAUE* compra \$643 164. Decidir compra.

5) Desea montarse una fábrica que necesita energía eléctrica para su funcionamiento, en la región, no es posible obtener energía de la red pública, por lo tanto es

indispensable construir su propia planta. Se han considerado dos posibilidades: la primera consiste en construir una pequeña represa en lo alto de una montaña, la cual es alimentada por un río; el agua podrá salir de la represa a través de una tubería que alimentaría una unidad turbogeneradora. El costo inicial de éste proyecto sería de: $300 millones para la compra del terreno y construcción de la represa, con un período de vida útil indefinido; requerirá una limpieza anual de malezas y sedimento, a un costo de $200 000. Además se requiere invertir $60 millones en la compra de la unidad turbogeneradora, la cual tiene una vida útil de 15 años con un valor de salvamento de $10 millones y un *CAO* de $1 millón. La segunda alternativa es la compra de una unidad termo-eléctrica, a un costo de $200 millones, un *CAO* de $15 millones, una vida útil de 10 años y un valor de salvamento de $18 millones. Suponiendo que la fábrica utilizará una tasa del 23% y que la generación de energía eléctrica debe durar por tiempo indefinido, decida la alternativa que debe tomar.

Respuesta: *CAUE* Hidroeléctrica: $84 539 553
CAUE Termoeléctrica: $67 043 940
Decidir Termoeléctrica.

6) Para mejorar las vías de comunicación de un municipio, es necesario construir un puente; se han presentado dos alternativas: la primera es un puente en concreto, a un costo de $100 millones, con una vida útil de 100 años (para efectos prácticos 100 o más años pude considerarse como de vida útil infinita, para tasas superiores al 10% se puede ir acortando el tiempo); cada 4 años, deberá ser repavimentado, a un costo de $2 millones. Los costos anuales de reparaciones menores e inspecciones se estima no superan los $100 000 (*CAO* = $100 000). La segunda alternativa es construir un puente colgante de madera, con cables de acero, a un costo de $20 millones, con una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de $1 millón. Cada 3 años los cables de acero deberán ser reemplazados a un costo de $7 millones y tendrá un *CAO* de $600 000. Si se considera una tasa del 15%, ¿Qué alternativa debe escoger?

Respuesta: *CAUE* concreto $15 500 531; *CAUE* colgante: $6 986 681
Decidir por el puente colgante.

7) Una fábrica necesita adquirir un motor para accionar un molino. Suponiendo una tasa del 25% decidir entre los motores A y B, teniendo en cuenta la siguiente información: Motor A: costo $1 200 000; vida útil 10 años; el *CAO* que incluye combustible, aceite y reparaciones menores se estima, el primer año, $120 000 y, cada año, su costo de operación se incrementará un 10%; pero habrá que hacer una reparación mayor en el sexto año, a un costo estimado de $600 000 y tendrá un salvamento de $400 000. Motor B: costo $800 000; vida útil 7 años; el *CAO* del primer año se estima en $700 000 y, cada año, se incrementará en $10 000; cada 3 años, deberá hacerse una reparación mayor a un costo $360 000 y tendrá un salvamento de $100 000.

Respuesta: *CAUE* (A) = $529 768; *CAUE* (B) = $1 056 025. Decidir por el motor A.

8) Determinar la mejor opción desde el punto de vista económico, entre las siguientes opciones con vida útil indefinida: construir un puente colgante a un costo de \$300 millones con un costo anual de mantenimiento de \$300 000; cada 10 años, habrá que hacerle reparaciones mayores a un costo de \$3.5 millones. La otra alternativa es construir un puente en concreto, a un costo de \$250 millones con un costo anual de mantenimiento de \$100 000; cada 3 años deberá repavimentarse a un costo de \$2 millones y cada 10 años habrá que reacondicionar las bases del puente, a un costo de \$50 millones. Se estima que el valor de los peajes son del orden de \$60 millones al año. Suponga un interés del 20%

   Respuesta: *CAUE* (colgante) = – \$434 830; *CAUE* (concreto) = \$7 424 412.
   Decidir puente de concreto.

9) Un inversionista, que solo espera trabajar 4 años en el país, al cabo de los cuales piensa radicarse en el exterior, por tal motivo sus proyectos de inversión podrán durar un máximo de 4 años. El inversionista dispone de un capital de \$50 millones para realizar algún proyecto, para estudio tiene dos alternativas así:
   Alternativa I : Comprar una fábrica a un costo de \$46 millones y venderla a los 4 años en \$105 millones y además, producirá unos ingresos netos anuales de \$10 millones los cuales crecerán cada año un 25%, el dinero restante podría ser invertido en depósitos a termino fijo que la pagarán un interés anual del 28%
   Alternativa II : Tomar en arriendo un edificio por el cual pagaría \$5 millones como canon de arrendamiento anual pero pagadero por año anticipado y el valor del arriendo subirá todos los años un 20%. En el contrato se estipula la que se podrán hacer reparaciones y refacciones por valor de \$40 millones y que al cabo de 4 años pasarán a ser propiedad del dueño del edificio, además y mientras tanto, se podrá subarrendar. El inversionista cree que puede cobrar por el arriendo unos \$20 millones para el primer año cobrados por año anticipado y que el incremento anual será del orden del 20%. El resto del dinero podrá ser invertido en depósitos a termino fijo en las mismas condiciones de la alternativa I. Suponiendo que el inversionista espera obtener un rendimiento del 40% ¿cuál de las dos alternativas debe tomar?

   a) sin reinversión
   b) con reinversión al 28% de toda liquiedez que se presente durante la vida del proyecto.

   Respuestas: a) CAUE (Alternativa I) = \$2 393 534;
   CAUE (Alternativa II) = \$ 428 613
   Decidir Alternativa II.

   b) Con reinversión CAUE (Alternativa I) = \$653 180;
   CAUE (Alternativa II) = – \$2 626 036
   Decidir Alternativa I.

   Analice la razón por la cual al evaluar el proyecto con reinversión se invierte la decisión.

10) Una fábrica necesita adquirir una máquina para su planta de acabados. Puede adquirir la máquina A, a un costo de $300 000; tiene una vida útil de 4 años y, al final de este tiempo, podrá venderse en $60 000. El costo anual de operación, que incluye combustibles lubricantes y mantenimiento, se estima en $25 000. También puede adquirirse la máquina B, a un costo de $500 000, con una vida útil de 6 años, al final de los cuales podrá ser vendida en $100 000. A los 3 años de uso deberán ser cambiados los pistones y las bielas, a un costo estimado de $40 000; en compensación, el costo anual de operación es apenas de solo $5 000. Suponiendo una tasa del 20%, ¿cuál debe adquirirse?

Respuesta: *CAUE(A)* = – $129 708 *CAUE(B)* = – $152 243
Decidir máquina A.

11) El estado desea realizar un proyecto de irrigación, con duración indefinida y ha pedido a las compañías de ingenieros A y B que le presenten propuestas, las cuales se muestran el siguiente cuadro:

	A	B
CI	30 000	60 000
CAO	4 000	500

Si el estado utiliza una tasa del 22%, determinar: ¿qué compañía debe seleccionarse?

Respuesta: *CAUE(A)* = $10 600; *CAUE(B)* = $13 700
Decidir compañía A

12) Al alcalde de un municipio le han presentado dos propuestas para establecer en forma indefinida la navegación por un río. La propuesta A consiste en dragar el río para remover los sedimentos acumulados; esta operación deberá hacerse varias veces al año según sea necesario, a un costo fijo de $800 000 pagaderos al final de cada año; además, se hace necesaria la adquisición de una draga, cuyo precio es de $10 millones, posee una vida útil de 10 años y tiene un valor de salvamento de $2 millones. La propuesta B exige la canalización del río a un costo inicial de $15 millones; este canal requerirá de un mantenimiento menor cada año, a un costo de $40 000 y un mantenimiento completo el cual incluye el mantenimiento menor cada 4 años, a un costo de $2 millones. Suponiendo que el gobierno utiliza una tasa del 25%, ¿qué propuesta debe aceptar?

Respuesta: *CAUE (A)* = – $3 540 581; *CAUE (B)* = – $4 129 946
Decidir propuesta A.

Tasa interna de retorno TIR CAPITULO 11

INTRODUCCIÓN

La tasa interna de retorno que representaremos por TIR es uno de los índices que más aceptación tiene dentro del público porque mide la rentabilidad de una inversión, sin embargo, dentro de los especialistas no tiene la misma aceptación porque se presta a muchos errores. Hay ocasiones en que la decisión que se tome con el VPN no coincide con le decisión que se tome con la TIR. Cuando esto ocurre es porque la TIR no se ha aplicado correctamente y en tales circunstancias será necesario utilizar otra técnica hasta hacer que los resultados obtenidos con la TIR coincidan con los resultados que se obtengan con el VPN.

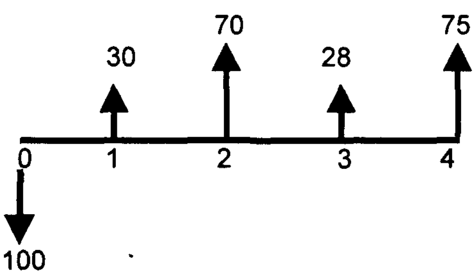
Financieramente la TIR es la tasa a la cual son descontados los flujos de caja de forma tal que los ingresos y los egresos sean iguales; desde el punto de vista matemático la TIR es la tasa a la cual el VPN se hace cero.

Existen dos clases de flujos de caja: los flujos convencionales y los flujos no convencionales.

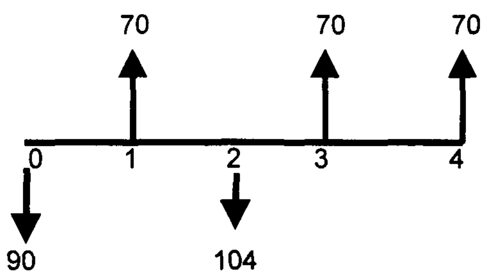
Los flujos convencionales son aquellos donde primero aparecen los egresos y después aparecen los ingresos o viceversa.

Los flujos no convencionales son aquellos donde figuran intercalados los ingresos y los egresos.

Ejemplos de flujos de caja



flujo convencional



flujo no convencional

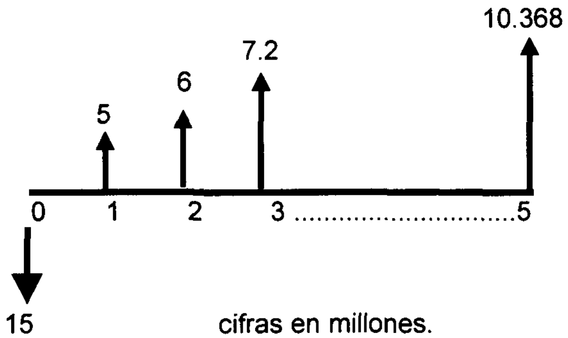
El procedimiento que se usa para calcular la TIR varía dependiendo del número de alternativas a analizar y de la forma como se encuentren distribuidos los ingresos y los egresos a lo largo del horizonte de planeación; veamos algunos ejemplos:

Cuando ingresos y egresos tienen una duración definida.

Ejemplo 1

Una persona está pensando en construir un parqueadero, para tal fin toma en alquiler un lote por un plazo de 5 años. El costo de la construcción, incluidos los impuestos y las licencias, son del orden de $15 millones; se estima que los ingresos después de descontar el valor de los arriendos e impuestos, es decir los ingresos netos, son del orden de $5 millones los cuales crecerán cada año aproximadamente de acuerdo al índice de inflación que se estima en un 20% anual. Si el inversionista gana normalmente en todos sus negocios un 35%, ¿es aconsejable este negocio?

Solución:



cifras en millones.

$$\text{VPN} = -15 + \frac{5[(1+0.2)^5(1+i)^{-5}-1]}{0.2-i} = 0$$

La solución manual requiere la interpolación, para ello escogemos valores para i no muy alejados entre sí de tal forma que la función sea una vez positiva y otra negativa así:

Escojamos inicialmente una tasa del 30% y efectuemos los cálculos para hallar f(i)

$$\text{VPN}(30\%) = -15 + \frac{\left[(1+0.2)^5(1+0.3)^{-5}-1\right]}{0.2-0.3} = 1.49115$$

igual procedimiento seguimos con la tasa del 34% y encontramos que f(34%) = 0.14476
Para poder interpolar es necesario que la función sea una vez positiva y otra negativa, hasta ahora tenemos dos valores positivos, nos falta hallar un valor negativo, como ya estamos próximos ensayamos con la tasa del 35% y por el mismo procedimiento tenemos que VPN(35%) = – 0.1643

i	f(i)
30%	1.49115
34%	0.14476
35%	- 0.1643

Para interpolar buscamos los valores más próximos esto es: 34% y 35% y planteamos las proporciones así:

$$\left[\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{l} 34 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 0.14476 \\ 0 \end{array}\right] \\ 35 \ldots\ldots\ldots\ldots & -0.1643 \end{array}\right]$$

Se puede establecer la siguiente proporción:

34 menos 35 es a 34 menos X, e igual a 0.14476 menos – 0.1643 es a 0.14476 menos 0. escrito en forma algebraica será:

$$\frac{34-35}{34-X}=\frac{0.14476-(-0.1643)}{0.14476-0}$$

Al despejar X de esta ecuación se tiene que X = 34.468%, esta respuesta es aproximada, sinembargo el error que se pueda cometer es despreciable dado que el intervalo que se ha tomada para interpolar es apenas un punto porcentual.

Finalmente llegamos a la conclusión que el proyecto no debe ser aceptado porque la TIR es inferior a la tasa del inversionista que es del 35%, es más, aún suponiendo que el proyecto generara el 35% no sería aceptado por el inversionista, aunque financieramente le es indiferente porque él preferirá continuar con sus negocios tradicionales, los que ya conoce que le generan el 35% antes que comprometer recursos en un nuevo proyecto desconocido para él. Para que el inversionista se interese habría que ofrecerle una tasa más alta que haga atractivo el proyecto, esta tasa se denomina tasa mínima atractiva de retorno que representaremos por TMAR determinada según el criterio del inversionista.

TMAR

Para complementar un poco más el concepto de la TMAR diremos que su valor debe ser un poco más alto que la tasa a la cual normalmente el inversionista realiza sus inversiones, si escasamente la TMAR iguala a la tasa del inversionista, él preferirá seguir realizando sus inversiones normales y para que acepte un proyecto nuevo deberá ofrecérsele una tasa mayor que compense el riesgo de un proyecto nuevo. Por otra parte, la tasa del inversionista debe ser superior a la inflación local porque si el inversionista coloca su dinero por debajo de la inflación está obteniendo una rentabilidad real negativa. Ese excedente sobre la tasa del inversionista se denomina el premio al riesgo o spread.

En general podemos concluir que si TIR>TMAR el proyecto es bueno y si TIR<TMAR el proyecto no es aconsejable

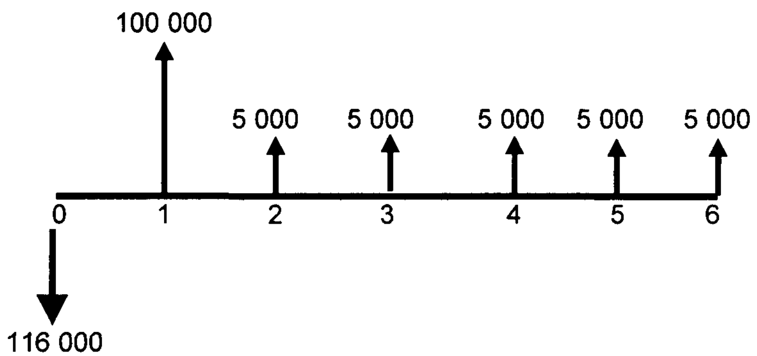
Inconsistencia entre el VAN y la TIR

Hay ocasiones en que un proyecto es seleccionado usando el VPN y cuando se usa la TIR es seleccionado otro proyecto diferente. Esta inconsistencia se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2

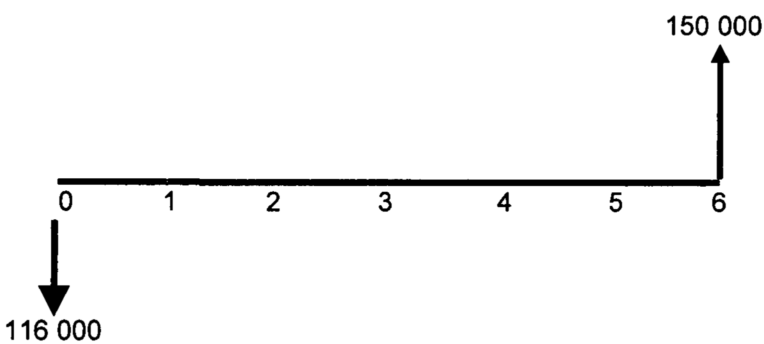
Supongamos que para un inversionista la TIO es del 3% mensual, con esta tasa seleccionar uno de los siguientes proyectos:
Proyecto A
Requiere de una inversión inicial de $116 000, producirá un ingreso de $100 000 en el primer año y en cada uno de los años 2 al 6 producirá ingresos de $5 000.
Proyecto B
Requiere de una inversión inicial de $116 000 y al final del año 6 producirá un ingreso de $150 000.

Proyecto A:



$$VPN(A) = -116\,000 + 100\,000(1+0.03)^{-1} + 5\,000 a_{\overline{5}|3\%}(1+0.03)^{-1} = \$3\,318.97$$

Proyecto B



$$VPN(B) = -116\,000 + 150\,000(1+0.03)^{-6} = \$9\,622.64$$

El análisis usando el VPN indica que es mejor el proyecto B puesto que VPN(B)>VPN(A)

Ahora hagamos el análisis usando la TIR para escoger el proyecto

Para calcular la TIR del proyecto A hacemos que el VPN(A) = 0 y dejamos la tasa como incógnita, esto es:

$$0 = -116\,000 + 100\,000(1+i)^{-1} + 5\,000(1+i)^{-1} + 5\,000(1+i)^{-2} + 5\,000(1+i)^{-3} + 5\,000(1+i)^{-4} + 5\,000(1+i)^{-5} + 5\,000(1+i)^{-6}$$

La solución manual requiere que se haga por interpolación y la solución por calculadora es 4.91326312259% que podemos aproximar a 4.91%

entonces TIR(A) = 4.91%

Para calcular la TIR del proyecto B hacemos que el VPN(B) = 0 y dejamos la tasa como incógnita, esto es:

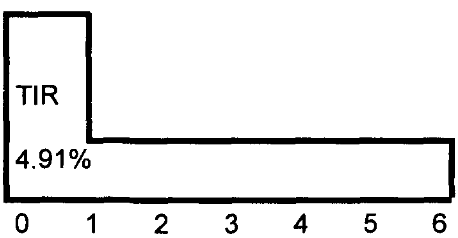
$$0 = -116\,000 + 150\,000(1+i)^{-6}$$ de donde se obtiene que TIR(B) = 4.38%

El análisis a través de la TIR nos indica que el proyecto A es mejor que el proyecto B puesto que TIR(A)>TIR(B)

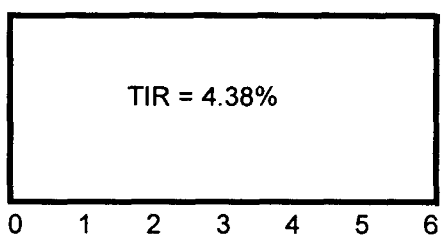
Según el índice VPN se debe optar por el proyecto B, pero según el índice TIR es mejor el proyecto A. Entonces ¿cuál de los dos proyectos es mejor para invertir?

Para solucionar la disyuntiva debemos analizar lo que ocurre con los dineros que están invertidos en cada proyecto.

proyecto A



proyecto B



En el proyecto A la inversión de $116 000 solo dura un mes porque al cabo del mes está reintegrando $100 000 y en los 5 meses restantes reintegra de a $5 000 mensuales. En cambio en el proyecto B la inversión de $116 000 dura 6 meses, y aunque estuvo colocado el dinero a una tasa menor el resultado final es que la ganancia en pesos de hoy es superior a la que genera el proyecto A.

El problema básicamente consiste en que la TIR solo mide la rentabilidad de los dineros que permanecen invertidos en el proyecto y no toma en cuenta los dineros que son liberados o los toma en cuenta suponiendo que los reinvierte a la misma tasa del proyecto lo cual es un error porque no necesariamente los dineros se reinvierten a la misma tasa del proyecto.

Para solucionar esta dificultad debemos tener en cuenta la reinversión y esta nueva TIR recibe el nombre de TIR Modificada que se representa por TIRM, otros autores la llaman VTR que significa "verdadera tasa de retorno". En este texto utilizaremos el nombre de TIRM.

Debemos dejar muy en claro que la TIRM elimina la inconsistencia de ordenamiento entre la TIR y el VAN en la gran mayoría de los casos, sinembargo quedan unos pocos casos en los cuales será necesario utilizar una variante de la TIRM que denominaremos TIRM ponderada

Cálculo de la TIRM

Traslademos al punto inicial todos los egresos utilizando la tasa de financiación que puede ser la misma del mercado de colocación y traslademos a valor final todos los ingresos utilizando la tasa TIO.

*Recordemos que **TIO** es la tasa del mejor proyecto que se sacrifica a fin de realizar otra actividad*

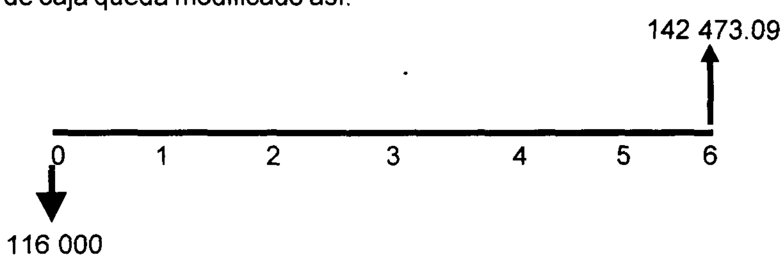
TIR+R

Si los traslados de los ingresos a valor final y los traslados de los egresos a valor presente se hacen a una sola tasa, a la tasa del inversionista, esta TIR recibe el nombre de TIR+R que significa tasa interna de retorno con reinversión.

Al mirar la gráfica de flujo de caja del proyecto A se observa que solo hay un egreso y que además está ubicado en el punto inicial, entonces solo nos queda trasladar al punto 6 (punto final) todos los ingresos, y para ello utilizaremos una tasa del 3% mensual que es la tasa del inversionista.

$$\text{Ingresos} = 100\,000(1+0.03)^5 + 5\,000\, \mathbf{S}_{\overline{5}|3\%} = \$142\,473.09$$

Nuestro flujo de caja queda modificado así:



Utilizando la fórmula del interés compuesto podemos hallar la tasa del diagrama de flujo anterior así:

$$142\,473.09 = 116\,000(1 + \text{TIRM})^{6}$$

De donde se obtiene que: TIRM(A) = 3.485% mensual

En el proyecto B TIRM es la misma TIR puesto que no ha habido oportunidad para hacer reinversiones, por lo tanto TIRM(B) = 4.38% y se concluye que si TIRM(B) > TIRM(A) entones el proyecto B es mejor que el proyecto A. Esta conclusión concuerda con la decisión que se toma usando el VPN como instrumento de análisis.

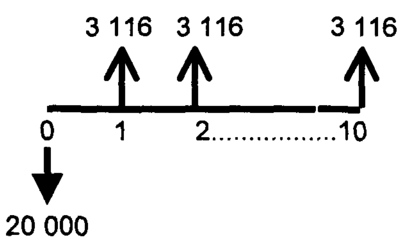
Hay ocasiones, aunque muy escasas, en que la TIRM aún no es suficiente para producir el mismo ordenamiento que el que produce el VPN, esto podría presentarse al comparar alternativas mutuamente excluyentes que tienen diferente costo, en tales circunstancias debemos hacer que las alternativas tengan el mismo costo y para ello le agregamos a la alternativa de menor costo una inversión adicional por un valor igual a la diferencia entre las dos alternativas. Esta alternativa adicional se evalúa a la tasa TIO.[1]

Ejemplo 3

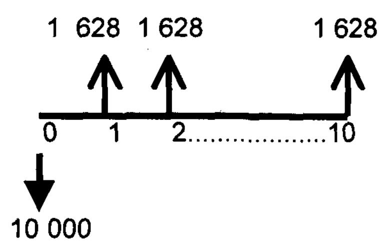
Supongamos que hay en estudio dos opciones de inversión: el proyecto A que requiere una inversión inicial de $20 000 y produce un ingreso de $3 116 durante 10 períodos y el proyecto B que tiene un costo de $10 000 y produce un ingreso durante 10 períodos de $1 628. Con una tasa de oportunidad del 5% determinar cuál es el mejor proyecto[2].

Solución:

Proyecto A



Proyecto B



1 Este enfoque de combinar los dos flujos de caja se debe a Vélez Pareja Ignacio en "DECISIONES DE INVERSIÓN" Una aproximación al análisis de alternativas (versión preliminar) CEJA Bogotá 1998 pp145-147

2 Este ejemplo es citado por Vélez Pareja Ignacio en "DECISIONES DE INVERSIÓN" Una aproximación al análisis de alternativas (versión preliminar) CEJA Bogotá 1998 página 146

Vamos a evaluar cada proyecto con el VPN y con la TIR

VPN(A) = – 20 000 +3 116 $a_{\overline{10}|}5\%$ = \$4 060.93
VPN(B) = – 10 000 +1 628 $a_{\overline{10}|}5\%$ = \$2 570.98

El VPN nos dice que es mejor el proyecto A

TIR(A): $-20\,000 + 3\,116 a_{\overline{10}|\, i\%} = 0$

$$-20\,000 + 3\,116\frac{1-(1+i)^{-10}}{0.05} = 0$$

Calculando i por interpolación se tiene que i = 9%

TIR(B): $-10\,000 + 1\,628 a_{\overline{10}|\, i\%} = 0$

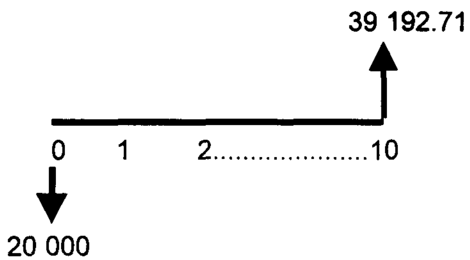
$$-10\,000 + 1\,628\frac{1-(1+i)^{-10}}{0.05} = 0$$

Calculando i por interpolación se tiene que i = 10.01%

La TIR nos dice que es mejor el proyecto B, lo cual contradice al VPN. Intentamos aclarar esta contradicción usando la TIRM

TIRM(A): trasladamos a valor final la serie de 10 ingresos de \$3 116 y tenemos:

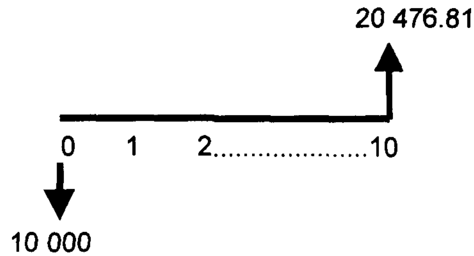
3 116 $S_{\overline{10}|}\,5\%$ = \$39 192.71



$39\,192.71 = 20\,000(1+i)^{10}$ despejando se tiene que TIRM = i = 6.96%

TIRM(B): trasladamos a valor final la serie de 10 ingresos de \$1 628 y tenemos:

1 629 $S_{\overline{10}|\, i\%}$ = \$20 476.81

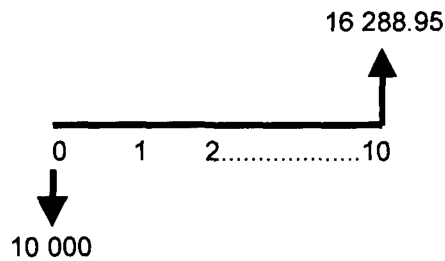


$$20\,476.81 = 10\,000(1+i)^{10} \quad \text{despejando se tiene que TIRM} = i = 7.43\%$$

Se concluye que TIRM(B) es mejor que TIRM(A) lo cual, como caso excepcional, sigue contradiciendo lo que nos dice el VAN, entonces tenemos que recurrir a la inclusión del proyecto adicional.

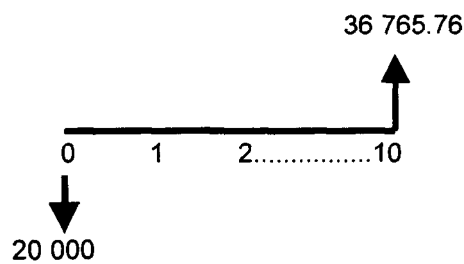
Como el proyecto A es más costoso que el proyecto B debemos adicionar al proyecto B el proyecto adicional con inversión inicial de \$10 000 y lo evaluaremos a la tasa del 5%

$$10\,000(1+0.05)^{10} = 16\,288.95$$



Entonces el nuevo proyecto B quedará formado por el proyecto B inicial más el proyecto adicional con el siguiente flujo de caja:

Ingresos en el período 10 = 20 476.81 + 16 288.95 = \$36 765.76
Costo inicial 10 000 + 10 000 = \$20 000



Ahora calculamos la TIR de este nuevo proyecto así:

$36\,765.76 = 20\,000(1+i)^{10}$ al despejar se tiene que $i = 6.28\%$ el cual es inferior a la TIR del proyecto A y el ordenamiento que produce la TIR coincide con el ordenamiento que produce el VPN.

El lector observará que hemos buscado por diferentes caminos que los dos ordenamientos coincidan.

Cuando los instrumentos de análisis VPN y TIR producen diferentes resultados es porque se ha cometido un error en la forma de aplicar la TIR. El verdadero ordenamiento es el que produce el VPN, por esta razón debe calcularse la TIR por diferentes métodos hasta que esté de acuerdo con el ordenamiento del VPN

Observación: el valor de la TIRM siempre se encuentra entre la TIR y la tasa de reinversión

TIR múltiple.

En un proyecto el flujo de caja puede ser de dos maneras, que primero haya egresos (uno o varios) y después aparecen los ingresos, (uno o varios) este tipo de proyectos reciben el nombre de proyectos convencionales y solo tienen una tasa, pero puede suceder que en un proyecto los egresos y los ingresos aparezcan en forma entreverada, en este caso puede suceder que existan varias tasas y el proyecto recibe el nombre de no convencional.[3]

En los proyectos no convencionales el hallar las tasas es un problema puramente matemático, pero, decidir cuál es la más apropiada para el proyecto es un problema que le compete a las finanzas.

Vamos a tratar en una forma elemental, sin hacer profundos análisis el problema de las tasas múltiples.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Un polinomio ordenado es aquél en que los exponentes están en orden ascendente o en orden descendente, por ejemplo:

$$3X^6 + 12X^4 - 25X^3 + 16X + 35 = 0$$

Podemos asumir que los términos en X^5 y en X^2 tienen coeficiente igual a cero por eso no figuran.

[3] El nombre de flujo de caja convencional y flujo de caja no convencional es tomado de Vélez Pareja Ignacio en "DECISIONES DE INVERSIÓN" Una aproximación al análisis de alternativas (versión preliminar) CEJA Bogotá 1998 pp 153,154

Según Descartes un polinomio ordenado no tiene más raíces positivas que el número de veces en que los coeficientes cambian de signo, esto significa que la ecuación anterior a lo sumo tiene 2 raíces porque los dos primeros términos son positivos, el tercer término es negativo, esto implica un cambio de signo, el cuarto término vuelve a ser positivo lo cual implica otro cambio de signo y el quinto término sigue siendo positivo, en consecuencia en total hay dos cambios de signo y esto significa que a lo sumo habrá 2 raíces. (Los sitios donde los coeficientes cambian de signo se señalan con flechas)

Observación: al decir que a lo sumo hay 2 raíces positivas significa que puede que haya una sola raíz o que haya 2 raíces positivas pero en ningún caso puede haber más de 2 raíces positivas o que no haya ninguna tasa positiva

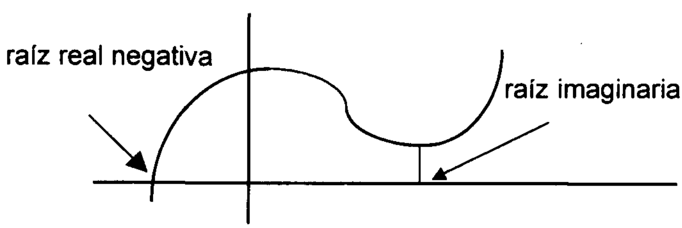
Ejemplo 4

$$26(1+i)^{-7} +2 (1+i)^{-3} - 14(1+i)^{-2} +16(1+i)^{-1} - 40 = 0$$

La ecuación anterior a lo sumo tiene 3 raíces positivas porque hay tres cambios de signo en los coeficientes los cuales hemos señalado con las flechas.

Cuando se trabaja manualmente la mejor forma de encontrar las raíces es construir la gráfica de la ecuación y las raíces son aquellos puntos de corte de la curva sobre el eje X. Cuando trabajamos manualmente no nos interesa construir la parte negativa del eje X porque una raíz negativa significa que un proyecto tiene una tasa negativa, es decir, que si se realiza el proyecto va a dar una pérdida y no es lógico que una persona invierta un dinero con la intención de perder.

Como comentario adicional, una ecuación que tenga una curva de la siguiente forma:



Matemáticamente tiene una raíz negativa y una raíz imaginaria. En el campo de las finanzas no tiene raíces porque ya dijimos que descartábamos las raíces negativas y además debemos descartar las raíces imaginarias porque en finanzas sólo se trabaja con los números reales.

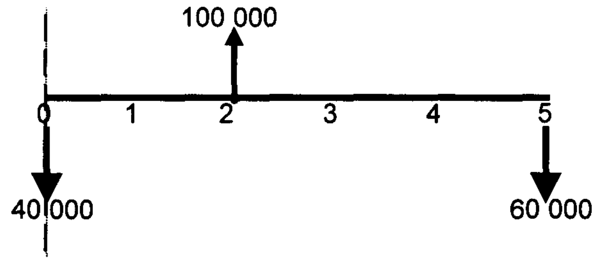
Ahora estudiemos la forma de encontrar el valor de las raíces, para ello tomemos el siguiente caso:

Ejemplo 5

Un proyecto requiere una inversión inicial de $40 000, en el período 1 los ingresos son iguales a los egresos, en el período 2 hay un ingreso neto de $100 000, en los períodos 3 y 4 los ingresos y los egresos vuelven a dar un flujo de caja neto de 0, finalmente en el período 5 hay un egreso de $60 000. Calcular la TIR del proyecto.

Solución manual:

Construimos el diagrama de flujo de caja y planteamos la ecuación de valor.



ff

$$-40\,000 + 100\,000(1+i)^{-2} - 60\,000(1+i)^{-5} = 0$$

Construimos una tabla de valores X,Y para ver el comportamiento de la gráfica y así determinar las tasas.

X	Y
0%	0
10%	5.39
20%	5.33
30%	3.01
40%	-135

Si los dineros no generan intereses obviamente la solución es el 0% o sea la solución trivial, pero teniendo en cuenta que los dineros generan intereses hay otra tasa que está entre el 30% y el 40%, que se concluye de la tabla anterior. Lo que nos interesa es el entorno al punto donde la curva corta al eje X con el fin de hacer una interpolación, para ello buscamos 2 valores para i no muy lejanos de forma tal que la función tome valores de diferente signo.

X	Y
39%	193.976
40%	−135.658

Planteamos la estructura

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \ldots\ldots & 193.976 \\ X \ldots\ldots & 0 \end{bmatrix} \\ 40 \ldots\ldots \quad -135.658 \end{bmatrix}$$

Con base en esta estructura planteamos la proporción:

$$\frac{39-40}{39-X}=\frac{193.976-(-135.658)}{193.976-0}$$

Al despejar se tiene que X = 39.588%

Los resultados anteriores nos indican que existen dos tasas y no sabemos a cual atenernos, por tal razón debemos usar una TIR modificada que nos daría una única tasa y así podemos decidir si el proyecto es aconsejable o no aconsejable realizarlo

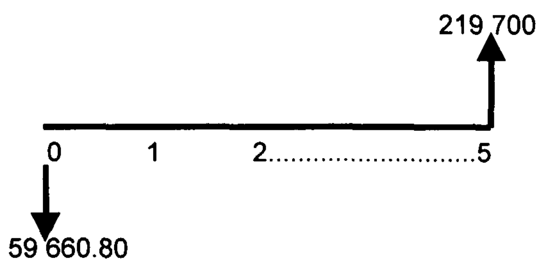
Suponiendo una tasa del 30% para la reinversión, los ingresos serán:

Ingresos: $100\,000(1+0.3)^3 = \$219\,700$

Para poner en valor presente los egresos usamos la tasa del 25% (tasa de un crédito corriente) y tenemos:

Egresos: $40\,000 + 60\,000(1+0.25)^{-5} = \$59\,660.80$

La TIRM será:



Podemos calcular la TIRM así:

$$219\,700 = 59\,660.80(1+i)^5$$

despejando se tiene que TIRM = i = 29.786%

Esta tasa se debe comparar con la TIO para tomar una decisión.

Vale la pena anotar que no es por una simple manipulación matemática que el proyecto rinda el 29.78%. Desde el punto de vista financiero es mejor recibir $100 000 en 2 meses que recibir $40 000 ahora y $60 000 en 5 meses.

Tasa interna de retorno incremental TIRI

Para calcular una TIR es indispensable que existan ingresos y egresos, pero cuando se quiere escoger una alternativa entre varias usando la TIR puede darse el caso en que haya proyectos mutuamente excluyentes en los cuales solo se conocen los egresos pero no se conocen los ingresos o si se llegan a conocer son mínimos con relación a los egresos, en estas condiciones no es posible conocer la rentabilidad de cualquiera de los proyectos, sinembargo, es posible obtener una rentabilidad de la diferencia de inversiones, esta tasa se compara con la tasa mínima que el inversionista desea obtener, la cual venimos representando por TMAR y nos sirve para tomar una decisión.

Ejemplo 6

Dadas las alternativas A, B y C determinar la mejor alternativa usando el método de la TIRI suponiendo que la TMAR= 25%, compruebe el resultado usando el VPN. Las inversiones iniciales y el costo anual de operación (CAO) son:

Proyecto:	A	B	C
Costo	100 000	120 00	110 000
CAO año1	10 000	2 000	5 500
CAO año2	12 000	3 000	6 000
CAO año3	14 000	4 000	7 000
CAO año4	16 000	5 000	8 500

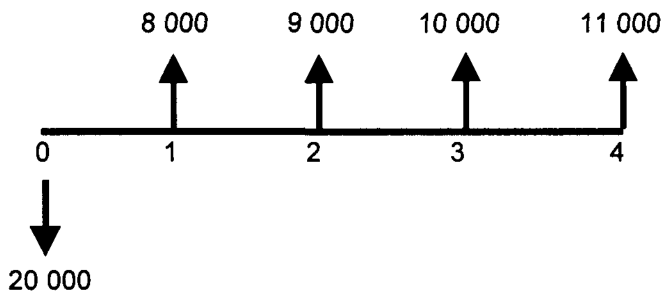
Solución

Comencemos comparando las alternativas A con B, es indispensable que las cantidades vayan con su respectivo signo, ingresos positivos y egresos negativos.

Calculemos la diferencia A – B o B – A, lo que importa es que el valor de la diferencia del flujo de caja 0 sea negativo, por tal motivo no se puede hace B – A porque 120 000 – 100 000 = +20 000, entonces escojamos B – A y así tendremos:

Período:	A	B	B – A
0	–100 000	–120 000	–20 000
1	–10 000	– 2 000	+8 000
2	–12 000	– 3 000	+9 000
3	–14 000	– 4 000	+10 000
4	–16 000	– 5 000	+11 000

La gráfica de flujo de caja es:



Al plantear la ecuación del VPN(B – A), igualarla a 0 y calcular la i se obtiene una TIR del excedente de inversión. Esta TIR recibe el nombre de tasa interna de retorno incremnental que se representa por TIRI.

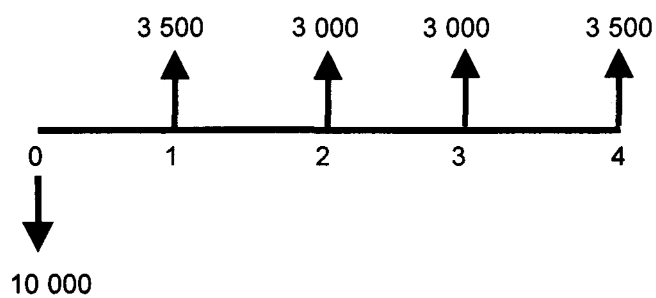
$$-20\,000 + 8\,000(1+i)^{-1} + 9\,000(1+i)^{-2} + 10\,000(1+i)^{-3} + 11\,000(1+i)^{-4} = 0$$

Como la TIRI es mayor a la TMAR se concluye que el exceso de inversión ($20 000) genera un interés del 29.67% superior a la TMAR que es del 25%, en consecuencia para el inversionista es mejor invertir en el proyecto más costoso, esto es en el proyecto B.
Ya habiendo definido que es mejor el proyecto B que el proyecto A entonces comparamos el proyecto B con el proyecto C

Observe que tenemos que tomar B – C para que la diferencia en 0 sea negativa, si lo tomamos invertido C – B la diferencia resulta positiva

Período:	B	C	B – C
0	–120 000	–110 000	– 10 000
1	– 2 000	– 5 500	+3 500
2	– 3 000	– 6 000	+3 000
3	– 4 000	– 7 000	+3 000
4	– 5 000	– 8 500	+3 500

La gráfica del flujo de caja es:



El cálculo de la TIRI(B – C) se puede efectuar planteando la ecuación del VPN(B – C) e igualándola a 0:

$$-10\,000 + 3\,500(1+i)^{-1} + 3\,000(1+i)^{-2} + 3\,000(1+i)^{-3} + 3\,500(1+i)^{-4} = 0$$

Por cualquiera de los métodos nombrados para la solución de la ecuación anterior se tiene:

TIRI = 11.41%, lo cual nos indica que el excedente de inversión ($10 000) genera un interés del 11.41% que es inferior a la TMAR en consecuencia el proyecto más costoso no es aconsejable por tanto nos quedamos con el proyecto C

Se concluye que si B>A y C>B entonces C>B>A por lo tanto la decisión final es invertir en el proyecto C.

Comprobación de la decisión usando el VPN.

Calculamos el VPN de cada alternativa usando la TMAR.

$$VPN(A) = -100\,000 - 10\,000(1+0.25)^{-1} - 12\,000(1+0.25)^{-2} - 14\,000(1+0.25)^{-3} - 16\,000(1+0.25)^{-4}$$

$$VPN(A) = -129\,402$$

$$VPN(B) = -120\,000 - 2\,000(1+0.025)^{-1} - 3\,000(1+0.25)^{-2} - 4\,000(1+0.25)^{-3} - 5\,000(1+0.25)^{-4}$$

$$VPN(B) = -127\,616$$

$$VPN(C) = -110\,000 - 5\,500(1+0.025)^{-1} - 6\,000(1+0.25)^{-2} - 7\,000(1+0.25)^{-3} - 8\,500(1+0.25)^{-4}$$

$$VPN(C) = -125\,306$$

El VPN mayor es el correspondiente al proyecto C por tanto debe escogerse este proyecto. La decisión es coincidente con la que indica la TIRI.

Los siguientes son dos ejemplos de complementación.

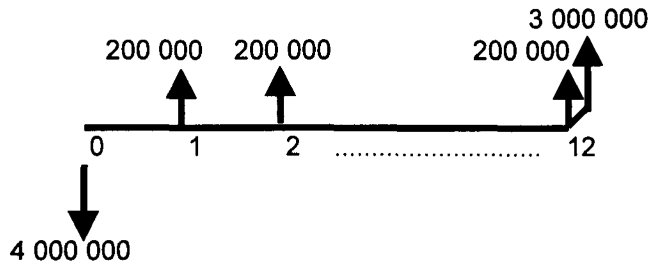
Ejemplo 7

Una persona dispone de $6 millones y como primera alternativa los puede invertir en la entidad financiera X que le paga un interés del 33% efectivo anual pero sólo acepta como mínimo la suma de %5 millones a un año. Como segunda alternativa puede comprar una máquina a un costo de $4 millones que le producirá ingresos mensuales por valor de $200 000 y al final del año podrá vender la máquina en $3 millones. Los dineros que genere la máquina podrán ser reinvertidos en la financiera Y que recibe cualquier cantidad de dinero y por cualquier tiempo siempre que no sea inferior a un mes, pero sólo paga el 2% mensual. ¿Cuál de las dos alternativas debe tomar?

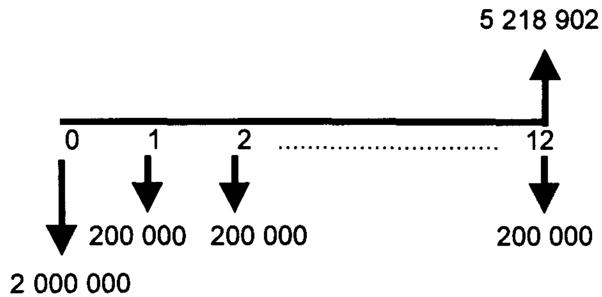
Solución:

En la primera alternativa la financiera X le produce el 33% efectivo anual sobre el total de su capital (6$ millones) mientras que en la segunda alternativa podrá comprar la máquina y le sobrarán $2 millones que podrá invertir en la financiera Y, además cada vez que la máquina le produzca un ingreso podrá ser reinvertido en la misma financiera Y. Esta segunda alternativa podría considerarse como formada por dos proyectos así:

Primer proyecto: compra de la máquina.



Los ingresos de $200 000 que genera el primer proyecto vienen a ser inversiones en el segundo proyecto los cuales ganan una tasa del 2% mensual.

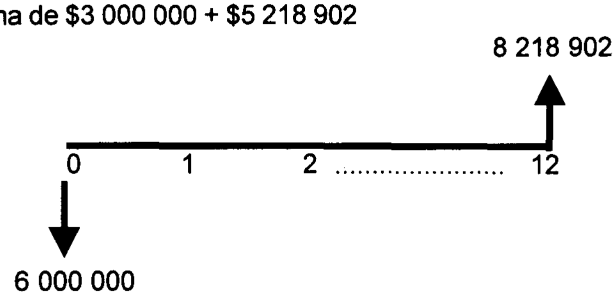


El valor de $5 218902 se obtiene así:

$$2\,000\,000(1+0.02)^{12} + 200\,000S_{\overline{12|}\,2\%} = 5\,218\,902$$

Observe que en la anualidad se incluyen los $200 000 que están en el período 12, sin embargo estos no ganan interés (ver la ecuación de valor del valor final de una anualidad ordinaria)

Al fusionar el primero y el segundo proyecto en uno solo se obtiene un tercer proyecto con egresos de $6 millones ($4 millones + $2 millones) y con ingresos de$8 218 902 que resultan de la suma de $3 000 000 + $5 218 902



A este tercer proyecto se le puede calcular una tasa la cual viene a ser TIR+R puesto que incluye reinversión y solo usamos una sola tasa la de reinversión.

La tasa de este último proyecto la calcularemos anual para compararla con la primera alternativa.

$$8\,218\,902 = 6\,000\,000(1 + i)^1$$

Al despejar i se obtiene el 36.98% efectivo anual y se concluye que es mejor la segunda alternativa que la primera que solo da el 33% efectivo anual.

Ejemplo 8

Una industria puede adquirir una máquina a un costo de $6 millones, tendrá una vida útil de 5 años y prácticamente no tendrá valor de salvamento, la máquina será totalmente depreciada en 3 años por partes iguales, el estudio de mercados indica que los ingresos del primer año serán aproximadamente de $3 millones y aumentarán todos los años un 30%, por otra parte se estima que el costo de producción del primer año será de $800 000 y cada año aumentará en $200 000. Suponiendo una tasa impositiva del 38% determinar la rentabilidad del proyecto usando un horizonte de planeación de 5 años.

Solución:

Primero buscamos la Base (necesaria para el cálculo de los impuestos).

$$\text{Base} = \text{Ingreso} - \text{Costo} - \text{Depreciación}.$$

Después calculamos el impuesto

$$\text{Impuesto} = 0.38 \times \text{Base}$$

Finalmente calculamos el flujo neto de caja así:

$$\text{FNC} = \text{Ingreso} - \text{Costo} - \text{Impuesto}$$

Observación: La depreciación es una cifra puramente contable, no es dinero en efectivo, por tal motivo no se toma en cuenta para calcular el FNC, pero si es importante tomarlo en cuenta en la base para calcular el impuesto.

A continuación presentamos la tabla necesaria para calcular el flujo de caja.

Per	Ingreso	Costo	Depreciación	Base	Impuesto	FNC
0	–6 000 000	0	0	0	0	–6 000 000
1	3 000 000	800 000	2 000 000	200 000	76 000	2 124 000
2	3 900 000	1 000 000	2 000 000	900 000	342 000	2 558 000
3	5 070 000	1 200 000	2 000 000	1 870 000	710 600	3 159 400
4	6 591 000	1 400 000	–	5 191 000	1 972 580	3 218 420
5	8 568 300	1 600 000	–	6 968 300	2 647 954	4 320 346

Si hacemos el VPN =0 podemos hallar la TIR.

$$VPN = -6\,000\,000 + 2\,124\,000(1+i)^{-1} + 2\,558\,000(1+i)^{-2} + 3\,159\,400(1+i)^{-3} + \\ + 3\,218\,420(1+i)^{-4} + 4\,320\,346(1+i)^{-5} = 0$$

Al resolver esta ecuación por interpolación se obtiene:
i = 36.58% efectivo anual que viene a ser la rentabilidad del proyecto.

NOTA: Para facilitar los cálculos nos permitimos remitir al lector al libro "EXCEL Y LA CALCULADORA FINANCIERA APLICADOS A LA INGENIERIA ECONOMICA" POR Guillermo Baca Currea editorial FONDO EDUCATIVO PANAMERICANO. Primera edición BOGOTA 1999

Problemas propuestos.

1 Se proyecta invertir $600 000 en la compra de un depósito a término fijo que vence en 7 meses y su valor de maduración es de $825 000. Determinar la tasa efectiva anual que ganaría la inversión.

Respuesta: 72.62%

2 Para llevar a cabo un proyecto se necesita invertir hoy $300 000, producirá un ingreso de $150 000 en 3 meses y $280 000 en 8 meses. Determinar la rentabilidad mensual y la rentabilidad efectiva anual que genera el proyecto.

Respuesta: 6.0965% efectivo mensual y 103.43% efectivo anual.

3 Un activo financiero tiene un costo de $885 000, paga intereses trimestrales de $9 000 y un valor de maduración de $1 millón al final de 15 meses. Determinar la rentabilidad efectiva anual.

Respuesta: 14.5%

4 Resuelva el problema anterior suponiendo que los intereses tan pronto se cobran son reinvertidos a la tasa del 10% efectivo trimestral.

Respuesta: 15.088%

5 Un documento cuesta $600 000 y produce un interés trimestral de $12 000 durante 2 años, al final de este tiempo el documento puede ser vendido en la suma de $700 000. Hallar la rentabilidad periódica trimestral que generaría este proyecto de inversión.

Respuesta: 3.8% efectivo trimestral

6 Resuelva el problema anterior suponiendo que los intereses trimestrales que se reciben son inmediatamente invertidos al 23% nominal trimestral. Con esta nueva condición calcular la tasa con reinversión pero con efectividad anual.

Respuesta: 16.74% efectivo anual.

7 Un artículo tiene un precio de lista al contado de $900 000, pero se puede comprar a crédito según los siguientes planes:
Plan A cuota inicial 30% y 12 cuotas mensuales de $62 989.
Plan B cuota inicial 20% y 24 cuotas mensuales de $43 000.
Determinar la mejor alternativa usando la TIR.

Respuesta: plan A tasa 2.92% efectivo mensual, plan B tasa 3.11% efectivo mensual.

8 Un proyecto necesita una inversión inicial de $3 millones y generará ingresos mensuales de $300 000 durante 2 años, al final de este tiempo habrá que pagar $2 millones a los empleados por prestaciones sociales, y sueldos pendientes de pago. Determinar todas las tasas del proyecto y decidir cuál es la verdadera.

Respuesta: – 14.046% efectivo mensual y 7.22% efectivo mensual esta última es la verdadera.

9 Una máquina cuesta $1 millón, se estima que para el primer mes producirá un ingreso de $120 000 y que cada mes el ingreso aumentará un 15%. La máquina tendrá una vida útil de 5 años y al final de este tiempo su valor de salvamento es despreciable. Determinar la rentabilidad efectiva mensual.

Respuesta: 26.968% efectivo mensual.

10 Resuelva el problema anterior suponiendo que los ingresos mensuales no crecen un 15% sino que crecen cada mes en $5 000.

Respuesta: 15.26% efectivo mensual.

11 Un empleado recibe un ingreso extra de $20 millones. Con éste dinero puede comprar un taxi que tiene las siguientes características desde el punto de vista financiero: precio $30 millones; cuota inicial $20 millones; financiación cuotas anuales fijas de $6 millones durante 3 años; ingresos anuales de $22 para el primer año que se va incrementando todos los años en un 20%, el valor de los costos anuales para el primer año son de $15 millones y se va incrementando todos los años un 30%; vida útil 5 años; valor de salvamento 50% del costo inicial. ¿Cuál es la rentabilidad anual?

Respuesta: 5.172%

12 Desea invertirse la suma de $3 millones en la compra de un terreno que va a ser utilizado en labores agropecuarias; al final del quinto año, el terreno será entregado a los trabajadores, en pago de las prestaciones sociales. Se estima que, al final de cada año, se obtendrán ingresos por venta de productos y egresos, por compra de semillas, concentrados y honorarios distribuidos así: (en millones de pesos)

Año	0	1	2	3	4	5
Ingreso	0	0.5	2	3	5	6
Egreso	3	1	0.7	0.5	0.5	0.5

Suponiendo una TIO = 30%, Calcular la rentabilidad del proyecto a) sin reinversión y b) con reinversión de los dineros que vaya liberando el proyecto.

Respuestas: a) 44.63%; b) 40.35%

13 Dos deudas: una de $10 000 con vencimiento en 6 meses e intereses del 30%nominal trimestral y otra deuda de $20 000 con vencimiento en 18 meses e intereses al 28% nominal semestral se proyectan cancelar mediante un solo pago de $38 000 a efectuarse en 12 meses. Calcular la tasa efectiva mensual a la cual se proyectan cancelar las deudas.

Respuesta: 4.08% EM o al 12.408% EM

14 Una persona planea radicarse en el exterior dentro de 3 años. Actualmente tiene ahorrados $20 millones los cuales puede invertir en una financiera que como mínimo le recibe $20 millones y paga el 35% anual en depósitos a término fijo de un año, también podrá adquirir un local con una cuota inicial de $10 millón, $5 000 000 a 3 meses y $5 000 000 a 6 meses, él podría arrendar el local inmediatamente en la suma de $300 000 pagaderos por mes anticipado por los próximos 2 años y en $400 000 durante el tercer año. Al final de los 3 años estima que podrá vender el local en unos $30 millones, ¿qué alternativa debe decidir suponiendo que cada vez que haya excedente de dinero será reinvertido inmediatamente al 1.5% efectivo mensual?

Respuesta: Depósitos a término fijo ganan el 35%, local con pequeño depósito a término fijo al inicio del proyecto gana el 32.78%. Decidir depósitos a término fijo.

15 Una fábrica de televisores está adquiriendo en el mercado cierto circuito impreso, a un costo de $1 000 la unidad y se cree que cada año aumentará el costo en un 10%. Para disminuir costos los directivos están pensando en comprar los equipos necesarios para producir los circuitos impresos; el costo de los equipos es de $12 millones, tiene una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de $300 000; el costo fijo de operación es de $480 000 al año y permanecerá constante durante los 5 años que dura el proyecto. Los costos variables son de $150 por unidad que se fabrique. Si se proyecta una producción de 5 000 televisores el primer año y se estima que la producción se podrá incrementar cada año en un 20% ¿cuál será la rentabilidad del proyecto?

Respuesta: TIRI = 43.85%

16 Un proyecto necesita una inversión inicial de $900 000, para la compra de una máquina que generará $650 000 anuales por los próximos 3 años; los costos de producción son de $100 000 anuales, la máquina se depreciará en 3 años, en línea recta, y no tendrá valor de salvamento. Suponiendo una tasa de impuestos del 40%

a) Calcular la TIR después de impuestos:
b) La TIR deflactada suponiendo una inflación promedio del 28%

Respuestas: a) 23.375%, b) –3.61%

17 Para producir cierto artículo una fábrica necesita hacer una inversión de $7 millones de los cuales $2 millones deberán ser financiados por un banco que exige se le cancele el préstamo en 3 pagos anuales uniformes con intereses al 38% efectivo anual.

La capacidad máxima de la fábrica es de 20 000 unidades al año, pero el primer año solo estará en capacidad de producir el 40%, el segundo año el 50%, el tercer año el 75%, el cuarto año el 90% y el quinto año el 100%

Cada artículo puede venderse durante el primer año en $2 000 y por razones de competencia se piensa que solo se podrá aumentar el precio cada año en un 15%
Los costos de producción serán de $1 200 el primer año y se estima que subirán cada año un 20%

La nómina del primer año es de $2 500 000 y probablemente todos los años habrá que aumentarla en un 20%
La maquinaria por valor de $5 millones será depreciada en 5 años en línea recta.
Con una tasa impositiva del 30% y usando un horizonte de planeación de 5 años calcular:

a) el flujo neto de caja
b) La TIR
c) La tasa deflactada suponiendo una inflación del 25%

Respuestas: a) – 5 000 000, 2 031 190, 3 167 974, 6 283 035, 9 474 690, 10 806 895
b) 75.45% c) 40.36%

18 Una fábrica necesita adquirir una máquina para su planta de acabados. Puede comprar una máquina importada, de las últimas que le quedan al distribuidor, a un costo de \$300 000; tiene una vida útil de 4 años y, al final de este tiempo podrá venderse en \$50 000. El costo anual de operación que incluye combustibles, lubricantes y mantenimientos menores, se estima en \$25 000. También puede comprarse una máquina de fabricación nacional, la cual aunque no cumple exactamente con las especificaciones técnicas requeridas podría adaptarse haciendo unas pequeñas modificaciones. Su costo es de \$400 000, tiene una vida útil de 6 años al final de los cuales podrá ser vendida en \$100 000, pero a los tres años de uso deberán cambiarse los pistones y las bielas a un costo estimado de \$80 000; en compensación, el costo anual de operación es de solo \$5 000. Suponiendo la TMAR = 30% decidir cuál máquina comprar.

Respuesta: TIRI = 22.67% inferior a la TMAR, mejor la más barata, decidir importada.

19 Determinar la TIRI del incremento de inversión de la alternativa B:

Alternativa	A	B
Costo inicial	\$600 000	\$900 000
CAO en el año n	$60\,000(1.1)^{n-1}$	$30\,000(1.1)^{n-1}$
Salvamento	10%	10%
Vida útil en años	10	10

Respuesta TIRI = 8.97%

20 Se desea construir un puente sobre un río, los ingenieros han señalado 4 posibilidades para la construcción cuyos costos en millones de pesos están en la siguiente tabla:

Clase	A	B	C	D
Costo	100	132	87	125
CAO	17	8	27	12
K	30	30	30	30

Usando la TIRI determine la mejor opción.

Respuesta: Clase B

21 Una compañía petrolera adquiere los derechos de explotación de unos pozos pagando

ahora US$6 millones y US$6 millones en 8 años. Por problemas de liquidez decide ceder el contrato a otra compañía que ofrece pagarle US$15 millones en 3 años.

a) Hallar todas las tasas
b) calcular la rentabilidad incluyendo una tasa de reinversión del 30% y que la tasa de financiación es del 28%

Respuestas: a) TIR1 = –11.055% EA, TIR2 = 30.824% EA, b) TIRM = 29.99% EA

22 Un proyecto minero requiere una inversión inicial de $1 000 millones y producirá ingresos de $500 millones por los próximos 6 años, en el año 7 existirá un equilibrio entre ingresos y egresos y en el año 8 se habrá agotado la mina y al devolver el terreno será necesario dejarlo en condiciones aptas para la agricultura lo cual se puede hacer a un costo estimado de $1 500 millones.

a) Hallar la rentabilidad del proyecto
b) La TIRM suponiendo una tasa de financiación del 30% y una tasa de reinversión del 25%

Respuestas: a) –9.3498%, 38.769% b) 28.49%

23 Un comerciante le debe a un banco 2 pagarés el primero por $120 000 con vencimiento en 10 meses y el segundo por $90 000 con vencimiento en 12 meses. Por problemas de liquidez el comerciante ofrece paga al banco $92 450 al final de 6 meses y pide un plazo de 2 años para pagar el resto de la deuda. El banco hace los cálculos y le dice al comerciante que para esa época deberá pagar $181 064.

a) ¿Qué tasa nominal trimestral está cobrando el banco?
b) Suponiendo que el comerciante siempre invierte su dinero al 4%EM y que la tasa a la cual él puede descontar su flujo de caja (es decir tasa de financiación) es del 2.8%EM ¿cuál es la tasa a la cual le sale el crédito?

Respuetas: a) 5.3631% EM *o el* 15.2% EM *Como existe una TIR múltiple deberá* utilizar el método de la TIRM para tomar una decisión.
b) TIRM = 3.036% EM

24 ¿A qué tasa los siguientes flujos de caja son equivalentes?

Año	A	B
0	–100 000	–100 000
1	70 000	40 000
2	55 000	50 000
3	40 000	85 000

Respuesta: 14.424%

25 ¿A qué tasa son indiferentes las siguientes alternativas?

Alternativa	A	B
Costo	10 000	15 000
CAO	4 000	3 000
Vida útil (K)	5	10

Respuesta: 34.883% (sugerencia tome tiempos iguales)

Relación beneficio/costo CAPITULO 12

La *Relación Beneficio/Costo*, B/C, consiste en poner en valor presente los beneficios netos y dividirlo por el valor presente de todos los costos del proyecto. La tasa que se utilice para poner en valor presente, tanto los beneficios como los costos, depende de quién lleve a cabo el proyecto, si el proyecto es particular se utiliza la tasa del inversionista, pero si éste es estatal se puede usar la tasa de interés social (que es más baja lo cual hace que la aceptación sea más probable), de acuerdo a lo anterior podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\boxed{\text{Relación } B/C = \frac{\text{Valor Presente de los Ingresos}}{\text{Valor Presente de los Costos}}}$$

La *Relación B/C* puede por tanto tomar tres valores:

$$B/C \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}$$

Si $B/C < 1$ significa que los ingresos son menores que los costos, por tanto el proyecto no es aconsejable.

Si $B/C = 1$ significa que en valor presente, los ingresos son iguales a los egresos, en éste caso, lo único que se alcanza a ganar es la tasa del inversionista, por lo tanto es indiferente realizar el proyecto o continuar con las inversiones que normalmente hace el inversionista.

Si $B/C > 1$ significa que en valor presente los ingresos son mayores que los egresos, por lo tanto es aconsejable realizar el proyecto.

Las entidades crediticias internacionales tales como: Banco Mundial, Banco Internacional de Desarrollo, Fondo Monetario Internacional, etc., acostumbran a evaluar sus proyectos de inversión mediante la *Relación B/C* y adicionalmente con otro índice que generalmente es el *VPN*. Por esto es de gran importancia que cualquier proyecto que debido a su tamaño necesite financiación internacional sea evaluado con la *Relación B/C*.

Por lo general los grandes proyectos son de propiedad del estado y producen un beneficio o ventaja para la sociedad, pero a su vez también le pueden causar pérdidas a las que llamaremos desbeneficios o desventajas y los costos del proyecto son los dineros invertidos por el estado.

Es de advertir que por B representaremos el beneficio neto es decir beneficios menos desbeneficios o lo que es igual a la ventaja menos la desventaja. Para facilitar la identificación de las cantidades que corresponden a beneficios, desbeneficios y costos, podemos asumir, que en proyectos estatales, el que recibe los beneficios es la sociedad, el que recibe los desbeneficios también es la sociedad y el que hace los gastos es el estado. En proyectos particulares, el dueño del proyecto es el que recibe los beneficios, los desbeneficios y a su vez es el que hace los gastos.

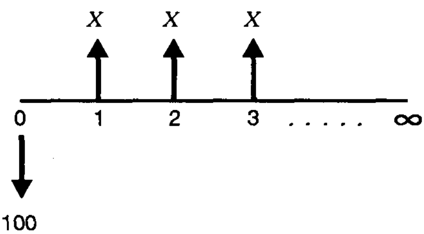
Ejemplo 1

Dos ciudades A y B están unidos mediante una vieja carretera y se proyecta la construcción de una nueva carretera que costará unos $100 millones y que acortará el camino entre éstas dos ciudades, lo cual implica una disminución en: el consumo del combustible, aceites, desgaste de vehículos y disminución en el valor del peaje. Todas estas disminuciones se estiman que pueden llegar a valer unos $28 millones al año. Por otra parte, hay varios comerciantes que han montado restaurantes y hoteles a lo largo de la carretera antigua y con la construcción de la nueva carretera el perjuicio que recibirán éstos comerciantes por disminución del turismo ascendería a unos $15 millones al año. Utilizando la *Relación* B/C determinar la conveniencia del proyecto utilizando: a) una tasa del 30% y b) tasa del 12%.

Comentario: La disminución en consumo de combustibles, aceites, desgaste de vehículos y disminución de peajes vienen a ser un beneficio y la pérdida de turismo viene a ser un desbeneficio porque en ambos casos es el público el que recibe las consecuencias, mientras que el valor del proyecto es el costo cuyo desembolso la hace el estado.

Solución:

El *CAUE* de los beneficios y de los desbeneficios ya es conocido y será igual a $28 millones – $15 millones = $13 millones al año. El *CAUE* del costo del proyecto lo podemos calcular asumiendo que los $100 millones corresponden al valor presente de una serie infinita de $\$X$ c/u al final de cada año.



La fórmula del valor presente de una anualidad infinita es:

$$VP = \frac{X}{i} \text{ y al despejar } X = VP(i)$$

reemplazando se tiene:

$$X = 100(0.3) = \$30 \text{ millones}$$

entonces el índice será:

$$B/C = \frac{13}{30} = 0.43 < 1$$

y por tal razón el proyecto no es aconsejable.

Observación: En general todo proyecto debe ser evaluado con mínimo dos índices, por lo tanto, el índice *Relación B/C* exige que sea evaluado con otro índice que por lo general es el *VPN*.

Entonces utilizando éste último índice se tendrá:

Los ingresos netos de cada año son de $13 millones y el valor presente de una anualidad infinita de $13 millones será 13/0.3

Por tanto el *VPN* será:

$$VPN = -100 + 13/0.3 = -\$56.67 \text{ millones y el } VPN < 0$$

Lo cual confirma la decisión tomada con la *Relación B/C*.

Usando la tasa de interés social del 12% se tendrá que el *CAUE* del costo del proyecto será:

$$X = 100(0.12) = \$12 \text{ millones al año}$$

$$B/C = \frac{28 - 15}{12} = 1.0833 > 1 \quad \text{y el proyecto será aceptado}$$

aunque no sea lo suficientemente ventajoso.

La comprobación usando el *VPN* será:

$$VPN = -100 + 13/0.12 = 8.33 > 0 \qquad \text{y será aceptado}$$

LA RELACION B/C Y EL VPN

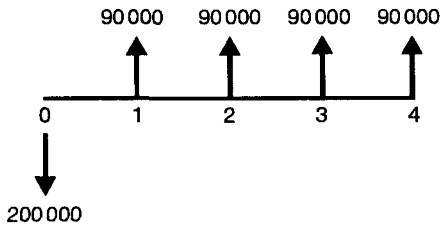
Ocasionalmente se puede presentar una inconsistencia cuando se evalúan alternativas con la *Relación B/C* y con el *VPN*, en tales circunstancias el error debe estar en la *Relación B/C* causado por un incorrecto cálculo de los beneficios, entonces, deberá analizarse lo que pasa con el exceso de inversión, es decir, que debe aplicarse el método incremental a la *Relación B/C*.

Ejemplo 2

Un inversionista tiene dos opciones para invertir su dinero: en la primera opción invierte $200.000 y le retornará $90 000 al final de cada año por los próximos 4 años, la segunda opción consiste en invertir hoy $300 000 y recibir $650 000 al final de 4 años. Si la tasa de interés es del 15% efectivo anual determinar la mejor alternativa.

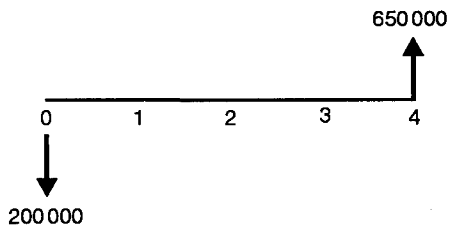
Solución:

Primera opción:



$$B/C = \frac{90\,000\ a_{\overline{4|}15\%}}{200\,000} = 1.28$$

Segunda opción:



$$B/C = \frac{650\,000(1+0.15)^{-4}}{300\,000} = 1.24$$

Con lo cual se concluye que es mejor la primera opción.

Al comprobar los resultados con el *VPN* se tendrá:

primera opción: $VPN = -200\,000 + 90\,000 a_{\overline{4}|}15\% = \$56\,948$

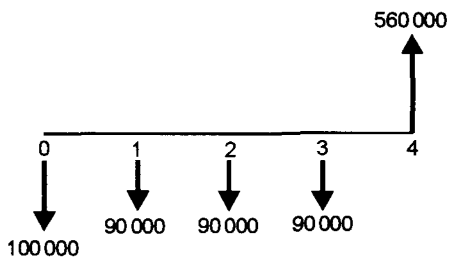
segunda opción: $VPN = -300\,000 + 650\,000(1+0.15)^{-4} = \$71\,640$

concluyendo que es mejor la segunda opción, y se presenta una contradicción entre la *Relación B/C* y el *VPN*, por lo que habrá necesidad de utilizar el Método Incremental en la *Relación B/C* como veremos a continuación:

Denominamos A a la primera opción y B a la segunda opción.

Año	A	B	B – A
0	– 200 000	– 300 000	– 100 000
1	90 000	0	– 90 000
2	90 000	0	– 90 000
3	90 000	0	– 90 000
4	90 000	650 000	560 000

La gráfica de B – A será:



Aplicando la *Relación B/C* al exceso de inversión se tiene:

$$B/C = \frac{560\,000(1+0.15)^{-4}}{100\,000 + 90\,000 a_{\overline{3}|}15\%} = 1.048 > 0$$

Esto significa que sí se puede aceptar el exceso de inversión, lo cual corrobora la decisión tomada mediante el *VPN* en el sentido de señalar la segunda opción como la mejor.

Cuando se evalúan proyectos estatales mediante la *Relación B/C* se puede incluir una cantidad razonable como beneficio por concepto de recreación, sinembargo ninguno de los intentos que se han realizado hasta el momento con el objeto de asignar valores monetarios a la recreación han sido completamente satisfactorios y de hecho hay muchos analistas que no toman en cuenta éste concepto porque consideran que es muy difícil, sino imposible, hallar los verdaderos valores de la recreación conduciendo a resultados erróneos.

Uno de los intentos de cuantificar monetariamente el beneficio de la recreación consiste en hallar la diferencia entre los gastos de recreación y los gastos normales en que incurriría un habitante de la región por concepto de recreación en un día y multiplicarlo por el número de personas que se estime visitarán el proyecto.

PERIODO DE RECUPERACION

El *Período de Recuperación, PR,* es otro índice utilizado para medir la bondad de un proyecto pero ha venido perdiendo popularidad para darle paso al *VPN* y a la *TIR* que son más exactos, puesto que el *PR* presenta algunas fallas técnicas. Debemos entender que el *PR* es el tiempo que debe utilizarse para recuperar la inversión, sin tener en cuenta los intereses; por ejemplo, si invertimos \$600 000 en un proyecto que produce \$200 000 anuales durante 8 años, entonces se necesitarán 3 años para recuperar la inversión inicial (3 x 200 000 = 600 000) y, de ahí en adelante, lo que produzca se considera ganancia. Si el propietario del proyecto considera que 3 años es un tiempo razonable para recuperar la inversión, el proyecto será aceptado, pero si considera que no puede esperar tanto tiempo el proyecto será rechazado.

Entre las fallas técnicas que presenta el *PR* está la de no tomar en cuenta el valor del dinero a través del tiempo y la de no tomar en cuenta el flujo de caja, después de la recuperación de los dineros invertidos. En el siguiente ejemplo, se podrán observar estas fallas.

Ejemplo 3

Comparar con el *PR* y con el *VPN* al 20% las alternativas A y B.

Proyecto	A	B
Inversión inicial	\$600 000	\$600 000
Ingreso al año 1	300 000	100 000
Ingreso al año 2	300 000	200 000
Ingreso al año 3	100 000	300 000
Ingreso al año 4	50 000	400 000
Ingreso al año 5	0	500 000

En la Alternativa A, el *PR* = 2 años y en la Alternativa B el *PR* = 3 años, en consecuencia la Alternativa A debe ser escogida.

Si evaluamos las alternativas con el *VPN* al 20% tenemos:

$$VPN(A) = -600\,000 + 300\,000(1.2)^{-1} + 300\,000(1.2)^{-2} + 100\,000(1.2)^{-3} + 50\,000(1.2)^{-4}$$

$$VPN(A) = -59\,684 \quad \text{y será rechazado}$$

$$
\begin{aligned}
VPN(B) = &-600\,000 + 100\,000(1.2)^{-1} + 200\,000(1.2)^{-2} + 300\,000(1.2)^{-3} \\
&+ 400\,000(1.2)^{-4} + 500\,000(1.2)^{-5} = +189\,673
\end{aligned}
$$

Entonces el proyecto B debe ser seleccionado.

Sinembargo el *PR* sigue siendo utilizado en la industria, debido a su sencillez y los que lo utilizan justifican su utilización, afirmando que, más allá del *Período de Recuperación*, el flujo de caja es muy incierto.

En países donde las tasas de interés son muy bajas (de un solo dígito) es posible aplicar el *PR* y el error que se produce puede no ser significativo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) En una región muy árida se está pensando en la construcción de canales de irrigación y, de ésta forma, habilitar la zona para la agricultura. Se estima que los canales costarán $500 millones y requerirán de $2 millones anuales para su mantenimiento. Los agricultores estiman que podrían obtener beneficios anuales por $80 millones. Usando la *Relación Beneficio/Costo*, determinar la viabilidad del proyecto, tomando un horizonte de planeación infinito y utilizando:
a) tasa de interés social del 12% y b) tasa del inversionista del 26%

   Respuesta: a) $B/C = 1.29$: realizar el proyecto; b) $B/C = 0.6$: no realizar el proyecto

2) Resuelva el problema anterior, tomando en cuenta la queja de los campesinos de la región quienes sostienen, que sus costos de transporte se elevarían en $10 millones.

   Respuesta: a) $B/C = 1.13$: realizar el proyecto; b) $B/C = 0.53$: no es aconsejable.

3) Teniendo en cuenta los dos problemas anteriores, suponga que para evitar el aumento de costo del transporte y para hacerlo más ágil se decide que el proyecto incluya la construcción de puentes sobre los canales a un costo de $200 millones y el costo de mantenimiento de éstos puede ser del orden de $3 millones al año los cuales tendrán una vida útil indefinida. ¿En éstas nuevas condiciones es aconsejable el proyecto?

   Respuesta: a) $B/C = 0.899$: no realizar el proyecto;
   b) $B/C = 0.43$: no realizar el proyecto

4) Una ciudad necesita construir dos parques de recreo que piensa mantener indefinidamente; los parque pueden ser ubicados en cualquiera de los sitios A, B ó C. Los datos estimados para cada proyecto, expresados en millones de $ se muestran en el siguiente cuadro:

	Millones de $		
Sitios	A	B	C
Costo inicial	38	25	45
CAO	2	2	3
Derechos de entrada por año	7	7	10
Ingresos anuales para los concesionarios	10	10	20
Pérdidas anuales en la agricultura	8	12	4

Suponiendo una tasa de interés del 20%, decidir por medio de la *Relación* B/C en qué sitio debe construirse.

Respuesta: Sitio A $B/C = 0.94$; Sitio B $B/C = 0.71$; Sitio C $B/C = 2.17$
El sitio C debe ser uno de los escogidos, los sitos A y B dan pérdida.

5) El gobierno está pensando en la construcción de una hidroeléctrica; para ello es necesario adquirir los terrenos para la construcción de la represa a un costo de $500 millones. Además será necesario efectuar una inversión de $300 millones, al final del primer año, para efectuar la construcción de las obras civiles que tendrán una vida útil indefinida. Al final del segundo año, habrá que adquirir los equipos electromecánicos a un costo de $200 millones, los cuales tendrán una vida útil de 21 años y un valor de salvamento de $50 millones; su costo de operación en el año 3 será de $20 millones y, cada año siguiente, su costo se incrementará en $1 millón. La hidroeléctrica comenzará a generar energía en el tercer año; y sus ingresos por facturación se estiman en $300 millones y, cada año siguiente, aumentará en $30 millones hasta el año 10. En el año 11, se estima en $600 millones y, cada año siguiente, aumentará en $50 millones, hasta el año 23.

a) Utilizando un horizonte de planeación de 23 años, una tasa de interés del 25% y utilizando la *Relación* B/C, determine la viabilidad del proyecto.
b) Suponga que debido a la construcción de la represa, hay una disminución en la agricultura de aproximadamente unos $41 millones anuales.

Respuesta: a) $B/C = 1.19$: puede realizarse; b) $B/C = 1.01$: puede realizarse.

6) Un señor piensa comprar una máquina tejedora con un costo de $900 000, el *CAO* es de $250 000 con un crecimiento anual del 23%, una vida útil de 8 años y un valor de salvamento de $300 000. Los ingresos anuales que genera ésta máquina serían para el primer año de $450 000 y cada año se aumentarán en un 23%. Suponiendo una tasa del 35%, determinar si el proyecto es bueno.

Respuesta: $B/C = 1$

7) En el siguiente cuadro se muestran los flujos de caja de los proyectos A y B

	A	B
Costo	2 000 000	4 500 000
CAO	1 540 000	1 056 000

Con una tasa del 20% determinar la mejor alternativa usando la *Relación B/C*.

Sugerencia: Puesto que solo se conocen costos es necesario usar el método incremental donde los beneficios serán las diferencias en el *CAO* y el costo la diferencia entre los costos de cada proyecto.

Respuesta: $B/C = 0.966$ decidir A puesto que el incremento de los beneficios es inferior al incremento de los costos.

8) Se proyecta la construcción de canales para controlar las inundaciones causadas por el desbordamiento de un rio. Actualmente los desbordamientos causan unas pérdidas estimadas en US$5 millones los cuales podrán ser controlados parcialmente según el tamaño de los canales tal como se aprecia en el siguiente cuadro:

Cifras en millones de US$

	Pequeños	Medianos	Grandes
Costo	10	15	25
CAO	0.1	0.2	0.5
Daños por inundaciones	3	1.6	0.5

Los canales se mantendrán por tiempo indefinido, con una tasa del 20% determinar la mejor alternativa.

Sugerencia: el no hacer nada debe considerarse como otra alternativa.

Respuestas: B/C (Pequeños vs. nada) = 0.95 no construir
B/C (Medianos vs. Nada) = 1.06 si construir
B/C (Grandes vs. Nada) = 0.818 no construir

9) Se está analizando la construcción de una carretera alterna entre las ciudades A y B. El costo de construcción es de $70 mil millones. El costo anual de mantenimiento será de $65 millones y cada año su costo crecerá un 18%. Al construir la carretera los hacendados de la región dejarían de percibir $70 millones por concepto de labores agrícolas para el primer año y se cree que anualmente podrían aumentar un 20%. Se estima que a partir del primer año los restaurantes y sitios turísticos que se construyan al lado de la carretera recibirán unos ingresos de $730 millones que cada año aumentarán en un *X*%. Por otra parte los transportadores al utilizar la carretera alterna obtendrían un ahorro en combustible, llantas, aceites,

desgaste de sus vehículos, etc., en \$850 millones con un incremento anual del 20%. Suponiendo que la carretera se debe mantener por un tiempo indefinido y usando una tasa de interés del 28% ¿Cuál sería el valor de X para que la construcción de la carretera alterna sea atractiva?

Respuesta: 27.06% anual

10) En el siguiente cuadro se muestran los flujos de caja de los proyectos A y B

TIEMPO (en semestres)	FLUJO DE CAJA A	B
0	− 1 500	− 1 500
1	400	1 300
2	400	0
3	400	0
4	400	100
5	400	500
6	400	700

a) Calcule la mejor alternativa utilizando un *Período de Recuperación* no mayor de 2 años.
b) Calcule la mejor alternativa usando el *VPN* con una tasa del 40% CS.
c) Discuta la contradicción.

Respuesta: a) mejor la Alternativa A; b) mejor la Alternativa B.

Proyectos en situación de incertidumbre CAPITULO 13

Gran parte de lo que se ha escrito sobre evaluación de proyectos de inversión se limita a la toma de decisiones en condiciones de certeza, es decir: a decisiones tomadas con base en flujos de caja futuros con probabilidad de 1. aunque casi siempre existe el factor inseguridad en el resultado final de una inversión, debido a que en proyectos nuevos no hay experiencia y en otros proyectos que ya se hayan realizado no hay el suficiente número de experiencias para realizar una estadística, probablemente los únicos proyectos de inversión en donde hay estadísticas son los de inversión en activos financieros, sinembargo, esas estadísticas pueden ser cuestionadas seriamente porque lo ocurrido anteriormente no es un fiel reflejo de lo que va a ocurrir en el futuro, puesto que las condiciones del medio en las cuales se realizaron los experimentos anteriores tales como condiciones sociales, políticas, económicas, tributarias, técnicas, etc., difieren de las condiciones actuales.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

La asignación de probabilidades se puede hacer de dos maneras:

En forma objetiva, cuyo método consiste en calcular la probabilidad mediante estadísticas, por ejemplo si el experimento consiste en lanzar al aire una moneda 1.000 veces y supongamos que al caer mostró cara 600 veces y en las otras 400 mostró sello, entonces la probabilidad de obtener una cara en el próximo lanzamiento será de 600/1000 lo que equivale a decir que hay una probabilidad de obtener una cara en el próximo lanzamiento del 60%; y la segunda, en forma subjetiva, en el cual no hay estadísticas porque no se realizaron experimentos previos o porque el número de experimentos es insuficiente para elaborar una estadística, bajo estas circunstancias, se les solicita a varias personas que tengan un sano criterio y además sean expertas en la materia para que den su concepto sobre el posible resultado futuro de un determinado evento.

Cuando vamos a tomar una decisión sobre inversión de dineros, vamos a pronosticar el futuro y este pronóstico puede hacerse en muchas formas por ejemplo tomando como base la economía del medio, en tales circunstancias, la estimación podría ser hecha en diferentes condiciones como depresión, recesión, normales, buenas y prosperas, también podría haberse hecho en una forma más sencilla tomando como base el criterio, el cual puede ser optimista, realista o pesimista.

Cuando se evaluaron proyectos en los capítulos anteriores se asumió que los resultados futuros tenían una probabilidad de 1 o lo que es lo mismo, que había certeza porque la probabilidad era del 100%.

Ejemplo 1

Supongamos que hoy hacemos en un banco una inversión de $100 000 en un depósito a término fijo y que éste pagará un interés del 30%, entonces al final de un año el banco nos devolverá la suma de $130 000, pero la verdad, es que no hay una probabilidad del 100% de que esto sea así porque pueden intervenir una serie de factores que hagan que el compromiso no se cumpla, por ejemplo la quiebra financiera del banco, la ocurrencia de algún fenómeno de la naturaleza, evento político, o por alguna otra circunstancia.

Por las razones anteriormente expuestas, es posible que la probabilidad de poder cobrar los $130 000 al momento del vencimiento del documento sea muy alta, tal vez del 99%, pero si extremamos las medidas de seguridad (por ejemplo amparando la inversión por medio de una compañía de seguros) es posible aumentar la probabilidad a un 99.9% pero es casi imposible llegar a la seguridad del 100%.

La probabilidad de los ingresos futuros de un proyecto es posible asignarlos en forma objetiva cuando se trata de proyectos de inversión en activos financieros, aunque hay que tener en cuenta que las estadísticas fueron hechas con unas condiciones financieras y técnicas diferentes a las que se presentarán cuando se efectúe el nuevo experimento. Cuando se trata de proyectos de ingeniería en casi todos los casos la asignación de probabilidades debe hacerse en forma subjetiva por expertos en la materia, como puede ser el caso de los ingresos que se obtendrán en una máquina prototipo (única máquina en su género en el mundo).

Cuando evaluamos un proyecto asignando probabilidades en forma objetiva decimos que hacemos la evaluación en condiciones de riesgo, pero si la asignación de probabilidades se realiza en forma subjetiva se dice que la evaluación se hace en condiciones de incertidumbre.

Ejemplo 2

Supongamos que la inversión en la construcción de una fábrica es de $350 000 y que según la opinión de tres expertos consultados, quienes teniendo en cuenta la capacidad de producción de cada una de las máquinas, la posibilidad de adquisición de materia prima, el posible precio de venta, etc, han llegado a las siguientes conclusiones: según el experto uno, al final del primer año, el ingreso será de $500 000 y al final del segundo año será de $600 000, el experto dos, llegó a la conclusión que los ingresos serán del orden de $300 000 en el primer año y de $330 000 para el segundo año, el experto tres conceptúa que los ingresos no superarán los $250 000. en el primer año y de $300 000 para el segundo año. La opinión de cada uno de los expertos debe ser tenida en cuenta y nosotros los clasificaremos en "optimista, realista y pesimista", además como nosotros somos los evaluadores del proyecto le asignaremos subjetivamente a cada uno de los expertos una probabilidad sobre sus vaticinios teniendo en cuenta los años de experiencia de cada uno, la fama que como experto tenga cada uno, la hoja de vida que presenten, la forma como hayan sustentado sus conclusiones etc. En estas condiciones hemos decidido que el experto uno tendrá una probabilidad del 10% de acertar en sus predicciones, el experto dos tendrá una probabilidad del 55% y al experto tres le asignamos una probabilidad del 35% (la suma de las tres probabilidades debe dar el 100%). entonces la distribución de probabilidades será:

EXPERTO	PROBABILIDAD	INGRESO AÑO 1	INGRESO AÑO 2
UNO	0.1	500 000	600 000
DOS	0.55	300 000	330 000
TRES	0.35	250 000	300 000

VALOR PRESENTE NETO ESPERADO

Multiplicando la probabilidad asignada a cada experto por el valor de la predicción de cada uno de los expertos obtenemos un promedio denominado *Valor Esperado,* así:

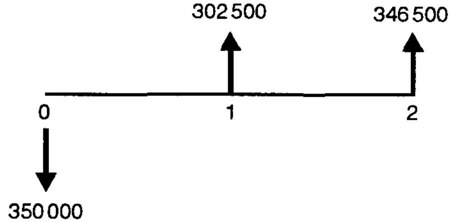
Valor Esperado para el primer año:

$$E(X_1) = 500\ 000(0.1) + 300\ 000(0.55) + 250\ 000(0.35) = \$302\ 500$$

Valor Esperado para el segundo año:

$$E(X_2) = 600\ 000(0.1) + 330\ 000(0.55) + 300\ 000(0.35) = \$346\ 500$$

lo anterior se pude graficar así:



El índice *VPN* aplicado a este proyecto se representa por *VPNE* debido a que estamos evaluando con el *VPN* una serie de valores esperados. Por tanto aplicando el *VPNE* con una tasa del 40% se obtiene:

$$VPNE = -350\ 000 + 302\ 500(1+0.4)^{-1} + 346\ 500(1+0.4)^{-2} = \$42\ 857$$

Como el *VPNE* es mayor que cero entonces concluimos que el proyecto debe ser aceptado.

DESVIACION ESTANDAR

En el ejemplo que estamos analizando observamos que los expertos no coinciden en la predicción de los ingresos y hemos tenido que trabajar con el *Valor Esperado* (valor promedio probabilístico).

Si la predicción de los expertos coincidiera o al menos sus variaciones fueran mínimas tendríamos confianza en el resultado de las predicciones, pero mientras más alejados están los resultados, tendremos menos confianza en éstas predicciones. En estas condiciones parece ser que la medida más adecuada de la confianza podría ser la desviación estándar que según la estadística[1] se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X))^2 \, P(X_k)}}$$

donde:

σ = desviación estándar
X_k = valor de la predicción del período k
$E(X_k)$ = valor esperado del período k
$P(X_k)$ = probabilidad de la predicción del período k
n = número de predicciones

Por tanto si aplicamos la fórmula anterior a cada año del problema que venimos trabajando se tendrá:

desviación estándar para el primer año :

$$\sigma = \sqrt{(500\,000 - 302\,500)^2\, 0.1 + (300\,000 - 302\,500)^2\, 0.55 + (250\,000 - 302\,500)^2\, 0.35} = 69\,776$$

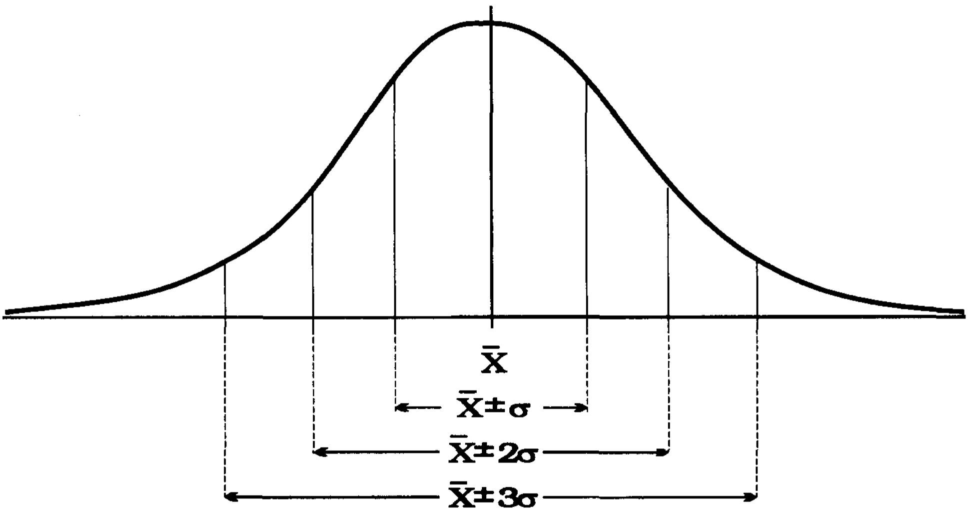
desviación estándar para el segundo año :

$$\sigma = \sqrt{(600\,000 - 346\,500)^2\, 0.1 + (330\,000 - 346\,500)^2\, 0.55 + (300\,000 - 346\,500)^2\, 0.35} = 85\,631$$

Según la estadística existe una probabilidad del 68.23% de encontrar un resultado que esté entre el medio aritmético más una desviación estándar y el medio aritmético menos

[1] Si el lector está interesado en la demostración de las fórmulas deberá consultar un texto de estadística.

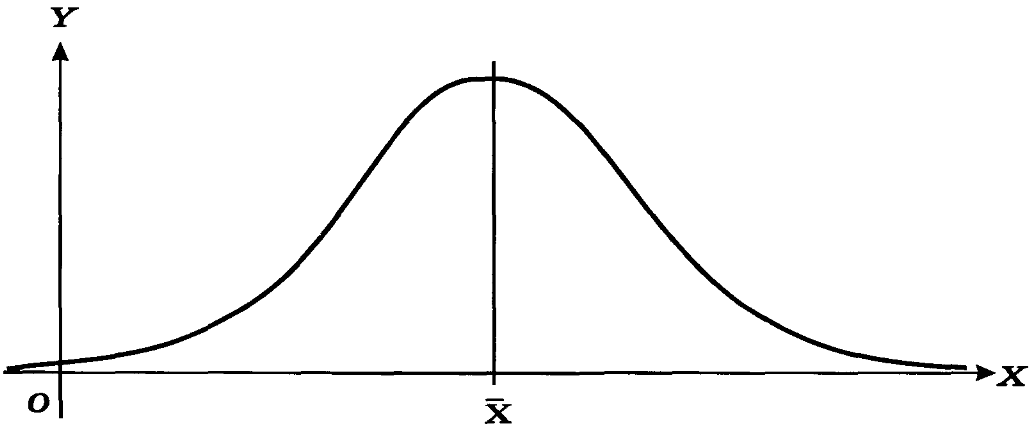
una desviación estándar, que existe una probabilidad del 95.44% de hallar un resultado dentro del margen comprendido entre el medio aritmético y más o menos dos desviaciones estándar y que la probabilidad llega al 99.74% si se amplia el margen a tres desviaciones estándar a cada lado del medio aritmético como se puede apreciar en la gráfica:



lo anterior significa que el promedio esperado de ingresos para el primer año será de $302 500 pero que si a éste promedio le sumamos y le restamos una desviación estándar tendremos una probabilidad del 68.23% de que el ingreso del primer año esté entre: 302 500 – 69 776 = $232 724 y 302 500 + 69 776 = $372 276. El promedio esperado para el segundo año es de $346 500 y como tiene una desviación estándar de $85 631 entonces habrá una probabilidad del 68.23% de obtener un ingreso que estará entre: 346 500 – 85 631 = $260 869 y 346 500 + 85 631 = $432 131 (nótese cómo en la medida en que sea más grande la desviación estándar la inseguridad en el resultado es mayor). Lo anterior no es más que una de las características de la desviación estándar. Para completar la información diremos que hay una probabilidad del 95.44% de obtener un resultado que esté dentro de dos desviaciones estándar alrededor del medio aritmético y que existe una probabilidad del 99.74% de obtener un resultado comprendido entre el medio aritmético y tres desviaciones estándar a cada lado del medio aritmético.

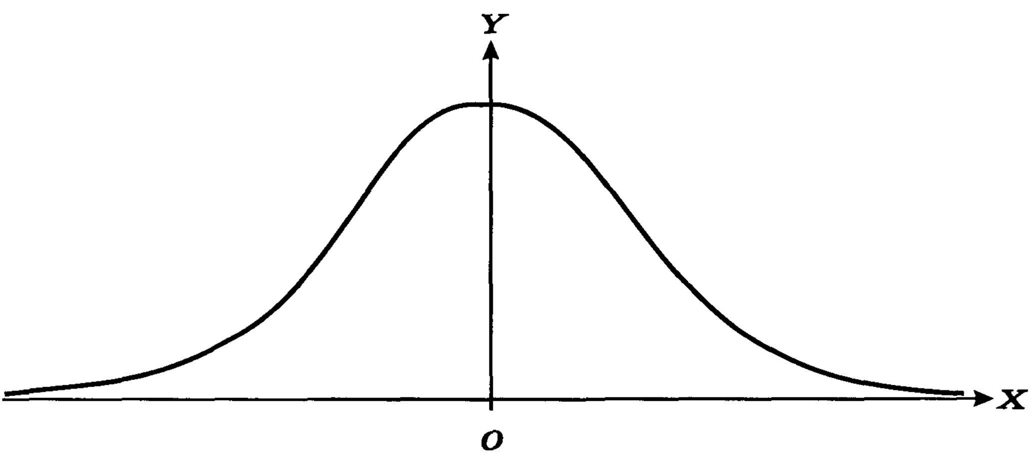
LA CURVA NORMAL

Cuando los resultados de un experimento se encuentran más o menos repartidos al rededor de su medio aritmético, se dice que están distribuidos en forma normal, si construimos una gráfica donde colocamos en el eje *X* los distintos resultados de un experimentos y sobre el eje *Y* colocamos el número de veces que ese resultado se repite entonces, para un gran número de experimentos se obtendrá una gráfica similar a:



la cual es aproximadamente simétrica con relación a un eje que pase por el medio aritmético de X. Si hacemos que en la curva anterior el eje de simetría $(\bar{X})$ coincida con el eje Y, además hacemos que la unidad de medida del eje X sea la desviación estándar, σ, tendremos una curva con las siguientes características especiales:

1) el área total bajo la curva y el eje X será igual a 1
2) será simétrica con relación al eje Y
3) será asintótica por ambos lados al eje X similar a:

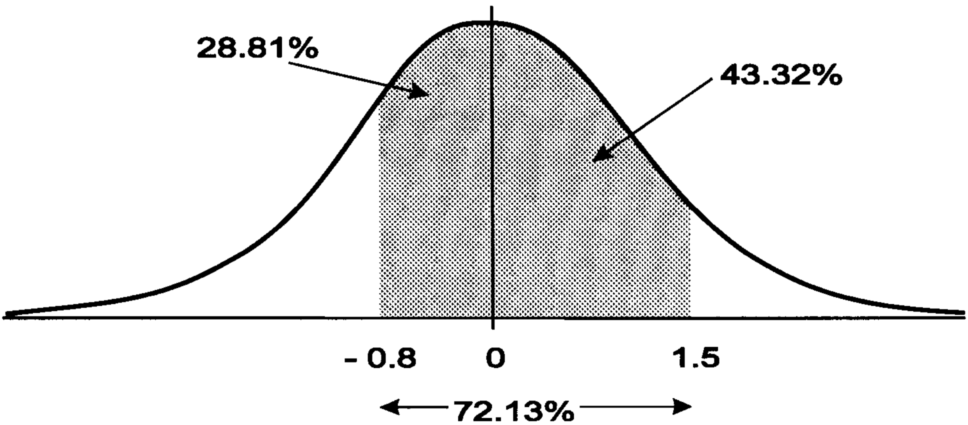


y en estas condiciones se dice que la curva está normalizada

Ejemplo 3

Calcular el área entre la ordenada $\sigma = -0.8$ y $\sigma = 1.5$

Solución:



El área entre $\sigma = 0$ y $\sigma = 1.5$ se encuentra calculada en la tabla del anexo 2, pero allí hemos cambiado el símbolo σ por z porque la curva ya está normalizada así que el área valdrá 0.4332 = 43.32% del área total. Por otra parte como la curva es simétrica, en la tabla solo se encuentra el área para la parte derecha de la curva entonces el área que va desde z = – 0.8 hasta z = 0 será la misma que de z = 0 a z = 0.8 y que según la tabla es 0.2881 = 28.81% entonces el área entre – 0.8 y 1.5 será 0.2881 + 0.4332 = 0.7213 = 72.13% del área de toda la curva.

PROBABILIDAD DE PERDIDA EN LA ACEPTACION

Anteriormente vimos que el *VPNE* es un índice apropiado para evaluar proyectos ya sea en condiciones de riesgo o en condiciones de incertidumbre. Otro método muy utilizado es el de hallar la *Probabilidad de Pérdida en la Aceptación* en caso de ser realizado el proyecto y lo representaremos por *PPA*.

Ejemplo 4

Si evaluamos el proyecto del ejemplo 2 usando el método del *PPA* debemos hallar previamente la desviación estándar de todo el proyecto, la cual puede ser calculada mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\sigma_P = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \, (1+i)^{-2k}}}$$

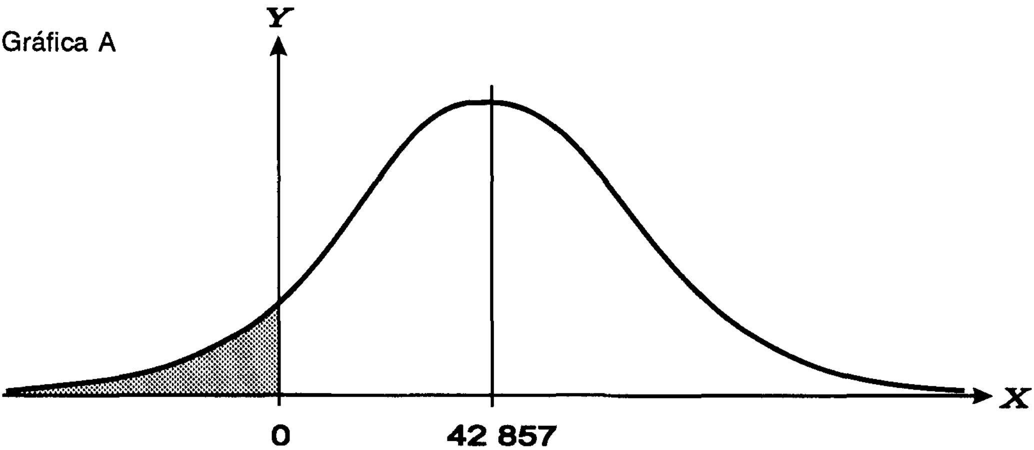
donde σ_p = desviación estándar de todo el proyecto
σ_k = desviación estándar de los ingresos del año k
i = tasa de interés con que se evalúa el proyecto
n = número de períodos del proyecto

Al reemplazar los datos que tenemos en la fórmula anterior y usando una tasa del 40% se tiene:

$$\sigma_p = \sqrt{69\,776^2\,(1+0.4)^{-2} + 85\,631^2\,(1+0.4)^{-4}} = 66\,278$$

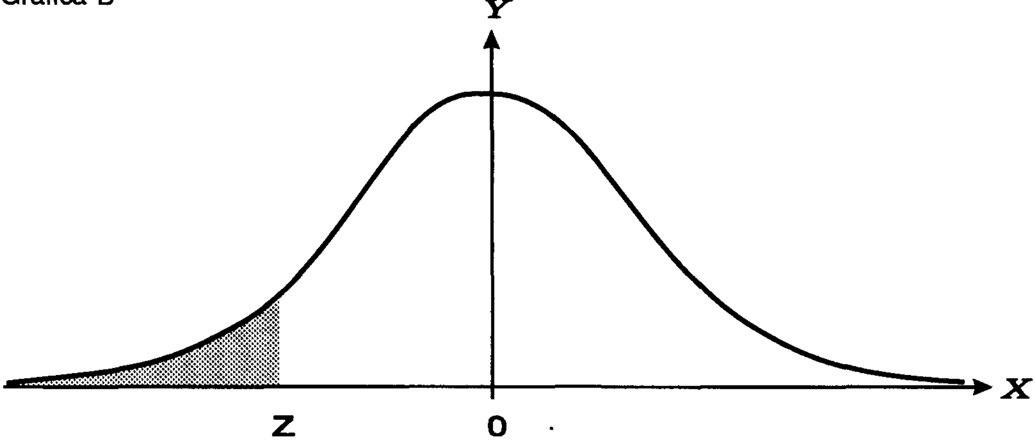
Anteriormente habíamos hallado que el *VPNE* = 42 857 que indicaba una ganancia y que $0 es la indiferencia donde ni se gana ni se pierde, entonces el área sombreada significa pérdida.

Gráfica A



Para normalizar esta gráfica (cambiarla a una curva normal) habrá que correr el eje Y hasta que quede situado en en el centro de la gráfica y hacer que la desviación estandar, σ, sea la nueva unidad del eje X

Gráfica B



Ahora las unidades sobre el eje X estarán estandarizadas y los valores de 0 y 42 857 de la gráfica A pasan a ocupar las posiciones z y 0 de la gráfica B cada punto sobre el eje X se calculará mediante la siguiente fórmula:

$$z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$

pero en nuestro ejemplo $\overline{X} = VPNE$ y para σ usaremos σ_p = 66 278 por tanto la fórmula anterior adaptada a nuestras necesidades es:

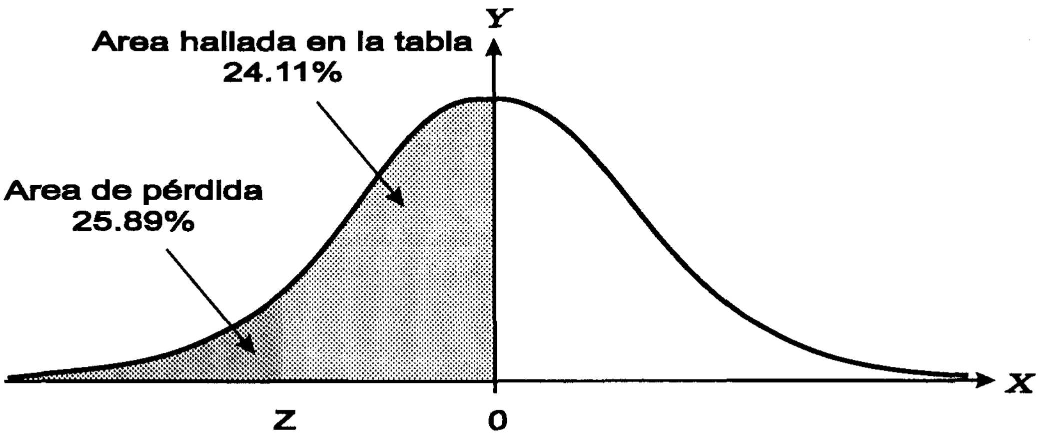
$$z = \frac{X - VPNE}{\sigma_p}$$

y reemplazando se tiene:

$$z = \frac{0 - 42\ 857}{66\ 278} = -\ 0.6466$$

este valor de z se halla en la tabla del anexo 2 y se encuentra localizado entre z_1 = 0.64 y z_2 = 0.65 que corresponde a áreas de 0.2389 y 0.2422 respectivamente. (pero está situada al lado izquierdo porque z = – 0.6466 es negativo). Si queremos una mayor exactitud debemos hacer una interpolación, con la cual obtendríamos que z = 0.2411 que corresponde a un área en el lado izquierdo del 24.11%

Del análisis de la siguiente gráfica, se observa que el área que nos interesa calcular es el área que está sombreada, la cual viene a representar el sector donde hay pérdida.



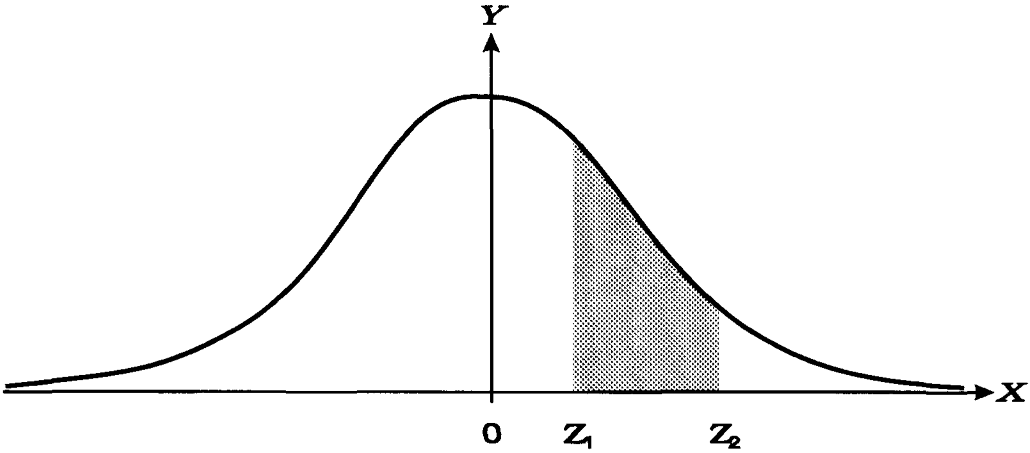
Como el área total es 1 y dado que la parte de la izquierda es simétrica a la de la derecha, entonces el área de la parte izquierda es 0.5 y el área sombreada será 0.5 – 0.2411 = 0.2511, entonces el índice *PPA* indica que en caso de realizar el proyecto hay una probabilidad de pérdida del 25.89%

Ejemplo 5

Calcular la probabilidad de obtener una ganancia que pueda estar entre $50 000 y $100 000

Solución:

El área sombreada representa el sector donde las ganancias varían entre $50 000 y $100 000



El valor de z correspondiente a $50 000 es:

$$z_1 = \frac{50\,000 - 42\,857}{66\,278} = 0.1078$$

y el valor z_2 correspondiente a $100 000 será:

$$z_2 = \frac{100\,000 - 42\,857}{66\,278} = 0.8622$$

Por interpolación entre los valores que da la tabla, el área que va desde $z = 0$ hasta z_1 es 4.29% y por interpolación el área que va desde $z = 0$ hasta z_2 es 30.57% pero el área que nos interesa va de z_1 a z_2 esto es: 30.57% – 4.29% = 26.28%

TASA INCREMENTADA POR EL RIESGO

Los analistas de riesgo tienen preferencia por éste método cuando la distribución de probabilidades puede hacerse en forma objetiva, es decir, cuando se va a evaluar un proyecto en condiciones de riesgo y es muy usado en proyectos de inversión en activos financieros, este método consiste en evaluar el proyecto con una tasa que debe ser igual a la tasa libre de riesgo más la tasa propia del riesgo. La tasa libre de riesgo puede ser la tasa que se utilizaría en el proyecto cuando hay certidumbre y la tasa propia del riesgo es el recargo que debe hacerse por la existencia misma del riesgo.

En consecuencia:

$$\boxed{i = i_1 + i_2}$$

donde: i = tasa ajustada por el riesgo
i_1 = tasa libre de riesgo
i_2 = tasa del riesgo

Aquí hablamos de riesgo y no de incertidumbre porque la tasa i_2 puede ser calculada objetivamente por métodos estadísticos. Es obvio que al aumentar la tasa resulta más difícil que el proyecto sea aprobado, por tanto la tasa i_2 debe ser unos pocos puntos adicionales de tal forma que se cubra el riesgo y se compensen los posibles errores de juicio, pero conduce a unos criterios fijos e independientes de los cambios en el mercado financiero.

Para el cálculo de la tasa i_2 y suponiendo que las condiciones del país son estables, se sugiere hacer una estimación con base en datos históricos, esto significa que debemos averiguar cuál fue la tasa i_2 que se cobró en riesgos similares para aplicarla al nuevo proyecto.

Ejemplo 6

Un proyecto requiere una inversión inicial de $1 000 y generará $800 al final del primer año y $820 al final del segundo año. Suponiendo una tasa libre de riesgo del 30%. Calcular mediante el *VPN* si el proyecto desde el punto de vista financiero debe o no realizarse.

a) sin tomar en cuenta el riesgo y
b) teniendo en cuenta que la tasa adicional por el riesgo en proyectos similares fue del 10%

Solución:

a) $VPN = -1\,000 + 800(1+0.3)^{-1} + 820(1+0.3)^{-2} = 100.59 > 0$
el proyecto puede realizarse
b) Calculamos $i = 0.3 + 0.1 = 0.4$
$VPN = -1\,000 + 800(1+0.4)^{-1} + 820(1+0.4)^{-2} = -10.20 < 0$
el proyecto no debe realizarse.

Observación: sin entrar en detalles puesto que este asunto se saldría del alcance de esta obra, debemos mencionar que en países donde el mercado bursátil tiene suficiente información se utiliza el método del portafolio[2] para hallar la tasa de riesgo. Éste método exige el cálculo de un índice llamado el índice ß (Beta) que mide el riesgo de una acción con respecto al riesgo de todo el portafolio y se calcula mediante la siguiente fórmula:

2 Portafolio es el grupo de títulos valores tales como bonos, acciones, certificados de depósito a termino, etc. en los cuales el propietario del proyecto tiene invertido su dinero

$$\boxed{\beta = \frac{\rho\sigma}{\sigma_p}}$$

donde β = índice de riesgo[3]
ρ = coeficiente de correlación entre las tasa de interés del portafolio
σ = desviación estándar de las tasas de interés de proyectos similares
σ_p = desviación estándar de las tasas de interés del portafolio

Una vez conocido el índice β, el cálculo de la tasa i_2 puede hacerse fácilmente mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{i_2 = (i_3 - i_1)\beta}$$

donde i_2 = recargo total debido al riesgo
i_3 = tasa de riesgo en proyectos similares
i_1 = tasa libre de riesgo
β = índice de riesgo

COEFICIENTE DE VARIACION

Anteriormente dijimos que la desviación estándar parecía ser la medida más adecuada para la dispersión lo cual significaría que si la desviación estándar es muy grande la desconfianza en el resultado final será mayor y que mientras más pequeña sea la desviación estándar habrá más confianza en el resultado final, pero ésta medida no la podemos utilizar cuando se trata de comparar proyectos que tienen diferente valor. El siguiente ejemplo nos aclara el planteamiento anterior.

Ejemplo 7

A continuación se presentan los datos y cálculos para los proyectos A y B:

Proyecto A Criterio	(1) valor	(2) prob	(3) (1)x(2)	(4) $(X_k - E(X))^2$	(5) (4)x(2)
Pesimista	7 000	0.2	1 000	1 000 000	200 000
Realista	8 000	0.6	4 000	0	0
Optimista	9 000	0.2	1 800	1 000 000	200 000
			$E(X)$ = 8 000		σ^2 = 400 000
					σ = 632

3 Existen entidades calificadoras de riesgos que se encargan de calcular los índices β.

Proyecto A Criterio	(1) valor	(2) prob	(3) (1)x(2)	(4) $(X_k-E(X))^2$	(5) (4)x(2)
Pesimista	500	0.2	100	250 000	50 000
Realista	1 000	0.6	600	0	0
Optimista	1 500	0.2	300	250 000	50 000
			$E(X)$=1 000		σ^2 = 100 000
					σ = 316

Si tomamos aisladamente la desviación estándar escogeríamos el proyecto B por ser menor ésta medida, pero éstos dos proyectos no se pueden comparar con la desviación estándar porque son de diferente tamaño, en consecuencia habrá que utilizarse otra medida. En éstas circunstancias el índice más adecuado parece ser el coeficiente de variación que representaremos por CV el cual es igual a la desviación estándar dividida por la esperanza.

$$CV = \frac{\sigma}{E(X)}$$

El coeficiente de variación nos mide la dispersión por unidad de ingreso esperado y así unificamos el criterio que sirve de base para la toma de decisión.

para el proyecto A $$CV = \frac{632}{8\,000} = 0.079$$

para el proyecto B $$CV = \frac{316}{1\,000} = 0.316$$

Resulta que el proyecto A tiene un coeficiente de variación más bajo, por lo tanto tiene menos riesgo por unidad de rendimiento y así se escoge el proyecto A.

Naturalmente que si los proyectos tienen el mismo valor esperado entonces basta conocer la desviación estándar para saber cuál tiene menor riesgo.

Observación: Cuando se evalúan proyectos individuales el índice $VPNE$ y el PPA son los índices apropiados, pero si se trata de comparar proyectos los índices más adecuados serían el PPA y el CV pero en todos los casos el índice más utilizado para evaluar proyectos en condiciones de riesgo o de incertidumbre es el PPA.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Un proyecto requiere una inversión inicial de $15 millones y producirá los ingresos que se presentan en el siguiente cuadro junto con sus respectivas probabilidades las cuales de un año a otro son independientes.

Año 1		Año 2		Año 3	
Ingreso	Prob	Ingreso	Prob	Ingreso	Prob
10	0.3	12	0.5	12	0.7
8	0.4	10	0.5	9	0.2
5	0.3			5	0.1

Cifras en millones de pesos

Suponiendo una tasa del 32% calcular el *VPNE*

Respuesta: $ 1 798 703

2) Con respecto al problema anterior calcular:
a) La desviación estándar de cada año
b) La desviación estándar de todo el proyecto
c) Dé una interpretación a la desviación estándar de todo el proyecto

Respuestas:

a) σ_1 = $1 951 922; σ_2 = $1 000 000 σ_3 = $2 238 303
b) σ_p = $1 860 946
c) Existe una probabilidad del 68.26% para que el resultado del proyecto en $ de hoy varíe entre una pérdida de $62 243 y una ganancia de $3 659 649 con una desviación estándar a cada lado del *VPNE* y con probabilidad del 95.44% (dos desviaciones estándar) el resultado puede estar entre una pérdida de $1 923 189 y una ganancia de $5 550 595

3) Con respecto al problema 1 y usando los resultados del problema 2
a) Calcular el índice *PPA*
b) Calcular la probabilidad de obtener una ganancia igual o superior a $3 millones de hoy
c) Calcular la probabilidad de obtener una ganancia que pueda variar entre $3 millones y $4 millones de hoy

Respuestas: a) 16.6%; b) 25.78%; c) 13.88%

4) Un proyecto requiere una inversión inicial de $3 millones, los flujos de caja que generará dependen básicamente del estado de la economía del país y se muestran en el siguiente cuadro:

Economía del país	Año 1 Ingreso	Prob	Año 2 Ingreso	Prob	Año 3 Ingreso	Prob
Depresión	700 000	0.1	800 000	0.10	900 000	0.09
Recesión	1 400 000	0.2	1 500 000	0.25	1 700 000	0.23
Normal	1 800 000	0.4	2 000 000	0.40	2 500 000	0.30
Buena	2 200 000	0.2	2 600 000	0.15	3 300 000	0.28
próspera	2 500 000	0.1	3 200 000	0.10	4 100 000	0.10

Con una tasa del 45% :
a) Determinar con el *VPNE* si el proyecto debe realizarse
b) Calcular la desviación estándar de cada año.
c) Calcular la desviación estándar de todo el proyecto

Respuestas:
a) *VPNE* = – $13 194 no realizar el proyecto porque hay pérdida
b) σ_1 = $482 079 σ_2 = $635 039 σ_3 = $899 813
c) σ_p = $537 475

5) Con relación al problema anterior:
a) Calcular la probabilidad de no perder
b) Calcular la probabilidad de obtener una ganancia que varíe entre $50 000 y $100 000
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una ganancia superior $1 millón?

Respuestas: a) 49%; b) 3.66%; c) 2.97%

6) El flujo de caja esperado para el primer año es de $30 000 y cada año siguiente crecerá en un 25%, la desviación estándar del primer año es $4 000 y cada año crecerá un 20%, la inversión inicial es de $80 000 y el horizonte de planeación es de 5 años. Con una tasa del 40% calcular:
a) el *VPNE*
b) la desviación estándar de todo el proyecto.
c) el *PPA*
d) la probabilidad de obtener una ganancia igual o superior a $15 000 de hoy.

Respuestas: a) $6 514.6; b) $4 917.6; c) 9.34%; d) 4.2%

7) Sean los proyectos A y B con la siguiente información:

	Proyecto A	Proyecto B
σ_p	12 000	84 000
VPNE	80 000	900 000

¿En cuál de los dos proyectos se encontrará más segura la inversión?

Respuesta: En el proyecto B

Análisis de reemplazo y sensibilidad

CAPITULO **14**

Un plan de reemplazo de activos físicos es de vital importancia en todo proceso económico, porque un reemplazo apresurado causa una disminución de la liquidez y un reemplazo tardío causa pérdida por los aumentos del costo de operación y mantenimiento, por lo tanto debe establecerse el momento oportuno de reemplazo, a fin de obtener mayores ventajas económicas.

Fundamentalmente un activo físico debe ser reemplazado, cuando se presentan las siguientes causas: insuficiencia, alto costo de mantenimiento y obsolescencia. Normalmente, las causas anteriores no se presentan individualmente sino en conjunto.

Para hacer un análisis de reemplazo es indispensable determinar:

- **El horizonte de planeación,** o sea el intervalo de tiempo, durante el cual va a realizarse el análisis; lógicamente, mientras más pequeño sea este intervalo de tiempo, más exacto resultará el análisis.

- **La disponibilidad del capital,** para hacer el reemplazo según lo proyectado.

- **El avance de la tecnología,** debe tenerse presente que con equipos obsoletos se pierde competitividad en los mercados.

- **La vida económica,** es el período para el cual el *CAUE* es mínimo.

Para el activo antiguo, no se debe tomar en cuenta la vida útil restante pues, en realidad, casi todo puede mantenerse funcionando indefinidamente, pero a un costo que puede ser excesivo, si se repara constantemente.

El análisis de reemplazo sirve para averiguar si un equipo está operando de manera económica o si los costos de operación pueden disminuirse, adquiriendo un nuevo equipo. Mediante éste análisis se puede determinar la forma de operación y, también, podemos averiguar si el equipo actual debe ser reemplazado de inmediato o es mejor esperar un tiempo antes de cambiarlo.

Desde el punto de vista económico las técnicas más utilizadas en el análisis de reemplazo son tres: el período óptimo de reemplazo, la *confrontación antiguo-nuevo* y el cálculo del *valor crítico de reemplazo.*

PERIODO OPTIMO DE REEMPLAZO

Esta técnica consiste en calcular el *CAUE* del activo, cuando es retenido 1, 2, 3, ...*K*, años y, en esta forma, seleccionar el número de años para el cual el *CAUE* es mínimo, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

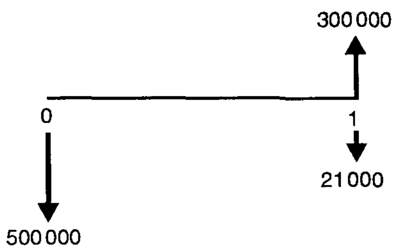
Ejemplo 1

Una máquina se compra actualmente por $500 000; si suponemos una tasa del 20%, determinar el período óptimo de reemplazo, teniendo en cuenta la información que se da en el siguiente cuadro:

K	1	2	3	4	5
S	300 000	200 000	137 000	71 000	0
CAO	21 000	35 000	55 000	90 000	150 000

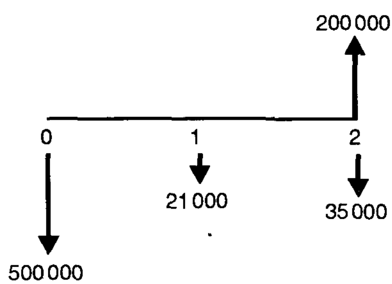
Solución:

Primero calculamos el *CAUE* cuando el activo es retenido 1 año:



$$CAUE\,(1) = \frac{500\,000}{a_{\overline{1}|}20\%} + 21\,000 - \frac{300\,000}{s_{\overline{1}|}20\%} = \$321\,000$$

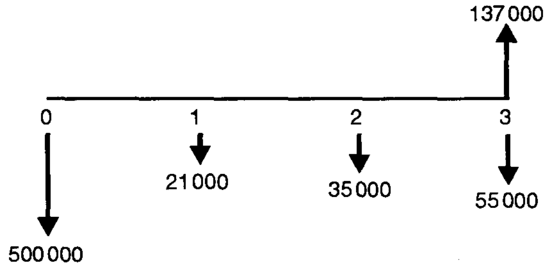
Ahora calculamos el *CAUE* cuando el activo es retenido 2 años:



$$CAUE\,(2) = \frac{500\,000}{a_{\overline{2}|}20\%} + \frac{21\,000(1.2)^{-1} + 35\,000(1.2)^{-2}}{a_{\overline{2}|}20\%} - \frac{200\,000}{s_{\overline{2}|}20\%}$$

$$CAUE\ (2) = \$263\ 727$$

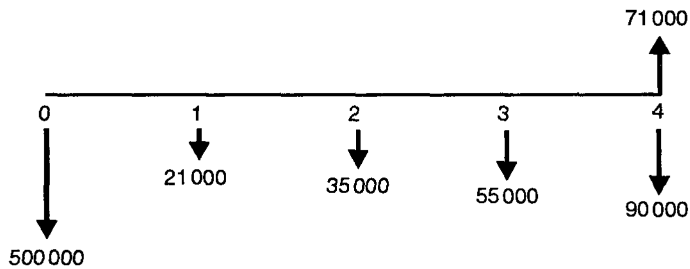
Ahora hacemos el cálculo cuando el activo es retenido 3 años



$$CAUE\ (3) = \frac{500\ 000}{a_{\overline{3}|}20\%} + \frac{21\ 000(1.2)^{-1} + 35\ 000(1.2)^{-2} + 55\ 000(1.2)^{-3}}{a_{\overline{3}|}20\%} - \frac{137\ 000}{s_{\overline{3}|}20\%}$$

$$CAUE\ (3) = \$234\ 681$$

Se observa que el *CAUE* sigue bajando, entonces seguimos haciendo cálculos hasta el momento en que el *CAUE* deje de bajar



$$CAUE\ (4) = \frac{500\ 000}{a_{\overline{4}|}20\%} + \frac{21\ 000(1.2)^{-1} + 35\ 000(1.2)^{-2} + 55\ 000(1.2)^{-3} + 90\ 000(1.2)^{-4}}{a_{\overline{4}|}20\%} - \frac{71\ 000}{s_{\overline{4}|}20\%}$$

$$CAUE\ (4) = \$225\ 128$$

Ahora calculamos el *CAUE* cuando el número de períodos es 5

$$CAUE\ (5) = \frac{500\ 000}{a_{\overline{5}|}20\%} + \frac{21\ 000(1.2)^{-1} + 35\ 000(1.2)^{-2} + 55\ 000(1.2)^{-3} + 90\ 000(1.2)^{-4} + 150\ 000(1.2)^{-5}}{a_{\overline{5}|}20\%}$$

$$CAUE = \$226\ 482$$

Como el *CAUE* aumenta, el activo debe ser retenido 4 años porque es el tiempo en el cual el *CAUE* es mínimo.

CONFRONTACION ANTIGUO-NUEVO

Esta técnica consiste en analizar las ventajas del activo actualmente en uso y compararlos con las ventajas que ofrecería un nuevo activo. Al utilizar esta técnica, debemos tomar para el activo antiguo las últimas estimaciones que tengamos sobre el valor comercial, salvamento, vida útil, *CAO*, etc, las cuales, por ser más recientes, deben ser más exactas.

Ejemplo 2

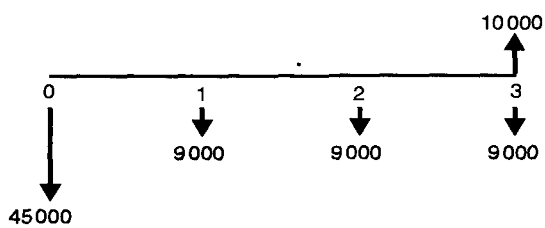
Una fábrica compró una máquina hace 3 años; tubo un costo de $800 000 y en esa época se estimó una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de $10 000. Actualmente, los ingenieros de la planta estiman que la vida útil restante es de 3 años y proponen la compra de una nueva máquina que cuesta $90 000; tiene una vida útil de 8 años y un valor de salvamento del 10% de su costo. El vendedor de la máquina está ofreciendo recibir la máquina antigua en $45 000, como parte de pago. Revisando las facturas de reparaciones, encontramos que el costo anual por reparaciones y mantenimiento asciende a $9 000 mientras que para la nueva máquina se estiman en $4 000. Si desea obtenerse un rendimiento del 20% sobre la inversión, determinar si económicamente es viable efectuar el cambio.

Solución:

Hace 3 años se estimó una vida útil de 5 años en la máquina que actualmente está en uso, o sea que, según esos cálculos la vida útil restante sería de 2 años. Pero como los últimos cálculos que se hacen son cada vez más exactos y actualmente los ingenieros estiman que la vida útil restante es de 3 años, entonces tomaremos 3 años de vida útil, en lugar de 2 que según estimaciones iniciales le faltaban a la máquina. Por la misma razón tomaremos como costo actual de la máquina antigua $45 000 y dejaremos el valor de salvamento en $10 000, puesto que nada nos dicen al respecto. Entonces procederemos a hacer la *Confrontación antiguo-nuevo*, con la siguiente información:

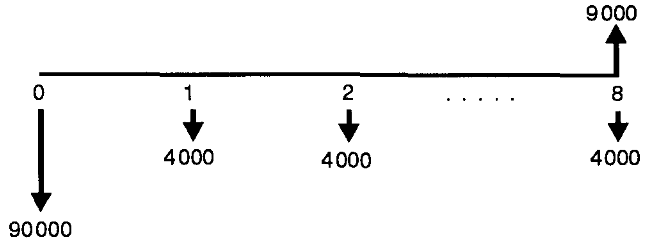
	ANTIGUA	NUEVA
C	45 000	90 000
CAO	9 000	4 000
K	3	8
S	10 000	9 000

ANTIGUA



$$CAUE = \frac{45\,000}{a_{\overline{3}|}20\%} + 9\,000 - \frac{10\,000}{s_{\overline{3}|}20\%} = \$27\,615.39$$

NUEVA



$$CAUE = \frac{90\,000}{a_{\overline{8}|}20\%} + 4\,000 - \frac{9\,000}{s_{\overline{8}|}20\%} = \$26\,909.36$$

En consecuencia, debe escogerse la máquina nueva, por tener menor *CAUE*.

Ejemplo 3

Resolver el problema anterior suponiendo que el estudio de mercados señala un máximo de 3 años, para seguir produciendo el artículo que se fabrica con la máquina actual y, al final de este período, es necesario cambiar de producto, el cual tendrá que ser fabricado con una maquinaria distinta, altamente sofisticada.

Solución:

En estas condiciones el horizonte de planeación será de 3 años y, como no tenemos información adicional sobre el salvamento, usaremos los mismos valores:

$$CAUE\ (A) = \frac{45\,000}{a_{\overline{3}|}20\%} + 9\,000 - \frac{10\,000}{s_{\overline{3}|}20\%} = \$27\,615.39$$

$$CAUE\ (N) = \frac{90\,000}{a_{\overline{3}|}20\%} + 4\,000 - \frac{9\,000}{s_{\overline{3}|}20\%} = \$44\,252.74$$

En estas condiciones preferimos continuar con la máquina antigua por tener menor *CAUE*.

CONFRONTACION ANTIGUO-NUEVO PARA UN AÑO MAS

Cuando un activo está próximo al final de su vida útil, generalmente, el costo de operación se eleva de forma considerable, debido al costo de los repuestos, al tiempo que dura fuera de servicio mientras se efectúan reparaciones y también al alto costo de mantenimiento etc. En tales condiciones, el propietario frecuentemente se plantea el siguiente problema: ¿debo reemplazarlo de inmediato o puedo esperar un año más y luego reemplazarlo?

Este problema puede resolverse fácilmente, si utilizamos la técnica de la *Confrontación antiguo-nuevo* para un año más

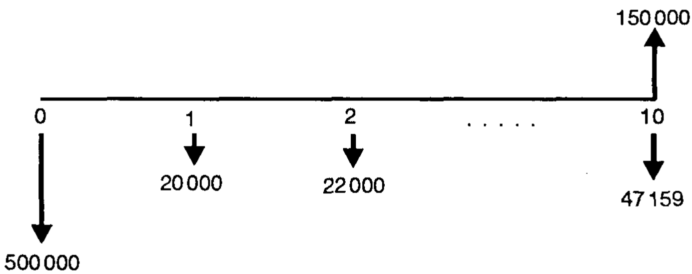
Ejemplo 4

Una máquina comprada hace 3 años se ha venido deteriorando más rápidamente de lo que se esperaba. Por esta razón el propietario desea saber si debe reemplazarlo ahora por una máquina nueva de otra marca o puede esperar uno, dos o tres años más antes de hacer el reemplazo. Utilice una tasa del 20% y haga los cálculos con los siguientes datos:

ANTIGUA		NUEVA	
Valor Actual	\$200 000	Costo Inicial	\$500 000
en 1 año	150 000		
en 2 años	80 000	*CAO* inicial	20 000
en 3 años	0	aumento anual	10%
Vida útil	3 año	Vida útil	10 años
CAO actual = \$30 000			
cada año subsiguiente se duplica			

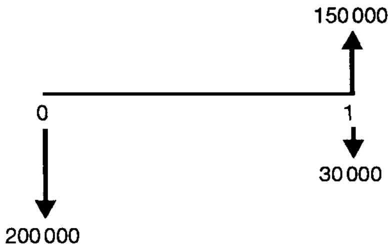
Solución:

Primero calculamos el *CAUE* de la máquina nueva:



$$CAUE = \frac{500\,000}{a_{\overline{10}|}20\%} + \frac{\dfrac{20\,000\left[(1+0.1)^{10}(1+0.2)^{-10}-1\right]}{0.1-0.2}}{a_{\overline{10}|}20\%} = \frac{150\,000}{s_{\overline{10}|}20\%} = \$141\,203.90$$

Ahora procedemos a calcular el *CAUE* de la máquina antigua, cuando la vamos a retener un año:



$$CAUE = \frac{200\ 000}{a_{\overline{1}|}20\%} + 30\ 000 - \frac{150\ 000}{s_{\overline{1}|}20\%} = \$120\ 000$$

Esto nos indica que perfectamente, podemos retener un año más, debido a que el *CAUE* es menor en la antigua, que en la nueva. Si quisiéramos saber si podemos esperarnos no un año sino dos entonces tendríamos que utilizar una técnica diferente porque la que estamos analizando en este momento sólo es aplicable para un año más, tal como su nombre lo indica, en tales circunstancias podemos usar la técnica de la *Confrontación antiguo-nuevo* calculando el *CAUE* para 2 años.

$$CAUE = \frac{200\ 000}{a_{\overline{2}|}20\%} + \frac{30\ 000(1.2)^{-1} + 60\ 000(1.2)^{-2}}{a_{\overline{2}|}20\%} - \frac{80\ 000}{s_{\overline{2}|}20\%}$$

$$CAUE = \$138\ 183$$

y podemos concluir que sí es posible esperarnos 2 años dado que el *CAUE* de la máquina antigua es menor. Si quisiéramos saber si es posible esperarnos 3 años entonces calculamos el *CAUE* para 3 años.

$$CAUE = \frac{200\ 000}{a_{\overline{3}|}20\%} + \frac{30\ 000(1.2)^{-1} + 60\ 000(1.2)^{-2} + 120\ 000(1.2)^{-3}}{a_{\overline{3}|}20\%}$$

$$CAUE = \$164\ 782.41$$

En este caso el *CAUE* de la máquina antigua es superior al de la máquina nueva; en consecuencia, no puede esperarse 3 años.

CASO ESPECIAL

Un caso especial en la *Confrontación antiguo-nuevo* se presenta en aquellas máquinas prototipo; es decir aquellas máquinas que se han construido con fines muy específicos y, por tal razón, no tienen comprador a ningún precio, aún cuando la máquina no haya llegado al final de su vida útil. Al aplicar este método, debemos suponer que todos los costos que haya causado la máquina incluyendo costos de compra son costos de mantenimiento y, en la mayoría de los casos, suponer que el valor de salvamento es cero en cualquier época. En consecuencia, el *CAUE* será igual al *CAO*, para el próximo año.

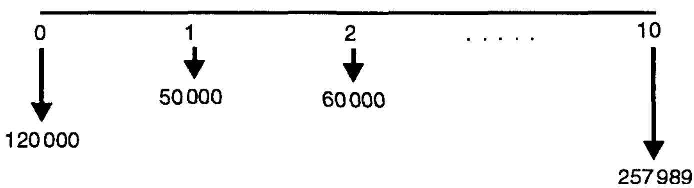
En cuanto a la máquina nueva, debemos calcular el *CAUE*, para un número de años tal, que éste sea el más bajo posible; este número de años recibe el nombre de *período de vida económico.*

Ejemplo 5

Una fábrica compró una máquina prototipo, por lo cual, no hay valor de salvamento. Hace 3 años costó $250 000 y no es fácil venderla. Actualmente, se calcula que el *CAO* para el próximo año será de $100 000 y, por experiencia de años anteriores, se estima que los costos aumentarán un 10% en cada uno de los años venideros. La fábrica tiene la oportunidad de ordenar la fabricación de otra máquina para reemplazar la máquina actualmente en uso. La nueva máquina costaría $120 000, tendrá una vida útil de 10 años, un *CAO* de $50 000 para el primer año, con un incremento anual del 20%, y por ser prototipo, no tendrá valor de salvamento. Suponiendo una tasa del 20%, ¿debe reemplazarse ahora?

Solución:

Primero calculamos el período de vida económica de la máquina nueva.



Si hacemos variar X desde $X = 1$ hasta $X = 10$ en la siguiente fórmula se obtiene la tabla de abajo.

Años	1	2	3	4	5	6	7	.....	10
CAUE	194 000	133 090	116 308	110 736	109 788	111 261	114 206	....	128 007

$$CAUE = \frac{120\,000}{a_{\overline{X}|}20\%} + \frac{\dfrac{50\,000(X)}{1 + 0.2}}{a_{\overline{X}|}20\%}$$

En consecuencia, el período de vida económico de la máquina nueva es de 5 años, donde su *CAUE* es el más bajo: $109 788. Como el *CAUE* de la máquina vieja se estima en unos $100 000; entonces, no debe realizarse el cambio ahora.

Observación: Si intentáramos graficar los valores de *CAUE*, observaríamos que ésta toma la forma de una U, donde el período de vida económico se encuentra en el valor de X donde se halla la parte más baja de la U.

CALCULO DEL VALOR CRITICO DE REEMPLAZO

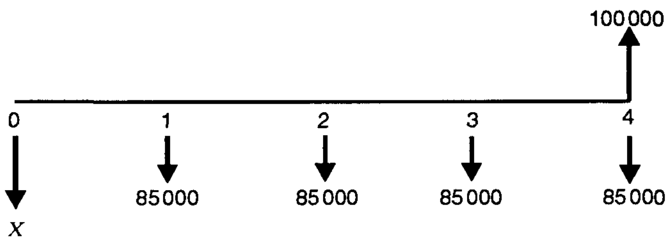
Muchas veces, es necesario conocer el *valor mínimo de reemplazo* de una máquina antigua, antes de entrar a negociar una máquina nueva o, también, calcular el máximo valor que puede pagarse por una máquina nueva dando en parte de pago de esta la máquina vieja. Este valor crítico puede obtenerse, igualando el *CAUE* de la máquina nueva con el *CAUE* de la máquina antigua.

Ejemplo 6

Una máquina comprada hace 4 años tiene un *CAO* de $85 000, un valor de salvamento de $100 000 y una vida útil restante de 4 años. Se ha seleccionado una máquina nueva cuyo costo es de $900 000; tiene una vida útil de 12 años, un *CAO* de $15 000 y, cada año siguiente se incrementa en $10 000. Su valor de salvamento es de $300 000. ¿Cuál debe ser el *valor crítico de reemplazo*? Suponga una tasa del 22%.

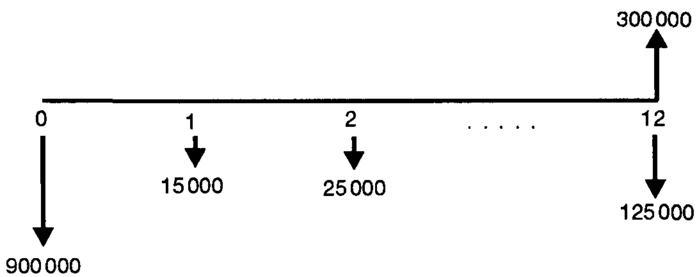
Solución:

Sea X el *valor crítico de reemplazo*; entonces, el *CAUE* de la máquina antigua será:



$$CAUE = \frac{X}{a_{\overline{4}|}22\%} + 85\,000 - \frac{100\,000}{s_{\overline{4}|}22\%}$$

Ahora calculamos el *CAUE* de la máquina nueva:



$$CAUE = \frac{900\,000}{a_{\overline{12}|}22\%} + \frac{15\,000 a_{\overline{12}|}22\% + \dfrac{10\,000}{0.22}\left[a_{\overline{12}|}22\% - 12(1.22)^{-12}\right]}{a_{\overline{12}|}22\%} - \frac{300\,000}{s_{\overline{12}|}22\%}$$

$$CAUE = \$259\ 670.08$$

Igualando el *CAUE* de la máquina antigua con la nueva, tenemos:

$$\frac{X}{a_{\overline{4}|22\%}} + 85\ 000 - \frac{100\ 000}{s_{\overline{4}|22\%}} = 259\ 670.08$$

Despejando X, se tiene: $X = \$480\ 704.30$

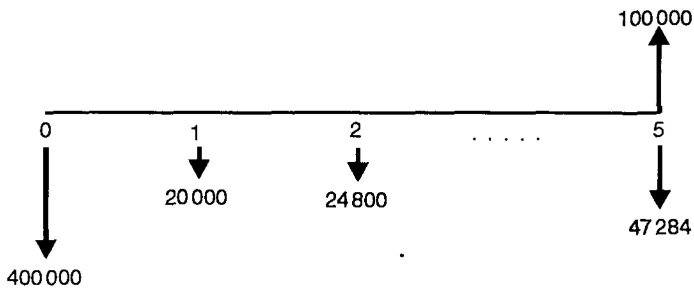
EL PROBLEMA DE LA INFLACION

En la práctica los valores de reemplazo son cada vez mayores, debido al aumento general de precios (inflación) y porque el costo anual de operación es cada vez mayor, no solo porque el activo se vuelve más obsoleto, lo cual implica darle un mayor mantenimiento, sino también, por el aumento de los precios de los repuestos y de mano de obra. Cuando se trata de decidir entre alternativas no es necesario tomarlo en cuenta porque todas las alternativas se ven igualmente afectadas, sinembargo cuando se toma el *CAO* en forma de gradiente geométrico esta omisión puede quedar subsanada debido a que el aumento general de precios puede representarse como un porcentaje del valor anterior. Sinembargo un método bastante bueno para resolver problemas que incluyen inflación es utilizar una tasa que combine la inflación y la tasa real con que trabaja el inversionista.

Ejemplo 7

El *CAO* de una máquina para el primer año es de $20 000 y se espera que cada año, por efectos de la inflación, suba un 24%. Teniendo en cuenta que el costo inicial es de $400 000 y que estimamos una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de $100 000, hallar el *CAUE* suponiendo una tasa real del 12%

Solución:



El procedimiento es el mismo que hemos venido utilizando, solamente que será necesario hacer los cálculos con una tasa combinada, entonces:

$$i = 0.24 + 0.12 + 0.24 \times 0.12 = 38.88\%$$

$$CAUE = \frac{400\,000}{a_{\overline{5}|}38.88\%} + \frac{\dfrac{20\,000[(1.24)^5(1.3888)^{-5}-1]}{0.24-0.3888}}{a_{\overline{5}|}38.88\%} - \frac{100\,000}{s_{\overline{5}|}38.88\%}$$

$$CAUE = \$211\,545.47$$

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Al hacer cualquier análisis económico proyectado al futuro, siempre hay un elemento de incertidumbre asociado a las alternativas que se estudian y es precisamente esa falta de certeza lo que hace que la toma de decisiones económicas sea bastante difícil. Con el objeto de facilitar esta labor, puede efectuarse un análisis de sensibilidad, el cual nos indicará las variables que más afectan el resultado económico de un proyecto y cuáles son las que tienen poca incidencia en el resultado final.

En un proyecto individual, la sensibilidad debe hacerse con respecto al parámetro más incierto; por ejemplo, si se tiene una incertidumbre con respecto al precio de venta del artículo que se proyecta fabricar es importante determinar que tan sensible es la *TIR* o el *VPN*, con respecto al precio de venta. si se tienen dos o más alternativas, es importante determinar las condiciones en que una alternativa es mejor que otra.

Ejemplo 8

Supongamos que una fábrica produce actualmente, y en forma manual, un cierto artículo. La producción de cada empleado es de 5 unidades diarias y se le pagan $1 000 diarios.

Se presenta la posibilidad de adquirir una máquina que puede producir hasta 100 unidades diarias; cuyo precio es de $600 000 y tiene un costo anual de operación de $30 000. Para el primer año y cada año subsiguiente, el costo de operación incrementa en un 15%, necesita de un solo operario y se estima que se le podrá pagar un sueldo diario de aproximadamente $2 500.

Determinar hasta qué punto es rentable el trabajo manual, al cual llamaremos el plan A, y en qué momento es rentable la compra de la máquina que podemos poner a trabajar al máximo de su capacidad, al cual llamaremos plan B. Suponga una *TIO* del 30%.

Solución:

Sea X el número de unidades producidas en un año.

Plan A

$$\text{Costo de un artículo } \frac{1\,000}{5} = \$200$$

$$\text{Costo del plan A en un año } C_A = 200X$$

Plan B

$$\text{Costo de la mano de obra de una unidad} = \frac{2\,500}{100} = \$25$$

Costo anual de la mano de obra = $25X$

$$CAUE = \frac{600\,000}{a_{\overline{10}|}30\%} + \frac{30\,000\left[(1.15)^{10}(1.3)^{-10}-1\right]}{(0.15-0.3)a_{\overline{10}|}30\%} - \frac{300\,000}{s_{\overline{10}|}30\%} + 25$$

$$CAUE = \text{Costo } C_B = 232\,747 + 25X$$

El punto de equilibrio se obtiene cuando $C_A = C_B$; esto es:

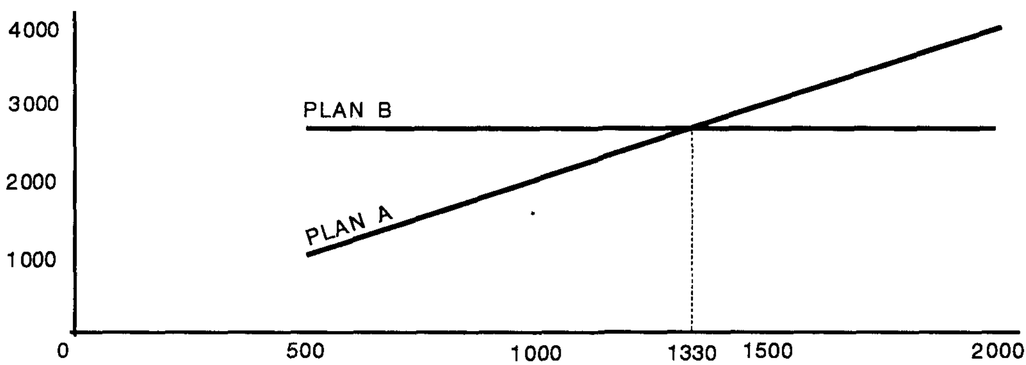
$$200X = 232747 + 25X$$

De donde se obtiene que X = 1 329.98 aproximadamente 1 330 unidades.

Si construimos una gráfica que relacione costos con el número de unidades producidas, tenemos:

Plan A		Plan B	
X	C_A	X	C_B
500	100 000	500	245 247
1 330	266 000	1 330	266 000
2 000	400 000	2 000	282 747

GRAFICA No. 13.1



En la Gráfica No. 13.1 se observa que, para una producción anual inferior a 1 330 unidades es, mejor el plan A y, de ahí en adelante es mejor el plan B. Tomar una decisión con base en 1 330 unidades es altamente riesgosa, debido a que cualquier error sobre la estimación de la producción (determinada por las ventas) puede cambiar la decisión de *un plan a otro; sinembargo, para una producción superior a 2 000 unidades o inferior* a 1 000 unidades la decisión va a ser muy acertada pues se vuelve prácticamente insensible a errores de producción. La máxima variación o error K que puede cometerse, sin que se cambie la decisión será:

$$\boxed{K = \frac{X_e - X}{X}}$$

donde : X_e = punto de equilibrio
X = producción anual estimada.
K = porcentaje de error

Si K tiende a cero, la sensibilidad de la decisión será muy alta y si K es grande la sensibilidad, será baja. Naturalmente, el concepto de alta o baja sensibilidad es un concepto subjetivo, que depende del buen criterio del analista.

Si volvemos a nuestro ejemplo y calculamos el índice de sensibilidad K, tenemos:

$$K = \frac{1\,330 - 2\,000}{2\,000} = -\,0.335 = -\,33.5\%$$

lo cual significa que una disminución del 33.5% en la producción no alcanza a afectar la decisión.

Si suponemos una producción de 1 200 unidades, tenemos:

$$K = \frac{1\,330 - 1\,200}{1\,200} = 0.11 = 11\%$$

Esto significa que un aumento de la producción de un 11% que equivale a unas 0.11 x 1 200 = 132 unidades no alcanza a cambiar la decisión.

Ejemplo 9

Una máquina cuesta $900 000; va a ser depreciada en 5 años sin valor de salvamento. Los impuestos son del orden del 30% y el costo anual de operación se estima en $100 000 y se cree que cada año aumentará en $10 000. La capacidad máxima de la fábrica se estima en una 1 000 unidades al año, pero su eficiencia se ha establecido así: primer año 70%; segundo año 85% y, del tercer año en adelante, alcanzará el 100%.

En cuanto al precio de venta de cada artículo, hay varias opiniones; sinembargo, el más probable es de $700. Suponiendo una *TIO* del 30%, ¿es aconsejable realizar el proyecto?

Solución:

Primero calculamos los ingresos anuales por ventas:

Año	Eficiencia	Producción	Ingreso
1	70%	700	490 000
2	85%	850	595 000
3	100%	1 000	700 000
4	100%	1 000	700 000
5	100%	1 000	700 000

Ahora procedemos a calcular el flujo de caja:

Año	Ingreso	Depreciación	*CAO*	Base	Impuesto	*FNC*
0	– 900 000					– 900 000
1	490 000	180 000	100 000	210 000	63 000	327 000
2	595 000	180 000	110 000	305 000	91 500	393 500
3	700 000	180 000	120 000	400 000	120 000	460 000
4	700 000	180 000	130 000	390 000	117 000	453 000
5	700 000	180 000	140 000	380 000	114 000	446 000

Ahora calculamos la *TIR*, usando el flujo neto de caja

$$-900\,000 + 327\,000(1+i)^{-1} + 393\,000(1+i)^{-2} + 460\,000(1+i)^{3} + 453\,000(1+i)^{-4} + 446\,000(1+i)^{-5} = 0$$

De donde se obtiene que $i = 33.89\%$ y dado que *TIR* > *TIO*, el proyecto debe ser realizado Sinembargo, como existen serias dudas, con respecto al precio de venta, debemos efectuar un análisis de sensibilidad de la *TIR* contra el precio de venta; para ello es necesario calcular la *TIR* a partir del flujo neto de caja, cuando el precio unitario es de $600, y cuando el precio unitario es de $800 con lo cual obtenemos la siguiente tabla y gráfica:

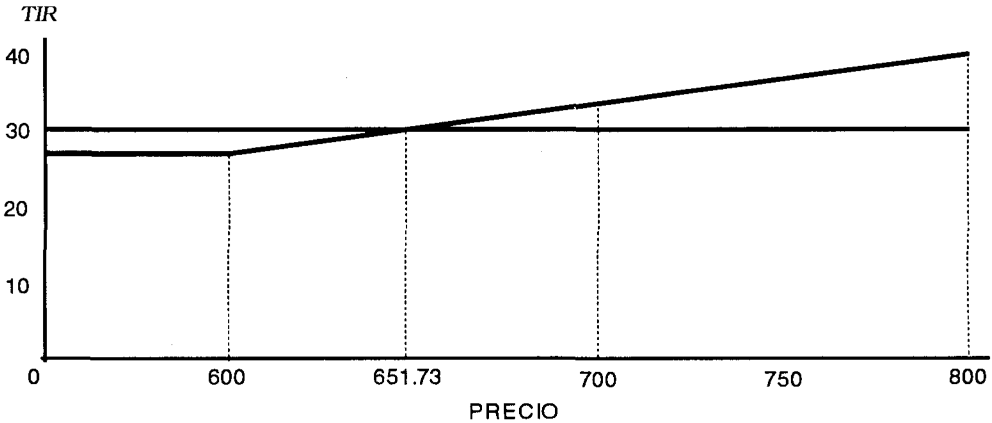
PRECIO	600	700	800
TIR	25.83%	33.89%	41.54%

por interpolación entre el 25.83% y el 33.89% se obtiene que el precio mínimo para obtener la *TIO* del 30% será de $ 651.73

$$\left[\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{l} 600 \\ X \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 25.83 \\ 30 \end{array}\right] \\ 700 & 33.89 \end{array}\right]$$

$$X = \$651.73$$

GRAFICA No. 13.2



Tomar una decisión con base en un precio de venta inferior a $700, es extremadamente sensible y su coeficiente de sensibilidad será:

$$K = \frac{651.73 - 700}{700} = -6.9\%$$

el cual por ser próximo a cero es muy sensible lo cual confirma que una decisión con base en $700 como precio de venta es de alto riesgo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Un almacén compró hace 3 años un equipo de aire acondicionado; en esa época costó $250 000. Actualmente se estima que tiene una vida útil restante de 5 años, al final de los cuales su valor de salvamento será de $40 000; el *CAO* se calcula en $7 000 constante. Debido a las remodelaciones en el almacén y aprovechando una oferta de compra por $200 000, los dueños piensan cambiarlo por uno más pequeño, que cuesta $160 000, tiene un *CAO* de $4 000 constante y un valor de salvamento, al final de 8 años, de $50 000. Realice un análisis de reemplazo, utilizando la técnica de la confrontación antiguo-nuevo con una tasa del 20%; luego decidir sobre el cambio.

Respuesta: *CAUE* (antiguo) = $68 500.75
CAUE (nuevo) = $42 667.04 Si debe cambiarse.

2) Un compresor comprado hace 2 años, en la actualidad, puede ser cambiado por otro de mayor rendimiento. El compresor antiguo costó $70 000; inicialmente se calcula una vida útil de 10 años y su valor de salvamento, prácticamente, será nulo. Se ofrece un nuevo compresor que cuesta $200 000, tiene una vida útil de 10 años y no tiene valor de salvamento. Al consultar las facturas de reparaciones y mantenimiento, se encontró que para el compresor actualmente en uso, el *CAO* del primer año fue de $40 000 y para el segundo año fue un 25% mayor. Además se estima que este porcentaje de aumento se mantendrá constante durante el tiempo restante, mientras que, para el nuevo compresor el *CAO* se estima en $10 000 con un incremento anual del 22%. El vendedor ofrece recibir el compresor antiguo, en parte de pago del nuevo en la suma de $85 000. Suponiendo una tasa del 25% y haciendo uso de la *Confrontación antiguo-nuevo*, determinar si el cambio es aconsejable.

Respuesta: *CAUE* (antiguo) = $145 693.27.
CAUE (nuevo) = $76 149.04 Debe cambiarse.

3) Una compañía de ingenieros desea adquirir un equipo de perforación de suelos en $2 800 000, los ingenieros estiman que la vida útil será de 4 años. Un cuidadoso análisis sobre el costo anual de operación y *valor de reemplazo* se muestra en el siguiente cuadro:

Año	*CAO*	V/R Reemplazo
1	300 000	2 000 000
2	350 000	1 500 000
3	440 000	900 000
4	580 000	200 000

Calcular el tiempo óptimo de retención del equipo, antes de ser reemplazado, usando una tasa del 18%.

Respuesta: 3 años con *CAUE* $1 391 560.19

4) Si en el problema anterior, cuando ya han pasado 2 años, se presenta un vendedor y ofrece un equipo nuevo, totalmente automático, a un costo de $4 500 000 con depreciación en línea recta; con una vida útil de 7 años. Además, tiene un valor de salvamento de $500 000 y tiene un *CAO* estimado para el primer año en $100 000 y cada año subsiguiente aumentará un 18%. Si suponemos una tasa del 18% determinar ¿cuándo debe reemplazarse?

Respuesta: dejar que la máquina antigua llegue al final de su vida útil.

5) Una máquina se compró en $140 000 hace 2 años; la vida útil esperada en el momento de la compra era de 8 años con un valor de salvamento de $10 000 y un *CAO* de $8 500. Actualmente se estima una vida útil restante de 8 años y hay oferta

de compra por $130 000. Ahora se está considerando la compra de una nueva máquina con vida útil de 10 años, un *CAO* de $8 000 y un valor de salvamento de $20 000. Determinar el máximo valor que se puede pagar por la nueva máquina de tal forma que el *costo anual uniforme equivalente* de la máquina nueva no supere el de la antigua. Utilice una tasa del 18%

Respuesta: $146 415.74

6) Un taladro costó hace 2 años $68 000; el fabricante asegura, que tiene una vida útil de 10 000 horas de trabajo sin salvamento. El fabricante lo usa unas 2 000 horas al año y el *CAO* del primer año fue de $3 000; al siguiente año fue un 20% más alto y se estima un aumento del 20% en los años siguientes. Se ha puesto a consideración la compra de un nuevo taladro, por valor de $100 000, con una vida útil de 16 000 horas; las estimaciones para el *CAO* son de $4 500 para el primer año, con aumento anual del 20% y un valor de salvamento de $10 000. Determinar el valor en que puede ser vendido el taladro antiguo, sin que se altere el *CAUE*. Suponga una tasa del 18%.

Respuesta: $58 000

7) Una fábrica compró hace 4 años un montacargas que costo $1 000 000; en esa época se hicieron las siguientes estimaciones: vida útil 10 años, valor de salvamento $200 000 y capacidad 350 000 toneladas al año. Actualmente, la utiliza para transportar aceites y lubricantes, desde la bodega de almacenamiento hasta los vagones del tren, que las llevarán a los centros de consumo. La fábrica proyecta ampliar su capacidad de producción de las actuales 300 000 toneladas al año a 500 000 toneladas por año; en consecuencia, el montacargas actual, aun trabajando al máximo de su capacidad, es insuficiente. Por ello, habrá necesidad de adquirir un nuevo montacargas de tamaño mediano, con capacidad para 200 toneladas al año y, no será necesario ponerla a trabajar a plena carga, sino lo necesario, hasta completar las necesidades de la fábrica. El costo de este nuevo montacargas es de $600 000, con una vida útil de 10 años y un valor de salvamento del 10% del costo inicial. Sinembargo, existe otra propuesta que consiste en instalar una banda transportadora, con capacidad para 600 000 toneladas al año, tiene una vida útil de 15 años y, prácticamente, no tiene valor de salvamento, su costo sería de $1 200 000. No obstante, sería necesario un montacargas de tamaño pequeño, con un costo de $500 000 una vida útil de 15 años sin salvamento y, puesto que la distancia que se mueve es muy corta, su capacidad de transporte sería de 580 000 toneladas al año. Además, ofrecen recibir el montacargas actual en $300 000, como parte de pago del nuevo montacargas: también podría dejarse el montacargas actual para alimentar la banda transportadora; en cuyo caso, resulta más que suficiente. El *CAO* para el primer año de los montacargas, si trabajan solos será de $0.40 por tonelada y cada año posterior el *CAO* aumenta un 20%; pero si un montacargas trabaja conjuntamente con la banda transportadora su *CAO* del primer año será de $0.25 por tonelada y cada año se incrementará en un 20%.

El *CAO* de la banda transportadora sería de $0.05 por tonelada, para el primer año, con un aumento anual de $4 000. Suponiendo una tasa del 20%, decida la opción más aconsejable.

Respuesta: Montacargas actual al máximo de su capacidad con montacargas mediano *CAUE* = $540 629.
Montacargas pequeño, con banda transportadora *CAUE* = $738 626.
Montacargas actual, con banda transportadora *CAUE* = $555 505.
Decida por el montacargas actual, con montacargas mediano.

8) Una fábrica tiene actualmente en uso una máquina que puede ser vendida ahora en $120 000; en un año, en $90 000 o al siguiente año en $15 000. El propietario de la fábrica piensa que es mejor venderla ahora, puesto que el costo de operación ha venido subiendo mucho; para este año se estima en $53 000 y, para el siguiente año, se estima en $105 000. Se encuentra en estudio la adquisición de un nueva máquina, que cuesta $450 000, tiene una vida útil de 7 años y un valor de salvamento de $100 000; su costo de operación para el primer año se calcula en $15 000 y cada año siguiente aumenta un 25%. Suponiendo una tasa del 20%, haga alguna recomendación al dueño.

Sugerencia: analice usando la técnica de la confrontación antiguo-nuevo para un año más.

Respuesta: *CAUE* nueva = $144 627. *CAUE* antigua para el próximo año $107 000, para el siguiente año $148 364

Recomendación: Retener un año y luego vender.

9) Una pequeña industria de calzado posee una máquina que, posiblemente, deberá reemplazar por una nueva que cuesta $150 000. los valores estimados de salvamento y *CAO* se muestran en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6
S	100 000	75 000	50 000	30 000	20 000	5 000
CAO	10 000	15 000	22 500	33 750	50 625	75 940

Actualmente, el dueño de la industria puede vender la máquina antigua a un amigo, en $60 000, en un año en $28 000 y al siguiente año en $5 000. El propietario espera mantener la máquina antigua a lo sumo 2 años, dado que el costo de mantenimiento está subiendo mucho, $23 000 este año y $55 000 al año siguiente. Con tasa del 24% haga un análisis de reemplazo y establezca si debe vender ahora, el año entrante o al siguiente año.

Respuesta: *CAUE* (nueva) = $74 431.37 con vida económica 5 años.
CAUE (antigua) 1 año = $69 400, 2 años = $76 239.3
Decidir: esperar un año y luego vender.

10) Un ejecutivo de la fábrica XYZ ha propuesto comprar una máquina nueva, para reemplazar la máquina que actualmente se acaba de dañar. La máquina nueva cuesta \$1 millón y, una vez instalada, no tiene valor de salvamento; el valor de las reparaciones y mantenimiento del primer año se estima en \$50 000 y, todos los años, aumentará en un 70%. Suponiendo un interés del 25%, determinar la vida económica y su correspondiente *CAUE*.

Respuesta: Vida económica 5 años, *CAUE* = \$522 758.

11) Con relación al problema anterior, un ingeniero de la fábrica XYZ consultó con el fabricante las condiciones en que la máquina podría ser reparada. La cotización presentada por \$400 000 fue la siguiente: garantía de un año; durante el primer año todos los costos de reparación y mantenimiento serán por cuenta de la garantía. Pudo establecerse que los costos de reparación y mantenimiento para el segundo año, serán del orden de \$ 180 000 y, cada año, crecerán en \$120 000. La máquina reparada tendría una vida útil de 5 años y no tendrá valor de salvamento. Suponiendo una tasa del 25%, haga un análisis de reemplazo, para determinar si la máquina actual debe ser reparada o debe adquirirse la máquina nueva del problema anterior.

Respuesta: Vida económica de la máquina reparada 3 años. *CAUE* = \$342 622.95
Decisión: reparar la máquina antigua.

12) A última hora, otro de los directivos de la fábrica XYZ ha propuesto que la máquina del problema 10 sea reemplazada por una máquina electrónica más moderna y más rápida, cuyo costo es de \$1 500 000; el costo de las reparaciones y mantenimiento durante el primer año serán por cuenta de la garantía y, a partir del segundo año, estos costos estarán a cargo de la fábrica y serán del orden de \$80 000. Se estima que, cada año, se doblarán; pero, a cambio de ello, y debido a que la máquina es más moderna y más rápida, podrá retirarse a uno de los operarios, con lo cual podrá ahorrarse el valor del sueldo que actualmente es de \$300 000 al año, pero cada año, habrá que aumentarle el sueldo en un 20%. la máquina tiene una vida útil de 10 años, pero al final del año 5, será necesario hacerle una reparación total, a un costo estimado de \$700 000. La máquina una vez instalada tendrá un valor de salvamento de \$200 000 y, talvez, no variará en el futuro. Con una tasa del 25%, Haga un análisis de reemplazo, para decidir entre reparar la máquina o comprar la máquina electrónica.

Respuesta: Vida económica de la máquina electrónica 4 años. *CAUE* = \$329 586.
Decisión: instalar la máquina electrónica de inmediato.

13) Una fábrica necesita adquirir un motor para acoplarlo a una banda transportadora. Se presenta a estudio la posibilidad de adquirir el motor A o el motor B, los cuales tienen las siguientes características:

	A	B
Costo de adquisición	400 000	350 000
Costo de energía por hora de trabajo.	10	13.5
Vida útil en años	10	10
Valor de salvamento	60 000	50 000
CAO	3 600	3 150

Suponiendo una tasa del 15%, determinar la alternativa más favorable para 3 000 horas de trabajo al año; construya una gráfica y calcule la sensibilidad K

Respuesta: Decida por el motor A. $K = -5.5\%$ significa que una reducción de 165 horas al año no cambia la decisión.

14) Una fábrica utiliza un proceso manual para cierto producto, en su planta de acabados. Actualmente, cada empleado, en un día, pule, pinta y brilla 10 unidades y el costo de la mano de obra es de $1 000, por día y por empleado. Si el proceso se automatiza, es necesario adquirir una máquina, con las siguientes características:

Costo	$900 000
Salvamento	200 000
Años de vida útil	10
Costo anual de mantenimiento	1% del costo inicial
Necesita 2 operarios	2 000 por día c/u *
Combustible, aceite y otros	3 000 por día *
Capacidad máxima	120 unidades por día

*Los gastos directos se causan únicamente cuando la máquina está trabajando.

Suponiendo una tasa del 20% determinar el plan a seguir; calcular el punto de equilibrio y el coeficiente de sensibilidad si se estima una producción de 6 000 unidades al año. Haga una gráfica.

Respuesta: Punto de equilibrio 5 183.18 aproximado 5 183 unidades. Decida proceso automático. $K = -13.6\%$ significa que la decisión no cambia si la producción llega a disminuir en 816 unidades.

15) Resolver el problema anterior, si el *CAO* de la máquina es del 1% del costo inicial, pero cada año se incrementa en un 20%.

Respuesta: Punto de equilibrio 5 396.52 aproximado 5 397. Decida proceso automático. $K = -10\%$ significa que la decisión no cambia si la producción disminuye en un 10% de las 6 000 unidades proyectadas.

16) Resuelva el problema 14 con *CAO* del 10% del costo inicial

Respuesta: Punto de equilibrio 7 127 unidades. Decida proceso manual. $K = 18.78\%$ que equivale a 1 127 unidades.

17) El dueño de un hotel desea cambiar la decoración interior, y para ello, es necesario recubrir el piso de sus pasillos interiores, bien sea con tapetes a un costo de $200 000 con una vida útil de un año y, prácticamente, no tiene valor de salvamento; también, podría recubrirse el piso con un enchape de madera muy fina, a un costo de $900 000, un costo anual de mantenimiento de $3 000, pero se requerirá de una reparación general cada 5 años, a un costo de $50 000. Calcule el punto de equilibrio y tome una decisión respecto al plan a seguir, con base en que el hotel se mantendría a lo sumo unos 12 años. Utilice una tasa del 28%.

Respuesta: Punto de equilibrio no hay. *CAUE* para 12 años en madera $274 286. *CAUE* para 12 años en tapete $256 000 Decidir: Tapete.

18) Con respecto al problema anterior. ¿Cambiaría su decisión, si todos los valores se incrementaran anualmente un 15%?

Respuesta: Debe tener en cuenta que el valor de la primera reparación general que debe hacerse en el año 5 es de $50\,000(1.15)^5 = \$100\,567.86$. Punto de equilibrio no hay. *CAUE* para 12 años madera $285 108. *CAUE* para 12 años tapete $420 616.

Obsérvese que la decisión de escoger el tapete es, prácticamente insensible al aumento general de precios.

19) Construir una gráfica que relacione el *CAUE* y la *TIR*, para valores de i, desde el 20%, hasta el 45%, con incrementos del 5%. Haga un análisis de sensibilidad, al siguiente proyecto.

Costo	$200 000
CAO año 1	30 000
Incremento anual del *CAO*	15%
Ingreso anual Ano 1	100 000
Incremento anual del ingreso	20%
Salvamento sobre el costo	12%
Vida útil en años	4

Respuesta:

CAUE	−19 695	−11 033	−2 240	6 670	15 686	24 797
TIR	20%	25%	30%	35%	40%	45%

Observación: El *CAUE* disminuye si la *TIR* aumenta. Tomar una decisión, con base en una *TIR* entre el 30% y el 35% es supremamente sensible; una decisión con base en una *TIR* superior al 35% viene a ser más confiable.

20) Se ha ofrecido a una compañía la oportunidad de realizar un proyecto que dura 5 años, el cual requiere de un desembolso inicial de $800 000 de los cuales, $600 000 corresponden a maquinaria, sin valor de salvamento.

El *CAO* del proyecto para el primer año será de $100 000; pero los ingenieros del proyecto no se han puesto de acuerdo con el incremento anual del *CAO* y lo único que se sabe es que puede estar entre el 20% y el 40%. Los ingresos anuales se comportarán de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\text{Ingreso anual} = 500\,000 - 10\,000(n - 1)^2$$

donde: n es el año 1, 2, 3, 4, 5

Al final de 5 años se espera recibir una bonificación adicional de $300 000 por cumplimiento del contrato en la fecha prevista. Hacer un análisis de sensibilidad de *TIR* contra *CAO*.

Respuesta parcial:

CAO	20%	30%	40%
TIR	34.7%	31.1%	26.3%

21) Resuelva el problema anterior, suponiendo que la maquinaria va a ser depreciada en línea recta, en forma acelerada en 3 años y que la tasa de impuestos es del 35%

Respuesta parcial:

CAO	20%	30%	40%
TIR	22.28%	19.27%	15.1%

A diferencia del problema anterior, los cambios en la *TIR* son relativamente más pequeños que los cambios en el *CAO*; en consecuencia,la *TIR* después de impuestos es mucho menos sensible, que la *TIR* antes de impuestos.

Fuentes de financiamiento y el costo del capital CAPITULO 15

Cuando desea adelantarse un proyecto de inversión es imperativo contar con el capital necesario, en el momento oportuno; por esta razón, dedicaremos este capítulo para analizar las *diferentes fuentes de financiación* y la *tasa que, en un momento dado,* deberá pagarse para conseguir el dinero prestado. A esa tasa la llamaremos el costo del capital.

LAS FUENTES

El dinero puede ser obtenido de diferentes fuentes; por ejemplo puede tomarse dinero prestado de bancos nacionales, lo que puede implicar inmovilizar un capital durante un tiempo para hacer promedios. Esto representa un costo adicional; puede tomarse dinero prestado de bancos extranjeros, lo cual se hace fundamentalmente en dólares de los Estados Unidos, la operación puede implicar otro costo adicional, que es la devaluación. También puede conseguirse dinero en el mercado extrabancario, normalmente a tasas más elevadas. Puede obtenerse dinero, liquidando activos y perder la rentabilidad que éstos produzcan. Puede hacerse una nueva emisión de acciones, lo cual implica aumentar el gasto mensual, por concepto de pago de dividendos. Puede hacerse una emisión de bonos, lo cual implica el pago de unos intereses y la constitución de un fondo para la cancelación de los bonos a su vencimiento. Puede posponerse el pago de impuestos, lo cual implica el pago de intereses en mora y, posiblemente, multas. Puede retenerse utilidades pero se corre el riesgo de desestimular a los accionistas en mantener la inversión, etc.

FUENTES DIVERSAS

Cuando la financiación se obtiene de una sola fuente, el costo del capital será la tasa que hay que pagar por el préstamo, sin embargo,en muchas ocasiones, un proyecto necesita de varias fuentes de financiación que tienen diferentes tasas de interés. A fin de calcular *el costo del capital, debemos establecer una tasa promedio ponderada.*

Ejemplo 1

Un proyecto necesita una inversión inicial de $80 millones, los cuales pueden ser financiados así:

Fuente	Cantidad (millones)	Tasa
Bancos	30	30%
Extrabancario I	15	38%
Extrabancario II	25	40%
Otros	10	28%
Total disponible	80	i = tasa promedio

Solución:

Las tasas promedio ponderada puede calcularse, mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{\Sigma A_k i_k = (\Sigma A_k) i}$$

donde $A_1 = 30, \quad A_2 = 15, \quad A_3 = 25, \quad A_4 = 10\%$

$$i_1 = 30\%, \quad i_2 = 38\%, \quad i_3 = 40\%, \quad i_4 = 28\%$$

i = tasa promedio ponderada.

entonces: $30 \times 0.3 + 15 \times 0.38 + 25 \times 0.4 + 10 \times 0.28 = 80i$

de donde se obtiene que $i = 34.375\%$, que representa el costo del capital

FUENTES BANCARIAS

Supongamos que un banco cobra una tasa de interés del 33% nominal trimestre anticipado, que equivale al 41.12% efectivo anual, en préstamos a un año, con amortización trimestral constante (véase capítulo 6). Pero, para el prestatario la tasa resulta ser mucho más elevada, por cuanto que el banco normalmente presta tres veces el promedio del dinero mantenido en la cuenta en los últimos tres meses.

Ejemplo 2

Supongamos que un banco me presta $1, para ser cancelado mediante abonos trimestrales, constantes a capital y con pago anticipado de intereses. Entonces, en el período 0, debo depositar $⅓ para que, al final del primer período (3 meses), me presten $1:

Entonces en el período 0 deposito $0.33333; en el período 1, tengo disponible $1/3 (lo que deposité al principio), más el préstamo de $1, menos los intereses de un peso al 8.25%, esto es:

$$0.33333 + 1 - 0.0825 = 1.250833$$

En el período 2, debo pagar una cuarta parte de la deuda, esto es \$0.25, más los intereses de tres cuartos de deuda; en total será:

$$0.25 + 0.0825 \times \tfrac{3}{4} = 0.311875$$

Al final del período 3, debo pagar una cuarta parte de la deuda, más los intereses por anticipado de 1/2 de la deuda, esto es:

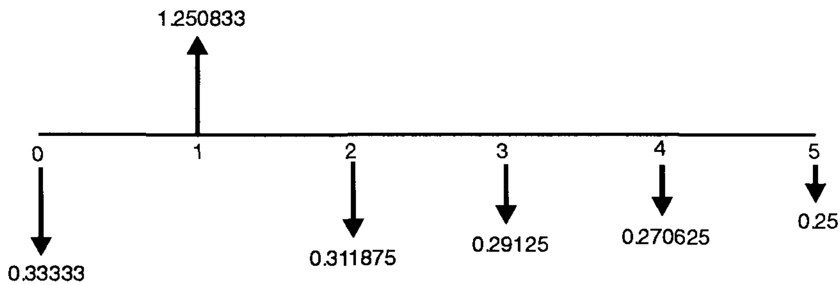
$$0.25 + 0.0825 \times \tfrac{1}{2} = 0.29125$$

Al final del período 4, debo pagar una cuarta parte de la deuda, más los intereses, por anticipado, de un cuarto de deuda.

$$0.25 + 0.825 \times \tfrac{1}{4} = 0.270625$$

Al final del período 5, lo único que debo pagar es un cuarto de deuda: 0.25

Por tanto el flujo de caja quedará así:



El cálculo de la *TIR* para el banco o costo del capital para el prestatario, se puede calcular planteando la siguiente ecuación de valor:

$$-0.33333 + 1.250833(1+i)^{-1} - 0.311875(1+i)^{-2} - 0.29125(1+i)^{-3} - 0.270625(1+i)^{-4} - 0.25(1+i)^{-5}$$

Por interpolación se obtiene que $i = 10.94\%$ efectivo trimestral, equivalente al 51.48% efectivo anual.

Observación: El costo del capital se incrementaría si tengo que pagar costos de apertura del crédito e impuestos, los cuales, en la gráfica de flujo de caja irían con flecha hacia abajo en el período 1.

FUENTES EN EL EXTERIOR

Cuando la fuente de financiación se encuentra en el exterior, el préstamo normalmente se efectúa en dólares de los Estados Unidos, esto implica que la tasa efectiva de financiación se calcula tomando en cuenta la tasa de interés de dólares y la tasa de devaluación frente al dólar. En consecuencia, la tasa promedio del costo del capital se calcula utilizando la fórmula de la tasa combinada vista en el segundo capítulo.

$$i = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$$

Ejemplo 3

Se otorga un préstamo en dólares a, una empresa, al 9% anual. ¿Cuál es el costo de la financiación si durante el plazo del préstamo se presentó una devaluación del 28% anual?

Solución:

Sea i_1 = la tasa de interés en dólares = 9% y sea i_2 = la tasa de devaluación = 28%

$$i = 0.09 + 0.28 + 0.09 \times 0.28 = 39.52\% \text{ EA}$$

FUENTE SISTEMA UVR

Para calcular la tasa que corresponde al costo del capital bajo este sistema, existen 2 procedimientos los cuales pasaremos a explicar mediante el ejemplo 4

Ejemplo 4

¿Cuál es la verdadera tasa que va a pagarse, si se hace un préstamo de $100 000 para ser cancelado en 4 pagos anuales, en gradiente lineal decreciente con L = – $10 000, con un interés activo anual del 10% y suponiendo una inflación del 20% efectivo anual?

Solución:

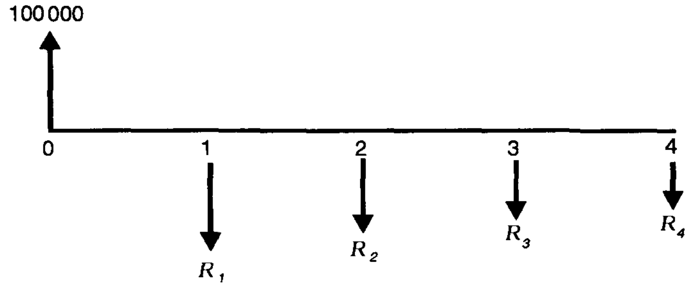
Primer procedimiento.

Consiste en calcular una tasa combinada tal como se hizo en el ejemplo 3. Si hacemos i_1 = 20% e i_2 = 10% y reemplazando en la fórmula de la tasa combinada tenemos:

$$i = 0.2 + 0.1 + 0.2 \times 0.1 = 32\%$$

Segundo procedimiento.

Calculamos la primer cuota de amortización sin tener en cuenta la inflación.



$$100\,000 = R_1 a_{\overline{4}|}10\% - \frac{10\,000}{0.1}\left[a_{\overline{4}|}10\% - 4(1+0.1)^{-4}\right]$$

De donde se obtiene que R_1 = \$45 358.759

Ahora procedemos a calcular las otras cuotas con su inflación:

$$\begin{aligned} R_1 &= 45\,358.759 \times (1.2)^1 = 54\,430.51 \\ R_2 &= 35\,358.759 \times (1.2)^2 = 50\,916.61 \\ R_3 &= 25\,358.759 \times (1.2)^3 = 43\,819.92 \\ R_4 &= 15\,358.759 \times (1.2)^4 = 31\,847.92 \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la *TIR* con base en las cuotas

$$100\,000 - 54\,430.51(1+i)^{-1} - 50\,916.61(1+i)^{-2} - 43\,819.92(1+i)^{-3} - 31\,847.92(1+i)^{-4}$$

Calculando i por interpolación se obtiene nuevamente el 32%

Ejemplo 5

¿Cuál es el costo de financiación de un préstamos en UVR, si debe pagarse un interés del 12% en UVR más correción monetaria? Suponga que la corrección monetaria es del 21% y que permanecerá constante en ese valor durante la duración del préstamo.

Solución:

Sea i_1 = 12% y sea i_2 = 21 %. Entonces el costo del capital estará dado por:

$$i = 0.12 + 0.21 + 0.12 \times 0.21 = 35.52\% \text{ EA}$$

FUENTE PROVEEDORES Y CONSUMIDORES

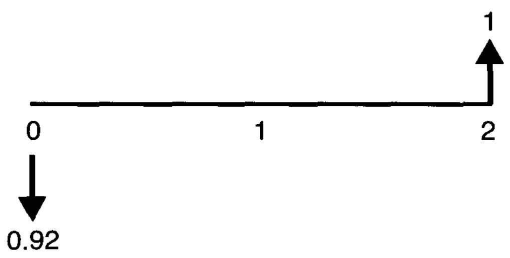
Podemos financiarnos, si renunciamos a los descuentos que ofrecen los proveedores, por pronto pago, o si ofrecemos descuentos a los consumidores, por pronto pago.

Ejemplo 6

Un proveedor nos ofrece la siguiente tab!a de descuentos:

Ventas al contado	8%
Plazo de 1 mes	4%
Plazo de 2 meses	0%

Si pagáramos de contado por cada $1 facturado, solo tendríamos que pagar $0.92, pero, si tomamos el plazo de 2 meses deberemos pagar $1 por cada $1 facturado, lo cual puede mostrarse en la siguiente gráfica:



El planteo de la ecuación de valor con fecha focal al final será:

$$0.92(1 + i)^2 = 1$$

Si despejamos i se tiene: i = 4.2572% efectivo mensual, que equivale al 64.92% efectivo anual.

FUENTE EMISION DE ACCIONES

Otra forma muy común de financiación consiste en pedirles a los dueños de la empresa que hagan más aportes, naturalmente que si un accionista se decide a aumentar su participación en la empresa, es porque tiene la firme esperanza que su nueva inversión va a producir unos dividendos que, al menos, serán iguales al rendimiento mínimo aceptable para mantener su inversión; de no ser así, retirará su dinero.

El cálculo del costo del capital consiste en calcular la tasa i a la cual un capital \$A produce unos dividendos o intereses de *\$R*. Obviamente, *R* puede ser constante, crecer lineal o geométricamente o en forma escalonada; pero es conveniente que los dividendos que se proyectan pagar cumplan con algún modelo matemático, para facilitar cálculos posteriores.

DIVIDENDOS

Al hacer la emisión de acciones se proyecta pagar un dividendo de *\$R* por acción y por cada período en forma perpetua; por lo tanto, haciendo uso de la fórmula de una anualidad perpetua (ver capítulo 4), se tiene:

$$A = \frac{R}{i} \text{ de donde se obtiene que } i = \frac{R}{A}$$

Ejemplo 7

Desea calcularse cuál sería el costo del capital aportado por suscripción de acciones, si cada acción vale en el mercado \$80 y se proyecta pagar un dividendo de \$0.80, por mes y por acción.

Solución:

$$i = \frac{0.8}{80} = 0.01 = 1\ \% \text{ efectivo mensual, que equivale al } 12.68\% \text{ efectivo anual}$$

DIVIENDOS CON GRADIENTE LINEAL INFINITO

En países con alta tasa de inflación, es deseable que el valor de los dividendos que paga una acción vayan en aumento (lo normal es que el valor del dividendo esté de acuerdo con el valor comercial de la acción). Este aumento debe hacerse de acuerdo con algún modelo matemático, que bien podría ser el gradiente lineal.

Cuando se hace uso de este gradiente, el costo del capital puede calcularse despejando i de la fórmula del gradiente lineal infinito, visto en el capítulo 5, Entonces:

$$VP = \frac{R}{i} + \frac{L}{i^2}$$

$$VP\,i^2 - R\,i - L = 0$$

y aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado para despejar i, tenemos:

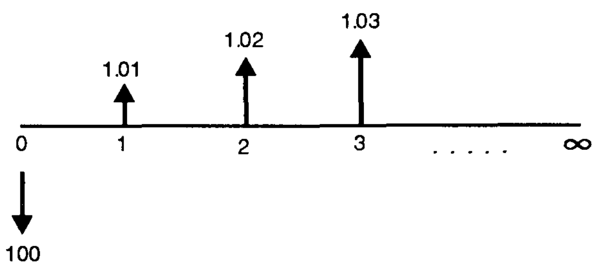
$$\boxed{i = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4(VP)\,(L)}}{2(VP)}}$$

Ejemplo 8

Actualmente las acciones de la empresa ABC cuestan \$100 y están pagando un dividendo mensual de \$1. Por experiencia de los últimos 5 años se sabe que cada mes el valor del dividendo se viene incrementando en \$0.01 y se espera mantener esta tendencia en el futuro. Calcular el costo del capital en estas condiciones.

Solución:

Como actualmente el valor del dividendo es de \$1 y cada mes crece en \$0.01, entonces el valor del próximo dividendo será \$1.01 que corresponde al primer pago del gradiente, el segundo será de \$1.02 y, así, sucesivamente.



$$i = \frac{1.01 \pm \sqrt{(1.01)^2 + 4(100)(0.01)}}{2(100)} = 1.625\% \text{ efectivo mensual}$$

equivalente el 21.345% efectivo anual

DIVIDENDOS CON GRADIENTE GEOMETRICO INFINITO

Los dividendos en forma de gradiente geométrico infinito son los que más se aproximan a las necesidades impuestas por una economía inflacionaria: sin embargo, deberá tenerse especial cuidado en que la tasa de crecimiento de los dividendos no sea igual o superior a la tasa de interés, porque así se volvería infinito el gradiente, según el análisis que hicimos en el capítulo 5. Por otra parte, el cálculo del costo del capital puede hacerse despejando i de la fórmula deducida en ese mismo capítulo.

$$VP = \frac{R}{i - G} \quad si\ G < i$$

despejando i

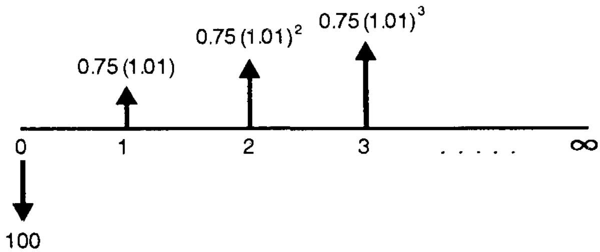
$$\boxed{i = \frac{R}{VP} + G \qquad \text{condición } G < i}$$

Ejemplo 9

El valor comercial de la acción de la empresa XYZ es actualmente de $80 y desea hacerse una nueva emisión de acciones, manteniendo la tendencia de aumentar los dividendos mensualmente, en un 1%. ¿Cuál será el costo del capital, si el dividendo actual es de $0.75, por mes y por acción?

Solución:

Como actualmente paga $0.75, el valor que se pagaría dentro de un, mes sería de 0.75(1 + 0.01) que corresponde al primer pago del gradiente. El segundo pago será $0.75(1.01)^2$ etc.



aplicando la fórmula tenemos:

$$i = \frac{0.75(1.01)}{80} + 0.01 = 1.947\% \text{ efectivo mensual}$$

equivalente al 26.036% efectivo anual.

Es muy importante verificar la condición $G < i$ y observamos que si se cumple, puesto que $G = 1\%$ menor que la tasa $i = 1.947\%$

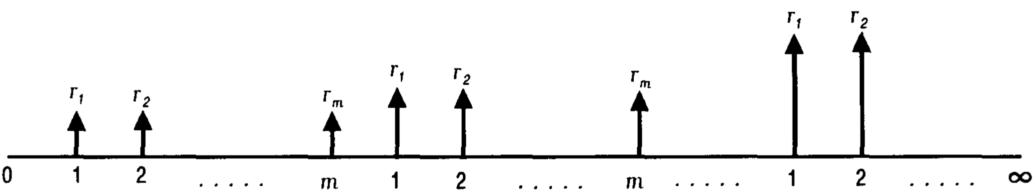
DIVIDENDOS CON GRADIENTE ESCALONADO

Cuando el valor de los dividendos que paga una acción es constante, durante intervalos de tiempo iguales pero que aumentan al final de cada intervalo. Se dice que son escalonados.

Esta aumento puede ser en forma de gradiente lineal y tendríamos un gradiente escalonado lineal o en forma de gradiente geométrico y tendríamos un gradiente escalonado geométrico (estos conceptos fueron explicados ampliamente, en los capítulo 4 y 5, sin embargo lo volveremos a mostrar pero más orientados hacia los gradientes infinitos).

Dividendos con Gradiente Escalonado Lineal Infinito.

Una acción paga un dividendo mensual de $0.10 y, cada año, aumenta en $0.03. Entonces, durante el primer año paga $0.10 por mes, durante el segundo año pagará $0.13 al mes; durante el tercer año paga $0.16 al mes y, así sucesivamente. En consecuencia, se trata de un gradiente escalonado lineal infinito.

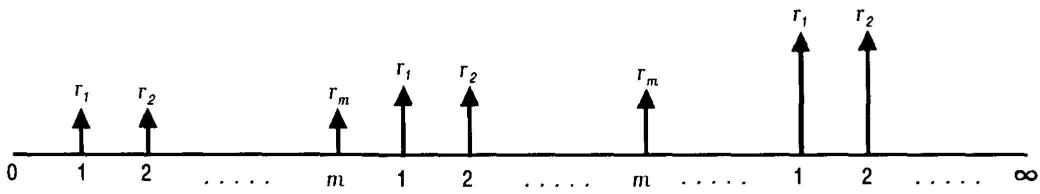


$$i = \frac{r_1\, S\overline{m}|i_1 \pm \sqrt{(r_1\, S\overline{m}|i_1)^2 + 4(VP)(L)}}{2(VP)}$$

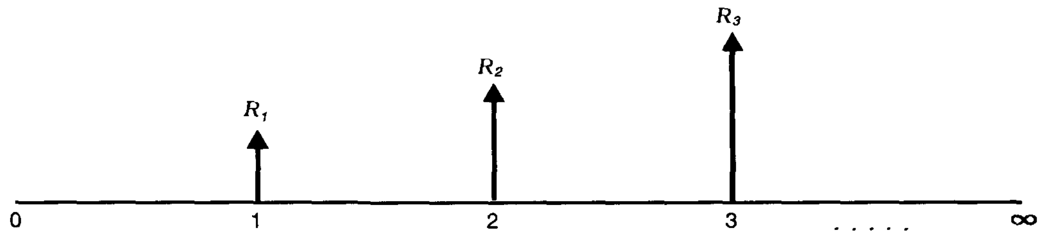
En donde $i_1\%$ es la intertasa que aquí se debe interpretar, como la tasa a la cual normalmente el inversionista hace sus inversiones.

Dividendos con Gradiente Escalonado Geométrico Infinito.

Cuando una acción paga un dividendo mensual de $0.10 durante el primer año pero, al final de cada año aumenta un 30%; significa que durante el segundo año va a pagar $0.10(1.3) = \$0.13$ mensualmente; durante el tercer año pagará $o.10(1.3)^2 = \$0.169$ mensualmente y, así, sucesivamente, entonces tenemos un gradiente escalonado geométrico infinito;



y la gráfica del gradiente simple geométrico infinito será:



sabemos que el tamaño del escalón es m, por tanto

$$\boxed{R_1 = r_1\, S\overline{m|}\,t\%}$$

y reemplazando en la fórmula del valor presente del gradiente geométrico infinito se tendrá:

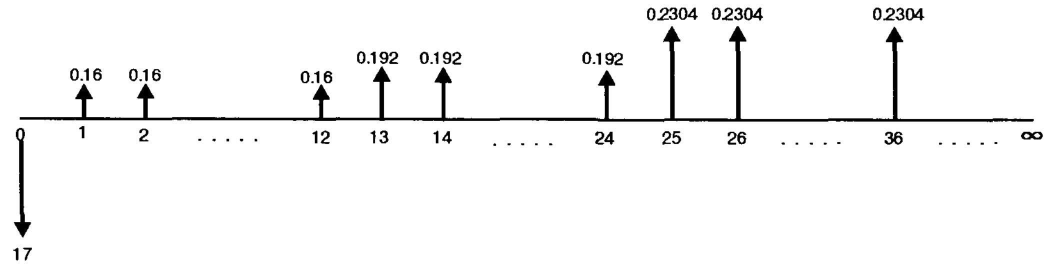
$$\boxed{i = \frac{r_1\, S\overline{m|}\,i\%}{(VP)} + G \qquad \text{condición } G < i}$$

Ejemplo 10

Supongamos que la empresa ABC desea hacer una emisión de acciones, manteniendo la tendencia de pagar dividendos mensuales y uniformes, pero aumentando su valor cada año, en un 20%. Suponiendo que el dividendo del primer mes será \$0.16 y que el valor actual de la acción es de \$17 y suponiendo que la empresa normalmente hace sus inversiones al 38% efectivo anual, hallar el costo del capital.

Solución:

Durante el primer año, el valor del dividendo mensual será de \$0.16 , durante el segundo año, el valor del dividendo mensual será de 0.16((1.2) = \$0.192, durante el tercer año, el valor del dividendo será: $0.16(1.2)^2$ = \$0.2304



Hasta el momento, tenemos la siguiente información:

$$r_1 = 0.16, \quad m = 12, \quad i_1 = 38\% \text{ efectivo anual}, \quad G = 20\%$$

Solo nos falta conocer i_1% efectivo mensual para aplicar la fórmula y para ello hacemos uso de la equivalencia de tasas.

$$(1 + 0.38)^1 = (1 + i)^{12}$$

de donde $i_1 = 2.7204\%$ efectivo mensual y finalmente podemos aplicar la fórmula

$$i = \frac{0.16\ S\overline{12|}2.7204\%}{17} + 0.2 = 33.147\%$$

y la condición $G < i$ se cumple, puesto que $20\% < 33.147\%$

FUENTE ARRENDAMIENTO FINANCIERO

Otra de las formas de financiación es la del arrendamiento financiero o *leasing*, que permite al usuario la utilización de bienes de capital que no son de su propiedad, sino que la han sido entregados en arriendo, con opción de compra al vencimiento del contrato de arrendamiento.

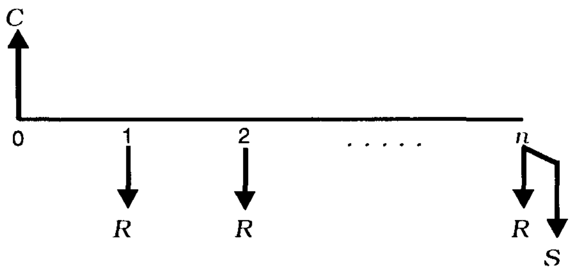
Usualmente, un *leasing* adquiere los bienes de capital que requiera un usuario de *leasing* y se los entrega en arriendo, mediante el pago periódico de un canon de alquiler. Se acostumbra a incluir en el contrato de arriendo las siguientes cláusulas en favor del arrendatario:

a) La opción de adquirir el bien de capital objeto del contrato al vencimiento de éste, por un precio que casi siempre se define de antemano y que debe ser inferior al valor del mercado
b) Prorrogar el tiempo del contrato por un tiempo adicional, con un canon de arrendamiento inferior al pactado inicialmente.
c) Devolver el bien de capital al arrendador al vencimiento del contrato.
d) enajenar el bien, en favor de un tercero.

El canon de arrendamiento puede ser pagado período vencido o período anticipado por lo que se presentan dos formas, que analizaremos desde el punto, de vista financiero.

Primera forma (canon vencido)

Supongamos que un contrato *leasing* establece el suministro de un bien de capital, cuyo costo es de $\$C$ y por el cual el arrendatario se compromete a pagar un canon mensual de arriendo de $\$R$, durante n meses y, al vencimiento del contrato, el arrendatario tiene la opción de adquirir el bien por $\$S$. Si el arrendador desea ganar una tasa i, la ecuación de valor nos quedará así:

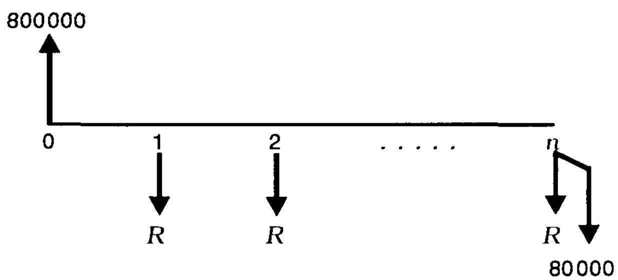


$$\boxed{C = R\, a_{\overline{n}|i} + S(1+i)^{-n}}$$

Ejemplo 11

Elaborar una tabla para un *leasing* de $800 000, con una duración de 6 meses y con un valor de opción de compra al vencimiento del contrato, equivalente al 10% del valor de costo. Suponga una tasa del 4% efectivo mensual y que el canon de arrendamiento es vencido.

Solución:



La ecuación de valor es: $800\,000 = R\, a_{\overline{6}|4\%} + 80\,000(1+0.04)^{-6}$

Despejando, se obtiene: $R = \$140\,548.57$

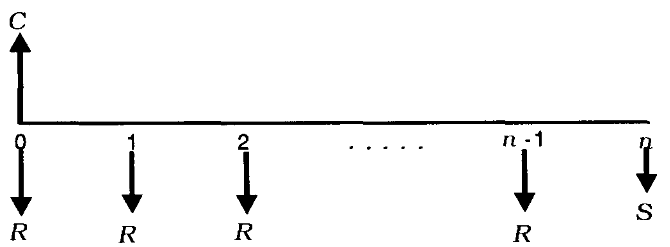
La tabla de *leasing* es igual a una tabla de amortización, tal como las mostradas en el capítuio 6, el único cambio radica en el nombre de las columnas. El nombre de capital insoluto se cambiará por opción de compra y el de cuota o pago por el de canon.

PER.	OPCION COMPRA	INTERES	CANON	AMORTIZACION
0	800 000.00			
1	691 451.43	32 000.00	140 548.57	108 548.57
2	578 560.92	27 658.06	140 548.57	112 890.51
3	461 154.79	23 142.44	140 548.57	117 406.13
4	339 052.41	18 446.19	140 548.57	122 102.38
5	212 065.94	13 562.10	140 548.57	126 986.47
6	80 000.00	8 482.64	140 548.57	132 065.93

Segunda forma (canon anticipado)

Supongamos que el contrato *leasing* establece el suministro de un bien de capital, con costo de $\$C$, un canon de arrendamiento de $\$R$ mensuales durante n meses, pagaderos al principio de cada mes. Al vencimiento del contrato, el arrendador tiene la opción de adquirir el bien por $\$S$ y la tasa que desea ganar el arrendador es i.

Debemos tener en cuenta que, si el canon de arrendamiento es anticipado, el primer pago se hará en 0; cubre el período que va desde 0 hasta 1 y el último pago se hace en $n-1$ y cubre el período que se inicia en $n-1$ y termina en n. Además, puesto que n corresponde al vencimiento del contrato, es ahí donde está la opción de compra por $\$S$:



la ecuación de valor será:

$$\boxed{C = R\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + S(1+i)^{-n}}$$

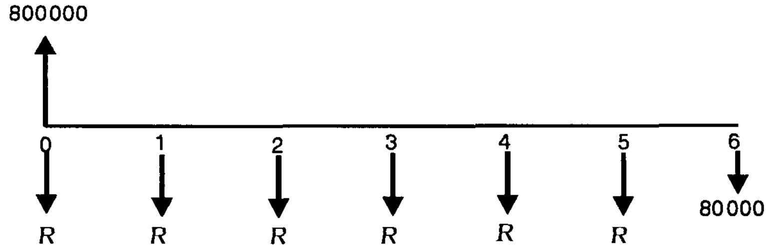
al reemplazar la anualidad anticipada por la vencida, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$C = R\,a_{\overline{n}|i}\,(1+i) + S(1+i)^{-n}$$

Ejemplo 13

Resolver el ejemplo 23 suponiendo que el canon de arrendamiento se paga al principio de cada mes.

Solución:



$$800\,000 = R\, a_{\overline{6}|4\%}(1+0.04) + 80\,000(1+0.04)^{-6}$$

de donde se obtiene que $R = \$135\,142.86$

En el período 0, se inicia la tabla con una opción de compra de \$800 000 – 135 142.86 = \$664 857.14, que viene a ser igual al valor inicial del contrato menos el valor del primer arriendo, por lo tanto, solo queda por pagar 5 arriendos, más la opción final de compra.

PER.	OPCION COMPRA	INTERES	CANON	AMORTIZACION
0	664 857.14			
1	556 308.57	26 594.29	135 142.86	108 548.57
2	443 418.05	22 252.34	135 142.86	112 890.52
3	326 011.91	17 736.72	135 142.86	117 406.14
4	203 909.53	13 040.48	135 142.86	122 102.38
5	76 923.05	8 156.38	135 142.86	126 986.47
6	0.00	3 076.95	80 000.00	76 923.05

Observación: inicialmente, el arrendatario no puede calcular la *TIR* en un *leasing*, debido a que el cálculo de la *TIR* exige que haya ingresos y egresos y el arrendatario solo tiene egresos; sin embargo, si tomamos en cuenta los ingresos que genera tal bien, entonces sí es factible calcular una *TIR*. En el caso del arrendador, sí se puede calcular la *TIR* del *leasing*, pues su egreso es el costo del bien que se compra y sus ingresos son los canon de arrendamiento que recibe, más la opción de compra.

De lo anterior, se deduce que, si el arrendatario desea evaluar alternativas de inversión donde una de ellas es un *leasing* el uso del *VPN* puede ser más aconsejable que la *TIR*.

Ejemplo 14

Una fábrica requiere una máquina, cuyo costo es de $500 000, ésta producirá unos ingresos anuales de $1 500 000, durante 5 años. La máquina tiene una vida útil de 5 años y, prácticamente, no tiene valor de salvamento; el *CAO* es de $600 000. Si la fábrica utiliza una tasa del 3.5% efectivo mensual, decidir entre dos alternativas de adquirir la máquina: la primera es a través de un *leasing* que tiene las siguientes características:

a) Duración del contrato: 5 años.
b) Opción de compra: $0.
c) Canon de arrendamiento: $21 250, por mes anticipado.

La segunda alternativa consiste en comprarla a crédito dando una cuota inicial de $100 000 y el resto puede ser cancelado en pagos mensuales durante 3 años con una tasa de interés del 3.8% efectivo mensual. ¿Cuál de las dos alternativas debe escoger?

Solución:

Todas las cantidades debemos reducirlas a equivalentes en la misma unidad de tiempo. Por ejemplo a equivalentes anuales y la tasa debe ser equivalente anual; por tanto la tasa del 3.5% efectivo mensual se convertirá en el 51.11% efectivo anual.

Para el *leasing*, hacemos los siguientes cálculos: los arriendos de $21 250 por mes anticipado, durante 5 años, a la tasa del 3.5% efectivo mensual, equivalen a 5 pagos anuales anticipados de $212 533, de acuerdo con el siguiente cálculo:

$$21\,250\ \ddot{a}_{\overline{12}|3.5\%} = \$212\,533$$

El flujo neto de caja quedará así:

PER.	INGRESO ANUAL	*CAO*	CANON	*FNC*
0	–	–	–212 533	–212 533
1 a 4	1 500 000	600 000	–212 533	687 467
5	1 500 000	600 000	–	900 000

$$VPN = -212\,533 + 687\,467\ a_{\overline{4}|51.11\%} + 900\,000(1+0.5111)^{-5}$$

$$VPN = \$988\,797$$

Para la segunda alternativa, hacemos los siguientes cálculos. El saldo de la deuda, $400 000, será pagadero en 36 cuotas mensuales vencidas, de $20 573, calculadas al 3.8% efectivo mensual, así:

$$400\,000 = R\,a_{\overline{36}|3.8\%}$$

de donde se obtiene que, $R = \$20\ 573$

Para reducirlas a cuotas anuales, usaremos la *TIO* así:

$$20\ 573\ S_{\overline{12}|}3.5\% = \$300\ 406$$

Esto significa que las 36 cuotas mensuales de $20 573, se reemplazan por 3 cuotas anuales de $300 406. El flujo de caja quedará así:

PER.	INGRESO ANUAL	*CAO*	CANON	FNC
0	−100 000	–	–	−100 000
1 a 3	1 500 000	600 000	300 406	599 594
4 a 5	1 500 000	600 000	–	900 000

$$VPN = -100\ 000 + 599\ 594 a_{\overline{3}|}51.11\% + 900\ 000 a_{\overline{2}|}51.11\%(1+0.5111)^{-2}$$

$$VPN = \$1\ 166\ 594$$

Se concluye que, en este caso, es mejor la segunda alternativa, siempre y cuando se disponga de $100 000, inicialmente, mientras que, en la primera alternativa, solo se requiere de $21 250 iniciales.

EFECTO DEL *LEASING* EN LA TRIBUTACION

El contrato *leasing* exige el pago de una suma periódica en calidad de arrendamiento, por esta razón, en la mayoría de los países, para el usuario representa un gasto y por lo tanto para efecto de impuestos podrá ser deducido de sus ingresos produciéndose en tal forma un beneficio fiscal.

Ejemplo 15

Una lavandería está considerando la adquisición de una nueva caldera de mayor potencia cuyo soto es de $1 millón, la cuál debido a mayor capacidad producirá un aumento en sus ingresos anuales de $3 millones, su costo anual de operación se estima en $800 000. Existen dos posibilidades para adquirirla. la primera es comprarla a crédito dando una cuota inicial del 25% y el resto podrá ser cancelado mediante pagos mensuales vencidos durante 2 años con intereses al 33.6% CM. La segunda posibilidad consiste en adquirirla mediante un leasing que exigiría el pago de un arriendo mensual anticipado de $62 088 durante dos años y además se puede hacer uso de la opción de compra de la caldera al vencimiento del contrato por el 10% del costo inicial. Suponiendo que la lavandería efectúa sus inversionistas normalmente al 4% efectivo mensual.

a) ¿Cuál de las dos posibilidades debe escogerse?

b) Si suponemos que existe una tasa impositiva del 30% nuevamente decida la posibilidad que debe escoger.

Solución:

a) Primera posibilidad compra a crédito

Calculamos la cuota mensual de amortización de la deuda

$$750\,000 = R\, a_{\overline{24}|}2.8\% \quad \text{entonces} \quad R = \$43\,336.92$$

Las cuotas mensuales de $43 336.92 las convertimos a pagos anuales equivalentes usando la tasa del 4%

$$43\,336.92\, S_{\overline{12}|}4\% = \$651\,172.13$$

El flujo de caja quedará así:

PER.	INGRESO ANUAL	*CAO*	CANON	FNC
0	–	–	250 000	–250 000
1	3 000 000	800 000	651 172	1 548 828
2	3 000 000	800 000	651 172	1 548 828

$$VPN = -250\,000 + 1\,548\,828(1+0.04)^{-12} + 1\,548\,828(1+0.4)^{-24}$$

$$VPN = \$1\,321\,624$$

Segunda posibilidad *(leasing)*

Las cuotas mensuales anticipadas de $62 088 las convertimos en cuotas anuales ordinarias a la tasa del 4%

$$62\,088\, \ddot{S}_{\overline{12}|}4\% = 62\,088\, S_{\overline{12}|}4\%(1+0.04) = \$970\,239.10$$

teniendo en cuenta que la opción de compra al final de 2 años es de $100 000, el flujo de caja quedará así:

PER.	INGRESO	*CAO*	CANON	OPCION	FNC
1	3 000 000	800 000	970 239	–	1 229 761
2	3 000 000	800 000	970 239	100 000	1 129 761

$$VPN = 1\ 229\ 761(1+0.04)^{-12} + 1\ 129\ 761(1+0.04)^{-24}$$

$$VPN = \$1\ 208\ 849$$

En consecuencia es mejor la compra a crédito

b) primera posibilidad (compra a crédito)

Una parte de la cuota de $43 336.92 se utiliza para pagar intereses y el saldo para amortización, pero la parte que se utiliza para pagar intereses debe disminuir la base para el cálculo de impuestos, por esta razón debemos hallar el total de intereses pagados en cada año (por facilidad de cálculos supondremos que el total de intereses se paga al final de cada año).

Cálculo de intereses: Valor de la deuda inmediatamente después de haber efectuado el pago 12

$$D = 43\ 336.92\ a_{\overline{12}|2.8\%} = \$436\ 571.70$$

Como la deuda inicial es de $750 000 y después de haber efectuado el pago 12 queda una deuda de $436 571.70 significa que durante el primer año amortizó $313 428.30. Por otra parte, el total pagado durante el primer año fue:

$$43\ 336.92 \times 12 = \$520\ 043.04$$

Si a este total le restamos lo amortizado, nos queda la parte que corresponde a intereses del primer año.

$$520\ 043.04 - 313\ 428.30 = \$206\ 614.74$$

Al llegar al final del segundo año se ha amortizado la totalidad de la deuda, esto es $750 000, y en el transcurso de los 2 años el total de lo pagado asciende a:

$$43\ 336.92 \times 24 = \$1\ 040\ 086.08$$

entonces el total de intereses pagados en 2 años será:

$$1\ 040\ 086.08 - 750\ 000 = \$290\ 086.08$$

pero, como los intereses del primer año fueron $206 086.08 entonces los intereses del segundo año serán:

$$290\ 086.08 - 206\ 614.74 = \$83\ 471.34$$

y el flujo de caja quedará así:

Per.	Ingreso	*CAO*	Cuota	Intereses
0	–	–	250 000	–
1	3 000 000	800 000	651 172	206 615
2	3 000 000	800 000	651 172	83 471

Per.	Base(1)	Impuesto(2)	FNC(3)
0	–	–	– 250 000
1	1 993 385	598 016	950 812
2	2 116 529	634 959	913 869

Observación:

(1) La base se obtiene así: *INGRESO – CAO – INTERES*

(2) El impuesto es el 30% de la *BASE*

(3) El flujo neto de caja *(FNC)* se obtiene así:

$$FNC = INGRESO - CAO - CUOTA - IMPUESTO$$

NOTA. La columna de interés no se utiliza para calcular el *FNC* porque de alguna forma ya está incluida en la cuota de amortización.

Ahora estamos en condiciones de calcular el *VPN*

$$VPN = -250\ 000 + 950\ 812(1.04)^{-12} + 913\ 869(1.04)^{-24}$$

$$VPN = \$700\ 394$$

Segunda posibilidad: *leasing.*

Debe tenerse en cuenta que el canon de arrendamiento puede ser deducido de los ingreso para efectos tributarios (En algunos países solo es deducible un porcentaje del canon), pero la opción de compra no es deducible.

PER.	INGRESOS	*CAO*	CANON	OPCION
1	3 000 000	800 000	970 239	–
2	3 000 000	800 000	970 239	100 000

Per.	Base(1)	Impuesto(2)	FNC(3)
1	1 229 761	368 928	860 833
2	1 229 761	368 928	760 833

(1) *BASE = INGRESO – CAO – CANON*
(2) *IMPUESTO = 30% de la BASE*
(3) *FNC = INGRESO – CAO – CANON – OPCION – IMPUESTO*

$$VPN = 860\,833(1.04)^{-12} + 760\,833(1.04)^{-24} = \$834\,491$$

Ahora la decisión se invierte y escogemos el *leasing.*

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Si un proyecto necesita de varias fuentes de financiación que cobran diferentes tasas, calcular el costo del capital, en las siguientes condiciones:

FUENTE	CANTIDAD (en millones)	TASA
Bancos	60	33%
Corporaciones	40	31%
Entidades del exterior	100	36%
Otros	50	38%

Respuesta: 34.88%

2) Un banco presta 3 veces el promedio del capital depositado en cuenta corriente, en los últimos 3 meses. Si a un cliente le aprueban un préstamo de $1 500 000, para ser pagado en 4 pagos trimestrales con una tasa del 34% nominal trimestre anticipado; y si, además, al momento de hacerle el préstamo le descuentan la suma de $8 000, por concepto de costos del crédito, determinar el costo del capital para el cliente.

Respuesta: 11.7% efectivo trimestre vencido, equivalente al 55.67% efectivo anual.

3) ¿Cuál es el costo del capital que se obtiene en la siguiente forma? Préstamo en *marcos alemanes; tasa de interés en marcos* 7%; *tasa de devaluación del peso* frente al marco, 35%.

Respuesta: 44.45%

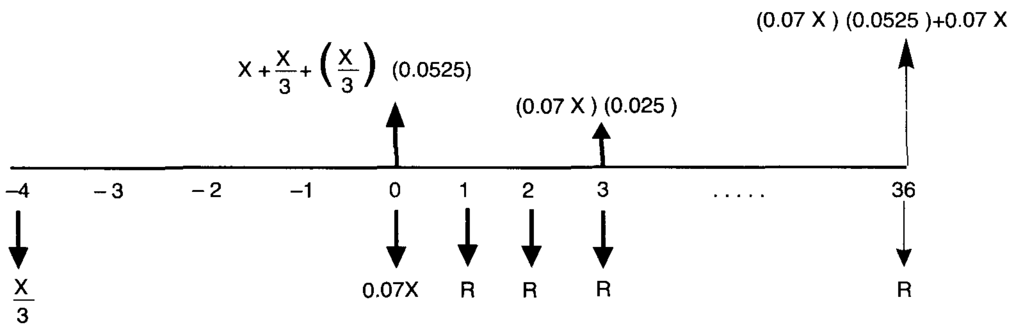
4) Desea financiarse un proyecto de construcción de 300 soluciones de vivienda, utilizando el sistema *UPAC*. Determinar el costo del capital, si se cobra un interés del 7% sobre los *UPAC* y se estima que la corrección monetaria va a permanecer fluctuando al rededor del 22%.

Respuesta: 30.54%

5) Una entidad financiera ofrece hacer préstamos para ser amortizados en pagos mensuales, durante 3 años, con una tasa nominal del 30% pero exige:
   a) tener un promedio de depósitos en cuenta de ahorros durante mínimo 4 meses, por un valor igual a una tercera parte del préstamo, este gana un interés nominal del 21% pagadero por trimestres vencidos, sobre el saldo mínimo de cada trimestre.
   b) En reciprocidad al préstamo, se exige que se constituya un depósito a término fijo, por un tiempo igual a la duración del préstamo por un valor del 7% del préstamo inicial; este depósito gana un interés igual al de la cuenta de ahorros, es decir, el 21% CT. Calcular la *TIR* que gana la financiera en esta clase de inversiones, suponiendo que el dinero depositado en la cuenta de ahorros será retirado, simultáneamente, con el dinero prestado. Además, suponga que los intereses que produce el depósito a término fijo van retirándose, tan pronto se van causando y que el depósito será cancelado al vencimiento.

Advertencia: los dineros depositados en la cuenta de ahorros en 3 meses ganan el 5.25%; pero, en el cuarto mes, no alcanzan a ganar nada, puesto que la cuenta solo paga por períodos completos de 3 meses. En consecuencia, para fines prácticos, puede considerarse que en los 4 meses solo gana el 5.25%.

Sugerencia: el diagrama de flujo de caja quedará así:



Respuesta: 2.755% efectivo mensual, equivalente al 38.56% efectivo anual.

6) Un distribuidor, normalmente otorga a sus clientes un plazo de un mes para el pago de las facturas, por compra de mercancías al por mayor. Con el fin de obtener una liquidez inmediata, ofrece un descuento del 5%, si la factura es cancelada al contado. Determinar el costo del capital.

Respuesta: 5.263% efectivo mensual, equivale al 85.06% efectivo anual.

7) Una fábrica ha decidido hacer una emisión de acciones, a fin de conseguir los dineros necesarios para la ampliación de su planta de producción. Se han presentado 3 proyectos de emisión:
   a) el primero consiste en que cada nueva acción pague un dividendo de $0.30 por mes;
   b) el segundo propone que se estimule la rápida adquisición de acciones, por parte de diferentes accionistas, pagando un dividendo inicial de $0.28; pero, cada mes, se aumentará en $0.01;
   c) el tercero está basado en el segundo proyecto, pero propone que, en lugar de aumentar el dividendo mensual en $0.01, su aumento mensual sea del 1.2%.

   Si el valor actual de la acción es de $30 ¿cuál sería el costo del capital, en cada caso?

   Respuestas: a) 1 % efectivo mensual equivale al 12.68%
   b) 2.35% efectivo mensual equivale al 32.15%
   c) Mayor que el 2.133% efectivo mensual.

8) En los últimos 5 años una empresa ha tenido por norma mantener el valor del dividendo mensual constante durante cada año y, al final de éste, aumentar el dividendo en $0.07 ¿cuál será el costo del capital si se mantiene esta política? Suponga que el valor actual de la acción es de $51 y que el primer dividendo que pagarían estas nuevas acciones sería de $0.47 al mes y que la empresa utiliza una tasa del 2.75% efectivo mensual.

   Respuesta: 21 .74% efectivo anual

9) Suponga que la empresa del problema anterior cambia su política de aumentar cada año el dividendo en $0.07, por un aumento anual del 15%.

   Respuesta: 27.89% efectivo anual

10) Una persona decide invertir sus ahorros en la compra de acciones de una empresa, cada acción cuesta $8.50 y paga un dividendo de $0.09 por mes vencido. Si las acciones las vende al final de un año en $9.20. ¿Cuál fue la tasa efectiva mensual y la tasa efectiva anual que ganó su inversión?

    Respuestas: 1.6838% efectivo mensual y 22.186% efectivo anual.

11) Calcular la tasa efectiva mensual y la tasa efectiva anual que gana la inversión del problema anterior suponiendo que la suma que recibe por dividendos es reinvertida inmediatamente al 2.5% efectivo mensual.

    Respuestas: 1.73% efectivo mensual y 22.84% efectivo anual

12) Elaborar una tabla para un leasing con las siguientes características:
    a) costo del bien $1 000 000;
    b) duración del contrato 3 años;
    c) opción de compra 15% del valor inicial;

d) canon de arrendamiento pagadero por semestres anticipados;
e) tasa que cobra el arrendador 22% efectivo semestral.

Respuesta:

PER.	OPCION COMPRA	INTERES	CANON	AMORTIZACION
0	752 951.01			
1	671 551.24	165 649.22	247 048.99	81 399.77
2	572 243.52	147 741.27	247 048.99	99 307.72
3	451 088.11	125 893.58	247 048.99	121 155.41
4	303 278.51	99 239.39	247 048.99	147 809.60
5	122 950.79	66 721.27	247 048.99	180 327.72
6	0.00	27 049.21	150 000.00	122 950.83

13) Una persona tiene dos opciones para adquirir un bien cuyo costo es de $600 000. La primera opción consiste en dar una cuota inicial del 20% y el saldo será cancelado en cuotas mensuales durante dos años con intereses al 36% CM. La segunda opción consiste en constituir un contrato leasing que exige un canon de $31 418.22 por mes anticipado durante 3 años y da una opción de compra de $60 000 al final del contrato. Si la persona normalmente hace sus inversiones al 4% efectivo del contrato. Si la persona normalmente hace sus inversiones al 4% efectivo mensual. ¿Qué opción debe escoger?

Sugerencía: utilice el *VPN* como índice de comparación.

Respuesta: *VPN* primera opción = – $552 141 .02;
VPN segunda opción = – $632 447.27
No es conveniente adquirir el bien, sin embargo si es absolutamente indispensable adquirirlo debe decidirse por la opción primera.

14) Un almacén necesita adquirir un computador a un costo de $1 500 000. Se estima que con este equipo podrá agilizar sus ventas obteniéndose ingresos anuales adicionales de $5 000 000 y que tendrá un costo anual de operación de $2 000 000 aproximadamente. Se han presentado dos alternativas para adquirir este equipo, la primera consiste en adquirirlo a crédito dando una cuota inicial del 20% y el saldo podrá ser pagado en cuotas mensuales vencidas durante 2 años con un interés del 3% efectivo mensual. La segunda alternativa consiste en adquirirlo mediante un contrato leasing a 3 años el cual estipula un canon de $84 892 por mes anticipado y con una opción de compra del 10% del costo inicial al vencimiento del contrato. Suponiendo una tasa impositiva del 35% y que la tasa de interés de oportunidad es del 4.5% efectivo mensual. Determinar la mejor alternativa.

Sugerencia: use el *VPN* tomando 3 años en cada caso.

Respuesta: *VPN*(crédito) = $991 598; *VPN*(leasing) = $1 178242. Decidir *leasing.*

Bonos Capítulo 16

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior vimos diferentes formas de financiación y el costo que ello representaba. En este capítulo veremos una de las formas más utilizadas de financiación, tanto del sector privado como de parte del Estado.

En muchas ocasiones conseguir una suma apreciable de dinero se dificulta y resulta más fácil hacerlo a través de un gran número de pequeños inversionistas haciendo uso de la emisión de unos documentos denominados bonos, que son obligaciones a largo plazo.

De acuerdo al tipo de respaldo que ofrecen, los bonos se pueden clasificar en tres clases.

Bonos hipotecarios

Son aquellos que están respaldados por una hipoteca sobre un activo específico, tal como finca raíz, maquinaria y equipos, vehículos, etc. Como en esta clase de bonos el riesgo es mínimo son los menos rentables.

Bonos sin respaldo

Son aquellos que no tienen respaldo específico, salvo el buen nombre de la empresa que los emite; en muchas oportunidades ofrecen que al vencimiento cada bono se podrá convertir en un número determinado de acciones de la misma empresa y se les denominan bonos convertibles. Generalmente, son más rentables que los bonos hipotecarios.

Bonos estatales

Son aquellos emitidos directamente por el estado o por una entidad estatal; usualmente son los menos rentables y a fin de asegurarse la colocación o compra de estos bonos, los gobiernos los imponen como inversión forzosa.

DEFINICIONES

Valor nominal: El valor que está escrito o impreso en el bono se denomina *valor nominal o valor facial* (del inglés face) y lo representaremos por F.

Valor de maduración: El valor que se paga al vencimiento del bono se denomina *valor de maduración, valor de redención o valor al vencimiento,* y lo representaremos por V. Las más de las veces el valor nominal es igual al valor al vencimiento, en este caso se dice que el bono es redimible al par, o se omite decir que va a ser redimido al par y simplemente se da su valor de redención, pero si $F \neq V$ entonces el valor en redención se expresa como un porcentaje del valor nominal. Por ejemplo si el bono paga al vencimiento el 110% del valor nominal se dice que su redención es a 110% o simplemente que se redime a 110 y si el valor nominal F es de $100 000 entonces su valor al vencimiento V será: 110% x 100 000 = $110 000.

Precio de compra: El precio de compra de un bono lo representaremos por P_c y equivale al valor presente de todos los ingresos que va a generar el bono, si el precio de compra se calcula en el momento de ser emitido se le dice precio de emisión. (Esto solo se presenta en el mercado primario).

Precio de compra a prima: Cuando el precio de compra es superior al valor de maduración se dice que el bono es *comprado a prima*, en caso contrario es *comprado a descuento.*

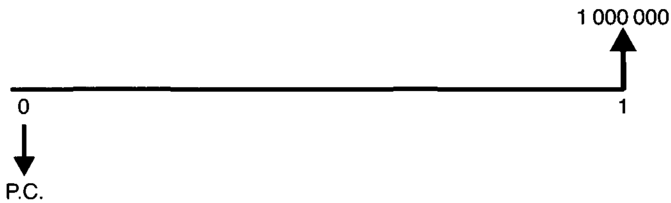
Plazo: El tiempo que transcurre entre la fecha de emisión y la fecha de maduración se denomina *plazo del bono* normalmente en el mercado colombiano el plazo varía entre 1 y 7 años, en el mercado norteamericano van de 1 a 10 años.

Cupones: La tasa de interés que periódicamente paga el bono la representaremos por r, esta tasa siempre será vencida, el valor del interés de cada período se le denomina *cupón o interés periódico.* El valor de los cupones se calcula aplicando la tasa de interés del bono al valor nominal, de allí que el valor de cada cupón será: $F \times r$. Existen bonos con cupón cero, esto significa que no pagan intereses y simplemente se compran a descuento.

Ejemplo 1

Un bono de valor nominal $1 millón va a ser redimido en un año y es emitido con cupón cero. Si se desea que el bono genere una rentabilidad del 8% determine su valor de emisión.

Solución:



$$P.C. = 1\,000\,000(1.08)^{-1} = \$925\,926$$

RENTABILIDAD DEL BONO

Para determinar la rentabilidad del bono es necesario recurrir al concepto de VAN y de TIR, la rentabilidad del bono es la tasa i que hace que el VAN sea cero.

Observación I: Los bonos son libremente negociables en los mercados de valores, permitiéndole al tenedor obtener una liquidez en cualquier momento durante su vigencia.

Observación 2: En Colombia, los intereses están sujetos a retención en la fuente.

Bonos ordinarios: Se denominan bonos ordinarios aquellos bonos cuyo valor de redención se hace en dinero en efectivo.

CÁLCULO DEL PRECIO DE COMPRA

Ejemplo 2

Supongamos que un bono de valor nominal $10 000 emitido el día primero de enero de 1999, es redimible a 3 años, paga un interés del 6% por semestre vencido comenzando el primero de julio de 1999 y su rentabilidad es del 24% nominal semestral. Determine el precio de compra.

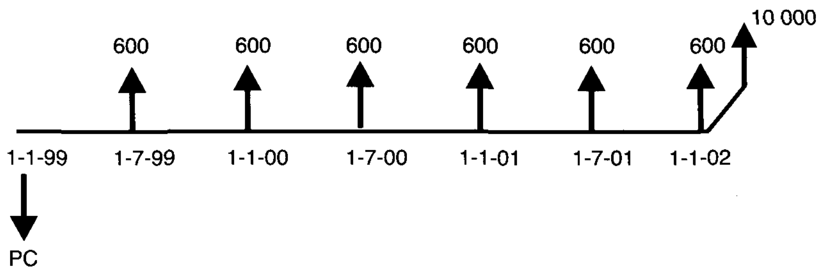
Solución:

Puesto que no se dice cómo va a ser redimido se asume que será al par en 3 años.

El valor de los cupones será: 10 000 x 0.06 = $600 que serán pagaderos el día primero de julio de 1999, el primero de enero del año 2000, el primero de julio del 2000 y así sucesivamente cada seis meses hasta llegar el primero de enero del año 2002.

El valor de vencimiento será igual al valor nominal puesto que F = V dado que el bono tiene redención par.

Construimos una gráfica que nos muestre el flujo de caja.

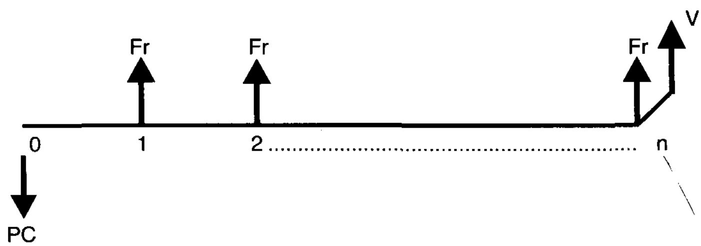


Solución:

El precio de compra será igual al valor presente de todos los ingresos descontados a la tasa del 24%SV esto es:

$$PC = 600\, a_{\overline{6}|}12\% + 10\,000\,(1 + 0.12)^{-6} = \$7\,533.16$$

De acuerdo con la solución, se puede deducir que la fórmula para calcular el valor presente de un bono es:



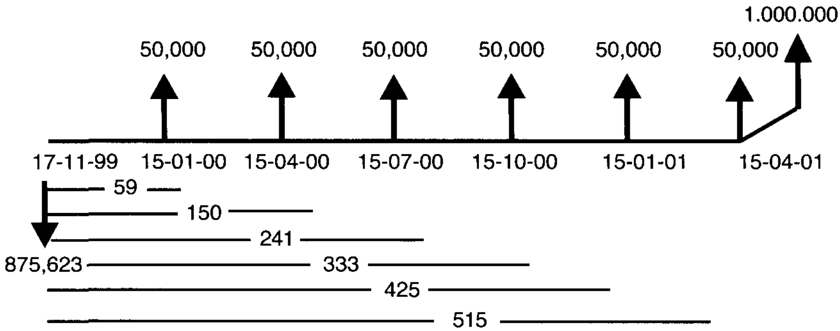
$$\boxed{PC = Fr\, a_{\overline{n}|}i\% + V(1+i)^{-n}}$$

No siempre se puede aplicar la fórmula porque puede ocurrir que el flujo de caja no sea periódico, el cual se presenta cuando se utiliza un año de 365 días y además la fecha de compra no coincide con un período completo. Tal es el caso del siguiente ejemplo.

CÁLCULO DE LA RENTABILIDAD DE UN BONO

Ejemplo 3

Un bono de valor nominal $1,000,000, se puede comprar el 17 de noviembre de 1999 en $875,623, produce un interés trimestral de $50,000 comenzando el día 15 de enero del año 2000 y terminando el día 15 de abril del año 2001 fecha en la cual se puede redimir al 100% de su valor nominal. Determine la rentabilidad del bono.



La rentabilidad se obtiene calculando la TIR del flujo de caja anterior.

Solución:

Escribimos la ecuación del VPN, la igualamos a 0 y por el método de ensayo y error hallamos los polos para finalmente hacer una interpolación, el procedimiento es el siguiente:

$$VAN = -875{,}623 + 50{,}000(1+i)^{-59\div365} + 50{,}000(1+i)^{-150\div365} + 50{,}000(1+i)^{-241\div365}$$
$$+ 50{,}000(1+i)^{-333\div365} + 50{,}000(1+i)^{-425\div365} + 1{,}050{,}000(1+i)^{-515\div365} = 0$$

Para escoger los polos escogemos dos valores para i% no muy lejanos que hagan que el VAN sea una vez positivo y otra vez negativo (si al escoger los dos valores de i% y resulta que el VAN no cambia de signo será necesario seguir buscando valores de i% hasta que se cumpla la condición de obtener un valor positivo y un valor negativo).

La ecuación la hemos planteado con tasas anuales, (por tal motivo el tiempo también está calculado en años). Empecemos a ensayar con i = 30% entonces se tendrá la siguiente ecuación para el VAN:

$$VAN = -875{,}623 + 50{,}000(1+0.3)^{-59\div365} + 50{,}000(1+0.3)^{-150\div365} + 50{,}000(1+0.3)^{-241\div365}$$
$$+ 50{,}000(1+0.3)^{-333\div365} + 50{,}000(1+0.3)^{-425\div365} + 1{,}050{,}000(1+0.3)^{-515\div365} = +\$60{,}568$$

Ensayamos ahora con el 36%, por tanto, el VAN será:

$$VAN = -875{,}623 + 50{,}000(1+0.36)^{-59\div365} + 50{,}000(1+0.36)^{-150\div365} + 50{,}000(1+0.36)^{-241\div365}$$
$$+ 50{,}000(1+0.36)^{-333\div365} + 50{,}000(1+0.36)^{-425\div365} + 1{,}050{,}000(1+0.36)^{-515\div365} = +\$9{,}963$$

Como no hubo cambio de signo tenemos que hacer otro ensayo por ejemplo con el 38% y tenemos:

$$VAN = -875{,}623 + 50{,}000(1+0.38)^{-59\div365} + 50{,}000(1+0.38)^{-150\div365} + 50{,}000(1+0{,}38)^{-241/365}$$
$$+ 50{,}000(1+0.38)^{-333\div365} + 50{,}000(1+0.38)^{-425\div365} + 1{,}050{,}000(1+0.38)^{-515\div365} = -\$5{,}765$$

Como ya hubo cambio de signo en el VAN concluimos que podemos usar como polos el 36% y el 38%.

Es obvio que existe un valor X entre el 36% y el 38% para el cual el VAN toma el valor de cero. La tasa X que hace que el VAN sea cero se denomina TIR.

Ahora preparamos la interpolación, para ello disponemos los datos encontrados en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} 36\% & \longrightarrow & 9{,}963 \\ X & \longrightarrow & 0 \\ 38\% & \longrightarrow & -5{,}765 \end{array}$$

Para hallar el valor de X planteando las siguientes proporciones siguiendo el orden indicado con la flecha:

$$\downarrow \quad \begin{array}{ccc} 36\% & \longrightarrow & 9{,}963 \\ X & \longrightarrow & 0 \\ 38\% & \longrightarrow & -5{,}765 \end{array}$$

$$\frac{36-38}{36-X} = \frac{9{,}963-(-5{,}765)}{9{,}963-0}$$

Al despejar se tiene: X = 37.267%.

Observación: El valor obtenido mediante una interpolación no es exacto pero es muy aproximado y para efectos prácticos la respuesta tiene validez si se ha tomado la precaución de utilizar unos polos no muy alejados.

BONOS ORDINARIOS EN DÓLARES

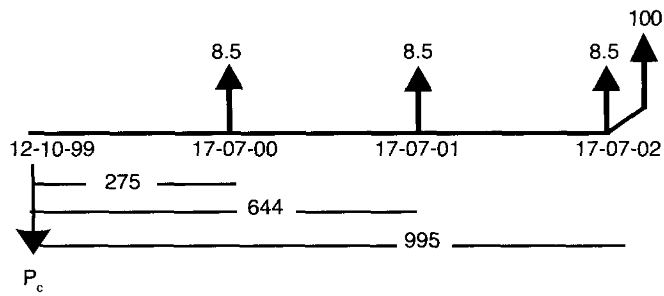
Está autorizado tanto para empresas públicas como privadas la emisión de bonos en moneda extranjera, tal es el caso de los Bonos Colombia y de lo Bonos República de Colombia los cuales fueron emitidos en dólares de los Estados Unidos de América y tienen intereses fijos en dólares, también se emitieron los Bonos Cartón de Colombia S.A. en dólares pero sus intereses fueron indexados con base en la Prime Rate.

Ejemplo 4

Hallar el precio de compra de un bono el 12 de octubre de 1999, con vencimiento el 17 de julio del año 2002, con valor de maduración de US$15,000, si paga un interés anual del 8.5% el día 17 de julio de cada año y el inversionista desea ganar el 18% anual.

Solución:

Observación: Es costumbre para los bonos en dólares utilizar un año de 360 días, por tal razón en la gráfica hemos calculado los días para cada fecha usando el modo 360D.



El cálculo del valor presente será:

$$P_c = 8.5(1+0.18)^{-275\div360} + 8.5(1+0.18)^{-635\div360} + 108.5(1+0.18)^{-995\div360} = 82.506556\%$$

aplicando el porcentaje de compra al valor de maduración se obtiene el precio que se deberá pagar, esto es:

$$0.82506556 * 15000 = US\$12{,}375.98$$

Convertimos los US$12,375.98 en pesos a la tasa representativa del mercado y se obtiene el valor que en pesos se deberá pagar por el bono.

Observación: Algunas veces utilizan en Bolsa un año de 360 días y los bancos utilizar un año de 365 días, sin embargo, esta regla es muy general y no es de obligatorio cumplimiento.

BONOS A TASA FLOTANTE

La mayoría de los cupones tienen un rendimiento indexado con base en la DTF más un Spread (otros tienen los rendimientos atados al IPC, a la TCC o a la TBS).

La DTF varía a lo largo de la vigencia del bono y por lo tanto el valor que paga cada cupón también varía. Sin embargo, para calcular el precio de registro y como consecuencia para el cálculo del precio que debe pagar el comprador se utiliza el índice respectivo vigente en la fecha de negociación.

Observación: Cuando la fecha de vencimiento del cupón o cuando la fecha de vencimiento del bono coincide con un día festivo el pago de la respectiva suma se efectúa el siguiente día hábil, pero este cambio de fecha se debe tomar en cuenta en el cálculo del precio de compra.

Ejemplo 5

Un bono es emitido el 17 de marzo de 1998, con plazo de 3 años y rendimiento en los cupones de la DTF + 3% pagadero por semestre vencido a la tasa equivalente. Este bono es registrado en Bolsa el 24 de septiembre de 1998 con tasa de registro del 32%.

Determinar el precio que debe pagar el comprador si la comisión de compra es del 0.5%.

Solución:

Como ya dijimos, los intereses de los bonos con tasa DTF son variables y se deben calcular con la tasa DTF vigente para la semana de causación, pero para fines de registro y del cálculo del precio de venta se toma el valor de la DTF para la semana del 20 al 27 de septiembre de 1998 que fue del 30.23%NTA (porque es en esta semana donde se realiza la venta).

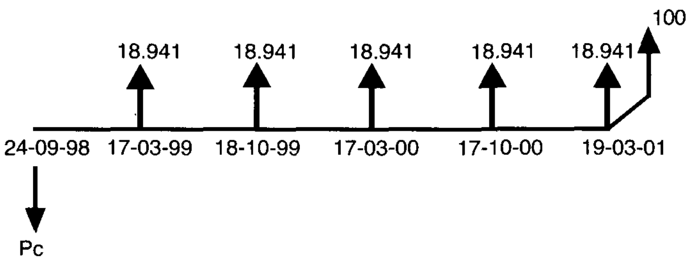
Valor de los intereses semestrales:

A la tasa del 30.23%NTA le sumamos el 3% y este resultado lo convertimos en efectivo anual. El respectivo cálculo nos da 41.47%EA.

Como los intereses son pagaderos por semestre vencido calcularemos la tasa periódica semestral así:

$$(1+0.4147)^{1/2} - 1 = 0.18294 = 18.941\% \text{ semestral}$$

Para efectos de cálculo de precio de compra se asume que los demás intereses tendrán el mismo valor. (Aunque ya sabemos que estos variarán de acuerdo a la DTF) La gráfica del flujo de caja del bono será:



Obsérvese que el segundo interés se paga el 18 de octubre de 1999 porque el 17 de octubre de 1999 es un domingo, además debemos tener en cuenta que la fecha de vencimiento final debe ser el 19 de marzo del año 2001 y no puede ser el 17 de marzo del 2001 porque esta última fecha es un sábado.

La tasa del inversionista viene a ser la tasa de registro menos la comisión de compra, por lo tanto, el precio de compra se obtiene hallando el valor presente a la tasa del 31.5% efectivo anual (tasa de registro menos comisión de compra) de cada una de las cantidades pero utilizando un año de 365 días.

$$Pc = 18.941(1+0.315)^{(-174\div365)} + 18.941(1+0.315^{(-389\div365)} + 18.941(1+0.315)^{(-540\div365)} + 18.941(1+0.315)^{(-754\div365)} + 118.941(1+0.315)^{(-906\div365)} = \$114.434\% \text{ de su valor facial.}$$

Tasa de interés de los cupones

Cuando el interés correspondiente a los cupones viene atado a un índice se presentan dos situaciones:

1) Que el índice se presente en la forma de nominal trimestre anticipado (NTA,) como es el caso en que la tasa de interés del cupón viene atada a la DTF o a la TCC, en este caso el spread (los puntos adicionales al índice) se suman directamente a la tasa NTA por lo cual el spread también viene a ser NTA. Por ejemplo:

   si la DTF es 25%NTA y el spread es de 4% la tasa resultante será

   $$25 + 4 = 29\%NTA$$

2) Que el índice se presente en la forma de efectivo anual (EA) como es el caso del IPC o de la corrección monetaria, en este caso el spread no se suma directamente al índice, para hallar la tasa del cupón habrá que utilizar la fórmula de la tasa combinada, por ejemplo:

   Si el IPC es 18% EA y el spread es 4% entonces la tasa del cupón será:

   $$i = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2 \text{ donde i es la tasa combinada.}$$

   $$i_1 = 18\%,\ i_2 = 4\%,\ \text{tasa combinada } i = 0.18 + 0.04 + 0.18 \times 0.04 = 22.72\%EA$$

BONOS CONVERTIBLES OBLIGATORIAMENTE EN ACCIONES

A este tipo de bonos también se les conoce con el nombre de BOCAS, se diferencian de los bonos ordinarios, en que al vencimiento en vez de redimirse en dinero efectivo lo hace en acciones de la misma sociedad. El número de acciones que se entregarán por cada bono se define en el momento de la emisión. Si las acciones han subido de precio el inversionista gana porque reclama las acciones y luego las puede vender obteniendo mayor ganancia, por el contrario si las acciones han bajado de precio el inversionista puede tener una pérdida, por esta razón este tipo de bonos no son considerados como títulos de renta fija.

Observación: También existen bonos opcionalmente convertibles en acciones, en este caso es opcional para el inversionista que al vencimiento pueda convertir el bono en acciones de la misma empresa o que pueda exigir el dinero en efectivo.

Ejemplo 6

Hallar la rentabilidad efectiva anual que puede obtener un inversionista que invierte $600,000 en 6 bonos de $100,000 c/u los cuales pagan intereses del 20% anual pagadero por trimestres vencidos. Cada bono es obligatoriamente convertible en 10 acciones de la misma empresa al cabo de 3 años. Suponga que el precio de la acción al momento de la conversión es: \$9,800 Use un año de 360 días.

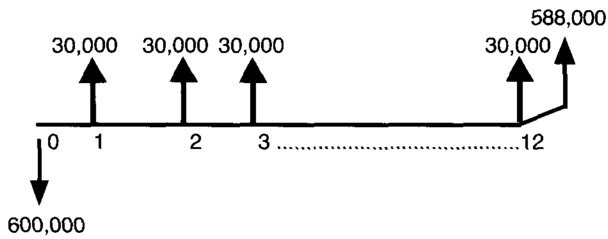
Solución:

Como la tasa es nominal trimestral entonces en cada trimestre paga 20/4 = 5%, Por tanto el valor de los intereses trimestrales será:

$$600{,}000 \times 0.05 = \$30{,}000$$

El valor de redención será: 9,800 x 6 x 10 = \$588,000

Observación: Debido a que se usa un año de 360 días todos los períodos serán iguales. La gráfica será:



Solución manual:

Planteamos la ecuación del valor presente neto y tenemos:

$$VAN = -600{,}000 + 30{,}000\, a_{\overline{12|}\, i\%} + 588{,}000(1+i)^{-12} = 0$$

Al resolver por interpolación (ver ejemplo 2) se obtiene que: i = 4.87% período trimestre y la tasa efectiva anual será:

$$(1+0.0487)^4-1 = 20.95\% \text{ efectivo anual.}$$

BONOS CON FECHA DE REDENCIÓN OPCIONAL

En general, los bonos resultan más atractivos para el inversionista, si estos tienen la opción de poder ser redimidos a su valor de vencimiento entre dos fechas dadas, pero con la condición de hacer la redención en la fecha de pago de un cupón. Es obvio que si el bono es comprado a descuento, la máxima TIR se obtiene si el bono es redimido en la primera fecha; y mínimo si es redimido en la última fecha. Valores intermedios se obtienen en fechas intermedias. Parece lógico pensar que todos los inversionistas redimirían sus bonos en la primera fecha; sin embargo, si un inversionista no encuentra en forma inmediata la forma de invertir su dinero, decide posponer la redención por un tiempo hasta que encuentra una mejor oportunidad, recibiendo a cambio de esto unos intereses más.

A fin de obtener el mayor margen de seguridad para el emisor del bono, el cálculo de la TIR debe hacerse en las condiciones más desfavorables para el emisor, equivalentemente en las condiciones más favorables para el inversionista, esto es, que se debe calcular la TIR *con la primera fecha si el bono es emitido a descuento y con la segunda fecha si el* bono es emitido a prima.

Ejemplo 7

Un bono de $1 000 puede ser redimido desde el 1-06-88, hasta el 1-06-90, siempre y cuando que coincida con la fecha de pago de un cupón y que esté dentro de las fechas dadas. Si el bono paga un interés del 14% por trimestres vencidos y la rentabilidad del inversionista debe ser del 20% NT. Hallar:

a) El precio de compra el 1-06-84.
b) La rentabilidad del inversionista si es redimido el 1-06-88.
c) La utilidad del inversionista que decide redimirlo el 1-06-88.

Solución:

Dado que no se da información con respecto al valor de redención se asume que es de redención par.

a) El precio de compra el 1-06-84 será:

$$PC = 35\ a_{\overline{24|}}\ 5\% + 1\,000(1 + 0.05)^{-24} = \$793.02$$

b) Calculamos la TIR cuando es redimido el 1-06-88:

$$793.02 = 35\ a_{\overline{16|}\,i}\ \% + 1\,000(1 + 0.0i)^{-16}$$

Haciendo el cálculo correspondiente usando la interpolación, una calculadora financiera o un computador se obtiene: i = 5.4748966% periódico trimestral.

c) La utilidad del inversionista, si el bono es redimido el 1-06-88 es igual a la diferencia entre el valor de redención y el precio de compra de un bono que se adquiriera el 1-06-88 con fecha de maduración el 1-06-90.

$$PC\ (1\text{-}06\text{-}88) = 35\ a_{\overline{8|}}\ 5\% + 1\,000(1 + 0.05)^{-8} = \$903.05$$

$$\text{Utilidad} = 1000 - 903.05 = \$96.95$$

BONOS CON REINVERSIÓN DE INTERESES

Esto no es un bono especial, más bien, es un manejo que hace el inversionista con los intereses del bono.

Si los intereses que genera el bono no son gastados, sino que tan pronto como son recibidos son reinvertidos a otra tasa, la rentabilidad que generaría este proyecto de inversión no es la TIR porque, como vimos en el capítulo correspondiente a la TIR esta es la rentabilidad de los dineros que van quedando invertidos en el proyecto y no toma en cuenta los dineros que van saliendo del proyecto; en consecuencia, la verdadera rentabilidad con reinversión de los intereses se explica en la parte b) del siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

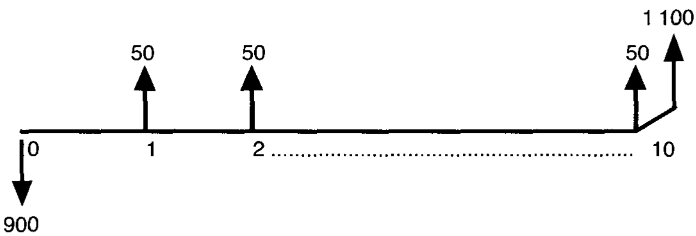
Un bono de $ 1 000 de valor nominal es redimible a 110 en 5 años; paga cupones del 10% anual por semestre vencido; y es emitido a 90.

Calcular:

a) La rentabilidad del inversionista.
b) La rentabilidad del inversionista suponiendo que el valor de los cupones es reinvertido inmediatamente que se cobran al 26% NS.

Solución:

Redención a 110 significa que su valor de redención es el 110% del valor nominal y emitido a 90 significa que el precio de compra es el 90% del valor nominal. De acuerdo a lo anterior se tiene:



a) Planteamos la ecuación de valor:

$$900 = 50\, a_{\overline{10|}}\ i\,\% + 1\,100(1+i)^{-10}$$

El cálculo de la tasa da i = 7.1524 x 2 = 14.3% NS

b) Si los intereses son reinvertidos a la tasa del 13% periódico semestral entonces al final de 5 años = 10 períodos, únicamente por concepto de intereses tendríamos:

$$50(1.13)^9+50(1.13)^8+.....+50(1.13)^1+50 = 50S_{\overline{10|}}\ 13\% \quad = \$920.99$$

Por otra parte, la inversión de $900 se convierte a los 5 años en $1 100 y,

Al final de los 5 años tendremos: 920.99 + 1 100 = $2 020.99

Esto es:

Aplicando la fórmula del interés compuesto tenemos:

$$2\ 020.99 = 900(1+i)^{10}$$

De donde se obtiene que i = 8.426% x 2 = 16.852% NS

BONOS DE REDENCIÓN MÚLTIPLE

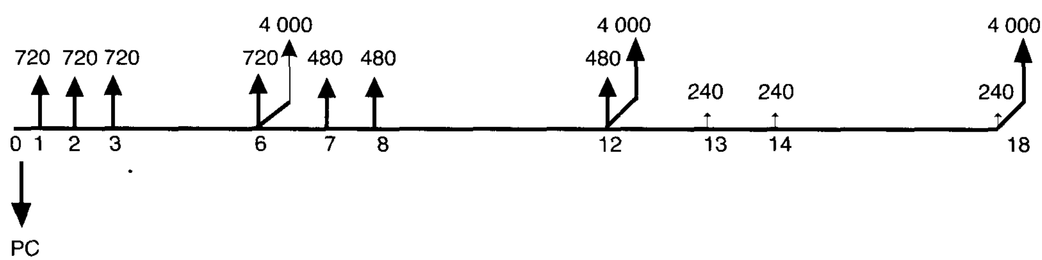
Se denomina bono de redención múltiple o bono seriado al que es redimido por medio de instalamentos (esto es, redimido por partes); es este caso, el o valor del cupón (también llamado el interés del bono) se calcula sobre el saldo no amortizado.

Ejemplo 9

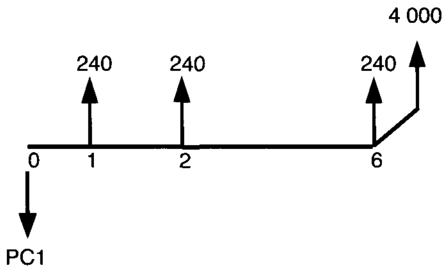
Un bono de valor nominal $12 000 se proyecta, de tal forma, que sea redimido en tres pagos (llamados instalamentos), así: $4 000 en 3 años; $4 000 en 6 años y $4 000 en 9 años. Si los cupones pagan un interés del 12% anual liquidado por semestres vencidos y se desea que la rentabilidad del inversionista sea del 18% NS, calcular el precio de compra.

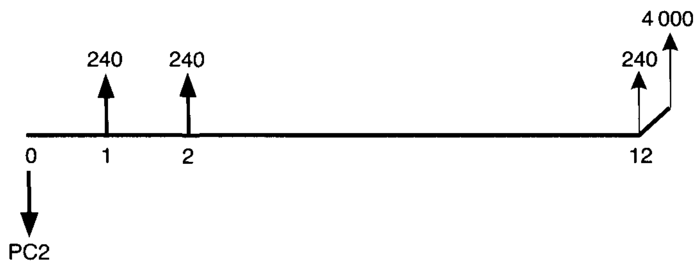
Solución:

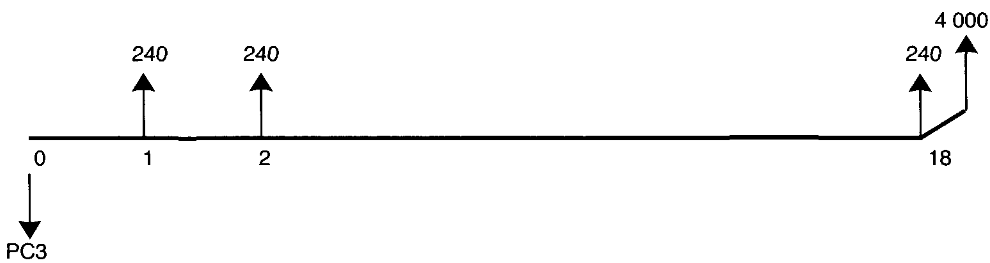
Al observar la gráfica de flujo de caja del bono de redención múltiple, también denominado bono seriado, vemos que esta gráfica se puede descomponer en otras tres gráficas de bonos simples, con duración de 3, 6 y 9 años respectivamente, y además, el precio de compra del bono de redención múltiple será la suma de los precios de compra de los tres bonos simples.



El gráfico anterior se puede descomponer en tres bonos con precios de compra PCl, PC2 y PC3 respectivamente, cada uno tendrá cupones con valor de $240, tal como se muestra en las gráficas.







El precio de compra de cada uno será:

$PC1 = 240\ a_{\overline{6}|}9\% + 4\,000(1+0.09)^{-6} \quad = \quad 3\,461.69$

$PC2 = 240\ a_{\overline{12}|}9\% + 4\,000(1+0.09)^{-12} \quad = \quad 3\,140,71$

$PC2 = 240\ a_{\overline{18}|}9\% + 4\,000(1+0.09)^{-18} \quad = \quad \underline{2\,949.32}$

$PC1 + PC2 + PC3 \quad = \quad \underline{\underline{\$\,9\,551.72}}$

Obviamente, puede presentarse el caso en que los valores de redención de cada instalamento puedan ser diferentes; sin embargo, la costumbre es que, tanto valores como intervalos sean iguales.

PROBLEMAS

1. ¿Cuál es la rentabilidad efectiva anual obtenida por un bono comprado en su fecha de emisión al 84%, con una duración de 5 años, que paga un interés del 20% por trimestre vencido?

   Respuesta: 6.44586% trimestral, 28.385% E.A.

2. ¿Cuál es la rentabilidad efectiva anual obtenida por un bono comprado en su fecha de emisión al 84%, con una duración de 5 años, que paga un interés del 20% anual pagadero por trimestre vencido y que su valor de redención es al 110% de su valor facial?

   Respuesta: 29.761% E.A.

3. El 23 de agosto de 1999 se adquiere un bono por la suma de US$200,000 a una tasa de comprador del 10% y paga un interés del 9% nominal por semestre vencido cada 15 de abril y cada 15 de octubre. La fecha de vencimiento es el 15 de octubre del año 2001.

   Suponiendo que la TRM en la fecha de compra es US$1 = $1,700 calcular la suma que debe pagarse. Use un año de 360 días.

   Respuesta: $345,900,28.

4. Resuelva el problema anterior suponiendo un año de 365 días.

   Respuesta: $346,608,206 (Tenga en cuenta los días festivos).

5. Un bono puede ser adquirido en Bolsa y tiene las siguientes características:
   a) Fecha de emisión: 14 de marzo de 1997.
   b) Plazo: 3 años.
   c) Cupones: tasa DTF + 4% por semestre vencido a la tasa equivalente.
   d) Tasa de registro 34%.
   e) Comisión de compra 0.5%

   Calcular el precio que debe pagar un inversionista el 20 de agosto de 1998. Suponga que la DTF para la semana que va del 17 al 23 de agosto es 28.45%NTA. Utilice un año de 365 días.

   Respuesta: 122.574 % del valor facial.

6. Un Bono tiene las siguientes características:
   a) Fecha de emisión: 14 de marzo de 1997.
   b) Plazo: 3 años.
   c) Cupones: al IPC + 3% por semestre vencido a la tasa equivalente.
   d) Tasa de registro 41%.
   e) Comisión de compra 0.5%.

Usando días reales calcular el precio que debe pagar un inversionista el 5 de mayo de 1999. Suponga a) que el IPC vigente en la fecha de compra hubiese sido para la fecha de compra el 18.8% y b) Cuál sería el precio a pagar si el IPC hubiese sido el 17%.

Respuestas: a) 92.188475%, b) 90.319609%

7. Un bono emitido en dólares de los Estados Unidos de América es adquirido por un inversionista el 27 de abril del año 1999 a una tasa comprador del 9% efectivo anual, los cupones son pagaderos el 20 de marzo de cada año a una tasa vencida del 7.5%. Si el valor de maduración es de US$2.000 el 20 de marzo del año 2003 y si la tasa representativa del mercado (TRM) en la fecha de adquisición es: US$1 = $1.580.78, determine el valor que paga el inversionista.

   Respuesta: $3'034.681

8. Hallar el precio de compra en pesos de un bono el día 20 de septiembre de 1999 con vencimiento el 15 de mayo del 2002 y valor de maduración de US$20 000, paga un interés anual del 7% el día 15 de marzo de cada año, si el inversionista desea ganar el 12% anual. Suponga que la TRM el 20 de septiembre de 1999 tiene un valor de $1 717.86.

   Respuesta: $32 058 325

9. Un bono emitido en los Estados Unidos deberá ser adquirido y pagado en la moneda de ese país, tiene un valor nominal de US$10 000 y fecha de maduración el día 14 de abril del año 2003, paga un interés del 6.5% anual pagadero los días 14 de abril de cada año. El primer inversionista lo ofrece en venta y desea ganarse el 8% EA. ¿Cuál será la rentabilidad que obtendrá un segundo inversionista residente en Colombia quien deberá adquirir dólares para comprar el bono y también recibirá dólares? Suponga que el tipo de cambio en las diferentes fechas de causación de pagos será:

Fecha	US$	$
1-03-2000	1	10824.83
14-04-2000	1	1 835.50
16-04-2001	1	2 025.56
15-04-2002	1	2 268.63
14-04-2003	1	2 450.50

   Use un año de 365 días sin importar si es o no bisiesto.
   Observación cuando la fecha de pago de un cupón coincide con un día festivo su pago se pospone al siguiente día hábil.

   Respuesta: 18.72% EA

10. Un bono es emitido en Colombia en dólares de los Estados Unidos con la característica de poder ser adquirido y pagado en pesos a la TRM vigente el día de su causación. Se puede adquirir el 17-09-1999 en US$985, tiene un valor nominal de US$1 000 y su fecha de maduración es el 15 de marzo del año 2002 y un interés

del 8% EA pagadero el día 15 de marzo de cada año. Se estima que la TRM tendrá los siguientes valores:

Fecha	TRM
17-09-1999	1 716.66
15-03-2000	1 824.13
15-03-2001	2 097.75
15-03-2002	2 307.53

Use un año de 365 días independiente de si es bisiesto o no.

Respuesta: 24.7% EA

11. Un bono de valor nominal $10 000 es redimible el 1-08-1996, pero puede ser redimido el 1-02-1991 o en cualquier momento dentro de estas fechas de pago siempre que coincida con el pago de un cupón. Si el bono paga un interés del 16% anual por semestres vencidos y es emitido el 1-02-1985;

    a) ¿Cuál debe ser el valor de emisión para que la rentabilidad del inversionista sea del 20% NS?
    b) ¿Cuál es la máxima rentabilidad del inversionista?

    Respuestas: a) $8 223.36; b)TIR = 21.4% NS.

12. Un bono de valor nominal $ 1 000 es redimible a 110 el 1-05-1992, pero puede ser redimido el 1-11-1990 o en cualquier momento dentro de esas dos fechas siempre que coincida con el pago de un cupón. Si el bono paga un interés del 8% por trimestre vencido y es adquirido el 1-05-1984 al 95% calcular:

    a) La tasa mínima del inversionista;
    b) La TIR del bono si es redimido el 1-08-1991
    c) La utilidad del inversionista si es redimido el 1-08-1991

    Nota: una redención a 110 significa que el valor de redención es el 110% del valor nominal, en este caso el valor de redención será $1 100 y un precio de compra del 95% significa que el valor de compra es el 95% del valor nominal, en este caso $950.

    Respuestas: a) 9.713% NT b) 9.95% NT c) $19.18

13. Una fábrica necesita $120 millones, para modernizar su planta de producción. Se estima que la mejor forma de financiación es la emisión de bonos los cuales deberán tener las siguientes características: Redención par en 5 años, cupones al 18% por trimestres vencidos y tasa de interés para el inversionista 28% NT. ¿Cuál debe ser el valor de redención?

    Respuesta: $163 232 073

14. Resuelva el problema anterior suponiendo que deberá ser redimido a 110.

Respuesta: $ 173 457 906

15. Una ciudad necesita construir un puente para garantizar el transporte automotor, el costo actual del puente es de $870 millones; para tal fin, la administración de la ciudad ha sido autorizada para emitir unos bonos por valor nominal de $1 000 millones. Si se ofrece un valor de redención de $1 400 millones, pagar cupones semestrales a la tasa del 12% anual por semestres vencidos y ofrece que la rentabilidad del inversionista es del 18% NS. ¿Cuándo podrían ser redimidos?

    Respuesta: 14.93 semestres, en forma aproximada en 7 □ años.

16. Un bono de valor nominal $1 000 es redimible en 10 años, paga un cupón de $30 al final del primer semestre y cada semestre siguiente el valor del cupón aumenta en $10. Si el precio cotizado es 80% calcular la rentabilidad nominal semestral.

    Respuesta: 23.46% NS

17. ¿Cuál es la rentabilidad del bono del problema anterior con reinversión de los cupones al 24% NS.

    Respuesta: 23.68% NS.

18. Un bono seriado de $ 15 000 paga cupones calculados al 18% NS; será redimido en 3 instalamentos de $5 000 cada uno, con vencimiento en 3,6 y 9 años respectivamente. Hallar el precio de compra con una tasa del inversionista del 16% NS.

    Respuesta: $ 16 076.54

19. Un bono seriado de $30 000 va a ser redimido en tres instalamentos de $ 10 000 cada uno, con vencimientos en 4, 5 y 6 años respectivamente; paga cupones calculados al 20% NT y su precio de cotización es $20 000. Suponiendo que, tanto los cupones como los valores redimidos son reinvertidos inmediatamente a la tasa del 16% NT determinar la TIR+R (rentabilidad incluyendo reinversiones).

    Respuesta: 6.33% periódico trimestral equivalente al 27.827% EA.

El sistema UVR

Capítulo 17

INTRODUCCION

Hacia el final de la década de los 90 se presentó un crecimiento acelerado del valor de la UPAC y un amplio sector de los deudores se halló en situación de quiebra al no poder pagar las cuotas de amortización pues éstas crecían a una velocidad superior a la que crecían sus ingresos.

En 1999 se vio la necesidad de cambiar el sistema de financiación de vivienda terminando con la UPAC y utilizando el nuevo sistema de la unidad de valor real "UVR"

La UVR iba a crecer en la misma forma en que lo hizo la UPAC en su comienzo, (al final la UVR crecía un 74% de la DTF) con la única diferencia que la UPAC crecía de acuerdo al IPC anual y la UVR de acuerdo al IPC mensual[1].

El sistema UVR pretende financiarse mediante la emisión de bonos hipotecarios a largo plazo muy diferente al sistema UPAC que canalizaba recursos mediante cuentas de ahorro a corto plazo pagando una tasa igual a la inflación y también mediante la emisión de certificados de depósito a término pagando la corrección monetaria más unos puntos adicionales

En cuanto a sistemas de amortización se refiere el sistema UVR tiene la misma filosofía que tenía el sistema UPAC en sus comienzos, el cual dio muy buenos resultados.

La fórmula con la que se calcula el aumento de valor de la UVR no es más que la fórmula del interés compuesto, esto es:

$$F = p(1+i)^n$$

donde: F = valor futuro
P = valor inicial
i = tasa de interés
n = número de períodos

Pero aquí en lugar de F pondremos el valor futuro de la UVR que representaremos por UVR_t en vez de P pondremos $UVR_{15,m}$ que representa el valor que tiene la UVR el día 15 del mes inmediatamente anterior, en vez de i usaremos I_{m-1} que corresponde al IPC del

[1] Actualmente se está estudiando la posibilidad de hacer crecer la UVR con el IPC anual.

mes anterior, en vez de n usamos t/Dm donde t son los días transcurridos desde el 16 del mes anterior hasta el día t y Dm son los días que existen entre el día 16 de un mes y el día 15 del siguiente mes.

Por lo anterior la fórmula que calcula el valor futuro de una UVR a partir de del valor que tenga el día 15 viene a ser:

$$UVR_t = UVR_{15,m}(1+I_{m-1})^{t/Dm}$$

Hacemos énfasis en que, la tasa de crecimiento de la UVR permanece constante entre el día 16 de un mes y el día 15 del siguiente mes, teniendo como base el IPC del mes anterior.

Ejemplo 1:

La UVR el día 15 de enero de 2001 valía $112.7080 y la inflación de diciembre del 2000 fue del 0.46%. Con base en los datos anteriores vamos a calcular el valor de la UVR en los días: 16, 17, 18, 19, 20, 31 de enero del 2001 y 1 y 15 de febrero del 2001.

A partir del 16 de febrero el valor de la UVR se calcula con base en un valor inicial de 113.2263 y el índice de inflación del mes de enero del 2001

Fecha	cálculo	valor
15-01-2001		$112.7078
16-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{1/31}$	= 112.7245
17-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{2/31}$	= 112.7412
18-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{3/31}$	= 112.7913
19-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{4/31}$	= 112.7746
20-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{5/31}$	= 112.7913
31-01-2001	$112.7078(1+0.0046)^{16/31}$	= 112.9751
01-02-2001	$112.7078(1+0.0046)^{17/31}$	= 112.9918
15-02-2001	$112.7078(1+0.0046)^{31/31}$	= 113.2263

A continuación presentamos una muestra sobre el aspecto matemático de los tres planes vigentes en UVR

Hemos supuesto que el valor inicial de la UVR sea de $120 en todos los casos, pero esto no desvirtúa la validez de los cálculos ni de las conclusiones que de allí se obtengan.

SISTEMAS DE AMORTIZACION EN UVR

El sistema UVR fue creado el 15 de septiembre de 1999 y adoptado para la financiación de vivienda desde el primero de enero del 2000.

Los planes que hasta el día 31 de enero de 2001 han sido aprobados por parte de la Superintendencia Bancaria cumpliendo con los requisitos impuestos por la Corte Constitucional son los siguientes:[2]

PRIMER SISTEMA

PLAN DE AMORTIZACION CON CUOTA FIJA EN UVR

Este plan funciona en forma parecida a la forma en que un deudor cancelaría una deuda en dólares teniendo que comprar con pesos los dólares necesarios para pagar la cuota de cada mes. Si suponemos que el valor del dólar sube de precio continuamente, entonces, la cantidad de pesos necesaria para pagar la misma cuota en dólares será cada vez mayor. (En la práctica puede ocurrir que el dólar baje, pero la UVR sólo bajaría cuando se presente lo contrario de una inflación es decir que se presente una deflación.)

Este plan está diseñado de forma tal que la deuda, intereses, cuotas y abono a capital se calculen en UVR, los pagos que debe realizar el deudor se efectúan en pesos liquidados al valor que tenga la UVR en el momento del pago.

Ejemplo 2:

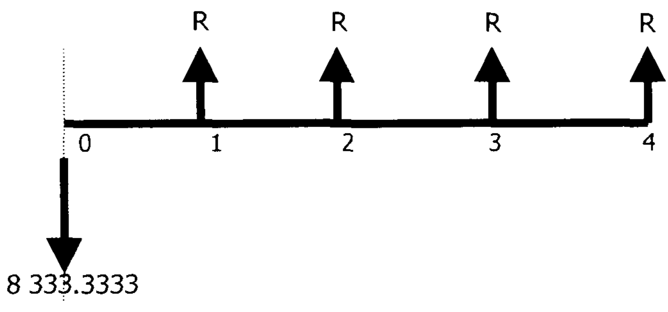
Supongamos que una deuda de $1 millón se va a cancelar en 4 cuotas trimestrales uniformes en UVR pero el valor de las cuotas serán pagadero en pesos. Asumir que el valor de un UVR el día del préstamo es de $120 y que la inflación durante el primer trimestre es del 3%. Para el segundo trimestre la inflación es del 2.5%, la del tercer trimestre es del 1.4% y la del cuarto trimestre es del 2%. Supongamos que la tasa de interés remuneratorio es del 3% trimestral. (Se entiende por interés remuneratorio el que se cobra por encima de la inflación, en este caso el 3% es adicional a la tasa de inflación.)

Elaborar una tabla de amortización en UVR que muestre también los resultados en pesos.

Solución:

La deuda en UVR viene a ser 1 000 000 ÷ 120 = 8 333.3333 (toda cifra en UVR debe mostrar como mínimo 4 decimales significativos)

Hacemos una gráfica de la situación en UVR donde R es la cuota periódica.



2 Existe un plan adicional para daciones en pago.

Al plantear una ecuación de valor con fecha focal en 0 se tiene:

$$83333333 = R\frac{(1+0.03)^{-4}-1}{0.03}$$ y al despejar R se tiene que R = UVR 2 241.8920

Con los datos anteriores procedemos a elaborar una tabla en UVR así:

La deuda inicial (en el período 0) es 8 333.3333

Primer período:

Intereses = saldo del período anterior por la tasa: 8 333.3333x 0.03 = 249.99999 que se aproxima a UVR 250
Amortización = pago menos intereses: 2 241.8920 – 250 = 1 991.8920
Nuevo saldo = saldo anterior menos amortización: 8 333.3333 – 1 991.8920 = 6 341.4413

Segundo período:

Intereses = deuda anterior por la tasa 6 341.4413 x 0.03 = 190.2432
Amortización = pago menos interés 2 241.8920 – 190.2432 = 2 051.6488
Nuevo saldo = saldo anterior menos amortización: 6 341.4413 – 2 051.6488 = 4 289.7925

Tercer período:

Intereses = saldo anterior por la tasa: 4 289.7925 x 0.03 = 128.6938
Amortización = pago menos intereses: 2 241.8920 – 128.6938 = 2 113.1983
Nuevo saldo = saldo anterior menos intereses: 4 289.7925 – 2 113.1983 = 2 176.5943
Intereses = saldo anterior por la tasa: 2 176.5943 x 0.03 = 65.2928
Amortización = pago menos intereses: 2 241.8920 – 65.2978 = 2 176.5942
Nuevo saldo = saldo anterior menos amortización: 2 176.5943 – 2 176.5942 = 0.0001

Los resultados anteriores se pueden presentar en la siguiente tabla:

Período	saldo	interés	pago	amortización
0	8 333.3333	0	0	0
1	6 341.4413	250.0000	2 241.8920	1 991.8920
2	4 289.7925	190.2432	2 241.8920	2 051.6488
3	2 176.5943	128.6938	2 241.8920	2 113.1983
4	0.0001	65.2928	2 241.8920	2 176.5942

Ahora elaboraremos la tabla incluyendo las columnas de saldo y pagos en pesos que después de todo son las que le interesan a un deudor.

Primero calcularemos los valores que tendrá la UVR teniendo en cuenta que las inflaciones de cada trimestre son: 3%, 2.5%, 1.4%, 2%.

Valor inicial de la UVR (es decir, en el momento de la compra) = \$120
Valor de la UVR al final del primer trimestre = 120.0000 x 1.030 = \$123.6000
Valor de la UVR al final del segundo trimestre = 123.6000 x 1.025 = \$126.6900
Valor de la UVR al final del tercer trimestre = 126.6900 x 1.014 = \$128.4637
Valor de la UVR al final del cuarto trimestre = 128.4637 x 1.020 = \$131.0329

En el período 0 se tendrá:

La duda inicial es \$1 000 000 y en UVR será;

1 000 000 ÷ 120 = 8 333.3333 (120 es el valor inicial de la UVR.)

Período uno:

La deuda en pesos se obtiene multiplicando la deuda en UVR por el valor de la UVR, esto es multiplicar las columnas (5) x (3) = (4) de la tabla de abajo

UVR 6 341.4413 x \$123.6000 = \$783,802.13
UVR 4 289.7925 x \$126.6900 = \$543 473.81
UVR 2 176.5942 x \$128.4637 = \$279 613.34
UVR 0.0001 x \$131.0329 = \$0.01

El valor del primer pago en pesos se obtiene multiplicando el pago en UVR por el valor que tenga la UVR en el momento del pago así:

Columna (8) por columna (3) = columna(7)

2 241.8920 x 123.6000 = \$277 097.85

2 241.8920 x 126.6900 = \$284 025.30

2 241.8920 x 128.4637 = \$288 001.74

2 241.8920 x 131.0329 = \$293 761.61

La tabla completa hecha por computadora la presentamos a continuación[3].

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
Período	Inflación	UVR valor	\$ deuda	UVR deuda	UVR interés	\$ pago	UVR pago	UVR amortiza
0		120.0000	1,000,000.00	8,333.3333				
1	3.0%	123.6000	783,802.14	6,341.4413	250.0000	277,097.86	2241.89204	1991.8920
2	2.5%	126.6900	543,473.81	4,289.7925	190.2432	284,025.30	2241.89204	2051.6488
3	1.4%	128.4637	279,613.26	2,176.5942	128.6938	288,001.66	2241.89204	2113.1983
4	2.0%	131.0329	–	–	65.2978	293,761.69	2241.89204	2176.5942

[3] Pequeñas diferencias se presentan con los cálculos anteriores debido a que la computadora trabaja con 10 decimales.

Ahora presentamos una tabla de amortización con las siguientes condiciones:

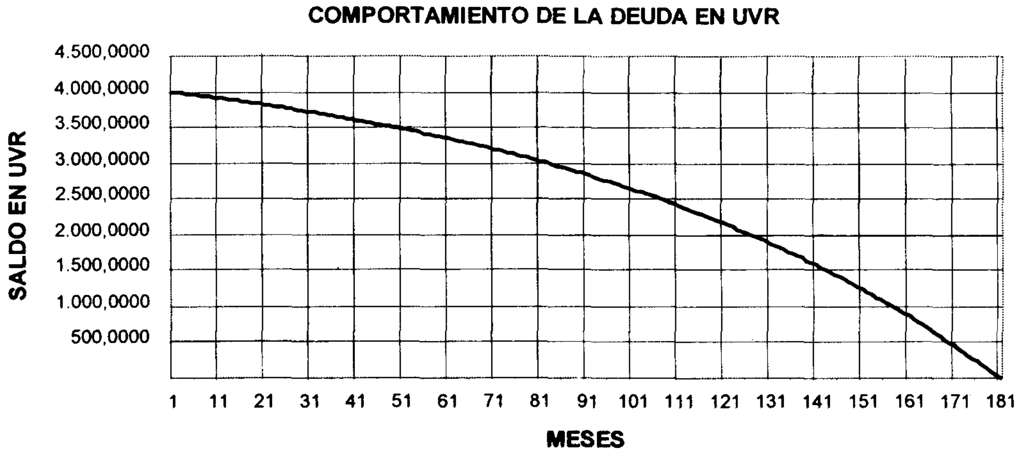
Deuda inicial en pesos $1´000 000 para ser cancelada en pagos mensuales durante 15 años (180 períodos)

Valor inicial de la UVR = $250, que se reajusta mensualmente de acuerdo a la inflación. Inflación 0.8% Tasa = 1% mensual.

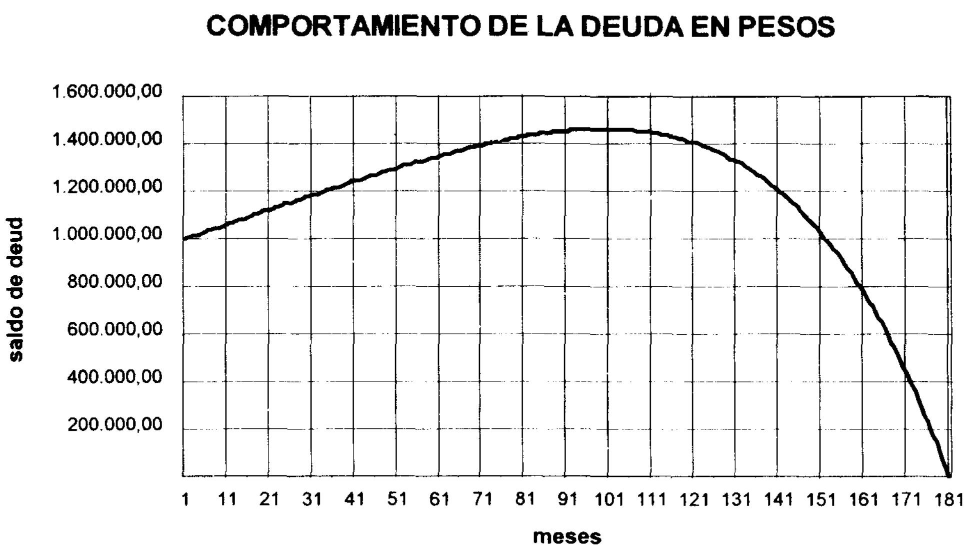
Con el fin de hacer comparaciones entre los distintos planes, estas condiciones no variarán en los otros planes.

SISTEMA 1 PERIODO	INFLACION	V/R UVR	$ DEUDA	UVR DEUDA	UVR INTERES	$ PAGO,	UVR PAGO	UVR AMORT	TASA
0		250,0000	1.000.000,00	4.000,0000					
1	0,80%	252,0000	1.005.982,31	3.991,9933	40,0000	12.097,69	48,0067	8,0067	1,00%
2	0,80%	254,0160	1.011.975,99	3.983,9065	39,9199	12.194,48	48,0067	8,0868	1,00%
3	0,80%	256,0481	1.017.980,48	3.975,7388	39,8391	12.292,03	48,0067	8,1677	1,00%
4	0,80%	258,0965	1.023.995,20	3.967,4895	39,7574	12.390,37	48,0067	8,2493	1,00%
5	0,80%	260,1613	1.030.019,55	3.959,1577	39,6749	12.489,49	48,0067	8,3318	1,00%
6	0,80%	262,2426	1.036.052,89	3.950,7425	39,5916	12.589,41	48,0067	8,4151	1,00%
7	0,80%	264,3405	1.042.094,61	3.942,2432	39,5074	12.690,12	48,0067	8,4993	1,00%
8	0,80%	266,4552	1.048.144,04	3.933,6589	39,4224	12.791,64	48,0067	8,5843	1,00%
9	0,80%	268,5869	1.054.200,50	3.924,9888	39,3366	12.893,98	48,0067	8,6701	1,00%
10	0,80%	270,7356	1.060.263,32	3.916,2320	39,2499	12.997,13	48,0067	8,7568	1,00%
11	0,80%	272,9015	1.066.331,78	3.907,3876	39,1623	13.101,10	48,0067	8,8444	1,00%
12	0,80%	275,0847	1.072.405,14	3.898,4547	39,0739	13.205,91	48,0067	8,9328	1,00%
24	0,80%	302,6863	1.145.374,37	3.784,0310	37,9410	14.530,98	48,0067	10,0658	1,00%
36	0,80%	333,0575	1.217.356,78	3.655,0954	36,6644	15.989,00	48,0067	11,3423	1,00%
48	0,80%	366,4760	1.286.260,27	3.509,8076	35,2259	17.593,31	48,0067	12,7808	1,00%
60	0,80%	403,2477	1.349.304,67	3.346,0936	33,6050	19.358,60	48,0067	14,4018	1,00%
72	0,80%	443,7091	1.402.838,02	3.161,6166	31,7784	21.301,02	48,0067	16,2283	1,00%
84	0,80%	488,2303	1.442.106,93	2.953,7434	29,7203	23.438,34	48,0067	18,2864	1,00%
96	0,80%	537,2187	1.460.969,67	2.719,5066	27,4011	25.790,11	48,0067	20,6056	1,00%
108	0,80%	591,1225	1.451.538,29	2.455,5626	24,7878	28.377,85	48,0067	23,2189	1,00%
120	0,80%	650,4349	1.403.732,30	2.158,1441	21,8431	31.225,25	48,0067	26,1636	1,00%
132	0,80%	715,6987	1.304.722,60	1.823,0053	18,5249	34.358,35	48,0067	29,4819	1,00%
144	0,80%	787,5110	1.138.238,99	1.445,3626	14,7858	37.805,82	48,0067	33,2209	1,00%
156	0,80%	866,5288	883.708,11	1.019,8254	10,5726	41.599,21	48,0067	37,4341	1,00%
168	0,80%	953,4752	515.181,13	540,3194	5,8250	45.773,22	48,0067	42,1817	1,00%
180	0,80%	1049,1457	(0,00)	(0,0000)	0,4753	50.366,04	48,0067	47,5314	1,00%

La siguiente gráfica nos muestra que la deuda en UVR va disminuyendo comienza con un valor de UVR 4.000 y empieza a disminuir paulatinamente hasta llegar al valor cero en el mes 180. En consecuencia en UVR no se presenta anatocismo.



La siguiente gráfica nos muestra la forma como la deuda va creciendo en pesos. Parte de un valor inicial de $1 000 000 llega a un máximo de $1 401 605.06 en el mes 98 y termina en $0 en el mes 180.



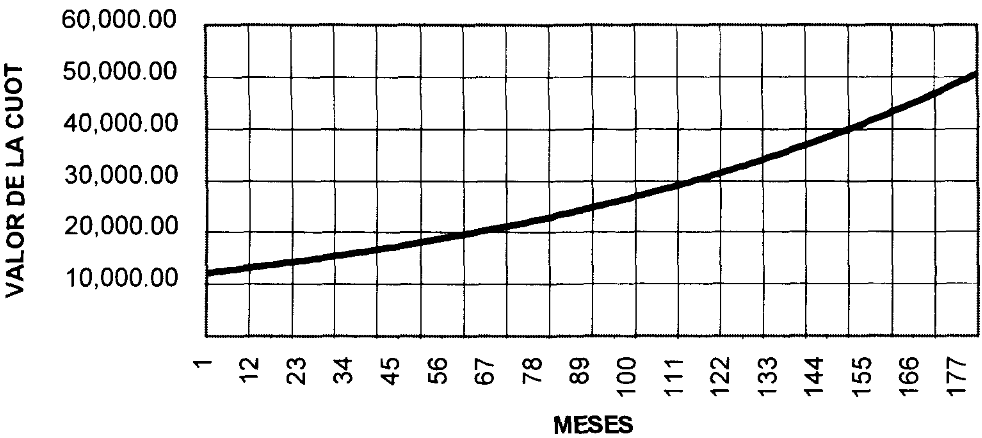
Debemos observar que el aumento de la deuda no es por causa de anatocismo, pues ya vimos, este plan en UVR no produce anatocismo, el aumento se debe a que al hacer el cambio de UVR a pesos hay que multiplicar el saldo en UVR por el valor que en ese momento tenga la UVR

En UVR el valor de la cuota permanece constante dado que el sistema es de cuota fija en UVR y su valor es de UVR 48.0067. Pero en pesos la cuota si va varía debido a que cada vez que se pague una cuota habrá que dar más pesos por la misma cantidad de UVR. (El UVR se va reajustando de acuerdo a la inflación).

El deudor comienza pagando $12.097,69 y termina pagando $ 50 366.04

El valor de la cuota en UVR no varía pero en pesos tiene un crecimiento que se muestra en la siguiente gráfica.

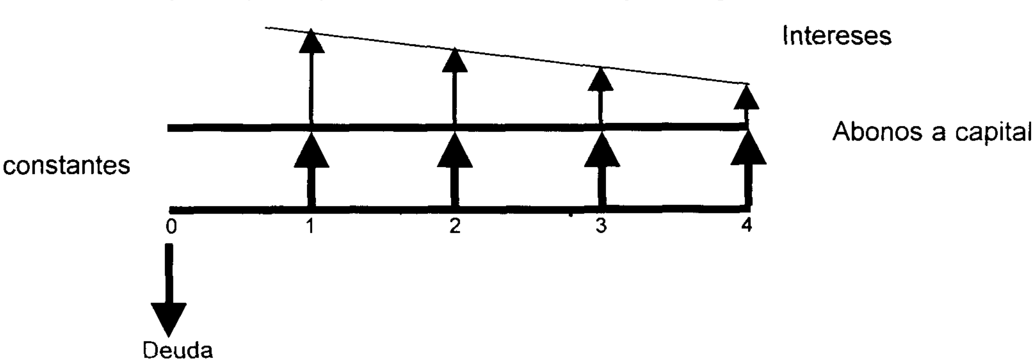
CRECIMIENTO DE LA CUOTA EN PESOS



SEGUNDO SISTEMA

PLAN DE AMORTIZACION CONSTANTE EN UVR

Este plan es de amortización constante pero con intereses vencidos, el deudor cancela la deuda haciendo abonos constantes en UVR pero los intereses vencidos son variables porque la tasa se aplica a una deuda que en cada período será menor. En este plan los intereses se liquidan por separado, de acuerdo a la siguiente gráfica.



Ejemplo 3:

Supongamos que una deuda de $1 millón se va a cancelar en 4 cuotas trimestrales mediante el sistema de abono constante a capital en UVR, pero el valor de las cuotas serán pagadero en pesos. Asumir que el valor de un UVR el día del préstamo es de $120 y que la inflación durante el primer trimestre es del 3%. Para el segundo trimestre la inflación es del 2.5%, la del tercer trimestre es del 1.4% y la del cuarto trimestre es del 2%. Supongamos que la tasa de interés remuneratorio es del 3% trimestral. (Para poder hacer comparaciones con el primer sistema es necesario dejar las mismas condiciones de tasa e inflación.)

Elaborar una tabla de amortización en UVR que, además, muestre los resultados en pesos.

Solución:

Primero calculamos la deuda en UVR, esto es: 1 000 000 ÷ 120 = UVR 8 333.3333

Como el abono a capital es constante, entonces dividimos la deuda entre el número de pagos así:

$$\frac{8333.3333}{4} = 2083.3333$$

Implica que deben efectuarse 4 abonos a capital de UVR 2 083.3333

El interés remuneratorio del primer período será: 8 333.3333 x 0,03 = 250

La cuota en UVR que deberá pagarse al final del primer período será:

$$2\,083.3333 + 250 = \text{UVR } 2\,3333.3333$$

El capital insoluto o saldo después de haberse efectuado el primer pago queda en:

$$8\,333.3333 - 2\,083.3333 = 6\,250$$

Los intereses para el segundo período quedarán en:

$$6250 \times 0.03 = \text{UVR } 187.5$$

El pago total del segundo período será el abono a capital más los intereses así:

$$2\,083.3333 + 187.5 = \text{UVR } 2\,270.8333$$

El saldo de la deuda después de efectuado el segundo pago será el saldo anterior menos el abono a capital, esto es:

$$6250 - 2\,083.3333 = 4\,166.6667$$

Los intereses para el tercer período serán el saldo anterior (saldo del segundo período) por la tasa:

$$4\,166.6667 \times 0.03 = \text{UVR } 125$$

El saldo del tercer período será igual al saldo del segundo período menos el abono a capital así:

$$4\,166.6667 - 2\,083.3333 = 2\,083.3367$$

El pago total de la tercera cuota vendrá a ser el abono a capital más intereses, esto es:

$$2\,03.33.33 + 125 = \text{UVR } 2\,208.3333$$

Los intereses del cuarto período se calculan aplicando la tasa al saldo del tercer período, esto es:

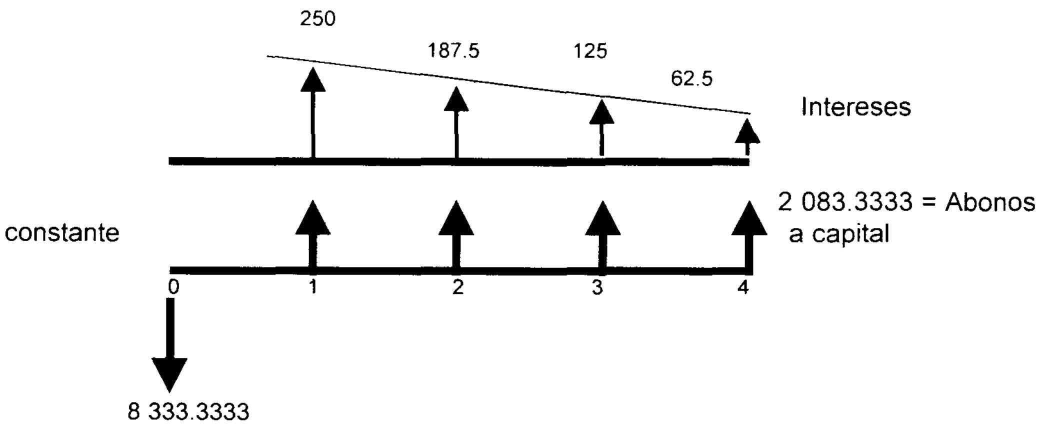
$$2\,083.3333 \times 0.03 = 62.5$$

El valor total de la cuota es:

$$2\,083.3333 + 62.5 = \text{UVR } 2\,145.8333$$

Finalmente el saldo del cuarto período será el saldo del tercer período menos el abono a capital del cuarto período, esto es:

$$2\,083.3333 - 2\,083.3333 = 0$$



Todos los cálculos anteriores, que corresponden únicamente a UVR, se pueden presentar en la siguiente tabla:

Período	saldo	intereses	pago	abono a capital
0	8 333.3333	0	0	0
1	6 250.0000	250.0000	2 333.3333	2 083.3333
2	4 166.6667	187.5000	2 270.8333	2 083.3333
3	2 083.3334	125.0000	2 208.3333	2 083.3333
4	0	62.5000	2 145.8333	2 083.3333

Este plan está diseñado de forma tal que la deuda, intereses, cuotas y abono a capital se calculen en UVR, los pagos que debe realizar el deudor se efectúan en pesos liquidados al valor que tenga la UVR en el momento del pago, por tanto procederemos a efectuar los cálculos correspondientes para elaborar la tabla indicando el saldo de la deuda y la cuota en pesos y en UVR, que son las que más le interesan al deudor, los intereses y la amortización o abono a capital las mostraremos solo en UVR.

Nota: toda cifra en UVR debe expresarse como mínimo con 4 decimales significativos.

En la columna (1) n representa el período.

La columna (3) se obtiene escribiendo 120.0000 en el período 0 (esto es el valor inicial), de ahí en adelante los demás valores se obtienen multiplicando el valor anterior por (1+la inflación del mes.)

Para el período 1 el valor de la UVR será: 120.0000 x (1+0.03) = $123.6000
Para el período 2 el valor de la UVR será: 123.6000 x (1+0.025) = $126.6900
Para el período 3 el valor de la UVR será: 126.6900 x (1+0.014) = $128.4637
Para el período 2 el valor de la UVR será: 128.4637 x (1+0.02) = $131.0329

La columna (4) representa el saldo en pesos que se obtiene multiplicando cada valor de la columna (5) por el correspondiente valor de la columna (3) así:

Período 0 8 333.3333 x 120.0000 = 1 000 000.00
Período 1 6 250.0000 x 126.6900 = 791 812.50
Período 2 4 166.6667 x 128.4637 = 535 265.42
Período 3 2 083.3334 x 131.0329 = 272 985.22

En forma similar la columna (7) se obtiene multiplicando cada valor de la columna (8) por el correspondiente valor de la columna (3)

El lector podrá efectuar las correspondientes operaciones y verificar los resultados de la columna (7)

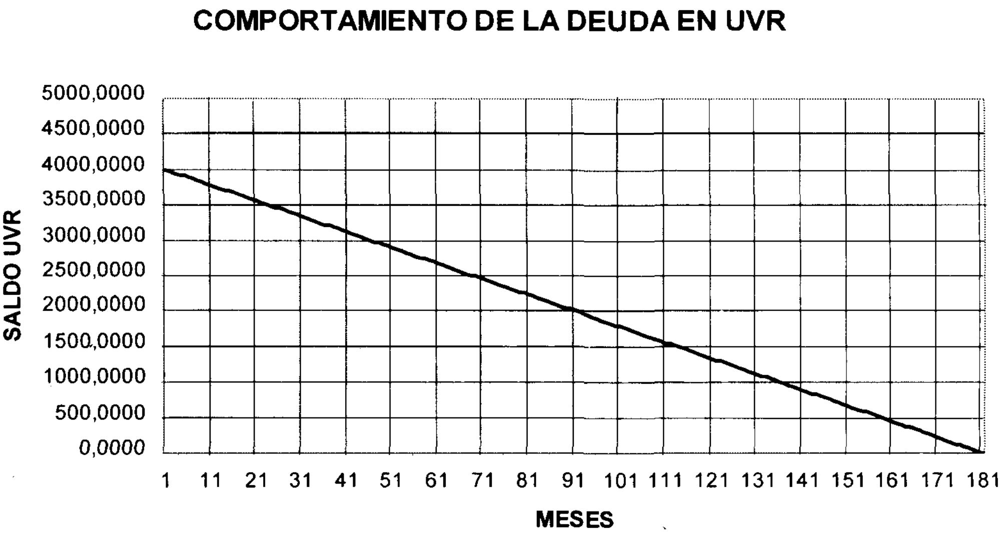
(1) Perío-do	(2) inflación por período	(3) v/r UVR	(4) $ saldo	(5) UVR saldo	(6) UVR interés	(7) $ pago	(8) UVR pago	(9) UVR amortización
0		120,0000	1.000.000,00	8 333.3333				
1	3,0%	123.6000	772 500.00	6 250.0000	250.0000	288 400.00	2 333.3333	2 083.3333
2	2,5%	126.6900	527 875.00	4 166.6667	187.5000	287 691.87	2 270.8333	2 083.3333
3	1.4%	128.4637	267 632.72	2 083.3334	125.0000	283 690.66	2 208.3333	2 083.3333
4	2.0%	131.0329	0,00	0,0000	62.5000	281 174.76	2 145.8333	2 083.3333

Presentamos a continuación una tabla realizada por computadora donde se muestra la amortización de una deuda de $1 millón la cual va a ser cancelada en pagos mensuales durante 15 años, mediante el sistema de abono constante a capital y una tasa vencida del 1% mensual. Valor inicial de la UVR $250 que se reajusta mensualmente de acuerdo a la inflación del 0.8% mensual.

SISTEMA 1 PERIODO	INFLACION	V/R UVR	$ DEUDA	UVR DEUDA	UVR INTERES	$ PAGO	UVR PAGO	UVR AMORT	TASA
0		250,0000	1.000.000,00	4000,0000					
1	0,80%	252,0000	1.002.400,00	3977,7778	40,0000	15680,00	62,2222	22,2222	1,00%
2	0,80%	254,0160	1.004.774,40	3955,5556	39,7778	15748,99	62,0000	22,2222	1,00%
3	0,80%	256,0481	1.007.122,64	3933,3333	39,5556	15818,08	61,7778	22,2222	1,00%
4	0,80%	258,0965	1.009.444,14	3911,1111	39,3333	15887,27	61,5556	22,2222	1,00%
5	0,80%	260,1613	1.011.738,33	3888,8889	39,1111	15956,56	61,3333	22,2222	1,00%
6	0,80%	262,2426	1.014.004,62	3866,6667	38,8889	16025,94	61,1111	22,2222	1,00%
7	0,80%	264,3405	1.016.242,43	3844,4444	38,6667	16095,40	60,8889	22,2222	1,00%
8	0,80%	266,4552	1.018.451,14	3822,2222	38,4444	16164,95	60,6667	22,2222	1,00%
9	0,80%	268,5869	1.020.630,15	3800,0000	38,2222	16234,58	60,4444	22,2222	1,00%
10	0,80%	270,7356	1.022.778,85	3777,7778	38,0000	16304,30	60,2222	22,2222	1,00%
11	0,80%	272,9015	1.024.896,60	3755,5556	37,7778	16374,09	60,0000	22,2222	1,00%
12	0,80%	275,0847	1.026.982,78	3733,3333	37,5556	16443,95	59,7778	22,2222	1,00%
24	0,80%	302,6863	1.049.312,54	3466,6667	34,8889	17286,75	57,1111	22,2222	1,00%
36	0,80%	333,0575	1.065.783,87	3200,0000	32,2222	18133,13	54,4444	22,2222	1,00%
48	0,80%	366,4760	1.074.996,29	2933,3333	29,5556	18975,31	51,7778	22,2222	1,00%
60	0,80%	403,2477	1.075.327,29	2666,6667	26,8889	19803,94	49,1111	22,2222	1,00%
72	0,80%	443,7091	1.064.901,80	2400,0000	24,2222	20607,82	46,4444	22,2222	1,00%
84	0,80%	488,2303	1.041.557,92	2133,3333	21,5556	21373,64	43,7778	22,2222	1,00%
96	0,80%	537,2187	1.002.808,17	1866,6667	18,8889	22085,66	41,1111	22,2222	1,00%
108	0,80%	591,1225	945.795,97	1600,0000	16,2222	22725,38	38,4444	22,2222	1,00%
120	0,80%	650,4349	867.246,59	1333,3333	13,5556	23271,12	35,7778	22,2222	1,00%
132	0,80%	715,6987	763.411,98	1066,6667	10,8889	23697,58	33,1111	22,2222	1,00%
144	0,80%	787,5110	630.008,81	800,0000	8,2222	23975,34	30,4444	22,2222	1,00%
156	0,80%	866,5288	462.148,71	533,3333	5,5556	24070,25	27,7778	22,2222	1,00%
168	0,80%	953,4752	254.260,05	266,6667	2,8889	23942,82	25,1111	22,2222	1,00%
180	0,80%	1049,1457	0,00	0,0000	0,2222	23547,49	22,4444	22,2222	1,00%

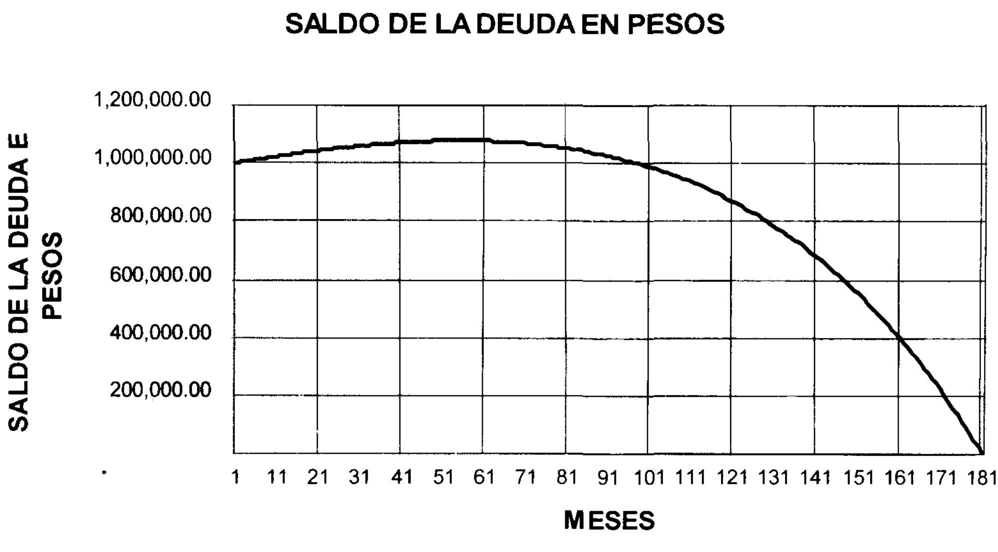
En la siguiente gráfica se puede apreciar que el saldo de la deuda en UVR decrece en línea recta, esto es obvio puesto que la amortización es constante, basta dividir la deuda entre el número de períodos.

Desde el primer mes (primer período) la deuda empieza a disminuir y período a período lo hace en forma constante, con lo cual se elimina la posibilidad de anatocismo.



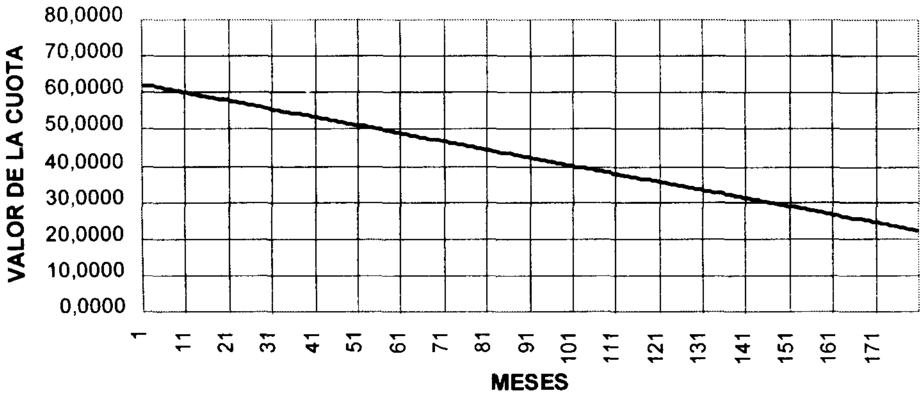
En la siguiente gráfica se observa que, a pesar de ir la deuda en descenso en UVR, en pesos esta aumenta, no tanto como en el PRIMER SISTEMA, en esta oportunidad la deuda máxima llega al valor de $1 076 382.82 en el período 54 y en el período 55.

Insistimos en que aquí no hay anatocismo, lo que ocurre es que, en el período 54, al cambiar la deuda de UVR 2 800 a pesos hay que multiplicarla por el correspondiente valor de la UVR que en ese momento es de $384.4225



En la siguiente gráfica se muestra el decrecimiento de la cuota en UVR (esta cuota incluye abono a capital e intereses.) Su valor es decreciente porque aunque el abono a capital es constante los intereses son cada vez menores dado que se aplican a una deuda cada vez menor.

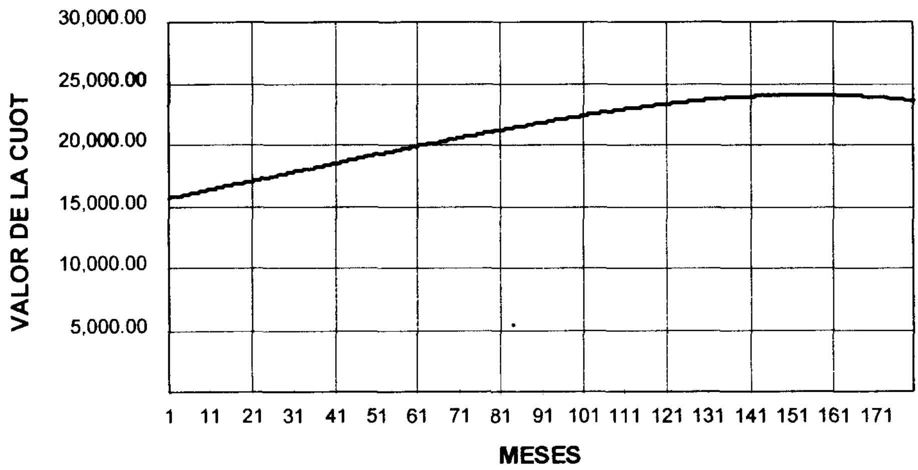
VARIACION DE LA CUOTA EN UVR



La siguiente gráfica nos muestra que a pesar de estar disminuyendo la cuota en UVR, en pesos va aumentando. La cuota en pesos empieza con un valor de $15 680 y termina en el período 180 con un valor de $23 547.49. Sin embargo, su valor máximo es inferior al que se llega a obtener en el primer sistema debido a que la cuota en UVR es descendente.

Como caso curioso puede observarse que el valor de la cuota en pesos aumenta hasta el período 156 llegando a un valor de $24 070.25 y después decrece hasta llagar a $23 547.49

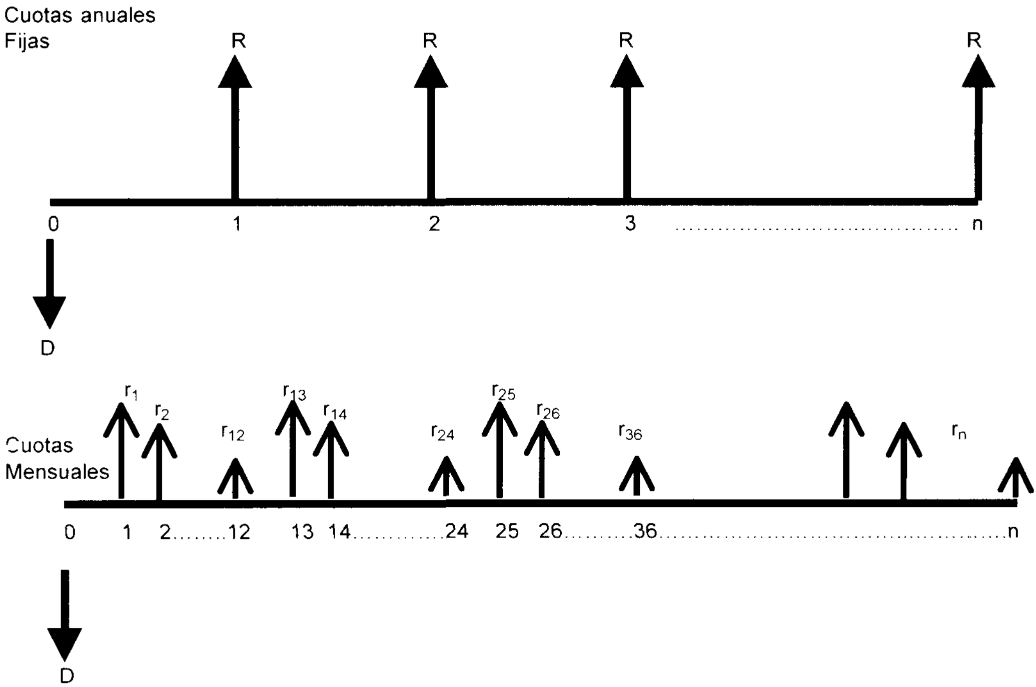
CRECIMIENTO DE LA CUOTA EN PESOS



TERCER SISTEMA

PLAN DE AMORTIZACION CON CUOTA CICLICAMENTE DECRECIENTE EN UVR

Este sistema consiste en calcular una cuota R, fija anual en UVR y dividirla en 12 cuotas mensuales de menor valor, del r_1 al r_{12} las cuales deben ser decrecientes en un porcentaje igual a la inflación y que denominaremos intercuotas. De acuerdo con lo anterior las dos gráficas que requiere este sistema en UVR serán:



Gráfica 1

Ejemplo 4:

Para poner un ejemplo numérico vamos a tomar una deuda de $1 000 000 que va a ser cancelada en 2 años, supondremos que los pagos son cada 4 meses (significa que habrá 3 pagos por año), utilizaremos una tasa fija del 3.4% para cada 4 meses.

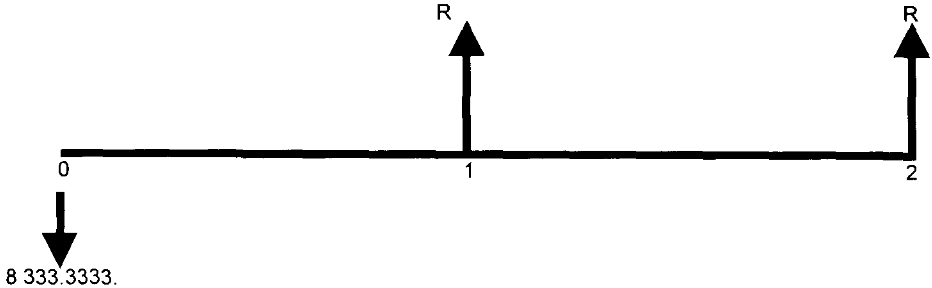
Durante el primer año asumiremos una inflación uniforme del 10% efectivo anual y para el segundo año asumiremos una inflación también uniforme del 12% efectivo anual

El valor de la UVR inicial será de $120 y se reajustará cada 4 meses de acuerdo a la inflación.

El valor de la deuda en UVR será 1 000 000 ÷ 120= 8 333.3333.

Por equivalencia de tasas se obtiene que el 3.4% para cada 4 meses es equivalente al 10.5507304% efectivo anual. Esta última tasa será la que utilizaremos para el cálculo de la cuota anual.

La gráfica de las cuotas anuales en UVR será:



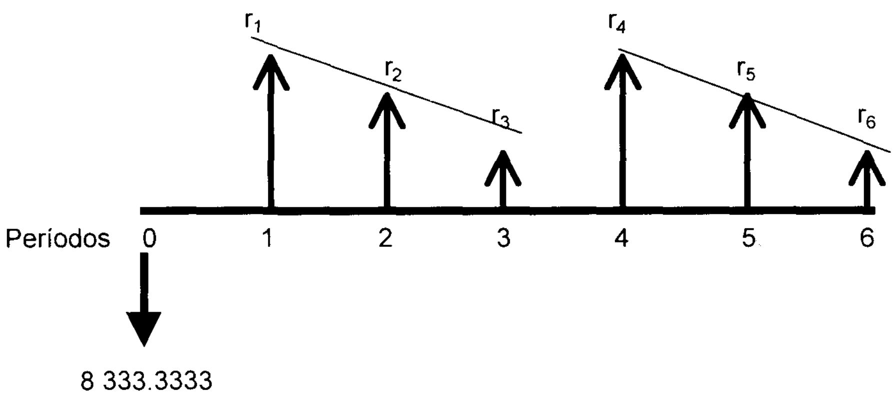
Gráfica 2

De esta gráfica se obtiene que el valor de cada cuota anual será:

$$8333.3333 = R\,\frac{1-(1+0.105507304)^{-2}}{0.105507304} \text{ de donde se obtiene que}$$

R = UVR 4 837.1019

Pero el deudor va a pagar al final de cada 4 meses una cuotas de menor valor, de forma tal que sean decrecientes de acuerdo al índice de inflación, pero que su resultado al final de cada año sea equivalente a un solo pago en UVR de 4 837.1019



Gráfica 3

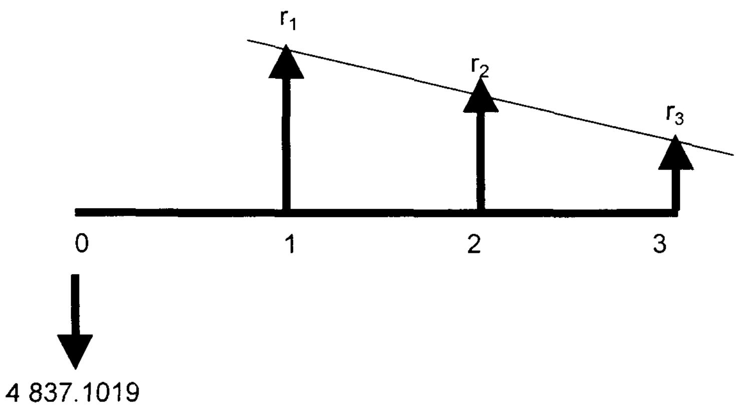
La duración de un ciclo es de un año y está formado por 3 cuotas decrecientes geométricamente de acuerdo al índice de inflación que para el primer año es del 10% anual

Por equivalencia de tasa podemos calcular la inflación de cada 4 meses así:

$$(1+0.1)^1 = (1+i)^3$$

Al despejar se tiene que i = 3.228011546% período 4 meses. Esta tasa es la que utilizaremos como factor de decrecimiento para calcular el gradiente geométrico.

Cada ciclo está formado por 3 intercuotas que en valor final equivalen a 4 837.1019 y su gráfica será:



Gráfica 4

Por otra parte la tasa de interés para el período de 4 meses es del 3.4% (según se dijo en el enunciado del ejemplo) y teniendo en cuenta que la inflación de cada 4 meses es 3.228011546%

Procedemos a aplicar la fórmula del *valor final del gradiente geométrico* para calcular el valor de la primera intercuota.

$$4837.1019 = \frac{r_1\left[(1-0.03228011546)^3-(1+0.034)^3\right]}{-0.032280115466-0.034}$$

Al despejar se tiene que: r_1 = UVR 1 609.0098

La siguiente intercuota en UVR decrece en 3.228011546%, por tanto, r_2 será:

$$r_2 = 1609.0098\,(1 - 0.3228011546) = 1\,557.0707$$

La tercera intercuota en UVR vuelve a decrecer y se obtiene:

$$r_3 = 1\,557.0707\,(1-0.3228011546) = 1\,506.8083$$

Para el cálculo de las intercuotas r_4, r_5, r_6 se utiliza el mismo procedimiento que se utilizó para calcular las intercuotas r_1, r_2, r_3 pero teniendo en cuenta que la inflación de este segundo año es del 12% efectivo anual equivalente al:

$$(1+0.12)^1 = (1+i)^3$$

Despejando i = 3.849882037% para un período de 4 meses.

La primera intercuota del segundo año se puede calcular así:

$$4837.1019 = \frac{r_4\left[(1-0.03849882\,037)^3 - (1+0.034)^3\right]}{-0.03849882\,037 - 0.034}$$

Despejando se tiene que r_4 = UVR 1618.9333.
La intercuota r_5 = 1618.9333 (1 – 0.3849882037) = 1 556.6063
La intercuota r_6 = 1 556.6063(1 – 0.3849882037) = 1506.8083

Ahora estamos en condiciones de elaborar la tabla puesto que ya conocemos el valor de cada una de las intercuotas.

En el interperíodo 0 el capital insoluto o saldo de deuda será igual al préstamo:

$$1\,000\,000 \div 120 = 8\,333.3333$$

Primer interperíodo

Intereses igual a la deuda anterior por la tasa: 8 333.3333 x 0.034 = 283.3333
Amortización igual a pago menos intereses: 1 609.0098 – 283.3333 = 1 325.6765
Saldo igual al saldo anterior menos amortización: 8 333.3333 – 1 325.6765 = 7 007.6568

Segundo interperíodo

Intereses igual a la deuda anterior por la tasa 7 007.6568 x 0,034 = 238.2603
Amortización igual a pago menos intereses: 1 557.0707 – 238.2603 = 1 318.8104
Saldo igual al saldo anterior menos amortización: 7 007.6568 – 1 318.8104 = 5 688.8464

Tercer interperíodo

Intereses igual a la deuda anterior por la tasa: 5 688.8464 x 0.34 = 193.4208
Amortización igual a pago menos intereses: 1 506.8083 – 193.4208= 1 313.3875
Saldo igual al saldo anterior menos amortización: 5 688.8464 – 1 313.3875 = 4 375.45589

El resto de la tabla se realiza con el mismo procedimiento.

El procedimiento se repite con las intercuotas r_5, r_6, r_7

Presentamos la tabla completa:

Tabla en UVR

Inter Per	saldo	intereses	pago	amortización
0	8 333.3333			
1	7 007.6568	283.3333	1 609.0098	1 325.6765
2	5 688.8486	238.2603	1 557.0707	1 318.8104
3	4 375.4589	193.4208	1 506.8083	1 313.3875
4	2 905.2912	148.7656	1 618.9333	1 470.1677
5	1 447.4648	98.7799	1 556.6063	1 457.8264
6	0.0001	49.2138	1 496.6788	1 447.4649

Para elaborar la tabla en pesos es necesario calcular el valor de la UVR para cada 4 meses:

Teniendo en cuenta que la inflación durante el primer año es del 10% efectivo anual equivalente al 3.228011546% para un período de cada 4 meses y que la inflación en el segundo año es del 12% efectivo anual equivalente al 3.849882037% para un período de cada 4 meses se tiene:

Valor de la UVR en el interperíodo 0 es $120.0000
Valor de la UVR en el interperíodo 1 es 120.0000 x (1 + 0.03228011546) = 123.8736
Valor de la UVR en el interperíodo 2 es 123.8736 x (1 + 0.03228011546) = 127.8723
Valor de la UVR en el interperíodo 3 es 127.8723 x (1 + 0.03228011546) = 132.0000
Valor de la UVR en el interperíodo 4 es 132.0000 x (1 +0. 03849882037) = 137.0818
Valor de la UVR en el interperíodo 5 es 138.0818 x (1 +0. 03849882037) = 142.3593
Valor de la UVR en el interperíodo 6 es 142.3593 x (1 +0. 03849882037) = 147.8400

Ahora procedemos a elaborar la tabla en UVR pero las columnas de pago y saldo de deuda además de estar en UVR las pondremos en pesos, porque al deudor en resumidas cuentas es lo que le interesa dado que él gana pesos y gasta pesos.

La columna (3) se obtiene multiplicando los valores de la columna (4) por los correspondientes valores de la columna (2)

La columna (7) se obtiene multiplicando los valores de la columna (6) por los correspondientes valores de la columna (2)

,(1) amortiza PER	,(2) V/R tasa UVR	,(3) saldo UVR	,(4) saldo $	,(5) UVR	,(6) interés UVR	,(7) Pago $	,(8) UVR	,(9) PAGO
0	120.0000	8,333.3333	1,000,000					3.40%
1	123.8736	7,007.6569	868,064	283.3333	1,609.0097	199,313.85	1,325.6764	3.40%
2	127.8723	5,688.8465	727,446	238.2603	1,557.0707	199,106.17	1,318.8104	3.40%
3	132.0000	4,375.4590	577,561	193.4208	1,506.8083	198,898.70	1,313.3875	3.40%
4	137.0818	2,905.2913	398,263	148.7656	1,618.9333	221,926.36	1,470.1677	3.40%
5	142.3593	1,447.4649	206,060	98.7799	1,556.6063	221,597.43	1,457.8264	3.40%
6	147.8400-	0.0000	0	49.2138	1,496.6788	221,268.99	1,44~.4650	3.40%

Ahora elaboramos una tabla para amortizar la suma de $1 millón en pagos mensuales con las siguientes características:

a) Plazo 15 años

b) Sistema: cuotas fijas anuales que se pagarán en cuotas mensuales las cuales serán decrecientes de acuerdo al índice de inflación.

c) Tasa 1% mensual

d) Inflación constante del 0.8% mensual.

e) Valor inicial de 1 UVR = $250

Calculamos la tasa anual equivalente al 0.8% mensual.

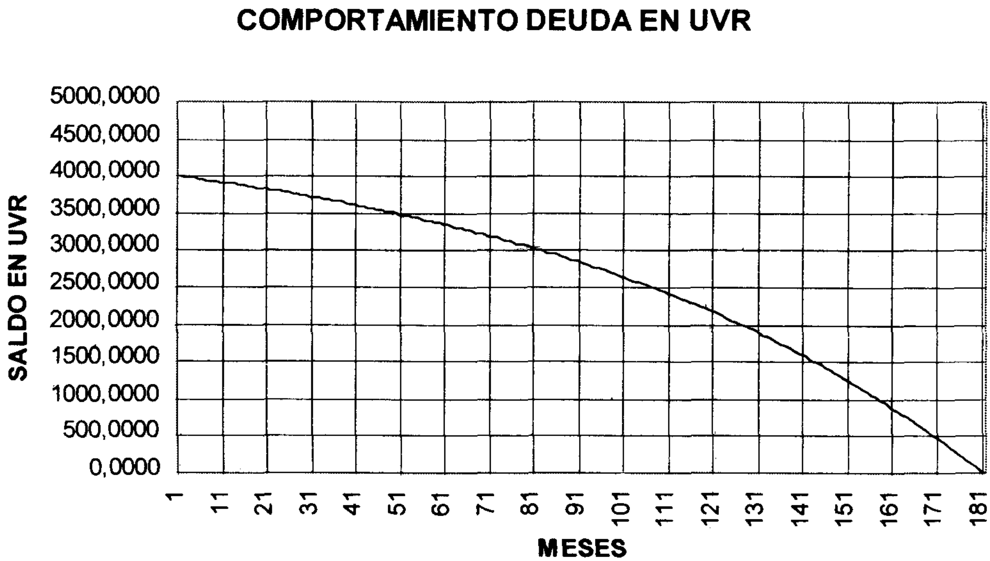
$$(1 + 0.008)^{12} = (1 + i)^{1}$$

Al despejar se tiene que i = 10.0338669372% mensual

Al observar la tabla se puede apreciar que el valor del pago en UVR dentro de cada año varía entre 50.1081 y 45.8708 y que esta variación se repite cada año, pero en pesos el valor del pago es diferente puesto que el valor de la UVR cambia. Este comportamiento se refleja en la gráfica correspondiente al valor del pago en UVR.

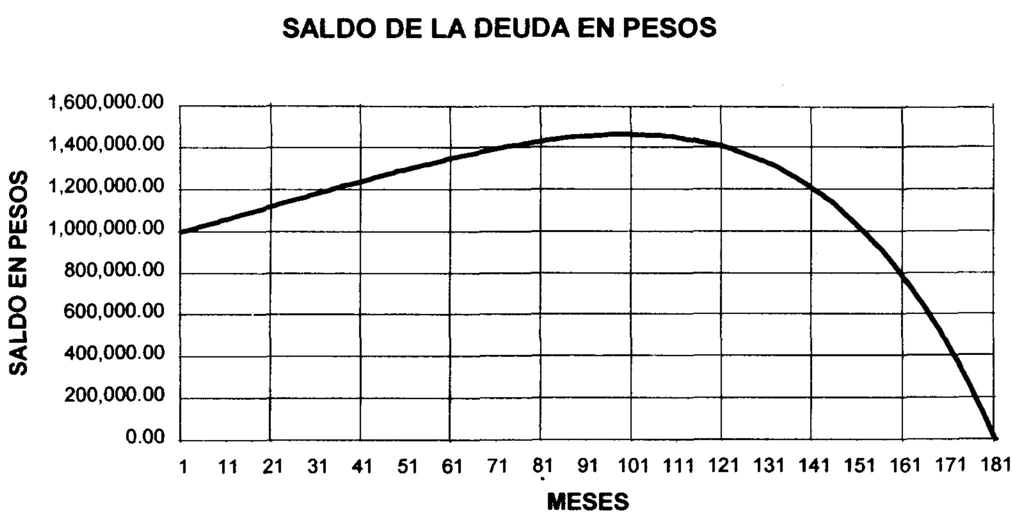
Período	inflación por mes	$ v/r UVR	$ saldo	UVR saldo	UVR interés	$ pago	UVR pago	UVR amortización	tasa período
0		250,0000	1.000.000,00	4000,0000					
1	0,8%	252,0000	1.005.452,77	3989,8919	40,0000	12.627,23	50,1081	10,1081	1,00%
2	0,8%	254,0160	1.011.004,93	3980,0837	39,8989	12.626,42	49,7072	9,8083	1,00%
3	0,8%	256,0481	1.016.658,29	3970,5750	39,8008	12.625,61	49,3095	9,5087	1,00%
4	0,8%	258,0965	1.022.414,66	3961,3657	39,7057	12.624,81	48,9151	9,2093	1,00%
5	0,8%	260,1613	1.028.275,92	3952,4556	39,6137	12.624,00	48,5237	8,9101	1,00%
6	0,8%	262,2426	1.034.243,96	3943,8446	39,5246	12.623,19	48,1356	8,6110	1,00%
7	0,8%	264,3405	1.040.320,71	3935,5326	39,4384	12.622,38	47,7505	8,3120	1,00%
8	0,8%	266,4552	1.046.508,13	3927,5194	39,3553	12.621,58	47,3685	8,0131	1,00%
9	0,8%	268,5869	1.052.808,23	3919,8051	39,2752	12.620,77	46,9895	7,7143	1,00%
10	0,8%	270,7356	1.059.223,04	3912,3895	39,1981	12.619,96	46,6136	7,4155	1,00%
11	0,8%	272,9015	1.065.754,64	3905,2728	39,1239	12.619,15	46,2407	7,1168	1,00%
12	0,8%	275,0847	1.072.405,14	3898,4547	39,0527	12.618,34	45,8708	6,8180	1,00%
13	0,8%	277,2854	1.077.900,00	3887,3312	38,9845	13.894,23	50,1081	11,1235	1,00%
14	0,8%	279,5036	1.083.495,09	3876,4973	38,8733	13.893,34	49,7072	10,8339	1,00%
15	0,8%	281,7397	1.089.192,23	3865,9528	38,7650	13.892,45	49,3095	10,5446	1,00%
16	0,8%	283,9936	1.094.993,26	3855,6972	38,6595	13.891,56	48,9151	10,2555	1,00%
17	0,8%	286,2655	1.100.900,06	3845,7305	38,5570	13.890,67	48,5237	9,9668	1,00%
18	0,8%	288,5557	1.106.914,55	3836,0522	38,4573	13.889,79	48,1356	9,6782	1,00%
19	0,8%	290,8641	1.113.038,67	3826,6623	38,3605	13.888,90	47,7505	9,3899	1,00%
20	0,8%	293,1910	1.119.274,40	3817,5604	38,2666	13.888,01	47,3685	9,1018	1,00%
21	0,8%	295,5365	1.125.623,76	3808,7465	38,1756	13.887,12	46,9895	8,8139	1,00%
22	0,8%	297,9008	1.132.088,81	3800,2204	38,0875	13.886,23	46,6136	8,5261	1,00%
23	0,8%	300,2840	1.138.671,64	3791,9819	38,0022	13.885,34	46,2407	8,2385	1,00%
24	0,8%	302,6863	1.145.374,37	3784,0310	37,9198	13.884,45	45,8708	7,9509	1,00%
25	0,8%	305,1078	1.150.794,38	3771,7632	37,8403	15.288,36	50,1081	12,2677	1,00%
36	0,8%	333,0575	1.217.356,78	3655,0954	36,6432	15.277,60	45,8708	9,2275	1,00%
37	0,8%	335,7219	1.222.544,22	3641,5383	36,5510	16.822,37	50,1081	13,5571	1,00%
48	0,8%	366,4760	1.286.260,27	3509,8076	35,2047	16.810,53	45,8708	10,6660	1,00%
60	0,8%	403,2477	1.349.304,67	3346,0936	33,5838	18.497,28	45,8708	12,2870	1,00%
72	0,8%	443,7091	1.402.838,02	3161,6166	31,7573	20.353,27	45,8708	14,1135	1,00%
84	0,8%	488,2303	1.442.106,93	2953,7434	29,6991	22.395,50	45,8708	16,1716	1,00%
96	0,8%	537,2187	1.460.969,67	2719,5066	27,3800	24.642,63	45,8708	18,4908	1,00%
108	0,8%	591,1225	1.451.538,29	2455,5626	24,7667	27.115,24	45,8708	21,1041	1,00%
120	0,8%	650,4349	1.403.732,30	2158,1441	21,8219	29.835,95	45,8708	24,0488	1,00%
132	0,8%	715,6987	1.304.722,60	1823,0053	18,5037	32.829,65	45,8708	27,3670	1,00%
144	0,8%	787,5110	1.138.238,99	1445,3626	14,7647	36.123,73	45,8708	31,1061	1,00%
156	0,8%	866,5288	883.708,11	1019,8254	10,5514	39.748,34	45,8708	35,3193	1,00%
168	0,8%	953,4752	515.181,13	540,3194	5,8039	43.736,64	45,8708	40,0669	1,00%
180	0,8%	1049,1457	0,00	0,0000	0,4542	48.125,11	45,8708	45,4166	1,00%

El siguiente cuadro nos muestra el saldo de la deuda en UVR a través del tiempo. Puede observarse que la deuda empieza con un valor de UVR 4 000 y desde el primer momento empieza a bajar hasta llegar a cero en el período 180. Por lo anterior se deduce que no existe anatocismo en UVR



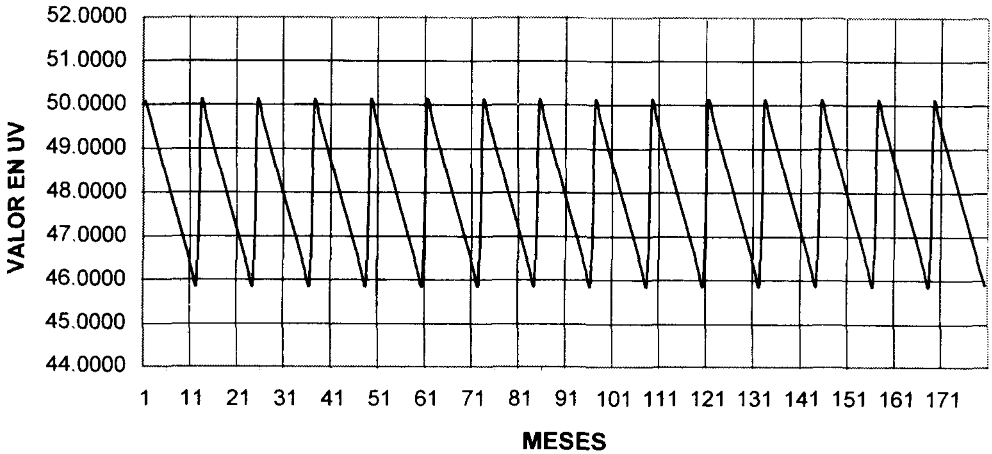
El siguiente cuadro nos muestra que a pesar de estar disminuyendo la deuda en UVR en pesos se presenta un aumento pero esto no es debido a capitalización de intereses sino a la conversión del saldo de la deuda de UVR a pesos.

Puede observarse que la deuda inicial es de $1 000 000, llega a un máximo de $1 460 969.67 en el mes 96 y finaliza en $0 en el mes 180



En el siguiente cuadro se muestra que el comportamiento de la cuota en UVR es parecido a un serrucho puesto que cada año siempre empieza con el mismo valor pero a lo largo del año el valor de la cuota disminuye de acuerdo al índice de inflación, volviéndose a repetir el ciclo sucesivamente.

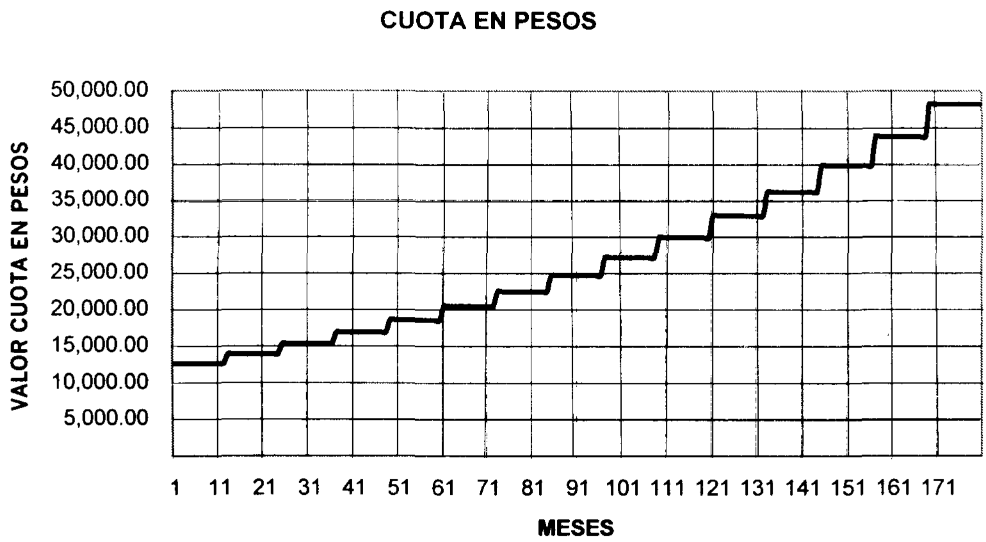
CUOTA EN UVR



En el siguiente cuadro se observa que la cuota en pesos muestra un escalonamiento siendo aproximadamente estable dentro de cada año, para el primer año empieza en $12 627.23 y al final del mismo año está en $12 618.34, es decir una variación de $8.89en el segundo año empieza en $13 894.23 y termina en $13 884.45 con una variación de $9.78 y para el último año empieza en $48 159.01 y termina en $48 125.11 con una variación de $33.90.

Observa que las variaciones son muy pequeñas aunque a medida que pasan los años son cada ves más grandes, sin embargo podríamos considerar que la cuota mensual dentro de cada año viene a ser casi constante.

Curiosamente la cuota en pesos tiene un comportamiento aproximado al de un escalonamiento geométrico, lo cual puede apreciarse en la siguiente gráfica.



COMPARACIONES ENTRE LOS SISTEMAS DE AMORTIZACION EN UVR

Los sistemas de amortización que hemos analizado son:

Sistema 1 es el plan de amortización con cuota fija en UVR.

Sistema 2 es el plan de amortización constante en UVR

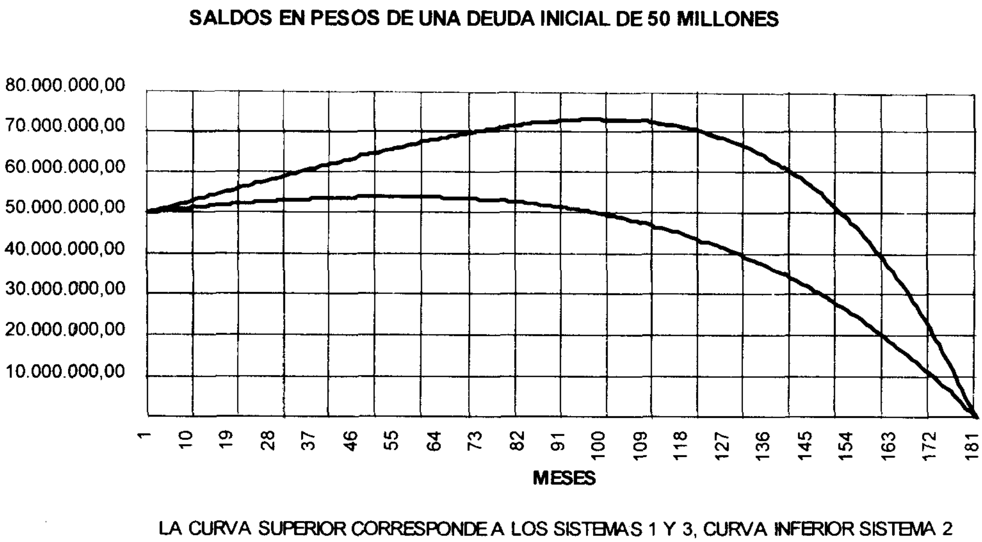
Sistema 3 es el plan de amortización cuota fija cada año en UVR y decreciente mensualmente en.

Presentamos a continuación una tabla que nos muestra la comparación de los saldos en pesos y de cuotas en pesos. Obsérvese que el valor de los saldos de los sistemas 1 y 3 son aproximadamente iguales mientras que el del sistema 2 es bien diferente.

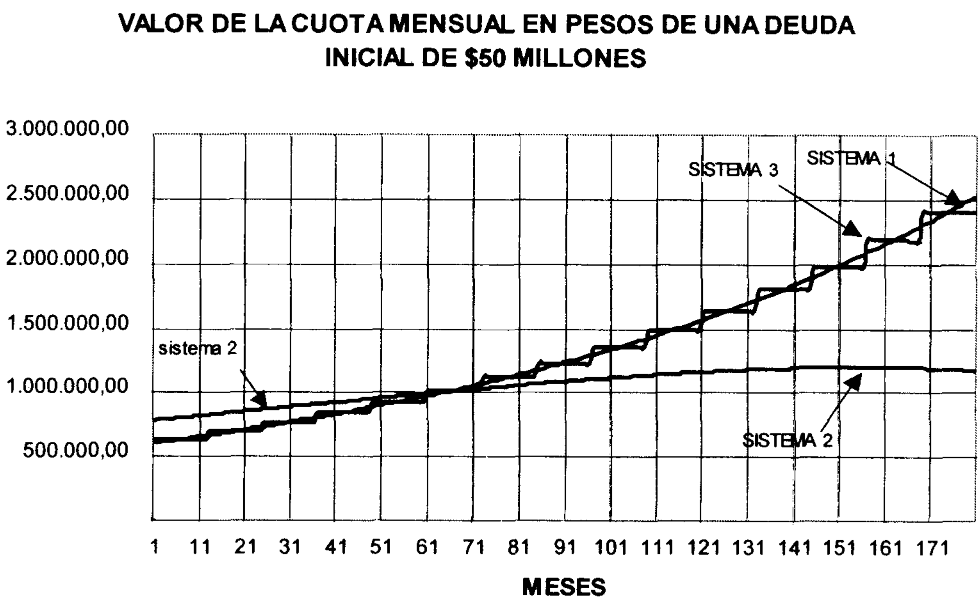
Período	DEUDA	Saldo	Saldo	PAGO	Pago	Pago
0	50.000.000,00	50.000.000,00	50.000.000,00			
1	50.299.115,30	50.120.000,00	50.272.638,45	604.884,70	784000,00	631.361,55
2	50.598.799,52	50.238.720,00	50.550.246,62	609.723,78	787449,60	631.321,14
3	50.899.024,24	50.356.131,84	50.832.914,34	614.601,57	790904,22	631.280,74
4	51.199.760,22	50.472.206,99	51.120.733,10	619.518,38	794363,71	631.240,33
5	51.500.977,35	50.586.916,55	51.413.796,02	624.474,53	797827,94	631.199,93
6	51.802.644,70	50.700.231,25	51.712.197,91	629.470,33	801296,76	631.159,54
7	52.104.730,42	50.812.121,41	52.016.035,31	634.506,09	804770,02	631.119,14
8	52.407.201,81	50.922.557,00	52.325.406,47	639.582,14	808247,56	631.078,75
9	52.710.025,22	51.031.507,59	52.640.411,46	644.698,80	811729,24	631.038,36
10	53.013.166,09	51.138.942,34	52.961.152,12	649.856,39	815214,90	630.997,98
11	53.316.588,90	51.244.830,04	53.287.732,16	655.055,24	818704,39	630.957,59
12	53.620.257,15	51.349.139,04	53.620.257,15	660.295,68	822197,52	630.917,21
24	57.268.718,34	52.465.627,11	57.268.718,34	726.548,88	864337,57	694.222,62
36	60.867.839,18	53.289.193,47	60.867.839,18	799.449,85	906656,42	763.880,01
48	64.313.013,63	53.749.814,74	64.313.013,63	879.665,60	948765,67	840.526,73
60	67.465.233,41	53.766.364,49	67.465.233,41	967.930,10	990197,21	924.864,09
72	70.141.901,23	53.245.090,14	70.141.901,23	1.065.050,94	1030391,10	1.017.663,74
84	72.105.346,62	52.077.895,94	72.105.346,62	1.171.916,76	1068681,82	1.119.774,79
96	73.048.483,58	50.140.408,49	73.048.483,58	1.289.505,36	1104282,81	1.232.131,53
108	72.576.914,28	47.289.798,50	72.576.914,28	1.418.892,65	1136268,77	1.355.762,00
120	70.186.614,75	43.362.329,25	70.186.614,75	1.561.262,48	1163555,83	1.491.797,39
132	65.236.130,24	38.170.598,98	65.236.130,24	1.717.917,52	1184879,01	1.641.482,39
144	56.911.949,34	31.500.440,27	56.911.949,34	1.890.291,12	1198766,75	1.806.186,59
156	44.185.405,51	23.107.435,53	44.185.405,51	2.079.960,46	1203512,27	1.987.416,99
168	25.759.056,58	12.713.002,71	25.759.056,58	2.288.660,97	1197141,09	2.186.831,82
180	(0,00)	0,00	0,00	2.518.302,23	1177374,57	2.406.255,66

La siguiente gráfica nos muestra la comparación de los saldos de deudas en pesos, no se alcanza a visualizar en la gráfica la diferencia entre los sistemas 1 y 3, pero se puede apreciar muy bien la diferencia con el sistema 2.

Ahora compararemos el comportamiento de las cuotas en pesos.



Aquí se pueden visualizar fácilmente las curvas correspondientes a los 3 sistemas.

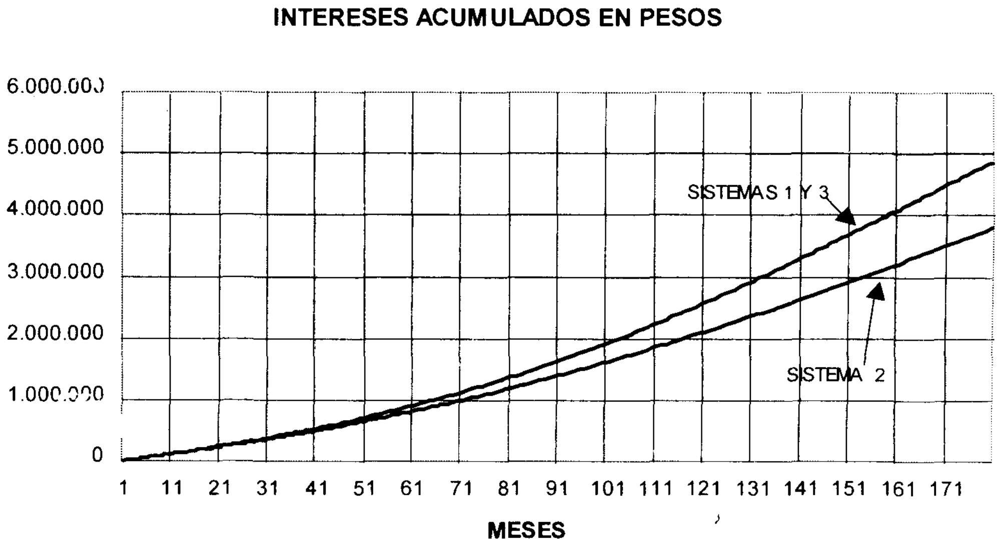


En el sistema 3 las cuotas forman una especie de serrucho alrededor de las cuotas del sistema 1 (esto es así porque las cuotas en UVR disminuyen cada año de acuerdo a la inflación)

En el sistema 2 las cuotas en UVR, con relación a los sistemas 1 y3, son más altas al principio pero después del período 64 empiezan a bajar, al final la diferencia es bien significativa,

Ahora analizaremos el comportamiento de los intereses.

Los intereses acumulados en el sistema 1 son aproximadamente iguales a los del sistema 3 y no es posible diferenciarlos en un gráfico a simple vista, por tanto, los sistemas 1 y 3 tendrán la misma curva, la curva del sistema 2 siempre se encuentra por debajo, lo cual significa que en el sistema 2 se van a pagar menos intereses.



Conclusión final:

De los cuadros y análisis anteriores podemos concluir que el mejor sistema viene siendo el sistema 2, o sea, el de amortización constante seguido de los sistemas 1 y 3 que vienen siendo aproximadamente iguales.

Los análisis anteriores tendrán validez cuando el deudor tiene la capacidad de pago para optar por el sistema 2 y no sabe por cual decidirse.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Usando los sistemas uno y dos, elaborar para cada caso, una tabla para amortizar la suma de $6 millones en 4 pagos anuales con las siguientes condiciones:

   a) inflación año 1 a 4: 10%, 12%, 8%, y 6% respectivamente

b) valor de la UVR al momento del préstamo $300

c) tasa en UVR 13%

Respuestas:

SISTEMA 1			$	UVR	UVR	$	UVR	UVR	TASA
PERIODO	INFLACION	V/R UVR	DEUDA	DEUDA	INTERES	PAGO	PAGO	AMORT	
0		300.0000	6,000,000	20,000.0000					13%
1	10%	330.0000	5,239,118	15,876.1161	2,600.0000	2,218,882	6,723.8839	4,123.8839	13%
2	12%	369.6000	4,145,481	11,216.1272	2063.895087	2,485,148	6,723.8839	4,659.9889	13%
3	8%	399.1680	2,375,185	5,950.3398	1458.096535	2,683,959	6,723.8839	5,265.7874	13%
4	6%	423.1181	0	–	773.544171	2,844,997	6,723.8839	5,950.3398	13%

SISTEMA 2			$	UVR	UVR	$	UVR	UVR	TASA
PERIODO	INFLACION	V/R UVR	DEUDA	DEUDA	INTERES	PAGO	PAGO	AMORT	
0		300.0000	6,000,000	20,000.0000					
1	10%	330.0000	4,950,000	15,000.0000	2,600.0000	2,508,000	7,600.0000	5,000.0000	13%
2	12%	369.6000	3,696,000	10,000.0000	1,950.0000	2,568,720	6,950.0000	5,000.0000	13%
3	8%	399.1680	1,995,840	5,000.0000	1,300.0000	2,514,758	6,300.0000	5,000.0000	13%
4	6%	423.1181	0	–	650.0000	2,390,617	5,650.0000	5,000.0000	13%

ANEXO 1

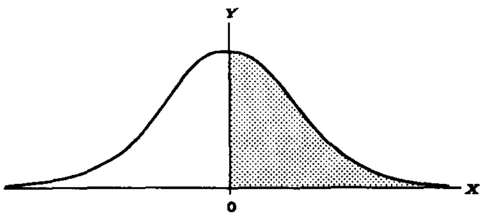
TABLA DE DIAS

DIA	*ENE*	*FEB*	*MAR*	*ABR*	*MAY*	*JUN*	*JUL*	*AGO*	*SEP*	*OCT*	*NOV*	*DIC*	*DIA*
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	–	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30	–	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31	–	90	–	151	–	212	243	–	304	–	365	31

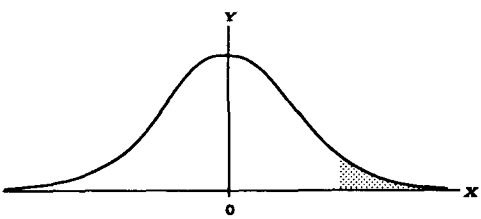
* Para año bisiesto, se adiciona un día más a partir del 1 de marzo.

ANEXO 2

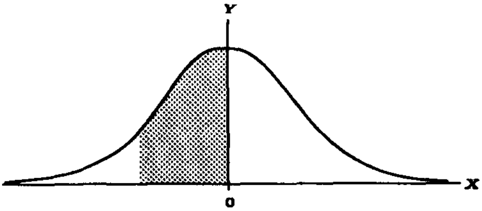
AREAS DE LA CURVA NORMAL ESTANDAR



El área bajo toda la curva es igual a 1.
El área sombreada a la derecha del 0 es igual a 0.5 y corresponde a una probabilidad del 50%.



El área sombreada es igual a 0.5 menos la probabiliudad.
$(Z \geq 2.3) = 0.5000 - 0.4896 = 0.0104 = 1.04\%$



El área sombreada es igual a la que hubiera estado entre 0 y +1.57 y sería igual a 0.4418 = 44.18%

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0676	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1674	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3316	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4536	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4606
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4734	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

ANEXO 3

FORMULARIO

Interés Simple

$I = Pit$
$S = P(1+it)$
$D = Sdt$
$VT = S(1-dt)$
$d = 1-(1-d_1)(1-d_2)\ldots(1-d_n)$

Definición de variables:

I = Interés
P = Valor presente
S = Monto o valor final
i = Tasa anual
t = Tiempo en años
D = Valor del descuento
d = Tasa de descuento
VT = Valor de transacción
$d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$ = Tasa de descuento

Interés Compuesto

$I = Pi$
$S = P(1+i)^n$

Definición de variables:

I = Interés
P = Valor presente
S = Monto o valor final
n = Número total de períodos
m = Número de períodos en 1 año
J = Tasa nominal
i = Tasa efectiva del período
i_a = Tasa anticipada del período

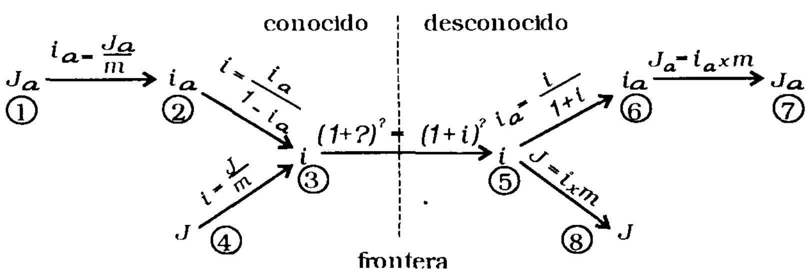
Combinación de tasas:

$i = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2$

$i_R = \dfrac{i-f}{1+f}$

Definición de variables:

i = Tasa total o combinada
i_1, i_2 = Tasas a combinar
i_R = Tasa real o deflactada
f = Tasa de inflación



Anualidades

$$VP = R a_{\overline{n}|i} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ Valor presente de una anualidad vencida

$$VF = R s_{\overline{n}|i} = R \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$ Valor final de una anualidad vencida

$$\lim_{n \to \infty} VP = \frac{R}{i}$$ Valor presente de una anualidad infinita

$$VP = R \ddot{a}_{\overline{n}|i} = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$ Valor presente de una anualidad anticipada

$$VF = R \ddot{s}_{\overline{n}|i} = R \frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)$$ Valor final de una anualidad anticipada

Definición de variables:

VP = Valor presente
VF = Monto o valor final
R = Renta o cuota uniforme
n = Número total de períodos

i = Tasa efectiva del período
$a_{\overline{n}|i}$ = Factor de VP } de anualidad ordinaria
$s_{\overline{n}|i}$ = Factor de VF } de anualidad ordinaria
$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ = Factor de VP } de anualidad anticipada
$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ = Factor de VF } de anualidad anticipada

Gradientes

$$R_n = R + (n-1)L$$ Renta o cuota en el período enésimo de un gradiente aritmético o lineal.

$$VP = R a_{\overline{n}|i} + \frac{L}{i}\left[a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}\right]$$ Valor presente de un gradiente aritmético

$$VF = R s_{\overline{n}|i} + \frac{L}{i}\left[s_{\overline{n}|i} - n\right]$$ Valor final de un gradiente aritmético

$$\lim_{n \to \infty} VP = \frac{R}{i} + \frac{L}{i^2}$$ Valor presente de un gradiente lineal infinito

$$R_n = R(1+G)^{n-1}$$ Renta o cuota en el período enésimo de un gradiente geométrico.

$$VP = \frac{R\left[(1+G)^{n}(1+i)^{-n} - 1\right]}{G-i} \quad si \quad G \neq i$$ Valor presente de un gradiente geométrico cuando $G \neq i$

$$VP = \frac{R(n)}{1+i} \quad si \quad G = i$$ Valor presente de un gradiente geométrico cuando $G = i$

$$VF = \frac{R\left[(1+G)^n - (1+i)^n\right]}{G-i} \quad si \quad G \neq i$$ Valor final de un gradiente geométrico cuando $G \neq i$

$$VF = R(n)(1+i)^{n-1} \quad si \quad G = i$$ Valor final de un gradiente geométrico cuando $G = i$

$$\lim_{n\to\infty} VP = \frac{R}{i-G} \quad si \quad i > G$$ Valor presente de un gradiente geométrico infinito cuando $i > G$

$$\lim_{n\to\infty} VP = \infty \quad si \quad i \leq G$$ Valor presente de un gradiente geométrico infinito cuando $i \leq G$

Definición de variables:

VP = Valor presente
VF = Monto o valor final
R = Renta o cuota en el período 1
n = Número total de períodos
i = Tasa efectiva del período
$a_{\overline{n}|i}$ = Factor de valor presente de una anualidad
$s_{\overline{n}|i}$ = Factor de valor final de una anualidad
L = Constante de variación de la renta o cuota en el gradiente aritmético
G = Tasa de variación de la renta o cuota en el gradiente geométrico

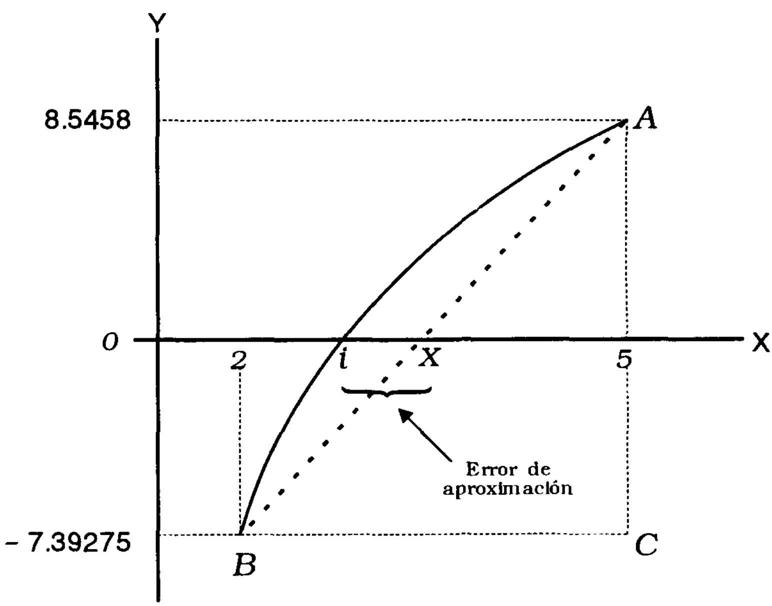
ANEXO 4

JUSTIFICACION DE LA INTERPOLACION

El proceso de interpolación mostrado en el ejemplo 30 del segundo capítulo se puede justificar desde el siguiente punto de vista geométrico.

$$40\,(1 + i)^{12} - 30\,(1 + i)^{5} - 25 = 0$$

Se encuentra que a la tasa del 5% el valor de la función toma el valor de – 0.71312 y a la tasa del 2% la función toma el valor de – 7.39275. Si trasladamos estas cifras a una gráfica *XY* donde la tasa *i* la representaremos en el eje *X* y el valor que toma la función la representaremos en el eje *Y* se tendrá:



Los triángulos ABC y AX5 son semejantes porque tienen sus lados paralelos (BC es paralelo a X5 y AC es paralelo a A5) entonces con los lados de éstos triángulos podemos formar la siguiente proporción:

$$\frac{\text{lado CB}}{\text{lado 5X}} = \frac{\text{lado AC}}{\text{lado A5}}$$

esta misma proporción puesta en distancias sería:

$$\frac{C - B}{5 - X} = \frac{A - C}{A - 0}$$

y reemplazando por valores se tiene:

$$\frac{5 - 2}{5 - X} = \frac{8.5458 - (-7.39275)}{8.5458 - 0}$$

que corresponde exactamente a la ecuación del ejemplo anterior cuando se efectuó la primera interpolación.

Para fines financieros tomar en el triángulo grande una separación de un punto porcentual es lo mas apropiado porque el error que produce no es significativo. (una diferencia de un punto porcentual puede ser interpolar entre el 4% y el 5% o interpolar entre el 11% y el 12%)

Observaciones: Cuando se interpola usando un triángulo muy grande se obtiene un error considerable porque el punto que halla la interpolación es el punto X y el punto que deberíamos hallar es el punto i que corresponde al sitio donde la curva corta al eje X, sinembargo éste error es controlable y puede llegar a ser tan insignificante como queramos si interpolamos en un triángulo mas pequeño porque así la curva se aleja menos de la recta y el error será menor.

Glosario

Aceptaciones financieras. Son letras giradas a cargo de un comprador de mercancía que avala una entidad financiera. Cuando esa entidad financiera es un banco se denomina **Aceptación bancaria.**
Alternativas con vida útil diferente. Proyectos que se comparan pero tienen diferente vida útil
Alternativas de inversión dependientes. Se presenta cuando una alternativa no se puede realizar sin que otra se realice.
Alternativas de inversión independientes. Cuando dos o más alternativas se pueden realizar sin tener en cuenta la realización de otras.
Alternativas de inversión mutuamente excluyentes. Cuando la realización de una alternativa impide la realización de otras alternativas.
Altura de escalón. Es la diferencia que existe entre la última intercuota de un escalón y la primera intercuota del siguiente escalón.
Amortización. Es la cancelación de una deuda mediante el pago de pequeñas cuotas durante un tiempo determinado.
Análisis de sensibilidad. Procedimiento que permite conocer el comportamiento de una variable cuando otra variable empieza a cambiar.
Anatocismo. Es la capitalización de intereses.
Anualidad. Serie de pagos uniformes efectuados a iguales intervalos de tiempo, con la misma tasa de interés y en la cual el número de períodos debe ser igual al número de pagos.
Anualidad ordinaria. Cuando los pagos se hacen al final del período, también se les dice anualidades vencidas o series vencidas, por ejemplo el pago de salarios
Anualidades anticipadas. Cuando los pagos se hacen al principio del período, por ejemplo los arrendamientos.
Anualidades diferidas. Cuando el primer pago no está con el primer período
Anualidades infinitas. Cuando una serie de pagos empieza pero no tiene fin o al menos su duración es indefinida.
Anualidades generales. Cuando el período de pago no coincide con el período de interés, por ejemplo hay una tasa efectiva anual y los pagos son mensuales.
Arrendamiento financiero o "Leasing". Consiste en tomar en alquiler con opción de compra un activo de un proveedor, el valor de la opción de compra se establece desde un principio. El activo puede ser un edificio, un apartamento, una máquina, un vehículo, un avión, etc.

Bono. Son títulos valores emitidos con el objeto de conseguir una fuerte suma de financiación a través de varios pequeños inversionistas.

CAUE Costo anual uniforme equivalente. Es un índice para comparar y evaluar financieramente un proyectos de inversión.

CAO. Costo anual de operación, también existe el C M O que significa costo mensual de operación.
Capitalización. Es reunir un capital mediante una serie de depósitos de pequeño valor en un fondo durante un tiempo determinado.
C.C. Costo capitalizado. Es un índice que nos permite evaluar y comparar financieramente proyectos cuando sus flujos de caja son infinitos.
CDT. Certificado de depósito a término con plazo superior a 30 días.
CDAT. Certificado de depósito a término con plazo inferior a 30 días
Cuota extra pactada. Es el pago adicional al pago ordinario que el deudor debe realizar en una fecha determinada y por un valor determinado según lo convenido previamente con el acreedor
Cuota extra no pactada. Es el pago adicional a la cuota ordinaria que el deudor hace al acreedor sin que tenga obligación de hacerlo. Este pago adicional no figura como un compromiso del deudor pero en caso de hacerlo tiene por objeto cancelar más rápidamente la deuda o para que las siguientes cuotas resulten de menor valor. Para poder hacer un pago extra no pactado es necesario que exista una cláusula en el contrato que especifique que si se podrán hacer cuotas extras no pactadas. Las cuotas extras no pactadas también reciben el nombre de **prepagos**.
Certidumbre total. Situación en la que se supone que la probabilidad de realizarse un evento es del 100%. En la práctica esta situación nunca se da.
Confrontación antiguo-nuevo. Es una técnica que consiste en analizar las ventajas financieras que ofrece el activo actual en uso frente a las ventajas que ofrecería un nuevo activo. Esta técnica también se le denomina retador-defensor
Costo de capital. Es la tasa de interés que una persona paga con el fin de financiarse.
Costo de oportunidad. Es la máxima tasa que se podría obtener si los recursos se invirtieran en la alternativa más rentable que se sacrifica.
Cuota o pago uniforme. También se le denomina **Renta,** son los pagos que forman una anualidad.

Descuento. Es la disminución del valor final de un documento por pago anticipado
Descuento bancario. Consiste en cobrar interés simple por anticipado calculado sobre el valor final del documento
Descuento en cadena. Cuando se presenta una serie de descuentos sobre una misma factura, estos no se suman sino que al valor final de la factura se le aplica un descuento y al saldo se le aplica el siguiente descuento y así sucesivamente.
DTF. Tasa de captación, es la tasa promedio de 8 días que pagan: los bancos, las corporaciones financieras, las compañías de financiamiento comercial y las corporaciones de ahorro y vivienda (CAV) en los CDT's a 90 días pagando intereses por anticipado. Este indicador es calculado semanalmente por el Banco de la República todos los viernes y tiene vigencia a partir del siguiente lunes hasta el siguiente domingo. También se calcula con tasa efectiva anual para 180 y 360 días. Es la principal tasa de referencia en Colombia.
Devaluación. Perdida de valor de la moneda frente al dólar de los Estados Unidos de América. Todas las monedas sufren devaluación o revaluación con respecto al dólar como patrón universal
Diagrama de flujo. Conjunto de figuras geométricas unidas o relacionadas por medio de segmentos de recta, con flechas que determinan el orden lógico a seguir Y según la forma de la figura geométrica que se presenta, indica la acción a seguir para alcanzar la solución a un problema.

Evaluación en situación de riesgo. Situación en la cual no se conocen los posibles resultados futuros pero se puede predecir mediante el uso de la estadística.
Evaluación en situación de incertidumbre. Lo normal es que haya falta de certeza en el resultado final de un proyecto. Cuando esta falta de certeza se puede medir mediante estadísticas se dice que el proyecto se desarrolla en situación de riesgo, pero si no hay estadísticas o son muy escasas se dice que el proyecto se desarrolla en situación de incertidumbre.
Ecuación de valor. Es una igualdad de valores ubicados en una sola fecha llamada fecha focal
Escalonamiento. Es un flujo de caja con pagos iguales pero cada cierto tiempo por ejemplo cada año los pagos incrementan y vuelven a quedar constantes durante ese año al final del cual vuelven a incrementar y así sucesivamente, el escalonamiento puede ser geométrico o *aritmético, un ejemplo de escalonamiento es el pago de un crédito hipotecario.*

Fecha de redención. *Fecha de vencimiento de un documento también se le llama fecha de* maduración.
Fecha focal. Es el sitio donde se comparan deudas con pagos o ingresos con egresos, los contadores aplican este principio diciendo: Activos es igual a pasivos más el capital en la fecha de balance.
Flujo de caja. Serie de ingresos o egresos a lo largo de la línea de tiempo.
Flujo de caja convencional. Es un flujo de caja donde primero aparecen los egresos y después los ingresos o viceversa, lo que importa es que aparezcan unos primero y después los otros. En este caso solo existe una sola TIR
Flujo de caja no convencional. Es un flujo de caja donde pueden aparecer alternativamente ingresos y egresos. En este caso se presenta la TIR múltiple.
Fondo de amortización. *Es un fondo de ahorros que tiene objeto reunir un capital para pagar* una deuda en fecha futura.

Gradiente. Serie de pagos que varían de acuerdo a una ley de formación. Esta ley de formación puede ser geométrica o aritmética conformándose de esta forma el gradiente geométrico o el gradiente aritmético o lineal.

IPC (Indice de precios al consumidor) ver inflación.
Incertidumbre. Ver evaluación.
Inflación. Es el aumento general de precios, lo calcula mensualmente el DANE. Existen dos índices para medirla: el **IPC** que es el índice de precios al consumidor el cual mide la inflación que sufre el público en general. Se calcula sobre los precios de una canasta básica que actualmente consta de 282 artículos divididos en 7 sectores (Vivienda, Salud, Educación, Alimentos, Vestuario, Transporte y Misceláneos) y el **IPP** Indice de precios al productor que mide la inflación que sufren los industriales, este último índice generalmente se calcula por sectores por ejemplo el sector de la construcción, el sector automotor, el sector textil etc.
Intercuota. En un escalonamiento las cuotas se denominan intercuotas, también se le dice subcuota
Interés. Es *la remuneración que se paga por el uso del dinero prestado, también se puede* considerar como la prima que se recibe por no gastarlo y entregarlo a un tercero para que lo usufructúe.
Interés comercial. Tipo de interés simple en el cual el tiempo se mide usando un año de 360 días.
Interés racional. Tipo de interés simple en el cual el tiempo se mide usando un año de 355 o 366 días.

Interés real. Actualmente se le dice a la cantidad de pesos que gana una inversión después de retirar la cantidad perdida por la inflación. Ver tasa real.
Interperíodo. En un escalonamiento el tiempo que transcurre entre una intercuota y la siguiente se denomina interperíodo también se le dice subperíodo
Intertasa. La tasa del interperíodo se denomina intertasa y se calcula mediante equivalencia de tasas con la tasa del período, también se le dice subtasa
Inversión. Es el sacrificio de recursos de hoy con la esperanza de recibir una suma futura mayor.

Libor. Ver tasa Libor

Mercado primario Es la colocación de títulos que salen por primera vez al mercado
Mercado secundario. Es la compra y venta de valores ya emitidos y en circulación.

Pago. En una anualidad o gradiente es la cuota periódica.
Pagos parciales. Cuando una deuda se cancela mediante pagos de diferente valor efectuados a diferentes plazos
Precio de registro. Es el precio que tiene un documento según las computadoras de la bolsa.
Plazo de gracia. Cuando el primer pago de una deuda no figura con el primer período se dice que hay un período de gracia. Hay dos clases de períodos de gracia: el período de gracia muerto que es el período donde no hay ningún pago pero los intereses se capitalizan produciéndose el anatocismo y el período de gracia con cuota reducida que es el período en el cuál solo se paga el interés para evitar el anatocismo.
Si el pago que se hace no alcanza a cubrir los intereses también se produce anatocismo.
Período. En una anualidad o en un gradiente es el tiempo que transcurre entre un pago y otro en el interés simple o en el interés compuesto es el tiempo que transcurre entre una liquidación de intereses y otra.
Período de repago. Es el tiempo necesario para que un inversionista recupere la inversión, también se le denomina período de recuperación. Se le representa por **PR**
Probabilidad de pérdida en la aceptación (PPA). Es un índice aplicable a proyectos en situación de riesgo y nos mide la probabilidad de perder si se realiza el proyecto.
Prime Rate. Ver tasa Prime Rate.
Punto de equilibrio. Punto en el cual los ingresos igualan a los egresos.

Riesgo de tasa de cambio. Es la contingencia de pérdida por variaciones inesperadas en las tasas de cambio de las divisas.
Riesgo de tasa de interés. Es la contingencia de que ante cambios inesperados en las tasas de interés, la entidad vea disminuido el valor de mercado de su patrimonio.
Regla de los signos de Descartes. El número de raíces positivas de una ecuación en forma de polinomio con exponentes enteros, es igual o menor al número de variaciones de los signos de los coeficientes del polinomio.
Relación beneficio costo. Indice para evaluar proyectos teniendo en cuenta los beneficios que produce un proyecto y los costos del mismo.
Renta. Es el pago periódico de una anualidad.
Riesgo. Es el grado de variabilidad o contingencia del retorno de una inversión. En términos generales se puede esperar que, a mayor riesgo, mayor rentabilidad y a menor riesgo menor rentabilidad de la inversión. Existen varias clases de riesgo: de mercado, de solvencia, jurídico, de liquidez, de tasa de cambio, de tasa de interés, etc.

Spread. Tasa adicional que se agrega a una tasa principal, por ejemplo si un préstamo se efectúa a la DTF + 6 puntos y la DTF viene dada como nominal trimestre anticipada el spread también será nominal trimestre anticipado, por ejemplo si un préstamo se efectúa a la DTF con valor de 18% NTA y el spread es 6 puntos entonces el préstamo resulta al 18 + 6 = 24% NTA. Pero si la tasa principal viene dada como efectiva anual el spread también será efectivo anual y se utiliza la combinación de tasas, por ejemplo si se otorga un préstamo al IPC + 4 puntos significa que si el IPC es el 14% entonces el préstamo se realizará al (1+0.14)(1+ 0.04) – 1= 18.56%.

Tabla de amortización. Tabla en la que se descomponen las sumas pagadas entre intereses y abono a capital, se muestra paso a paso como se va cancelando la deuda.
Tabla de capitalización. Tabla en la que se muestra paso a paso como se va formando el capital hasta llegar a la meta final.
Tasa activa Es una tasa de colocación
Tasa anticipada. Es la tasa que se cobra al principio del período.
Tasa de cesión. Tasa que gana el vendedor de un documento transado en bolsa.
Tasa combinada. Un documento puede ganar simultáneamente dos o más tasas por ejemplo un depósito a término fijo en UPAC gana intereses en UPAC más la corrección monetaria. Una tasa que combine estos dos resultados se denomina tasa combinada.
Tasa de devaluación. *Indica la pérdida de valor de una moneda frente al dólar de Estados* Unidos
Tasa de descuento. Tasa de interés a la cual son puestas en valor presente las sumas futuras.
Tasa equivalente. Es aquella tasa que teniendo diferente periodicidad nos produce el mismo monto al final de un tiempo.
Tasa Fisheriana. Es la tasa que queda después de retirar la devaluación. En otras palabras consiste en deflactar usando la tasa de devaluación.
Tasa de interés. Es el rendimiento que un capital obtiene en la unidad de tiempo. La tasa de interés normalmente se expresa en por ciento (ejemplo 5%) o en por uno ejemplo (0.05).
Tasa interbancaria. Es la tasa que se cobra en moneda doméstica por los intermediarios financieros para solucionar problemas de liquidez de muy corto plazo. Esta tasa se pacta para operaciones de un día.
Tasa de interés efectiva. Es la tasa que se cobra cada período siempre que el período sea el año. Cuando el período no es el año se le denomina tasa periódica. En algunos textos se denomina tasa efectiva a la tasa del período independientemente de que el período sea el mes, el trimestre, el semestre o el año, en tales casos se dirá que la tasa es efectiva mensual, efectiva trimestral, efectiva semestral o efectiva anual respectivamente.
Tasa de interés nominal. Es la tasa que se da para un año pero dentro de ese año existen capitalizaciones.
Tasa de registro. Tasa a la cual queda registrada en las computadoras de la bolsa el documento que va a ser transado allí
Tasa inflada. Es la tasa que incluye la inflación, también se le denomina **tasa total.**
Tasa del inversionista (TI). Es la tasa que normalmente gana el inversionista en el giro normal de sus negocios
Tasa de interés de oportunidad (TIO). Es la tasa más alta que un inversionista sacrifica con el objeto de realizar un proyecto. Normalmente el VPN y el CAUE se calcula usando la tasa TIO.
Tasa interna de retorno (TIR). Es la tasa a la cual son descontados los flujos de caja de forma tal que los ingresos y los egresos sean iguales. Matemáticamente podemos decir que la TIR es la tasa a la cual el VPN se hace cero.

Tasa interna de retorno modificada (TIRM). Cuando un proyecto tiene varios ingresos y varios egresos entreverados y con el objeto de eliminar los problemas de la TIR múltiple, los ingresos se trasladan a valor final a la tasa de reinversión y los egresos se trasladan a valor presente a la tasa de financiación, la TIR de este nuevo flujo de caja se denomina TIR modificada representada por TIRM.
Tasa interna de retorno esperada (TIRE). Si el flujo de caja está formado por valores esperados, la TIR que de allí se calcule se denomina TIRE.
Tasa interna de retorno incremental (TIRI). Para poder calcular una TIR es necesario que existan Ingresos y egresos, sin embargo si de dos flujos de caja donde solo existan egresos o ingresos se puede obtener una diferencia de los dos flujos de caja y de esta diferencia es posible calcular una TIR la cual se denomina TIRI
Tasa Libor. (London InterBank Offered Rate) (Tasa de colocación) Tasa promedio ofrecida en el mercado interbancario de Londres. Sobre depósitos de otros bancos en dólares (eurodólares que son dólares estadounidenses pertenecientes a europeos). Calculado por la asociación de banqueros británicos basado en cotizaciones de los 16 bancos más importantes de Londres. La Libor a un mes es la tasa anual ofrecida para depósitos a 1 mes, La Libor a 3 meses es la tasa anual ofrecida para depósitos a 3 meses y la Libor a 6 meses es la tasa anual ofrecida para depósitos a 6 meses
Es una tasa de referencia para préstamos en mercados internacionales adicionando un spread. Hay otras ciudades distintas de Londres donde también se calcula la tasa interbancaria ofrecida en eurodólares como en Madrid llamada MIBOR, Zürich llamada ZIBOR, París llamada PIBOR etc.

Tasa LIBID London InterBank Bid Rate (tasa de captación) Tasa promedio de demanda en el mercado Interbancario de Londres
Tasa mínima atractiva de retorno (TMAR). Muchas veces para evaluar un proyecto se requiere que produzca una tasa superior a la TIO, esta tasa se denomina TMAR y viene a ser igual a la TIO más un spread.
Tasa pasiva Es una tasa de interés que se reconoce por la captación de recursos en cuentas de ahorro y en CDT
Tasa Prime Rate (Tasa de colocación) Tasa de interés para préstamos corporativos (préstamos a sus mejores clientes) calculado por el Banco de la Reserva Federal (FED)tomando como mínimo un 75% de los 30 bancos más grandes de Estados Unidos. Res una tasa preferencial para fondos cuantiosos con bajo riesgo crediticio, se calcula como efectiva anual para préstamos a plazo de 180 días.
Tasa real o tasa deflactada. Es la tasa a la cual se le ha retirado la inflación. También se le conoce como tasa desinflada. Este índice se debe a Fisher en 1911
Tasa real de cambio. Si 1+tasa de inflación se divide entre 1 + tasa de devaluación se obtiene la tasa real de cambio, es decir que si deflactamos la inflación con la tasa de devaluación se obtiene la tasa real de cambio. Lo ideal es que este valor sea próximo a uno.
Tasa vencida o tasa ordinaria. Es la tasa que se cobra al final del período
TBS. Tasa básica del sector, la calcula la Superintendencia Bancaria teniendo en cuenta cuatro sectores (bancos, corporaciones financieras, compañías de financiamiento comercial y las corporaciones de ahorro y vivienda el cálculo se hace diariamente con base en los últimos 10 días (esto es un promedio móvil de 10 días) y teniendo en cuenta 8 plazos diferentes 2-14 días, 15-29 días,1 mes, 2 meses, 3 meses,6 meses, 12 meses y más de un año
TCC. Tasa promedio ponderada de captación en CDT´s a 90 días de las Corporaciones Financieras pagando intereses por trimestre anticipado de la última semana. Este indicador es calculado semanalmente por el Banco de la República todos lo viernes y tiene vigencia a partir del siguiente lunes hasta el siguiente domingo. También se calcula para 180 y 360 días. Se emplea como tasa de referencia.

TIR con reinversión (TIR+R). Cuando un proyecto genera unos ingresos y esos ingresos son reinvertidos, la tasa que se calcula de este proyecto incluida la reinversión se denomina TIR con reinversión.
TIR múltiple. **Son las distintas tasas a la cual el VPN toma el valor de cero. Se puede presentar esta situación en flujos de caja no convencionales**
TRM. **Es la tasa representativa del mercado, se obtiene como resultado del promedio simple de los promedios ponderados de las tasa de compra y de venta de divisas del sistema financiero pero excluyendo las operaciones por ventanilla. Esta estadística es resultado de las operaciones del día anterior reportadas por las entidades del sistema financiero a la Superintendencia Bancaria.**

UPAC. Unidad de poder adquisitiva constante.

Valor de cesión. *Es el valor que el propietario de un documento entrega a la bolsa para su* transacción, es diferente al valor de registro. Valor de registro = valor de cesión – comisión del corredor de bolsa.
Valor crítico de reemplazo. Es el valor máximo que se puede pagar por un activo nuevo dando en parte de pago el activo viejo.
Valor de maduración. Sinónimo de valor final o valor al vencimiento (se utiliza para nombrar el valor al vencimiento de activos financieros.
Valor actual. También se le denomina: valor inicial, valor principal o valor presente
Valor presente neto (VPN). Indice que nos permite evaluar un proyecto y equivale a la sumatoria de los ingresos menos la sumatoria de los egresos puestos en pesos de hoy. Es el índice más utilizado y el que da mejores resultados.
Valor final (VF). También se le denomina: monto, acumulado, valor futuro, o simplemente se le dice la suma.
Valor de maduración. Es el valor al vencimiento que toma un documento.
Valor nominal. Es la suma que está impresa en el documento
Valor de salvamento. La mayoría de los activos físicos sufren un deterioro con su uso y con el transcurso del tiempo. El fabricante normalmente establece la cantidad en que podría ser vendido ese activo cuando prácticamente ya no es rentable continuar con él. (valor residual)
Vida útil. Es el tiempo que transcurre entre la puesta en uso del activo físico hasta cuando se llega a su valor residual. Este tiempo lo determina el fabricante, pero es común en algunos países prolongar la vida útil del bien haciendo reparaciones repetitivas aumentando de esta forma el costo de operación.

Bibliografía

- AYRES, FRANK JR. Mathematics of finance. Schaum`s Publishing Co., New York 1963

- BACA, GUILLERMO. Matemáticas Financieras. Editorial Politécnico Grancolombiano, Santafé de Bogotá, 1998.

- BACA, GUILLERMO. EXCEL Y LA CALCULADORA FINANCIERA APLICADOS A LA INGENIERIA ECONOMICA Fondo Educativo Panamericano segunda edición Bogotá 2002.

- BOLTEN, STEVEN. Administración Financiera, Editorial Limusa S.A. Primera Impresión, México 1983

- CORREDORES ASOCIADOS. Manual de Rentabilidad Financiera. Cuarta edición, Bogotá 1994.

- COSS BU, RAUL. Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión. Editorial Limusa S.A. de C.V. Segunda edición, México 1987

- GARCIA, JAIME A. Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Universidad Externado de Colombia. Segunda edición, Bogotá 1994

- GOMEZ CEBALLOS, J. ALBERTO. Matemáticas Financieras. Tercera edición. Armenia 1984.

- INFANTE VILLARREAL, ARTURO. Evaluación Financiera de Proyectos de Inversión. Editorial Norma, Bogotá 1988

- LECTURAS DE MACROECONOMIA COLOMBIANA. Cárdenas, Ocampo y otros. Compilador Fedesarrollo. Bogotá 1988

- NEWNAN, DONALD E. Análisis Económico en Ingeniería. Segunda edición, McGraw-Hill, México 1983

- REVISTA DESARROLLO Y SOCIEDAD No. 14. Universidad de los Andes. Facultad de Economía. Bogotá, Marzo de 1987.

- SCHALL, LAWRENCE y HALEY, CHARLES W. Administración Financiera. McGraw-Hill, México 1975

- TARQUIN, ANTHONY y BLANK, LELAND. Ingeniería Económica. Segunda edición. McGraw-Hill, México 1986

- VARELA V. RODRIGO. Evaluación económica de alternativas operacionales y proyectos de inversión. Editorial Norma. Bogotá 1982

- VÉLEZ PAREJA, IGNACIO. Decisiones de inversión una aproximación al análisis de alternativas CEJA Bogotá 1998.

- YA-LUN CHOU. Análsiis estadístico. Editorial Interamericana, Primera edición, México 1972

- ZARRUK GOMEZ, CARLOS ALBERTO. La corrección monetaria y el crédito en UPAC. Primera edición, Bogotá 1986.

Indice

E

F

G

I

L

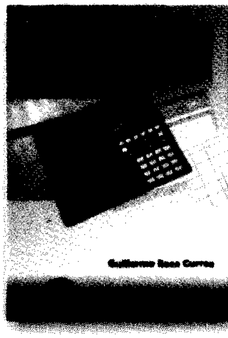
M

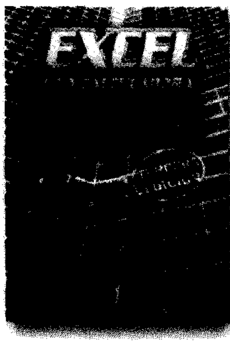
P

INGENIERÍA ECONÓMICA

En esta 8° Edición se explican y analizan los conceptos de interés simple y compuesto, anualidades y gradientes, los sistemas de capitalización y amortización incluido el sistema UVR, los indices para evaluar proyectos, el costo del capital y formas de financiación. El texto contiene más de 200 problemas resueltos paso a paso y más de 330 problemas propuestos con su respectiva respuesta.

Otras obras del autor





FONDO EDUCATIVO PANAMERICANO

DISTRIBUIDO POR:

editorial educativa

Calle 36 No. 22-33 Conmutador (091) 338 2577
Fax (091)232 0191 www.editorialeducativa.com.co
e-mail: educapyv@epm.net.co
Bogotá, D.C - Colombia

ISBN 958-9489-32-X