INVESTIGACION DE OPERACIONES EN ADMINISTRACION

EDICION 2009

ROBERTO CARRO

Pincu

Diseño de Tapa: Alejandro Salguero y Roberto Carro

Impreso por PINCU

Funes 3289

Mar del Plata

INVESTIGACION DE OPERACIONES EN ADMINISTRACION

EDICION, 2009.

Modificaciones a la edición 2009.

En esta edición se han modificado algunos de los capítulos y ampliado otros.

El capítulo de modelos ha sido complementado con ejemplos de la construcción de diagramas de Forrester y su aplicación a contextos más cercanos al estudiante. Esto mismo se repite con mayor énfasis en los capítulos de modelos deterministas y en el problema de transbordo de gran utilización en asignaturas superiores como Logística y Operaciones.

El modelamiento deterministico de inventarios ha sido reescrito y modelado con ejemplificación en el Win QSB. Similar tratamiento sufrió el capítulo de fenómenos de espera y cadenas de Markov.

También se ha incluido un apéndice con el uso de funciones del MS Excel que considero será de gran utilidad para el alumno.

Roberto Carro.

Prologo a la segunda edición.

"Dios mueve al jugador, y este la pieza. ¿Qué Dios detrás de Dios la trama empieza?" J.L. Borges

Después de la primera publicación de estos textos de Investigación de Operaciones en Administración y con la experiencia de un nuevo curso y primero de la asignatura dentro de la carrera de Administración en la facultad de Ciencias Económicas de la U.N. de Mar del Plata vuelvo a intentar esta segunda edición de este material con algunas correcciones y modificaciones que, confieso, no son tantas como hubiese deseado.

Mantengo e intento trasmitir la importancia del conocimiento de la asignatura en los alumnos de Ciencias Económicas, quizá aun más respaldado al leer un artículo reciente de Corcho Sánchez, P. Cortés Sierra, G. Guerrero Manzano, M. Álvarez Martínez, P. de la Universidad de Extremadura (España) titulado "Los métodos cuantitativos en distintos planes de estudios".
En este artículo se tiene en cuenta la adaptación al Espacio Europeo de Enseñanza Superior (EEES) que hace necesaria la modificación de los títulos universitarios y la reelaboración de sus planes de estudios. Los autores midieron el grado de eficacia en el proceso de aprendizaje del alumno a través de las calificaciones obtenidas en las carreras de Diplomatura en Ciencias Empresariales, Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas y Licenciatura en Economía en el periodo de 1990 a 2005.
Ese informe destaca lo siguiente "Los contenidos en Matemáticas no se pueden reducir por su papel instrumental y papel de servicio, que la catalogan como una disciplina transversal. Los resultados obtenidos muestran que la disminución de las horas de docencia ha influido en la eficiencia aumentando el número de convocatorias que se necesitan para aprobar. Esto conlleva un incremento de la estancia del alumnado en la universidad y como consecuencia un aumento del coste en el proceso económico docente".
Esto me anima a trasmitir al alumno una serie de herramientas que estoy seguro son importantes en el ámbito de la decisión y que, como se ve, esta necesidad es compartida hoy con ámbitos universitarios internacionales.

En esta edición mantengo la idea de la utilización de software de aplicación para la resolución de la complejidad matemática, agregando más detalle del procedimiento propio del software teniendo en cuenta la experiencia del curso anterior. Esto mostró que el alumno tiene un mayor incentivo cuando además de comprender los conceptos teóricos domina la herramienta de aplicación creando un lazo de realimentación reforzador en el proceso de aprendizaje.

Como mencione en la primera edición no he tratado de "inventar la rueda" en la temática cuantitativa si no aprovechar mucho del buen material existente sobre el tema. Debo reconocer que he luchado con la gran cantidad de material disponible que me impulsaba a incluirlo en este texto pero también ello hubiera desvirtuado el propósito fundamental de concentrarse en temas prioritarios en esta etapa en que pretendemos el "encantamiento" del alumno con la Investigación de Operaciones evitando una densidad que no solo no acerca soluciones prácticas si no que lo aleja de buscar por sí mismo nuevos desafíos.

En esta edición amplío el tema de la construcción de modelos tratando de lograr una manera estructurada de contextualizar las situaciones de negocios e introduciendo conceptos de la Dinámica de Sistemas con sus metodologías para modelado como los diagramas causales y los diagramas de Forrester utilizados en las herramientas de software comerciales de simulación como Powersim, VenSin, Stella o I Think para mencionar los más utilizados.
También se observará que hay un mayor desarrollo de solución de ejercicios tipo a través del software utilizado en el curso como WIN QSB, LINGO y el Add-in de MS Excel SOLVER.

Cuando termino de escribir estas líneas, observando el texto impreso surgen miles de modificaciones, agregados y formatos que haría al mismo. Esto lejos de desanimarme me incentiva dándome una agradable sensación por mejorar. Espero trasmitirla a quien lo lea.

Finalmente no puedo dejar de agradecer a la Mg. Alicia Zanfrillo, colaboradora de la cátedra que además de su tarea docente realizo la web de la asignatura permitiendo una comunicación permanente entre docentes y alumnos y una mejor distribución del material de la asignatura.

Roberto Carro
Mar del Plata. Otoño de 2007.

Prologo a la primera edición

Dios, si juega a los dados…….

La Investigación de Operaciones también llamada Ciencia de la Administración es una ciencia que lleva una importante cantidad de años desde sus principios en la primera década del Siglo XX. Tuvo su auge en las postrimerías de la 2º Guerra Mundial en pleno desarrollo de las industrias de producción masiva bajo los paradigmas del tipo fordiano de producción y ante un escenario de alta demanda. En esos momentos se buscaban soluciones para sistemas del complejo militar y de las Empresas que básicamente tomaban decisiones con un criterio único de costos, suponiendo volúmenes importantes de salida que el mercado absorbía.

Esto llevó a desarrollos de técnicas matemáticas (algoritmos) que daban soluciones a problemas ante una serie de restricciones. Estas técnicas tuvieron una enorme aceptación en ese escenario económico y fundamentalmente se pueden considerar exitosas en ese entorno. El método Simplex desarrollado por G. Dantzing es de 1947.

Al trasladarse estas técnicas a las organizaciones como objeto de estudio concurrieron no solo los matemáticos e ingenieros si no que se fueron agregando gerentes profesionales y de las ciencias económicas. Con el correr del tiempo y ante el cambio de los escenarios económicos mundiales (cambio de una economía de oferta por una de demanda, caída de la filosofía determinista de Laplace en la física ,la introducción de más restricciones, otros criterios de decisión fuera de los costos) y con el agregado de la rapidez del cambio que influye en la necesaria urgencia de toma de decisiones, los algoritmos que tanto habían servido comienzan a ser puestos en duda no solo por su alcance en cuanto a las condiciones en que los mismos eran validos sino también por la dificultad que tenían en su propia resolución, ya que en la vida real los gerentes están más lejos de las matemáticas del aula que los investigadores. Cualquiera que haya tenido a la vista la resolución manual de un problema de decisión con un algoritmo Simplex se dará cuenta a que me refiero.

Además de esta dificultad se sumaba la baja relación costo/beneficio que éstos traían para la problemática a resolver y el grado de complejidad de las situaciones reales hacia que el gerente - decisor pensara que esto era un campo para los matemáticos y prefiriera tomar otros criterios más heurísticos y dejar que otros”jugaran con estos chiches”. Algunos como S. Savage se refieren a esto como la “cortina algebraica” que separa la toma de decisiones de la Ciencia de la Decisión.

Esta dicotomía hizo que las profesiones de la gestión, en especial los Administradores profesionales, perdieran la oportunidad de disponer de un arsenal importante de ayudas en la decisión. Por suerte la revolución de las computadoras hizo el milagro que faltaba para unir a la ciencia con los usuarios de la misma. Las computadoras permitieron que las metodologías matemáticas y el trabajo duro lo hiciera la PC rescatando al actor principal que modela la situación ya que es quien mejor la conoce y quien evalúa los resultados determinando la importancia de los mismos.

Aquí es cuando la Investigación de Operaciones recobra un papel importante en la gestión brindando herramientas para ayudar en la decisión junto con la rapidez y sencillez del software de resolución de problemas. Esto hace que la tarea importante e indelegable sea la confección del modelo y su interpretación.

Creo que la Investigación de Operaciones proporciona herramientas que ya han probado ser exitosas en muchas organizaciones pero es cierto que así como tiene muchos adeptos hay también quienes no lo ven así. Para esto es necesario un cambio en la manera de enseñar y mostrar esta disciplina llevando de un modo más intenso la aplicación de estas herramientas a las organizaciones

Entiendo mi tarea hoy como volver a mostrar a los alumnos de las carreras de Administración la importancia de una herramienta como la Investigación de Operaciones en la toma de decisiones y el proceso de la misma, de manera que ellos sean los actores principales teniendo en cuenta que nadie podrá conocer mejor las particularidades de una organización o área de la misma que quien está inmerso en ella. Se trata de mostrar que sin el decisor participando en la construcción del modelo no existe una buena utilización de la herramienta. Mostrar que la Investigación de Operaciones no es un terreno exclusivo de los matemáticos ni de los informáticos si no que es un campo importante y excitante de la Administración de Organizaciones en las cuales desarrollaran su futura tarea profesional.

Quizás de manera simplista, podemos decir que la asignatura se basa en dos premisas fundamentales: Enseñar a modelar, a pensar una situación en términos sistémicos y conocer una serie de herramientas informáticas que nos ayuden con la solución.

Este pequeño manual obviamente no pretende ser original en su contenido teórico, tratándose de una disciplina que dispone de miles de libros y material al respecto de cada uno de los temas que trata. En todo caso, si cabe, la originalidad del mismo tiene que ver con la compilación de una serie de artículos, trabajos y apuntes, muchos de ellos bajados de la para mi fascinante aldea global (World

Wide Web), que creo contribuirán a ampliar los conocimientos de los alumnos y profesionales que quieran apoyarse en sus decisiones con la información brindada por estos modelos a fin de reducir esta incertidumbre propia de la realidad.

No hay en este apunte grandes deducciones de las técnicas cuantitativas ni el mismo pretende cubrir la totalidad de la temática de la disciplina ya que para eso, como mencione antes, existe una infinidad de excelentes libros y artículos disponibles.

Como se verá hay indicaciones de cómo usar el software disponible y como este puede resolver los modelos que el estudiante construyo en hojas electrónicas para responder a preguntas sobre su comportamiento. El que escribe asume su compromiso de la mejora continua de este material esperando enriquecerlo con los comentarios y sugerencias de los alumnos.

Cabe también mencionar que si bien existe una infinidad de software para soluciones y estupendos programas comerciales para simulación y programación, concentraremos nuestros esfuerzos sobre uno de los programas que consideramos la “lingua franca” de la era informática: el Excel de Microsoft. Esta planilla dispone de recursos increíbles permitiendo una rápida comprensión de la misma y es una herramienta que seguramente está en la pantalla de todos los profesionales del mundo. (Lleva ya más de 35 millones de licencias). Esto hace que este software permita intercambio de datos e información entre una amplia comunidad de usuarios a diferencia de programas quizás mas abarcativos pero de mayor dificultad y obviamente mayor costo. Junto con esta herramienta se utilizaran otras de libre disponibilidad como el WIN QSB de Yih-Long Chang ampliamente utilizado en Universidades del país y el mundo, y se mencionaran usos de herramientas comerciales que están adquiriendo gran peso por su carácter de Add In del propio Excel, tales como Cristal Ball de Decisioneering, Inc., el @Risk de Palisade Corporation y el Tree Plan de Decisión Support Services (DSS).

Es importante recordar que los modelos no toman decisiones, los conceptos de “soluciones óptimas” mencionados se refieren a los modelos y solo el administrador podrá saber si funcionan en el mundo real y los ajustes que deberán hacerse para aproximarse a él.

Seguramente se preguntaran cual es el sentido de estos modelos si no siempre nos garantizan su éxito en la realidad? La respuesta es fácil: Aquí se puede fracasar sin costos y además…..siempre es mejor tener una aproximación a no tener nada.

Pero recuerde: el que construye el modelo es Ud. Aprenda a hacerlo y vera el efecto. Desarrolle el habito…y espero que esto le sea de utilidad.

Roberto Carro

Mar del Plata. Invierno 2006

APLICACIONES DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.

Con el fin de clarificar algunos usos prácticos de la asignatura, me permito listarles una serie de aplicaciones que dan énfasis en esto último, para lo cual he tomado de la pagina comercial de una consultora argentina *MGM Management* que ofrece estos servicios profesionales.

Me parece de enorme valor para el estudiante saber que temas donde se requiere su esfuerzo tienen requerimientos de mercado y aplicación comercial, siendo ofrecidos por empresas locales. Esto se puede consultar en: http://www.mgmconsultores.com.ar/Paginas/Index.htm

Esta consultora ofrece en su página los siguientes servicios con aplicaciones de IO:

- Programación de empresas de producción
- Selección de medios en publicidad
- Acortamiento de proyectos PERT/CPM
- Selección de puesta en marcha de equipos
- Selección de proyectos de inversión
- Selección de alternativas de inversión
- Selección de portfólios de inversión
- Análisis de problemas de inventários
- Comparación de costos entre producir y tercerizar
- Optimizar costos de procesos productivos
- Maximizar benefícios y rentabilidades
- Uso de recursos intercambiables
- Valuación de empresas e inventarios
- Diseño de planes de vuelo en aerolíneas
- Selección de alimentos en restaurantes
- Selección de requerimentos nutricionales
- Optimización de fórmulas de medicamentos
- Planes de producción, optimizar el planeamiento
- Carga de maquinas de trabajo
- Optimización en turnos de trabajo continuo y/o rotativos
- Puesta en marcha de equipos de generación
- Balances de flujo en redes de distribución
- Distribución de dársenas en marinas de yates y veleros
- Frecuencias de recorridos en empresas de transportes

- Optimizaciones Múltiples (maximizar y Minimizar)
- Optimización por objetivos multiples
- Ubicación y localización de centros de servicios o producción
- Planes de vuelos de aerolíneas, costos de combustibles
- Mezcla de productos en industria cosmetología y farmacéutica
- Programación de la vigilancia de edificios y centros comerciales
- Optimización de planificaciones y presupuestos financieros
- Optimización de puntos de equlibrio
- Planeamiento de dietas reducidas en calorías
- Presupuestación de capital
- Administración agrícola, analisis de rentabilidades
- Análisis de acopio y ventas de cereales, capacidades de silo
- Programación de personal en cadenas de restaurantes y hoteles
- Producción de recursos forestales y explotación optima
- Presupuestos de capital decidir sobre ampliar o expandir
- Predicción de ventas, control de inventarios, producción y distribución Desarrollo de redes de servicios, selección y despliegue de flotas de aviones, camiones, autos, barcos, trenes, etc.

Transporte de Bienes y Servicios

- Diagramación de recorridos
- Diseño de sistemas de distribución
- Entregas de mercaderías
- Localización de depósitos
- Planes de vuelo en aerolineas
- Sincronización de semáforos
- Transportes de personal
- Producción y distribucion de autopartes
- Determinacion de costos marginalesl

Asignación de Tareas o Responsabilidades

- Asignación de los mejores vendedores a zonas o territorios
- Asignación de los mejores jugadores a equipos
- Asignación de locales en centros comerciales y galerías
- Asignación de auditorias múltiples
- Análisis de ofertas y demandas desiguales
- Ventas de terenos en countries o cementerios parques

Cadenas de Distribución con Transbordo

- Sistemas de distribución de bienes y servicios
- Producción y transportes de fluidos (gas, líquidos)
- Transporte multimodal (utilización optima)
- Planeamiento de la producción y financiero
- Análisis de ubicación de centros de distribución

Rutas Más Cortas

- Transporte de servicios o mensajes
- Instalación de redes de computadoras
- Suministro logístico a obras en construcción
- Trafico de mensajes entre redes de computadoras
- Ubicación de alarmas y detectores de humo y gas
- Ubicación de torres de telefonía celular y radar

Flujo Máximo

- Redes de cañerías para transporte de fluídos
- Flujo sobre autopistas y rutas alternativas
- Correo electrónico de redes corporativas
- Transacciones en un sistema bancario
- Distribución de crudo por redes de cañerias

Expansión de Arboles con Minima Distancias

- Workflow de mensajes por redes corporativas
- Recorridos de distribución de bienes y servicios
- Guías en parques nacionales y centros turísticos
- Enlaces y empalmes de redes (telefonia,agua,gas,etc)

Programacion cuadratica

- Programa de capacitación en empresas de servicios
- Análisis y selección de carteras de alto riesgo
- Licitación de títulos públicos
- Análisis de flujos de caja en empresas
- Diagnóstico de representantes de ventas de bienes y servicios

Planificación de Proyectos (PERT/CPM)

- Conceptos sobre tareas duración y precedencias
- Diagramas de Gantt y CPM/PERT
- Variabilidad en el proyecto, técnica pert
- Asignación de recursos
- Calendários de proyectos
- Utilización de márgenes libes y totales
- Recortes en la duración de proyectos
- Recortes en los costos del proyecto
- Presupuestos de tiempo, recursos y costos
- Informes de seguimiento y control de proyecto
- Curvas de costos vs duración de proyectos y viceversa

Análisis de Inventarios

- Inventários con demanda conocida
- Costos de mantenimiento de inventários
- Puntos de reposición y niveles de seguridad
- Tamaños econômicos de lotes de compra
- Costos de mantenimiento anual del sistema
- Compras con descuentos por cantidad y óptimos
- Programacion de inventários negativos
- Inventários con demanda variable, analisis probabilístico
- Planeamiento de los requerimientos, método MRP
- Rotación anual de inventários

Modelos de colas o espera

- Problemas de disponibilidades en centros hematológicos
- Problemas de distribución de camas en hospitales
- Problemas de distribución de teléfonos en empresas
- Contratación de servicios de reparaciones
- Problemas de colas en pago de impuestos y servicios
- Circulación de barcos por vías navegables y puertos
- Saturación de centrales telefonicas por reclamos de clientes
- Diseño de planes de telemarketing

Modelos de Asignación

- Selección de alternativas de inversión
- Evaluación del riesgo en toma de decisiones
- Métodos adaptables a la personalidad del decisor
- Uso de probabilidades en tomas de decisiones
- Construcción de tablas de rendimientos
- Decisiones de mínimo y máximo riesgo
- Teoría de Bayes para valuación de rendimientos
- Arboles de de decisión para seguimiento de inversiones
- Aplicaciones de medicina de diagnóstico
- Arboles de fallas y diagramas de secuencia
- Aplicación a la selección de portfolios de alto riesgo
- Valor de estúdios de mercados encarados por consultores
- Usos de la función de utilidad en toma de decisiones
- Aplicación a las decisiones secuenciales

Simulación de empresas de producción y servicios

- Circuitos de clearing bancarios Optimización de tratamientos
- Apagado de incendios forestales, evaluación de costos y alternativas
- Mínima cantidad de empleados para desarrollar procesos o proyectos
- Evaluar calidad de servicios en sistemas de supermercados, bancos, etc.
- Mejorar sistemas de inspecciones y control de calidad
- Accesos y saturación de exposiciones, galerías de arte, convenciones, etc.
- Diseños de planes de contingencia en informática y servicios
- Simulación de problemas en torres y edificios inteligentes
- Simulación de talleres de reparación de vehículos y aeronaves
- Simulación y Optimización de tráfico en aeropuertos comerciales
- Simulación de explosivos y alcances de la onda expansiva
- Simulación de cortes de autopistas y avenidas principales
- Simulación de procesos de fabricación seriados
- Sincronización de semáforos y señales de tráfico
- Interferencias en sistemas de comunicaciones
- Diseño de planes turísticos para contingentes
- Carga máxima sobre redes de computadoras, demoras probables
- Simulación de sistemas de peajes manuales y automáticos
- Simulacion de playas de estacionamiento
- Simulación de destilerías y reparto de combustibles

- Simulación de cuellos de botella en procesos de producción
- Evaluación de rutas alternativas en sistemas logísticos
- Evaluación de calidad de servicios y problemas de colas
- Simulación de circuitos administrativos
- Simulación de hospitales y clínicas privadas
- Evaluación de sobrecarga en hospitales públicos
- Evaluación de problemas sociales y desbordes en manifestaciones
- Simulación de fallas en equipos de alto riesgo
- Optimización y sincronización de empleados en supermercados
- Simulación de problemas en empresas de seguridad privada
- Evaluación de rentabilidades en distribución de terrenos en countries
- Simulación de empresas completas con problemas administrativos
- Simulación de problemas ecológicos y consecuencia sobre ecosistemas
- Simulación de problemas en empresas aeronáuticas
- Simulación de flotas de taxis, remises, motos, etc.
- Simulación de recorridos en empresas de transportes
- Evaluación de rutas alternativas en distribución de bienes y servicios
- Simulación de dársenas en terminales portuarias
- Evaluación de costos de operación en terminales portuarias
- Optimización de arribos y salidas en terminales de ómnibus
- Optimización de sistemas de calidad total y tratamiento de demoras
- Análisis de espacios físicos para tratamientos de distribución de bienes
- Simulación de deterioros de materiales químicos, documentos y otros
- Simulación y optimización de presupuestos financieros y flujos de caja
- Evaluación de alternativas de colas en circuitos bancarios
- Análisis estadístico de costos de distribución de correspondencia
- Simulación de servicios de garantías y reparación en concesionarios
- Análisis y consecuencias de fallas en sistemas de distribución eléctrica
- Simulación de médios de desembarque en grandes supermercados

Como se ve en esta oferta de una firma comercial, La temática bien podria corresponder al índice de esta asignatura.

LA INVESTIGACION DE OPERACIONES

Como su nombre lo dice, la investigación de operaciones significa "hacer investigación sobre las operaciones". Entonces, la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de *operaciones* (o actividades) dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la investigación de operaciones se ha aplicado de manera extensa en áreas tan diversas como la manufactura, el transporte, la constitución, las telecomunicaciones, la planeación financiera, el cuidado de la salud, la milicia y los servicios públicos, por nombrar sólo unas cuantas. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia.

La parte de *investigación* en el nombre significa que la investigación de operaciones usa un enfoque similar a la manera en que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. En gran medida, se usa el *método científico* para investigar el problema en cuestión. (De hecho, en ocasiones se usa el término *ciencias de la administración* como sinónimo de investigación de operaciones.) En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Después, se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificarla si es necesario y eventualmente verificarla. (Con frecuencia este paso se conoce como *validación del modelo*.) Entonces, en cierto modo, la investigación e operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la IO se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

Una característica más de la investigación de operaciones es su amplio punto de vista. la IO adopta un punto de vista organizacional. de esta manera, intenta resolver los conflictos de intereses entre las componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema deba considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización sino que los objetivos que se buscan deben ser consistentes con los de toda ella.

Una característica adicional es que la investigación de operaciones intenta encontrar una *mejor* solución, (llamada *solución óptima*) para el problema bajo consideración. (Decimos una mejor solución y no la mejor solución porque pueden existir muchas soluciones que empaten como la mejor.) En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado en términos de las necesidades reales de la administración, esta "búsqueda de la optimalidad" es un aspecto importante dentro de la investigación de operaciones.

Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo sea un experto en todos lo múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades. Entonces, cuando se va a emprender un estudio de investigación de operaciones completo de un nuevo problema, por lo general es necesario emplear el *empleo de equipo.* Este debe incluir individuos con antecedentes firmes en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, ciencias de la computación, ingeniería, ciencias físicas, ciencias del comportamiento y, por supuesto, en las técnicas especiales de investigación de operaciones. El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades necesarias para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización.

La definición de Churchman, Ackoff y Arnoff:

La investigación de operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre-máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.

Colocaremos en idioma original la definición internacionalmente aceptada que coincide con la mencionada anteriormente.

Operations Research: It was defined by the Operational Research Society of Great Britain as follows (OPERATIONAL RESEARCH QUARTERLY, l3(3): 282, l962): Operational research is the attack of modern science on complex problems arising in the direction and management of large systems of men, machines, materials and money in industry, business, government and defense. Its distinctive approach is to develop a scientific model of the system, incorporating measurements of factors such as change and_risk, with which to predict and compare the outcomes of alternative decisions, strategies or controls. The purpose is to help management determine its policy and actions scientifically.

PRIMERA PARTE

LOS MODELOS

Capitulo 1: INTRODUCCION A LOS MODELOS

¿Porque los modelos? : La modelización es el centro del proceso de toma de decisiones

El proceso estructurado de modelización es el centro de la actividad en Investigación de Operaciones. Es por eso que la pregunta pertinente es, "¿Se asemeja el modelo al mundo real?". El modelo no es la realidad, pero sí contiene partes de ella, entonces cabe otra nueva pregunta que debemos hacernos es: "¿Contiene el modelo las partes importantes que son relevantes para el problema de decisión?"

El razonamiento y los cálculos simbólicos son fundamentales para la modelización analítica (es decir, matemática). Por lo tanto, como ocurre con cualquier idioma extranjero, se debe desarrollar una comprensión de la matemática, que es el idioma de todas las ciencias, incluido el proceso de modelización en IO que apunta a asistir a quien decide[1].

Un modelo mental es la representación de los pensamientos de quien decide sobre la realidad. Por lo tanto, es una exteriorización de la realidad. Los modelos matemáticos emplean símbolos y notaciones, incluidos los números. De este modo, existen tres conceptos diferentes: la realidad, el modelo mental y su representación. En todas sus formas, la modelización analítica es un procedimiento que reconoce y verbaliza un problema y luego lo cuantifica convirtiendo las palabras en expresiones matemáticas.

La modelización es un proceso estructurado de pensamiento focalizado y consecutivo que ayuda a comprender los problemas de decisión.

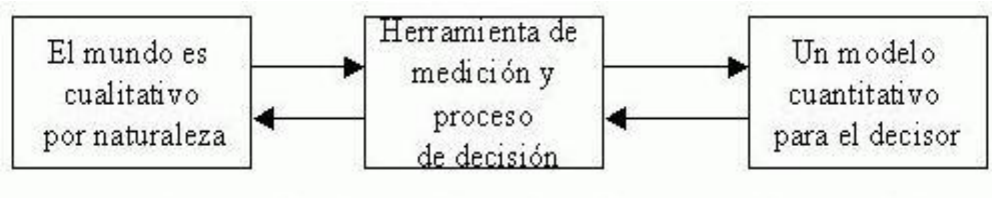
La IO es un abordaje sistemático para la solución de problemas. Recurre al trabajo en equipo para capitalizar el talento de los especialistas en IO en la evaluación, coordinación e incorporación de conocimientos relevantes aportados por expertos en otras áreas, apuntando a la solución de un determinado problema (también conocido como abordaje de think-tank).

Mediante la aplicación de un abordaje científico, los gerentes también pueden realizar predicciones exactas de lo que no tienen bajo control.

[1] *Con IO simbolizaremos a lo largo de este texto Investigación de Operaciones*

La información cualitativa puede caracterizarse y procesarse mediante la asignación de números. Así, para cuantificar el mundo utilizamos algunas escalas mensurables y numéricas.

Podemos comprender el mundo encontrando relaciones y utilizando la manipulación, la comparación, el cálculo, etc. y luego utilizar la misma escala para adaptarlo nuevamente al mundo.



La necesidad de un sistema de escala mensurable y numérica

Los modelos pueden clasificarse de acuerdo a sus características; por ejemplo, como se observa en la siguiente figura.

Clasificación del conocimiento:	*Conocimiento sobre objetos, eventos, procesos, relaciones*
Tipos de comprensión:	*Entender, interpretar, relacionar, seleccionar, recordar, comparar*
Tipos de análisis:	*Relacionar, comparar, interpolar, extrapolar, generalizar, especificar*
Resultados de las evaluaciones de modelos:	*Aceptar, rechazar, posible, irrelevante*

La modelización analítica es más que un conjunto de conceptos y habilidades que deben dominarse; incluye métodos de investigación y razonamiento, y los medios de comunicación (es decir, hacer común lo experimentado individualmente). El modelo matemático que se confeccione puede incluirse o no dentro del informe, dependiendo del destinatario. El equipo de IO debe necesariamente redactar un informe que resulte comprensible a todos los que lo lean.

La modelización analítica en el proceso de toma de decisiones

Una decisión es una elección razonada entre alternativas. La toma de decisiones forma parte del tema más amplio de solución de problemas. Si bien la ciencia de la administración puede utilizarse para construir un modelo matemático, no sirve si la comunicación del resultado es demasiado compleja para el decisor.

Relacionado con la importancia de la comunicación en la modelización en IO se ha descubierto que las personas tienden a complicar las cuestiones más de lo necesario. El mayor problema sucede con los informes escritos. Existe el "temor" generalizado de parecer poco sofisticado - o aún más, poco inteligente- si uno escribe directo y sencillo. El resultado final es un producto incomprensible para el decisor. Para evitarlo, el análisis debería ser por etapas. Como dijimos antes se debe redactar un informe que resulte comprensible para todos los que lo lean.

El procedimiento general a seguir en el ciclo del proceso de decisión tiene los pasos conocidos en las herramientas de la teoría de la Administración: describir el problema, recomendar una solución y controlar el problema mediante la evaluación y actualización continúas de la solución estratégica, haciendo frente a las condiciones cambiantes del negocio. No hay duda de que siempre existe una realimentación entre estos tres pasos.

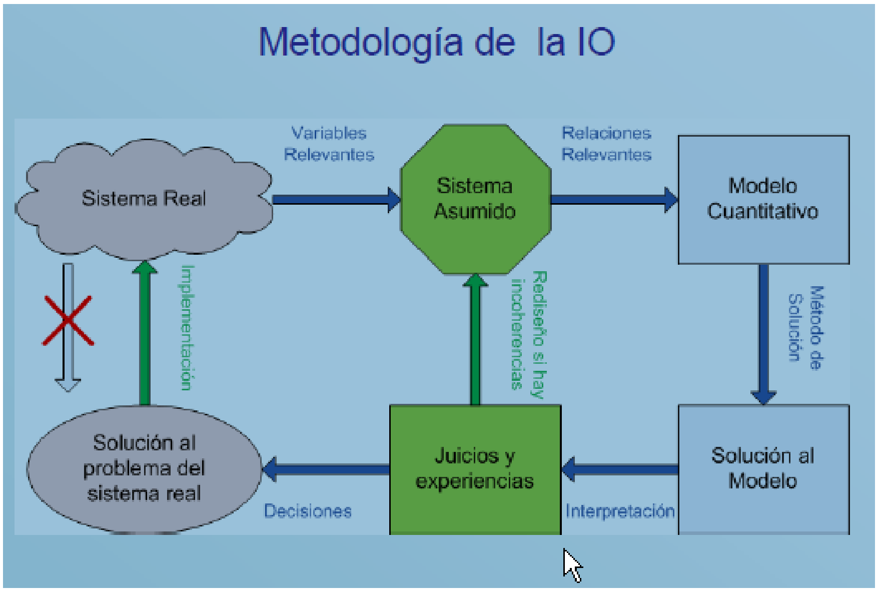
Los tres pasos de este proceso son similares al proceso estructurado que se sigue para el tratamiento de una enfermedad. Cuando un paciente tiene un problema de salud va al médico para solucionarlo. Para tal fin, el médico, con la participación del paciente, *describe* el problema mediante un análisis de sangre o de rayos X, diagnosticando la enfermedad. Luego, el médico *receta* medicamentos (prescripción de medicación). Hay también visitas de seguimiento para asegurarse de que la acción elegida es efectiva en la curación del paciente; caso contrario, el médico *cambia* la medicación. En esta analogía, el médico representa al profesional de la IO y el paciente al decisor (el dueño de los problemas).

Descripción del problema: Ni bien se detecta un problema, se debe analizar y comprender, para luego poder describirlo correctamente por escrito. Se debe desarrollar un modelo matemático o marco para representar la realidad, con el fin de idear posibles soluciones. Se debe validar el modelo antes de ofrecer una solución. Sin duda, para ello necesitará poder manejar ***varias perspectivas diferentes*** para acercarse a la realidad lo más posible. Cuando se combinan diferentes modelos desde diferentes perspectivas, se obtiene una comprensión mejor.

Se debe ser más concreto que abstracto. Identificar los factores que influyen en su decisión, y averigüar qué tiene y qué no se tiene bajo control. A menos que el problema haya sido claramente formulado por el científico de administración, y que el dueño del problema lo haya aceptado como propio, es probable que éste rechace la solución estratégica. En algunos casos, la solución estratégica de un problema existente puede crear problemas nuevos. El proceso de modelización en IO por si solo no resolverá ningún problema de decisión, ni está diseñado para ello. Su objetivo principal es producir ideas y promover la creatividad para ayudar a los decisores a tomar una decisión "acertada".

Lo más importante en la toma de decisiones es entender el problema. Recordar que la formulación de un problema es generalmente más importante que su solución. De hecho, si usted puede entender el problema, por lo general, el mismo problema le dirá cómo resolverlo.

Prescripción de una solución: Es la identificación de una solución estratégica y su etapa de implementación. Hay que buscar una solución estratégica utilizando las técnicas de solución que tiene la IO y que veremos mas adelante. Todo problema de decisión gerencial tiene varias soluciones. Lo que se desea lograr es una solución estratégica satisfactoria, también llamada "decisión acertada". No existe cosa tal como **"la"** solución para los problemas del mundo real. Las soluciones dependen del presupuesto, del tiempo y de muchas otras restricciones y condiciones.



INTERPRETACIONES GERENCIALES

El problema de decisión con frecuencia lo enuncia el decisor en términos no técnicos. Cuando usted analiza el problema y descubre el módulo de software que debe utilizar, lo utilizará para obtener la solución. La solución estratégica también debería presentársele al decisor en terminos que él pueda entender. Por lo tanto, no es conveniente entregar sólo las salidas impresas de la computadora. Debe darle además una interpretación gerencial de la solución estratégica, en términos no técnicos.

Actividades de monitoreo posteriores a la prescripción: Estas actividades comprenden la actualización de la solución estratégica para controlar el problema. Sabemos que una de las partes de la gestión es controlar. Sabemos que, "todo cambia", nada permanece. En este mundo en permanente cambio en el que nos toca vivir es crucial actualizar periódicamente las soluciones de todos los problemas planteados. Aún un problema que es válido ahora puede dejar de serlo por cambios en las condiciones, transformándose así en una representación inexacta de la realidad, afectando en forma negativa la capacidad del decisor de tomar decisiones acertadas. Todo modelo que usted pueda plantear debería poder responder a los cambios.

A diferencia de algunas ecuaciones matemáticos (por ejemplo, la ecuación 2X - 6 = 0, donde sólo existe una única solución correcta), los problemas de la vida real no tienen una única solución correcta. No pueden *"resolverse una vez y para siempre".* Se debe aprender a vivir con su naturaleza dinámica, es decir, a actualizar las soluciones.

Por lo tanto, en este sentido, el proceso de modelización en IO para la solución de problemas no es una ciencia exacta como la matemática, sino una donde las decisiones las debe tomar finalmente el decisor.

La importancia de la realimentación y el control: Es necesario hacer nuevamente énfasis en la importancia que tiene pensar en los aspectos de realimentación y control en un problema de decisión. Sería un error en el análisis del contexto del proceso de decisión en IO ignorar el hecho de que jamás encontraremos una solución inmutable al problema de decisión de negocios. La misma naturaleza del medio donde se toma la decisión es de cambio, y por lo tanto, la realimentación y el control son una parte importante del contexto del proceso de modelización en IO.

Validación del modelo: La validación es el proceso de comparación de la salida del modelo con el comportamiento del fenómeno; es decir, compara la ejecución del modelo con la realidad. Validar tiene que ver con la siguiente pregunta: "¿Estamos construyendo el modelo correcto?"

La validación sólo puede demostrarse en relación con algún uso pretendido del modelo. No hay duda de esto, ya que ningún modelo puede capturar siempre perfectamente todos los detalles de un sistema real (ni tampoco queremos que lo haga). Sólo se puede decidir qué tipo y grado de desviación entre el modelo y la realidad es aceptable en relación con el marco al cual se lo va a destinar.

Durante la validación, el profesional en IO se pregunta: "¿Qué tiene que ver este modelo con el mundo real?" Por último, como es más fácil hacer planes que ejecutarlos, los modelos que no se van a implementar no se elaboran correctamente ni se toman con seriedad desde el comienzo.

Aquí hay una pregunta que tomamos del profesor Hossein Arsham como mucho de este material: "¿Por qué un pez pesa más muerto que vivo?"

Esta pregunta "¿por qué un pez pesa más muerto que vivo?", se hizo ante los miembros de la Royal Society. Provocó intentos de explicación extensos y en ocasiones ingeniosos; pero desafortunadamente en ningún momento se consideró el importante hecho de que la afirmación era falsa. En nuestra prisa por deducir la solución olvidamos analizar el problema mismo. Debemos analizar cuidadosamente la información y su validez en el momento en que la recibimos.

Verificación del modelo: La verificación es el proceso de comparación entre el programa informático y el modelo para garantizar que el programa sea la implementación correcta del modelo. Durante la verificación, se controla la implementación informática del modelo.

Son varias las razones por las que un modelo podría fallar en el paso de validación. A veces, el modelo es demasiado complejo de trabajar y, por lo tanto, no puede ser verificado apropiadamente.

Algunas sugerencias para simplificar modelos complejos.

1. Convierta algunas variables en constantes.
2. Elimine algunas variables por completo.
3. Use relaciones lineales en lugar de relaciones no lineales.
4. Añada presunciones y restricciones más fuertes.
5. Suprima el factor aleatorio.

Por supuesto, una vez obtenido, un modelo válido se pone en práctica como elemento de ayuda a la toma de decisiones. Si bien esta tarea puede sonar sencilla no es algo a dar por sentado. El desarrollador puede arribar a un modelo que puede demostrar que permite ahorrar miles de pesos por año, pero que no vale nada si la persona que debe usarlo no lo acepta. Esto puede suceder porque el decisor no entiende el modelo o las técnicas usadas para resolverlo o el desarrollador del modelo no entiende al gerente y el entorno al que el gerente está asociado. Son las fuentes que el gerente consulta, la base del lenguaje que utiliza, y las fuentes de los criterios que establecen qué le resulta importante y qué no. Esto reafirma el concepto de que si el desarrollador del modelo y el decisor no son la misma persona, al desarrollador le convendría incluir al decisor en todos los pasos del proceso de construcción. De esta manera, aumentan en gran medida las posibilidades de que se implemente adecuadamente el modelo.

Consideraciones de costos:

La construcción del modelo puede resultar muy cara. Puede no ser prudente gastar $500.000 para desarrollar un modelo que puede retornar $50.000. La razón por la cual es tan caro construir estos modelos es que pueden volverse muy complejos a medida que se agregan entradas y restricciones. Lleva mucho tiempo identificar y correlacionar correctamente estos elementos en un modelo matemático, y este modelo debe ser una interpretación correcta de un sistema complejo. La complejidad alimenta una gran cantidad de cosas que pueden salir mal o malinterpretarse, lo que da como resultado que el modelo en su totalidad no responda a la realidad. Una hipótesis aún peor es que el modelo puede responder con total falsedad. En este caso, los resultados pueden ser desastrosos para el proceso de toma de decisiones y para la empresa misma. La exactitud es lo más importante tanto en la definición del problema como en la expresión matemática.

LAS DIFICULTADES DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN ANALÍTICA

La mayoría de los problemas del mundo real no pueden formularse adecuadamente como modelos matemáticos. Como los problemas del mundo real son por lo general en gran escala, deben establecerse en forma algebraica para resolverlos por medio de algoritmos computarizados. El creador del modelo debe analizar las características del problema para formular y representarlo como un modelo analítico válido. Casi todos los problemas del mundo real se caracterizan por presentar las siguientes dificultades:

1. Muchas metas "confusas" conflictivas (objetivos).
2. Falta de especificidad en cuanto a cuáles son las decisiones variables (y por lo tanto, variables sujetas a control) y las entradas fijas (parámetros).
3. La incertidumbre en cuanto a los límites o restricciones de las variables de decisión y sus funciones.
4. Falta de conocimiento de las relaciones de causa y efecto.
5. Elementos estocásticos (probabilidades).

6. El carácter dinámico subyacente que produce que las metas, restricciones y relaciones de causa y efecto varíen en el tiempo.
7. Inaccesibilidad a los datos necesarios para especificar el problema.
8. Descripción cualitativa de algunos de los datos.
9. La posibilidad de consecuencias imprevistas resultantes de la alteración de las condiciones existentes o la imposición de otras nuevas.

Estas dificultades podrían superarse representando el problema de decisión como un modelo analítico, utilizando una o varias de las diferentes estrategias que se detallan a continuación:

1. La creación de una función única de desempeño (u objetivo).
2. La especificación de las variables del problema.
3. La determinación de los límites exactos de las variables del problema (o, en forma más general, de las funciones de las variables del problema).
4. La determinación de las funciones; formas y parámetros que describen la forma funcional.
5. La resolución de los elementos estocásticos (inciertos) mediante la creación de una forma determinista o evaluaciones de probabilidades.
6. La conciliación de la naturaleza dinámica del problema y la conversión a un modelo estático, y la revisión periódica del modelo.
7. La solución del problema de recopilación de datos.
8. La cuantificación de los datos.
9. La inclusión de todos los elementos importantes y consecuencias imprevistas de cambios en las variables del problema.

Si queremos que los modelos desempeñen un papel útil en la toma de decisiones de negocios, debemos conocer qué podemos recibir de un modelo y del proceso de construcción del modelo. Para comprender el significado de las técnicas que se emplean en la toma de decisiones en IO debemos tener una idea del papel que juega el modelo y el proceso de su construcción.

Una de las claves del éxito en modelización es reconocer que un modelo es una abstracción. Los modelos no se construyen para proporcionar la única respuesta a un problema de decisión. Por el contrario, suministran información útil para la toma de decisiones. El modelo no debiera tener todas las complejidades de la realidad. Si las tuviera sería extremadamente difícil de resolver y probablemente le daría pocas ideas, o información, al decisor. A la inversa, el modelo no debe ser una excesiva simplificación que se asemeje poco al mundo real. El buen modelo goza de equilibrio.

Todos los modelos, incluidos los verbales, los mentales y los matemáticos, contienen variables independientes, variables dependientes, parámetros y constantes. En los modelos verbales, estos elementos se reúnen en forma libre y muchas veces intuitiva, permitiendo el entendimiento y facilitando la comunicación. Cuando pasamos de los modelos verbales a los mentales y matemáticos, las relaciones entre las variables y los parámetros se torna más específica. El grado de especificidad necesario determina el tipo de modelo que se usará en cada situación determinada.

El proceso de construcción del modelo es un proceso iterativo. Nadie, ni siquiera el desarrollador de modelos más experimentado, desarrolla un modelo utilizable en una sola operación directa. En cambio, el proceso es de formulación y validación tentativas, seguidas de instancias de reformulación y revalidación, hasta que se alcanza un cierto grado de confianza en la utilidad del modelo.

¿Por qué distintos gerentes toman distintas decisiones con respecto a un determinado problema? ¿Por qué somos todos diferentes? Porque todos tenemos distintas experiencias y antecedentes únicos. Cada experiencia de la vida forma nuestra mente de una manera única. El conocimiento es un fenómeno biológico. Cada ser humano experimenta el mundo a su manera. A través de sus procesos internos, cada ser humano participa de una relación creativa con el mundo externo, aportando miles de modelos distintos.

LAS BRECHAS ENTRE EL DISEÑO Y LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

Desafortunadamente, existen brechas entre la teoría y la aplicación de los modelos para la toma de decisiones.

Motivo de las Brechas:

Existe una serie de factores que contribuyen a la existencia e incluso al crecimiento de la brecha, entre otros:

1. Los problemas reales son difíciles de definir y por lo general resulta complicado realizar un análisis o crear un modelo de los mismos.
2. Como es más fácil desarrollar planes que llevarlos a cabo, los modelos que no se van a implementar no se confeccionan correctamente ni se toman en serio desde el comienzo.
3. Con frecuencia los datos están dispersos, son incompletos e inexactos. Algunas empresas se conforman con resultados aproximados a fin de ahorrar costos y obtener resultados más rápido. Los resultados aproximados utilizan menos datos y más hipótesis. Este abordaje lleva menos tiempo de recopilación y por ende implica un ahorro de dinero.
4. Se requiere una estrecha colaboración entre el creador del modelo y el dueño del problema. Por lo general no hay colaboración porque la organización no ve un beneficio directo y muchas veces inmediato. La

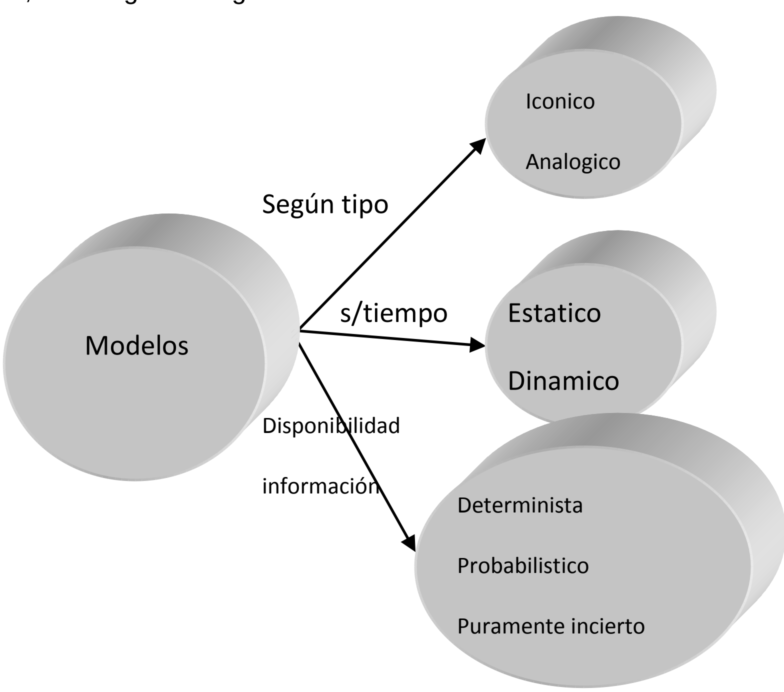
organización tampoco confía en la capacidad de cumplir sin causar algún daño. La experiencia de otros casos es útil para establecer la confianza y la predisposición a cooperar.

5. Existe una necesidad de influir en la cultura y la actitud hacia el diseño de modelos dentro de la comunidad de negocios y esto requiere gerentes más capaces y mejor capacitados. Muchas empresas realizan una inversión considerable en una promoción de marketing y una pequeña inversión en el estudio de su efectividad.
6. Los gerentes no están bien capacitados en los conceptos y/o el uso de los modelos analíticos.
7. Los creadores de modelos deben abordan los problemas que el gerente considera importantes desde una perspectiva de ahorro de costos.

CLASIFICACION DE LOS MODELOS:

En general los modelos de toma de decisiones se pueden clasificar en dos categorías: modelos de decisión determinísticos y modelos de decisión probabilísticos.
En los modelos deterministicos, las buenas decisiones se basan en sus buenos resultados. Se consigue lo deseado de manera "deterministica", es decir, libre de riesgo. Esto depende de la influencia que puedan tener los factores no controlables en la determinación de los resultados de una decisión y también en la cantidad de información que el tomador de decisión tiene para controlar dichos factores.
A diferencia de los modelos deterministas donde las decisiones acertadas se evalúan sólo según los resultados, en los modelos probabilisticos, el decisor se preocupa tanto por el valor del resultado como por el grado de riesgo involucrado en cada decisión.
El decisor debe identificar cuál es el tipo de modelo que mejor se adecua al problema de decisión. Es por eso que analizaremos una clasificación de los modelos antes de entrar en el proceso de construcción del modelo. Si bien la IO se concentra principalmente en los modelos matemáticos, los otros tipos de modelos también prevalecen en la práctica.

Los modelos pueden clasificarse según sus características, como sus tipos, evolución en el tiempo y disponibilidad de información, como se ilustra, por ejemplo, en la siguiente figura.



Una clasificación de los modelos

Los modelos icónicos son usualmente estáticos por naturaleza. Los modelos análogos también son físicos; sin embargo, aunque fueron diseñados para actuar como la realidad habitualmente no se le parecen. Son en su mayor parte modelos mecánicos. En cambio, *las actividades de negocios son procesos dinámicos*. El negocio es un proceso que sigue patrones matemáticos. Por lo tanto, puede representarse mediante modelos simbólicos (es decir, algebraicos, numéricos, lógicos). Entre los modelos simbólicos encontramos una gran clase conocidos como modelos matemáticos y de simulación por computadora (computer simulation).

Modelos mecánicos: El modelo que adopta la apariencia física del objeto que debe representar se llama modelo físico. Este tipo de modelo se usa para mostrar o probar el diseño de elementos, desde nuevas construcciones hasta nuevos productos. En la industria de la aviación, se construyen modelos a escala de las nuevas aeronaves que se prueban en túneles de viento para registrar la aerodinámica del diseño. El fabricante de repuestos automotrices puede tener un modelo a escala tridimensional del piso de la planta, completo con máquinas y equipos en miniatura, para poder analizar un nuevo diseño de la distribución. Las máquinas en el modelo pueden reubicarse y estudiarse nuevas distribuciones con el objeto de mejorar el flujo de materiales.

Los modelos mecánicos ofrecen la ventaja de que pueden usarse para experimentar. En el ejemplo de la aeronave, los ensayos con un diseño diferente quizás impliquen construir un modelo completamente nuevo. Además de la ventaja de la experimentación, los modelos mecánicos lúcidamente describen el problema o sistema que se está estudiando; resultan útiles para generar alternativas innovadoras de diseño con el objeto de resolver el problema de decisión.

No obstante, sólo una clase de problemas relativamente pequeña puede resolverse con modelos mecánicos. Algunos ejemplos de problemas que no pueden analizarse con modelos mecánicos son la selección de carteras, la selección de medios para publicitar un producto , la planificación de producción y otros. Básicamente, los modelos mecánicos son útiles sólo para los problemas de diseño, e incluso en algunos de estos casos se puede hacer un análisis más eficiente y completo con modelos matemáticos que puedan correrse en computadora. Además, estos modelos mecánicos no contienen relaciones explícitas entre las alternativas de decisión y las variables y objetivos dependientes, debiendo usarse métodos de prueba y error para resolver el problema. Si bien esto, de por sí, no es una terrible desventaja, el proceso de prueba y error, sumado a la necesidad de reconstruir el modelo con cada cambio de diseño, puede demandar mucho tiempo y muchos gastos, en algunos casos.

Modelos mentales/verbales: El modelo verbal es la traducción del modelo mental. Así, el modelo mental/verbal expresa todas las relaciones funcionales entre las variables. Por ejemplo, consideremos al gerente de publicidad de una compañía que fabrica cereales para el desayuno y que hace la siguiente afirmación en relación con los comerciales de televisión del sábado a la mañana: "Un spot de 20 segundos tiene mucho más impacto en nuestro target de audiencia que uno de 15 segundos". En este ejemplo, las distintas duraciones del comercial son las alternativas de decisión; el "impacto" que podemos inferir tiene que ver con la propensión de los padres de los televidentes a comprar el cereal de la compañía y es la variable dependiente. De este modo, tenemos una relación entre las alternativas de decisión y una variable dependiente que está relacionada con los objetivos de la compañía. Estos modelos se utilizan ampliamente en el mundo de los negocios y ofrecen la ventaja de ser fáciles de entender. Con frecuencia son el afloramiento de muchos años de experiencia gerencial y sirven para resumir esa experiencia en lenguaje comprensible.

Sin embargo, los modelos mentales/verbales tienen una serie de deficiencias. El decisor no puede experimentar con ellos, tampoco indican específicamente cómo cambian los resultados o las medidas de su eficacia según la alternativa de decisión de que se trate. En el modelo mental/verbal precedente no sabemos cuánto más impacto tiene un comercial de 20 segundos versus uno de 15 segundos. La otra desventaja es que no es fácil mostrar cómo cambian las relaciones según la alternativa de decisión.

Si construyéramos un modelo mental/verbal que respondiera estas preguntas con todas las duraciones posibles del comercial, tendríamos un modelo mental/verbal muy extenso que sería difícil de entender y no se podría experimentar.

No obstante, los modelos mentales/verbales pueden jugar un rol importante en el proceso de decisión. Pueden usarse para verbalizar estrategias de decisión logradas con modelos más sofisticados.

Modelos analíticos: Los modelos analíticos son modelos matemáticos, destinados a hacer una cierta simplificación y abstracción de sistemas reales, para poder obtener más información y *para entender algún aspecto de interés de la realidad.* Sin embargo, debiera conectarse la modelización de la realidad por abstracción con problemas y dominios reales, y practicarse mediante la verificación y/o la validación. Estos tipos de modelos se aplican principalmente en los sistemas estáticos y/o deterministas.

En comparación con los modelos mecánicos, los modelos matemáticos facilitan la experimentación, porque todas las variables dependientes, las variables independientes, las constantes y los parámetros están explícitamente relacionados por el lenguaje de la matemática. El decisor puede poner a prueba los efectos de las diferentes alternativas de decisión, las constantes y los valores de los parámetros en las variables dependientes con mucha más facilidad que con cualquier otro tipo de modelo. Además, los modelos matemáticos pueden representar muchos problemas complejos de modo eficiente y conciso y, en muchos casos, pueden ser la manera más barata de analizar los problemas. Es por estas razones que vamos a analizar los distintos modelos matemáticos y las técnicas de solución que se usan con más frecuencia en la práctica.

Los procedimientos de solución pueden ser de pasada única o iterativa. El procedimiento de solución de pasada única es aquél en el que los valores finales de todas las variables de decisión se determinan simultáneamente, de acuerdo con algún procedimiento bien definido. La técnica de solución iterativa, por otra parte, es aquélla en que se requiere una serie de pasos para arribar a una solución final y donde en cada paso se reciben soluciones parciales o completas. Finalmente, la óptima es aquélla que puede demostrarse que es por lo menos tan buena como cualquier otra, dadas las presunciones del modelo, mientras que la solución satisfactoria es la que se considera "buena" con respecto a los objetivos y las restricciones, pero que sin embargo no se puede demostrar que es la mejor.

De este modo, si en el ejemplo previo del modelo normativo-estático-determinista, las variables de decisión son continuas, las relaciones son lineales y se desea hallar la solución óptima, la lista de técnicas de solución potenciales para el modelo se reduce a sólo una: la programación lineal, técnica que veremos mas adelante.

Modelos de simulación: El grado de abstracción que tienen los modelos matemáticos es un impedimento definido para su aceptación por parte de los gerentes. No es de sorprender que exista resistencia entre gerentes que no han recibido suficiente capacitación o exposición a estos modelos, y también entre gerentes que sí están capacitados pero que no tienen tiempo para prestar la debida atención al modelo. Los modelos matemáticos usan el lenguaje simbólico de la matemática que tiene sus propias limitaciones. Los modelos análogos también son físicos; si bien están diseñados para actuar como la realidad habitualmente no se le parecen. Los modelos pueden ser demasiado complejos (como, por ejemplo, el de un aeropuerto internacional) no pudiendo ser resueltos con eficiencia, y requiriendo groseras simplificaciones del problema real para poder llegar a una buena solución estratégica. En tales circunstancias, el problema que queda "resuelto" ya no se asemeja al problema original y de implementarse la solución podría resultar en efectos desastrosos en la organización.

Una selección apropiada del tipo de modelo y de la técnica de solución debiera minimizar este tipo de error. Los modelos de simulación son las duplicaciones computarizadas de los sistemas reales y, de lejos, son mucho más realistas, en especial en la modelización de sistemas dinámicos y/o probabilísticos, como el de un aeropuerto internacional.

En conclusión:

Un modelo de decisión es un modelo simbólico en los cuales algunas variables representan las decisiones que podrían tomarse.

Se trata de formular una representación de la realidad y ver cuales aspectos son pertinentes.

Un ejemplo de un análisis de pertinencia en un modelo real seria plantearse:

- ¿Para mi empresa las ganancias son una entrada (variable de decisión) o una medida de desempeño?
- ¿El precio de mi producto es una decisión o un parámetro?
- La cantidad de producto a vender es una variable de entrada o una salida?
- ¿La moral del trabajador es una medida de desempeño (que puedo influir) o un parámetro?
- ¿Cómo mido la moral? ¿Puedo usar el ausentismo?
- ¿La participación de mercado es una medida de desempeño?¿La debo medir en unidades vendidas o en ingreso?

COMPONENTES DEL PROCESO ESTRUCTURADO DE TOMA DE DECISIONES

Como el modelo de un sistema es la representación del sistema que contiene los elementos que afectan el objetivo de la decisión es importante identificar los elementos más importantes. El resultado deseado generalmente determina las entradas controlables.

Las entradas de un sistema pueden clasificarse en entradas controlables e incontrolables, como lo ilustra la figura que aparece a continuación. Los horizontes temporales de la ***revisión de modelización*** deben seleccionarse lo suficientemente cortos como para que las entradas incontrolables (o el conocimiento probabilístico que se tiene de ellas) no cambien de manera significativa. Al resultado por lo general se lo conoce como la medida de desempeño del sistema.

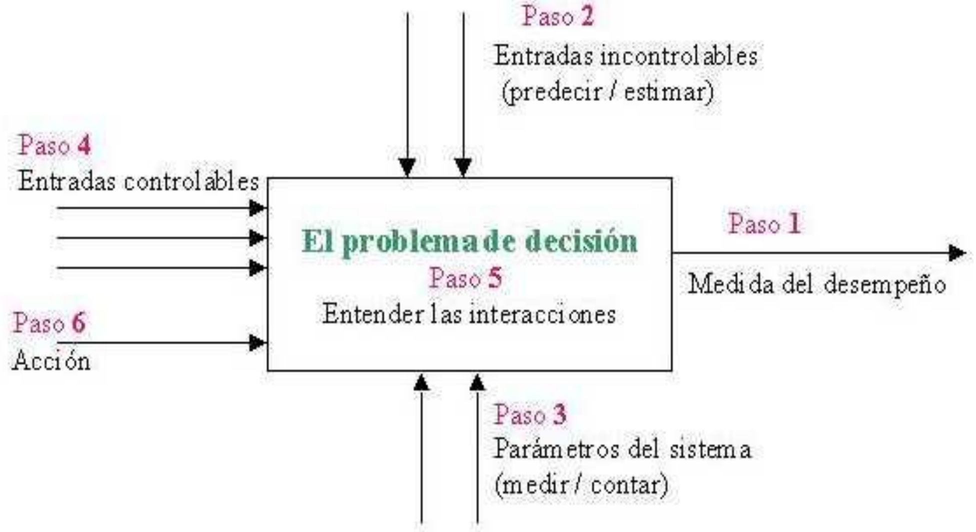
En general se puede afirmar que " **Si no se puede medir, no se puede administrar**". Cuando se mide el desempeño, el desempeño mejora. Cuando el desempeño se mide y se informa, la mejora se acelera. La siguiente figura muestra el abordaje del proceso estructurado de toma de decisiones en la IO.

En el proceso de modelización de la toma de decisiones investigamos el efecto de la presentación de diferentes decisiones **retrospectivamente** decir, "como si" la decisión ya se hubiera tomado según diferentes cursos de acción. Es por eso que la secuencia de pasos en el proceso debe considerarse en forma invertida. Por ejemplo, el resultado (que es el resultado de nuestra acción) debe considerarse en primer lugar. ; esto es 'como si" la decisión ya hubiese sido tomada bajo un diferente curso de acción.

Como se indicó anteriormente en el diagrama de actividades, el proceso de toma de decisiones posee los siguientes componentes:

Medida del desempeño: Brinda el nivel deseado de resultado (objetivo de la decisión). El objetivo es importante para identificar el problema. La tarea principal del decisor es la solución del problema de "valores" entre diferentes objetivos, y la selección de *un único objetivo* el que tiene el "mayor valor". Entonces, si es necesario, todos los demás objetivos deben incluirse en el conjunto de restricciones a satisfacer.
Entradas incontrolables: Provenientes del entorno del decisor. Las entradas incontrolables por lo general crean el problema y restringen las acciones.
Parámetros: Los parámetros son los elementos constantes que cambian durante el horizonte temporal de la revisión de la decisión. Estos son los factores que definen parcialmente al problema.
Entradas controlables: Las entradas controlables son el conjunto de todos los cursos de acción posibles que usted podría tomar.

Interacciones entre estos componentes: Estas son funciones matemáticas lógicas que representan las relaciones de causa y efecto entre las entradas, los parámetros y el resultado. Existen también grupos de restricciones que se aplican a cada uno de estos componentes. Por lo tanto, no es necesario tratarlas en forma separada.
Cursos de acción: La acción es la última decisión y es el mejor curso de la estrategia para lograr la meta deseada. La toma de una decisión implica seleccionar un curso de acción (medio) en pos del objetivo (fin). La forma en que el curso de acción afecta el resultado de una decisión depende de cómo se interrelacionan las entradas y los parámetros del problema y, a su vez, cómo se relacionan éstos con el resultado.
Cuando el resultado de una decisión depende del curso de acción, modificamos uno o más aspectos de la situación problemática con la intención de lograr un cambio deseado en algún otro aspecto de la misma. Lo logramos si conocemos la interacción entre los componentes del problema.

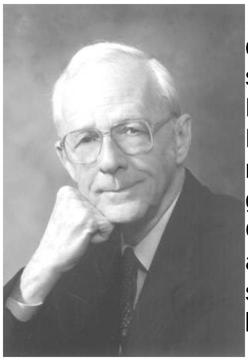


El proceso estructurado de toma de decisiones y sus componentes: Análisis, diseño y control

Control del problema: Pocos problemas en la vida, una vez resueltos, permanecen así. Las condiciones cambiantes tienden a sacar a la luz problemas que anteriormente se habían resuelto, y sus soluciones crean nuevos problemas. Estos nuevos problemas deben identificarse y anticiparse. Si no lo puede controlar, debe medirlo para poder predecirlo.

NOTA: Gran parte de este material ha sido extraído de guías publicadas por el ***Profesor Hossein Arsham*** *de la* Merrick School of Business University of Baltimore http://home.ubalt.edu que he considerado además de valioso muy apropiado a este capitulo de Modelos .Teniendo en cuenta que este profesor permite su uso para fines educativos me he permitido incluirlo en este texto.

Capitulo 2: DINAMICA DE SISTEMAS



En los años cincuenta comenzó a desarrollarse en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT) una metodología de sistemas conocida como **Dinámica de Sistemas**. Jay W. Forrester, ingeniero electrónico, se había trasladado del Laboratorio de Servomecanismos, donde inventó las memorias magnéticas de núcleos de ferrita, a coordinar un gran proyecto de defensa, el sistema SAGE (Semi-Automatic Ground Equipment). En la realización de este sistema de alerta en tiempo real se percató de la importancia del enfoque sistémico para concebir y controlar entidades complejas como las que surgen de la interacción de hombres y máquinas.

Tras esta experiencia, Forrester se desarrollo como profesor en la Sloan School of Management del MIT, donde observó que en las empresas se producían fenómenos de realimentación que podían ser causa de oscilaciones, tal como sucede en los servomecanismos que él había estado estudiando. De esta forma ideó la Dinámica Industrial [Industrial Dynamics, 1961], una metodología que permitía construir modelos cibernéticos de los procesos industriales. La peculiaridad de estos modelos residía en la posibilidad de simular su evolución temporal con la ayuda de la computadora. Posteriormente aplicaría su metodología a problemas de planificación urbana [Urban Dynamics, 1969] y la generalizaría para cualquier tipo de sistema continuo, cambiando su denominación por la de **Dinámica de Sistemas** [System Dynamics, 1968].

La **Dinámica de Sistemas** alcanzó gran difusión durante los años setenta, al servir de base para los estudios encargados por el Club de Roma a Forrester y su equipo para valorar el efecto del crecimiento de la población y de la actividad humana en un mundo de recursos limitados. El propio Forrester dirigió la confección de un modelo inicial del mundo [World Dynamics, 1971] a partir del cual se realizaría más tarde el informe definitivo [The Limits to Growth, 1973], dirigido por D.L. Meadows y financiado por la Fundación Volkswagen. Un segundo informe, también utilizando Dinámica de Sistemas, sería encargado posteriormente a Mesarovic y Pestel [Mankind at the Turning Point, 1974].

La naturaleza de los sistemas sociales

Este enfoque se fundamenta en varias características de los sistemas en que actuamos y de las propias limitaciones de los seres humanos. Según Forrester, los sistemas como empresas, organizaciones, mercados o economías son *cerrados* y *no-lineales* en su estructura. Son cerrados porque de alguna manera las decisiones de los actores causan efectos que posteriormente vuelven a influir en las decisiones: si un gerente de marketing decide lanzar una campaña de promoción para uno de los productos de su empresa, esto puede conducir a generar una dificultad para otros productos de la misma empresa. En estas circunstancias, especialmente si algunos efectos se manifiestan con un retardo, se generan comportamientos indeseables (oscilaciones).

También existen efectos de reforzamiento, por ejemplo cuando una empresa llega primero en un nuevo mercado, resultado de una innovación (una ventaja de conocimiento) y logra conservar o incluso ampliar su ventaja competitiva producto de la privilegiada relación con sus clientes. Esto es la retroalimentación que da un *cierre* a los sistemas. En general, en un mismo sistema encontramos varios bucles de retroalimentación, con diferentes velocidades, puesto que el tiempo que pasa entre una causa y su efecto puede ser más rápido o lento. Otra característica es en muchas veces las conexiones entre las variables no son lineales, tal que los efectos muchas veces se multiplican en lugar de sumarse.

La estructura de un sistema, explica su comportamiento, es decir la evolución de los valores de las variables que se perciban como relevantes: la evolución de la participación de mercado, de la ventaja comparativa, de las relaciones con competidores y otras son causadas por las entidades estructurales y las relaciones causales entre ellas. Este comportamiento puede ser sorprendentemente complejo en su dinámica, aún para estructuras aparentemente simples: crecimiento en forma de "S", crecimiento exponencial, sobrerreacción, crecimiento y derrumbe y oscilación son comportamientos analizables desde su estructura subyacente.

La naturaleza limitada del ser humano

Frente a estos sistemas hay personas tratando de comprender su comportamiento, es decir tener una explicación válida. Lamentablemente el instrumental cognitivo del ser humano es adaptado a un mundo estable, sin cambios rápidos, en el cual sólo lo cercano en espacio y tiempo necesita ser tomado en cuenta. Como consecuencia, cometemos errores de apreciación: variables y conexiones distantes en el tiempo o remotas en el espacio no se perciben como relevantes. Entonces la reflexión se basa en ideas - o modelos mentales - incompletas, y las decisiones basadas en ellas producen efectos laterales que sorprenden e incluso molestan.

Los modelos mentales intuitivos no son una base firme para diseñar sistemas sociales. Y no debe sorprendernos que Forrester haya descubierto la presencia del mismo tipo de problema en partes que no fueran empresas; el más conocido campo fueron las ciudades, lo que dio lugar a la "dinámica urbana". Finalmente se habían acumulado suficientemente indicios de que se trataba de una metodología más general por lo que se cambio el nombre del enfoque por "**dinámica de sistemas".**

También últimamente se habla de **Pensamiento Sistémico (System Thinking)** el cual ha sido descripto como un lenguaje para hablar de la complejidad, temas de interdependencia que los administradores- gerentes encuentran todos los días.

DIAGRAMAS CAUSALES O DE LAZOS

Generalizando lo realizado por Forrester se aplican al modelado de sistemas los llamados Diagramas causales, difiriendo muy poco en la manera de trazarlos por los diferentes software de computadora que se utilizan para simular los modelos y predecir sus resultados.

Los llamados **Diagramas de Lazos Causales** pueden ser interpretados como sentencias que se construyen identificando las variables claves (sustantivos) e indicando la relación causal entre ellas a través de vínculos (verbos). Aclaremos que en este caso el vínculo está constituido por una flecha que tiene origen en la variable independiente y su fin en la variable dependiente. De esta manera, cuando tenemos varios lazos, interconectados podemos crear una clara historia sobre un tema o problema en particular.

Un Diagrama de Lazos Causales consiste de cuatro elementos básicos:

- las variables,
- los vínculos entre ellas,
- los signos de los vínculos (que muestran cómo las variables están interconectadas),
- y los signos del lazo (que muestra qué tipo de comportamiento producirá el sistema).

Con la representación de un problema desde la visión sistémica, se puede advertir cuáles son las fuerzas estructurales que producen el comportamiento observado.

Los pasos básicos para la construcción de lazos causales son:

1. Crear las variables con sus respectivos nombres.
2. Dibujar los vínculos.
3. Ponerle nombre al Lazo.
4. Recorrer el Lazo.

Para tratar de comprender mejor esto veremos un ejemplo extraído de *Study Notes in System Dinamics,* Cap. 1 de *Michael R. Goodman.* Productivity Press, Portland, Oregon, 1994.

Los sistemas dinámicos están basados en la estructura y funcionamiento de sistemas compuestos por lazos de realimentación que interactúan entre sí. Los diagramas de flujo y los diagramas causales constituyen una manera para representar las estructuras cíclicas antes del desarrollo de tasas, niveles y elementos auxiliares organizados en una red consistente.

Los diagramas causales juegan dos importantes papeles en los estudios de los sistemas dinámicos. Primero, durante el desarrollo del modelo, sirven como un esquema preliminar de la hipótesis causal. Segundo, pueden simplificar la ilustración del modelo. En ambos casos, los diagramas causales permiten al analista comunicar rápidamente la percepción estructural del sistema, basado en el modelo.

La diagramación de lazos causales ayuda al modelador a conceptualizar sistemas del mundo real en términos de lazos de realimentación.

APLICACIONES

MODELO MIGRACION – POBLACION - EMPLEO

En la *Figura 1*, el diagrama causal describe la relación de realimentación entre la *Migración* **M** y la *Disponibilidad de Empleos* **DE**.

El diagrama incorpora hipótesis causales simples, relacionando dos ciclos de realimentación sobre el funcionamiento urbano. Estas hipótesis incluyen:

-La *Disponibilidad de Empleos* **DE** produce una *Migración* **M** hacia la ciudad.

-Los emigrantes que llegan expanden la *Población de Empleados* de la ciudad **PE**.

-La población absorbe los trabajos disponibles, disminuyendo la *Disponibilidad de Empleos* **DE**.

-A la larga, la población empleada demanda más servicios urbanos lo cual facilita un nuevo incremento en el número total de *Empleos* **E**.

-Más *Empleos* **E** incrementan la *Disponibilidad de Empleos* **DE**.

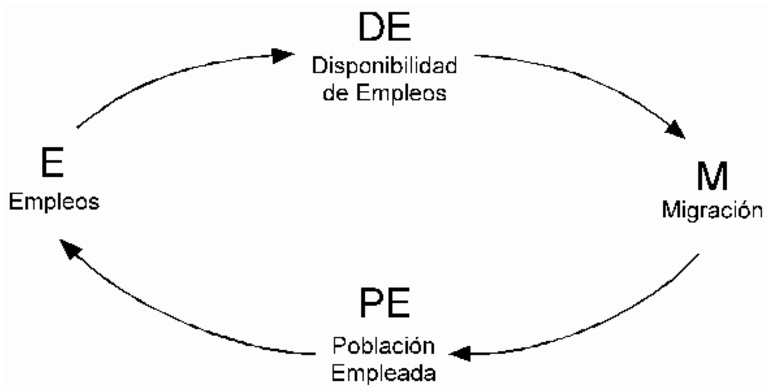


Figura 1: Diagrama Causal

Para simplificar el ejemplo, se han omitido factores tales como el tipo de empleo, las características demográficas de los emigrantes, retardos en la información, y otros factores determinantes de la migración como la vivienda, localización e impuestos.

El desarrollo paso a paso de este diagrama, permitirá ilustrar los mecanismos de la diagramación de ciclos o lazos.

Para diagramar la estructura de un ciclo e identificar el tipo de polaridad del mismo, se deben establecer las relaciones entre todos los pares de variables relevantes.

REPRESENTACIONES DE LAS RELACIONES CAUSA-EFECTO: MODELOS DE APLICACION

Definición de las Variables:

VARIABLES	**DEFINICIÓN**
Empleos (E)	Número total de vacantes y trabajos ocupados en el área urbana.
Disponibilidad de Empleos (DE)	Número de empleos vacantes.
Migración (M)	Migración de población trabajadora hacia el área urbana.
Población Empleada (PE)	Población trabajadora que reside en el área.

Asumiremos que el número de empleos disponibles modula el flujo de gente hacia el área urbana. Es decir un incremento en la disponibilidad de trabajos Origina un incremento en la migración hacia el área. Una disminución en los empleos disponibles Provocaría el efecto contrario. La representación causal de esta asunción es la siguiente:

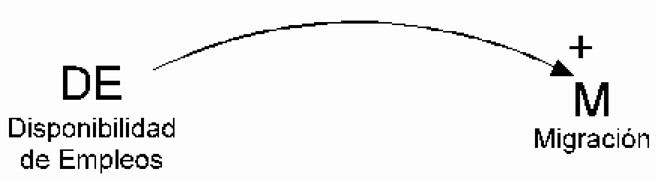


Figura 2: Lazo Migración-Disponibilidad de Empleos Positivo

La flecha indica la dirección de influencia; el signo (más + o menos-), el tipo de influencia. Un incremento en la *Disponibilidad de Empleos* **DE** debe producir un incremento en la *Migración* **M**. Por lo tanto, la relación tiene un signo "+" significando el carácter positivo del lazo.

De una manera más general, si todas las otras variables permanecen iguales, un cambio en una variable genera un cambio en la misma dirección en la segunda variable con respecto al valor anterior de la misma, en este caso se dice que la relación entre ambas variables es positiva.

Para aplicar esta definición debemos considerar solamente pares adyacentes de variables. De la misma forma aplicaremos esta definición con ligeras modificaciones para determinar la polaridad de los ciclos cerrados de realimentación.

El siguiente ejemplo de una relación positiva involucra la variable *Migración* **M** y la variable *Población Empleada* **PE**.

Representaremos la relación de la misma forma que la anterior relación **DE-M**. La *Figura 3* muestra la relación **M-PE**. Un incremento en la tasa de *Migración* **M** se traduce en empleados adicionales quienes a su vez incrementan la población empleada residente.

Figura 3: Lazo Migración-Población Empleada Positivo.

Una relación negativa, denotada por un signo "-" ocurre cuando un cambio en una de las variables produce un cambio en dirección opuesta en la segunda variable. La *Figura 4* ilustra una relación negativa.

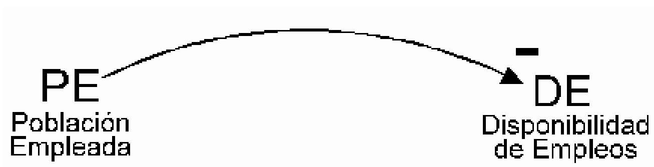
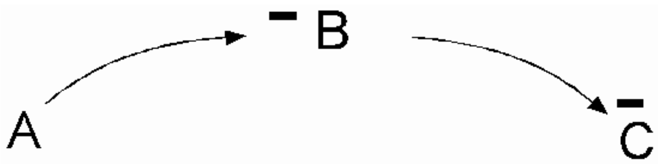


Figura 4: Lazo Población Empleada-Disponibilidad de Empleos Negativo.

La *Figura 4* y la *Figura 2* configuran una asunción causal. La *Figura 4* asume que un incremento en la población empleada residente producirá eventualmente una disminución en el número de empleos disponibles en el área urbana. Los nuevos trabajadores en la ciudad ocuparán los trabajos disponibles y por lo tanto reducirán la disponibilidad de empleos. Si la población de trabajadores comienza a declinar, asumiremos que esos trabajos pasan a ser disponibles. Un incremento o decremento en la población empleada produce un cambio opuesto en la disponibilidad de empleos. Es importante notar que dos pares de relaciones negativas encadenadas producen una relación positiva a través de la cadena total. Asuma que la variable **A**,

B y **C** están encadenadas negativamente como muestra la figura. Un incremento en **A** decrementa a **B** el cual aumentaría la variable **C**. Por lo tanto, la cadena de **A** a **C** es positiva.



LAZOS CAUSALES

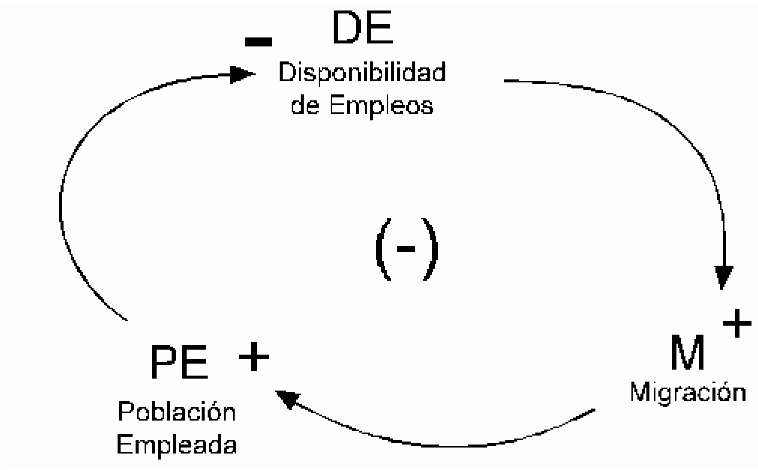


Figura 6: Lazo Causal Simple

La *Figura 6* combina las relaciones entre los pares **DE**, **M** y **PE**. Para determinar la polaridad del lazo completo, haremos recaer las consecuencias de un cambio arbitrario sobre la variable del ciclo.

Asumamos, por ejemplo, un repentino aumento en la *Disponibilidad de Empleos*. Este aumento en la **DE**, atraería una cantidad de personas a la ciudad y en consecuencia se incrementaría la *Población Empleada*; la **DE** incrementa la **PE**. Pero un incremento en la *Población Empleada* por supuesto decrementa la *Disponibilidad de Empleos*. Las causas internas que incrementaron la **DE**, han causado un conjunto de reacciones internas y ajustes en el sistema. Estos cambios crean presiones en oposición al cambio en **DE**. El ciclo tiende a mantener la **DE** en un valor fijo o meta, a pesar de las influencias externas en sentido opuesto.

Cuando un ciclo de realimentación responde a un cambio en una variable en sentido opuesto a la perturbación original, el ciclo es negativo. Cuando el ciclo responde reforzando la perturbación original, el ciclo es positivo.

El método para determinar la polaridad de un ciclo que se sugiere es partir desde un punto del sistema con un supuesto, por ejemplo que en ese punto hay un crecimiento, recorrer todo el ciclo, si al regresar el efecto es creciente, es positivo, si no lo es entonces es negativo. En conclusión, si el efecto que se recibe es del mismo signo entonces es positivo, si es contrario entonces será negativo.

La *Figura 6* muestra un ciclo de realimentación negativo, denotado con el signo "-" en el centro del ciclo.

Cuando un sistema está compuesto por más de un ciclo, primero se debe determinar el signo de cada uno de los ciclos en forma aislada, como se hizo anteriormente, asumiendo que todas las otras variables fuera del ciclo (y a través de él) permanecen constantes. Así, cada ciclo tendrá su propia polaridad.

La *Figura 7*, adiciona una cadena positiva entre la *Población Empleada* **PE** y los *Empleos* **E**. La cadena asume que un incremento en la *Población Empleada*, eventualmente incrementará los *Empleos*, debido a la demanda de servicios humanos, vivienda, construcción, etc. El modelo contiene ahora dos ciclos cerrados: el ciclo negativo ya familiar compuesto por **DE**, **M** y **PE**; y otro nuevo ciclo positivo (exterior), que involucra las cuatro variables. La nueva cadena no ha afectado la polaridad del ciclo conformado por las variables **DE**, **M** y **PE**. Podemos determinar la polaridad del nuevo ciclo haciendo recaer el efecto de un importante incremento en la *Disponibilidad de Empleos* **DE** de ese ciclo e ignorando todas las otras cadenas fuera de ese ciclo. Este incremento produciría una migración hacia el área urbana y por lo tanto aumentaría la *Población Empleada*. El aumento de la *Población Empleada* eventualmente incrementaría el número de *Empleos* básicos **E**, lo cual incrementaría la *Disponibilidad de Empleos*.

El aumento en la *Disponibilidad de Empleos*, se ve reforzado por el mecanismo causal interno del sistema; en consecuencia el ciclo es positivo.

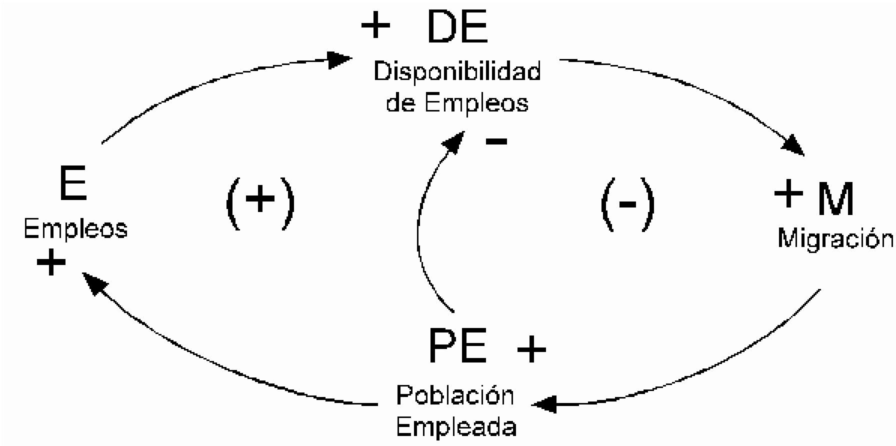


Figura 7: Diagrama de dos Ciclos

MODELO DE OFERTA CON RETARDOS (MODELO DE LA TELARAÑA)

Este modelo es aplicable a mercados en los que el proceso productivo es largo y el producto no es almacenable.
Suponemos que la cantidad demandada en cada momento es una función lineal del precio de ese bien (Demanda = A - B * Precio), y que la cantidad ofrecida depende del precio que los productores esperaban obtener cuando comenzaron a producir ese bien (Oferta$_t$ = C + E * Precio esperado). Además, supondremos que el bien en cuestión no es almacenable, por lo que los productores aceptan el máximo precio que los demandantes quieran pagar para agotar la producción, aunque ese precio sea diferente del que ellos esperaban recibir.
Finalmente supondremos que las expectativas de precio se forman de la forma más ingenua: los productores esperan recibir cada periodo el precio que prevaleció en el mercado el periodo anterior.
Supongamos que los datos concretos de este problema son los siguientes:

A=50000

B=150

C=-20

E=B + K

El modelo de la telaraña da lugar a un equilibrio estable cuando el parámetro E es menor que el parámetro B y da lugar a un desequilibrio explosivo cuando E es mayor que B. En el caso en el que E = B la situación inicial se reproduce periodo tras periodo (desequilibrio estacionario).

Modelar las tres situaciones descritas con los siguientes datos:

-Caso 1º K = -5

Precio inicial = 10

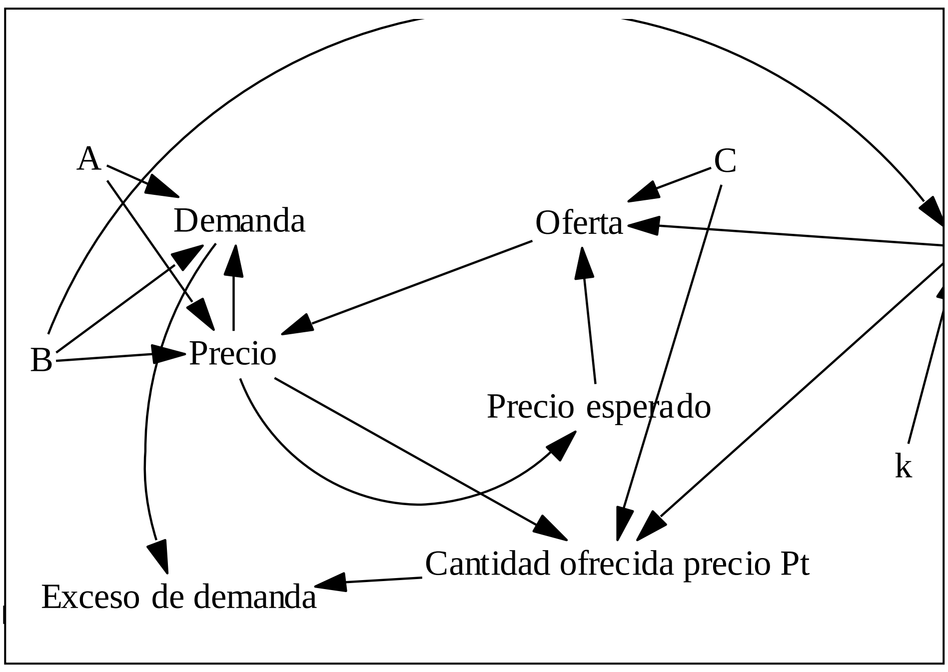
-Caso 2º K = 5

Precio inicial = 170

-Caso 3º: K = 0

Precio inicial = 100

En los tres casos se deberá estudiar la evolución del precio a lo largo de 100 periodos y la diferencia entre la cantidad demandada y la que los productores hubieran ofrecido si hubieran conocido el precio que iba a prevalecer en el momento de decidir la cantidad a producir.



Ecuaciones del modelo:

Si bien no es el objetivo de este punto utilizar un soft para solucionar este caso plantearemos las ecuaciones del modelo con la metodología del VENSIN que es un software registrado de *VENTANA SYSTEMS Inc*. de manera que se observe la sencillez de la misma y los resultados gráficos de la simulación:

- Demanda=Max (A-B*Precio, 0)

Unidad/Mes

Función de demanda

- Oferta =Max(C+E*Precio Esperado, 0)

Unidad/Mes

Función de oferta

- Precio Esperado= Delay Fixed (Precio, 1, Precio Inicial)

$/Unidad

Precio esperado

- Precio= Max ((A - Oferta)/B, 0)

$/Unidad

Precio efectivo en cada periodo

- A=50000

Unidad/Mes

Componente autónomo del precio

- B=150

Unidad*Unidad/ ($*Mes)

Coeficiente

- C=-20

Unidad/Mes

Coeficiente

- E=B + K

Unidad^2/($*Mes)

Coeficiente

- K = -5

Unidad*Unidad/ ($*Mes)

Coeficiente

- Precio Inicial=10

$/Unidad

Precio Periodo Inicial

- Cantidad Ofrecida Precio Pt= Max(C + E* Precio, 0)

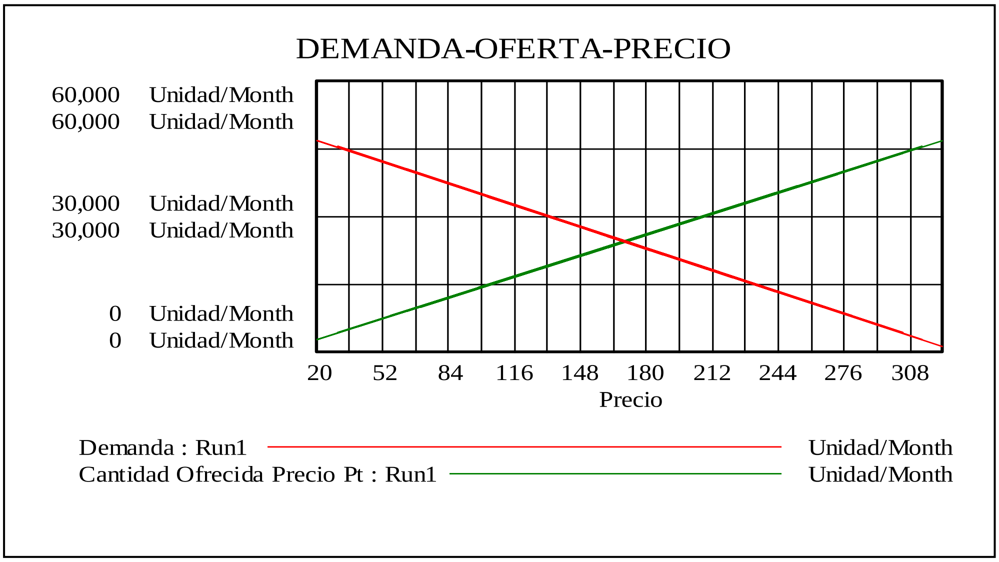
Unidad/Mes

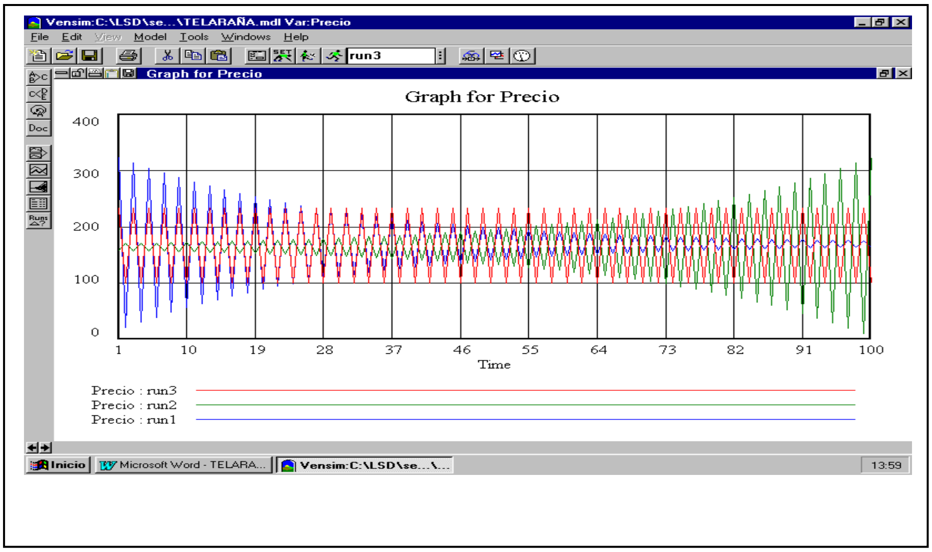
Cantidad ofrecida al precio de equilibrio

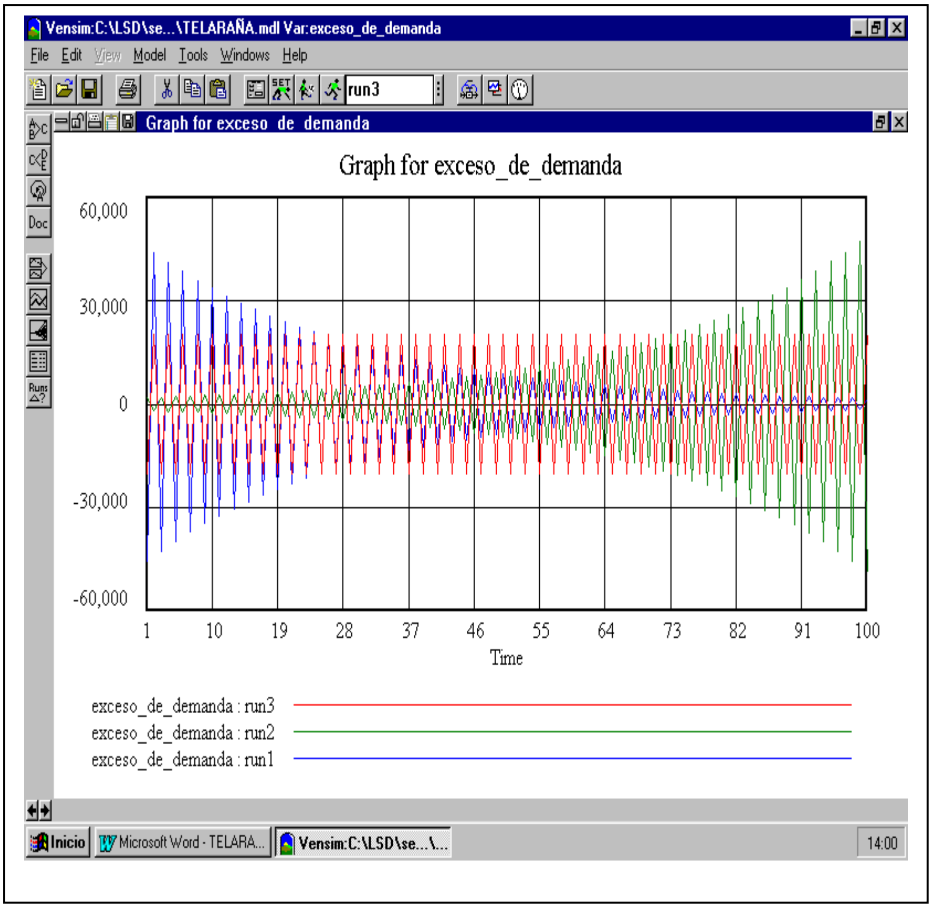
- Exceso De Demanda = Demanda - Cantidad Ofrecida Precio Pt

Unidad/Mes

Diferencia entre cantidad demandada y ofrecida en cada periodo




Vensim:C:\LSD\se...\TELARAÑA.mdl Var:Precio
Graph for Precio
400
300
200
100
0
1
10
19
28
37
46
55
64
73
82
91
100
Time
Precio : run3
Precio : run2
Precio : run1


Vensim:C:\LSD\se...\TELARAÑA.mdl Var:exceso_de_demanda
Graph for exceso_de_demanda
60,000
30,000
0
-30,000
-60,000
1
10
19
28
37
46
55
64
73
82
91
100
Time
exceso_de_demanda : run3
exceso_de_demanda : run2
exceso_de_demanda : run1

DIAGRAMAS CAUSALES Y DIAGRAMAS DE FLUJO.

DIAGRAMAS DE FORRESTER

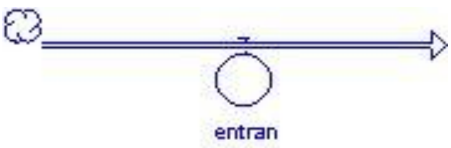
Forrester desarrolló un lenguaje de diagramas para modelar. Basándose en la dinámica de los fluidos, este modelo cuenta con sólo 4 bloques de construcción:

- Los *acumuladores*, niveles o stocks son los estados de algún recurso material que se puede cuantificar; por ejemplo, la cantidad de palabras en un artículo, la cantidad de dinero en un a cuenta o la cantidad de estrés en una persona, en un momento determinado. Se acumula en el tiempo una cierta magnitud

La representación grafica es:

- Los *flujos físicos* son lo que puede cambiar a un nivel: al escribir, aumenta el número de palabras, al borrar disminuye; al depositar aumenta el saldo, al retirar disminuye. Especialmente, nosotros como actores sólo podemos intervenir en los flujos, nunca en los niveles.

    Producen variaciones en el tiempo de los niveles

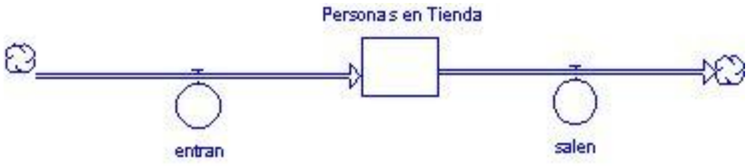


    Para facilitar la preparación de la decisión, los modelos cuentan con dos bloques de construcción adicionales: los convertidores y los flujos de información. Ayudan a definir las variables de flujo

- Un *convertidor* transforma informaciones que entran desde diferentes fuentes en una información nueva.

- Los *flujos de información* permiten canalizar información sobre un elemento hacia otro.

La representación mediante este tipo de diagramas (también llamados de Forrester) de una situación en una tienda y utiliza la simbología vista es el siguiente:



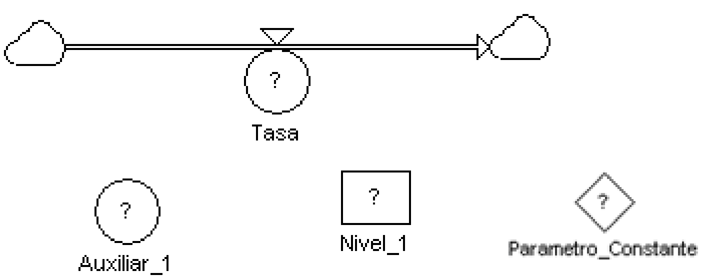
Se lee de la siguiente manera:

Al inicio, se encuentra una cierta cantidad de personas en la tienda; al final de cada periodo durante la simulación del proceso, la cantidad acumulada de personas en la tienda corresponde a la cantidad final del periodo previo más los que entran menos los que salen.
Notamos que estos diagramas surgen de la aplicación de los diagramas causales y en realidad difieren levemente de estos. Esta simbología se aplica en general en los soft de computadora que realizan la simulación de los modelos que desarrollamos con los diagramas causales que hemos visto. Estos diagramas de computadora también se llaman diagramas de flujos y niveles.

Veremos algunas reglas básicas en la construcción de diagramas de flujos y Niveles:

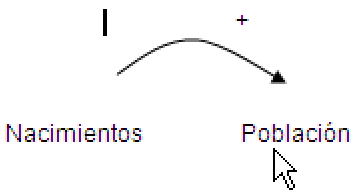
Hay que tener en cuenta que un diagrama causal no contiene todos los detalles que contiene un diagrama de flujos y niveles, por lo tanto un diagrama causal por lo general es una versión más resumida de lo que se muestra en el diagrama de flujos. A veces los modelos son tan pequeños que un diagrama de flujos y niveles puede ser representado enteramente por un diagrama causal y viceversa.
En estos casos, para pasar de un tipo de diagrama a otro, hay que tener en cuenta algunas reglas básicas:

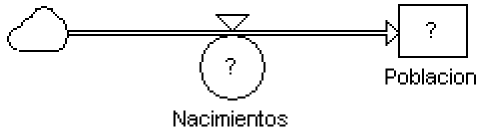
1. Identificar qué tipo de variables van a ser modeladas como variables de nivel, flujo, auxiliares y parámetros. En la figura, se presentan los elementos usados en dinámica de sistema



Tipos de figuras para representar los elementos usados en dinámica de sistemas.

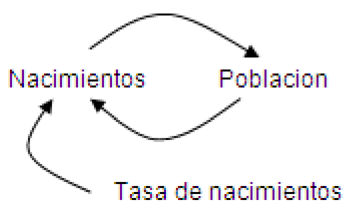
2. Si se tiene el caso de que una variable de nivel es incrementada por una variable de flujo, el paso de causal a flujo se da de la siguiente manera:

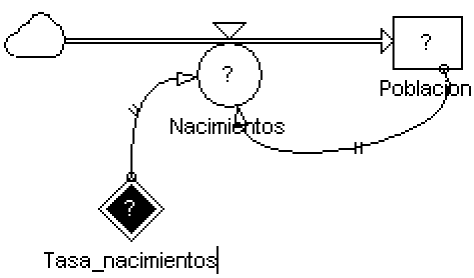




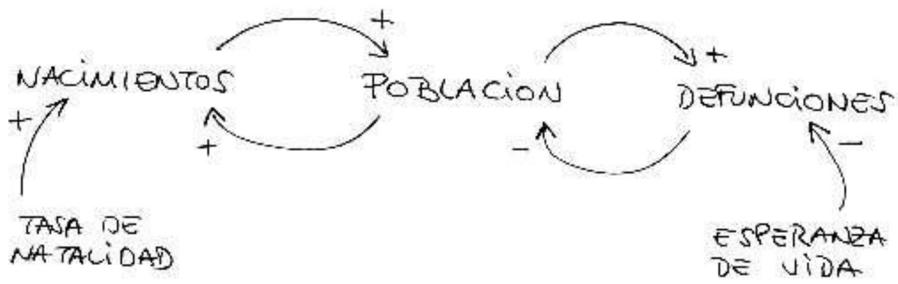
Representación del incremento fl

1. Si la ecuación de la variable de flujo depende de una forma positiva o negativa de la del nivel, y de un parámetro, el paso de flujo a nivel se puede dar de la siguiente manera :



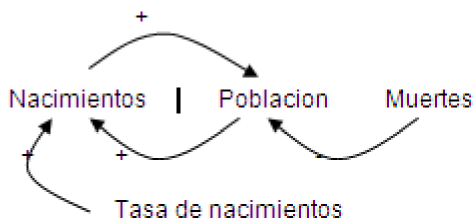


Podríamos también haber tomado la situación como:

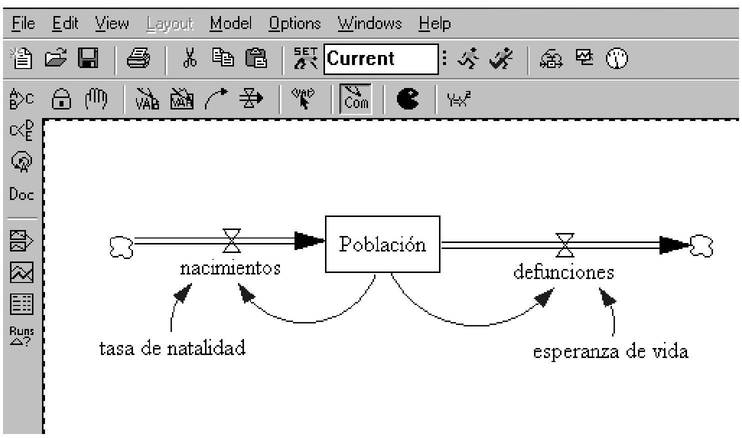


La forma de estos íconos difiere con el tipo de software que se esté usando. Otros programas tienen otras figuras para representar las variables auxiliares y los parámetros pero los más universalmente representados son los flujos y niveles.
Note que los parámetros se caracterizan porque no les llega ninguna flecha causal, esto es porque son variables exógenas, es decir, afectan al modelo pero no son afectados por el.

4. Si una variable de flujo disminuye a una de nivel, como es el caso de la variable de flujo **Muertes** a la variable de nivel **Población,** el cambio se presenta en la figura:

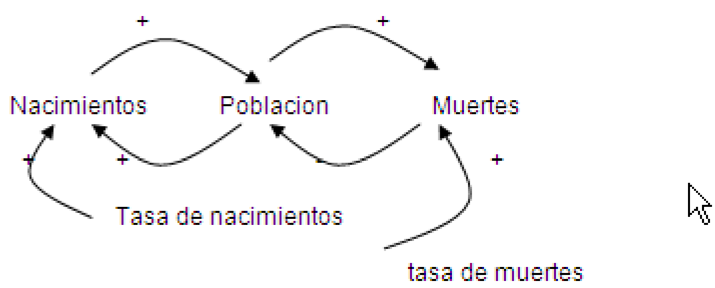


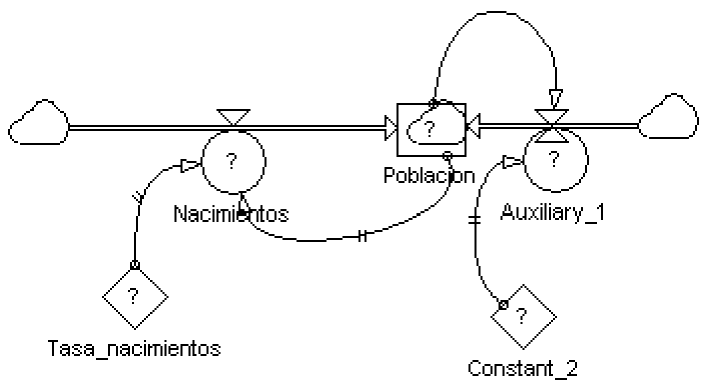
En el caso del segundo diagrama lo presentaríamos como



Disminución del nivel.
Note que si bien el sentido de la flecha va de Muertes a Población en el diagrama causal, en el diagrama de flujos va de Población a Muertes. Este es el único elemento que aparentemente se ve contra intuitivo o erróneo, sin embargo, no cambia el hecho de a que más Muertes se le van a sacar más personas a la variable de nivel Población. Siempre que se le saque a una variable de nivel, en el diagrama causal ira en un sentido mientras que en el de flujos ira en el otro.

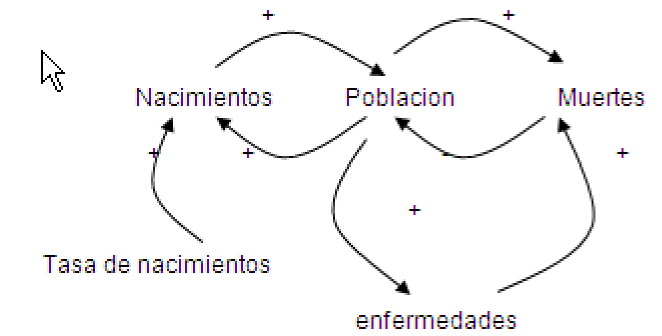
5. Si la ecuación de la variable de flujo Muertes depende positiva o negativamente de la variable del nivel, la flecha ira en el mismo sentido que tiene en el causal, pero el signo dependerá si su influencia es positiva o negativa:

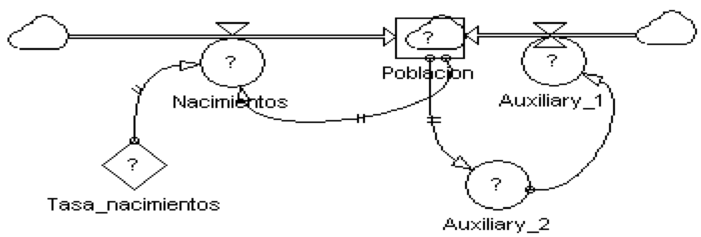




Representación de la influencia positiva o negativa del nivel sobre el flujo: Solamente las variables de nivel pueden ser incrementadas o decrementadas por Variables de flujo. Si un parámetro o una variable auxiliar están conectados a una variable de nivel, es porque es la condición inicial de la variable de nivel, y depende de ese parámetro o variable auxiliar. Después del tiempo cero, el nivel se calculara a partir de la rama neta de los flujos.

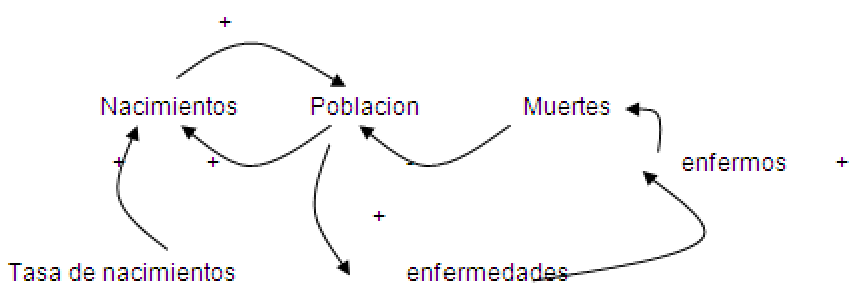
Si Muertes o Nacimientos dependen de algo no directamente relacionado con la cantidad de Población, como por ejemplo Enfermedades, se puede usar una variable auxiliar como se presenta en la figura.

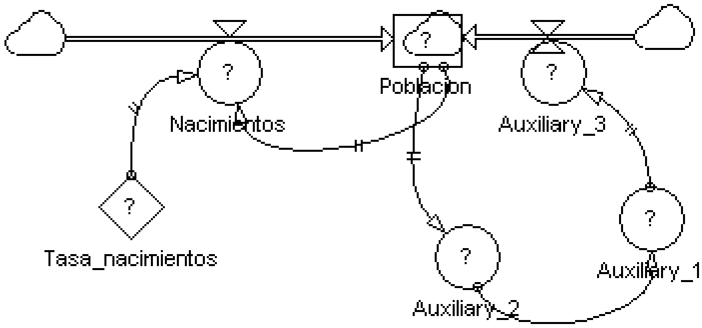




Realimentación del nivel en forma indirecta: Sea positiva o negativa la relación que va de Población a Enfermedades, la flecha del diagrama de flujos y niveles ir a en ese sentido, al igual que de Enfermedades a Muertes.

7. La relación que va de una variable auxiliar a otra, se hace de la misma forma que la presentada en la figura anterior. En la figura que sigue, se muestra como en el caso de variables auxiliares, los diagramas causales y de flujos y niveles tienen la misma representación.





Causalidades entre auxiliares: Sea positiva o negativa la relación que va de Enfermedades a Enfermos, la flecha del diagrama de flujos y niveles ira en ese sentido, al igual que de Enfermos a Muertes.

 Una vez completada la formación sobre Dinámica de Sistemas uno se encuentra que desea hacer su primer modelo. Veamos algunas ideas sobre la secuencia de los pasos que debería de seguir:

En primer lugar es necesario hacer el DIAGRAMA CAUSAL para ello:

1.- Escribir en el centro de una página el problema que se quiere estudiar (una frase muy breve).
2.-Después escribir todos los elementos que cree que tienen relación más o menos directa con el problema.
3.- Escribir los elementos que uno cree que influyen en los que se mencionaron en el paso anterior (2).
4.- Escribir los elementos que uno cree que influyen en los que hemos escrito en 3.
5.- Dibujar las relaciones (flechas) entre los elementos y asignarles un signo.
6.- Observar si aparecen bucles. Remarcar los bucles positivos porque crearán inestabilidad en el sistema.
7.- Realizar una limpieza de los elementos que no tengan una relevancia significativa para el problema que se ha decidido estudiar.
8.- Plantearse si existe una solución que pueda mejorar el estado del problema. Para ello preste especial atención a los bucles positivos.

A continuación hacer el DIAGRAMA DE FLUJOS
9.- Hay que traducir los elementos del diagrama causal porque los software de simulación no pueden trabajar sobre el diagrama causal.
y
10.- escribir las ecuaciones.

ALGUNAS REGLAS DEL MODELO

1. Las líneas de información parten de niveles o parámetros y van hacia flujos(O sea las variables de flujo son función de los niveles y los parámetros).

2. Las variables auxiliares son parte de los caminos de información. En general aparecerán entre la información que arranca en los niveles y termina en los flujos.

3. Por lo anterior, no puede aparecer un bucle cerrado construido únicamente con variables auxiliares. En todo lazo cerrado debe aparecer un nivel y por lo tanto al menos un flujo.

4. En los diagramas de flujo no se pueden mezclar distintas unidades. Los diagramas por tanto se asocian entre si en cascada o en paralelo donde en las estructuras solo circula el mismo tipo de unidades.

Ámbitos de aplicación

En 40 años de proyectos de dinámica de sistemas, se han utilizado en miles de empresas y organizaciones. Se han podido elaborar diferentes conjuntos de patrones, de estructuras entre las que encontramos modelos aplicados a subsistemas funcionales de empresas, como: gestión de recursos humanos, "supply chain management"(SCM), gestión de flujo de trabajo, evaluación de sistemas de información, exploración de escenarios y planificación estratégica.

Pero también se usa en otros ámbitos, como la economía (modelos de crecimiento, modelos de ciclos coyunturales, formación de expectativas) y temas relacionados con la sustentabilidad y el medio ambiente (dinámica poblacional, epidemias, efectos de la agricultura intensiva, industria y contaminación).

EJEMPLOS DE MODELOS.

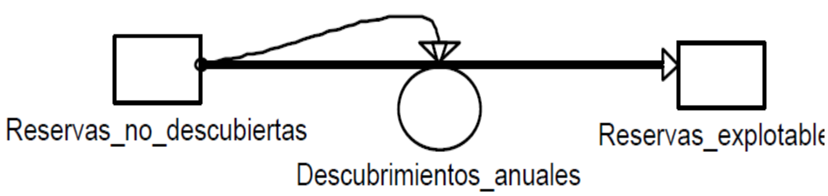
5. Modelo de dinámica de sistemas para combustibles líquidos con la hipótesis de Hubbert

Esta ejemplificación ha sido tomada del trabajo : Modelos Energía-Economía para combustibles líquidos. Carlos de Castro. Grupo de Energía y modelos de Dinámica de Sistemas. Universidad de Valladolid.

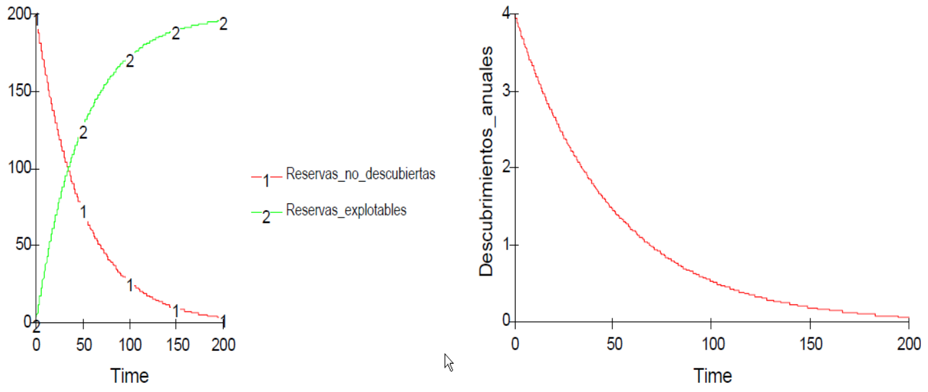
Hipótesis de Hubbert: la influencia geofísica (cantidad de recursos extraíbles, reservas, etc.) va a ser un factor de peso en la producción de recursos no renovables. Ante un recurso finito que se desgasta, podrá influir más en la producción que factores políticos, económicos y/o tecnológicos.

Nuestro primer paso será tratar de construir un modelo sencillo con herramienta de dinámica de sistemas, para comparar las hipótesis de Hubbert y la producción real. En un primer intento, realizamos un diagrama de stock-flujo con la herramienta de dinámica de sistemas . Partimos de un stock de Reservas_no_descubiertas (aquellos recursos de petróleo aún no descubiertos en un año dado, del total de recursos últimos que se pueden descubrir o URR) y de un flujo de descubrimientos anual que "extrae" petróleo del stock de Reservas no descubiertas y lo "deposita" en el stock de Reservas extraíbles (aquellos recursos que se van descubriendo se acumulan como reservas). La flecha curvada que parte de las Reservas no descubiertas a los Descubrimientos anuales, representa que éstos dependen de aquellas:
Según, la hipótesis de Hubbert (1956), los Descubrimientos anuales serían proporcionales a las Reservas no descubiertas. Haciendo esto de forma cuantitativa, en el diagrama anterior:

Init	Reservas = 0
flow	Reservas = +dt * Descubrimientos_anuales
init	Reservas_no_descubiertas = 200
flow	Reservas_no_descubiertas = -dt * Descubrimientos_anuales
aux	Descubrimientos_anuales = Reservas_no_descubiertas / 50



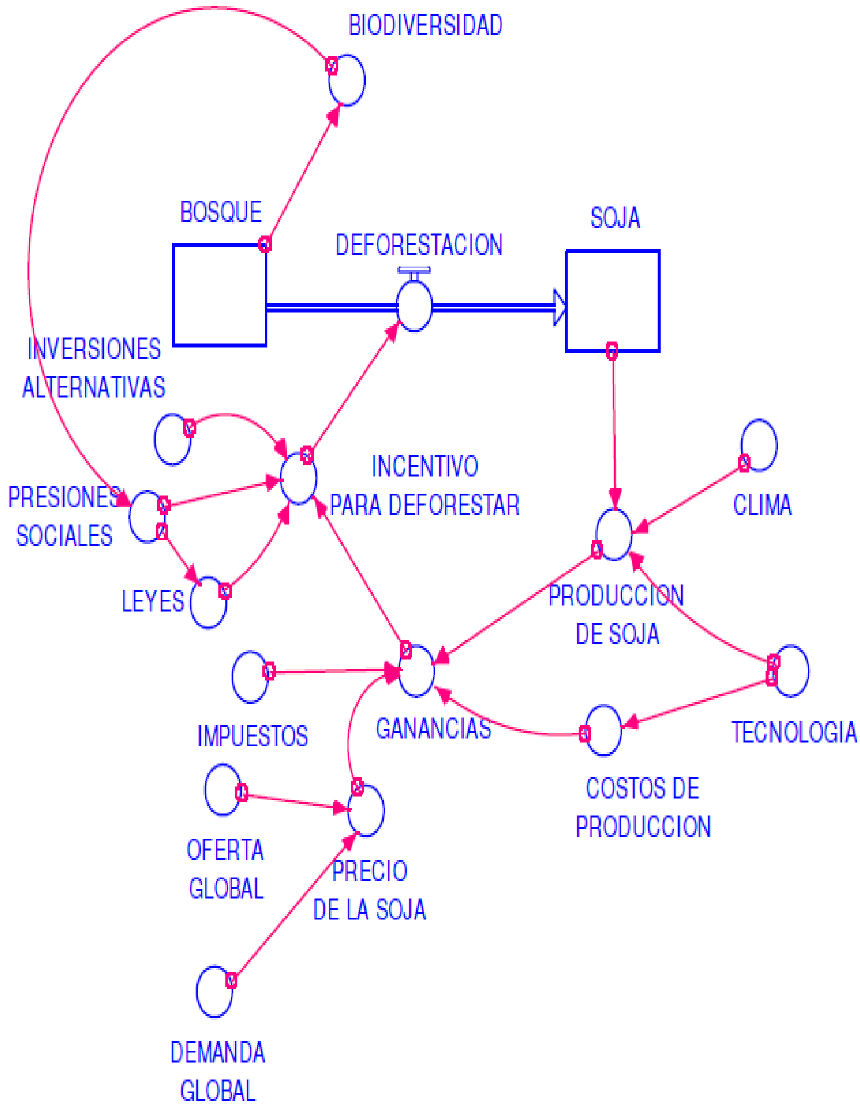
En los resultados de esta simulación, observamos caídas exponenciales tanto en las Reservas no descubiertas como en los Descubrimientos anuales. Comparada con la curva gaussiana de Hubbert está claro que de representar algo, es la última parte de los descubrimientos, cuando estos caen rápidamente



2. Modelo de deforestación.

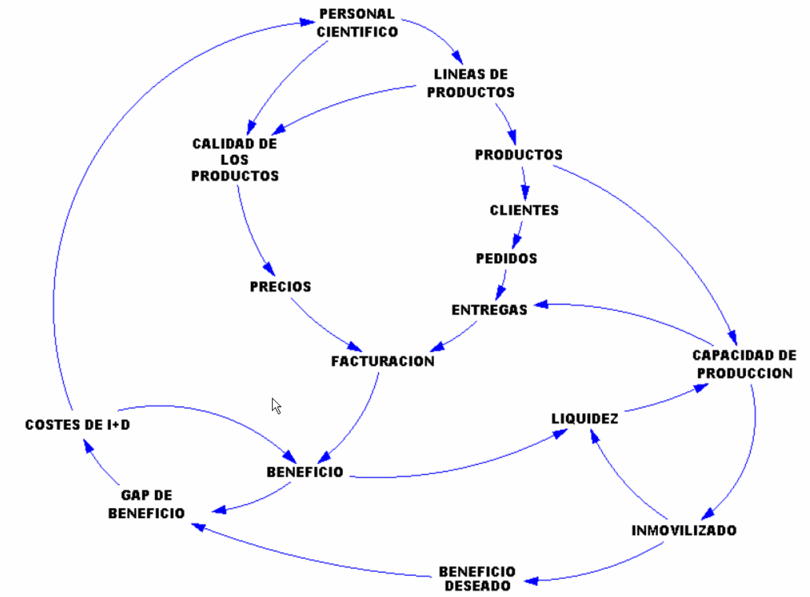
Tomado de Principios de Modelos Dinámicos. Ricardo Grau. Ecología de Paisajes y Regiones. Facultad de Ciencias Naturales e IML - Universidad Nacional de Tucumán

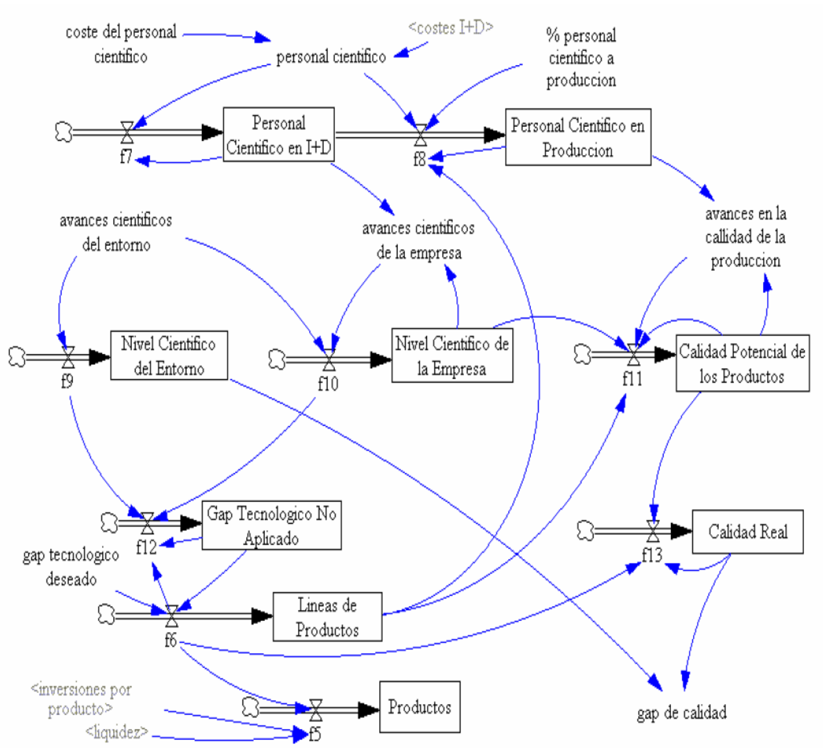
Causas y consecuencias (biodiversidad) de la deforestación del bosque para plantación de soja. La deforestación ("flujo de hectáreas de bosque que se transforman en hectáreas de soja) es controlada por una variable control que es la "decisión de deforestar", que a su vez depende de las ganancias producidas por la soja, las leyes y presiones sociales que condicionan la decisión y las oportunidades de inversiones alternativas. Las ganancias dependen de la relación ingresos dada por los precios de la soja (dependientes de oferta y demanda) y la producción; y los egresos (costos de producción e impuestos). La producción depende de la tecnología y el clima. A su vez, la superficie de bosque controla la biodiversidad que influye en la percepción social del sistema, pudiendo influir sobre las leyes y presiones sociales, y potencialmente generando no-linealidades



3. Modelo de I+D

Modelo simplificado del área de Investigación y Desarrollo de una firma comercial


PERSONAL CIENTIFICO
LINEAS DE PRODUCTOS
CALIDAD DE LOS PRODUCTOS
PRODUCTOS
CLIENTES
PEDIDOS
PRECIOS
ENTREGAS
FACTURACION
CAPACIDAD DE PRODUCCION
COSTES DE I+D
LIQUIDEZ
BENEFICIO
GAP DE BENEFICIO
INMOVILIZADO
BENEFICIO DESEADO


coste del personal cientifico
<costes I+D>
% personal cientifico a produccion
personal cientifico
Personal Cientifico en I+D
Personal Cientifico en Produccion
f7
f8
avances cientificos del entorno
avances cientificos de la empresa
avances en la callidad de la produccion
Nivel Cientifico del Entorno
Nivel Cientifico de la Empresa
Calidad Potencial de los Productos
f9
f10
f11
Gap Tecnologico No Aplicado
Calidad Real
f12
f13
gap tecnologico deseado
Lineas de Productos
f6
<inversiones por producto>
<liquidez>
Productos
f5
gap de calidad

4. Modelo de epidemia

Consideraciones basicas

La enfermedad es lo suficientemente suave como para que los enfermos no dejen de hacer vida normal, y éstos no se curan completamente durante el período de la epidemia; con ello se evita la re infección.

La población enferma y la sana se encuentran homogéneamente mezcladas.

Si ejecutamos el modelo 30 días:

El diagrama causal que representa a esta situación se presenta en la figura 4.1 y el diagrama de Forrester en la figura 4.2, cada comportamiento de las variables más críticas se presentan en las gráficas

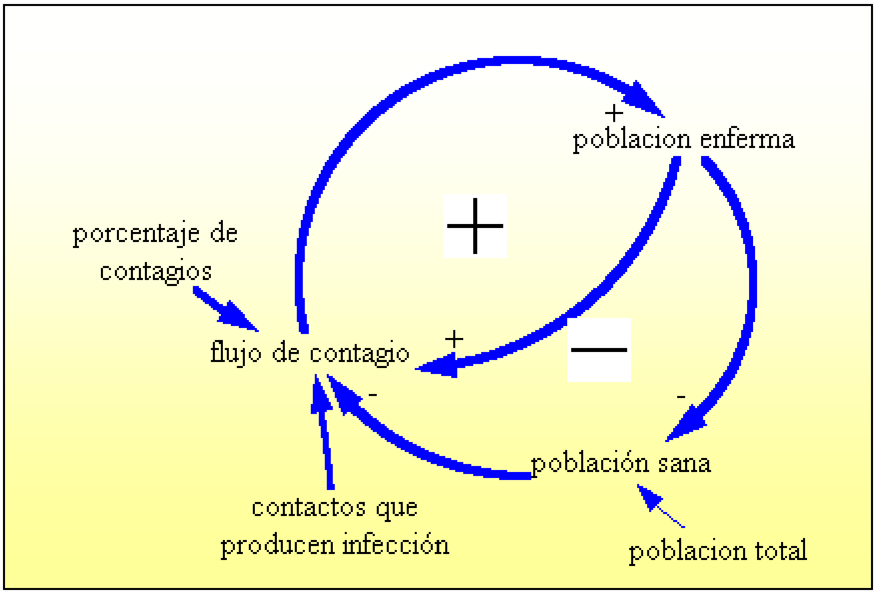


Figura 4.1 Diagrama causal complejo de los efectos de una epidemia

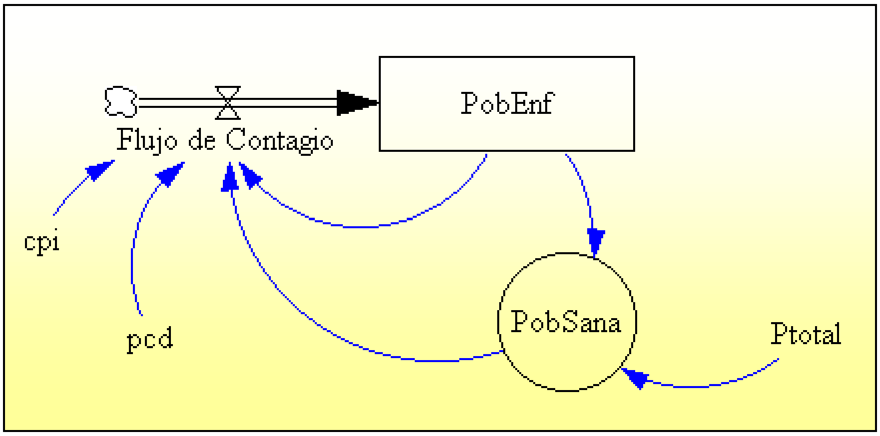
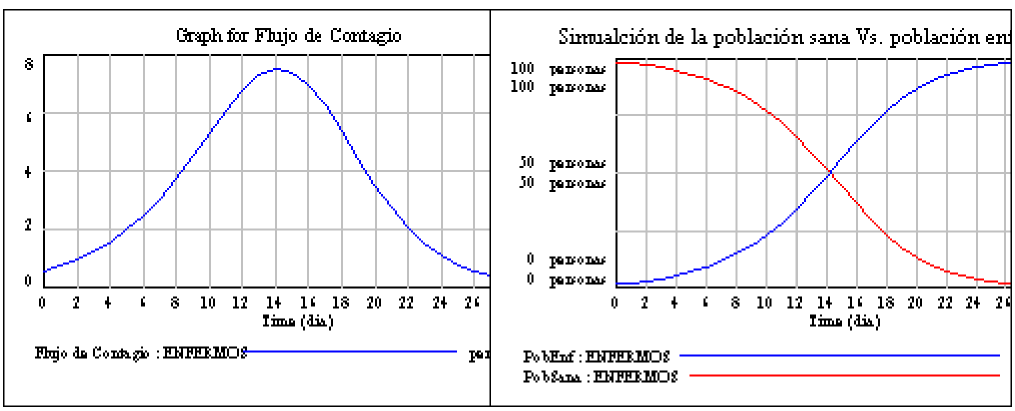


Fig 4.2 Diagrama de Forrester de los efectos de una epidemia



Gráfica 1.Comportamiento gráfico de las variables más críticas

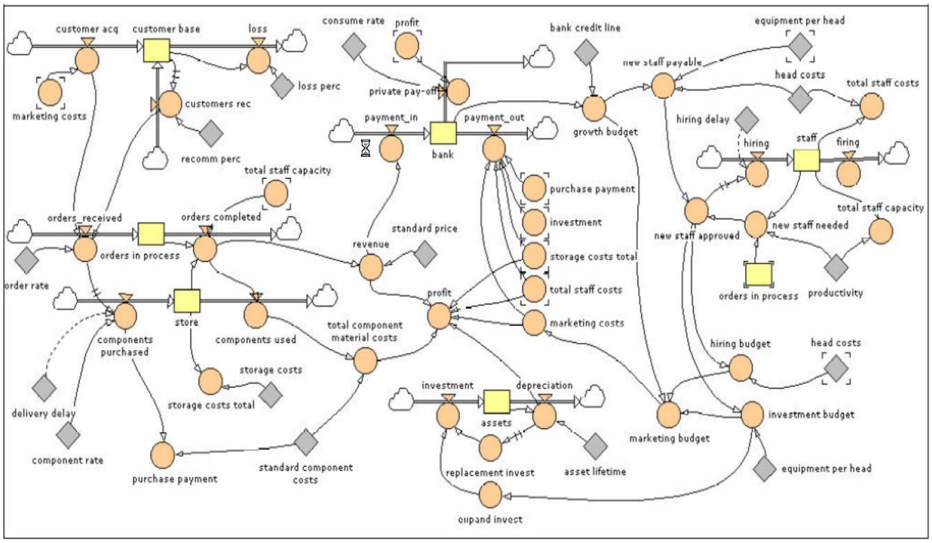


Fig. 2: System dynamics model of the firm

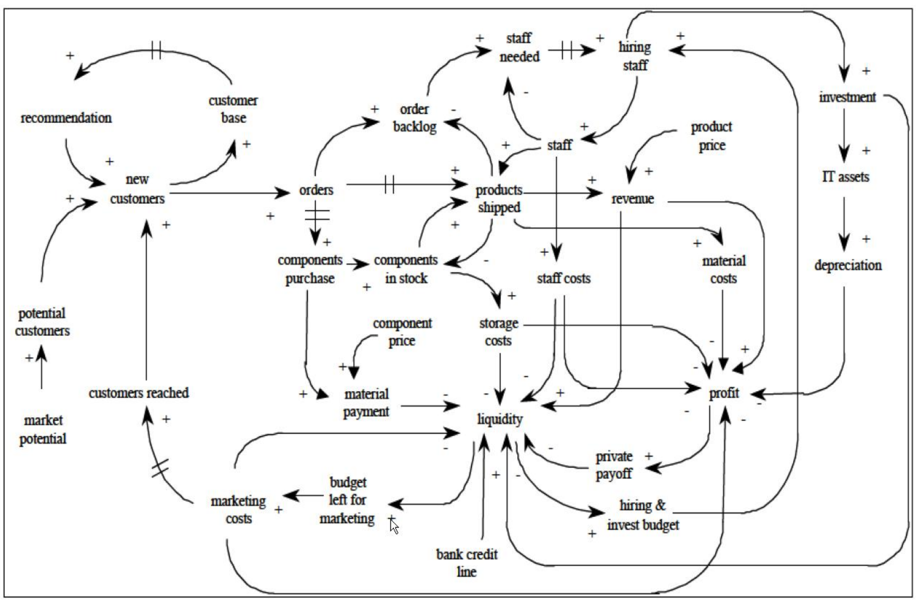


Fig. 1: Causal loop diagram of the firm

Lecturas Complementarias Sugeridas:

- Diseñando el futuro. Jay W. Forrester,15 Diciembre 1998,Universidad de Sevilla, Sevilla, España.
- La quinta disciplina. Senge P. 1994.
- Modelización de Variables Soft. Adriana Ortiz, José María Sarriegi y Javier Santos. Tecnun-Universidad de Navarra. Emails: amortiz@tecnun.es, jmsarriegui@tecnun.es, jsantos@tecnun.es. Revista de Dinámica de Sistemas Vol. 2 Núm. 1 (Marzo 2006), p. 67-101
- Jan Tinbergen. La Esencia de los Modelos En Los Premios Nobel de Economía 1969-1977. Lecturas 25 Prólogo de Gustavo Romero Kolbeck. Banco de México, S. A. Fondo de Cultura Económica. México, pp. 66-78. Conferencia en homenaje a Alfred Nobel, 12 de diciembre de 1969.
- Lugares en donde intervenir en un sistema(para aumentar el grado de efectividad) por Donella H. Meadows Publicado en Whole Earth, invierno de 1997,Traducción de Miguel Martin .Cacit Group s.a. http://www.cacitgroup.com/

Capitulo 3: LA PROGRAMACIÓN LINEAL

ORIGEN

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos como **Newton**, **Leibnitz**, **Bernouilli** y, sobre todo, **Lagrange**, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

Posteriormente el matemático francés **Jean Baptiste-Joseph Fourier** (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático **Gaspar Monge** (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonidas Vitalyevich **Kantarovitch** publica una extensa monografía titulada : *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal **.**

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por **Koopmans y Kantarovitch**, razón por la cual se suele conocer con el nombre de *problema de Koopmans-Kantarovitch.*

Tres años más tarde, **G. Stigler** plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimo.

En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal. Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y las computadoras, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1947, **G.B. Dantzig** formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que cabe reducir todo problema de programación lineal. Dantzig, junto con una serie de investigadores del *United States Departament of Air Force*, formarían el grupo que dio en denominarse *SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs).*

G.B. Dantzig

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

Hacia 1950 se constituyen, fundamentalmente en Estados Unidos, distintos grupos de estudio para ir desarrollando las diferentes ramificaciones de la programación lineal. Cabe citar, entre otros, Rand Corporation, con Dantzig, Orchard-Hays, Ford, Fulkerson y Gale, el departamento de Matemáticas de la Universidad de Princenton, con Tucker y Kuhn, así como la Escuela de Graduados de Administración Industrial, dependiente del Carnegie Institute of Technology , con Charnes y Cooper.

Respecto al método del simplex, que estudiaremos después, señalaremos que su estudio comenzó en el año 1951 y fue desarrollado por Dantzig en el *United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER*, ayudándose de varios modelos de computadora de la firma IBM.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro **Janos von Neuman** (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo *Teoría de Juegos*. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la *Universidad de Princenton de Estados Unidos*, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1858 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: *el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las* *obras de edificación de la ciudad de Moscú*. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con la computadora *Strena* en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y SU APLICACION

En infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc.. se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, que llamaremos restricciones.
Para hacernos una idea más clara de estos supuestos, veamos dos ejemplos:

Ejemplo 1: Problema de máximos.

En una granja se preparan dos clases de piensos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Una bolsa de P contiene 8 Kg. de A y 2 de B, y una bolsa de Q contiene 10 Kg. de A y 5 de B. Cada bolsa de P se vende a 300 $. y cada bolsa de Q a 800 $. Si en la granja hay almacenados 80 Kg. de A y 25 de B, ¿cuántas bolsas de cada tipo de pienso deben preparar para obtener los máximos ingresos?

Ejemplo 2: Problema de mínimos.

Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a frutilla. Se decide repartir al menos 30000 yogures.
Cada yogur de limón necesita para su elaboración 0.5 gramos de un producto de fermentación y cada yogur de frutilla necesita 0.2 gramos de este mismo producto. Se dispone de 9 kilogramos de este producto para fermentación. El coste de producción de un yogur de limón es de 30 $ y 20 $ uno de frutilla.

En los dos ejemplos descritos está claro la cantidad que deseamos maximizar como la cantidad que deseamos minimizar. Estas podemos expresarlas en forma de ecuaciones lineales. Por otra parte, las restricciones que imponen las condiciones de ambos problemas se pueden expresar en forma de inecuaciones lineales.

Tratemos de plantear en términos matemáticos los dos ejemplos anteriores:

En el problema 1) Si designamos por x al número de bolsas de pienso de clase P y por y el número de bolsas de pienso de clase Q que se han de vender, la función
$\boldsymbol{Z = 300x + 800y}$
representará la cantidad de pesos obtenidas por la venta de las bolsas, y por tanto es la que debemos maximizar.

Podemos hacer un pequeño cuadro que nos ayude a obtener las restricciones:

	Nº	Kg. de A	Kg. de B
P	x	$8x$	$2x$
Q	y	$10y$	$5y$
		≤ 80	≤ 25

Por otra parte, las variables x e y, lógicamente, han de ser no negativas, por tanto :

$x \geq 0$, $y \geq 0$
Entonces tenemos un conjunto de restricciones expresadas como:

$$\mathbf{8x + 10y \leq 80}$$

$$\mathbf{2x + 5y \leq 25}$$

$$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$$

En el problema 2) Si representamos por x el número de yogures de limón y con "y" al número de yogures de frutilla, se tiene que la función de costo es

$\boldsymbol{Z = 30x + 20y}$.
Por otra parte, las condiciones del problema imponen las siguientes restricciones:

- De número : $x + y \leq 30000$
- De fermentación: $0.5x + 0.2y \leq 9000$
- Las variables x e y han de ser, lógicamente, no negativas; es decir: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Conjunto de restricciones:

$$\mathbf{x + y \leq 30000}$$

$$\mathbf{0.5x + 0.2y \leq 9000}$$

$$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$$

En base a lo anterior podemos decir :

Se llama programación lineal al conjunto de técnicas matemáticas que pretenden resolver la situación siguiente:
Optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, función lineal de varias variables, sujeta a:
una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales.

Un problema de programación lineal en dos variables, tiene la siguiente formulación estándar:

Maximizar $Z = f(x,y) = ax + by + c$

Sujeto a: $a_1 x + b_1 y \leq c_1$

$a_2 x + b_2 y \leq c_2$

$a_n x + b_n y \leq c_n$

pudiendo cambiarse maximizar por minimizar, y el sentido de las desigualdades.

En un problema de programación lineal intervienen:

- La función f**(*x,y*) = a*x* + b*y* + c** llamada **función objetivo** y que es necesario optimizar. En esa expresión ***x*** e ***y*** son las **<u>variables de decisión</u>**, mientras que a, b y c son constantes.

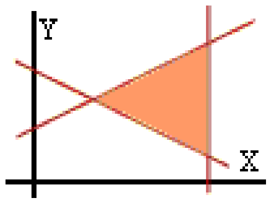
- Las **restricciones** que deben ser inecuaciones lineales. Su número depende del problema en cuestión. El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibilidades o necesidades, que son: inferiores a ... (menores: < o $\leq$); como mínimo de ... (mayores: > o $\geq$) . Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.

- Al conjunto de valores de *x* e *y* que verifican todas y cada una de las restricciones se lo denomina **conjunto (o región) factible**. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución. En el apartado siguiente veremos cómo se determina la región factible.

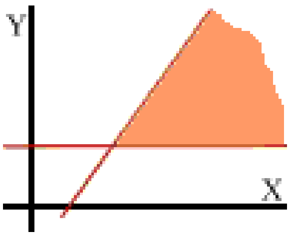
- La **solución óptima** del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que f(*x,y*) tome el valor máximo o mínimo.

DETERMINACION DE LA REGION FACTIBLE

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista una solucion, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **región factible**, y puede estar o no acotada.



Región factible acotada



Región factible no acotada

La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio ($\leq$ o $\geq$) o en sentido estricto (< o >).

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono convexo con ***un número de lados menor o igual que el número de restricciones.***

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

- Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos
- Para averiguar cuál es la región válida, el procedimiento práctico consiste en elegir un punto, por ejemplo, el (0,0) si la recta no pasa por el origen, y comprobar si las coordenadas satisfacen o no la inecuación. Si lo hacen, la región en la que está ese punto es aquella cuyos puntos verifican la inecuación; en caso contrario, la región válida es la otra.

2) La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

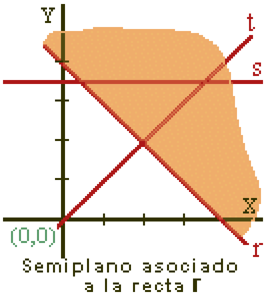
Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución y en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

Veámoslo con un ejemplo:

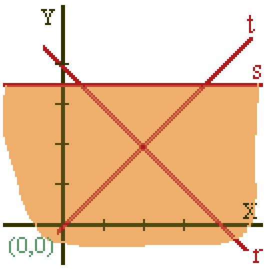
Dibuje la región factible asociada a las restricciones:

$$x + y \geq 4$$
$$y \leq 4$$
$$y \geq x$$

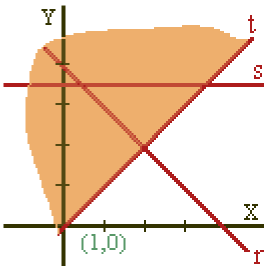
Las rectas asociadas son : r : $x + y = 4$; s : $y = 4$, t: $y = x$



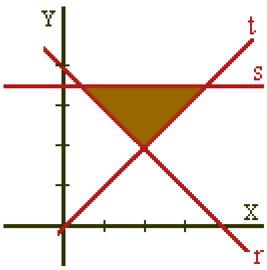
Elegimos el punto O(0,0), que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas (0,0) en la inecuación $x + y \geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta r : $x + y = 4$.



Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas (0,0) satisfacen la inecuación $y \leq 4$ ($0 \leq 4$) . Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto O.



La recta t asociada a la restricción pasa por el origen, lo cual significa que si probásemos con el punto O(0,0) no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto (1,0) y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x$ ($y = 0 < 1 = x$). Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta t que no incluye al punto (1,0).



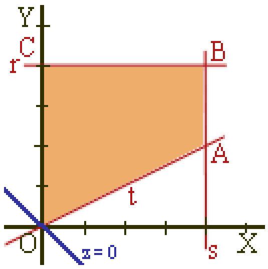
La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores.

Como conclusión podemos decir que :

LA PROGRAMACION LINEAL BUSCA ASIGNAR RECURSOS ESCASOS O LIMITADOS ENTRE ACTIVIDADES COMPETITIVAS DE LA MEJOR MANERA POSIBLE (OPTIMA)

MÉTODO GRÁFICO

Método de las rectas de nivel



Las **rectas de nivel** dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Si la función objetivo es f(x,y) = ax + by + c, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma:

ax + by + c = 0 $\Leftrightarrow$ ax + by = k

Variando k (o p) se obtienen distintos niveles para esas rectas y, en consecuencia, distintos valores para f(x,y).
En un problema todas las rectas de nivel son paralelas, pues los coeficientes a y b de la recta ax + by = k son los que determinan su pendiente. Por tanto, si k_1 es distinto de k_2 , las rectas ax + by = k_1 y ax + by = k_2 son paralelas. Luego, trazada una cualquiera de esas rectas, las demás de obtienen por desplazamientos paralelos a ella.

Si lo que se pretende es resolver un problema de programación lineal, los únicos puntos que interesan son los de la región factible, y las únicas rectas de nivel que importan son aquellas que están en contacto con dicha región. Como el nivel aumenta (o disminuye) desplazando las rectas, el máximo (o el mínimo) de f(x,y) se alcanzará en el último (o en el primer) punto de contacto de esas rectas con la región factible.

Veamos ahora como se aplica todo esto a la resolución de un problema de programación lineal :

Maximizar $Z = f(x,y) = x + y$

sujeto a: $0 \leq x \leq 4$

$0 \leq y \leq 4$

$y \geq x/2$

1) Representamos la región factible:

- La recta s : $x = 4$ pasa por el punto (4,0) y es paralela al eje Y. Las soluciones de $0 \leq x \leq 4$ son los puntos entre el eje Y y la recta $x = 4$
- La recta r : $y = 4$ pasa por el punto (0,4) y es paralela al eje X. Las soluciones de $0 \leq y \leq 4$ son los puntos entre el eje X y la recta $y = 4$
- La recta t : $y = x/2$ pasa por los puntos (0,0) y (2,1) . Las soluciones de $y \geq x/2$ son los puntos de su izquierda.
-

Resolviendo los sistemas correspondientes calculamos los vértices de la región factible:

$y=x/2$, $x=0$ nos da el vértice O(0,0)
$x=4$, $y=x/2$ nos da el vértice A(4,2)
$x=4$ $y=4$ nos da el vértice B(4,4)
$y = 4$, $x = 0$ nos da el vértice C(0,4)

2) Representamos las rectas de nivel :

En nuestro caso son rectas de la forma $x + y = k$. Inicialmente representamos $Z = x + y = 0$. Trasladándola hacia la derecha, obtenemos las rectas : $x + y = 2$, $x + y = 4$, $x + y = 8$, es decir aumenta el nivel.

3) Obtenemos la solución óptima:

Se obtiene en el punto de la región factible que hace máximo k. En nuestro caso esto ocurre en el punto B; es el último punto de contacto de esas rectas con la región factible , para el que k = 8.

Si hay dos vértices, P y Q, que se encuentran en la misma recta de nivel ,de ecuación a*x* + b*y* = k .Es evidente que todos los puntos del segmento PQ son de esa recta; por tanto, en todos ellos f(*x,y*) vale k. Así pues, la solución óptima es cualquier punto de esa recta; en particular los vértices P y Q.

MÉTODO ANALÍTICO :

Método de los vértices

El siguiente resultado, denominado **teorema fundamental de la programación lineal**, nos permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables.

> *En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.*
>
> *Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.*
>
> *En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región*

La evaluación de la función objetivo en los vértices de la región factible nos va a permitir encontrar el valor óptimo (máximo o mínimo) en alguno de ellos.

Veámoslo con un ejemplo:

Maximizar $Z = f(x,y) = 3x + 8y$

sujeto a: $4x + 5y \leq 40$

$2x + 5y \leq 30$

$x \geq 0$, $y \geq 0$

1) Hallar los puntos de corte de las rectas asociadas a las restricciones:

Calculamos las soluciones de cada uno de los seis sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden formar con las cuatro restricciones:

{ $4x + 5y = 40$, $2x + 5y = 30$}. Solución A(5,4)

{ $4x + 5y = 40$, $x = 0$ } Solución (0,8)

{ $4x + 5y = 40$, $y = 0$}. Solución: C(10,0)

{ $2x + 5y = 30$, $x = 0$} Solución: D(0,6)

{ $2x + 5y = 30$, $y = 0$}. Solución : E(15,0)

{ $x = 0$, $y = 0$} Solución: O(0,0)

2) Determinar los vértices de la región factible:

Los vértices de la región factible son aquellos puntos que cumplen todas las restricciones.
Si sustituimos los puntos en cada una de las desigualdades tenemos que:

- B no cumple la segunda restricción $2x + 5y \leq 30$, ya que $2\cdot0 + 5\cdot8 = 40$. Por tanto, el punto B no es un vértice de la región factible.
- E no cumple la primera restricción $4x + 5y \leq 40$, ya que $4\cdot15 + 5\cdot0 = 60$. Por tanto, el punto E no es un vértice de la región factible.

Los puntos A, C, D y O verifican todas las desigualdades, son los vértices de la región factible.

3) Calcular los valores de la función objetivo en los vértices:

$f(A) = f(5,4) = 3\cdot5 + 8\cdot4 = 47$ $f(C) = f(10,0) = 3\cdot10 + 8\cdot 0 = 30$

$f(D) = f(0,6) = 3\cdot0 + 8\cdot6 = 48$ $f(O) = f(0,0) = 3\cdot0 + 8\cdot0 = 0$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D(0,6).

Esquema práctico

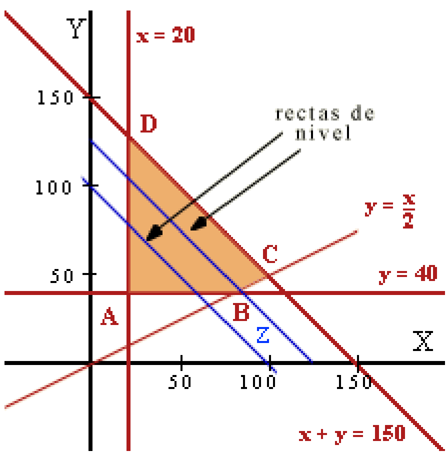
Los problemas de programación lineal pueden presentarse en la forma estándar, dando la función objetivo y las restricciones, o bien plantearlos mediante un enunciado. Si éste es el caso, puede seguirse el camino que indicamos a continuación, ejemplificado con el siguiente problema:

En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria) . ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo?

Obs.: Puede parecer algo absurdo maximizar los gastos , pero se ha enunciado de esta forma para que el ejemplo sea lo más completo posible

Paso 1º: Leer detenidamente el enunciado: determinar el objetivo, definir las variables y escribir la función objetivo.
El objetivo es: halla cuántos bidones de cada tipo hay que almacenar para maximizar los gastos
Suponemos que tal objetivo se consigue almacenado *x* bidones de aceite de girasol e *y* de aceite de oliva
Cómo cada bidón de aceite de girasol cuesta almacenarlo 1 unidad monetaria y lo mismo para uno de aceite, los gastos serán ***x + y***
Luego, la función objetivo es:
Maximizar la función ***Z = f(x,y) = x + y***

Paso 2º: Reordenar los datos del problema y a partir de las cantidades decididas, x e y, escribir el sistema de inecuaciones que determinan las restricciones.



- *Un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol*: ***x*** $\geq$ **20**
- *Un mínimo de 40 bidones de aceite de oliva*: ***y*** $\geq$ **40**
- *El número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol*: ***y*** $\geq$ **x/2**
- *La capacidad total del almacén es de 150 bidones*: ***x + y*** $\leq$ **150**

Además, los números de bidones deben ser cantidades positivas: ***x*** $\geq$ **0 ; *y*** $\geq$ **0**

Obs.: Como veremos en ejemplos posteriores en algunas ocasiones puede interesar utilizar una tabla para recopilar toda la información y hacer los dos primeros apartados

Paso 3º: Expresar el problema en la forma estándar.

Siguiendo con el ejemplo, sería:

Maximizar: $Z = f(x,y) = x + y$

sujeto a: $x + y \leq 150$

$y \leq x/2$

$x \geq 20$; $y \geq 40$

Aquí termina el planteamiento del problema. Para su resolución hay que continuar con :

Paso 4º: Representar gráficamente las restricciones y marcar claramente la región factible. Para las restricciones anteriores debemos representar las rectas: x + y = 150 , y = x/2 , x = 20 e y = 40, obteniéndose la región factible que en la figura se encuentra coloreada.

Paso 5º: Hallar las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.
Resolviendo los sistemas : { $x = 20$, $y = 40$ } , { $y = x/2$, $y = 40$ } , { $y = x/2$, $x + y = 150$} , { $x + y = 150$, $x = 20$}; se obtienen los vértices: A(20,40) , B(80,40) , C(100, 50) , D(20,130)

Paso 6º: Sustituir las coordenadas de esos puntos en la función objetivo y hallar el valor máximo o mínimo.
Sustituyendo en f(x,y) = x + y, se tiene:
f(20,40) = 60 , f(80,40) = 120 , f(100, 50) = 150 , f(20,130) = 150
Como el valor máximo se obtiene en los puntos C y D, puede optarse por cualquiera de los dos, o por cualquier punto perteneciente al segmento que los une. Así, por ejemplo, se obtendría el mismo gasto con 40 bidones de aceite girasol y 110 bidones de aceite de oliva; o 90 y 60 respectivamente.

Paso 7º: También es conveniente representar las rectas de nivel para comprobar que la solución gráfica coincide con la encontrada. Esta conveniencia se convierte en necesidad cuando la región factible es no acotada.
En nuestro caso, puede comprobarse que las rectas de nivel tienen la misma pendiente que la recta límite de la restricción $x + y \leq 150$; por tanto, hay múltiples soluciones.

Paso 8º: Por último, como en la resolución de todo problema es necesario validar la solución: cerciorarse de que la solución hallada es lógica y correcta.
En este ejemplo, no todos los puntos del segmento CD son soluciones válidas, ya que no podemos admitir valores de *x* e *y* no enteros , como ocurriría en el punto (90.5,59.5) .

Obs.: Si un problema en la forma estándar no indica que se debe realizar por el método analítico o gráfico , seguiremos para su resolución los pasos del 4º al 8º

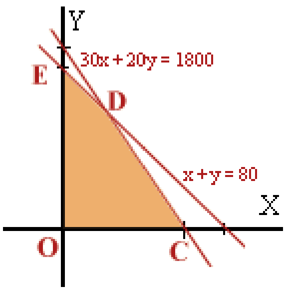
Tipos de soluciones

Los programas lineales con dos variables suelen clasificarse atendiendo al tipo de solución que presentan. Éstos pueden ser:

FACTIBLES

Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones. A su vez, pueden ser:

Con solución única



En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 1800 (en millones $), siendo el costo de cada tipo de casa de 30 y 20 millones, respectivamente. El Municipio exige que el número total de casas no sea superior a 80

.

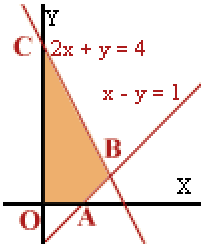
Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es 4 millones y de 3 millones por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Variables: x = nº. de casas tipo A ; y = nº. de casas tipo B
Función objetivo: Maximizar $Z = f(x,y) = 4x + 3y$
Conjunto de restricciones: El coste total $30x + 20y \leq 1800$
El Municipio impone $x + y \leq 80$. De no negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
Tiene por región factible la región sombreada.
Si hallamos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices :
f(O) = f(0,0) = 0 ; f(C)=f(60,0) = 240 ;f(D) = f(20,60) = 260 ; f(E) = f(0,80) = 240

La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo. En este caso es el vértice D(20,60). Por tanto se deben construir 20 casas de tipo A y 60 de tipo B con un coste de 260 millones .

CON SOLUCION MULTIPLE

Si existe más de una solución



Maximizar la función Z = f(x,y) = 4x + 2y sujeta a las restricciones 2x + y ≤ 4 , x - y ≤ 1 , x ≥ 0 , y ≥ 0.

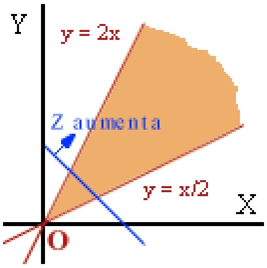
Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:
f(O)=f(0,0) = 0 , f(A) = f(1,0) = 4 ; f(B)=f(5/3,2/3) = 8 , f(C) = f(0,4) = 8

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en todos los puntos del segmento BC.
Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible

En estos casos, como ya vimos , la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

CON SOLUCION NO ACOTADA

Cuando no existe límite para la función objetivo



Maximizar la función Z = f(x,y) = x + y sujeta a las restricciones y ≤ 2x , y ≥ x/2 .

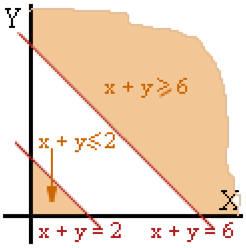
Tiene por región factible la zona sombreada que aparece en la figura, que es una región no acotada.
La función crece indefinidamente para valores crecientes de *x* e *y*

En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.

Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

NO FACTIBLES

Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes.



Maximizar la función Z = f(x,y) = 3x + 8y sujeta a las restricciones $x + y \geq 6$, $x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

No existe la región factible, ya que las zonas sombreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones . Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible. Este tipo de problemas carece de solución.

Con la idea de fijar los procedimientos antes mencionados para programación lineal incluiremos otros ejemplos resueltos:

1) Se considera la región del plano determinada por las inecuaciones: $x + 3 \geq y$; $8 \geq x + y$; $y \geq x - 3$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.

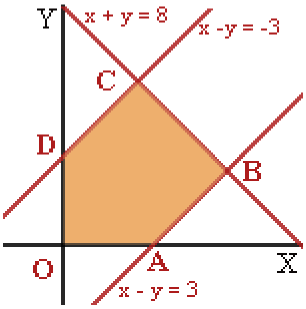
b) Hallar el punto de esa región en el que la función F(*x*,*y*) = 6*x* + 4*y* alcanza el valor máximo y calcular dicho valor.

a) Hay que dibujar la región factible correspondiente. Para ello vamos a representar las rectas:

$x - y = -3$; $x + y = 8$; $x - y = 3$

La región factible es la determinada por los vértices O, A, B, C y D.

Las coordenadas de los vértices son: A(3,0) ; B(5.5, 2.5) ; C(2.5, 5.5) ; D(0,3) y O(0,0)



b) Para determinar dónde la función objetivo F(x,y) = 6x + 4y alcanza su máximo, calculamos los valores que toma en los vértices:

F(A) = 18 ; F(B) = 43 ; F(C) = 37 ; F(D) = 12 ; F(O) = 0.

Luego la función alcanza su máximo en el vértice B y su valor es 43.

2) Las restricciones pesqueras impuestas por las autoridades nacionales obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de abadejo, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 1.0 U$S/Kg. y el precio del abadejo es de 1.5 U$S/Kg., ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

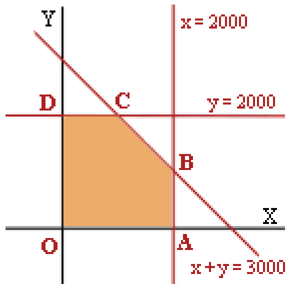
Sean :
x = número de toneladas de merluza
y = número de toneladas de abadejo

Del enunciado deducimos las restricciones:

- *Como máximo 2000 toneladas de merluza:* $x \leq 2000$
- *Como máximo 2000 toneladas de abadejo:* $y \leq 2000$
- *Las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3000 toneladas:* $x + y \leq 3000$

La función objetivo que da el beneficio en miles de U$S y que hay que maximizar viene dada por:
f(x,y) = 1000x + 1500y

Representando las rectas: x = 2000, y = 2000 , x + y = 3000 correspondientes a las fronteras de las restricciones obtenemos la región factible:



Donde los vértices obtenidos son:
A(2000,0) ; B(2000, 1000) ; C(1000, 2000) , D(0,2000) y O(0,0)

Al sustituir sus coordenadas en la función objetivo f resulta :

f(A) = 2000 U$S. ; f(B) = 3500 U$S ; f(C) = 4000 U$S ; f(D) = 3000 U$S y f(O)= 0 U$S.

La función objetivo alcanza su máximo en el vértice C, por lo que las cantidades a pescar son 1000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de abadejo.

3) Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones:
La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.

a. ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?
b. ¿Qué mezcla hace q mínimo?

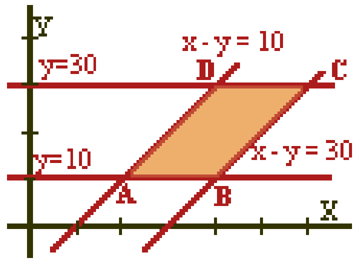
Sean *x* e *y*, respectivamente, los gramos de las pinturas A y B que aparecen en la mezcla. Traduzcamos a inecuaciones las restricciones a las que se han de someter esas cantidades.

- *La cantidad de A es mayor que la de B*: $x > y$
- *Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos*: $30 \geq x - y \geq 10$
- *B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos*: $30 \geq y \geq 10$

Además sabemos que : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Veamos las cantidades de pigmento de cada tipo:

Cantidad de pigmento de tipo p: $F_p(x, y) = 0.3x + 0.5y$
Cantidad de pigmento de tipo q: $F_q(x, y) = 0.4x + 0.2y$



La región factible es la que aparece en la imagen del margen.

Sus vértices son A(20,10) , B(40,10), C(60,30) y D(40,30)

a) La mayor cantidad de pigmento p, se produce para 60 gramos de la pintura A y 30 de la B:
$F_p(40,30) = 0.3 \cdot 40 + 0.5 \cdot 30 = 27$; $F_p(20,10) = 11$; $F_p(40, 10) = 17$; $F_p(60, 30) = 33$

b) La menor cantidad de pigmento q, se produce para 20 gramos de la pintura A y 10 de la B:
$F_q(40, 30) = 0.4 \cdot 40 + 0.2 \cdot 30 = 22$; $F_q(20, 10) = 10$; $F_q(40, 10) = 18$; $F_q(60, 30) = 30$

PROCESO DE FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE PL Y SU APLICACIÓN

Todo programa lineal consta de cuatro partes: un conjunto de variables de decisión, los parámetros, la función objetivo y un conjunto de restricciones. Al formular un determinado problema de decisión en forma matemática, debe practicar la *comprensión del problema (es decir, formular un Modelo Mental)* leyendo detenidamente una y otra vez el enunciado del problema. Mientras trata de comprender el problema, formúlese las siguientes preguntas generales:

1. **¿Cuáles son las variables de decisión?** Es decir, ¿cuáles con las entradas controlables? Defina las variables de decisión con precisión utilizando nombres descriptivos. Recuerde que las entradas controlables también se conocen como actividades controlables, variables de decisión y actividades de decisión.

2. **Cuáles son los parámetros?** Vale decir ¿cuáles son las entradas no controlables? Por lo general, son los valores numéricos constantes dados. Defina los parámetros con precisión utilizando nombres descriptivos.

3. **¿Cuál es el objetivo?** ¿Cuál es la función objetivo? Es decir, ¿qué quiere el dueño del problema? ¿De qué manera se relaciona el objetivo con las variables de decisión del dueño del problema? ¿Es un problema de maximización o minimización? El objetivo debe representar la meta del decisor.

4. **¿Cuáles son las restricciones?** Es decir, ¿qué requerimientos se deben cumplir? ¿Debería utilizar un tipo de restricción de desigualdad o igualdad? ¿Cuáles son las conexiones entre las variables? Escríbalas con palabras antes de volcarlas en forma matemática.

Recuerde que la *región factible tiene poco o nada que ver con la función objetivo (minim. o maxim.).* Estas dos partes en cualquier formulación de PL generalmente provienen de dos fuentes distintas. La función objetivo se establece para cumplir con el deseo (objetivo) del decisor mientras que las restricciones que forman la región factible generalmente provienen del entorno del decisor que fija algunas limitaciones / condiciones para lograr su objetivo.

A continuación, se incluye un problema ilustrativo muy sencillo. Sin embargo, el abordaje del problema es igual para una gran variedad de problemas de toma de decisión, mientras que el tamaño o la complejidad pueden variar.

Ejemplo de aplicación: E*l problema del carpintero :el mix de producción*

Durante un par de sesiones de brain-storming con un carpintero (nuestro cliente), éste nos comunica que sólo fabrica mesas y sillas y que vende todas las mesas y las sillas que fabrica en un mercado. Sin embargo, no tiene un ingreso estable y desea optimizar esta situación.

El objetivo es determinar cuántas mesas y sillas debería fabricar para maximizar sus ingresos netos. Comenzamos concentrándonos en un horizonte de tiempo, es decir, un plazo de planificación para revisar nuestra solución semanalmente, si fuera necesario. Para saber más acerca de este problema, debemos ir al negocio del carpintero y observar lo que sucede y medir lo que necesitamos para formular (para crear un modelo de) su problema. Debemos confirmar que su objetivo es maximizar sus ingresos netos. Debemos comunicarnos con el cliente.

El problema del carpintero se trata de determinar cuántas mesas y sillas debe fabricar por semana; pero primero se debe establecer una función objetivo.

La función objetivo es: 5X1 + 3X2, donde X1 y X2 representan la cantidad de mesas y sillas; y 5 y 3 representan los ingresos netos (por ejemplo, en dólares o otra unidad monetaria) de la venta de una mesa y una silla, respectivamente. Los factores limitantes, que normalmente *provienen del exterior*, son las limitaciones de la mano de obra (esta limitación proviene de la familia del carpintero) y los recursos de materia prima (esta limitación proviene de la entrega programada). Se miden los tiempos de producción requeridos para una mesa y una silla en distintos momentos del día y se calculan en 2 horas y 1 hora, respectivamente. Las horas laborales totales por semana son sólo 40. La materia prima requerida para una mesa y una silla es de 1 y 2 unidades, respectivamente. El abastecimiento total de materia prima es de 50 unidades por semana. En consecuencia, la formulación de PL es la siguiente:

Maximizar 5 X1 + 3 X2

Sujeta a:
2 X1 + X2 <= 40 restricción de mano de obra
X1 + 2 X2 <= 50 restricción de materiales
X1 como X2 son no negativas.

Este es un modelo matemático para el problema del carpintero. Las variables de decisión, es decir, las entradas controlables son X1, y X2. La salida o el resultado de este modelo son los ingresos netos totales 5 X1 + 3 X2. Todas las funciones empleadas en este modelo son lineales (las variables de decisión están elevadas a la primera potencia).

El coeficiente de estas restricciones se denomina <u>Factores Tecnológicos</u> (matriz de Factores Tecnológicos). El período de revisión es de una semana, un período conveniente dentro del cual es menos probable que cambien (fluctúen) las entradas controlables (todos los parámetros tales como 5, 50, 2,..). Incluso en un plazo de planificación tan corto, debemos realizar el análisis what-if o de hipótesis para responder a cualquier cambio en estas entradas a los efectos de controlar el problema, es decir, actualizar la solución prescripta.

Nótese que dado que el Carpintero no va a ir a la quiebra al final del plazo de planificación, agregamos las condiciones que tanto X1 como X2 deben ser no negativas en lugar de los requerimientos que X1 y X2 deben ser números enteros positivos. Recuerde que las condiciones de no negatividad también se denominan "restricciones implícitas". Nuevamente, un Programa Lineal funcionaría bien para este problema si el Carpintero continúa fabricando estos productos. Los artículos parciales simplemente se contarían como trabajos en proceso y finalmente se transformarían en productos terminados, en la siguiente semana.

Podemos intentar resolver X1 y X2 enumerando posibles soluciones para cada una y seleccionado el par (X1, X2) que maximice 5X1 + 3X2 (los ingresos netos). Sin embargo, lleva mucho tiempo enumerar todas las alternativas posibles y si no se enumeran todas las alternativas, no podemos estar seguros de que el par seleccionado (como una solución) es la mejor de todas las alternativas.

La solución óptima, es decir, la estrategia óptima, , es establecer X1 = 10 mesas y X2 = 20 sillas. Programamos las actividades semanales del carpintero para que fabrique 10 mesas y 20 sillas. Con esta estrategia (óptima), los ingresos netos son de $110. Esta solución prescripta sorprendió al carpintero dado que debido a los mayores ingresos netos provenientes de la venta de una mesa ($5), él solía fabricar más mesas que sillas.

Una pregunta del carpintero ¿Contratar o no contratar a un ayudante? Supóngase que el carpintero pudiera contratar a un ayudante a un costo de $2 por hora (adicionales $2) ¿Le conviene al carpintero contratar a un ayudante? En caso afirmativo, ¿por cuántas horas?

X3 es la cantidad de horas extra, entonces el problema modificado es:

Maximizar 5 X1 + 3 X2 - 2 X3

Sujeta a:
2 X1 + X2 <= 40 + X3 restricción de la mano de obra con horas adicionales desconocidas

X1 + 2 X2 <= 50 restricción de materiales

En esta nueva condición, veremos que la solución óptima es X1 = 50, X2 = 0, X3 = 60, con ingresos netos óptimos de $130. Por lo tanto, el carpintero debería contratar a un ayudante por 60 horas

EL METODO SIMPLEX

Uno de los métodos mas importantes para la resolución de la programación lineal es el método Simplex. Si bien como se menciono antes, este trabajo no esta dirigido a matemáticos que deban profundizar en las herramientas, es necesario conocer los fundamentos sobre los cuales este método se apoya.

El método Simplex fue desarrollado por Dantzig en 1947 y es un método algebraico de conceptos geométricos. Es un método iterativo (repite una serie de pasos fijos) que se inicia encontrando una solución factible inicial. Esta solución factible inicial es un punto en los vértices del polígono de soluciones factibles como se vio anteriormente en la solución grafica de la PL. El método parte de esta solución factible inicial, se plantea si la misma es optima y si no lo es busca otra solución factible y asi sucesivamente.

Para iniciar el método se elije el origen (todas las variables de decisión iguales a cero) y luego escoge soluciones adyacentes a este punto. Esto es el método sigue una trayectoria a lo largo de las aristas de la figura de la región factible. Para conocer su trayectoria el método evalúa en cuanto cada potencial solución mejora la función objetivo(Z) y opta moverse por aquella que tiene una mejor tasa de mejoramiento.

El método se inicia convirtiendo la desigualdad que tenemos en el sistema de ecuaciones cambiando por restricciones de igualdad equivalentes. Para lograr esto se recurre a las variables de holgura o slacks que veremos mas adelante.

Para simplificación de la idea original se desarrollo una variante del método llamado Método Simplex revisado que se acomoda a el procesamiento por medio de la computadora. Esta variante utiliza operaciones con matrices

La Programación Lineal en su fundamentos tiene principalmente cuatro supuestos: Proporcionalidad, aditividad, divisibilidad y certidumbre. No hemos reparado en estas propiedades o supuestos de la PL ya que en la realidad de los problemas estas no se cumplen. Si bien es necesario para el método Simplex que no existan grandes desvíos de las mismas.

La tarea importante de la metodología Simplex es la obtención de las variables de holgura y los denominados precios sombra que tienen una enorme importancia practica y que ampliaremos mas adelante..

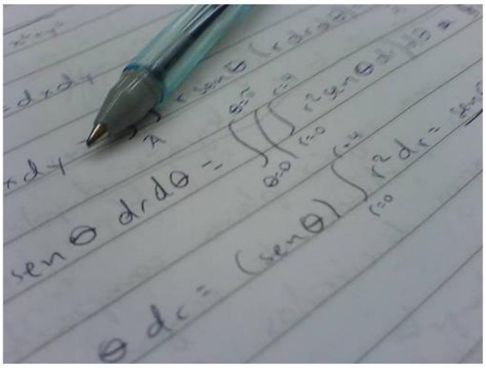
La aplicación del método Simplex nos permite tareas futuras de post-optimalidad con los análisis de sensibilidad y programación lineal paramétrica. Todo esto se ve facilitado por los programas de computación que disponemos hoy y que facilita la tarea.

EL PROBLEMA DUAL Y EL METODO SIMPLEX

En el desarrollo de la programación Lineal, se descubrió la existencia de un problema que se encuentra estrechamente relacionado con un problema de Programación Lineal dado: Dicho problema se denominó **PROBLEMA DUAL**. Cada problema dado (Problema principal, Problema primo, Problema primero), de programación lineal, tiene un problema dual que tiene las siguientes características:

1. En problemas de un gran número de restricciones, resolver el problema dual en la computadora es más eficiente que resolver el problema principal.

2. En algunas ocasiones resulta más sencilla la resolución del problema dual que la del problema principal, en términos de menor número de iteraciones.



3. Los valores óptimos de las variables del dual, proporcionan una interpretación económica del problema principal, interesante.

4. Algunas veces se puede evitar el uso de las variables artificiales (Superávit), mediante la aplicación del método de solución denominado Dual – Simplex, sobre el problema dual.

5. Facilita el estudio del impacto sobre la optimalidad por cambios en el problema original.

Formularemos el problema dual y mostrar el método de solución para el problema dual, denominado Método Dual-Simplex, para problemas de maximización, ya que, por medio de la regla de equivalencia (Min(z) = Max(-z))Toda formulación de un problema de programación lineal se puede expresar de la forma estándar: Maximice (z), con todas las restricciones <

Si tenemos un problema de programación lineal expresado de la forma:

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = \bar{c}\,\bar{X} \\ \text{c.s.r.} \\ \quad \bar{A}\bar{X} \leq \bar{b} \\ \bar{X} \geq 0 \end{array}$$

Problema Principal

Existe otro problema, el Dual, que se expresa así:

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = \bar{b}'\bar{Y} \\ \text{c.s.r.} \\ \quad \bar{A}'\bar{Y} \geq \bar{C}' \\ \bar{Y} \geq 0 \end{array}$$

Problema Dual

En donde:

Problema Principal

$$\bar{c} = (c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mj} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Problema Dual

$$\bar{b}' = (b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_m)$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_j \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{i1} \cdots a_{m1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1j} \cdots a_{ij} \cdots a_{mj} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n} \cdots a_{in} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \bar{C}' = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

El siguiente ejemplo numérico ilustra lo anterior:

Problema Principal

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 \\ \text{c.s.r.} \\ \quad X_1 + 2X_2 \leq 7 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 15 \\ \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{array}$$

Problema Dual

$$\begin{array}{l} \text{Min } Z = 7Y_1 + 15Y_2 \\ \text{c.s.r.} \\ \quad Y_1 + 3Y_2 \geq 4 \\ 2Y_1 + 2Y_2 \geq 3 \\ \\ Y_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \end{array}$$

Observe que cada restricción del problema principal está representada por una variable en el dual.

Otro ejemplo numérico es el siguiente:

Problema Principal	Problema Dual
$\text{Max } Z_X = 3X_1 - 2X_2$	$\text{Min } Z_Y = 4Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 - Y_4$
c.s.r.	c.s.r.
$X_1 \leq 4 \quad (Y_1)$	$Y_1 + Y_3 \geq 3$
$X_2 \leq 6 \quad (Y_2)$	$Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq -2$
$X_1 + X_2 \leq 5 \quad (Y_3)$	
$- X_2 \leq -1 \quad (Y_4)$	$Y_J \geq 0 \; ; \; J = 1, 2, 3, 4$
$X_J \geq 0 \; ; \; J = 1, 2$	

Cada uno de los recursos del problema principal estará representado por una variable en el problema dual.

Entre el problema principal y el problema dual existen las siguientes relaciones:

1. El dual del dual, tiene como resultado el problema principal.
2. Una restricción que es una igualdad en el problema principal, genera una variable en el dual sin restricción en el signo
3. Una variable del problema principal, sin restricción en el signo, genera una restricción de igualdad en el problema dual.
4. El número de restricciones del problema principal es igual al número de variables en el problema dual.
5. El número de variables del problema principal es igual al número de restricciones en el problema dual.

EL MÉTODO DUAL – SIMPLEX

Una vez formulado el problema dual, debemos encontrar su solución. El método a emplear será el denominado Método Dual-Simplex el cuál empieza con una solución óptima o mejor que óptima ($Z_j - C_j \geq 0; \forall_{j}$), pero no factible (Algunos b_i son ≤ 0), y se mueve hacia el óptimo mediante iteraciones que mejoran su factibilidad conservando su optimalidad.

Observe que es lo contrario al método Simplex, en donde se empieza mediante una solución factible pero no óptima y mediante iteraciones se mejora la optimalidad, conservando la factibilidad.

Esto se ilustra mediante la siguiente gráfica:

Método Simplex	Solución Optima	Método Dual Simplex
Solución Factible	y Factible	Solución NO Factible
Pero NO Óptima		Pero Óptima

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

Método Simplex	Método Dual Simplex
Mejora su Optimalidad	Mejora su Factibilidad
Conservando su Factibilidad	Conservando su Optimalidad

ALGORITMO PARA MAXIMIZAR EN EL MÉTODO DUAL – SIMPLEX

Se requiere que el problema esté expresado en términos de Maximizar la Función objetivo y todas sus restricciones con mayor ó igual ($\geq$)

Variable que sale de la Base: Aquella que tenga el valor menos factible ó sea la más negativa, matemáticamente: $X_{B,r}$ = Mínimo i $X_{B,i}$, $X_{B,i} < 0$; $X_{B,i} < 0$ implica que la solución es NO factible.

Variable que entra a la Base: Aquella variable que tenga el valor menos negativo en su expresión: $(Z_j - C_j) / a_{r,j}$, matemáticamente: $(Z_K - C_K) / a_{r,k}$ = Máximo j $(Z_j - C_j) / a_{r,j}$; Siendo $a_{r,j} < 0$.

El siguiente ejemplo ilustra un paralelo entre el Método Simplex y el Método Dual – Simplex en donde se resalta para cada iteración, la relación entre los dos (2) Métodos.

Hallar la solución óptima al problema siguiente:

Problema Principal

$$\text{Max } Z(x) = 3X_1 + 5X_2$$

c.s.r.

$$\begin{aligned} X_1 \qquad &\leq 4 \\ X_2 &\leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$X_J \geq 0$; J = 1,2

$$\text{Max } Z(x) = 3X_1 + 5X_2$$

c.s.r.

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 &= 4 \\ X_2 + X_4 &= 6 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 &= 18 \end{aligned}$$

$X_J \geq 0$; J = 1,2,3,4,5

Problema Dual

$$\text{Min } Z(y) = 4Y_1 + 6Y_2 + 18Y_3$$

c.s.r.

$$\begin{aligned} Y_1 + 3Y_3 &\geq 3 \\ Y_2 + 2Y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

$Y_J \geq 0$; J = 1,2,3

$$\text{Max } Z(y) = - 4Y_1 - 6Y_2 - 18Y_3$$

c.s.r.

$$\begin{aligned} - Y_1 - 3Y_3 + Y_4 &= - 3 \\ - Y_2 - 2Y_3 + Y_5 &= - 5 \end{aligned}$$

$Y_J \geq 0$; J = 1,2,3,4,5

Problema Principal

C_J →			3	5	0	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	X_3	4	1	0	1	0	0	NO	
0	X_4	6	0	1	0	1	0	6	→
0	X_5	18	3	2	0	0	1	9	
$Z_J - C_J$		0	-3	-5	0	0	0		
				↑					
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3		

$X_1 = 0$	$X_4 = 6$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$
$X_2 = 0$	$X_5 = 18$	$Y_2 = 0$	$Y_5 = -5$
$X_3 = 4$	$Z_X = 0$	$Y_3 = 0$	$Z_Y = 0$

C_J →			3	5	0	0	0	$\frac{b}{a}$	
↓	V.B.	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
0	X_3	4	1	0	1	0	0	4	
5	X_2	6	0	1	0	1	0	NO	
0	X_5	6	3	0	0	-2	1	2	→
$Z_J - C_J$		30	-3	0	0	5	0		
			↑						
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3		

$X_1 = 0$	$X_4 = 0$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$
$X_2 = 6$	$X_5 = 6$	$Y_2 = 5$	$Y_5 = 0$
$X_3 = 4$	$Z_X = 30$	$Y_3 = 0$	$Z_Y = 30$

C_J →			3	5	0	0	0
↓	V.B.	$\bar{b}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	2	0	0	1	2/3	-1/3
5	X_2	6	0	1	0	1	0
3	X_1	2	1	0	0	-2/3	1/3
$Z_J - C_J$		36	0	0	0	3	1
			Y_4	Y_5	Y_1	Y_2	Y_3

$X_1 = 2$	$X_4 = 0$	$Y_1 = 0$	$Y_4 = 0$
$X_2 = 6$	$X_5 = 0$	$Y_2 = 3$	$Y_5 = 0$
$X_3 = 2$	$Z_X = 36$	$Y_3 = 1$	$Z_Y = 36$

Problema Dual

C_J →			-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_4	-3	-1	0	-3	1	0	
0	Y_5	-5	0	-1	-2	0	1	→
$Z_J - C_J$		0	4	6	18	0	0	
$(Z_J - C_J)/a_{RJ}$			NO	-6	-9	NO	NO	
				↑				
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	

$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$	$X_1 = 0$	$X_4 = 6$
$Y_2 = 0$	$Y_5 = -5$	$X_2 = 0$	$X_5 = 18$
$Y_3 = 0$	$Z_Y = 0$	$X_3 = 4$	$Z_X = 0$

C_J →			-4	-6	-18	0	0	
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_4	-3	-1	0	-3	1	0	→
-6	Y_2	5	0	1	2	0	-1	
$Z_J - C_J$		-30	4	0	6	0	6	
$(Z_J - C_J)/a_{RJ}$			-4	NO	-2	NO	NO	
					↑			
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	

$Y_1 = 0$	$Y_4 = -3$	$X_1 = 0$	$X_4 = 0$
$Y_2 = 5$	$Y_5 = 0$	$X_2 = 6$	$X_5 = 6$
$Y_3 = 0$	$Z_Y = 30$	$X_3 = 4$	$Z_X = 30$

C_J →			-4	-6	-18	0	0
↓	V.B.	$\bar{b}$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
-18	Y_3	1	1/3	0	1	-1/3	0
-6	Y_2	3	-2/3	1	0	2/3	-1
$Z_J - C_J$		-36	2	0	0	2	6
			X_3	X_4	X_5	X_1	X_2

$Y_1 = 0$	$Y_4 = 0$	$X_1 = 2$	$X_4 = 0$
$Y_2 = 3$	$Y_5 = 0$	$X_2 = 6$	$X_5 = 0$
$Y_3 = 1$	$Z_Y = 36$	$X_3 = 2$	$Z_X = 36$

Observe que en el Dual – Simplex se hizo uso de la regla de equivalencia, multiplicando la función objetiva por (-1), y al final, nuevamente se multiplicó el valor de Z por (-1).

En cada iteración del Método Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura X_3,X_4,X_5 (Z_3-C_3 , Z_4-C_4 , Z_5-C_5) son los valores de las variables reales del Dual (Y_1,Y_2,Y_3)
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales X_1,X_2 (Z_1-C_1 , Z_2-C_2) son los valores de las variables de holgura del Dual (Y_4,Y_5)

En cada iteración del Método Dual – Simplex se muestra que:

1. Los $Z_j - C_j$ de las variables de holgura Y_4,Y_5 (Z_4-C_4 , Z_5-C_5) son los valores de las variables reales del problema principal (X_1,X_2)
2. Los $Z_j - C_j$ de las variables reales Y_1,Y_2 ,Y_3 (Z_1-C_1 , Z_2-C_2 , Z_3-C_3) son los valores de las variables de holgura del problema principal (X_3,X_4,X_5)

En general se observa al armar una tabla que los encabezados del primal están en posición horizontal mientras que para leer los del dual necesitamos girar el dibujo 90º.
Como dijimos:
1) Los parámetros de la restricción son los coeficientes de una variable en el otro
2) Los coeficientes de la función objetivo en un problema son los valores del lado derecho en el otro.

La solución óptima del dual proporciona los ***precios sombra***.
Veamos una aplicación de la tabla: supongamos el siguiente primal y su dual

PRIMAL	**DUAL**
Max Z = 3 X1 + 5 X2	Min Y0 = 4Y1+12 Y2 +18 Y3
s.a. X1 <= 4	Y1 + 3Y 3 >= 3
2 X2 <= 12	2 Y2 + 2 Y3 >= 5
3X1 + 2 X2 <= 18	Y1,Y2,Y3 >=0
X1,X2 >= 0	

Correspondencia entre los elementos del Problema Primal – Dual

Restricción i $\longleftrightarrow$ Variable i
Función Objetivo $\longleftrightarrow$ Lados derechos.

veamos la tabla:

			Problema Primal				
					Coeficiente de	**Lado derecho**	
			x1	**x2**	**xn**		
						$\leq$ b1	
Problema	***Coeficientes de***	**y1**	**a11**	**a12**	**a1n**	**$\leq$ b2**	***Coeficientes***
Dual		**y2**	**a21**	**a22**	**a2n**	**$\leq$ bn**	***para***
			----------	----------	----------	------------	***la***
		ym	**am1**	**am2**	**amn**		***funcion objetivo***
		Lado derecho	**Vi**	**Vi**	**Vi**		
							(Minimizar)
			c1	**c2**	**cn**		
			Coeficientes de la funcion objetivo (Maximizar)				

Una manera de ver el problema dual es como otra forma de encontrar la meta del Simplex alcanzando una solución que cumpla con la prueba de optimalidad.

La solución optima del dual proporciona los precios sombra del primal. La interpretación del dual es una interpretación económica.

OTROS ALGORITMOS PARA PROGRAMACION LINEAL

Si bien el algoritmo Simplex es el algoritmo frecuente hay otros que son derivaciones del mismo y también tienen su importancia. Los mencionaremos para conocimiento del alumno sin entrar en tratamiento:

- ✓ Método Simplex Dual
- ✓ Programación lineal para métrica
- ✓ Técnica de ramificación y acotamiento
- ✓ Enfoque de punto interior

Para el detalle de los mismos se sugiere consultar la bibliografía de esta obra.

EL ANALISIS DE SENSIBILIDAD o DE POST-OPTIMALIDAD

En general se supone que todos los parámetros del modelo son conocidos, pero ocurre que en la realidad en la mayoría de los casos son estimaciones. Por todo esto es que el análisis de sensibilidad se convierte en una pieza importante para la toma de decisiones.
El análisis de sensibilidad permite ver que efecto tienen sobre la solución optima el hecho de que los valores de los parámetros cambien.
En general es necesario:

1. Determinar los parámetros que si cambian producen cambios en la solución optima
2. Determinar el intervalo de valores para que no cambie la solución optima (intervalo permisible)
3. Determinar el intervalo de valores para que la solución siga siendo factible.

En definitiva me interesa saber que tan sensible es la solución optima a los datos inexactos.

Esto también me permite en la toma de decisiones que puedo admitir o si debo mejorar la información para precisar mas los parámetros.

ANALISIS GRAFICO DE LA SENSIBILIDAD

Veremos en un ejemplo de dos variables que significa el análisis de sensibilidad:

Básicamente hay dos grandes cambios:

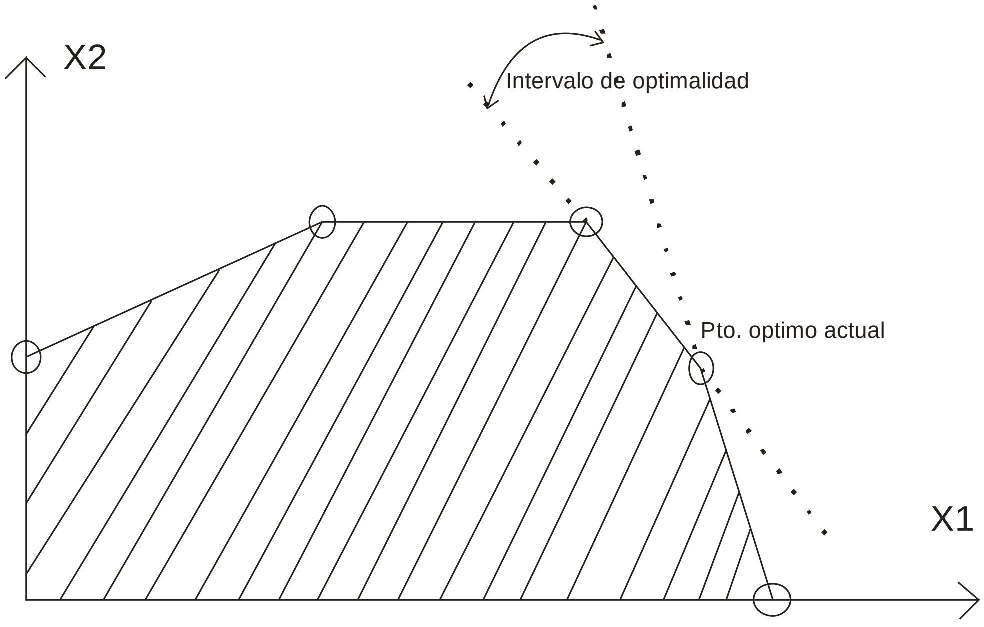
-Cambios en los coeficientes de la función objetivo.
-Cambio en el lado derecho de las restricciones (LD)

Es de destacar también que se pueden producir Cambios en los Coeficientes Tecnológicos**:** Estos cambios se deben a menudo a innovaciones tecnológicas o a mejoras en la productividad. Este tipo de cambios no producirá variación alguna en la función objetivo, pero sí alterará sustancialmente la "forma" de la región factible, por lo que la solución óptima también variará. Su análisis puede llegar a ser muy complejo, motivo por el cual lo omitiremos

1.Veremos los efectos de cambios en los coeficientes de la función objetivo:

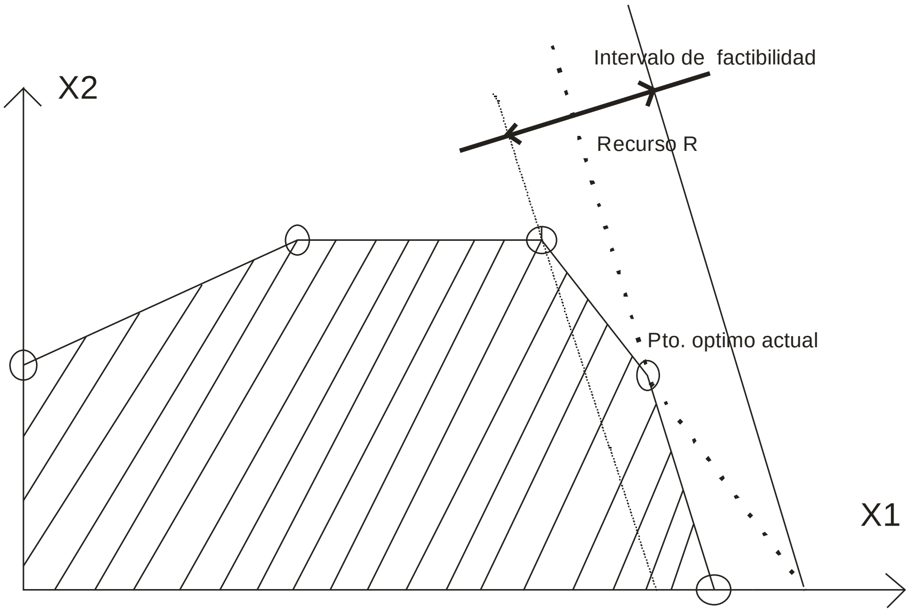
En general $Z = C1\ X1 + C2\ X2$ Max o MIN

Cambiar C1 y C2 rana cambiar la pendiente de Z y posiblemente el punto esquina optimo.
Esto es por ejemplo producido por un cambio en los márgenes de contribución o de los costos.
Sin embargo hay un intervalo de variación de C1 y C2 dentro del cual el optimo permanece sin cambio.



2. Veremos ahora los cambios en el lado derecho.

Gráficamente crea una traslación paralela a la resta de las restricciones. Esto puede modificar la solución óptima y la función objetivo.
Es un cambio en la disponibilidad de los recursos limitados.
Recordemos que el lado derecho (RHS) es el límite de disponibilidad de los recursos.



Relajar una restricción significa hacerla mas fácil de satisfacer.

Si la restricción es $\geq$ significa disminución en el LD

Si la restricción es $\leq$ significa aumentar el LD

Una solución óptima de PL es degenerada si al menos una variable básica en la solución optima en cero. En estos casos se deben tomar precauciones al interpretar los resultados de los programas informáticos.

LAS VARIABLES DE HOLGURA (SLACKS)

Si convirtiésemos las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad equivalentes deberíamos introducir unas variables que llamaremos ***variables de holgura***

Forma Original	Forma aumentada
Max Z = 3 X1 + 5 X2	Max Z = 3 X1 + 5 X2
X1 $\leq$ 4	X1 + X3 = 4
2 X2 $\leq$ 12	2 X2 + X4 = 12
3 X1 + 2 X2 $\leq$ 18	3 X1 + 2 X2 + X5 = 18
X1 $\geq$ 0	X1 $\geq$ 0

$X2 \geq 0$ $X2 \geq 0$

Las variables de holgura no entran en la función objetivo porque sus coeficientes son cero.

Si la variable de holgura es igual a cero en la solución actual indica que la solución se encuentra en la frontera de restricción.
Si el valor es mayor que cero significa que la solución está en el lado factible de la frontera de restricción y un valor menor que cero significa que está en el lado no factible.

También las podemos considerar como: cantidad no usada o holgura slack en las restricciones **≤**
Exceso o surplus en las restricciones **≥**

La solución básica es aquel planteo que incluye los valores de las variables de holgura.

COSTOS REDUCIDOS

Gradiente reducido.

Los costos reducidos que es otra información del análisis de sensibilidad, se explican en base a una interpretación económica de la programación lineal.

Costo reducido por unidad de la actividad i	**=**	**Costo de recursos consumidos por u. para actividad i**	**-**	**Utilidad por unidad actividad i**

Por tanto teniendo la consideración anterior, si el costo reducido es positivo significa que su costo unitario de recursos consumidos es mayor que su utilidad unitaria y entonces debería desechar esa actividad

Por tanto el valor de la variable asociada debe ser cero en la solución optima. Tenemos entonces un equilibrio entre salida (utilidad unitaria) y entrada (costo unitario de recursos consumidos)

Estos valores me dan una idea de cuánto debería mejorar la variable objetivo para el optimo o sea convertirse en variable básica.
Un valor distinto de cero produce un deterioro en el rendimiento dado por el costo reducido.

Un gradiente reducido negativo de la variable de decisión indica que aumentar la variable perjudica el valor de la función objetivo en un modelo que maximiza.

y
Un gradiente reducido positivo de la variable de decisión indica que aumentar la variable perjudica el valor de la función objetivo en un modelo que minimiza.

PRECIOS DUALES – PRECIOS SOMBRA

También denominados multiplicadores de Lagrange en la programación no lineal.

El precio sombra de una restricción da la tasa de cambio de la función objetivo a medida que aumenta el lado derecho (LD) de esa restricción.
O sea nos muestra como varia la función objetivo (Z) frente a cambios unitarios en el recurso en el optimo.
Por ejemplo un precio sombra igual a cero para una restricción indicaría que un aumento en los recursos no tiene efecto sobre la solución optima actual.
Por tanto podríamos decir:

Precio sombra = Valor marginal del recurso

Una restricción del tipo ≥ tendrá un precio sombra negativo
Una restricción del tipo ≤ tendrá un precio sombra positivo
Una restricción del tipo = tendrá un precio sombra positivo, negativo o cero

Siempre que la variable de holgura sea positiva en la solución optima, la restricción tiene un precio sombra igual a cero.

Nota: También en economía se conoce al precio sombra al valor imputado a un bien o servicio para el que no hay precio de mercado.
En las evaluaciones sociales de proyectos se denominan precios sombras a los precios sociales
Precio sombra es el precio de referencia que tendría un bien en condiciones de competencia perfecta, incluyendo los costos sociales además de los privados. Representa el costo de oportunidad de producir o consumir un bien o servicio.
Un bien o servicio puede no tener un precio de mercado, sin embargo siempre es posible asignarle un precio sombra, que permite hacer un análisis de costo-beneficio y cálculos de programación lineal.

Es el significado del multiplicador de Lagrange, el cual representa la variación de un objetivo dado cuando se cuenta con una unidad adicional de un cierto recurso limitado

El Precio Sombra de un recurso (asociado al límite de disponibilidad de ese recurso o Lado Derecho de la Restricción) es el monto correspondiente al cambio de la función objetivo como consecuencia de un incremento unitario de la disponibilidad del recurso (o sea del valor del Lado Derecho de la restricción).
Otra manera de verlo es como la contribución marginal de un recurso es cuánto se incrementa la función objetivo si se incrementa en una unidad un recurso saturado.
El precio sombra es el máximo precio que conviene pagar por agregar una unidad de un recurso saturado. Ese precio es igual a la contribución marginal del recurso ya que no conviene pagar por esa unidad adicional más de lo que se incrementa la función

objetivo. Es decir, que el costo de incrementar en una unidad un recurso saturado deberá ser inferior a la contribución marginal para que se justifique hacerlo.
Si un recurso no se utiliza totalmente (no está saturado) su precio sombra es cero, porque no tiene sentido pagar por un recurso que sobra.

RANGOS DE LOS COEFICIENTES OBJETIVO

(Objective Coefficient Ranges)

Son los intervalos de valores de los coeficientes de la función objetivo para los cuales la base actual sigue siendo optima.(intervalo permisible)
Allowable Increase = Incremento permisible
Allowable Decrease= decremento permisible

En estos intervalos puede cambiar el valor de Z (función objetivo) pero los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio.
Por ejemplo puedo modificar un precio dentro de ese intervalo y los valores óptimos de las variables de decisión se conservan sin cambio , pero hay un nuevo valor de Z.

Capitulo 4 : El Aprendizaje con la Asistencia del Computador: Conceptos y Técnicas

SOFTWARE DE APLICACIÓN WinQSB

El aprendizaje con la asistencia del computador nos permite de una manera eficaz comprender conceptos complejos. Usaremos el paquete WinQSB como una herramienta de Aprendizaje para ganar una experiencia “práctica" sólida de los conceptos y técnicas a desarrollar en este texto.

El QSB (Quantitative Systems for Business – Sistemas Cuantitativo para Negocios) es desarrollado y mantenido por Yih-Long Chang. Este paquete de software contiene los algoritmos de solución de problemas de Investigación de Operaciones y Gerencia (OR/MS) más ampliamente usados.

Instrucciones para instalar el WinQSB

1. Cree una Carpeta (directorio) llamado WinQSB
2. Baje el programa de la página de la cátedra y guárdelos en el fólder creado en el paso 1.
3. Ejecute el programa WinQSB.exe primero (Usted debe ejecutar estos programas en esta secuencia). Vaya a donde se encuentra el archivo (donde lo guardo en el paso 2) y haga un doble clic (o haga un clic en Archivo-Abrir) para ejecutar el archivo. Siga las instrucciones y extraiga los archivos hacia el fólder WinQSB que usted creó en el paso 1.
4. Reinicie su sistema.
5. Usted tendrá ahora una lista de archivos (ambos ejecutables y de soporte) en la carpeta WinQSB que creó en el paso 1. Para utilizar el modelo de Programación Lineal, por ejemplo, haga un clic (o doble clic) en el archivo llamado LP-ILP.exe.

MODULO DE PROGRAMACION LINEAL (LP-ILP)

Como es la primera aplicación donde usaremos este soft explicaremos los pasos a utilizar en este modulo en especial para que Ud. conozca su manejo que luego puede trasladar a los demás módulos que veremos a medida que avancemos en el programa.

Cuando Ud. Ingrese al mismo aparecerán varios puntos tales como:

Tipo de variable: seleccione el tipo de variable desde la pantalla "Problem Specification" (Especificación del Problema) (la primera pantalla que aparece al ingresar un nuevo problema); para programación lineal, utilice la opción predeterminada "Continuous" (Continua).

Formato de entrada de datos: Seleccione el formato de entrada de datos desde la pantalla "Problem Specification" (Especificación del Problema). Normalmente, es preferible utilizar el formato Matrix (Matriz) para ingresar los datos. El formato Normal, puede ser más conveniente cuando se debe resolver un problema grande con muchas variables. Puede cambiar de formato seleccionando el botón "Switch to the…" (Cambiar a ...) del menú Format (de Formato).

Identificación de Variables/Restricciones: es conveniente cambiar los nombres de las variables y las restricciones para facilitar la identificación del contexto que representan. Los nombres de las variables y las restricciones se pueden cambiar desde el menú Edit (Editar).

Auto ajuste de ancho de columnas (Best Fit): Con el botón "best fit" del menú Format (Formato) cada columna puede tener su propio ancho.

Resolver buscando la solución óptima (si es que existe): Seleccione "Solve the problem" (Resolver el problema) desde el menú "Solve and Analyze" (Resolver y Analizar), o utilice el icono "Solve" (Resolver) que se encuentra en la parte superior de la pantalla. Esto genera un "Combined Report" (Informe Combinado) que brinda la solución y los resultados adicionales (costos reducido), rangos de optimalidad, holgura/excedente, rango de factibilidad y precios sombra).

Resolver mediante el Método Gráfico: Seleccione el método gráfico desde el menú "Solve and Analyze" (Resolver y Analizar) (sólo se puede utilizar para problemas de dos variables). También puede hacer clic en el icono Graph (Gráfico) en la parte superior de la pantalla. Puede ajustar los rangos X-Y después de resolver el problema y de que aparezca el gráfico. Elija el menú Option (Opción) y seleccione los nuevos rangos desde la lista desplegable.

Soluciones Optimas Alternas (si es que existen): Después de resolver el problema puede aparecer un mensaje que le informa: "Alternate solution exists!!" (¡¡Existe una solución alterna!!), para ver todas las soluciones óptimas de los puntos extremos elija el menú Results (Resultados) y luego seleccione "Obtain alternate optimal" (Obtener óptimo alterno).

Notas:

- ✓ Utilice el archivo de Ayuda ("Help") del paquete WinQSB para aprender cómo funciona.
- ✓ Para ingresar problemas en el software QSB; para una restricción tal como X1 + X2 >= 50, , el coeficiente es 1 y debe ingresarse de esta manera en el software. Para cualquier variable que no se utilice en esa restricción en particular (por ejemplo si el problema tuviera X3 pero no fuera parte de la restricción mencionada) simplemente deje la celda en blanco para esa restricción.

✓ Puede cambiar la dirección de una restricción haciendo clic en la celda <= (o >=).
✓ Para construir el dual de un determinado problema, haga clic en Format (Formato), luego seleccione "Switch to the Dual Form" (Cambiar a la forma dual).
✓ Si no se tiene cuidado podría tener dificultad al entrar los problemas de PL en WinQSB. Por ejemplo, en un problema dado algunas de las restricciones podrían tener variables en el lado derecho (RHS).

Usted no puede introducir una variable en la celda RHS ya que de otra manera recibirá una respuesta no factible.

Solo pueden ser digitados números al lado derecho (RHS). Por ejemplo, para la restricción X2 + X4 <= .5X5 usted debe escribirlo primero en esta forma X2 + X4 - .5X5 <= 0, y luego use cualquier paquete de PL incluyendo QSB.

INTERPRETACIÓN GERENCIAL DEL INFORME DEL WINQSB

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El módulo de PL (LP/ILP) en WinQSB, como cualquier otro paquete de software de programación Lineal soluciona modelos lineales grandes. La mayor parte del paquete de software usa el Método Algebraico modificado llamado algoritmo Simplex. Entre los datos a introducir en cualquier soft están:

1. El criterio de función objetivo (Max o Min).
2. El tipo de cada restricción.
3. Los coeficientes actuales para el problema.

El resultado típico generado por el software de programación lineal incluye:

1. Los valores óptimos de la función objetivo.
2. Los valores óptimos de las variables de decisión. Es decir la solución óptima.
3. El costo reducido del valor de la función objetivo.
4. El rango de optimalidad para los coeficientes de la función objetivo. Cada parámetro de coeficiente de costo puede cambiar dentro de este rango sin afectar la solución óptima actual.
5. La cantidad de slack or surplus (holgura o excedente) en cada restricción dependiendo de si la restricción tiene un sobrante de recursos o un faltante de producción.
6. Los precios Sombra (o dual) de las restricciones RHS. Debemos tener cuidado aplicando estos números. Estos solo están bien para "pequeños" cambios de las cantidades de recursos (es decir, dentro de los rangos de sensibilidad RHS).
7. Rangos de viabilidad para valores del lado derecho (RHS). Cada parámetro de coeficiente RHS puede cambiar dentro de este rango sin afectar el precio sombra para este RHS.

A continuación aparecen descripciones detalladas de cada pantalla o caja del informe de WinQSB comenzando en la esquina izquierda superior, y siguiendo una fila a la vez. La primera “caja de datos” contiene las variables de decisión. Este símbolo (a menudo denotado por X1, X2, etc.) representa el objeto producido. La siguiente caja llamada "valor de la solución" representa el valor óptimo para las variables de decisión, es decir el número de unidades a ser producidas cuando la se usa la solución óptima. La siguiente caja llamada "unidad de costos" representa la ganancia por unidad y es el coeficiente de costo de las variables de la función objetivo.

La siguiente caja "contribución total", es la cantidad en unidades monetarias que contribuirá a la ganancia del proyecto, cuando se utiliza el número total de unidades en la solución óptima. Este producirá el valor óptimo.

La siguiente caja es "el Costo Reducido", que es realmente el aumento de ganancia que tendría lugar si uno comenzara a producir este artículo. En otras palabras el producto, que actualmente no es producido se hace ventajoso de producir.

La siguiente caja es "el máximo aceptable” y el “mínimo aceptable", que muestra el cambio aceptable de los coeficientes de costo de un artículo en particular que son posibles y en que la solución óptima actual permanece óptima. Sin embargo, el valor óptimo puede cambiar si algún coeficiente de costo se cambia pero la solución óptima seguirá siendo la misma si el cambio permanece dentro de este rango. Recuerde que estos resultados son válidos para "un sólo cambio a la vez" y pueden no ser válidos para cambios simultáneos de coeficientes de costo.

La siguiente línea es el valor óptimo, es decir, el valor de la función objetivo evaluada en la estrategia de solución óptima. Esta línea muestra el máximo (o mínimo) valor que puede ser obtenido bajo la estrategia óptima dada.

La siguiente línea contiene las restricciones; a menudo denotadas por las restricciones C1, C2, etc. Comenzando a la izquierda, la primera caja contiene el símbolo C1 que representa la primera restricción. La siguiente caja es el valor de la restricción. Es decir el lado izquierdo (LHS) de cada C1 evaluado en la solución óptima. La siguiente caja es "la caja de dirección", puede ser mayor o igual que / menor o igual que, que representa la dirección de cada restricción. La siguiente caja es el valor del lado derecho (RHS), que expresa el valor que está a la derecha de cada restricción.

La siguiente caja es la diferencia entre los valores numéricos de RHS y LHS, llamados *holgura o excedente*. Si es holgura, tendrá un signo de menor o igual que asociado a este, lo que significa que hay sobrante de recursos/materia prima. Si hay un exceso tendrá un signo de mayor o igual que asociado a este, lo que significa que hay excedente de producción.

Después está la caja de “*precio sombra*”. Si alguno de los valores de holgura o excedente no es cero entonces el precio sombra es cero, sin embargo lo contrario podría ser incorrecto.

Un precio sombra es la cantidad de dinero adicional que se ganara si la restricción del lado derecho es aumentada en una unidad permaneciendo dentro de los límites de sensibilidad para este valor de RHS.

Las dos siguientes cajas muestran el mínimo y el máximo aceptable para las restricciones del lado derecho (RHS). La primera caja (caja mínima) muestra el valor mínimo a la que la restricción RHS se puede mover y permanecer con el mismo precio sombra. La segunda caja muestra el número máximo a la que la restricción se puede mover y permanecer con el mismo precio sombra.

Los precios sombra son la solución del problema dual (ver Problema Dual). Por lo tanto, el cambio aceptable de RHS sugiere a qué distancia cada RHS puede subir o bajar manteniendo la misma solución del problema dual. En ambos casos la solución óptima con el problema primal y el valor óptimo puede cambiar.

MÉTODO GRÁFICO

El método gráfico se utiliza para la solución de problemas de PL, representando geométricamente a las restricciones, condiciones técnicas y el objetivo.
El modelo se puede resolver en forma gráfica si sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.
Cuando los ejes son relacionados con las variables del problema, el método es llamado método gráfico en actividad. Cuando se relacionan las restricciones tecnológicas se denomina método gráfico en recursos.
Los pasos necesarios para realizar el método son :

1. Graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfagan todas las restricciones en forma simultánea.

2. Las restricciones de no negatividad Xi>= 0 restringen todos los valores posibles.

3. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determinan sustituyendo en primer término **<=** por **(=)** para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de una línea recta.

4. Trazar cada línea recta en el plano y la región en cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.

5. Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisfacen todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible.
6. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.

7. Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores arbitrarios a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece o decrece el valor de la función objetivo.

Ejemplo.

Maximizar $Z = 3X1 + 2X2$

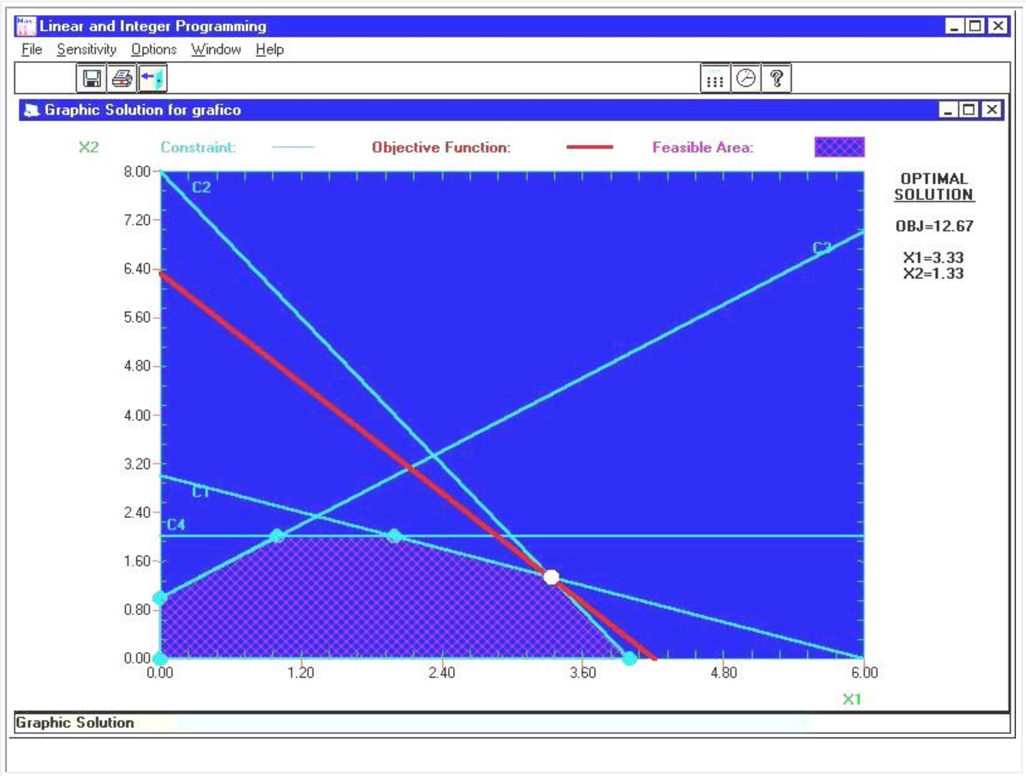
sujeto a (s.a.) restricciones :

$$
\begin{array}{rcll}
X1 + 2X2 & \le & 6 & (1) \\
2X1 + X2 & \le & 8 & (2) \\
-X1 + X2 & \le & 1 & (3) \\
X2 & \le & 2 & (4) \\
X1 & \ge & 0 & (5) \\
X2 & \ge & 0 & (6)
\end{array}
$$

Convirtiendo las restricciones a igualdad y representándolas gráficamente se tiene:

$$
\begin{array}{rcll}
X1 + 2X2 & = & 6 & (1) \\
2X1 + X2 & = & 8 & (2) \\
-X1 + X2 & = & 1 & (3) \\
X2 & = & 2 & (4) \\
X1 & = & 0 & (5) \\
X2 & = & 0 & (6)
\end{array}
$$

Figura 1 Espacio de solución presentada con WinQsb



Maximizar   Z = 3 X1 + 2 X2

Punto	**X1**	**X2**	**Z**
A	0	0	0
B	4	0	12
C	3.3	1.3	12.6 optima
D	2	3	12
E	1	3	9
F	0	2	4

Tabla 2. Solución Método Gráfico

Para obtener la solución gráfica, después de haber obtenido el espacio de solución y graficada la función objetivo, el factor clave consiste en decidir la dirección de mejora de la función objetivo.

Ejemplo Modelo Fabricación:

Veamos la salida de un modelo que involucra la planeación de la producción. Se desean construir mesas y sillas. El recurso disponible es 30 m^2 de madera por semana, 48 horas por semana. La demanda de las sillas es de 5 unidades y la de mesas de 10 unidades. La utilidad que se obtiene por las mesas es de $10 y por las sillas de $8, además para construir la mesa utiliza lo siguiente: 4.5 m^2 de madera por unidad, 6 horas por unidad. Para la silla se ocupan: 1.5 m^2 de madera por unidad y 3 horas por cada unidad fabricada.

Con esta información se desarrolla el modelo siguiente:

Max $Z = 10X_1+8X_2$
s.a.
$4.5X_1+1.5X_2$ **<=** 30
$6.0X_1+3.0X_2$ **<=** 48
toda $X_{1,2} >=0$

El reporte final de este modelo es el siguiente (WinQsb)

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit cj	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min cj	Allowable Max cj
X1	0	10.0000	0	-6.0000	at bound	-M	16.0000
X2	16.0000	8.0000	128.0000	0	basic	5.0000	M
Objetive	Function	(Max) =	128.0000				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Rigth Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	24.0000	<=	30.0000	6.0000	0	24.0000	M
C2	48.0000	<=	48.0000	0	2.6667	0	60.0000

INTERPRETACIÓN DE LA SALIDA:

Información de la Función Objetivo:

Decision Variable (Variable de Decisión): Son las variables que se han definido en la formulación del problema en este caso representan al producto X1 = mesas y X2= sillas.

Solution Value (Valor de la solución): Cantidad de mesas y sillas a fabricar, el problema se resuelve y nos indica que para obtener la mejor solución en términos de la utilidad, se necesitan fabricar 16 sillas y no fabricar mesas.

Unit Cost or Profit (costo por unidad, Utilidad por unidad): Cantidad de pesos que vamos a ganar por cada mesa y por cada silla ($10 y $8 respectivamente.

Total Contribution (contribución total): Es la cantidad en pesos que resulta al multiplicar la utilidad de cada producto por la cantidad que se va a fabricar, ejemplo al fabricar 16 sillas y multiplicarlo por $/silla 8, la contribución es de $128.0000, así al sumar la contribución por concepto de las mesas nos arroja $0.0000, esto resulta de hacer la operación de ($/mesa10) X (0mesas)= $0.0000, finalmente la suma de 128.0000+0.0000 = $128.0000, esto es lo que se conoce como el valor Objetive Function Max.

Reduced Cost (Costo reducido): esto nos indica el dinero que hemos dejado de ganar por cada unidad no fabricada. En este caso debemos de aumentar a más de $6.0000 la utilidad de la mesa para que sea atractiva la fabricación de mesas.

Basis Status (estado de la base): Indica si la variable es básica o no básica, en este ejemplo la variable X1 (mesas) resulta ser no básica, esto es que no forma parte de la solución óptima, la variable X2 (sillas) es una variable básica, ya que forma parte de la solución.

Allowed Min cj (rango mínimo del cj): esta es la mínima utilidad que puedo obtener sin que la base actual cambie. (-M).

Allowed Max cj (rango mínimo del cj): esta es la máxima utilidad que puedo obtener sin que la base actual cambie. (16.0000) .Los valores que aparecen son para el producto Mesa.

Interpretación de las Restricciones:

Constraint (Restricción): Son las restricciones que forman parte del problema. Se tienen dos restricciones (C1 y C2) la restricción de la madera y la de horas hombre.

Left hand side (valor al lado izquierdo): esto nos indica el consumo de recurso, de 30.000 m^2 de madera se consumieron 24.000 m^2.

Direction (dirección): es la dirección de la restricción (<=,>= o =)

Rigth hand side (valor lado derecho): es el recurso disponible actualmente 30 m^2

Slack or Surplus (holguras): nos indican un faltante o bien un sobrante

Shadow Price (precio sombra): nos indica la solución Dual, esto es que el 2.6667 indica que cada hra-hombre se debe ofrecer como mínimo en $/hr 2.6667.

Allowed Min RHS (rango mínimo del bj): esta es la mínima cantidad de recurso que se debe de mantener sin que la base actual cambie. (0 hrs-hombre)

Allowed Max RHS (rango mínimo del bj): esta es la máxima cantidad de recurso que se debe de mantener sin que la base actual cambie (60.0000 hrs-H)

Ejemplo de Aplicación: Modelo de Producción

Supongamos que tenemos el siguiente modelo:

MAX Z = 3X1 + 5X2 (Utilidad total)
S.A.

X1 + 0X2 <= 4 (Restricción del Recurso A)
3X1 + 2X2 < =18 (Restricción del Recurso B)
X1, X2 >= 0 (No negatividad)

Donde X1 y X2, representa el número de unidades semanales a producir del Producto 1 y 2 respectivamente, y la restricción C1, y C2 representa la disponibilidad de recursos A y B para el proceso productivo.

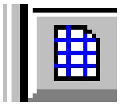
Para Abrir el programa:

Hacemos doble clic o un clic según sea el caso sobre el icono:

Lp-ilp

Para crear un archivo nuevo:

En la ventana inicial, hacemos un clic en el icono:



Otra opción es ir al [Menú FILE→NEW PROBLEM] tal y como se muestra en la Figura Nº1.

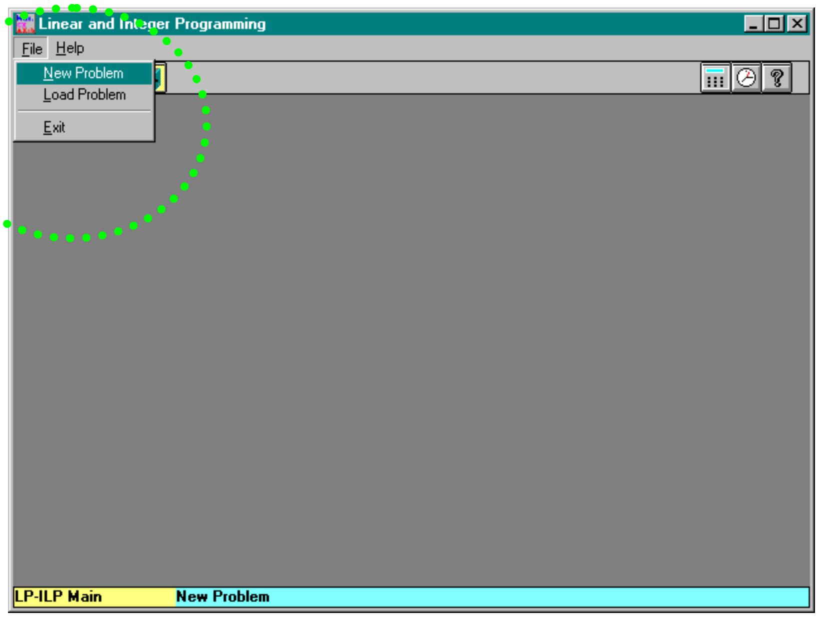


Figura . Crear un archivo nuevo por menú.

En la ventana inicial también podemos,

Abrir un archivo. [MENU FILE-LOAD PROBLEM] →

Salir del programa. [MENU FILE-EXIT] →

Ir a la Ayuda. [MENU HELP] →

3. Para cargar los datos:
En la ventana de diálogo, debemos especificar la configuración inicial del problema:

PROBLEM TITLE: Titulo del problema.
[Este nombre será usado en los informes escritos y en la pantalla]

NUMBER OF VARIABLES: Número de Variables.

NUMBER OF CONSTRAINT: Número de restricciones:

OBJECTIVE CRITERION: Criterio del Objetivo.
Si queremos maximizar pulsamos la casilla de Maximization.
Si queremos minimizar pulsamos la casilla de Minimization.

DATA ENTRY FORMAT: Tipo de Formato de entrada.
MATRIX FORM: Forma matricial.
NORMAL MODEL: Modelo final.

DEFAULT VARIABLE TYPE:

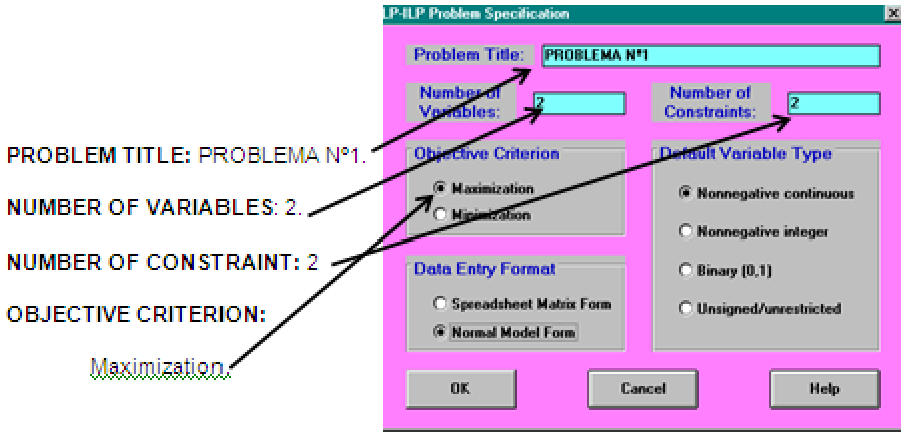
NONEGATIVE CONTINOUS: (Si las variables son no- negativas y continuas se activa esta casilla, el programa por defecto activa esta casilla siempre).

NONEGATIVE INTEGER: (Si las variables son no- negativas y enteras se activa esta casilla).

BINARY (0,1): (Si las variables son de tipo binarias se activa esta casilla).

UNSIGNED/UNRESTRICTED: (Si las variables son de tipo sin signos o irrestricta se activa esta casilla).

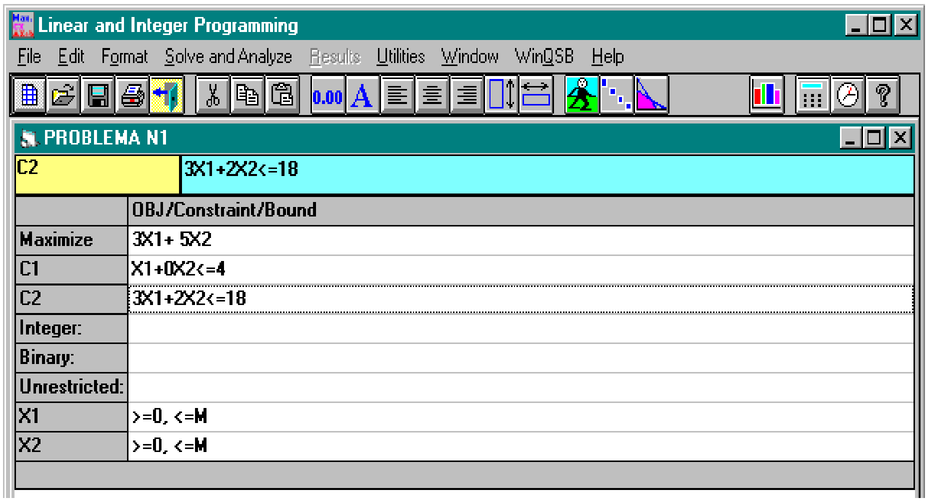
Veamos con nuestro ejemplo la figura



DATA ENTRY FORMAT: Normal Model.
DEFAULT VARIABLE TYPE: Nonnegative Continuous.

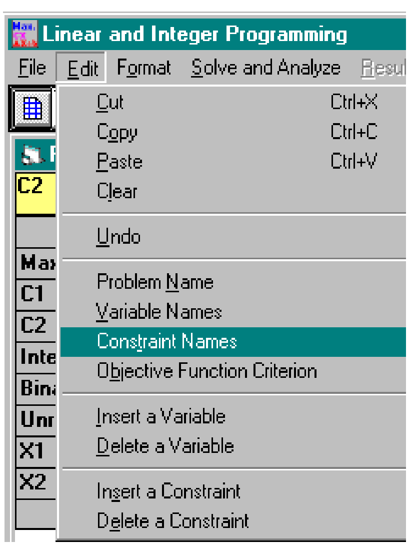
En nuestro ejemplo lo haremos bajo una forma funcional normal, es decir con las ecuaciones completas del modelo especificado. Sin embargo vale decir que en la forma alterna de matriz o hoja de cálculo se introducen solo los coeficientes que acompañan a

las ecuaciones, entonces es cuestión de preferencia sobre como introducir los datos. Existe cierto favoritismo entre los analistas de IO a preferir la forma normal pues permite copiar y pegar el modelo de cualquier editor de texto.
La figura siguiente nos muestra dicha situación.

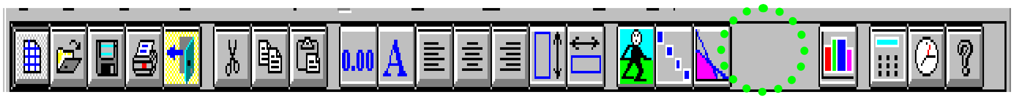


Opciones de edición:

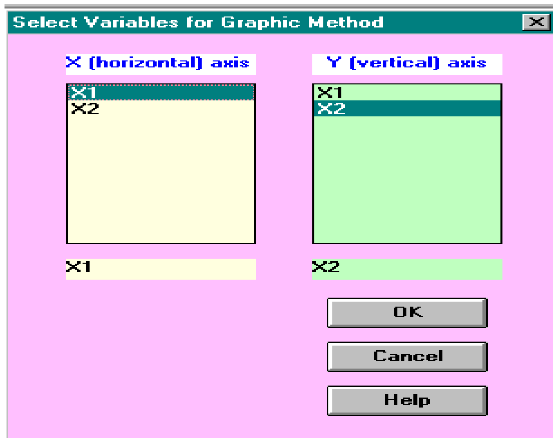
Para completar la compresión de los reportes, es recomendable editar el nombre de las restricciones con una frase que documente su significado en el modelo.
Para editar el nombre de las restricciones podemos ir a Menú EDIT- CONSTRAINT NAME
Similarmente para editar el nombre de las variables podemos ir Menú EDIT- VARIABLES NAME.
[El programa trabaja por defecto con las variables X1, X2, …XN]



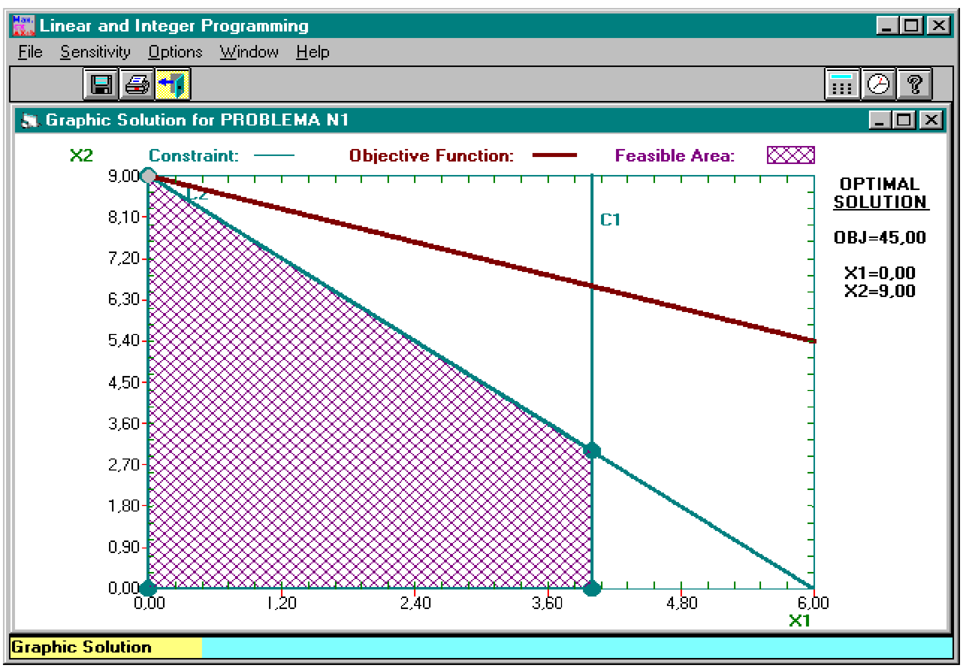
Para resolver el modelo:
Finalmente si queremos resolver el modelo por el "**Método Gráfico"** hacemos clic en el icono donde aparece una gráfica de un área factible en 2 dimensiones, tal y como se muestra en la Figura Nº5:



Y en la caja de dialogo posterior se solicita el sentido de los ejes:



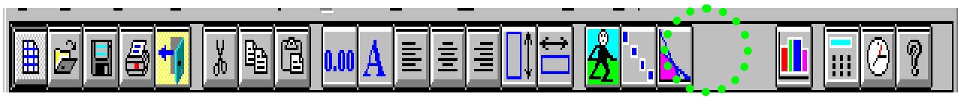
Confirmados los ejes y haciendo clic en Ok, nos suministra la solución gráfica:



En algunos sistemas operativos de la Familia WINDOWS se han reportado fallas de ejecución de la gráfica, para su óptima visualización se recomienda instalar los SERVICE PACK más recientes, y en Windows XP activar la compatibilidad de la aplicación con Windows 95/98.

Si queremos resolverlo por el algoritmo SIMPLEX:

Hacemos clic en el icono donde aparece el un hombrecillo corriendo y como se muestra en la Figura siguiente:



Una vez introducidos los datos y corrido el modelo obtenemos el siguiente reporte combinado:

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	3,0000	0	-4,5000	at bound	-M	7,5000
2	X2	9,0000	5,0000	45,0000	0	basic	2,0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	45,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	0	<=	4,0000	4,0000	0	0	M
2	C2	18,0000	<=	18,0000	0	2,5000	0	M

Figura . Reporte Combinado.

INTERPRETAR EL REPORTE COMBINADO. La Solución optima.

	17:03:03		Friday	March
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution
1	X1	0	3,0000	0
2	X2	9,0000	5,0000	45,0000
	Objective	Function	(Max.) =	45,0000

Figura Nº10. 1er Bloque Solución Optima.

En ésta área, el significado para la fila 1, de los datos de izquierda a derecha es:

- ✓ Del artículo 1 (X1) debemos producir cero (0) unidades. Su utilidad por unidad (C1) es de 3 y su contribución a la utilidad total es de Bs. Cero (0) [(0) X (3)=0].
- ✓ Del artículo 2 (X2) debemos producir 9 unidades. Su utilidad por unidad (C2) es de 5 y su contribución a la utilidad total es de Bs.45 [(5) X (9)=45].

En la siguiente fila se muestra el valor total de la contribución ó valor máximo de la función objetivo Z* = $45 [(0)+ (45)=45]. Es claro que dado el modelo actual, no es posible obtener una utilidad superior a Bs.45.

Análisis de sensibilidad de los coeficientes.

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	3,0000	0	-4,5000	at bound	-M	7,5000
2	X2	9,0000	5,0000	45,0000	0	basic	2,0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	45,0000				

Figura Nº11. Bloque de análisis de sensibilidad de los coeficientes.

En las dos últimas casillas de la fila uno, Figura Nº11, se muestra el análisis de sensibilidad para C1 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 1 debe estar en el rango de: $-\infty$ < C1' < 7,5 para que la solución actual se mantenga óptima. Similarmente en las dos últimas casillas de la fila dos, se muestra el análisis de sensibilidad para C2 que nos indica que la utilidad por unidad del artículo 2 debe estar en el rango de: 2 < C2 < + ∞ para que la solución actual se mantenga óptima.

Supongamos que la utilidad unitaria del producto 2 (C2) disminuye en un 50%, y se ubica en 2.5, este valor se ubica en el intervalo de sensibilidad 2 < C2 < + ∞ por lo tanto el valor actual de la solución óptima sigue siendo X1=0 y X2=9, es decir :

del artículo 1 (X1) debemos producir cero (0) unidades.

Su utilidad por unidad (C1) es de 3 y su contribución a la utilidad total es de Cero (0) [(0) X (3)=0].

Del artículo 2 (X2) debemos producir 9 unidades. Su nueva utilidad por unidad (C2) es de 2.5 y su contribución a la utilidad total seria: 22.5 [(2.5) X (9)=22,5].

El valor de Z seria: [(0)+ (22.5)=22.5].

Cualquier variación del coeficiente que viole los limites de sensibilidad provocara un cambio en los valores de la solución optima, por lo tanto para poder realizar un análisis tendríamos que disponer de una nueva salida computacional .Hoy en día esta tarea significa invertir unos cuantos segundos al redefinir el modelo, pero hace 50 años era todo un dilema decidir correr una nueva salida.
Sin embargo, y volviendo al ejemplo, si decidiéramos llevar la contraria a ésta solución óptima y decidiéramos producir unidades del producto 1, entonces por cada unidad producida, debemos reducir nuestros costos unitarios en $4,50 (**costo reducido**) con lo cual la utilidad unitaria se ubicaría 7,5 de esta manera el valor de la solución optima de X1 será diferente a cero (en caso de presentarse un problema de minimización de costos, la reducción del costo unitario es directa).

En la fila 2 el costo reducido es de 0 en atención a que **sí** se van a producir unidades del artículo 2 y por lo tanto el valor optimo de X2 ya es diferente de cero (en este caso X2=9).

Análisis de Sensibilidad de los Recursos

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	0	<=	4,0000	4,0000	0	0	M
2	C2	18,0000	<=	18,0000	0	2,5000	0	M

Figura Nº12. Bloque de análisis de sensibilidad de los recursos.

En figura 12, la fila 1 referente a la disponibilidad del recurso A, indica que del recurso A no se utilizará ninguna unidad, de las 4 disponibles, por ello la holgura de dicho recurso es de 4 unidades, siendo la **restricción inactiva** por poseer un valor de holgura diferente de cero. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso A, ello ocasionará un incremento en la utilidad de $0 (si se dispone de una unidad menos del recurso A, ello ocasionará un decremento de $0); ***siempre y cuando*** el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 < b1 < \infty$; que son los valores que hacen que restricción permanezca en su misma condición.

La fila 2, referente a la disponibilidad del recurso B indica que del recurso B se utilizan 18 unidades, de las 18 disponibles, por ello la holgura de dicho recurso es de 0 unidades, siendo la **restricción activa** por poseer un valor de holgura igual a cero. El precio sombra nos indica que si se dispone de una unidad adicional del recurso B, ello ocasionará un incremento en la utilidad de $2,50 (si se dispone de una unidad menos del recurso B, ello ocasionará un decremento de 2,50) ***siempre y cuando*** el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $0 < b2 < \infty$; que son los valores que hacen que la restricción permanezca en su misma condición.

En el caso en que una unidad del recurso deba ser vendido, su precio ideal sería como mínimo su precio sombra, ya que este nos indica el aporte marginal a la función objetivo por cada cambio unitario en el total de recursos. Es decir, si cada unidad del recurso B, debe ser vendida a otra empresa del mismo ramo, el precio mínimo de referencia debe ser $2,50, pues este es su aporte a la utilidad total

Cualquier efecto en valor de la Función Objetivo producto de la variación de recursos dentro de los límites permitidos, puede estimarse con la siguiente fórmula:

FO´= FO + (Precio Sombra x Incremento)

Por ejemplo se disminuye en 10 unidades el recurso B, ubicándose la disponibilidad en 8 como el valor del recurso se encuentre entre los límites de sensibilidad $\mathbf{0 < b2 < \infty}$, es posible inferir que:

FO´= 45 + (2.5 X -10) = 20.

Análogamente el incremento necesario para obtener un valor de la función objetivo requerido (FO´) puede estimarse con:

Incremento = (FO´- FO)/Precio Sombra

Es decir, si queremos obtener, un valor optimo de 65 por ejemplo, calculamos:
Incremento = (65- 45)/2.5 = 8. El incremento de ocho unidades esta en el intervalo permitido $\mathbf{0 < b2 < \infty}$**.**

El reporte combinado, la salida o el problema pueden catalogarse como ***no degenerado*** porque el número de restricciones (2) es igual a la sumatoria de los valores positivos de la solución óptima (1) y los valores de holgura (1).

Capitulo 5: El Aprendizaje con la Asistencia del Computador: Conceptos y Técnicas

SOFTWARE DE APLICACIÓN LINDO (LINEAR, INTERACTIVE, DISCRETE OPTIMIZER)

LINDO Systems es una compañía líder en la confección de software de modelos de optimización. LINDO lanzo al mercado productos como: What's*Best!* .Actualmente la versión 8.0, un add-in de Excel que permite construir modelos de optimización importantes en una forma de planilla de cálculo y el LINGO 10.0 una herramienta para construir y solucionar modelos de optimización lineal y no lineal integrando un paquete de programación. También se cuenta con el LINDO API 4.1 que permite realizar optimizaciones con interfaces con otros programas de software como el conocido MathLAB.

INTRODUCCION

El computador siempre soluciona los programas lineales del mundo real usando en su mayoría el Método Simplex. Los coeficientes de la función objetivo se conocen como coeficientes de costo (porque históricamente durante la Guerra Mundial II, el primer problema de PL era un problema de minimización de costo), coeficientes tecnológicos (coef. De las restricciones), y los valores de RHS o valores del lado derecho. Esta es una manera perfecta de aprender los conceptos de análisis de sensibilidad. Como usuario tenemos la posibilidad de ver los resultados numéricos y de compararlos con lo que esperamos ver.

Uno de los software mas usado para problemas de PL es el paquete de Lindo. Una versión para Windows gratis se puede descargar directamente de la Página de inicio del sitio de LINDO en http://www.lindo.com.

Lindo es un software muy básico que permite realizar optimización de problemas de programación lineal (PPL) y cuadrática, definidos sobre variables reales y/o binarias. Debido a su simplicidad se utiliza con fines educativos, ya que es de fácil acceso Esta guía ha sido diseñada con el objeto de poder realizar el trabajo del curso, de modo que mostrará sólo los comandos indispensables para tales efectos.

Al igual que todos los paquetes de PL, tal como WinQSB, Lindo emplea el método simplex. Junto con la solución del problema, el programa también proporciona un análisis de sensibilidad de los Coeficientes de la Función Objetivo (denominados Coeficientes de Costos) y el RHS o valores del lado derecho de las restricciones. A continuación, presentamos una explicación de los resultados del paquete LINDO.

Suponga que usted desea ejecutar el problema del Carpintero que vimos en este texto. Cargue el LINDO. Digite lo siguiente en la ventana actual:

MAX 5X1 + 3X2
S.T. 2X1 + X2 < 40
X1 + 2X2 < 50
End
Esto es {MAX 5X1 + 3X2, Sujeta a 2X1 + X2 ? 40 X1 + 2X2 ? 50, Fin}

NOTAS:

1. La función objetivo no debe contener ninguna constante. Por ejemplo, no se puede ingresar Max 2X1 + 5.
2. Todas las variables deben aparecer en el lado izquierdo de las restricciones, mientras que los valores numéricos deben aparecer en el lado derecho de las restricciones (es por eso que a estos números se los denomina valores RHS o valores del lado derecho).
3. Se presupone que todas las variables son no negativas. Por lo tanto, no ingrese las condiciones de no negatividad.

Si desea obtener todas las Tablas Simplex, entonces

- Haga clic en **"Reports"** (Informes) y luego elija **"Tableau"** (Tabla), luego haga clic en **"Solve"** (Resolver) y elija **"Pivot"** haga clic en **"OK"** (Aceptar), **"Close"** (Cerrar), **"Cancel"** (Cancelar), continúe de esta manera hasta que aparezca el mensaje **"Do? Range (Sensitivity) Analysis"** (Desea realizar un análisis de rango [de sensibilidad]?). Seleccione **"Yes"** (Sí), si lo desea.

Después de minimizar la ventana actual, verá el resultado que se puede imprimir para su análisis .

- De lo contrario, haga clic en **"Solve"** (Resolver), y luego elija **"Solve"** (Resolver).

Es conveniente copiar el problema de PL de la primera ventana y luego pegarlo en la parte superior de la página de resultados.

En la parte superior de la página aparece la tabla inicial y en la parte superior de la tabla figuran las variables. La primera fila de la tabla es la función objetivo. La segunda fila es la primera restricción. La tercera fila es la segunda restricción y así sucesivamente hasta enumerar todas las restricciones en la tabla.

Después de la tabla inicial aparece un enunciado que indica la variable de entrada y la variable de salida. La variable de salida está expresada como la fila donde se colocará la variable de entrada. Luego se imprime la primera tabla de iteraciones. Se sigue ingresando sentencias y continúan las iteraciones de la tabla hasta llegar a la solución óptima.

La siguiente sentencia, **`LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2' (OPTIMO DE PL ENCONTRADO EN EL PASO 2)** indica que se encontró la solución óptima en la iteración 2 de la tabla inicial. Inmediatamente debajo aparece el óptimo del valor de la función objetivo. Este es el dato más importante que le interesa a todo gerente.

Muchas veces, aparecerá un mensaje que lo sorprenderá: **"LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0" (OPTIMO DE PL ENCONTRADO EN EL PASO 0).** ¿Cómo puede ser paso 0? ¿No es necesario primero desplazarse para encontrar un resultado...? Este mensaje es muy confuso. Lindo lleva un registro en su memoria de todas las actividades previamente realizadas antes de resolver cualquier problema que se ingrese. Por lo tanto, no muestra exactamente cuántas iteraciones fueron necesarias para resolver el problema en cuestión.

A continuación presentamos una explicación detallada y una solución para saber con exactitud la cantidad de iteraciones: Supóngase que usted corre el problema más de una vez o resuelve un problema similar. Para saber cuántas iteraciones lleva realmente resolver un problema en particular, debe salir de Lindo y luego reingresar, volver a escribir y a presentar el problema. De esta manera aparecerá la cantidad exacta de vértices (excluyendo el origen) visitados para llegar a la solución óptima (si es que existe) en forma correcta.

Después de esto sigue la solución del problema, es decir la estrategia para fijar las variables de decisión a fin de lograr el valor óptimo antes mencionado. Esto aparece con una columna de variables y una columna de valores. La columna de valores contiene la solución del problema. Los costos reducidos asociados con cada variable se imprime a la derecha de la columna de valores. Estos valores se toman directamente de la tabla simplex final. La columna de valores proviene del RHS. La columna de costos reducidos proviene directamente de la fila indicadora.

Debajo de la solución, aparecen los valores de las variables de holgura / excedente de la tabla final. Los valores de las variables de holgura / excedente para la solución final figuran en la columna **`SLACK OR SURPLUS' (HOLGURA O EXCEDENTE)**. Los precios sombra relacionados aparecen a la derecha. Recuerde: Holgura representa la cantidad que sobra de un recurso y Excedente representa el exceso de producción.

La restricción obligatoria se puede encontrar buscando la variable de holgura / excedente con el valor de cero. Luego, examine cada restricción para encontrar la que tenga sólo esta variable especificada. Otra manera de expresar esto es buscar la restricción que exprese igualdad en la solución final.

Debajo, aparece el análisis de sensibilidad de los coeficientes de costos (es decir de los coeficientes de la función objetivo). Cada parámetro de coeficiente de costos puede variar sin afectar la solución óptima actual. El valor actual del coeficiente se imprime junto con los valores de límite superior e inferior permitidos para que la solución siga siendo óptima.

Debajo aparece el análisis de sensibilidad para el RHS. La columna de "filas" imprime el número de filas del problema inicial. Por ejemplo, la primera fila impresa será la dos porque la fila uno es la función objetivo. La primera restricción es la fila dos. El RHS de la primera restricción está representado por la fila dos. A la derecha, aparecen los valores para los cuales el valor RHS puede cambiar manteniendo la validez de los precios sombra.

Nótese que en la tabla simplex final, los coeficientes de las variables de holgura / excedente en la fila objetivo proporcionan la unidad del valor del recurso. Estos números se denominan precios sombra o precios duales. Debemos tener cuidado al aplicar estos números. Sólo sirven para pequeños cambios en las cantidades de recursos (es decir, dentro de los rangos de sensibilidad de RHS).

Cómo crear condiciones de no negatividad (variables libres): Por omisión, prácticamente todos los paquetes de software de resolución de problemas de PL (como por ejemplo LINDO) presuponen que todas las variables son no negativas.

Para cumplir con este requerimiento, convierta cualquier variable no restringida Xj en dos variables no negativas reemplazando cada Xj por y - Xj. Esto aumenta la dimensionalidad del problema sólo en uno (introducir una variable y) independientemente de cuántas variables sean no restringidas.

Si cualquier variable Xj está restringida a ser no positiva, reemplace cada Xj por - Xj. Esto reduce la complejidad del problema.

Resuelva el problema convertido y luego sustituya estos cambios para obtener los valores de las variables originales y el valor óptimo.

Aplicacion:

Maximizar –X1

Sujeta a :
X1 + X2 >=0
X1 + 3 X2<= 3

El problema convertido es:
Maximizar –y + X1
Sujeta a:
-X1 – X2 + 2 y >= 0
-X1 – 3X2 + 4y <=3
X1>=0
X2>=0
y>=0

La solución optima para las variables originales es
X1=3/2 – 3 ,
X2=3/2
0=3/2 con valor optimo de 3/2.

Aplicación: Formulacion del modelo y solucion

La empresa WINDOOR Ltda. Fabrica puertas y ventanas de madera. Existen dos modelos de puertas: puertas dobles y puertas simples: y dos modelos de ventanas: ventanas dobles y ventanas simples. El insumo más importante es la madera. El proceso de corte de las partes se realiza en dos sierras eléctricas de precisión y el barnizado lo efectúa personal experimentado. Las cantidades de madera y los tiempos de corte y barnizado que requiere cada producto se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Recursos requeridos.

	Madera [m^2]	*Ensamblado [hrs-maq]*	*Barnizado [hrs-hom]*
Puertas dobles	4.0	1.5	2.0
Puertas simples	1.5	1.0	1.2
Ventanas dobles	3.0	2.0	1.5
Ventanas simples	1.8	0.8	0.8

Los proveedores de la madera pueden entregar hasta 800 [m2] en un mes. Además se pueden utilizar hasta 400 [hrs] de sierra para el corte y 400 [hrs-hom] para el barnizado.
La empresa está comprometida con una constructora para entregar 90 puertas simples y 50 ventanas dobles en el mes.
Los precios de venta unitarios y costos unitarios de producción se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Precios y costos.

	Precio [um/unidad]]	*Costo [um/unidad]*
Puertas dobles	120	80
Puertas simples	80	50
Ventanas dobles	100	75
Ventanas simples	60	30

Se desea determinar el plan de producción para el mes que maximice el beneficio total, suponiendo que todo lo que se produce se vende.

FORMULACION DEL MODELO

VARIABLES DE DECISION

Las decisiones que la empresa desea tomar se refieren a la cantidad de puertas y ventanas de cada tipo a producir en el período considerado.

x_1 = cantidad de puertas dobles a fabricar en el mes.
x_2 = cantidad de puertas simples a fabricar en el mes.
x_3 = cantidad de ventanas dobles a fabricar en el mes.
x_4 = cantidad de ventanas simples a fabricar en el mes.

RESTRICCIONES

Las restricciones deben establecer las limitaciones existentes en cuanto a la disponibilidad de recursos y la necesidad de cumplir con los compromisos contraídos para el período.

A. *Disponibilidad de recursos*

- La cantidad de madera utilizada en la producción total no puede exceder la cantidad máxima que la empresa puede adquirir.

$4.0 \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2 + 3.0 \cdot x_3 + 1.8 \cdot x_4 =< 800$

- La cantidad de horas máquina de sierra utilizada no puede exceder la cantidad máxima disponible.

$1.5 \cdot x_1 + 1.0 \cdot x_2 + 2.0 \cdot x_3 + 0.8 \cdot x_4 =< 400$

- La cantidad de horas hombre para barnizado utilizada no puede exceder la cantidad máxima disponible.

$2.0 \cdot x_1 + 1.2 \cdot x_2 + 1.5 \cdot x_3 + 0.8 \cdot x_4 =< 400$

B.*Cumplimiento de compromisos de entrega*

- La cantidad de puertas simples debe ser al menos suficiente para cumplir los compromisos contraídos.

$x_2 >= 90$

- La cantidad producida de ventanas dobles debe ser al menos suficiente para cumplir con los compromisos contraídos.

$X_3 >= 50$

C.*No negatividad de las variables*

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 >= 0$

FUNCION OBJETIVO

Como se dijo en el enunciado el problema consiste en maximizar el beneficio durante el mes de operación.

Beneficio total = ingreso total - costo total

Hay que destacar que, tanto el beneficio como el costo total, dependen de las cantidades que finalmente se decida producir, es decir, dependen de las variables que se definieron.

$B_{total} = 40 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 + 30 \cdot x_4$

En resumen se tiene el siguiente *modelo matemático* para el problema planteado:

Max $40 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 25 \cdot x_3 + 30 \cdot x_4$

Sujeto a
$4.0 \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2 + 3.0 \cdot x_3 + 1.8 \cdot x_4 =< 800$
$1.5 \cdot x_1 + 1.0 \cdot x_2 + 2.0 \cdot x_3 + 0.8 \cdot x_4 =< 400$
$2.0 \cdot x_1 + 1.2 \cdot x_2 + 1.5 \cdot x_3 + 0.8 \cdot x_4 =< 400$
$x_2 >= 90$
$X_3 >=50$
$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 =<0$

Utilizar LINDO con un editor externo

En este ejemplo se trabaja con NOTEPAD, en el ambiente de Windows , lo que permite mantener el editor y el programa LINDO funcionando a la vez.

El esquema de trabajo es el siguiente:

Se abre el editor NOTEPAD o el BLOCK DE NOTAS (u otro para de texto sin formato) y se ingresa el modelo del problema junto con algunos comandos que indican el tipo de optimización que se debe realizar y se graba en el mismo directorio donde se ejecutará el programa LINDO.

Se hace funcionar el programa LINDO. La primera tarea es leer el problema del archivo con el comando TAKE. Una vez cargado el problema se utiliza el comando GO para resolverlo. Aquí el programa le pregunta si desea realizar análisis de sensibilidad, a lo que generalmente se responde afirmativamente (Y). Si el programa no hace esta pregunta es porque tiene problemas de edición en su archivo de entrada, o el problema es no factible.

Una vez que se aseguró que los resultados obtenidos son razonables hay que indicar al programa que debe mandar los resultados a un archivo, con el comando DIVERT. Este comando cambia el lugar en que se muestran los datos, es decir, cambia la pantalla del programa por el archivo indicado. De lo anterior se explica el porqué hay que volver a resolver el problema, pero esta vez no se verán los resultados (salvo una líneas resumidas), ya que la información se está escribiendo al archivo. Este archivo queda grabado (por defecto) en el mismo lugar donde se está ejecutando el programa LINDO, y es conveniente darle un nombre con extensión TXT (como SALIDA.TXT), con el fin de poder abrirlo con el mouse (generalmente con el programa NOTEPAD es el editor por defecto para archivos que terminan en TXT). Ahora hay que salir del programa con el comando QUIT

Lo último es ir a la carpeta donde está el programa LINDO y buscar el archivo de SALIDA.TXT (o como Ud. lo haya llamado) y verificar que están los resultados. Ahora solo resta la interpretación de los resultados.

En lo que sigue se explican en detalle lo que corresponde a los pasos 1, 2 y 3. No olvide que si está trabajo en un sistema con permisos de escritura al disco duro (como

Windows XP), el único lugar en el que puede guardar información sin tener una cuenta para ingresar a la red, es el directorio temporal del sistema (c:/tmp ó c:/temp).

INGRESAR EL PROBLEMA

Abra el editor de texto NOTEPAD, (Botón Inicio > Programas > Accesorios) y escriba el modelo matemático tal como se muestra en la guía, con la diferencia que "sujeto a" debe escribirse "SUBJET TO". Además hay que agregar el comando "LEAVE" en la última línea para indicar al programa que deje de leer el archivo. No es necesario que agregue las condiciones de no negatividad, porque el programa las supone. Su archivo debe lucir como en la Figura 1.

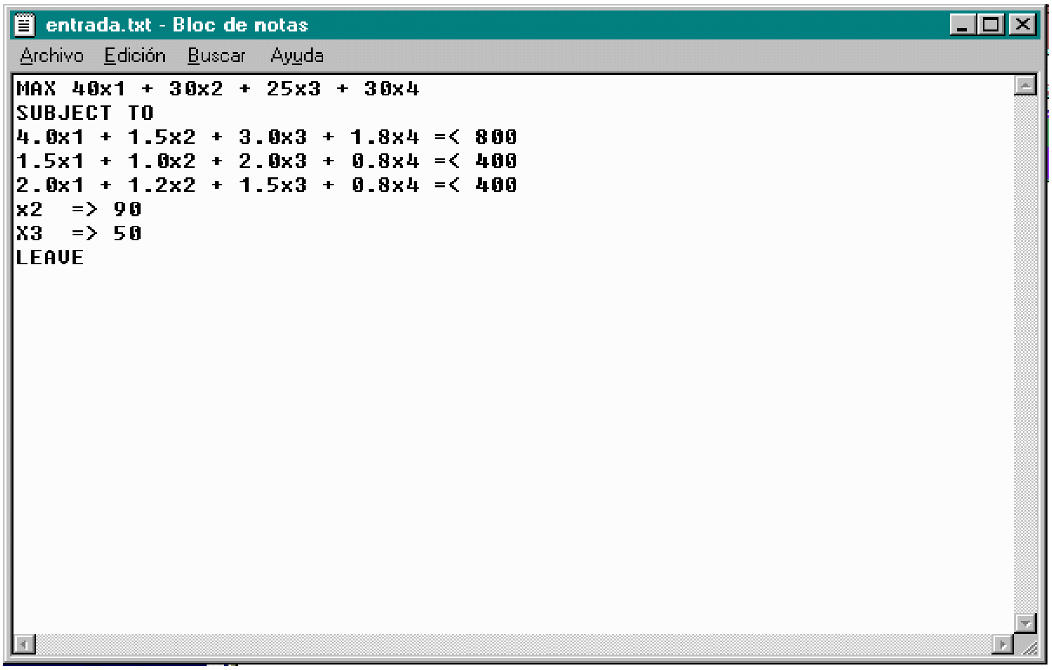
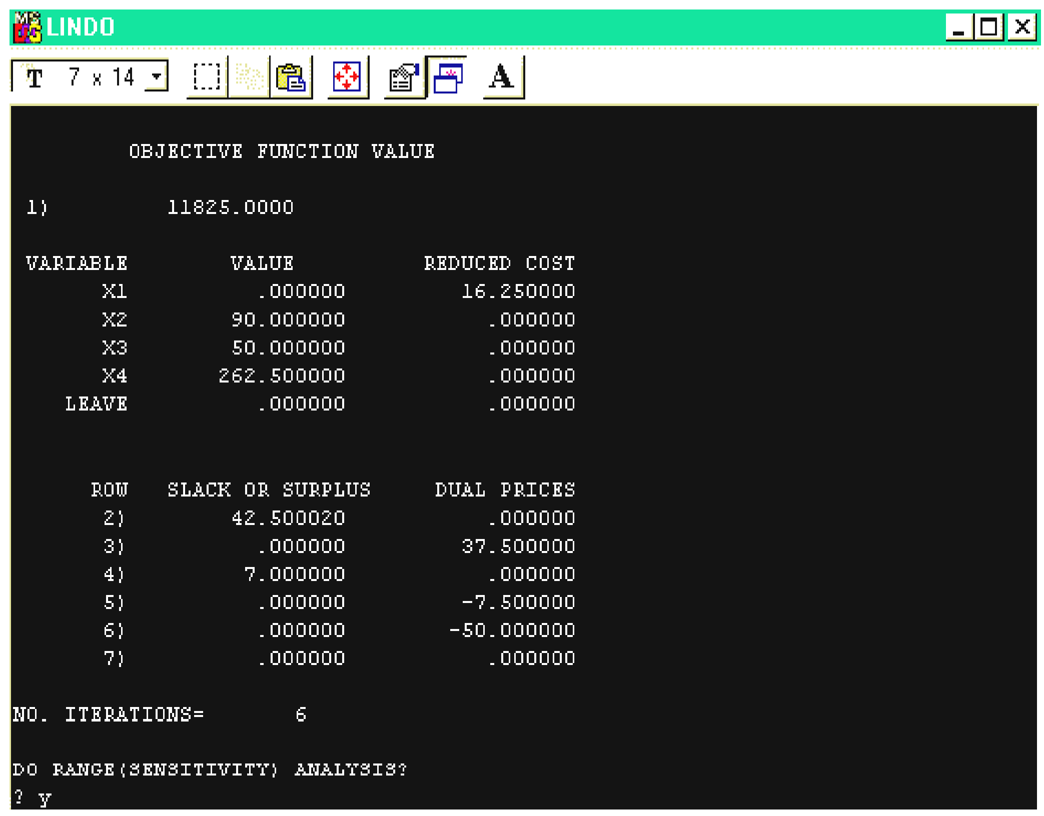


Figura 1. Archivo de datos.

No olvide de dejar los espacios adecuados y de bajar a una nueva línea con la tecla *Enter*. El no seguir estas indicaciones puede originar problemas a la hora de resolver el modelo. Guarde el archivo en la carpeta donde está el programa LINDO con cualquier nombre y asegúrese que quede con la extensión TXT (en este ejemplo el archivo es ENTRADA.TXT)

RESOLVER EL PROBLEMA

Ahora debe iniciar el programa LINDO haciendo doble clic sobre su icono. El cursor estará después de dos puntos (esta es la línea de comandos). Ingrese el comando TAKE para cargar el archivo del problema y selecciónelo con las flechas y luego *Enter*.




```
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)          11825.0000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1           .000000         16.250000
       X2         90.000000           .000000
       X3         50.000000           .000000
       X4        262.500000           .000000
    LEAVE           .000000           .000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         42.500020           .000000
       3)           .000000         37.500000
       4)          7.000000           .000000
       5)           .000000         -7.500000
       6)           .000000        -50.000000
       7)           .000000           .000000

NO. ITERATIONS=       6

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
? y
```

Figura 2. Seleccione el archivo de entrada.

Una vez que se cargó el archivo escriba el comando GO. El programa desplegará los resultados y preguntará si desea realizar análisis de sensibilidad (Figura 2), a lo que es conveniente contestar si (Y). Ahora hay que realizar los mismos pasos pero antes hay que indicar al programa que envíe los datos a un archivo.

GRABAR LOS RESULTADOS

Como ya pudimos ver la solución del problema en pantalla interesa grabar estos datos. Para esto hay que escribir el comando DIVERT y entregar un nombre de archivo para los datos de salida. En este ejemplo el archivo de salida es SALIDA.TXT. Es importante que le dé al archivo la extensión TXT, ya que el programa no lo hace. La extensión permite que se pueda abrir el archivo con el NOTEPAD utilizando el mouse. Vuelva a tipiar GO en la línea de comandos y pida que se realice el análisis de sensibilidad.

Una vez que abra el archivo (recuerde que se graba en el mismo lugar que funciona LINDO a menos que Ud. indique lo contrario) y vera la respuesta arrojada por el programa (Figura 3).

```
salida.txt - Bloc de notas
Archivo  Edición  Buscar  Ayuda

 LP OPTIMUM FOUND  AT STEP      6

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

  1)         11825.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1          .000000         16.250000
        X2        90.000000           .000000
        X3        50.000000           .000000
        X4       262.500000           .000000
     LEAVE          .000000           .000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)        42.500020           .000000
        3)          .000000         37.500000
        4)         7.000000           .000000
        5)          .000000         -7.500000
        6)          .000000        -50.000000
        7)          .000000           .000000

 NO. ITERATIONS=       6
```

Figura 3. Archivo de salida.

También se grabó la información del análisis de sensibilidad. Más adelante se explicará cómo se utilizan estos datos.

No olvide que para salir de LINDO se utiliza el comando QUIT.

OTROS EJEMPLOS DE APLICACION

```
: Max 2x + 3y
?st
?   4x + 3y < 10
?   3x + 5y < 12
?end

: go
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)      7.454545
```

```
VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X         1.272727         0.000000
    Y         1.636364         0.000000


  ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
   2)        0.000000          0.090909
   3)        0.000000          0.545455

NO. ITERATIONS=       2

DO RANGE (SENSITIVITY) ANALYSIS?
?yes

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                         OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
   X        2.000000        2.000000        0.200000
   Y        3.000000        0.333333        1.500000

                         RIGHTHAND SIDE RANGES
 ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                RHS          INCREASE         DECREASE
   2      10.000000        6.000000        2.800000
   3      12.000000        4.666667        4.500000

: save linearprob  <--- Save the formulation in "linearprob"
: quit
```

Ejemplo 2:

```
: retr linearprob  <-----Retrieve the earlier problem statement
: look
ROW:
all               <-----Look at the entire problem ("all" rows)

MAX     2 X + 3 Y
SUBJECT TO
   2)   4 X + 3 Y <=   10
   3)   3 X + 5 Y <=   12
END

: alter             <-----Modify the current formulation
ROW:
2
```

```
VAR:
rhs                <-----by changing the first constraint's RHS
NEW COEFFICIENT:
?20
: alter
ROW:
3
VAR:
y                   <----and the second constraint's y-coeff.
NEW COEFFICIENT:
?10
: look all

MAX     2 X + 3 Y
SUBJECT TO
   2)   4 X + 3 Y <=   20
   3)   3 X + 10 Y <=   12
END

: go
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)      8.000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
   X         4.000000          0.000000
   Y         0.000000          3.666667


  ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
  2)        4.000000          0.000000
  3)        0.000000          0.666667

NO. ITERATIONS=       1

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
?no
: quit
```

Ejemplo 3: Caso en que cada variable solo puede tomar valores 0 y 1

```
: max 4x + 3y + 2z
?st
?2.5x + 3.1y       < 5
? .2x +  .7y + .4z < 1
?end
```

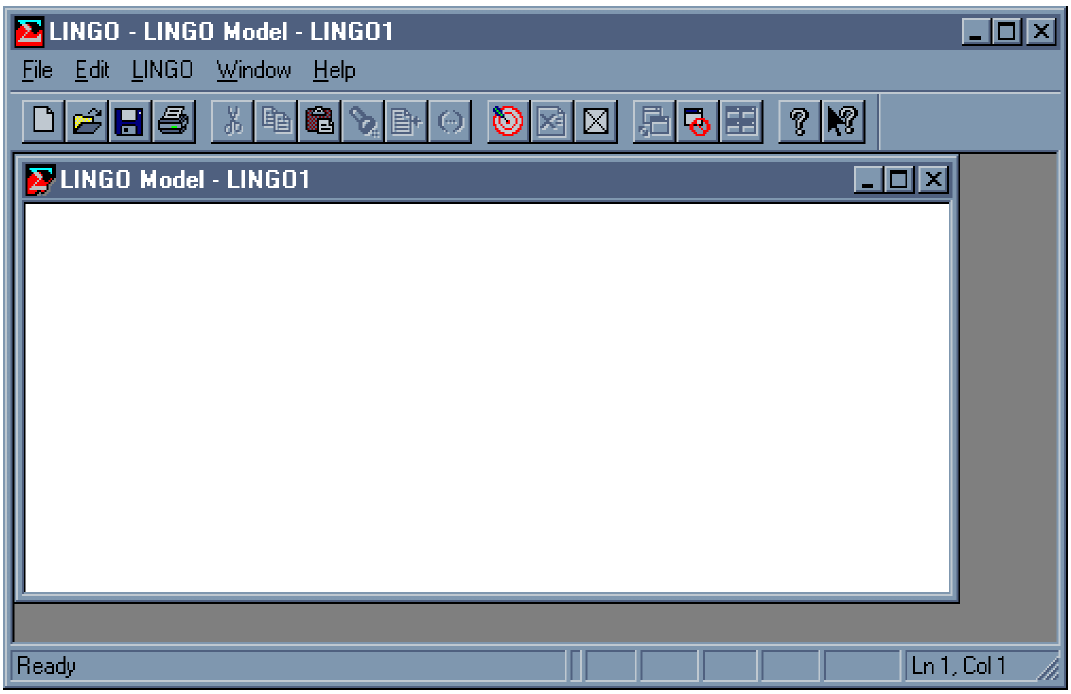
```
: integer x          <--- Define x, y, z to be 0/1 variables
: integer y
: integer z
: go
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
OBJECTIVE VALUE =   7.71428585
FIX ALL VARS.(    1)  WITH RC >   3.00000

NEW INTEGER SOLUTION OF    6.00000000     AT BRANCH      0 PIVOT
10
BOUND ON OPTIMUM:  6.000000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=      10

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

: solu               <--- Inspect the final solution

   OBJECTIVE FUNCTION VALUE

   1)      6.000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    X         1.000000         -4.000000
    Y         0.000000         -3.000000
    Z         1.000000         -2.000000


  ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
   2)         2.500000          0.000000
   3)         0.400000          0.000000

NO. ITERATIONS=      10

BRANCHES=    0 DETERM.=  1.000E    0
: quit

%
```

USO DEL LINGO

Si bien en los puntos anteriores se realizo una aplicación por medio del LINDO, ya mencionamos que hay variación entre las versiones del software y en la actualidad el uso difundido del producto es a través de su nombre comercial LINGO. En la metodología no existen diferencias importantes para problemas como los desarrollados en este curso, si bien LINGO introduce una sintaxis más potente que permite facilitar su aplicación a problemas más complicados.

LINGO puede incluso, leer los datos de una planilla de cálculo, de una base de datos o un archivo de texto.

Como siempre mencionamos solo la reiteración y aplicación de los conceptos es lo que nos hará desarrollar mayores habilidades. Por tanto a fuer de ser reiterativos desarrollaremos otra aplicación que estimo ampliara las habilidades del estudiante.



La ventana inicial de LINGO.

Desarrollo de un modelo en LINGO: Modelo del Mix de producción:

Supongamos que CompuCorp. produce 2 modelos de computadoras llamadas modelo Standard que posee las características genéricas que el mercado hogareño solicita hoy en día y la llamada Turbo que posee ampliaciones de memoria, mayor tamaño de disco y placas aceleradoras para video. CompuCorp puede vender cada unidad Standard que produce a un precio de $100, y cada unidad Turbo por $150. (Usaremos valores numéricos sencillos para ejemplo y que no se corresponden con la realidad).

La fábrica puede producir a lo sumo 100 computadoras Standard por día y 120 computadoras Turbo. CompuCorp tiene una capacidad de trabajo de 160 horas por día. Las computadoras Standard requieren 1 hora de labor, mientras que las Turbo requieren 2 horas.

El problema de CompuCorp es determinar la mezcla de computadoras Standard y Turbo a producir cada día para maximizar el total de las ventas sin exceder el límite de producción y de trabajo.

En general un modelo de optimización consiste en los siguientes 3 ítems:

1. Función objetivo
2. Variables
3. Restricciones

La sintaxis para escribir la función objetivo en LINGO es:

MAX = 100 x STANDARD + 150 x TURBO;

Nota: Cada línea en LINGO finaliza con un punto y coma. El punto y la coma son indispensables. El modelo no se resolverá si falta algún punto y coma.

Las restricciones se introducen de la siguiente manera:

STANDARD <= 100;

TURBO <=120;

STANDARD + 2 x TURBO <= 160;

Dado que la mayor parte de las computadoras no tienen una tecla de menor o igual, LINGO ha adoptado como convención utilizar el símbolo **< =** para representarlo .

Una expresión puede abarcar más de una línea, por ejemplo:

MAX = 100 ***** STANDARD

+ 150 ***** TURBO;

Se pueden introducir comentarios, que serán ignorados por LINGO, comenzando con un signo de exclamación! y terminando con un punto y coma. Los comentarios también pueden ocupar varias líneas.

Por ejemplo:

X= 1.5 * Y + Z / 2 * Y; ! Esto es un comentario;

X= 1.5 * ! Esto es un comentario en el medio de una restricción; Y + Z / 2 * Y;

LINGO no distingue entre mayúsculas y minúsculas, por lo que es lo mismo STANDARD que standard y que StAnDaRd.

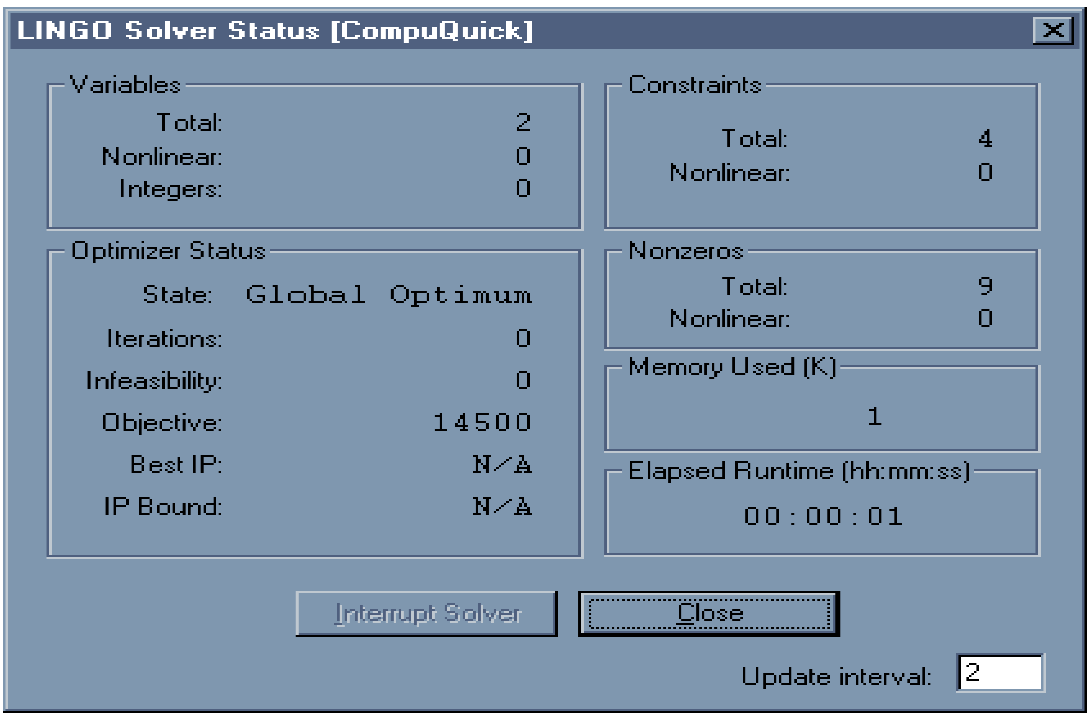
Los nombres de las variables deben comenzar con un carácter alfabético (A-Z), los siguientes caracteres pueden ser alfabéticos, numéricos o subrayado (_). Los nombres pueden ser de hasta 32 caracteres de longitud.

Resolución del modelo.

Para ordenar a LINGO a que resuelva el problema, se debe seleccionar el comando **Solve** del menú **LINGO**, o presionar el botón **Solve** de la barra de herramientas.

Si no hay errores en la formulación del problema durante la etapa de compilación, LINGO invocará al módulo de resolución adecuado para buscar la solución óptima.

Ventana de estado.



En esta ventana se puede monitorear el proceso de resolución y las dimensiones del modelo.

El recuadro "Variables" muestra el número total de variables del modelo, las variables que son no lineales y las enteras. Una variable es considerada no lineal si es parte de una restricción no lineal en el modelo. Mientras más variables no lineales y enteras contenga el modelo, más difícil será resolverlo de forma óptima en un tiempo razonable. Los modelos lineales puros sin variables enteras tienden a resolverse más rápidamente.

La cuenta de variables no incluye las que LINGO determina como de valor fijo, por ejemplo: dadas las restricciones

X = 1;

X + Y = 3;

LINGO determina por la primera restricción que X está fija en 1, y, usando esta información, deduce que Y está fija en 2. X e Y serán entonces excluidas del modelo.

En el recuadro **"Constraints**" se muestra la cantidad total de restricciones y el número de éstos que son no lineales. Una restricción es considerada no lineal si una o más variables aparecen de forma no lineal en la restricción.

El recuadro **"Nonzeros**" muestra el total de coeficientes distintos de cero que aparecen en el modelo y el número de estos que aparecen en variables no lineales.

El recuadro **"Memory Used"** muestra la cantidad de memoria que está utilizando LINGO para resolver el modelo.

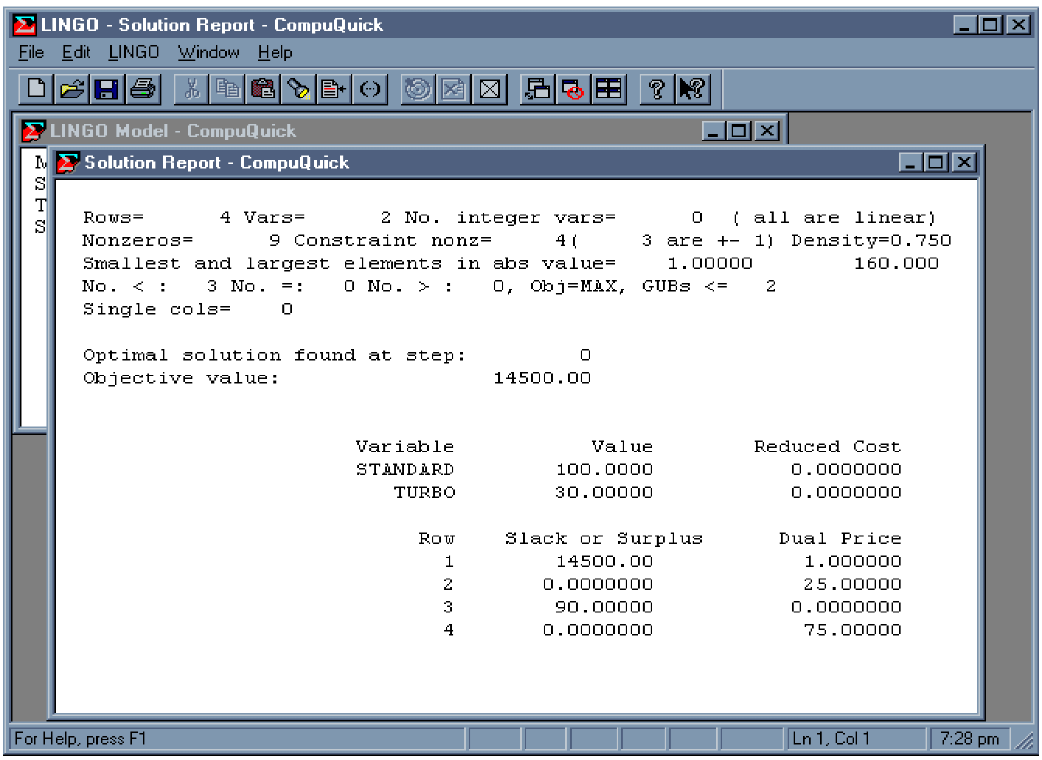
El recuadro **"Elapsed Runtime"** muestra el tiempo total utilizado para generar y resolver el modelo.

El recuadro **"Optinizer Status"** muestra el estado actual del optimizador:

Campo	**Descripción**
State	Estado de la solución actual, puede ser "Global optimum", "Local optimum", "Feesible", "Unbounded", "Interrupted", "Undetermined"
Iterations	Numero de iteraciones
Infeasibility	Cantidad de veces que es violada una restricción

Objetive	Valor actual de la función objetivo
Best IP	Valor de la función objetivo de la mejor solución entera encontrada (solo en modelos de programación entera)
IP Bound	Límite teórico de la función objetivo para modelos de programación entera.

Cuando LINGO termine de resolver el modelo, creará una nueva ventana con el título *Solution Report,* conteniendo los detalles de la solución:
Informe de la solución.



Dada su importancia insistiremos en las interpretaciones de los informes:

Costo Reducido:

En el informe de la solución se encuentra un valor de costo reducido para cada variable. Hay dos interpretaciones válidas y equivalentes para el costo reducido.

Primero se puede interpretar como el monto por el cual el coeficiente objetivo de la variable se debería incrementar antes de hacerse provechoso darle a la variable en cuestión un valor positivo en la solución óptima. Por ejemplo, si la variable tuviera un costo reducido de 10, el coeficiente objetivo de esta variable deberá incrementarse en 10 unidades en un problema de maximización o decrementarse en 10 unidades en un problema de minimización para convertirse en una alternativa atractiva. Una variable en la solución óptima automáticamente tiene un costo reducido de 0

Segundo, el costo reducido de una variable se puede interpretar como el monto de penalización que habrá que pagar por introducir una unidad de esa variable en la solución. Como antes, si la variable tuviera un costo reducido de 10, habrá que pagar una penalización de 10 unidades para introducir la variable en la solución. En otras palabras, el valor objetivo caerá en 10 unidades en un modelo de maximización, o se incrementará 10 unidades en un problema de minimización.

Los costos reducidos son válidos sólo dentro de un rango de valores.

Holgura o excedente

La columna *Slack or Surplus* en el informe de la solución de LINGO muestra que tan cerca se está de satisfacer una restricción como una igualdad. Esta cantidad, en restricciones de menor o igual, se denomina generalmente holgura. En restricciones de mayor o igual se la llama excedente.

Si una restricción es exactamente satisfecha como una igualdad, la holgura o excedente valdrá cero. Si una restricción es violada, este valor será negativo. Esto ayuda a encontrar las restricciones violadas cuando en el modelo no existe un conjunto de valores para las variables que satisfacen simultáneamente todas las restricciones.

En el ejemplo de CompuCorp, nótese que la fila 3 (TURBO <= 120) tiene un slack de 90, porque el valor óptimo de TURBO es 30, esta fila está a 90 unidades de ser satisfecha como una igualdad.

Precio Dual.

El informe de la solución de LINGO también da un valor de precio dual para cada restricción. El precio dual se puede interpretar como el monto en que la función objetivo mejorará si el segundo miembro de la restricción se incrementase una unidad. Por ejemplo, en la solución de CompuCorp, el precio dual en la fila 4 significa que agregar una unidad más al trabajo causará que la función objetivo mejore en 75, a un valor de 14575.

Nótese que mejorar es un término relativo. En un problema de maximización, mejorar significa que la función objetivo se incrementará, y en un problema de minimización el valor objetivo se reducirá si el segundo miembro de una restricción con precio dual positivo es incrementado.

Los precios duales son a veces llamados precios sombra, porque ellos dicen cuanto debería pagar por una unidad de recurso. En el ejemplo anterior, CompuCorp podría pagar hasta $75 por cada unidad de trabajo.

Al igual que los costos reducidos, los precios duales son válidos sólo dentro de un rango de valores.

Capitulo 6: El Aprendizaje con la Asistencia del Computador: Conceptos y Técnicas

EL SOFTWARE MS EXCEL y EL SOLVER

El Solver es una herramienta incluida en el conocido y utilizado Microsoft Excel. Es la herramienta más conocida de aplicación y como ya mencionamos tendemos a que sea la de uso común del estudiante dado su simplicidad y disponibilidad para el profesional.

Como todas las herramientas antes presentadas aprenderemos su uso con una aplicación a la Programación Lineal.

Recordamos que un modelo de optimización consta de tres partes: la celda objetivo, las celdas cambiantes y las restricciones.

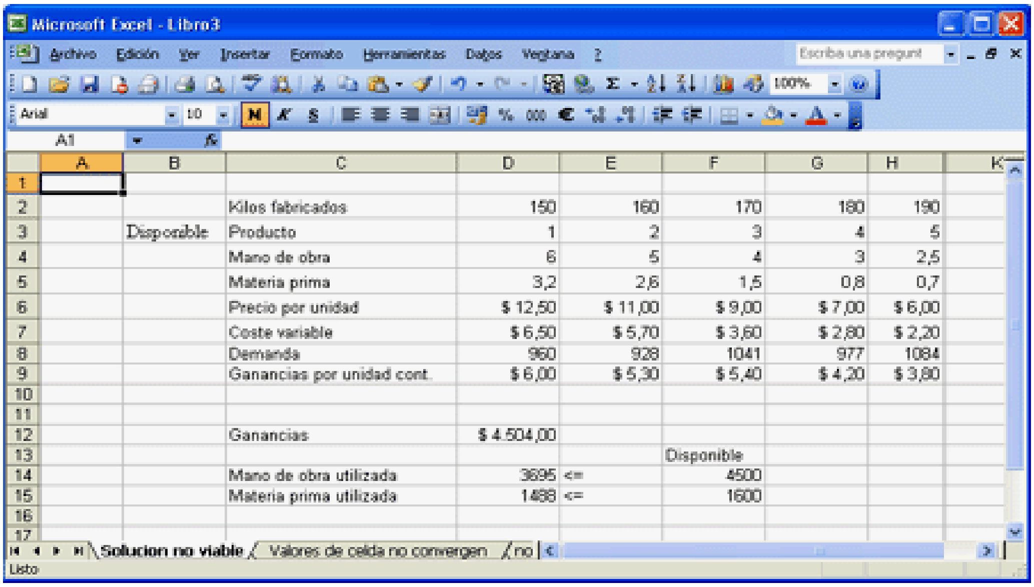
- La celda objetivo representa el objetivo como, por ejemplo, aumentar las ganancias mensuales.
- Las celdas cambiantes son las celdas de la hoja de cálculo que podemos cambiar o ajustar para optimizar la celda objetivo como, por ejemplo, la cantidad de cada producto fabricada durante un mes.
- Las restricciones son delimitaciones que se aplican a las celdas cambiantes como, por ejemplo, no usar más recursos que los disponibles y no producir más cantidad de un producto que la que pueda venderse.

APLICACION**:** ¿Cómo puedo determinar qué mezcla de productos aumenta la rentabilidad? Caso de la Industria Farmacéutica

Las empresas necesitan a menudo determinar el programa de producción mensual (o semanal) que proporcione la cantidad de fabricación de cada producto. En su forma más simple, el problema de la **mezcla de productos** implica cómo determinar la cantidad de cada producto que debe fabricarse durante un mes para aumentar las ganancias. La mezcla de productos debe satisfacer a menudo las siguientes restricciones básicas:

- En la mezcla de productos no se pueden utilizan más recursos que los disponibles
- Hay una demanda limitada para cada producto.
- No podemos producir más cantidad de un producto durante un mes que la demandada porque el excedente de producción se desecha (como en el caso de los fármacos perecederos, por ejemplo).

Resolvamos ahora el siguiente ejemplo del problema de mezcla de productos.



	B	C	D	E	F	G	H
1							
2		Kilos fabricados	150	160	170	180	190
3	Disponible	Producto	1	2	3	4	5
4		Mano de obra	6	5	4	3	2,5
5		Materia prima	3,2	2,6	1,5	0,8	0,7
6		Precio por unidad	$ 12,50	$ 11,00	$ 9,00	$ 7,00	$ 6,00
7		Coste variable	$ 6,50	$ 5,70	$ 3,60	$ 2,80	$ 2,20
8		Demanda	960	928	1041	977	1084
9		Ganancias por unidad cont.	$ 6,00	$ 5,30	$ 5,40	$ 4,20	$ 3,80
10							
11							
12		Ganancias	$ 4.504,00				
13					Disponible		
14		Mano de obra utilizada	3695	<=	4500		
15		Materia prima utilizada	1488	<=	1600		

Figura 1: El ejemplo de mezcla de productos.

Suponga que trabajamos para una empresa farmacéutica internacional que puede producir seis productos en su planta. La producción de cada producto requiere mano de obra y materia prima.

La fila 4 de la Figura 1 contiene las horas de mano de obra necesarias para producir una libra (454 gramos) de cada producto, y la fila 5 indica las libras de materia prima necesarias para producir una libra de cada producto. Por ejemplo, para producir una libra del producto 1 se requieren seis horas de mano de obra y 3,2 libras (1.453 gramos) de materia prima.

Para cada fármaco, el precio por libra se indica en la fila 6, el coste unitario por libra se indica en la fila 7 y las ganancias por libra se indican en la fila 9. Por ejemplo, el producto 2 se vende a 11 dólares la libra, el coste unitario es de 5,7 dólares por libra y las ganancias son 5,3 dólares por libra.

La demanda de este mes de cada fármaco se indica en la fila 8. Por ejemplo, la demanda del producto 3 es de 1.041 libras (472,6 kilos).

Para este mes hay 4.500 horas de mano de obra y 1.600 libras (726,4 kilos) de materia prima disponibles.

¿Cómo puede esta empresa aumentar sus ganancias mensuales?

Si no supiéramos nada sobre Solver, podríamos resolver este problema creando una hoja de cálculo en la que pudiéramos realizar un seguimiento de las ganancias y el uso de recursos asociados a cada mezcla de productos. A continuación, utilizaríamos pruebas de ensayo y error para variar la mezcla de productos con el fin de optimizar las ganancias sin utilizar más mano de obra o materia prima que la disponible, y sin producir más cantidad de un determinado fármaco que la demandada. Básicamente, Solver es un motor de optimización que realiza eficazmente la búsqueda por ensayo y error.

Previamente explicaremos el uso de una función de Excel necesaria:

Un elemento clave para solucionar el problema de la mezcla de productos es calcular eficazmente el uso de recursos y las ganancias asociadas a cada mezcla de productos. Una herramienta importante que podemos utilizar para realizar este cálculo es la función SUMAPRODUCTO. La función SUMAPRODUCTO multiplica los valores correspondientes en los rangos de celdas y devuelve la suma de esos valores. Todos los rangos de celdas utilizados en una evaluación de UMAPRODUCTO deben tener las mismas dimensiones, lo que implica que se puede utilizar SUMAPRODUCTO con dos filas o dos columnas, pero no con una columna y una fila.

Para ejemplificar el uso de la función SUMAPRODUCTO en nuestro ejemplo de mezcla de productos, tratemos de calcular nuestro uso de recursos. Para ello, necesitamos realizar el siguiente cálculo:

(Mano de obra utilizada por libra del fármaco 1) x

(Libras del fármaco 1 producidas) +

(Mano de obra utilizada por libra del fármaco 2) x

(Libras del fármaco 2 producidas) +

... y así sucesivamente..........................

(Mano de obra utilizada por libra del fármaco 6) x

(Libras del fármaco 6 producidas)

En nuestra hoja de cálculo, podríamos calcular el uso de mano de obra (de un modo tedioso) como D2*D4+E2*E4+F2*F4+G2*G4+H2*H4+I2*I4.

De igual forma, el uso de materia prima se podría calcular como D2*D5+E2*E5+F2*F5+G2*G5+H2*H5+I2*I5.

Si escribir estas fórmulas en una hoja de cálculo para seis productos es una tarea laboriosa, imagínese cómo sería si trabajara con una empresa que fabricara, por ejemplo, 50 productos en su planta.

Una forma mucho más sencilla de calcular el uso de mano de obra y materia prima consiste en copiar de D14 a D15 la fórmula:

SUMAPRODUCTO($D$2:$I$2,D4:I4)

Esta fórmula calcula D2*D4+E2*E4+F2*F4+G2*G4+H2*H4+I2*I4 (que es nuestro uso de mano de obra) y es mucho más fácil de escribir.
Observe que hemos utilizado el signo $ con el rango D2:I2, de forma que cuando copiemos la fórmula podamos seguir obteniendo la mezcla de productos de la fila 2. La fórmula de la celda D15 calcula el uso de materia prima.

De forma similar, podemos obtener nuestras ganancias calculando:

(Ganancias del fármaco 1 por libra) *
(Libras del fármaco 1 producidas) +
(Ganancias del fármaco 2 por libra) *
(Libras del fármaco 2 producidas) +
... y así........
(Ganancias del fármaco 6 por libra) *
(Libras del fármaco 6 producidas).

Las ganancias se calculan fácilmente en la celda D12 con la fórmula:

SUMAPRODUCTO(D9:I9,$D$2:$I$2)

Ahora podemos identificar las tres partes de nuestro modelo Solver de mezcla de productos:

Celda objetivo	**Celdas cambiantes**	**Restricciones**
Nuestro objetivo es aumentar las ganancias (calculadas en la celda D12).	El número de libras producidas de cada producto (indicado en el rango de celdas D2:I2).	**-**No utilizar más mano de obra y materia prima que la disponible. Es decir, los valores de las celdas D14:D15 (los recursos utilizados) deben ser menores o iguales que los valores de las celdas F14:F15 (los recursos disponibles). **-**No producir más cantidad de un fármaco que la demandada. Es decir, los valores de las celdas D2:I2 (las libras producidas de cada fármaco) deben ser menores o iguales que la demanda de cada fármaco (indicada en las celdas D8:I8). **-**No podemos producir una

cantidad negativa de ningún fármaco.

¿Cómo puedo especificar este modelo en Solver?

Ahora explicaremos cómo especificar la celda objetivo, las celdas cambiantes y las restricciones en Solver. Después, no tendrá más que hacer clic en el botón **Resolver** y Solver encontrará una mezcla de productos que suponga un aumento de las ganancias.

1. Para empezar, seleccione **Solver** en el menú **Herramientas**. (Para obtener instrucciones sobre cómo instalar Solver, vea ***Introducción a la optimización con la herramienta Solver de Excel*** en el menú AYUDA del programa.)

   Aparecerá el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**.

2. Para especificar la celda objetivo, haga clic en el cuadro **Definir celda objetivo** y, a continuación, seleccione nuestra celda de ganancias (la celda D12). Para especificar nuestras celdas cambiantes, haga clic en el cuadro **Cambiando las celdas** y, después, elija el rango D2:I2, que contiene las libras producidas de cada fármaco. El cuadro de diálogo debe ser similar al que se muestra en la figura siguiente.

3. Ahora podemos agregar restricciones al modelo. Haga clic en el botón **Agregar**. Aparecerá el cuadro de diálogo **Agregar restricción**.

4. Para agregar las restricciones de uso de recursos, haga clic en el cuadro **Referencia de celda** y, después, seleccione el rango D14:D15.

Elija **<=** de la lista en el centro del cuadro de diálogo
. Haga clic en el cuadro **Restricción** y, a continuación, seleccione el rango de celdas F14:F15.

Ahora nos hemos asegurado de que cuando Solver pruebe distintos valores para las celdas cambiantes, sólo considerará las combinaciones que satisfagan D14 **<=** F14 (la mano de obra utilizada es menor o igual que la mano de obra disponible) y D15 **<=** F15 (la materia prima utilizada es menor o igual que la materia prima disponible).

5. Ahora haga clic en **Agregar** en el cuadro de diálogo **Agregar restricción** para especificar las restricciones de demanda. Sólo tiene que rellenar el cuadro de diálogo **Agregar restricción** tal como se muestra en la siguiente figura.

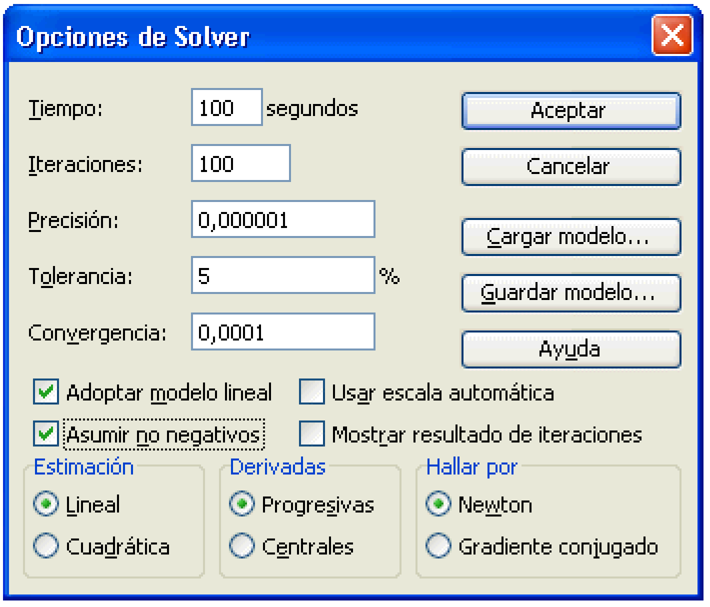
Al agregar estas restricciones nos aseguramos de que cuando Solver pruebe distintas combinaciones para los valores de las celdas cambiantes, sólo considerará las combinaciones que satisfagan las siguientes condiciones:

- D2 <= D8 (la cantidad del fármaco 1 es menor o igual que la demanda del fármaco 1)
- E2 <= E8 (la cantidad del fármaco 2 es menor o igual que la demanda del fármaco 2)
- F2 <= F8 (la cantidad del fármaco 3 es menor o igual que la demanda del fármaco 3)
- G2 <= G8 (la cantidad del fármaco 4 es menor o igual que la demanda del fármaco 4)
- H2 <= H8 (la cantidad del fármaco 5 es menor o igual que la demanda del fármaco 5)
- I2 <= I8 (la cantidad del fármaco 6 es menor o igual que la demanda del fármaco 6)

6. Haga clic en **Aceptar** en el cuadro de diálogo **Agregar restricción**.

   El cuadro de diálogo **Parámetros de Solver** debe ser similar al que se muestra en la figura siguiente.

7. Especificamos la restricción de que ninguna de las celdas cambiantes sea negativa en el cuadro de diálogo **Opciones de Solver**, que se abre haciendo clic en el botón **Opciones** del cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**.



Seleccione las opciones **Adoptar modelo lineal** y **Adoptar no-negativo** y, a continuación, haga clic en Aceptar.

¿Por qué seleccionamos estas opciones?

Al seleccionar la opción **Adoptar no-negativo** nos aseguramos de que Solver sólo considere las combinaciones de celdas cambiantes en las que cada celda cambiante adopte un valor no negativo.

Hemos seleccionado **Adoptar modelo lineal** porque el problema de mezcla de productos es un tipo especial de problema de Solver denominado **modelo lineal** Básicamente, un modelo de Solver es lineal si se cumplen las siguientes condiciones:
a)La celda objetivo se calcula sumando términos de la forma *(celda cambiante)*(constante)*.
b)Cada restricción satisface los requisitos del modelo lineal. Esto significa que cada restricción se evalúa sumando términos de la forma *(celda cambiante)*(constante)* y comparando estas sumas con una constante.

Una vez demostrado que nuestro modelo de mezcla de productos es lineal, ¿por qué preocuparse?

- Si un modelo de Solver es lineal y seleccionamos **Adoptar modelo lineal**, nos aseguramos de que Solver busque la solución óptima al modelo de Solver. Si no es lineal, puede que Solver encuentre o no la solución óptima.

- Si un modelo de Solver es lineal y seleccionamos **Adoptar modelo lineal**, Solver utiliza un algoritmo muy eficaz (el método más simple) para encontrar la solución óptima del modelo. Si el modelo de Solver es lineal y no seleccionamos **Adoptar modelo lineal**, Solver utiliza un algoritmo muy poco eficaz (el método GRG2) y puede resultar difícil encontrar la solución óptima del modelo.

8. Después de hacer clic en **Aceptar** en el cuadro **Opciones de Solver**, volvemos al cuadro de diálogo **Solver** principal. Cuando hagamos clic en **Resolver**, Solver calculará una solución óptima (si existe) para nuestro modelo de mezcla de productos.

Una solución óptima al modelo de mezcla de productos sería un conjunto de valores de celdas cambiantes (libras producidas de cada fármaco) que aumentara las ganancias entre el conjunto de todas las soluciones viables. Como ya hemos explicado, una **solución viable** es un conjunto de valores de celdas cambiantes que satisfacen todas las restricciones. Los valores de las celdas cambiantes mostrados en la Figura 2 son una solución viable, ya que ninguno de los niveles de producción es negativo, ninguno de ellos excede la demanda y el uso de recursos no es mayor que los recursos disponibles.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Kilos fabricados	150	160	170	180	190
3		Disponible	Producto	1	2	3	4	5
4			Mano de obra	6	5	4	3	2,5
5			Materia prima	3,2	2,6	1,5	0,8	0,7
6			Precio por unidad	$ 12,50	$ 11,00	$ 9,00	$ 7,00	$ 6,00
7			Coste variable	$ 6,50	$ 5,70	$ 3,60	$ 2,80	$ 2,20
8			Demanda	960	928	1041	977	1084
9			Ganancias por unidad cont.	$ 6,00	$ 5,30	$ 5,40	$ 4,20	$ 3,80
10								
11								
12			Ganancias	$ 4.504,00				
13						Disponible		
14			Mano de obra utilizada	3695	<=	4500		
15			Materia prima utilizada	1488	<=	1600		

Figura 2: Una solución viable al problema de mezcla de productos satisface las restricciones.

Los valores de las celdas cambiantes mostrados en la Figura 3 representan una **solución inviable** por los siguientes motivos:

Producimos más cantidad del fármaco 5 que la demandada.

Utilizamos más mano de obra que la disponible.

Utilizamos más materia prima que la disponible.

	B	C	D	E	F	G	H
1							
2		Kilos fabricados	300	0	0	0	1085
3	Disponible	Producto	1	2	3	4	5
4		Mano de obra	6	5	4	3	2,5
5		Materia prima	3,2	2,6	1,5	0,8	0,7
6		Precio por unidad	$ 12,50	$ 11,00	$ 9,00	$ 7,00	$ 6,00
7		Coste variable	$ 6,50	$ 5,70	$ 3,60	$ 2,80	$ 2,20
8		Demanda	960	928	1041	977	1084
9		Ganancias por unidad cont.	$ 6,00	$ 5,30	$ 5,40	$ 4,20	$ 3,80
10							
11							
12		Ganancias	$ 7.723,00				
13					Disponible		
14		Mano de obra utilizada	6012,5	<=	4500		
15		Materia prima utilizada	2019,5	<=	1600		

Figura 3: Una solución inviable al problema de mezcla de productos no satisface las restricciones que hemos definido.

Después de hacer clic en **Resolver**, Solver encuentra rápidamente la solución óptima mostrada en la Figura 4. Debe seleccionar **Conservar la solución de Solver** para conservar los valores de la solución óptima en la hoja de cálculo.

	B	C	D	E	F	G	H	I
1								
2		Kilos fabricados	0	0	0	596,667	1084	
3	Disponible	Producto	1	2	3	4	5	
4		Mano de obra	6	5	4	3	2,5	
5		Materia prima	3,2	2,6	1,5	0,8	0,7	
6		Precio por unidad	$ 12,50	$ 11,00	$ 9,00	$ 7,00	$ 6,00	$
7		Coste variable	$ 6,50	$ 5,70	$ 3,60	$ 2,80	$ 2,20	$
8		Demanda	960	928	1041	977	1084	
9		Ganancias por unidad cont.	$ 6,00	$ 5,30	$ 5,40	$ 4,20	$ 3,80	$
10								
11								
12		Ganancias	$ 6.625,20					
13					Disponible			
14		Mano de obra utilizada	4500	<=	4500			
15		Materia prima utilizada	1236,1333	<=	1600			
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								

Figura 4: La solución óptima al problema de mezcla de productos.

Nuestra empresa farmacéutica puede aumentar sus ganancias mensuales a un nivel de 6.625,20 dólares produciendo 596,67 libras (270,8 kilos) del fármaco 4, 1.084 libras (492,1 kilos) del fármaco 5 y ninguno de los demás fármacos.

No podemos determinar si somos capaces de obtener el beneficio máximo de 6.625,20 dólares de otras maneras. De lo único de lo que estamos seguros es de que con nuestra demanda y nuestros recursos limitados no hay forma de ganar este mes más de 6.625,20 dólares.

¿UN MODELO SOLVER TIENE SIEMPRE UNA SOLUCIÓN?

Supongamos que debe satisfacerse la demanda de cada producto. En ese caso, tendremos que cambiar nuestras restricciones de demanda de D2:I2 **<=** D8:I8 a D2:I2 **>=** D8:I8.

Para cambiar esta restricción:

1. Abra Solver.
2. Haga clic en la restricción **D2:I2 <= D8:I8** y luego en **Cambiar**.
   Aparecerá el cuadro de diálogo **Cambiar restricción**.

3. En el cuadro del centro, elija **>=** y, a continuación, haga clic en **Aceptar**.

Con esto nos aseguramos de que Solver sólo considere los valores de las celdas cambiantes que satisfacen todas las demandas.

Al hacer clic en **Resolver**, aparecerá el mensaje **Solver no ha podido encontrar una solución factible**. Este mensaje significa que con nuestros recursos limitados no podemos satisfacer la demanda de todos los productos.

No hemos cometido ningún error en nuestro modelo. Solver nos indica simplemente que si queremos satisfacer la demanda de cada producto, debemos agregar más mano de obra, más materia prima o ambas cosas.

¿Qué ocurre si los valores definidos no convergen?

Veamos qué sucede si permitimos una demanda ilimitada para cada producto y permitimos también que se produzcan cantidades negativas de cada fármaco. Para encontrar la solución óptima para esta situación:

1. Abra Solver.
2. Haga clic en el botón **Opciones** y, a continuación, desactive la casilla de verificación **Adoptar no-negativo**.
3. En el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**, haga clic en la restricción de demanda **D2:I2 <= D8:I8** y luego en **Eliminar** para quitar la restricción.

Al hacer clic en **Resolver**, Solver muestra el mensaje **Los valores de la celda objetivo no convergen**. Este mensaje significa que si debe aumentarse el valor de la celda objetivo (como en nuestro ejemplo), hay soluciones viables con valores en la celda objetivo arbitrariamente grandes . (Si debe reducirse el valor de la celda objetivo, este mensaje significa que hay soluciones viables con valores en la celda objetivo arbitrariamente pequeño.)

En nuestra situación, al permitir la producción negativa de un fármaco, lo que de hecho estamos "creando" son recursos que se pueden utilizar para producir cantidades arbitrariamente grandes de otros fármacos. Dada nuestra demanda ilimitada, esto nos permite obtener ganancias ilimitadas. En una situación real, no podemos ganar una cantidad infinita de dinero. En resumen, si aparece el mensaje **Los valores de la celda objetivo no convergen**, el modelo contiene un error.

APLICACION : MAXIMIZACION CARTERA DE INVERSIONES

Andrés Z. es presidente de una microempresa de inversiones que se dedica a administrar las carteras de acciones de varios clientes. Un nuevo cliente ha solicitado que la compañía se haga cargo de administrar para él una cartera de 100.000$. A ese cliente le agradaría restringir la cartera a una mezcla de tres tipos de acciones únicamente, como podemos apreciar en la siguiente tabla. Formule usted un modelo de Programación Lineal para mostrar cuántas acciones de cada tipo tendría que comprar Andrés con el fin de maximizar el rendimiento anual total estimado de esa cartera.

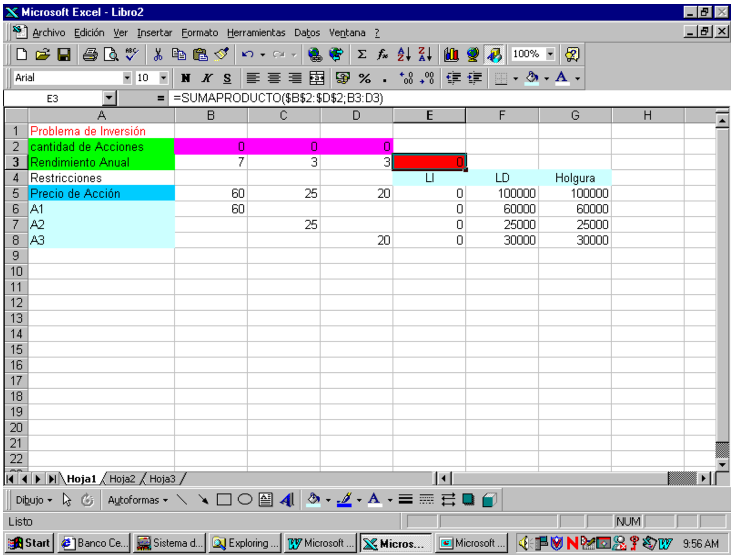
Acciones	Precio ($)	Rendimiento Anual Estimado por Acción ($)	Inversión Posible ($)
Navesa	60	7	60.000
Telectricidad	25	3	25.000
Rampa	20	3	30.000

Para solucionar este problema debemos seguir los pasos para la construcción de modelos de programación lineal (PL):

1.- Definir la variable de decisión.
2.- Definir la función objetivo.
3.- Definir las restricciones.

Luego construimos el modelo:

MAX Z = 7X1 + 3X2 + 3X3
sujeto a.:
60X1 +25X2 + 20X3 <= 100.000 Restricción de capital
60X1 <= 60.000
25X2 <= 25.000
Inversiones posibles
20X3 <= 30.000
Xi >= 0



A continuación se construye el modelo en una hoja de cálculo de Excel de la siguiente manera:

En la fila 2 se coloca la variable de decisión la cual es el número de acciones y sus valores desde la B2 hasta la D2. En la fila 3 el rendimiento anual y sus valores desde B3 hasta D3.

En la celda E3 colocaremos una formula la cual nos va indicar el rendimiento anual total: =sumaproducto($B$2:$D$2;B3:D3).

Desde la fila B5 hasta la D8 colocaremos los coeficientes que acompañan a las variables de decisión que componen las restricciones.

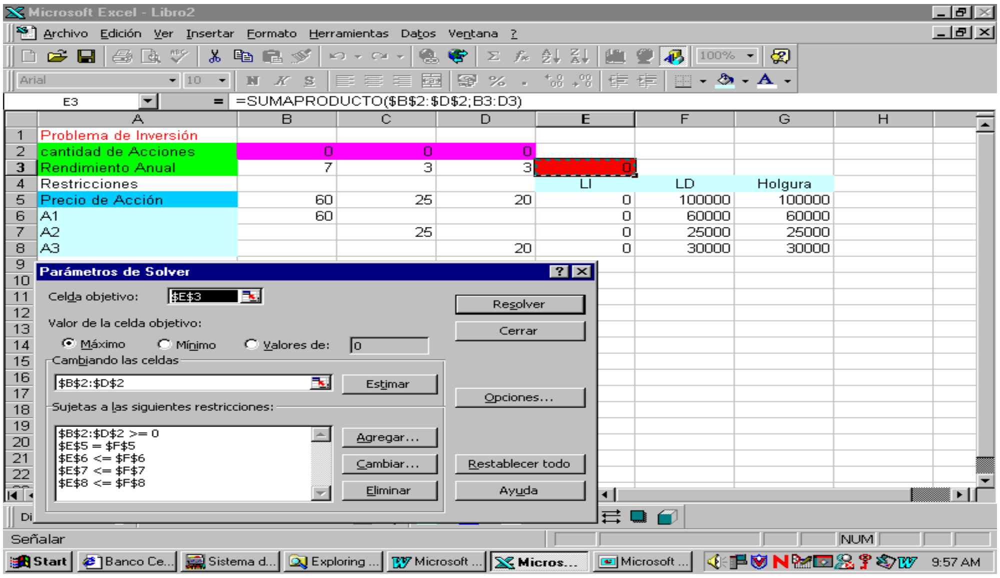
Desde la E5 hasta la E8 se encuentra la función de restricción (LI) y no es más que utilizar la siguiente formula =sumaproducto($B$2:$D$2;B5:D5) la cual se alojaría en la celda E5, luego daríamos un copy hasta la E8.

Desde la F5 hasta F8 se encuentran los valores de las restricciones. Desde la G5 hasta G8 se encuentra la holgura o excedente.

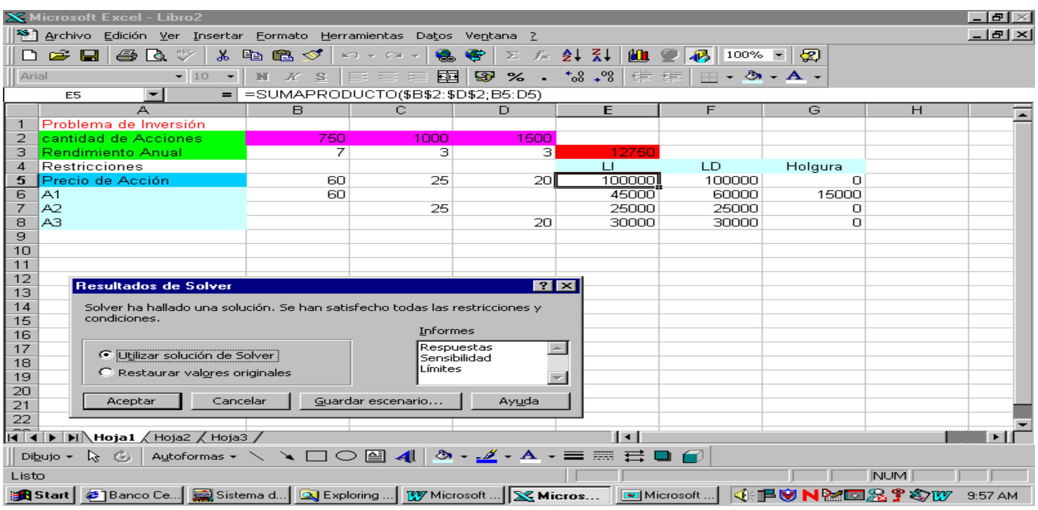
Una vez completada la hoja de cálculo con el modelo respectivo ¡GRABE SU HOJA!, y seleccione "Solver…" en el menú de "Herramientas", ahí tendrá que especificar dentro del cuadro de dialogo de Solver:

- La celda que va a optimizar
- Las celdas cambiantes
- Las restricciones

Así tendremos la siguiente pantalla:



Como se puede observar en la celda objetivo se coloca la celda que se quiere optimizar, en las celdas cambiantes las variables de decisión y por último se debe de complementar con las restricciones. Una vez realizado estos pasos deben pulsar el icono de "Opciones" y debe hacer clic en "Asumir modelo lineal" y enseguida el botón de "Aceptar". Luego haga clic en el botón de "Resolver" para realizar la optimización, lea detenidamente el mensaje de terminación de Solver y ahí observará si se encontró una solución o hay que modificar el modelo, en caso de haber encontrado una solución óptima usted podrá aceptar o no dicha solución, luego tendrá oportunidad de analizar un informe de análisis de sensibilidad para luego tomar la mejor decisión.



En nuestro ejemplo el máximo rendimiento anual fue de 12750$, y la cantidad de acciones a comprar serían 750, 1000 y 1500 para Navesa, Telectricidad y Rampa respectivamente.

Veremos otra aplicación para familiarizarnos con el manejo de la herramienta:

Max $Z = 10 X1 + 8 X2$

Sujeto a:

$$30X1 + 20X2 \le 120$$
$$2X1 + 2X2 \le 9$$
$$4X1 + 6X2 \le 24$$

$$X1, X2 \ge 0$$

Se activa Excel y en una hoja...

Se ubican las celdas que se corresponderán con el valor de las variables de decisión; en éste caso, las celdas B6 y C6, se les da un formato para diferenciarlas de las demás, aquí en tono oscuro (ver pantalla de captura abajo). Se ubica también, las celdas que contendrán los coeficientes de las variables de decisión, B4 y C4, y se llenan con sus respectivos valores, 10 y 8. Aunque éste último paso, se podría omitir y dejar los coeficientes definidos en la celda de la función objetivo, así es mejor para los análisis de sensibilidad y para que la hoja quede portable para otro programa.

Se ubica la celda que se corresponderá con la función objetivo (celda objetivo), la B3. En ella se escribe la función que sea, en éste caso, será el coeficiente de X1 (en B4) por el valor actual de X1 (en B6) mas el coeficiente de X2 (en C4) por el valor actual de X2 (en C6) O sea: =$B$4*$B$6+$C$6*$C$4

Coeficientes para la primera restricción: los podemos escribir en la misma columna de las variables de decisión; en las celdas B7 y C7, con los valores 30 y 20, seguido del sentido de la desigualdad (<=) y de su correspondiente RHS: 120. A la derecha ubicaremos el valor actual de consumo de la restricción, ella se escribirá en función de las variables de decisión y de los coeficientes de la restricción. Esta celda, la utilizará Solver como la real restricción, cuando le digamos que el valor de ésta celda no pueda sobrepasar la de su correspondiente RHS. De nuevo será el valor del coeficiente por el de la variable:=B7*$B$6+C7*$C$6.
Nótese que ahora B7 y C7 no tienen el signo $. Pues es que luego que se haya escrito ésta celda, se podrá arrastrar hacia abajo para que Excel escriba la fórmula por nosotros , pero tome los valores relativos a los coeficientes que le corresponda a los mismos valores de las variables de decisión.
Se repite los pasos anteriores para las otras restricciones, pero ahora la fórmula será: =B8*$B$6+C8*$C$6 y =B9*$B$6+C9*$C$6.

	A	B	C	D	E	F
1	Ejemplo para la Programación Lineal Continua:					
2						
3	Función O.	0				
4		10	8			
5		X1	X2			
6					RHS	Valor Actual
7	R1	30	20	<=	120	0
8	R2	2	2	<=	9	0
9	R3	4	6	<=	24	0

El resto del formato es para darle una presentación más agradable de la hoja. Ahora a resolver: Al hacer clic en Herramientas , Solver se tendrá una pantalla como la siguiente. Lo primero que hay que hacer es especificar la celda objetivo y el propósito: maximizar. Se escribe B3 (o $B3 ó B$3 ó $B$3), en el recuadro "cambiando las celdas", se hace un clic en la flechita roja, para poder barrer las celdas B6 y C6; lo mismo si se escriben directamente los nombres.

Y ahora para las restricciones: se hace clic en agregar...

En F7 está la primera restricción, como se puede ver en la captura de pantalla. Se especifica el sentido de la restricción <=, >= ó =. Aquí también se puede especificar el tipo de variable, por defecto es continua, pero se puede escoger "Int" para entera o "Bin" para binaria. En el recuadro de la derecha establecemos la cota. Aquí podemos escribir 120 pero mejor escribimos $E$7 para que quede direccionado a la celda que contiene el 120, y después lo podríamos cambiar y volver a encontrar la respuesta a manera de análisis de sensibilidad.

Se repite éste paso para las otras dos restricciones.
La condición de no negatividad hay que incluirla manualmente, así:

El cuadro de diálogo debe quedar así:

Se hace clic en resolver . Parece un poco largo en comparación con los otros paquetes de programación lineal, pero esto se hará sólo una vez, para los próximos programas se podrá utilizar la misma hoja cambiando los coeficientes. Sin embargo, como se puede notar, la flexibilidad de modelar es muy grande, y se puede introducir *directamente* en una hoja donde se haga el análisis de Planeación Agregada, Transporte, Inventario, Secuencias, balance de líneas, etc.

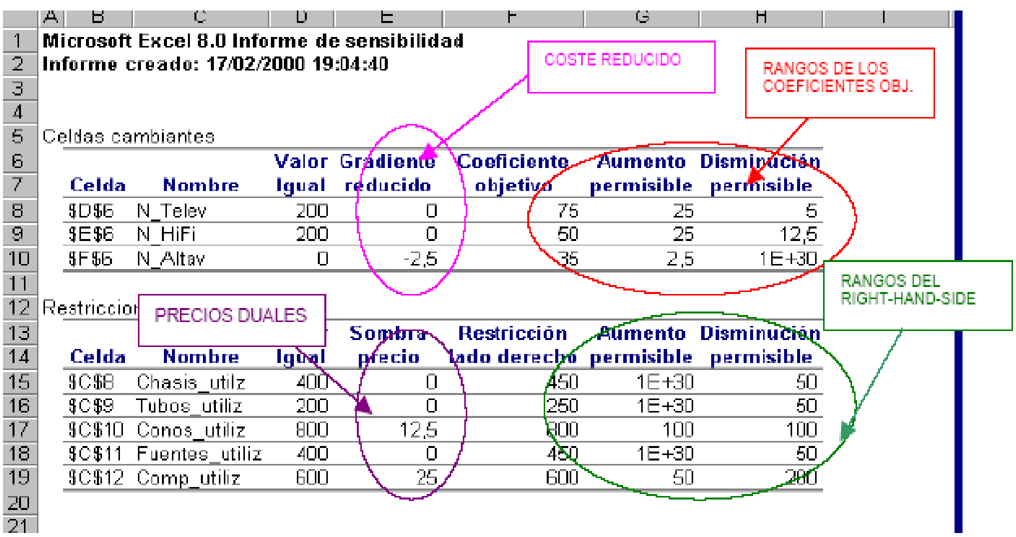
	A	B	C	D	E	F
1	**Ejemplo para la Programación Lineal Continua:**					
2						
3	**Función O.**	39				
4		10	8			
5		**X1**	**X2**			
6		1.5	3		RHS	Valor Actual
7	**R1**	30	20	<=	120	105
8	**R2**	2	2	<=	9	9
9	**R3**	4	6	<=	24	24

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD CON EL SOLVER : MEZCLA DE PRODUCCION

A la hora de resolver un problema de programación lineal el SOLVER también nos proporciona un análisis de sensibilidad donde se observa bajo qué condiciones la solución óptima obtenida continuaría siendo óptima ante cambios en el modelo, ya sea en los coeficientes de la función objetivo como en los parámetros de las restricciones (habitualmente asociados a recursos).
Consideremos el siguiente problema: Una compañía fabrica televisores, equipos de audio HIFI y altavoces utilizando una serie de componentes como se indica en la siguiente tabla:

	TV	HI FI	Altavoz	Disponib.
Chasis	1	1	0	450
Tubo de imágenes	1	0	0	250
Conos altavoz	2	2	1	800
Fuente de alimentación	1	1	0	450
Componentes electrónicos	2	1	1	600

Estos componentes están disponibles en cantidades limitadas, por lo que se trata de plantear el problema de maximización restringida de beneficios sabiendo que la contribución neta de los tres productos es de 75, 50 y 35 pesos respectivamente.
Una vez planteado el ejercicio obtenemos el siguiente análisis de sensibilidad:



Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$D$6	N_Telev	200	0	75	25	5
$E$6	N_HiFi	200	0	50	25	12,5
$F$6	N_Altav	0	-2,5	35	2,5	1E+30

Restriccion

Celda	Nombre	Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	Chasis_utilz	400	0	450	1E+30	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	0	250	1E+30	50
$C$10	Conos_utiliz	800	12,5	800	100	100
$C$11	Fuentes_utiliz	400	0	450	1E+30	50
$C$12	Comp_utiliz	600	25	600	50	200

La explicación de cada uno de los elementos de la tabla es la siguiente:

Celdas cambiantes:

- **Valor igual**: Se trata de la solución óptima obtenida a partir de los datos introducidos.
- **Gradiente reducido**: también llamado coste reducido o de oportunidad. Las variables que están en la base tienen un gradiente igual a cero, mientras que las que no están lo tiene negativo (aumentar esa variable en una unidad supondría una pérdida de exactamente lo que marca el valor del gradiente), es decir, nos indica aquellas variables que no son rentables. En este caso no es rentable producir altavoces, a menos que su beneficio aumente en 2.5 pesos.
- **Coeficiente objetivo**: son los coeficientes de la función objetivo, en este caso los precios de cada artículo.
- **Aumento-disminución permisible**: Indica cuánto podríamos aumentar (disminuir) el coeficiente de la función objetivo relativo a dicha variable sin que varíe la solución óptima. En este caso, la solución no variaría si el precio del TV se mueve entre 70 y 100 pesos, el de los equipos HIFI entre 37.5 y 75 pesos o el de los altavoces no sobrepase los 37.5 pesos.

Restricciones:

- **Valor igual**: Nos indica la cantidad de recurso que se ha utilizado en el proceso productivo.
- **Precio sombra**: (soluciones del problema dual) Es el cambio marginal en la función objetivo si se modifica el parámetro de una restricción en una unidad. En este caso, estaríamos dispuestos a pagar hasta 12.5 pesos por cada unidad adicional de conos y 25 pesos por cada componente eléctrica.
- **Restricción lado derecho**: Son límites de las restricciones.
- **Aumento-disminución permisible**: Indica cuanto se puede aumentar disminuir el recurso disponible sin que se modifique la solución óptima. En nuestro caso estaríamos dispuestos a pagar 12.5 pesos por cada cono hasta un máximo de 100 conos y 25 pesos por cada componente hasta un máximo de 50. También podríamos decir que estaríamos dispuestos a perder 25 pesos por cada componente hasta un máximo de 200 unidades.

Recordemos:

***EL PRECIO SOMBRA de una restricción de un PPL(problema de programación lineal) es la cantidad en que mejoraría (Aumentaría si la F.O. es Max o disminuiría si la F.O. es Min) el valor óptimo de la función objetivo, cuando el término libre de la restricción es aumentado en una unidad*.** (En forma contraria, si se disminuye en una unidad el término libre de la restricción, el valor óptimo de la función objetivo empeorará en una cantidad igual al precio sombra).

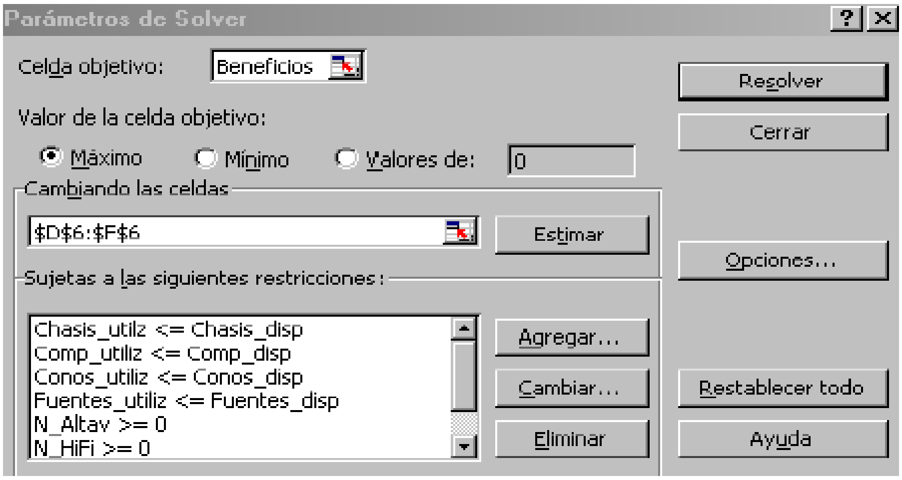
Signos de los Dual Prices (Precios Sombra)

El precio sombra de una restricción del tipo ≥ será siempre negativo o cero, el de una restricción ≤ será positivo o cero y el de una restricción que es igualdad podrá tener cualquier valor, negativo, positivo o cero, es decir, irrestricta en signo. Esto aplica tanto para un PPL de maximización como de minimización. Para ilustrar esta realidad, observe que si se agregan puntos a la zona de soluciones factibles de un PPL, hecho que ocurre cuando se aumenta el término libre de una restricción ≤, su efecto es que el valor óptimo de la función objetivo mejora o queda igual y al quitar puntos a la zona, si se aumenta el término libre de una restricción ≥, el óptimo empeora o queda igual.

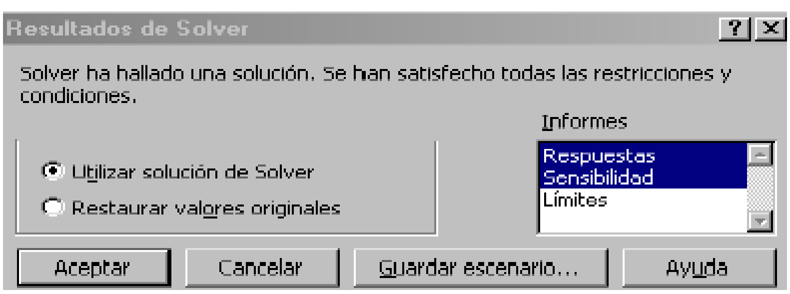
Rango de validez de los precios sombra

El precio sombra de una restricción es válido dentro un rango de variación específico de su término libre. Este rango se puede calcular con los antecedentes que se entregan en el análisis de sensibilidad del resultado óptimo, en la parte denominada ***"Righthand side ranges"*** (Rangos del lado derecho, es decir, de los términos libres de las restricciones). Para cada término libre se indica su valor actual, la cantidad en que éste puede ser aumentado (Allowable increase) y la cantidad en que éste puede ser disminuido (Allowable decrease). El mejoramiento o empeoramiento del valor óptimo de la función objetivo será directamente proporcional a su precio sombra por la cantidad en que varíe el término libre de la restricción, siempre y cuando ésta variación mantenga el valor de éste último dentro del rango de validez antes calculado.

	A	B	C	D	E	F
1		Determinación de las cantidades a producir				
2						
3						
4						
5				Televisores	Hi-Fi	Altavoces
6				100	100	100
7		Disponibles	Uitlizados			
8	Chasis	450	200	1	1	0
9	Tubo imágenes	250	100	1	0	0
10	Cono altavoz	800	500	2	2	1
11	Fuente alimentación	450	200	1	1	0
12	Componentes elec.	600	400	2	1	1
13						
14		Beneficios por producto		75	50	35
15		Beneficios Totales		16.000		
16						


Parámetros de Solver
Celda objetivo:
Beneficios
Valor de la celda objetivo:
Máximo
Mínimo
Valores de:
0
Cambiando las celdas
$D$6:$F$6
Estimar
Sujetas a las siguientes restricciones:
Chasis_utilz <= Chasis_disp
Comp_utiliz <= Comp_disp
Conos_utiliz <= Conos_disp
Fuentes_utiliz <= Fuentes_disp
N_Altav >= 0
N_HiFi >= 0
Agregar...
Cambiar...
Eliminar
Resolver
Cerrar
Opciones...
Restablecer todo
Ayuda


Opciones de Solver
Tiempo:
100
segundos
Iteraciones:
100
Precisión:
0,000001
Tolerancia:
5
%
Convergencia:
0,001
Aceptar
Cancelar
Cargar modelo...
Guardar modelo...
Ayuda
Adoptar modelo lineal
Usar escala automática
Asumir no negativos
Mostrar resultado de iteraciones
Estimación
Lineal
Cuadrática
Derivadas
Progresivas
Centrales
Hallar por
Newton
Gradiente conjugado


Resultados de Solver
Solver ha hallado una solución. Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones.
Informes
Respuestas
Sensibilidad
Límites
Utilizar solución de Solver
Restaurar valores originales
Aceptar
Cancelar
Guardar escenario...
Ayuda

Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$15	Beneficios	16.000	25.000

VALOR ÓPTIMO DE LA FUNCIÓN OBJ.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$6	N_Telev	100	200
$E$6	N_HiFi	100	200
$F$6	N_Altav	100	0

SOLUCIÓN ÓPTIMA

CARÉNCIA O EXCEDENTE (SLACK OR SURPLUS)

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$C$8	Chasis_utilz	400	$C$8<=$B$8	Opcional	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	$C$9<=$B$9	Opcional	50
$C$10	Conos_utiliz	800	$C$10<=$B$10	Obligatorio	0
$C$11	Fuentes_utiliz	400	$C$11<=$B$11	Opcional	50
$C$12	Comp_utiliz	600	$C$12<=$B$12	Obligatorio	0
$D$6	N_Telev	200	$D$6>=0	Opcional	200
$F$6	N_Altav	0	$F$6>=0	Obligatorio	0
$E$6	N_HiFi	200	$E$6>=0	Opcional	200

Tomaremos otro ejemplo de aplicación en el Solver :Consideremos el siguiente problema:

Max $2x+3y$

s.a.:
$2x+4y \leq 12,5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Para poder resolverlo con Excel hemos de comenzar por establecer unas celdas para el valor de las variables, la función objetivo y el de las restricciones. Vamos a considerar que la variable x la ubicamos en la celda B7 y la y en la B8. Habitualmente le damos un valor inicial a las variables por comodidad para saber la celda en la que las hemos situado. Consideremos por ejemplo que les damos a ambas el valor de 1 (no es necesario que sea un valor factible del problema lineal). Para que la pantalla resulte fácilmente comprensible, introducimos el texto "x=" en la celda A7 e "y=" en la A8.

Fíjese que estas expresiones no van precedidas del símbolo "=" y son meros textos que nosotros vemos pero el motor de cálculo ignora.

El valor de la función objetivo es sencillamente una celda calculada en la que pondremos su expresión. Así, en la celda B4 hemos introducido “=2*B7+3*B8”. Al igual que con las variables, podemos poner en la celda contigua A4 el texto “z=” que nos ayude a identificar el valor de B4.

Finalmente, para introducir las restricciones necesitamos dos celdas por cada una de ellas; una para la expresión y otra para el término de la derecha (RHS). Con el fin de tener una presentación comprensible del problema, vamos a añadir una celda entre ambas con el símbolo **“<=”, “>=” o “=”** según corresponda.
Realmente no es aquí donde le definimos al Solver el tipo de restricción, y sólo hacemos esto para hacer más inteligible la ventana de datos. Así, la restricción $2x+4y \leq 12{,}5$ la introducimos poniendo en la celda B12 “=2*B7+4*B8”, en la celda D12 “12,5” y para visualizar el tipo de restricción, introducimos en la celda C12 la expresión “<=”. Además, en las celdas A12, A13 y A14 hemos introducido un nombre para cada restricción y también hemos puesto la leyenda para la “Función objetivo”, “Variables” y “Restricciones”, coloreando las celdas correspondientes.

La figura 1 muestra la ventana de datos completa con todos los elementos del problema.
Note que Excel no asume la no negatividad de las variables y debemos ponerle explícitamente la restricción “mayor o igual que 0” cuando corresponda.
Hasta ahora únicamente hemos introducido una serie de datos y expresiones en la ventana de Excel. Veamos a continuación cómo definir en el solver el modelo lineal a partir de estos datos. Comenzamos por seleccionar la opción *Solver* dentro del menú *Herramientas*, obteniendo la ventana de la figura 2.

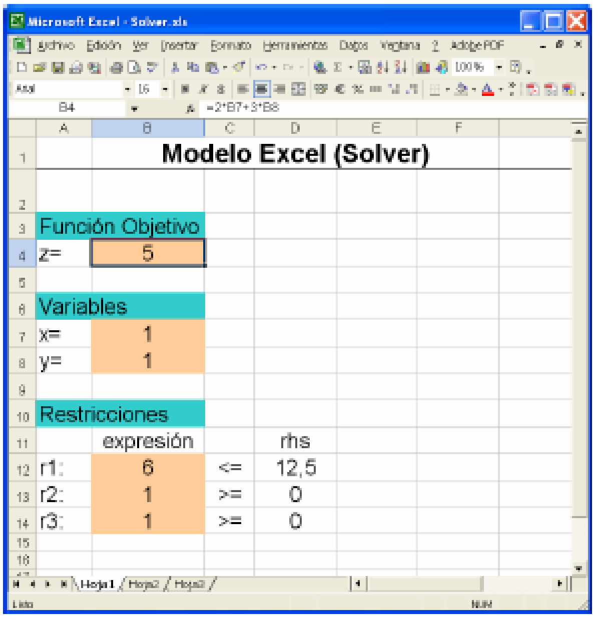


Figura 1. Ventana de datos

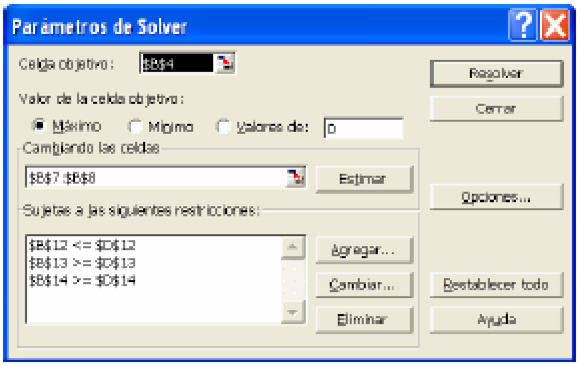


Figura 2. Definición del PL

En esta ventana tenemos que definir todos los elementos del problema de programación lineal según:

Definir celda objetivo

Especifica la celda objetivo que se desea definir con un valor determinado o que se desea maximizar o minimizar. La celda debe contener una fórmula. En nuestro caso B4. Podemos teclear la referencia de la celda o pulsar con el ratón el cuadrado con la flecha de la derecha y seleccionar la celda correspondiente en la ventana auxiliar que aparece.

Valor de la celda objetivo

Especifica si se desea maximizar o minimizar la celda objetivo, o bien definirla con un valor específico. Si desea encontrar una solución posible del problema cuyo valor sea un número específico, introdúzcalo en el cuadro.

Cambiando las celdas

Especifica las celdas que pueden ajustarse, separadas por el símbolo ";", hasta que se satisfagan las restricciones en el problema; es decir las variables del problema. Al igual que en la primera opción, podemos poner directamente el rango de las celdas (separado por dos puntos si son celdas contiguas), o utilizar el cuadrado pequeño de la derecha para hacer la selección con el ratón.

Sujeto a las siguientes restricciones

Muestra una lista de las restricciones actuales en el problema. Para añadir una nueva, pulsamos el cuadro Agregar y en la ventana auxiliar que aparece seleccionamos la expresión de la restricción, el tipo de ésta y el RHS. Note que en el tipo de restricción podríamos seleccionar también si una variable o expresión tiene que ser entera o binaria.

Una vez introducidas las tres restricciones (incluyendo las dos de no negatividad), pulsamos el cuadro “resolver” y aparece una ventana auxiliar y al pulsar *Aceptar* vemos sobre la formulación original cómo ha cambiado el valor de las celdas que habíamos definido, y ahora muestran la solución óptima del problema.

Si cambiamos la restricción primera de menor o igual a mayor igual, tendremos un problema que es no acotado. Al resolverlo podemos ver como el solver asigna valores muy grandes a las variables, aunque no dice explícitamente que el problema es no acotado. Comprobarlo en el ejemplo.

Si el problema es imposible, al pulsar “resolver”, en la ventana auxiliar nos indica que no ha encontrado una solución válida. Añadir la restricción $x \leq -1$ en el problema original y resolverlo.

OPCIONES AVANZADAS DE SOLVER

Podemos especificar una serie de opciones avanzadas para resolver el modelo. En la ventana del solver, al pulsar la casilla opciones aparece la ventana de la figura 3.

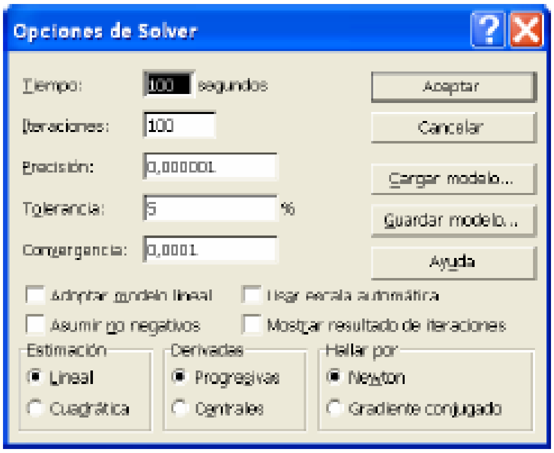


Figura 3. Opciones avanzadas de resolución

Pueden controlarse las características avanzadas del proceso de solución, cargarse o guardarse definiciones de problemas y definirse parámetros para los problemas lineales, enteros o no lineales. La opción Tolerancia sólo se aplica a problemas con restricciones enteras, la Convergencia y los tres recuadros inferiores a los no lineales. La opción “Mostrar resultado de iteraciones” proporciona las soluciones intermedias en el proceso de resolución. Sin embargo, Excel no utiliza el método Simplex sino que adapta un método no lineal general para resolver los problemas lineales, por ello no utilizaremos esta opción. A continuación detallamos las opciones que sí son de interés para nosotros.

Asumir no-negativo

Hace que Solver suponga un límite de 0 (cero) para todas las celdas ajustables en las que no se haya definido un límite inferior en el cuadro **Restricción** del cuadro de diálogo **Agregar restricción**.

Tiempo máximo

Limita el tiempo que tarda el proceso de solución. Puede introducirse un valor tan grande como 32.367, pero el valor predeterminado 100 (segundos) es adecuado para la mayor parte de los problemas.

Iteraciones

Limita el tiempo que tarda el proceso de solución, limitando el número de cálculos provisionales. Aunque puede introducirse un valor tan grande como 32.367, el valor predeterminado 100 es adecuado para la mayor parte de los problemas pequeños.

Precisión

Controla la precisión de las soluciones utilizando el número que se introduce para averiguar si el valor de una restricción cumple un objetivo o satisface un límite inferior o superior. Debe indicarse la precisión mediante una fracción entre 0 (cero) y 1. Cuantas más posiciones decimales tenga el número que se escriba, mayor será la precisión; por ejemplo, 0,0001 indica una precisión mayor que 0,01.

Usar escala automática

Selecciónelo para que Excel modifique internamente los valores cuando haya grandes diferencias de magnitud entre las entradas y los resultados; por ejemplo, cuando se maximiza el porcentaje de beneficios basándose en inversiones de millones de dólares.

Respuesta. Muestra una lista con la celda objetivo y las celdas ajustables con sus valores originales y sus valores finales, las restricciones y la información acerca de las mismas. Las restricciones aparecen etiquetadas como “obligatorias”, si son activas en la solución obtenida, o “Opcional” si no son activas. Para estas últimas nos da la holgura entre el valor de la expresión en la solución actual y el RHS.

Sensibilidad. Facilita información acerca de la sensibilidad de la solución a que se realicen pequeños cambios del valor de las variables o de las restricciones. En modelos no lineales, el informe facilita los valores para las gradientes y los multiplicadores de Lagrange. En los modelos lineales, el informe incluye los costes reducidos de las variables (Gradiente reducido) y el valor de las variables duales (Multiplicador de Lagrange).

APLICACIÓN: Eliminar las restricciones de no negatividad del modelo y seleccionar la opción avanzada “Asumir no negativos”. Volver a resolver el ejercicio comprobando que la solución es la misma.

En general, al resolver el problema, en la ventana que aparece podemos pedirle tres tipos de informes: respuestas, sensibilidad y límites. Este último tiene poco interés pues nos dice para cada variable los valores que puede tomar para obtener una solución posible, manteniendo el valor de las restantes fijo e igual al de la solución obtenida.

APLICACION

Resolver el siguiente problema, obteniendo y comentando los informes de respuesta y sensibilidad:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } -2x+y-z \\
&\text{s.a.:} \\
&\quad x + y+z \leq 6 \\
&\quad -x +2y \leq 4 \\
&\quad x,\ y,\ z \geq 0
\end{aligned}
$$

INFORME RESPUESTA

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$2	z	0	-12

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	x1	0	6
$B$5	x2	0	0
$B$6	x3	0	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$B$8	r1	6	$B$8<=$C$8	Obligatorio	0
$B$9	r2	-6	$B$9<=$C$9	Opcional	10

INFORME DE SENSIBILIDAD

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido
$B$4	x1	6	0
$B$5	x2	0	3
$B$6	x3	0	1

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
$B$8	r1	6	-2
$B$9	r2	-6	0

MODELOS Y USO DE FUNCIONES DEL EXCEL

EL PUNTO DE EQUILIBRIO

A modo de introducción realizaremos un sencillo ejemplo con un modelo bastante conocido por los estudiantes de Ciencias Económicas: **el punto de Equilibrio** y lo plantearemos en un software de uso común como el Microsoft Excel.

Para esto elegimos un artículo de Marcelo C. Perisse del e-journal Ciencia y Técnica Administrativa de su biblioteca digital sita en www.cyta.com.ar que consideramos sumamente ilustrativo de esta aplicación. La versión en planilla Excel está disponible en la página de la cátedra en el campus Virtual de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNMP.

El caso de aplicación es un modelo sencillo que ya conoce el alumno de asignaturas anteriores: el punto de equilibrio
Se deja la aclaración que los pasos de este ejemplo de Perisse son de aplicación a este proceso en Excel y no una metodología para modelar, la cual fue explicada en el inicio. En este capitulo pretendemos familiarizarnos con el uso de las funciones de MS Excel.

1 DEFINIR LA OPERACIÓN A REALIZAR

Es importante determinar claramente cuál es el objetivo que buscamos alcanzar, dado que sobre él vamos a planificar, construir, y controlar nuestro sistema.
Se va a realizar una operación de punto de equilibrio y en la cual, dada una estructura de Costos e Ingresos determinada, se busca determinar cuál es nivel de actividad necesario en el que se iguala El Ingreso Total con el Costo Total

2 DEFINIR EL MODELO

Debemos formular el modelo que represente al hecho en estudio, como así también las acciones: que él puede realizar, o que se pueden realizar sobre él.

3 IDENTIFICAR LOS DATOS

En nuestro caso sería identificar: la Cantidad, el Precio de Venta unitario, Costo Fijo y el Costo Variable

$$IT = P \times Q$$

$$CT = CF + (CV \times Q)$$

IT=Ingreso Total;
P=Precio de Venta;
C=Cantidad;
CT=Costo Total;
CF=Costo Fijo;
CV=Costo Variable;
Q=Cantidad

$$Pe_{(u)} = \frac{CF}{(PV - CV)}$$

$$Pe_{(\$)} = \frac{CF}{1 - (CV / PV)}$$

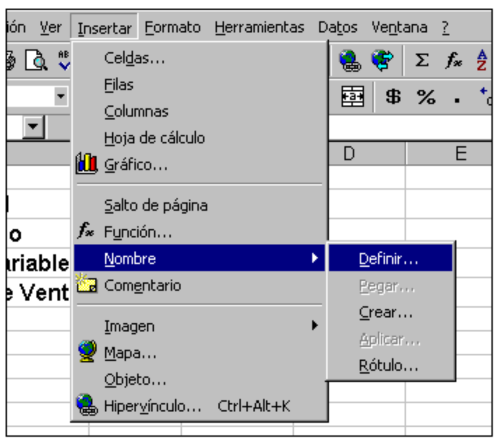
$Pe_{(u)}$=Punto de equilibrio en unidades

$Pe_{(\$)}$=Punto de equilibrio en pesos

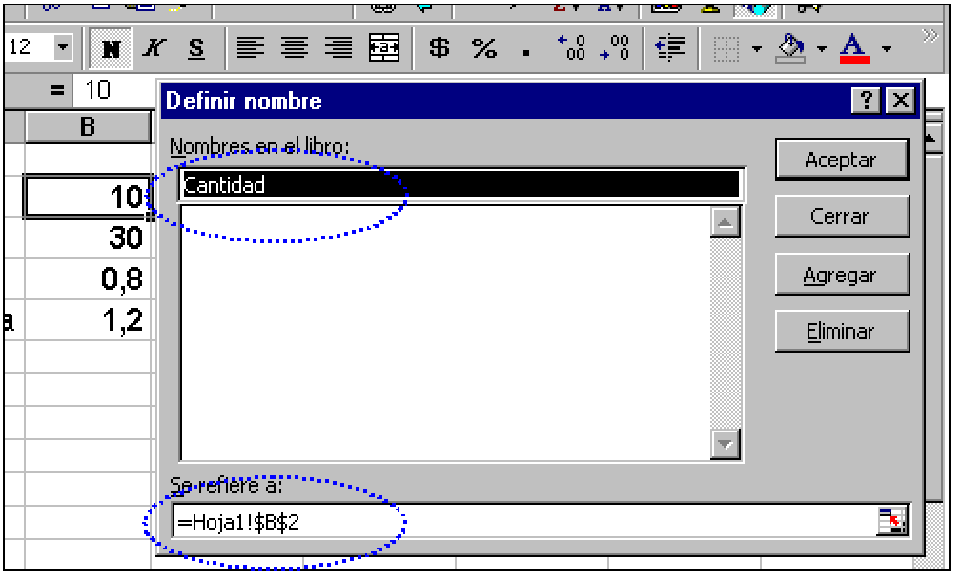
4 PREPARAR LOS DATOS

Los datos a ser procesados, precisan de algunos atributos como ser: ubicación y forma; por esta razón se los define, a cada uno de ellos, con un nombre determinado.
Este proceso, permite una mejor documentación y control del modelo; no será lo mismo verificar una operación identificada como A1 * B1, que una identificada como Precio * Cantidad.

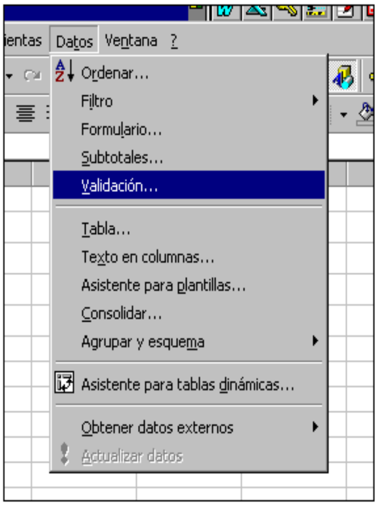
- **Cantidad 10**
- **Costo Fijo 30**
- **Costo Variable 0,8**
- **Precio de Venta 1,2**

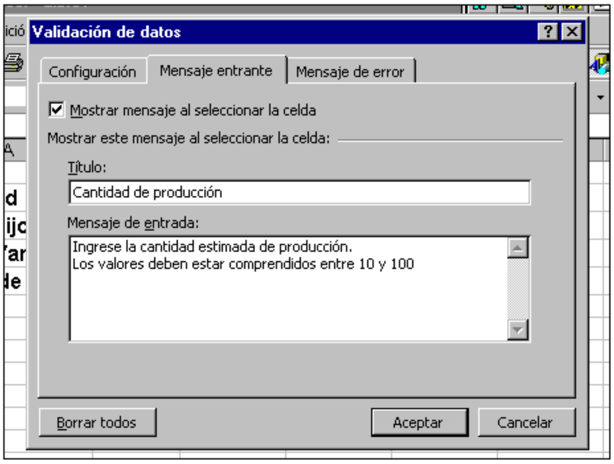


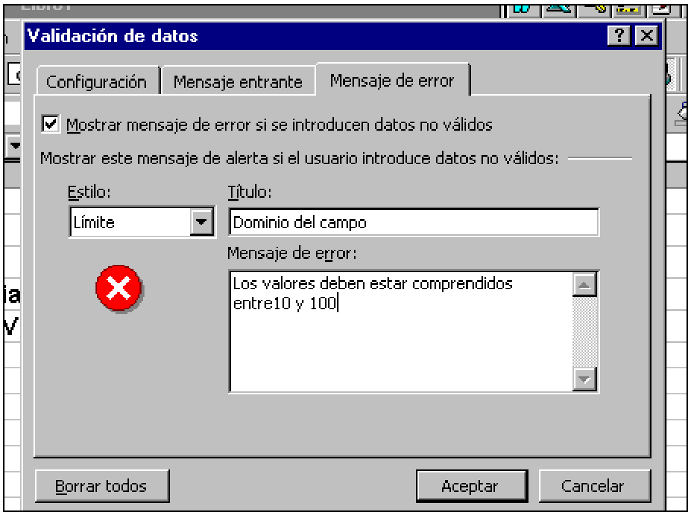
Lo primero que debemos hacer es definirle un nombre, a cada uno de los campos en los que se encuentran los datos, un nombre



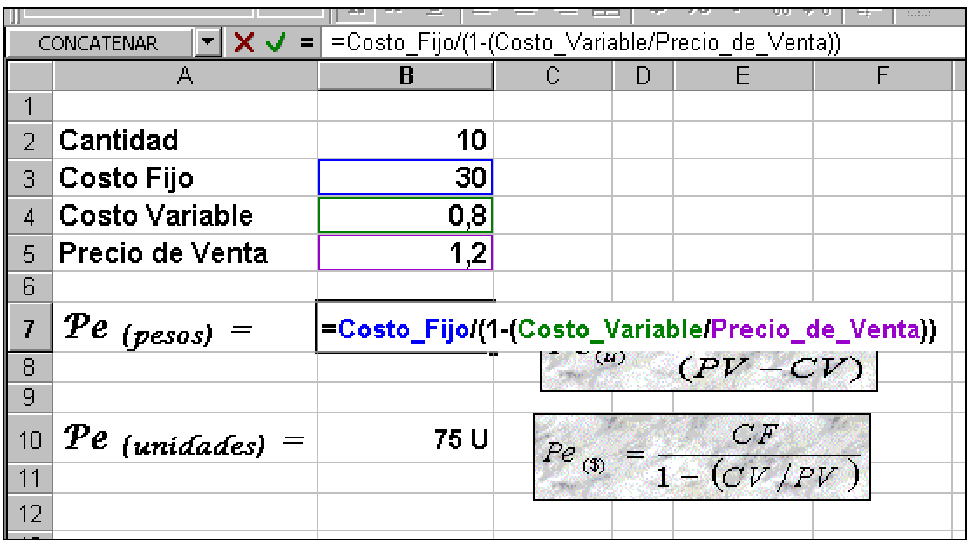
Luego debe definirse el dominio de los atributos, estos pueden definirse en forma extensiva o en forma intensiva, esto facilitará la selección del método de entrada (barras de desplazamiento, lista de selección u otros)

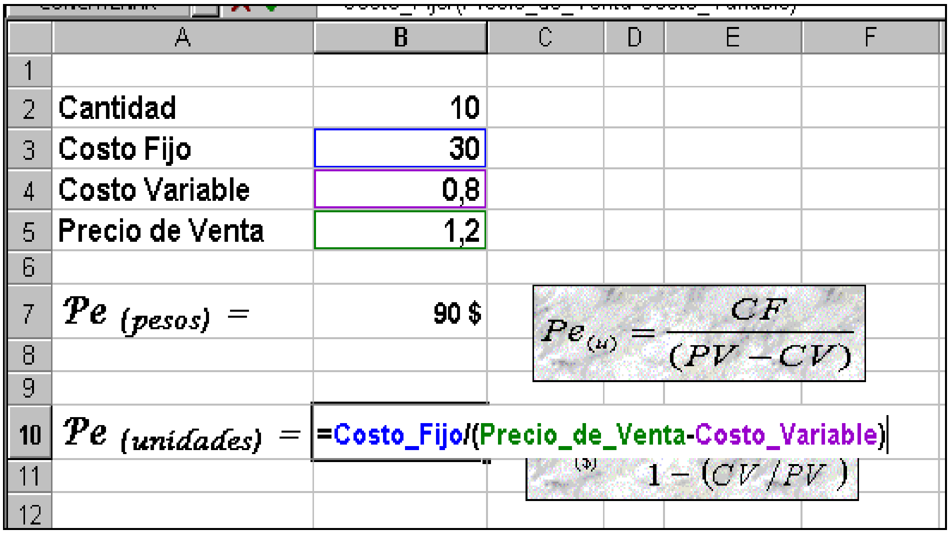


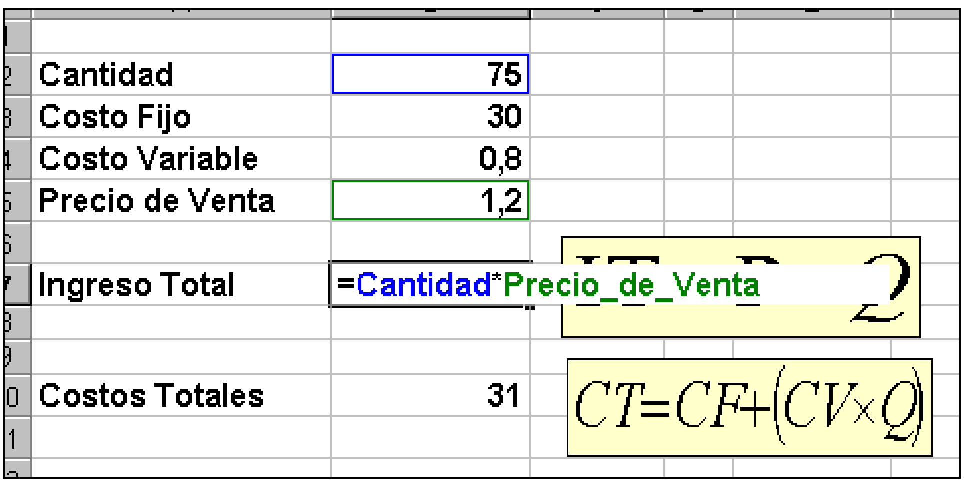


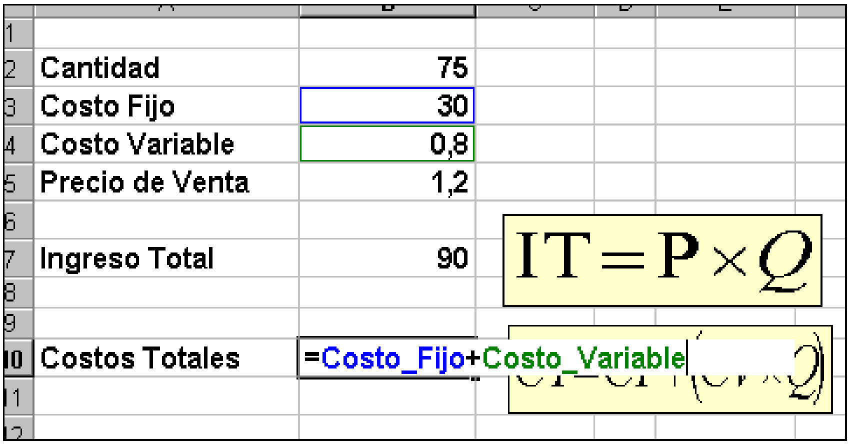


5 REALIZAR LA OPERACIÓN




A
B
C
D
E
F
Cantidad
10
Costo Fijo
30
Costo Variable
0,8
Precio de Venta
1,2
Pe (pesos) =
90 $
$Pe_{(u)} = \frac{CF}{(PV - CV)}$
Pe (unidades) =
=Costo_Fijo/(Precio_de_Venta-Costo_Variable)
$1 - (CV / PV)$

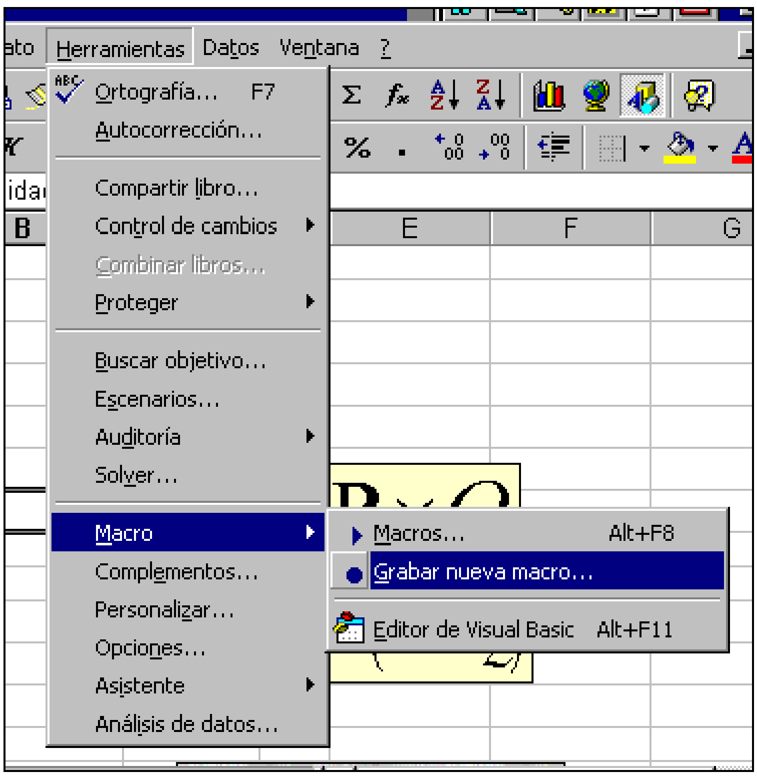

Cantidad
75
Costo Fijo
30
Costo Variable
0,8
Precio de Venta
1,2
Ingreso Total
=Cantidad*Precio_de_Venta
Costos Totales
31
$CT = CF + (CV \times Q)$



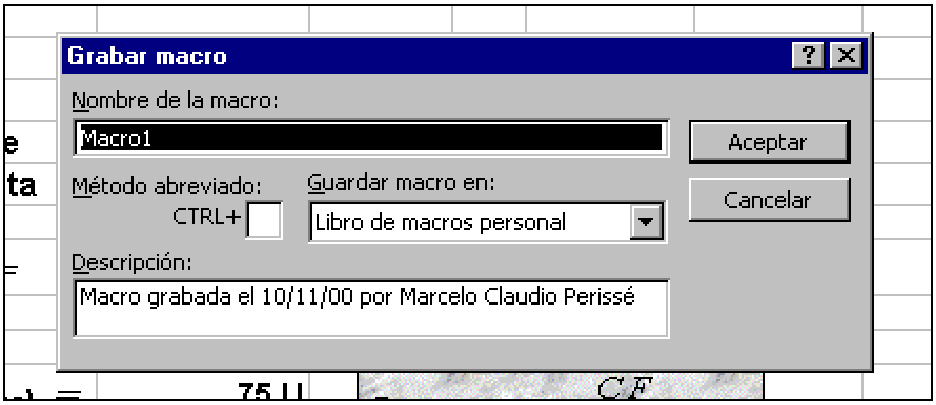
6 ESTANDARIZAR – USO DE MACROS

Para proteger la operación que realizamos y facilitar su posterior ejecución; creamos un objeto para luego asignarle (a este objeto) una macro que contenga la operación.

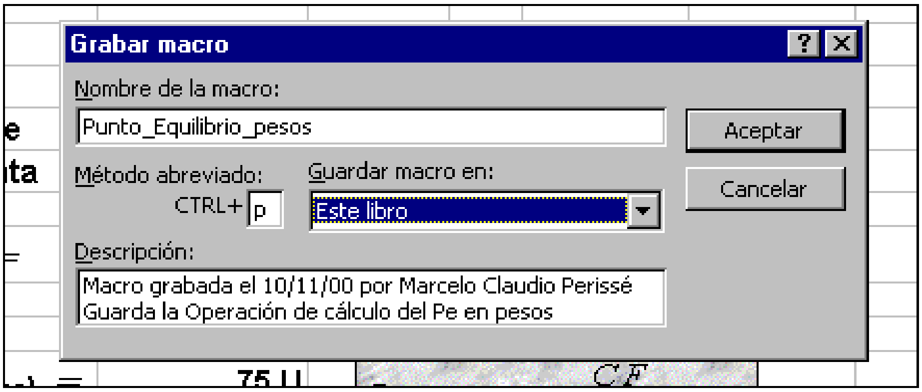
Primero vamos a ejecutar el procedimiento para grabar una macro:



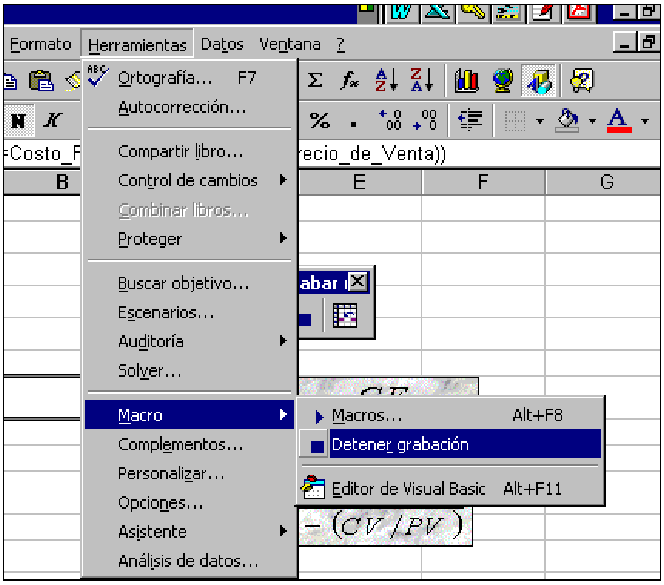
Cada macro debe llevar un nombre que la identifique del resto.



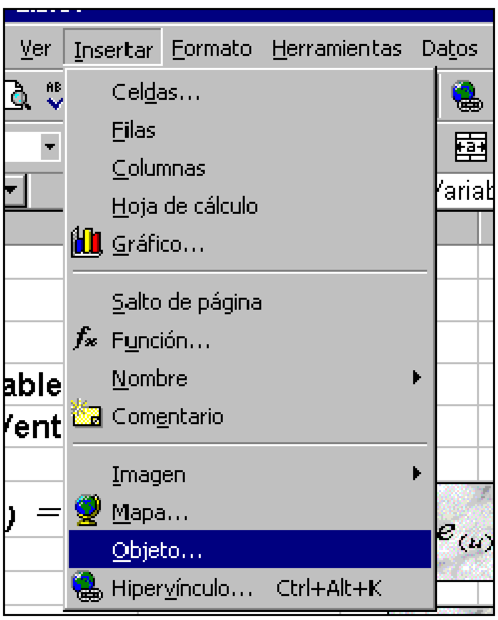
Asignarle la respectiva descripción, nos permitirá tener un menor grado de incertidumbre al momento de querer identificarla.

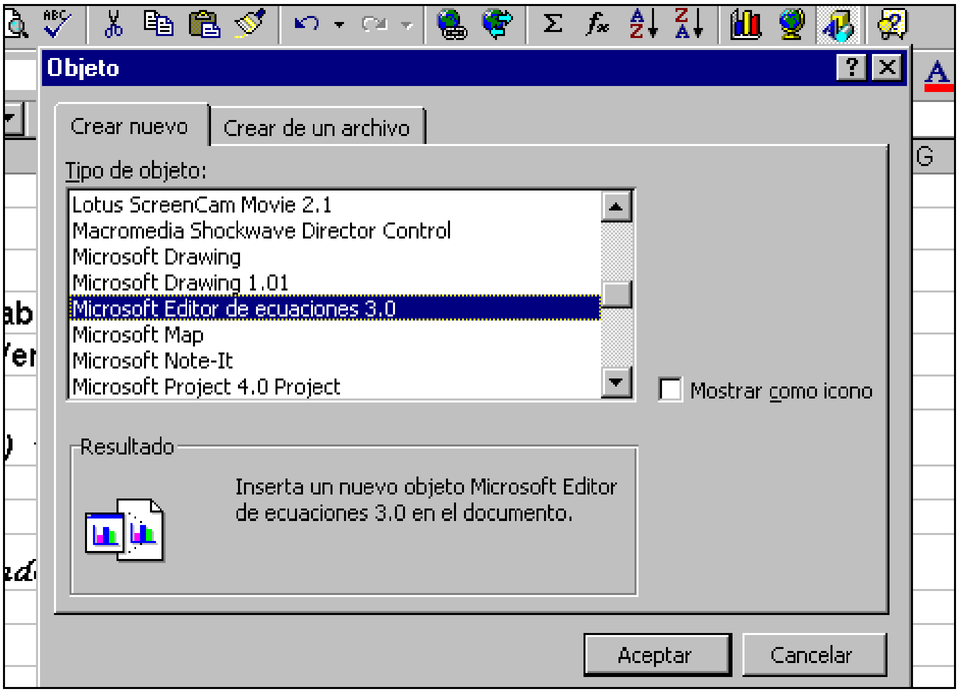


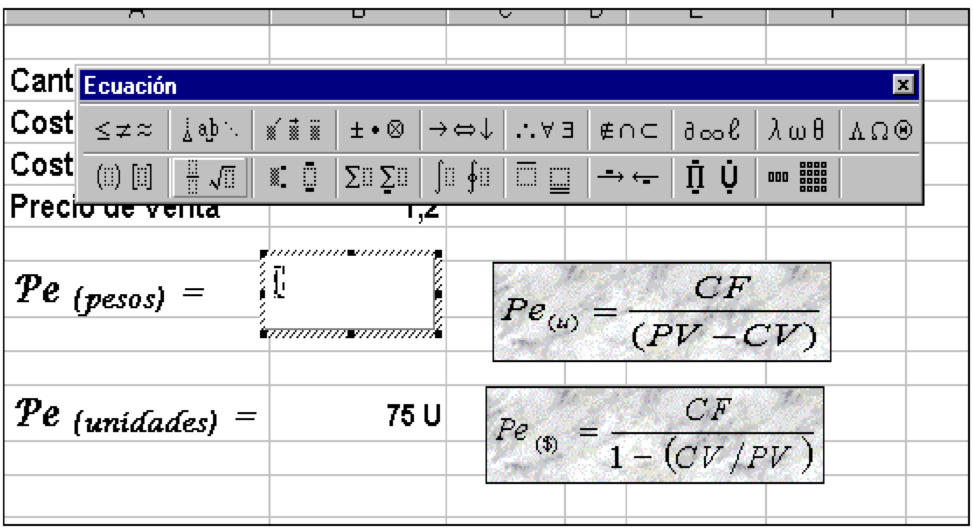
Activada la Grabación, se repite el proceso de realizar la operación tal cual lo desarrollado en el paso 5 y cumplimentado el mismo inmediatamente se detiene la grabación

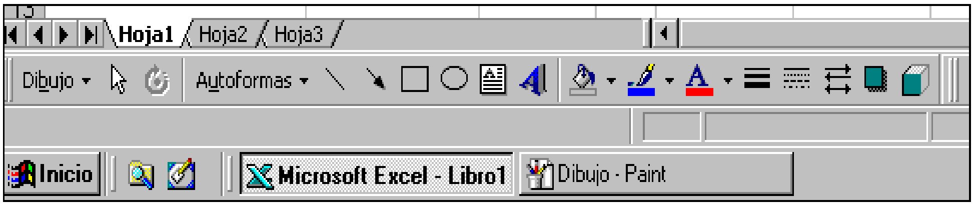


Aquí debemos diseñar los objetos que posteriormente asociaremos a su respectiva macro. Podemos utilizar el editor de ecuaciones; en caso de ser necesario cualquier diseño puede convertirse en un objeto.

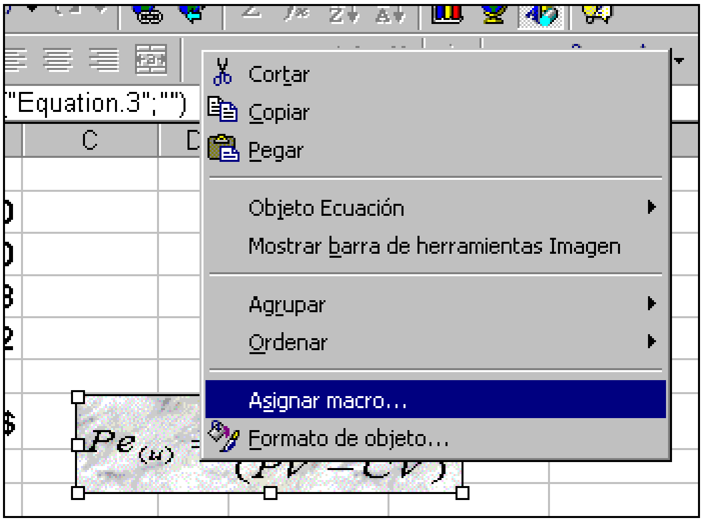



Objeto
Crear nuevo
Crear de un archivo
Tipo de objeto:
Lotus ScreenCam Movie 2.1
Macromedia Shockwave Director Control
Microsoft Drawing
Microsoft Drawing 1.01
Microsoft Editor de ecuaciones 3.0
Microsoft Map
Microsoft Note-It
Microsoft Project 4.0 Project
Mostrar como icono
Resultado
Inserta un nuevo objeto Microsoft Editor de ecuaciones 3.0 en el documento.
Aceptar
Cancelar

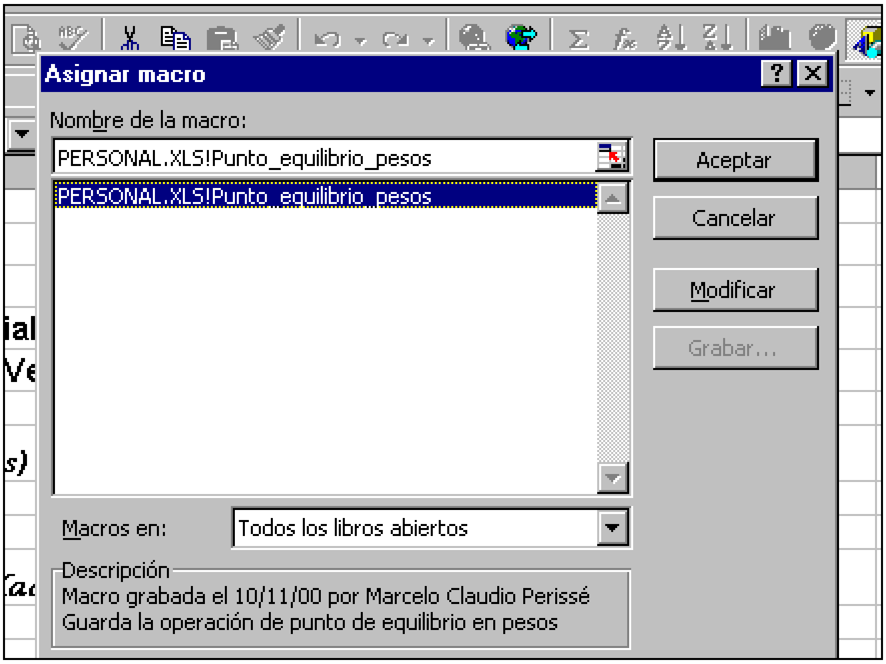

Ecuación
Cant
Cost
Cost
Precio de venta
1,2
Pe (pesos) =
Pe (unidades) =
75 U
$Pe_{(u)} = \frac{CF}{(PV - CV)}$
$Pe_{(\$)} = \frac{CF}{1 - (CV / PV)}$



Terminado el diseño, se selecciona del objeto, y picando con el botón derecho del Mouse, seleccionar el comando de a Asignar macro.



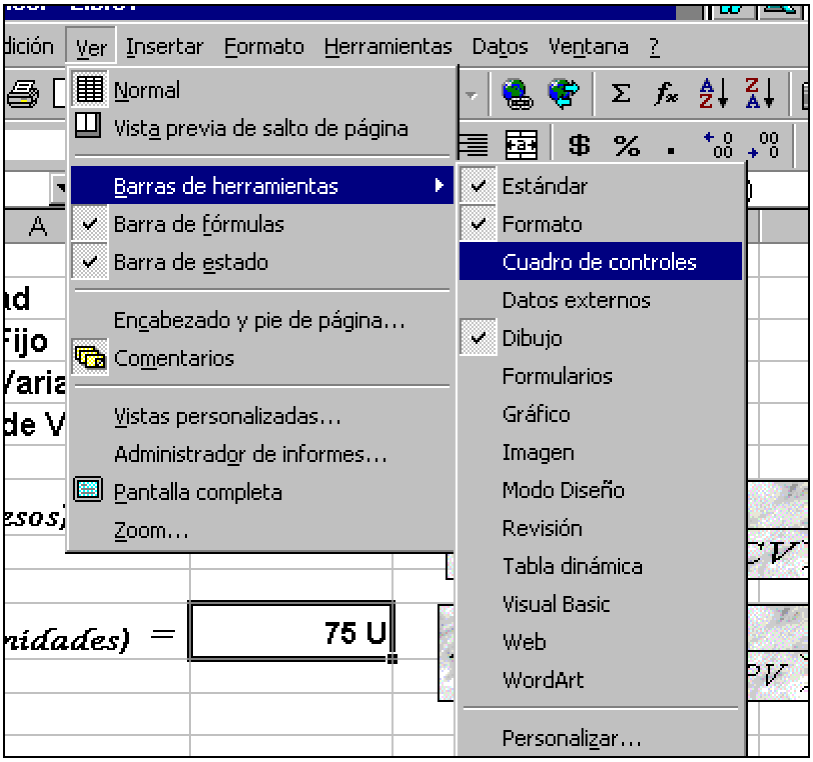
Se selecciona de la lista de macros aquella que contendrá el objeto y se acepta la asignación.



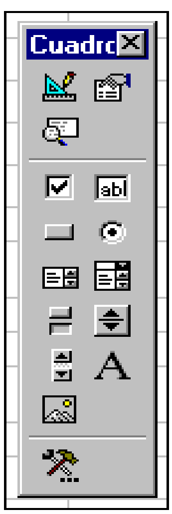
7 VALIDAR LAS FORMAS DE ENTRADA

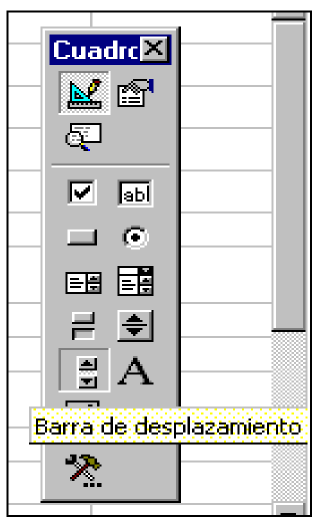
Una buena definición de las formas de entrada nos permitirá proteger los datos, modelar más rápidamente escenarios y por lo tanto lograremos una mayor eficiencia y eficacia en la obtención de la información.

Una alternativa es el manejo de los controles; para el método de ingreso de datos

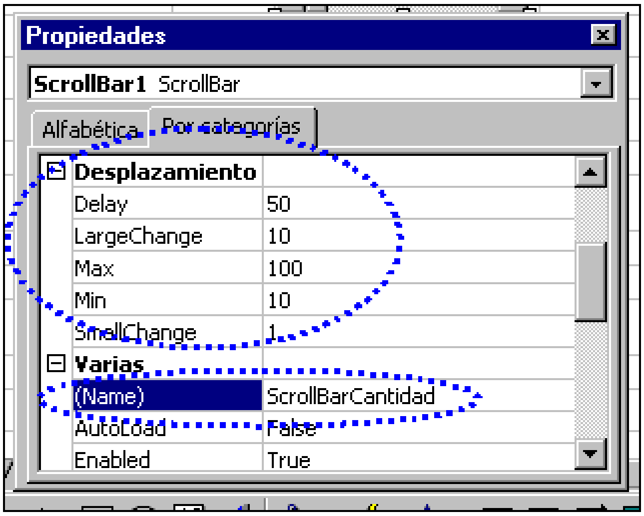


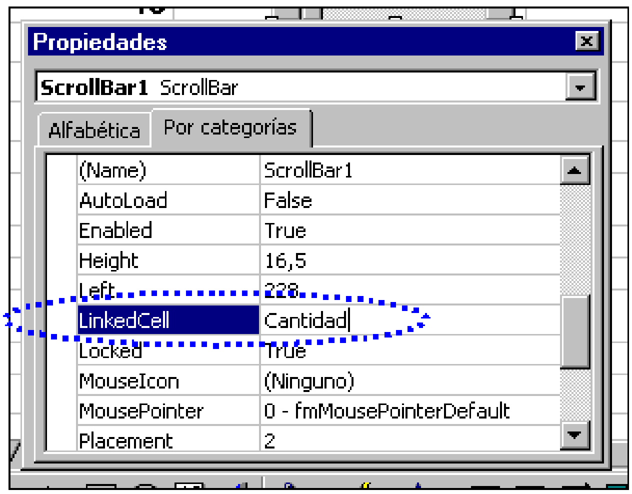
Activado el cuadro de controles, se selecciona el control y se le asignan las propiedades correspondientes al mismo, activando los respectivos botones.





Los valores principales de las propiedades de estos objetos serán: Sus propiedades de desplazamiento; su nombre; y la celda en la cual actúa.



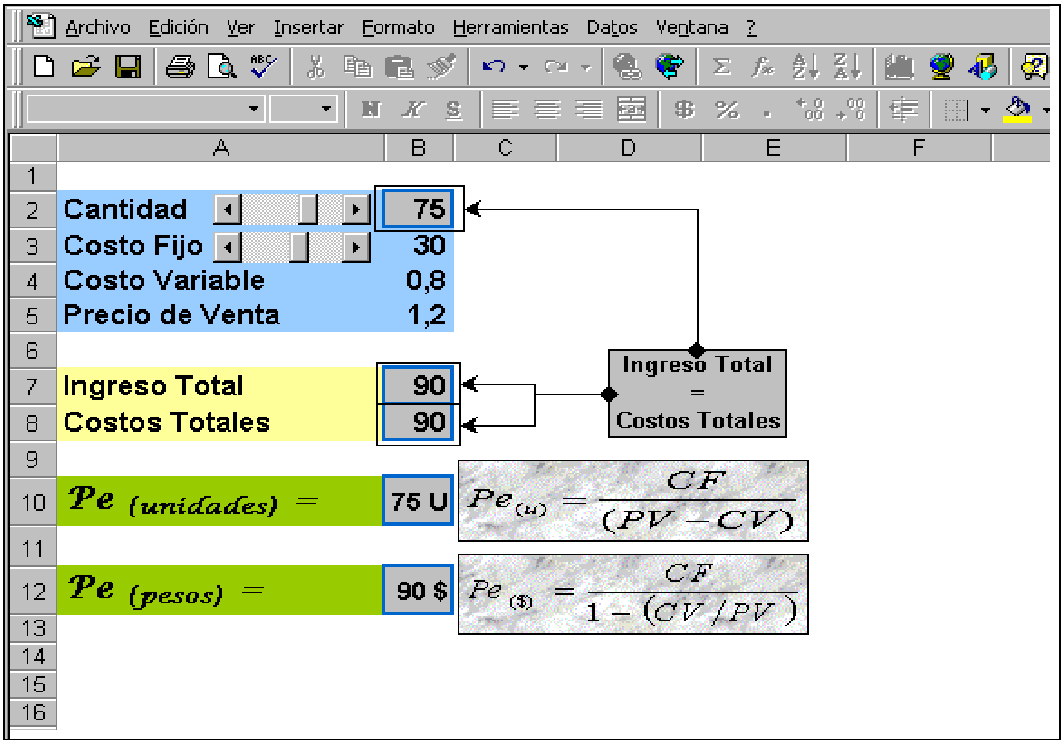


Para salir de área de diseño debemos picar en el botón correspondiente.

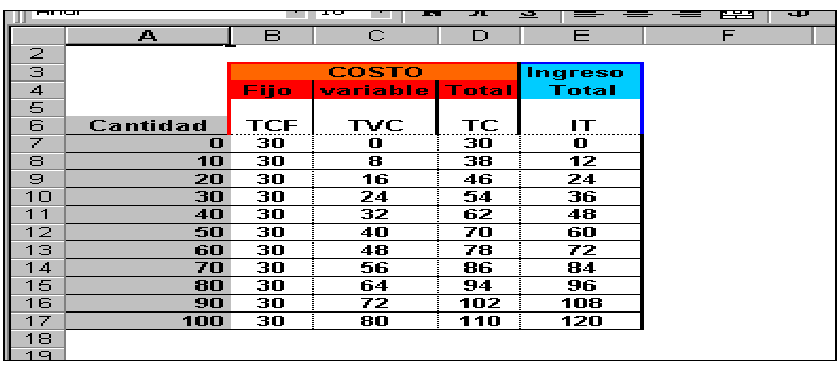
8 DETERMINAR LAS FORMAS DE SALIDA

Aquí se trata de elegir el mejor esquema en función de la capacidad que tenga el usuario. Debemos diseñar la salida para que sirva al propósito deseado. Decidiremos

de qué manera es más conveniente mostrar los resultados: en una tabla, en un gráfico en una dirección determinada.
Lo importante es diseñar la salida para que se ajuste a los requerimientos del usuario y que facilite la comprensión del problema.
Es importante limitar la cantidad de información a ser entregada; pues deseamos que la información sea útil para la toma de decisión; caso contrario solamente tendremos un volumen indiscriminado de datos que entorpecerá el proceso de decisión. Recuerde la Cantidad es un atributo más de la información.

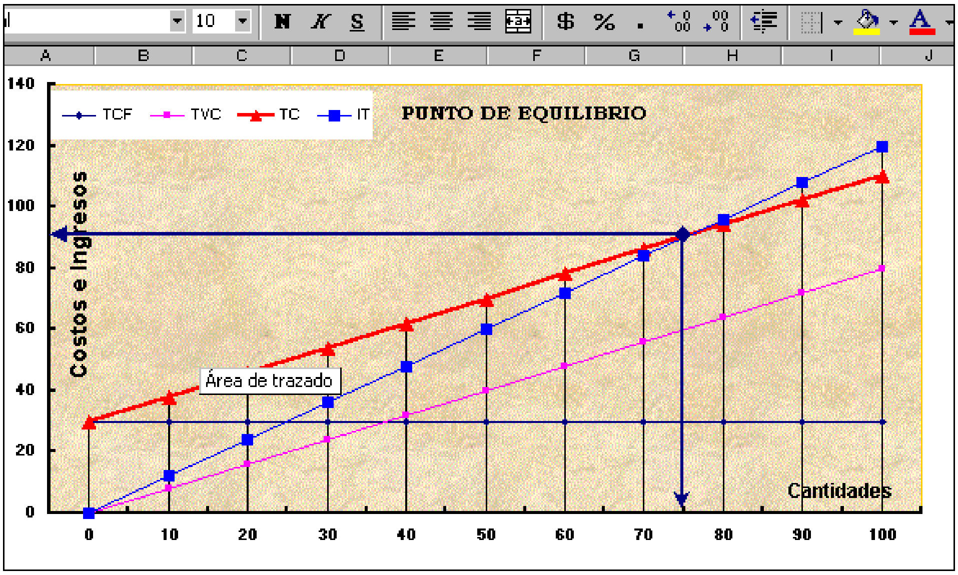


Si precisamos de una salida en forma de gráfico, se requerirá la construcción de una tabla.



	COSTO			Ingreso
	Fijo	variable	Total	Total
Cantidad	TCF	TVC	TC	IT
0	30	0	30	0
10	30	8	38	12
20	30	16	46	24
30	30	24	54	36
40	30	32	62	48
50	30	40	70	60
60	30	48	78	72
70	30	56	86	84
80	30	64	94	96
90	30	72	102	108
100	30	80	110	120

y en función de estos datos se construye el gráfico



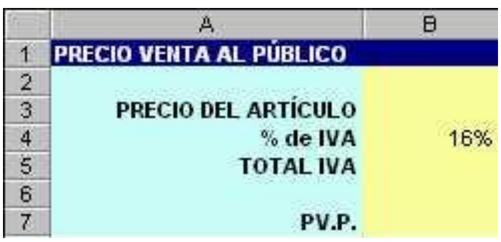
USO DE LAS FUNCIONES BÚSQUEDA DE OBJETIVOS Y ESCENARIOS

Dado la utilidad de la aplicación de estas técnicas del Microsoft Excel, presentaremos dos ejemplos mas para recordar a aquellos no expertos en Excel su utilización.

BÚSQUEDA DE OBJETIVOS

Esta sencilla opción se utiliza para buscar un valor específico como resultado de una fórmula, modificando el contenido de una celda. Excel buscará qué valor debería tomar esa celda para conseguir el resultado esperado. A esa celda se la denomina **Valor independiente** y a la celda que contiene la fórmula se la denomina **Dependiente**.

Vamos a ver un ejemplo. Imaginemos una sencilla hoja de cálculo que nos servirá para averiguar el precio de un producto sin el IVA .



	A	B
1	PRECIO VENTA AL PÚBLICO	
2		
3	PRECIO DEL ARTÍCULO	
4	% de IVA	16%
5	TOTAL IVA	
6		
7	PV.P.	

B3 contiene un valor constante introducido
La fórmula de **B5** será: **=B3*B4**
La fórmula **B7** será: **=B3+B5**

Imaginemos que se nos ha dado un precio de 50.000 y nos gustaría saber el **PRECIO DEL ARTÍCULO**.

- Seleccione la celda **B7** que es la que contiene la fórmula que deseamos que valga un determinado valor, que en nuestro caso es de **50.000**
- Acceda a **Herramientas - Buscar objetivo.** Le aparecerá un pequeño cuadro de diálogo:

Definir la celda: indica la celda que contiene la fórmula. Al haber situado primero el cursor en ella, aparece por defecto.

Con el valor: es el valor que tomará la celda anterior, o sea, el valor que queremos obtener. Escribiremos: **50.000** como valor a obtener.
Para cambiar la celda: celda que se utiliza en la fórmula. Indicaremos la celda **B3** como celda que nos interesa conocer.

- Acepte el cuadro y fíjese como Excel nos muestra un mensaje con una solución encontrada. Podemos aceptar o cancelar esta posibilidad.

	A	B
1	PRECIO VENTA AL PÚBLICO	
2		
3	PRECIO DEL ARTÍCULO	43103,4483
4	% de IVA	16%
5	TOTAL IVA	6896,55172
6		
7	PV.P.	50000

De esta forma observamos que hemos conseguido el precio que queríamos, por lo que ya sabemos a qué precio estará el artículo: **43.103**

ESCENARIOS.

Supongamos que tenemos varios supuestos de petición de un crédito con varios tipos de interés, varios posibles períodos, etc. Podríamos crear una hoja al estilo del ejemplo que hicimos de la tabla de amortización de préstamos y cambiar las celdas manualmente. Otra forma de hacerlo es utilizando escenarios. Un **escenario** es un conjunto de celdas cambiantes que puede grabarse para estudiar diferentes resultados.

- Arme una sencilla hoja para un cálculo de amortización de préstamo:

	A	B
1	Capital	2.000.000
2	Interés	5%
3	Años	4
4		
5	Cuota mensual	46.059

La fórmula de la celda **B5** es: **=ABS (PAGO (B2/12; B3*12; B1))**, calculando así, los pagos mensuales. Bien, imaginemos que queremos varios supuestos:

Interés al 5% y 5 años

Interés al 5% y 6 años
Interés al 4,5% y 3 años
Capital 1.500.00, interés 4% y 5 años

- Acceda a **Herramientas - Escenarios - Agregar**
- Como nombre del escenario, escriba cualquier texto (Escenario1)
- Como celdas cambiantes, marque el rango B1:B3 y pulse Aceptar
- Observe que aparecen las tres celdas que permitirán los cambios. Escriba en la primera: **2000000**, en la segunda **0,05** y en la tercera: **5**. Acepte.

- El escenario ya se ha creado. Añade los tres ejemplos restantes.
- Una vez finalizado, selecciona el primer escenario y pulsa Mostrar. Haz lo mismo con los demás y observa cómo cambian las celdas de la hoja de ejemplo.

De esta forma podemos preparar varios escenarios y visualizar los resultados de una forma más cómoda.
- Pulse en el botón **Resumen...**
- Como **Celdas resultantes**, seleccione **B5** y acepta.

Se ha creado una hoja nueva con el resultado de los 4 estudios de posibilidades. Observe y estudie el resultado.

TABLAS DE DATOS.

Una tabla de datos es un conjunto de celdas relacionadas mediante una o varias fórmulas, aplicando diferentes valores constantes y analizando e interpretando los resultados.
Una **variable** es una entrada sobre la que ejercemos un control, y que afecta a una serie de cálculos y resultados que dependen de ella. Supongamos que queremos saber la cuota a pagar de 3 a 7 años, a un interés que va del 4% al 7% con unos incrementos de 0,25% en 0,25%. Podríamos crear 45 escenarios distintos, pero incluso con esa opción sería mucho trabajo.
Veamos la forma de hacerlo utilizando las tablas.

Escriba la siguiente tabla en la misma hoja anterior:

	A	B	C	D	E	F
1	**Capital**	2.000.000				
2	**Interés**	5%				
3	**Años**	5				
4						
5	**Cuota mensual**	**37.742**				
6						
7	**37.742**	3	4	5	6	7
8	4,00%					
9	4,25%					
10	4,50%					
11	4,75%					
12	5,00%					
13	5,25%					
14	5,50%					
15	5,75%					
16	6,00%					

En la fila 7 hemos puesto los años, y en la columna A los incrementos de interés. Es obligatorio colocar como primera celda (A7) el valor con el que se desea jugar.

- Seleccione **B8:F16** y coloca el símbolo de millares. (Por defecto, el resultado de una tabla se muestra con varios decimales)

- Seleccione ahora todo el rango de datos: **A7:F16** y accede a **Datos tabla**
- Como celda de entrada de la fila, pulse en **B3** que es la que contiene el dato para calcular la fila 7.
- Como celda de entrada de columna, seleccione **B2**
- Acepte.

Ahora sólo es cuestión de arreglarla un poco. Observe en el ejemplo que hemos resaltado el valor inicial. Coincide con el cálculo de la tabla. De esta forma podemos ver de un vistazo el resultado con varios años y varios tipos de interés.

37.742	3	4	5	6	7
4,00%	59.048	45.158	36.833	31.290	27.338
4,25%	59.271	45.382	37.059	31.519	27.568
4,50%	59.494	45.607	37.286	31.748	27.800
4,75%	59.718	45.832	37.514	31.978	28.033
5,00%	59.942	46.059	37.742	32.210	28.268
5,25%	60.167	46.285	37.972	32.442	28.503
5,50%	60.392	46.513	38.202	32.676	28.740
5,75%	60.618	46.741	38.434	32.910	28.978
6,00%	60.844	46.970	38.666	33.146	29.217

Capitulo 7: EL MODELO DE TRANSPORTE

Planteamiento del problema

El modelo del transporte junto con el Modelo de Asignación es un caso particular de los Modelos de Programación Lineal. También se los denomina problemas de flujo en red y en general fue ideado para manejar distribución de mercaderías desde varios puntos (origen) hacia lugares de demanda (destinos). Este esquema da solución a innumerables problemas que posean en común esa característica de flujo.

Características de los problemas de transporte

En general los problemas de transporte se ocupan (en forma literal o imaginaria) de la distribución desde cualquier grupo de centros de suministro, llamados orígenes, a cualquier grupo de centros de recepción, llamados destinos, de modo que se minimice el costo total de distribución.

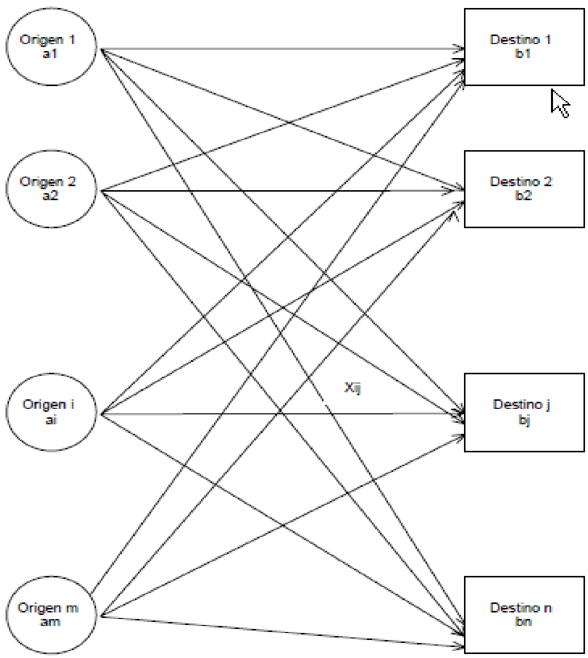
Suposiciones del modelo

Suposición de requerimientos: cada origen tiene un suministro fijo de unidades, donde este suministro completo tiene que distribuirse entre los destinos. De manera similar, cada destino tiene una demanda fija de unidades, donde esta demanda completa tiene que recibirse desde los orígenes.

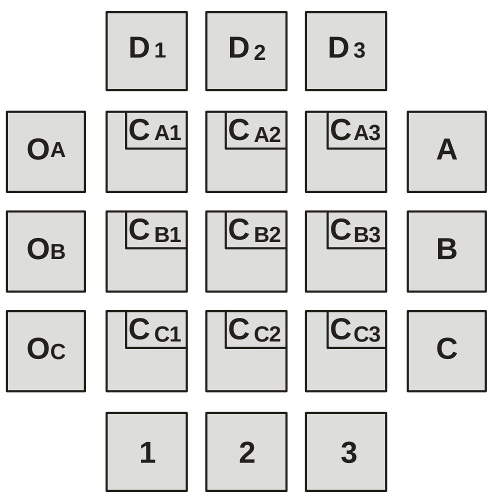
Propiedades de soluciones factibles: un problema de transporte tendrá soluciones factibles si y sólo la suma de sus recursos es igual a la suma de sus demandas (equilibrio entre suministro total de todos los orígenes y la demanda total de todos los destinos).
En algunos problemas reales, los recursos en realidad representan cantidades máximas (y no cantidades fijas) para distribuir.

Suposición de costo : el costo de distribuir unidades de cualquier origen a cualquier destino dado es directamente proporcional al número de unidades distribuidas. Por lo tanto, este costo es justo el costo unitario de distribución por el número de unidades distribuidas.

El modelo: cualquier problema (involucre o no transporte) se ajusta al modelo de un problema de transporte si se puede describir por completo en términos de una tabla de parámetros (origen-destino: costos, recursos, demanda) y satisface tanto la suposición de requerimientos como la suposición de costo. El objetivo es minimizar el costo total de distribuir las unidades. Todos lo parámetros del modelo están incluidos en la tabla de parámetros.



Se observan en el cuadro de la siguiente figura las tres variables a considerar en el método.



Oferta: las letras OA, OB y OC representan centros de oferta, de producción, de distribución. La capacidad de oferta de éstos viene indicada en la parte derecha del cuadro por A, B, C.
Demanda: las siglas D1, D2 y D3 representan centros de demanda o almacenes. En la parte inferior del cuadro se indica la cantidad demandada por cada centro mediante 1, 2 y 3.
Costo de transporte: en la parte superior derecha de cada casilla se indica el costo de trasporte desde cada centro de producción a cada centro de demanda, mediante la notación Cij.

El modelo de programación lineal del transporte que vamos a desarrollar se basa en las siguientes hipótesis:

1. el objetivo es reducir al mínimo posible el costo del transporte
2. la función del costo del transporte debe ser una función lineal del número de unidades transportadas
3. tanto las cantidades de la oferta como de la demanda deberán estar expresadas en las mismas unidades
4. los costos de trasporte por unidad no variarán con la cantidad transportada
5. la oferta total, suma de todos los centros de producción, deberá ser igual a la demanda total, suma de todas las demandas de los centros de demanda
6. caso de no cumplirse la hipótesis anterior, deberá crearse una oferta ficticia si la demanda total es superior a la oferta total, o una demanda ficticia si la demanda es menor que la oferta, asignando costo nulo al transporte a las casillas creadas correspondientes.

La resolución del modelo de programación lineal del transporte consiste en averiguar qué cantidad de producto de cada centro de suministro va a parar a cada centro de demanda y, por supuesto, a costo de transporte mínimo.
El problema se basa en la resolución de un clásico problema de programación lineal donde se plantea una función objetivo a optimizar (costo del transporte) y unas restricciones adecuadas (capacidades de los centros y otras posibles). La solución puede obtenerse mediante el procedimiento de las ecuaciones a que da lugar el planeamiento de la programación lineal por una computadora. Sin embargo, existen varios métodos simplificados y derivados de aquel planteamiento que resuelven perfectamente casos reales sencillos, permitiendo, además, entender los mecanismos que conducen a la resolución óptima.
Los métodos que se van a describir a continuación permiten obtener soluciones iníciales o básicas y soluciones óptimas:

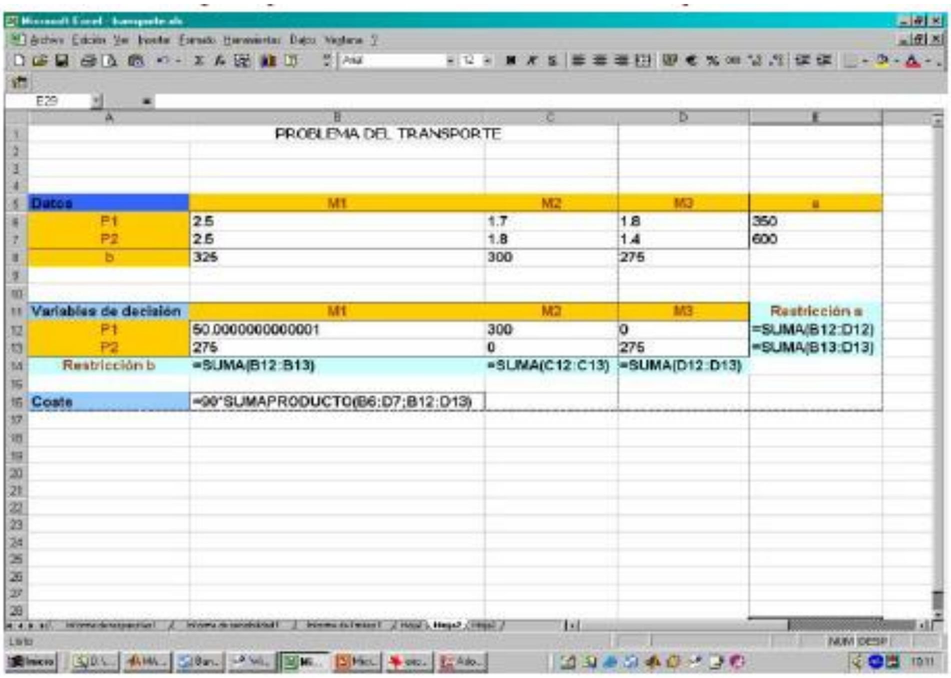
Estos problemas pueden solucionarse con el soft que hemos utilizado hasta aquí , asi como métodos clásicos como los que veremos mas adelante.

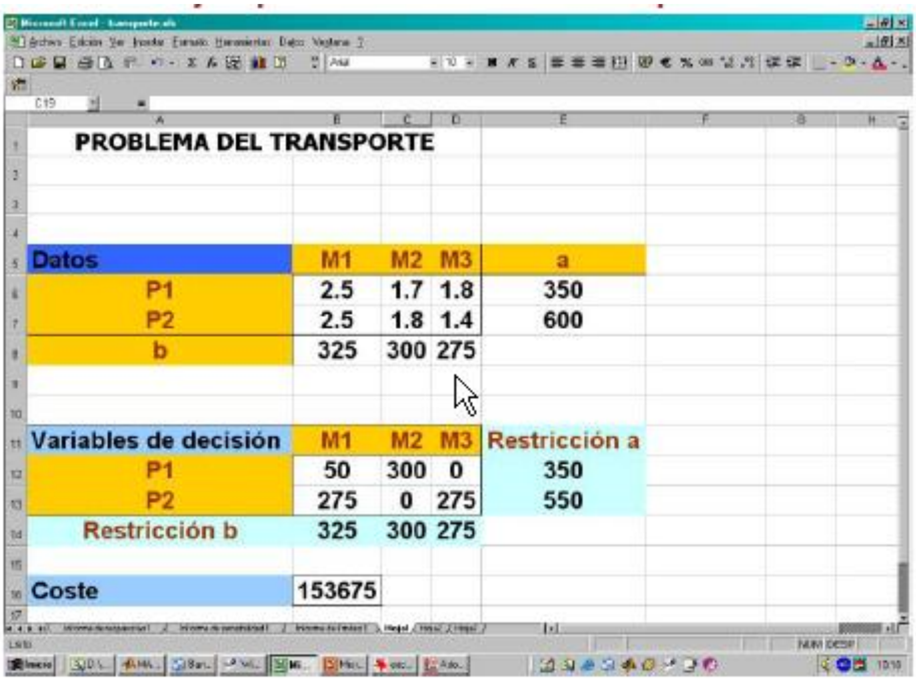
Aplicación con Excel 1

2 centros de producción y 3 mercados. Se suministran las distancias, dij, entre los centros de producción y los mercados (en cientos de Km.):
Costes de envıo: 90 $ por unidad transportada y 100 Km:

cij = 90dij.

d_{ij}	M1	M2	M3	a_i
P1	2.5	1.7	1.8	350
P2	2.5	1.8	1.4	600
b_j	325	300	275	





Costes marginales (o costes reducidos o multiplicadores):

	M1	M2	M3
P1			36
P2		9	

Se observa en este ejemplo que es optimo no enviar nada de P1 a M3 pero si insistimos en enviar un artículo se añadirán 36 $ al coste optimo.

Si enviamos un artículo de P1 a M3, entonces para mantener el balance de producción/demanda debemos enviar una unidad menos de P2 a M3, y una mas de P2 a M1 y una menos de P1 a M1.

El incremento neto en distancias es 180 − 140 + 250 − 250 = 40 Km., que cuestan 0.4 × 90 = 36 $.

Aplicación con Solver

La empresa XXX, tiene tres fabricas donde manufactura su producto P, con capacidades de producción de 25 (unidades por hora), y debe surtir a 4 almacenes con demandas de 20,15,20,5 (unidades por hora). Los costos de enviar desde cualquier fábrica a cualquier almacén se pueden ver en la tabla abajo.

Capacidad de Producción (u/t)		
Fabrica 1	Fabrica 2	Fabrica 3
25	25	10

Demanda de los Almacenes (u/t)			
Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4
20	15	20	5

Costo de Transporte desde la Fabrica i al almacén j				
$/unid	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4
Fabrica 1	2	2	0	4
Fabrica 2	5	9	8	3
Fabrica 3	6	4	3	2

la pregunta es cuánto se debe enviar desde cada fabrica a cada almacén con el fin de obtener el mínimo costo.

Min Z = $2X_{11} + 2X_{12} + 0X_{13} + 4X_{14} + 5X_{21} + 9X_{22} + 8X_{23} + 3X_{24} + 6X_{31} + 4X_{32} + 3X_{33} + 2X_{24}$

Sujeto a:

1. Satisfacer la demanda de los almacenes:
   $X_{11}+X_{21}+X_{31} >= 20$
   $X_{12}+X_{22}+X_{32} >= 15$
   $X_{13}+X_{23}+X_{33} >= 20$
   $X_{14}+X_{24}+X_{34} >= 5$

2. No sobrepasar la capacidad disponible de las fabricas
   X11+X12+X13+X14 <= 25
   X21+X22+X23+X24 <= 25
   X31+X32+X33+X34 <= 10
3. Por supuesto la condición de no negatividad y todas las variables enteras.

La idea aquí es la de tener dos matrices y dos vectores; una matriz se corresponderá con las variables de decisión, y la otra matriz con los costos.

La celda objetivo será la suma del producto de cada una de las posiciones de cada matriz con su correspondiente en la otra; esto lo podemos hacer rápidamente con la función "sumaproducto" del Excel. Las restricciones estarán en las columnas de "Consumo" y de "entregado". Primero preparemos el formato del problema, así:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ejemplo del Problema de Transporte						
2	Min Costo	0					
3		Almacén1	Almacén2	Almacén3	Almacén4	Disponible	Consumido
4	Fabrica1					25	0
5	Fabrica2					25	0
6	Fabrica3					10	0
7	Requerido	20	15	20	5	-	
8	Entregado	0	0	0	0		
9							
10	Matriz	2	2	0	4		
11	de	5	9	8	3		
12	Costos	6	4	3	2		

Las variables de decisión están en el rango [B4-E6]. La celda objetivo sería algo así como esto: = B4*B10+C4*C10+... pero eso sería muy largo. La manera corta es:=SUMAPRODUCTO(B4:E6,B10:E12). La cantidad entregada a cada almacén se ve en la fila 8. Por ejemplo para la celda B8, su fórmula es:=B4+B5+B6. La restricción de la capacidad de las fabricas la escribiremos en función del consumo en la columna G; por ejemplo para la celda G4:=B4+C4+D4+E4.

Las restricciones las escribiremos en el cuadro de diálogo como lo entregado debe ser mayor o igual a lo requerido, y lo consumido debe ser menor igual que lo disponible, tal como se puede ver en la captura siguiente:

Las variables de decisión deben ser enteras. Luego de introducir los datos en éste cuadro de diálogo y de hacer click en resolver, se hallará la solución.

EL PROBLEMA DEL TRANSBORDO

- Definición
  Envío de mercadería a través de nodos intermedios antes de llegar al punto de destino final.

- Problema
  Consiste en convertir un modelo de transbordo en uno de transporte regular y resolverse como tal.

- Elementos

  - ✓ Nodos
    Puros de oferta = actúan como puntos de origen (NO).

    Puros de demanda = actúan como puntos de destino (ND).

    De transbordo = actúan como puntos de origen y destino (NT).

  - ✓ Conexiones
    Llamados arcos, existen entre los nodos y poseen sentido y costos de envío entre cada uno de ellos.

    Cuando no hay arco o no hay sentido de flujo posible, se considera un valor muy alto M.

  - ✓ Cantidades
    De oferta, en los puntos de origen (disponibilidades).

    De demanda, en los puntos de destino (requerimientos).

- Problema
  El transbordo ocurre porque toda la cantidad de la oferta que hay en los puntos de origen pueden pasar a través de cualquier nodo de la red antes de llegar a los puntos de destino.

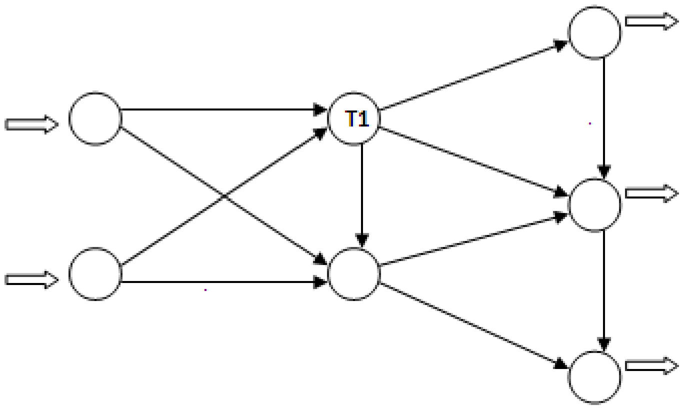
  - Planteo
  Para convertir este problema en uno de transporte regular, los NT se convierten en NO y ND, obteniendo solamente puntos de origen y destino.

  El modo para convertirlos es sumarles a su cantidad original un amortiguador (B). La cantidad del mismo debe ser suficientemente grande para permitir que todas las ofertas de la demanda original pasen por cualquiera de los NT.

  Por último se arma la matriz de costos y se resuelve mediante algún soft de programación lineal entera.

Ejemplo 1

Dos fábricas de automóviles, P1 y P2, están conectadas a tres distribuidores, D1, D2 y D3, por medio de dos centros de tránsito, T1 y T2 de acuerdo con la siguiente red:



Hay transbordo porque los 2200 automóviles ubicados en los nodos P1 y P2, pueden pasar a través de cualquier nodo de la red antes de llegar a D1, D2 o D3.

Convertimos el problema en transporte regular, generando un modelo con seis puntos de origen (P1, P2, T1, T2, D1, D2) y cinco puntos de destino (T1, T2, D1, D2, D3).

Después distribuímos las cantidades y sumamos en donde corresponda el amortiguador. Entonces armamos la siguiente matriz de costos:

	T1	T2	D1	D2	D3	
P1	3	4	M	M	M	1000
P2	2	5	M	M	M	1200
T1	0	7	8	6	M	B
T2	M	0	M	4	9	B
D1	M	M	0	5	M	B
D2	M	M	M	0	3	B
	B	B	800 + B	900 + B	500	

B = oferta o demanda total => B = 2200

M = costo máximo => M = 20

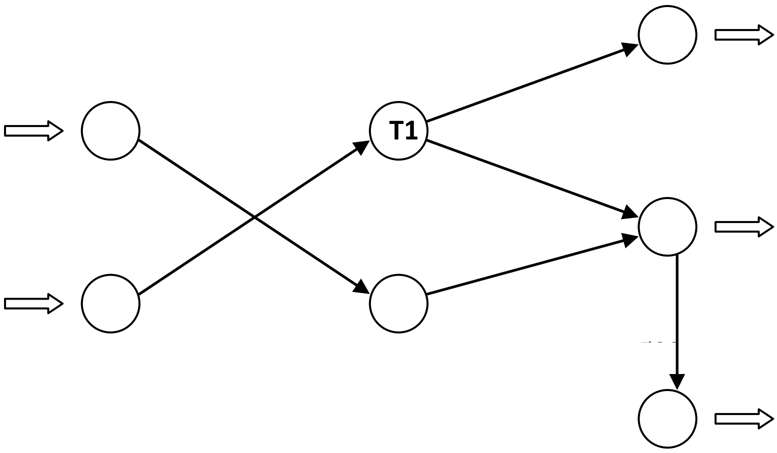
Planteamos el problema con el soft WinQsb:

From \ To	Destination 1	Destination 2	Destination 3	Destination 4	Destination 5	Supply
Source 1	3	4	20	20	20	1000
Source 2	2	5	20	20	20	1200
Source 3	0	7	8	6	20	2200
Source 4	20	0	20	4	9	2200
Source 5	20	20	0	5	20	2200
Source 6	20	20	20	0	3	2200
Demand	2200	2200	3000	3100	2700	

Así obtenemos el siguiente resultado:

09-09-2004	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Source 1	Destination 2	1000	4	4000	0
2	Source 2	Destination 1	1200	2	2400	0
3	Source 3	Destination 1	1000	0	0	0
4	Source 3	Destination 3	800	8	6400	0
5	Source 3	Destination 4	400	6	2400	0
6	Source 4	Destination 2	1200	0	0	0
7	Source 4	Destination 4	1000	4	4000	0
8	Source 5	Destination 3	2200	0	0	0
9	Source 6	Destination 4	1700	0	0	0
10	Source 6	Destination 5	500	3	1500	0
11	Unfilled_Demand	Destination 5	2200	0	0	0
	Total	Objective	Function	Value =	20700	

El resultado gráficamente sería el siguiente:



Problema de transbordo

Ejemplo . Red a transbordo, oferta = demanda sin capacidad (TRANSBOBAL).

Definición: Dada una red de n nodos (i), de los cuales, algunos son orígenes con oferta de un cierto producto, algunos otros son transbordos y destinos, que demandan el mismo producto. El objetivo es satisfacer tal demanda con la capacidad F i j de ramas (i, j) de conexión, a expensas de la oferta de los orígenes, cumpliendo el objetivo de costo mínimo.

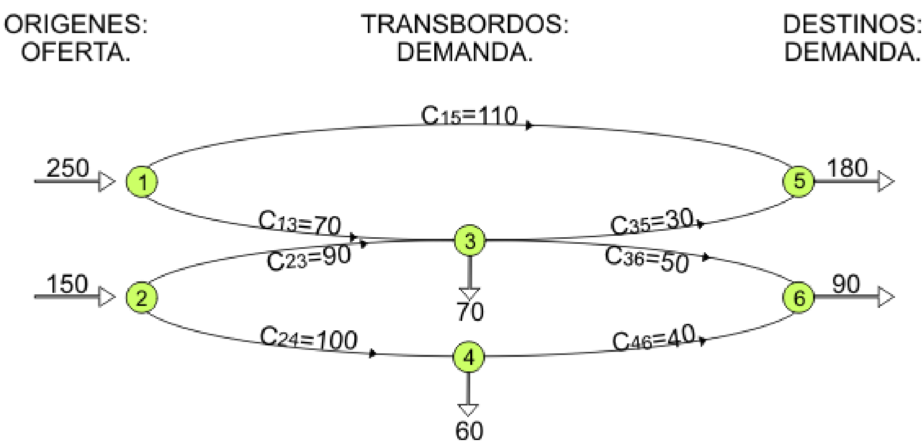


Figura . Problema de transbordo balanceado, red ejemplo TRANSBOBAL.

Equilibrio: Σoferta = 250 + 150 = 400 = 70 + 60 + 180 + 90 = Σdemanda

Modelo de programación lineal, red balanceada, no capacitada (TRANSBOBAL)

Primera parte del modelo, definición de variables:

Sea: X i j = Unidades enviadas del nodo (i) al nodo (j), a través de la rama (i, j).

C i j = Costo de enviar una sola unidad utilizando la rama (i, j)

Segunda parte del modelo, función objetivo:

Mínimo Z =70 X13 + 110 X15 + 90 X23 + 100 X 24 + 30 X 35 + 50 X36 + 40 X46

Tercera parte del modelo: Sujeta **a restricciones de conservacion de flujo**

$$
\begin{array}{lcccccccl}
\text{Nodo (1)} & +X_{13} & +X_{15} & & & & & & = 250 \\
\text{Nodo (2)} & & & +X_{23} & +X_{24} & & & & = 150 \\
\text{Nodo (3)} & -X_{13} & & -X_{23} & & +X_{35} & +X_{36} & & = -70 \\
\text{Nodo (4)} & & & & -X_{24} & & & +X_{46} & = -60 \\
\text{Nodo (5)} & & -X_{15} & & & -X_{35} & & & = -180 \\
\text{Nodo (6)} & & & & & & -X_{36} & -X_{46} & = -90
\end{array}
$$

Cuarta parte: Condición de no negatividad para variables: Todas las X i j >= 0

Con las sumas de, oferta y demanda iguales, la suma de coeficientes en cada columna (i, j) y el lado derecho de las restricciones, debe resultar cero.

Ejemplo 2. Red de transbordo con capacidades en ramas, sin balancear, pues oferta y demanda son desiguales, (TRANSBONOBAL).

No balanceado: Σ oferta = 250 + 170 = 420 > 400 = 70 + 60 + 180 + 90 = Σ demanda.

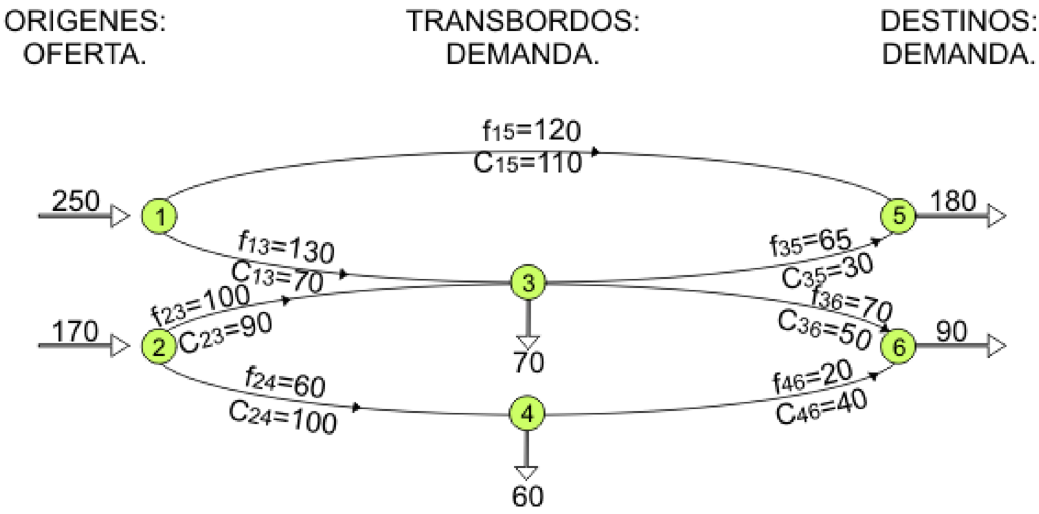


Figura 2. Red transbordo capacitada, no balanceada, ejemplo TRANSBONOBAL.

Programación lineal de una red, capacitada, no balanceada (TRANSBONOBAL)

- Primera parte del modelo, definición de variables:

Sea: X i j = Unidades enviadas del nodo (i) al nodo (j), a través de la rama (i, j).

- Segunda parte del modelo, función objetivo:

Mínimo Z = 70 X13 + 110 X 15 + 90 X 23 + 100 X 24 + 30 X 35 + 50 X 36 + 40 X46

- Tercera parte del modelo:
-

Sujeta **a restricciones de conservacion de flujo**

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Nodo (1)} & +X_{13} & +X_{15} & & & & & & \leq 250 \\
\text{Nodo (2)} & & & +X_{23} & +X_{24} & & & & \leq 170 \\
\text{Nodo (3)} & -X_{13} & & -X_{23} & & +X_{35} & +X_{36} & & = -70 \\
\text{Nodo (4)} & & & & -X_{24} & & & +X_{46} & = -60 \\
\text{Nodo (5)} & & -X_{15} & & & -X_{35} & & & = -180 \\
\text{Nodo (6)} & & & & & & -X_{36} & -X_{46} & = -90
\end{array}
$$

Restricciones de capacidad de flujo:

$$
\begin{array}{llll}
0 \leq X_{13} \leq 130, & 0 \leq X_{23} \leq 100, & 0 \leq X_{35} \leq 65, & 0 \leq X_{46} \leq 20, \\
0 \leq X_{15} \leq 120, & 0 \leq X_{24} \leq 60, & 0 \leq X_{36} \leq 70 &
\end{array}
$$

- Cuarta parte: Condición de no negatividad para las variables: Toda X i **j >=** 0.

Observaciones al problema de transbordo

El problema de transbordo es importante porque su manejo conceptual es suficiente para entender otros problemas de flujo en redes tales como el problema simple de transporte, ruta mínima y el problema de flujo máximo. El modelo matemático de programación lineal resulta con una estructura muy ordenada, particular para todos los problemas que se puedan modelar mediante un gráfico de red, de esta manera las observaciones siguientes son características:

1. Todo problema de transporte que se modela mediante un gráfico de red, puede a su vez modelarse matemáticamente con programación lineal.
2. El modelo de programación lineal correspondiente a una red de transbordo, debe definir una variable X i j para cada rama (i, j)de la misma y por lo tanto, la función objetivo de costo, debe contener tantos términos como ramas se tengan.
3. El modelo de programación lineal debe tener, además, restricciones de capacidad por cada rama de la red; también debido a la importante propiedad de conservación de flujo para las redes de transporte, deben plantearse tantas restricciones, como nodos deban cumplir dicha propiedad.
4. La estructura matemática de la programación lineal correspondiente a una red de transporte resulta muy especial, de tal manera que las restricciones de conservación de flujo, ordenadas matricialmente, resultan en columnas (i , j), las cuales contienen un coeficiente (+1) y un (-1) verificando la suma cero para cada una de ellas; e inclusive, para la columna de los términos independientes a la derecha de las restricciones, también se verifica suma cero, siempre y cuando se trate de un problema balanceado con respecto a oferta y demanda.
5. La solución óptima del problema de transbordo debe resultar de valor entero, siempre y cuando las constantes del modelo sean enteros.
6. Si un problema se puede modelar, primeramente con un gráfico de red, entonces se tiene la posibilidad de resolverlo mediante uno de los varios algoritmos específicos para redes que resultan altamente eficientes (inclusive más que el algoritmo simplex), gracias a la estructura especialmente sencilla de la programación lineal. Aprovechando tal circunstancia se ha logrado resolver problemas muy grandes conteniendo miles de variables y restricciones.
7. El problema de transbordo se puede resolver con el conocido algoritmo simplex, utilizando alguno de los programas de computo comercial de programación lineal con la que se formule el problema; también se puede intentar la optimización del mismo utilizando el Algoritmo de Transporte, que es un simplex simplificado, haciendo la conversión a la tabla usual, utilizando artificios de existencia de unidades en todos los nodos. Otro método es construir la red de distribución y determinar el costo mínimo desde los nodos de suministro hasta los otros nodos y considerar tales costos como unitarios en las respectivas celdas de la tabla de transporte.

Conversión de un problema de transbordo para resolver con algoritmo simplex simplificado del problema de transporte.

Considere la red de transbordo no balanceada entre oferta y demanda del ejemplo TRANSBONOBAL para resolver con el algoritmo simplex de transporte ya visto.

Primero es necesario hacer la siguiente conversión a la tabla usual de transporte y luego se procede con la aplicación del algoritmo.

Destino j	3	4	5	6	7 ficticio	Oferta a_i
Origen i						
1	70	M	110	M	0	250
2	90	100	M	M	0	170
3	0	M	30	50	M	0+420
4	M	0	M	40	M	0+420
Demanda	70+420	60+420	180	90	20	$\sum 1,260$

Figura 3. Tabla de conversión a problema de transporte del ejemplo TRANSBONOBAL.

M = coeficiente de costo muy grande en las celdas de rutas no válidas.

Σ oferta = 250 + 170 = 420 > 400 = 70 + 60 + 180 + 90 = Σdemanda

Σ oferta - Σ demanda = 420 - 400 = 20 = demanda # 7 (ficticia).

Para la conversión de un problema de transbordo a uno de transporte, se considera que cada uno de los nodos de transbordo 3 y 4, pueden recibir y enviar la totalidad de la oferta, procediendo de la siguiente manera:

Máximo Σoferta = 420 , Σdemanda = 400 } = 420

Las 420 unidades son lo máximo que puede pasar por un nodo de transbordo del problema ejemplo y se considera como la cantidad que amortigua la demanda en competencia.

Ejemplo N° 3 -- Problema del Transbordo--

La compañía X puede producir su principal artículo en dos departamentos diferentes. Cada departamento puede enviar lo producido al centro de control de calidad final A o al centro de control de calidad final B, desde los cuales se remite a cualquiera de las cuatro líneas del empaque y envío de que dispone la empresa. El departamento 1 tiene capacidad para producir 80 unidades por hora y el departamento 2 para producir máximo 60 unidades por hora. Según las demandas esperadas, se ha programado que las líneas de empaque atiendan al menos las siguientes cantidades por hora: 30, 20, 40, 40 respectivamente.

La siguiente tabla muestra los tiempos promedio (minutos) que se gasta en los diferentes movimientos de cada unidad del producto.

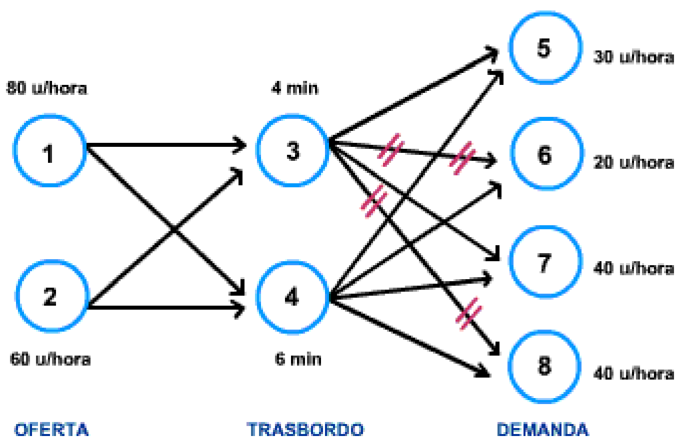
DEPARTAMENTO		CONTROL DE CALIDAD	LINEA DE EMPAQUE Y ENVIO			
P1	P2		L1	L2	L3	L4
10	12	C1	24	-	22	-
9	11	C2	19	23	20	23

El centro 1 de control de calidad, se demora 4 minutos para revisar un artículo y el centro 2 de control de calidad se demora 6 minutos.

¿Cómo debe organizarse el flujo de las unidades entre los departamentos productivos y las líneas de empaque y envío, pasando por algunos de los centros de control de calidad, de tal forma que se obtenga un mínimo tiempo total de producción?.

Construcción del Modelo

Para una mejor comprensión del problema elaboremos un diagrama descriptivo en el cual los nodos 1 y 2 representan los departamentos de producción (P1 y P2), los nodos 3 y 4 representan los Centros de Control de Calidad (A, B) y los nodos del 5 al 8 representan las cuatro líneas de empaque (L1 a L4).



Las variables de decisión se definirán como:

Xij : unidades enviadas del nodo i al nodo j.

Antes de escribir el modelo debemos aclarar que los valores representados con guión (-) en la tabla indican que entre ese Centro de Control de Calidad y esa línea de empaque no hay envío posible, ya sea por decisiones administrativas o por incomunicación entre ellos.. surge entonces la idea de no incluir esas variables en la función objetivo, pero esto conduciría a tomar como cero el respectivo coeficiente objetivo y como se desea minimizar el costo, lo anterior llevaría a que sea altamente conveniente aumentar el valor de las variables de decisión X36 y X38. Esto obviamente es un error, pues sabemos que esas variables deben valer cero al no existir comunicación entre los nodos.

Concluimos rápidamente que por el contrario debemos asignar a esas variables un coeficiente objetivo bien grande para obligar a que valgan cero.

El modelo de Programación Lineal será:

Minimizar:

$$\text{Costo Total} = 10X13 + 9X14 + 12X23 + 11X24 + 24X35 + 1000X36 + 22X37 + 1000X38 + 19X45 + 23X46 + 20X47 + 23X48$$

Sujeta a:

Capacidad de producción de cada departamento

$X13 + X14 \leq 80$ Departamento P1

$X23 + x24 \leq 60$ Departamento P2

Capacidad de Transbordo en cada centro

$X13 + X23 = X35 + X37$ Centro Calidad A

$X14 + X24 = X45 + X46 + X47 + X48$ Centro Calidad B

Demanda mínima en cada línea

$X35 + X45 \geq 30$

$X46 \geq 20$

$X37 + X47 \geq 40$

$X48 \geq 40$

Con $Xij \geq 0$ para todo ij.

MÉTODOS PARA SOLUCIONES BÁSICAS REALIZABLES:

Ante todo veremos las técnicas de resolución de estos casos a través de tres metodologías cuantitativas utilizadas para la solución de estos problemas en la gestión de la Producción, por lo que tomaremos aquí el texto que se encuentra en Administración de la Producción y las Operaciones de *Carro, R y González Gómez*

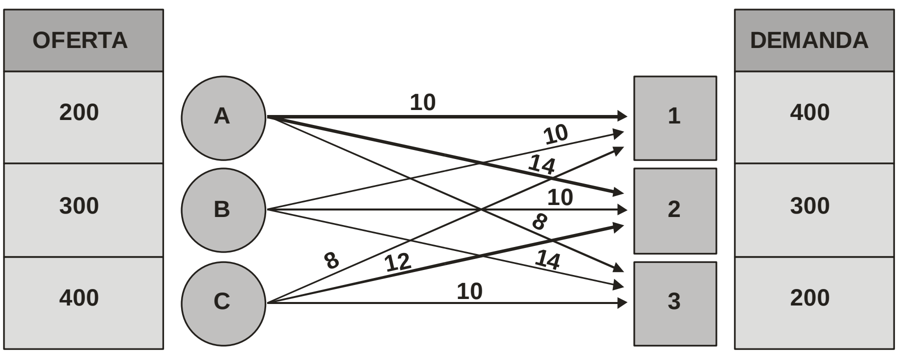
Estos métodos son sencillos de comprender y permiten obtener soluciones básicas realizables, que son el punto de partida para lograr las óptimas:

- Método de la esquina noroeste: NO.
- Método de costo mínimo: CM.
- Método de aproximación de Vogel: MAV.

Métodos para soluciones óptimas:

- Método *de stepping-stone*: SS
- Distribución modificada: MODI.

MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE: NO



En la figura anterior se ven los posibles caminos que unen los centros de producción A, B y C con los de demanda 1, 2 y 3. sobre los arcos o rutas correspondientes se expresa el costo unitario de transporte. Todo esto puede disponerse, tal y como se ha indicado anteriormente, mediante el cuadro de la siguiente figura:

	1	2	3	
A	10	14	8	200
B	10	10	14	300
C	8	12	10	400
	400	300	200	900

En la parte inferior derecha se han sumado las capacidades de oferta y de demanda, que aquí coinciden, no siendo preciso, por tanto, la creación de actividades ficticias.

La mecánica del método de solución inicial NO(Método esquina noroeste) sigue los pasos descritos a continuación:

a) Asignar (rellenar) en primer lugar la casilla más noroeste. Es la superior izquierda, con la máxima cantidad posible.

b) Cuando no quede satisfecha la oferta de la primera fila, pasar a la casilla siguiente derecha de la misma fila, y así sucesivamente hasta que el primer centro productor agote su capacidad, tratando de completar la demanda de cada centro almacén.

c) Hacer lo mismo con la siguiente casilla más noroeste, que ahora será la situada a la izquierda de la segunda fila, y seguir los pasos siguientes hasta completar todas las asignaciones posible.

Siguiendo estos pasos con el ejemplo, los resultados los anotamos en la siguiente figura:

	1	2	3	
A	10 200	14	8	200
B	10 200	10 100	14	300
C	8	12 200	10 200	400
	400	300	200	900

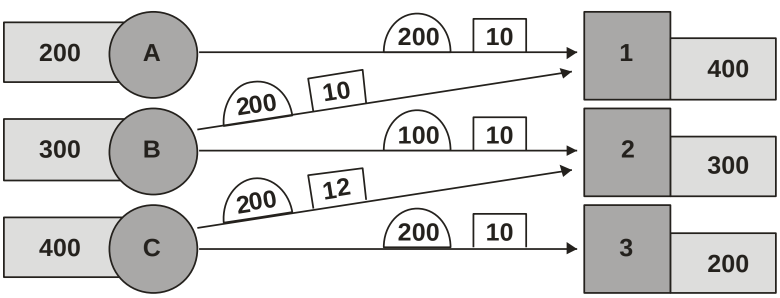
La casilla A1 es la más noroeste. Esta casilla indica que el centro producto A puede enviar unidades al centro de demanda 1 a un costo unitario de 10 unidades monetarias por unidad transportada. El centro A puede ofrecer 200 unidades y el almacén o centro de demanda 1 necesita 400 unidades.

Según el método NO, debe hacerse la máxima asignación posible. Pueden asignarse a 1 las 200 unidades que produce A, ya que 1 tiene la capacidad suficiente (hasta 400) para recibirlas. Ya hemos agotado la capacidad de A (fila 1). Luego ni 2 ni 3 recibirán de momento unidades de A.

Pasamos a la segunda fila, casilla B1 noroeste. La asignación a esta casilla implicará enviar unidades desde B hasta 1. ¿Cuántas? El almacén 1 ya ha recibido 200 unidades de A. Necesita 400 unidades en total, es decir, otras 200 unidades. B puede dárselas, ya que produce 300. Asignamos a B1 200 unidades, con lo que queda totalmente satisfecho.

Pero a B le sobran todavía 100 unidades, ya que sólo ha servido 200 unidades. Por el método NO se asignarán, si la capacidad del almacén 2 lo permite, a la siguiente casilla B2. Y con esto queda satisfecha el centro productor B.

Pasemos a la tercera y última fila. La casilla más noroeste es la C1. ¿Podemos asignar unidades? La asignación en C1 indica que se envían unidades de C a 1, pero resulta que el almacén 1 ya está satisfecho, pues recibió las 400 unidades que demandaba de los centros A y B. Luego no podemos asignar unidades a la casilla C1. Pasaremos, pues, a la casilla C2. Aquí el almacén 2 requiere todavía otras 200 unidades que, por otra parte, tiene disponibles el productor C. Asignemos, pues, a C2 200 unidades. Y el resto que ofrece C se las daremos al almacén 3. El resultado es el siguiente:



Centro productor (A) envía 200 unidades a almacén 1, a 10 $\frac{\text{u.m.}}{\text{ud.}}$ • Costo: 200 x 10 = 2.000 u.m.

Centro productor (B) envía 200 unidades a almacén 1, a 10 $\frac{\text{u.m.}}{\text{ud.}}$ • Costo: 200 x 10 = 2.000 u.m.

envía 100 unidades a almacén 2, a 10 $\frac{\text{u.m.}}{\text{ud.}}$ • Costo: 100 x 10 = 1.000 u.m.

Centro productor (C) envía 200 unidades a almacén 2, a 12 $\frac{\text{u.m.}}{\text{ud.}}$ • Costo: 200 x 12 = 2.400 u.m.

envía 100 unidades a almacén 3, a 10 $\frac{\text{u.m.}}{\text{ud.}}$ • Costo: 200 x 10 = 2.000 u.m.

Costo total transporte = (2.000) + (2.000) + (1.000) + (2.400) + (2.000) = 9.400 u.m.

Pero esto es una solución inicial o básica que no tiene por qué ser la óptima. Es decir, podemos encontrar otras estructura de asignaciones de tal forma que el costo total de transporte sea menor. Esto lo conseguimos más adelante con los métodos de soluciones óptimas.

Es importante resaltar una cuestión. El método NO asigna independientemente del valor de los costos unitarios de cada ruta. Entonces, será debido sólo a la casualidad el hecho de que este método proporcione una solución óptima. Fijémonos que, en la siguiente figura, los costos son totalmente distintos a los de la figura anterior. Sin embargo, en función de los pasos del proceso descrito y de las capacidades de todos los centros, las asignaciones son las mismas.

	1	2	3	
A	7 200	10	2	200
B	20 200	20 100	12	300
C	10	10 200	14 200	400
	400	300	200	900

Este método, por otra parte ampliamente difundido, es quizás el menos aconsejable para inicializar la solución de un problema.

METODO DEL COSTO MÍNIMO: CM

Es un método intuitivo de lograr una solución básica realizable. Consiste únicamente en detectar las casillas de menor costo, para empezar por ahí a cumplir asignaciones. Una forma simple de logarlo es hacerlo ordenadamente por filas. En nuestro ejemplo, observamos que en la fila 1 la casilla de menor costo es la casilla A3. Asignamos las 200 unidades que posee A, ya que, además, el centro 3 las necesita. Ahora, tanto oferta como demanda quedan insatisfechas como se aprecia en la siguiente figura:

	1	2	3	
A	10	14	8 200	200
B	10	10 300	14	300
C	8 400	12	10	400
	400	300	200	900

En la fila 2, las casillas B1 y B2 son las de menor costo, pudiendo elegir una u otra indistintamente. Pero fijémonos en la conveniencia de elegir de forma adecuada. Si escogemos B2, al asignarle unidades éstas ya no podrían ser asignadas a C2. Y si asigno a B1, las unidades asignadas a ésta ya no podrán serlo a C1.

Observar los costos de C1 y C2. Conviene asignar más unidades a C1 que a C2, luego convendrá asignar menos unidades a B1 que a B2 para rebajar costos. Elegimos, pues, la casilla B2 en primer lugar, asignando las 300 unidades que B puede mandar al almacén 2. Y quedan, de nuevo, satisfechas oferta y demanda.

Esta forma de razonar es parte de lo que algunos autores denominan ***método de las transferencias mutuamente preferibles***.

Por último, el único centro productor que aún dispone de unidades es el C, y el único almacén que demanda es el 1. No existe otra posibilidad, ya que anteriormente los restantes centros quedaron satisfechos. Asignemos 400 unidades a la casilla C1. Además, coincide el hecho de que C1 posee el menor costo de las casillas de su fila, aunque podría no haber sido así.
De esta forma, las soluciones iníciales pueden ser muchas, dependiendo de la estructura de costos.
En vez de empezar el método de forma ordenada, por filas por ejemplo, podríamos haber empezado eligiendo casillas de menor costo, independientemente de la fila o columna donde se hallen.
Sea la matriz:

	1	2	3	4	
A	[10]	[6]	[3] 250	[8] 50	300
B	[6] 250	[6]	[5]	[6] 50	300
C	[8]	[4] 250	[6]	[7] 150	400
	250	250	250	250	1000

Ya vemos que la matriz no tiene por qué ser cuadrada. En este caso tenemos tres centros productos y cuatro almacenes. Se cumple que la suma de las ofertas es la suma de las demandas, 1.000 unidades. La casilla de menor costo es la casilla A3. Ahí no podemos asignar más de 250 unidades, que son las que demanda el almacén 3.

¿Dónde asignaremos las 50 restantes de A? Podríamos pensar en la casilla A2, pero como la casilla C2 es la de siguiente menor costo, convendrá más dar el mayor número de unidades a esta última. Asignamos a C4 250 unidades. La siguiente de menor costo es la B3, pero no puedo poner unidad alguna, ya que el almacén 3 ya está satisfecho.
El menor costo siguiente corresponde a cualquiera de las casillas A2, B1, B2, B4 y C3. Pero los únicos almacenes que demandan hasta ahora son 1 y 4, lo que excluye las casillas A2, B2 y C3. De las casillas B1 y B4 convenientes, interesa más B1 para dejar libres después las casillas A4 y C4, que son de menor costo que las casillas A1 y C1 (transferencias mutuamente preferibles).
Resulta pues, la solución de la figura anterior, cuyo costo total de transporte es:

$$C_t = (250 \times 3) + (50 \times 8) + (250 \times 6) + (50 \times 6) + (250 \times 4) + (150 \times 7) =$$
$$= (750) + (400) + (1.500) + (300) + (1.000) + (1.050) = 5.000 \text{ u.m.}$$

Además, ésta es solución óptima, cosa que podremos demostrar con los métodos que se describirán posteriormente.

Puede comprobarse de continuo el hecho de que la suma de todas las casillas de una misma fila y de misma columna deben coincidir con el total de capacidad asociada a cada centro productor y de demanda.

MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL: MAV

De todos los métodos existentes para la consecución de una solución básica realizable es el más efectivo, en tanto en cuanto nos acerca a la solución óptima, y en muchos casos la proporciona directamente. Puede conocérsele también bajo la denominación de ***método de penalizaciones***. Veremos por qué: supongamos la matriz de costos de la siguiente figura, con tres centros de oferta y cuatro centros de demanda:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4	4	6	5	400
O_2	4	5	5	6	400
O_3	3	7	4	3	200
	100	200	300	400	1000

Una vez más, se satisface la ecuación del conjunto: Oferta = Demanda; por lo que no hará falta utilizar ficticias.

Etapas del método MAV

1ª etapa: calcular para toda fila y para toda columna la diferencia entre las dos casillas de menor costo.

El resultado podemos anotarlo en la fila y columna marcadas con Δ de la siguiente figura.

	D_1	D_2	D_3	D_4		Δ
O_1	4	4	6	5	400	4-4=0
O_2	4	5	5	6	400	5-4=1
O_3	3	7	4	3 200	200	3-3=0
	100	200	300	400	1000	
Δ	4-3=1	5-4=1	5-4=1	5-3=2		

2ª etapa: seleccionar la fila o columna que tenga la diferencia Δ mayor.

En la figura anterior seleccionamos la columna D4 por ser ésta Δ = 2, mayor que el resto de las diferencias.

La marcamos con un redondel.

3ª etapa: dentro de la fila o columna seleccionada en la etapa anterior, elegir la casilla de menor costo.

En la columna D4 el menor costo es 3. Recuadramos la casilla O3-D4.

En esta casilla, asignar cuantas unidades sea posible.

El almacén D4 requiere 400 unidades. El centro O3 sólo puede darle 200 unidades. Luego el máximo de unidades asignadas a la casilla O3-D4 es 200 unidades, quedando satisfecho el centro productor.

4ª etapa: eliminar para cálculos sucesivos la fila o columna cuya capacidad haya quedado satisfecha.

En nuestro caso eliminaremos la fila O3, ya que este centro ha entregado todo lo que ofertaba. Habrá casos en los que podrán eliminarse fila y columna; será cuando coincidan oferta y demanda.

A continuación debe repetirse todo el proceso con la matriz resultante (siguiente figura).

	D_1	D_2	D_3	D_4		△
O_1	4	4 200	6	5	400	0
O_2	4	5	5	6	400	1
	100	200	300	200	800	
△	0	1	1	1		

Nótese que se ha eliminado O3 y la demanda D4 ha disminuido en 200 unidades que aquél le entregó en el proceso anterior. De nuevo:

1ª etapa: se anotan las diferencias Δ

2ª etapa: se elige la fila o columna de mayor Δ

Nos encontramos con que la mayor Δ corresponde a la fila O2 y a las columnas D2, D3 y D4. ¿Con cuál quedarnos?

Cuando varias filas y/o columnas tengan igual Δ máxima, se selecciona aqu fila o columna donde se encuentre la casilla de menor costo.

En la figura anterior las casillas de menor costo son la O1-D1, O1-D2 y O2-D1. Pero O1-D1 pertenece a una fila y una columna de Δ = 0. Nos olvidamos de ella, pues.

La casilla O1-D2 puede ser elegida por seleccionar la columna D2 de Δ = 1.
La casilla O2-D1 puede ser elegida por haber seleccionado la fila 02 de Δ = 1.
Por tanto, podemos seleccionar la fila O2 o la columna D1, por contener ambas la casilla de costo menor y presentar un Δ = 1 máxima.
Llegado a este punto, puedo escoger cualquiera de las dos. Escojamos la columna D2 y recuadremos la casilla O1-D2. Esta casilla requiere un máximo de unidades (200) que puede darle el centro O1, con lo que quedaría satisfecha la columna o almacén D2. Para la próxima iteración, habrá que eliminar entonces la columna D2.
Obsérvese en la siguiente figura que el centro O1 ya sólo dispone de 200 unidades de las 400 unidades de partida, pues acaba de direccionar 200 unidades hacia el almacén D2.

	D_1	D_3	D_4		Δ
O_1	4 100	6	5	200	1
O_2	4	5	6	400	1
	100	300	200	600	
Δ	0	1	1		

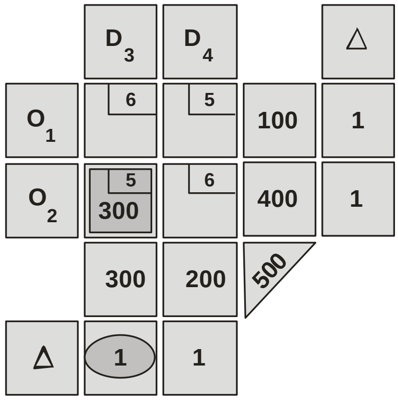
Nuevamente:

1ª etapa: Δ máxima = 1.

2ª etapa: podemos elegir las filas O1 y O2 por contener ambas la casilla de menor costo igual a 4.

No podemos elegir, a pesar de Δ máxima = 1, ni la columna D3, ni la columna D4, ya que contienen casillas de mayor costo que las filas O1 y O2.

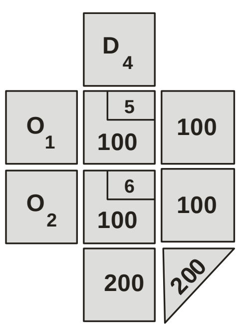
Seleccionamos a voluntad la fila O1 y recuadramos la casilla O1-D1. Asignamos el máximo de unidades posible. O1 dispone de 200 unidades, pero D1 sólo puede almacenar 100 unidades. Luego la asignación es de 100 unidades, con lo que se satisface el almacén D1, que eliminamos para una posterior iteración.

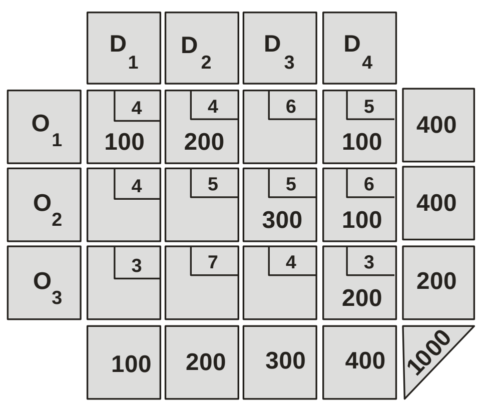


En la tabla de figura anterior se presenta la matriz resultante hasta ahora. Vemos que Δ máxima =1 para todas la filas y para todas las columnas. Seleccionamos la fila o columna que contenga una casilla de costo 5, que es el menor. Elegimos la columna D3 recuadrando la casilla O2-D3. Asignamos 300 unidades, satisfaciendo al almacén D3.

Este proceso genera la matriz de la siguiente figura.

Aquí la asignación es directa. Es decir, las unidades que le quedan a O1 por distribuir sólo pueden ser llevadas a D4 por la ruta de costo 5, y las 100 unidades de O2 pueden ir a D4 por la ruta de costo 6.





Se ha terminado el problema. Reunamos todas las asignaciones hechas en las figuras anteriores en una sola matriz u *hoja de rutas*, tal cual se indica en la figura superior derecha.

Fila	**O1:**	**(100) + (200) + (100) = 400 unidades**	
Fila	**O2:**	**(300) + (100) = 400 unidades**	
Fila	**O3:**	**(200) = 200 unidades**	
Columna	**D1:**	**(100) = 100 unidades**	
Columna	**D2:**	**(200) = 200 unidades**	
Columna	**D3:**	**(300) = 300 unidades**	
Columna	**D4:**	**(100) + (100) + (200) = 400 unidades**	

Oferta = Demanda = 1.000 unidades

¿Por qué se le denomina a MAV método de las penalizaciones?

Observar la 2ª etapa. Al considerar la diferencia mayor entre casillas de menor costo, y elegir la casilla de costo menor, rechazamos la casilla de costo mayor.
La diferencia Δ supone una penalización en el caso de que eligiéramos la casilla de costo mayor en vez de la de menor.
Elegimos en la 2ª etapa la fila o columna de mayor penalización. Al elegir la casilla de costo menor, nos ahorramos dicha penalización, la penalización máxima.
El costo total de transporte, o ***función económica***, es:

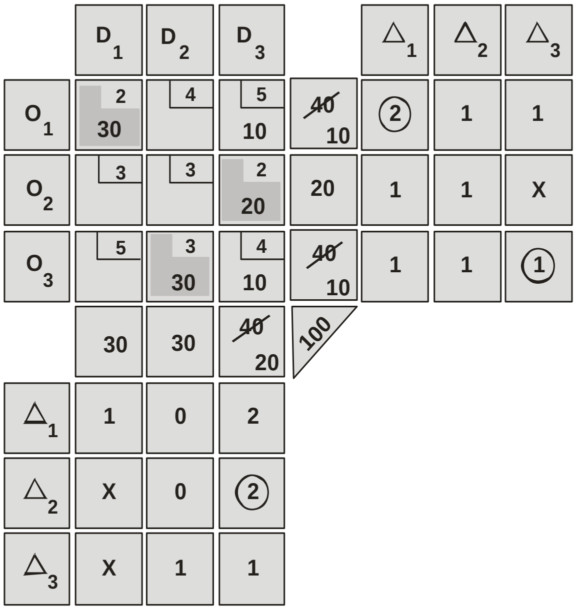
$$C_t = (100 \times 4) + (200 \times 4) + (100 \times 5) + (300 \times 5) + (100 \times 6) + (200 \times 3) =$$

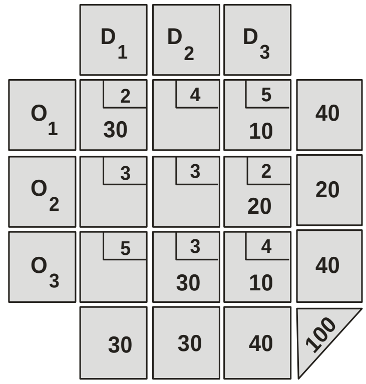
$$= (400) + (800) + (500) + (1.500) + (600) + (600) = 4.400 \text{ u.m.}$$

METODO *STEPPING-STONE*:

Es un método que nos ayudará a encontrar una solución óptima (la de costo total de transporte mínimo) partiendo de una solución inicial.
Así pues, habremos obtenido en primer lugar una solución básica inicial mediante alguno de los métodos anteriores: NO, CM, MAV. Pero, realmente, ni siquiera sería necesario partir de alguno de estos modelos. Podríamos asignar unidades aleatoriamente respetando las restricciones de oferta y demanda para cada centro productor y suministrador y después aplicar *stepping.-stone* o MODI.
Ahora bien, existe una particular ventaja al empezar, sobre todo, con CM o MAV, y es que nos acercarán más a la solución óptima. Ya habíamos comentado que MAV en muchos casos incluso proporciona directamente la solución óptima.
Para desarrollar el modelo *stepping-stone* vamos a partir de un caso práctico, el representado en la matriz de la figura siguiente, donde la solución inicial se obtiene por MAV. Debemos prestar especial atención al texto que aparece recuadrado.

Las etapas *stepping-stone* son las siguientes:





Trazar los caminos **cerrados** posibles partiendo de **toda** casilla vacía (sin asignación) según las reglas siguientes:

Avanzar **hasta** una casilla llena (con asignación) y girar ahí en **ángulo recto** hasta llegar a otra casilla llena. Así sucesivamente hasta cerrar el camino en la casilla vacía de partida. Se pueden saltar las casillas llenas o vacías necesarias.

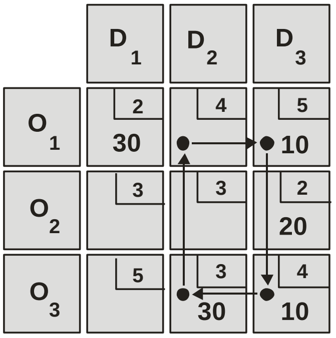
Palabras clave: Partir de casillas vacías hacia casillas llenas, girar en ángulo recto, camino cerrado.

Volvamos a la figura de la página anterior: existen cuatro casillas vacías. Partimos de la primera casilla vacía:

Casilla O1-D2

Podemos avanzar hacia la izquierda hasta la casilla O1-D1, ya que está llena. Pero luego desde ahí, girando en ángulo recto, sólo podríamos ir hasta O2-D1 o bien O3-D1; pero están vacías. Luego busco otro sentido de avance.

Podría ir de O1-D2 a O1-D3, que está llena. De ahí, en ángulo recto, giro hasta O2-D3, donde nos detenemos para girar otra vez en ángulo recto hasta O2-D2 o bien O2-D1; pero éstas son vacías y no podemos detenernos en ellas.



La otra posibilidad es ir de O1-D3 hasta O3-D3, donde nos detenemos para girar en ángulo recto hasta la O3-D2, que está llena. Ahí podemos detenernos para, girando en ángulo recto, regresar **cerrando** el camino hasta O1-D2.

Así, pues, la trayectoria cerrada que cumple todas las condiciones expuestas es:

Camino O1-D2: O1-D2 – O1-D3 – O3-D3 – O3-D2

Fijarse que podríamos haberlo obtenido igual recorriendo las casillas en sentido contrario, obteniendo así:

Camino O1-D2: O1-D2 – O3-D2 – O3-D3 – O1-D3

A los efectos de lo que vamos a tratar a hora, es igual hacerlo en un sentido u otro. Lo importante es que sea cerrado.

Como vemos, por ello, no vuelve a anotarse la casilla de partida al final del camino encontrado.

> A continuación, hacemos una evaluación del camino por los costos de las casillas que componen el camino, y sólo los costos de estas casillas.

En el camino O1-D2, la casilla O2-D3 es de paso, no forma parte del camino encontrado. Lo mismo pasa con la casilla O2-D2.

> Las casillas que forman parte de un camino son aquellas **donde nos detenemos** para girar en ángulo recto hacia otra casilla llena. Dicho de otra forma, las casillas **donde existe ángulo recto del camino** y no son de paso.

Evaluación del camino O1-D2:

Camino O1-D2: O1-D2 – O1-D3 – O3-D3 – O3-D2

Costos:	(4)	(5)	(4)	(3)
Signos:	+	-	+	-

Para evaluar una trayectoria se anotan los costos de las casillas que la forman con **alternancia de signos**, empezando siempre con un signo positivo (+) para la primera casilla. Posteriormente, se suman los costos.

Evaluación O1-D2: 4 – 5 + 4 – 3 = 0

En resumen, para nuestra matriz y la solución inicial MAV obtenida, los caminos y sus evaluaciones correspondientes son:

Camino O1-D2 → Evaluación = 0

Camino O2-D1 → Evaluación = 4

Camino O2-D2 → Evaluación = 2

Camino O3-D1 → Evaluación = 4

Interpretaremos estos resultados según el siguiente esquema de evaluaciones:

ANÁLISIS DE EVALUACIÓN DE TRAYECTORIAS

- Si la **evaluación es negativa**, podemos ahorrar dinero intercambiando unidades entre las casillas del camino de evaluación negativa.
- Si la **evaluación es positiva**, al intercambiar unidades entre las casillas del camino considerado sufrimos un incremento de costos. Para ahorrar no interesan caminos con evaluaciones positivas.
- Si la evaluación es nula, al intercambiar unidades entre las casillas del camino no obtenemos ni ahorro ni incremento de costos. Nos quedamos con el mismo costo con el que estábamos.
  Pero podemos intercambiar, ya que no perdemos, y obtendríamos así otra solución distinta de igual costo. Ésta sería lo que se llama una ***solución alternativa*** de igual costo.

Este análisis de evaluación de trayectorias es individual para cada una obtenida. El análisis conjunto de todas las trayectorias posibles de la matriz dice que:

En nuestro ejemplo las evaluaciones son positivas (y O1-D2 nula), luego la solución inicial de la que partimos es una solución óptima de costo total mínimo.

C_t = (30 x 2) + (10 x 5) + (20 x 2) + (30 x 3) + (10 x 4) =

= 60 + 50 + 40 + 90 + 40 = 280 u.m.

Dado que tenemos una evaluación nula, podemos obtener una solución alternativa a la dada, que además, por ser la óptima, será una solución óptima alternativa. Para ello, intercambiaremos unidades entre las casillas del camino O1-D2 de acuerdo a la siguiente figura:

O1-D2 - O1-D3 - O3-D3 - O3-D2

	D_1	D_2	D_3	
O_1	2 30	4 10	5 10 ~~10~~	40
O_2	3	3	2 20	20
O_3	5	3 ~~20~~ 20 10	4 ~~10~~ 20	40
	30	30	40	

Es muy importante respetar las condiciones dadas de oferta y demanda en todo momento.

Puedo pasar 10 unidades de O1-D3 a O1-D2, ahorrándonos un costo por unidad de (5) - (4) = 1 u.m./u.d.

Pero al hacer esto sumo 10 unidades a la columna D2. Para que se conserve el valor de demanda D2 de 30 unidades, deberé **simultáneamente** quitar otras 10 unidades de O3-D2 para pasarlas a otra casilla del camino. Siguiendo éste, será a la casilla O3-D3. Así compenso con las 10 unidades que hemos quitado a la columna D3, que en todo momento debe seguir sumando 40 unidades. Pero en esta última operación no ahorro, sino que pierde de O3-D2 a O3-D3, (3) – (4) = -1 u.m./u.d. Pero esta pérdida está compensada con el ahorro anterior de +1 u.m./u.d. En total la transferencia de unidades no supone ahorro ni pérdida alguna. Esto está de acuerdo con la evaluación nula de la trayectoria. La matriz resultante es la de la siguiente figura de la izquierda, de costo total:

	D_1	D_2	D_3	
O_1	2 30	4 10	5	40
O_2	3	3	2 20	20
O_3	5	3 20	4 20	40
	30	30	40	100

	D_1	D_2	D_3	
O_1	2 30	4 10	5 ~~10~~	40
O_2	3	3 10	2 20 10	20
O_3	5	3 ~~30~~ 20	4 ~~10~~ 20	40
	30	30	40	

$$C_t = (30 \times 2) + (10 \times 4) + (20 \times 2) + (20 \times 3) + (20 \times 4) =$$

$$= 60 + 40 + 40 + 60 + 80 = 280 \text{ u.m.}$$

Es el mismo costo, por ser una solución alternativa. Hemos intercambiado unidades en horizontal. Podríamos haberlo hecho en vertical con el mismo resultado (figura superior derecha)

VARIABLES FICTICIAS

Cuando la suma de todas las ofertas no coincida con la de las demandas, será preciso crear alguna fila o columna ficticia para poder aplicar los métodos de gestión de transporte.
Los costos asociados con dicha fila o columna ficticia son nulos, y su tratamiento es igual que si fuera un centro productor o de demanda más.
Veamos un ejemplo. Sea la matriz de la derecha.

	D_1	D_2	D_3	D_3	
O_1	2	4	6	5	25
O_2	3	2	4	3	25
O_3	5	4	6	1	25
	25	25	25	25	

Las fábricas son tres y producen un total de 75 unidades (oferta), mientras que los almacenes nos solicitan 25 unidades cada uno, siendo la demanda total 100 unidades. Dado que la demanda es mayor que la oferta, crearemos una oferta ficticia, una fila ficticia O4 y resolveremos la matriz por los modelos hasta aquí descriptos. El planteamiento es el de la siguiente figura. La fila ficticia tendrá una capacidad de:

$$F = D – 0 = 100 – 75 = 25 \text{ uds.}$$

	D_1	D_2	D_3	D_4		$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
O_1	2 / 25	4	6	5	25	2	2	2
O_2	3	2 / 25	4	3	25	1	1	1
O_3	5	4	6	1 / 25	25	3	3	X
F	0	0	0 / 25	0	25	0	X	X
	25	25	25	25	100			
$\triangle_1$	2	2	4	1				
$\triangle_2$	1	2	X	2				
$\triangle_3$	1	2	X	X				

Vamos a obtener una solución inicial por MAV.

El hecho de que a la casilla F – D3 se hayan asignado 25 unidades no quiere decir que D3 recibe las 25 unidades que necesita, ya que F en realidad no produce nada, pues no existe. La solución real se expresará eliminando la fila ficticia y sus asignaciones, tal lo demostrado en la siguiente figura.

	D_1	D_2	D_3	D_3	
O_1	2 / 25	4	6	5	25
O_2	3	2 / 25	4	3	25
O_3	5	4	6	1 / 25	25
	25	25	25	25	

EL METODO MODI

El método MODI (*Modified Distribution Method*) es otro modelo utilizado para la búsqueda de una solución óptima a partir de una básica o realizable. Algunos autores lo denominan también método de los costos ficticios, o modelo de la trayectoria. En realidad, los fundamentos teóricos en los que este método se apoya no difieren de los *stepping-stone* o ***paso a paso.***

Vamos a precisar de dichas justificaciones teóricas y desarrollaremos el MODI mediante un ejemplo. Sea la matriz de la siguiente figura, donde hemos obtenido la solución inicial por el método CM.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	8	6	4	2 400	3	400
O_2	3 100	5 200	11	9	6 120	420
O_3	10	7	6 300	8 100	9 100	500
	100	200	300	500	220	1320

Consideremos ahora la matriz de costos sólo (no de unidades asignadas) de la siguiente figura.

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
μ_1	O_1	8	6	4	2	3
μ_2	O_2	3	5	11	9	6
μ_3	O_3	10	7	6	8	9

Marcamos las casillas de costos donde ha habido asignaciones por la solución básica con un círculo. A continuación defino unas ***variables duales*** a calcular, μ y v, para cada fila y columna respectivamente. Seguidamente formo tantas ecuaciones como asignaciones haya en la forma:

$\mu 1 + vj = Cij$

Fijándonos en los costos unitarios Cij con un círculo formamos:

$\mu1 + v4 = 2$ $\mu2 + v1 = 3$ $\mu3 + v3 = 6$

$\mu2 + v2 = 5$ $\mu3 + v4 = 8$

$\mu2 + v5 = 6$ $\mu3 + v5 = 9$

Se puede asignar un valor cualquiera a una de las variables para ir resolviendo el sistema. Se elige el más fácil:

$\mu1 = 0$

Y vamos deduciendo los restantes valores de las variables μi y vj:

$\mu1 = 0$ $\mu1 = 0$

$\mu2 = 0$ $\mu2 = 2$

$\mu3 = 0$ $\mu3 = 0$

$\mu4 = 2$

$M5 = 3$

Formamos la tabla (μi + vj) cuya figura se representa en el encabezado siguiente página en su margen izquierdo.
A esta tabla se le resta la de costos originales casilla a casilla de la última tabla de esta página, obteniendo la figura siguiente de la derecha.
Del resultado de la matriz de la figura de la derecha debemos considerar la casilla que tenga el mayor valor positivo. En este caso la casilla O3-D2, que es la única positiva.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	$v_5 = 3$
$\mu_1 = 0$	0	2	0	2	3
$\mu_2 = 3$	3	5	3	5	6
$\mu_3 = 6$	6	8	6	8	9

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	-8	-4	-4	0	0
O_2	0	0	-8	-4	0
O_3	-4	1	0	0	0

Se debe pasar a otra solución, más cercana a la óptima, donde exista asignación en esa casilla. Para ello buscaremos una trayectoria cerrada con origen en dicha casilla (recordamos *stepping-stone*) y que pase por casillas de resultado cero (donde antes había asignaciones). Otras casillas no asignadas antes pueden dar cero.

Camino O3-D2: O3-D2 – O3-D5 – O2-D5 – O2-D2

Intercambiamos unidades a lo largo de este camino, respetando las condiciones de partida de oferta y demanda. Se reproduce el camino en la matriz de asignaciones de la siguiente figura.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	8	6	4	2 **400**	3	**400**
O_2	3 **100**	5 **200**	11	9	6 **120**	**420**
O_3	10	7	6 **300**	8 **100**	9 **100**	**500**
	100	**200**	**300**	**500**	**220**	**1320**

El máximo número de unidades a intercambiar entre las casillas de este camino viene dado por el número de unidades mínimo de estas casillas.

Pasamos 100 unidades de O3-D5 a O2-D5
y
Pasamos 100 unidades de O2-D2 a O3-D2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1				**400**		**400**
O_2	**100**	**100**			**220**	**420**
O_3		**100**	**300**	**100**		**500**
	100	**200**	**300**	**500**	**220**	**1320**

resultando la matriz de asignaciones anterior.
Sobre esta matriz se repite el proceso anterior hasta que todos los resultados en la matriz que resulta de restar la (μi + vj) de la original tengan todos los valores negativos.
Repitamos el proceso a continuación, esquematizado en las próximas tres figuras.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
μ_1	8	6	4	2	3
μ_2	3	5	11	9	6
μ_3	10	7	6	8	9

Ecuaciones μi + vj = Cij

μ1 + v4 = 2 μ2 + v1 = 3 μ3 + v2 = 7

μ2 + v2 = 5 μ3 + v3 = 6

μ2 + v5 = 6 μ3 + v4 = 8

Si μi = 0 → μ2 = 4

μ3 = 6

v1 = -1

v2 = 1

v3 = 0

v4 = 2

v5 = 2

Matriz (μi + vj):

	-1	1	0	2	2
0	-1	1	0	2	2
4	3	5	4	6	6
6	5	7	6	8	8

Matriz resta entre [matriz (μi + vj)] y matriz original.

-9	-5	-4	0	-1
0	0	-7	-3	0
-5	0	0	0	-1

Como todos los valores de la matriz de la última figura son negativos o nulos, la solución es la óptima.

CONSIDERACIONE GENERALES DE LOS MODELOS DE TRANSPORTE

Descripción del problema:

a) Un conjunto de puntos de suministro

b) Un conjunto de puntos de demanda

c) Costos(variables) en que se incurre por enviar desde un punto de suministro a uno de demanda.

En un problema de transporte puede haber maximización por ejemplo definiendo los coeficientes de la FO como márgenes de contribución.

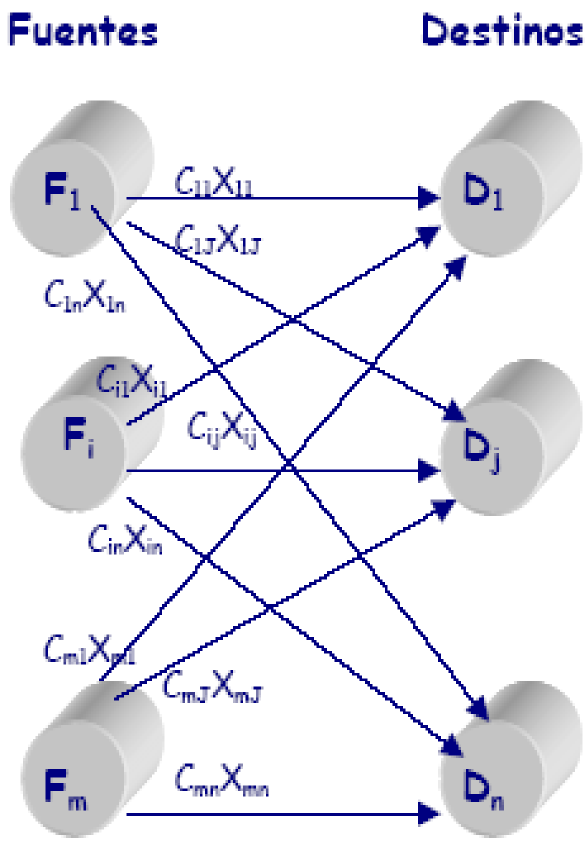
Un problema de transporte balanceado de m orígenes y n destinos debe tener cuando mucho m + n – 1 variables de decisión positivas en condiciones de optimalidad para no ser una solución degenerada.

Los modelos balanceados (O=D) tienen siempre una restricción redundante y por lo tanto el precio sombra de al menos una restricción será cero

Cuando se colocan orígenes o destinos ficticios se toma como su costo de abastecimiento cero. Se podría asignar costos unitarios a las variables que enlazan origen / destinos ficticio considerándolos como costo de oportunidad.

Capitulo 8: MODELO DE ASIGNACION

El problema de asignaciones es otro caso especial del problema del transporte, uno en el cual, todas las variables son de carácter binario (0,1) y a cada fuente se le debe asignar uno y solo un destino, y a cada destino una y solo una fuente.



Características del modelo

X_{ij} = 0 significa No asigne la fuente i-ésima al destino j-ésimo

X_{ij} = 1 significa Si asigne la fuente i-ésima al destino j-ésimo

a_i = 1 , para todo i ; a_{ij} = 1 , para todo i y para todo j
bj = 1 , para todo j ; m = n , Número de fuentes igual a número de destinos

C_{ij} = Costo de asignar la fuente i-ésima al destino j-ésimo
Gráficamente Para iniciar la aplicación del algoritmo, se debe igualar el número de fuentes al número de destinos, con fuentes ó destinos ficticios, si ello es necesario.

ALGORITMOS PARA MINIMIZAR

Se explicara aquí sintéticamente la mecánica de los algoritmos de resolución y luego se mostrara los procedimientos utilizando software de aplicación.

1. Construya una tabla de costos en la que el número de filas sea igual al número de columnas y en cada casilla figure el costo de asignar cada fuente (Filas) a cada destino (Columnas).
2. Reste el valor del elemento mínimo (Costo Mínimo) de cada fila a cada elemento de la fila. Con la tabla resultante, haga lo mismo pero para cada columna...
3. Examinar las filas y las columnas sucesivamente.

Para cada fila (Columna) que tenga exactamente uno y solo un cero, resérvelo para asignarlo (enciérrelo en un cuadrado), y no considere (Tache), los otros elementos cero de la correspondiente columna (Fila). Éste proceso se debe repetir hasta que todos los elementos cero estén reservados ó eliminados (Tachados). En caso de que sistemáticamente queden ceros no reservados ni tachados, después de recorrer repetitivamente las filas y las columnas, elija un cero al azar y resérvelo ó táchelo y proceda con el resto de los ceros, reservándolos ó tachándolos.
Si los elementos reservados para asignar, representan una asignación completa (A cada fuente le corresponde un destino y a cada destino le corresponde una fuente), se ha encontrado la solución óptima; de lo contrario pase al punto cuatro (4).

4. Cubrir todos los ceros (Reservados ó Tachados), con un número de líneas horizontales y verticales, igual al número de ceros reservados para asignar.
5. Examinar todos los elementos no cubiertos por una línea, escoger el mínimo de éstos y restarlo de todos los elementos no cubiertos; luego sumarlo a cada elemento que se encuentre en la intersección (Si la hay) de dos (2) líneas.
6. Ir al punto tres (3), para tratar de encontrar un solución completa.

Algoritmo para Maximizar

Restar del mayor de toda la tabla, todos los elementos de la tabla y proceda a minimizar con la tabla resultante.

APLICACION 1: Un taller ha comprado 3 máquinas nuevas de usos distintos. Hay 4 sitios posibles para estas máquinas, pero algunos de estos sitios son más preferibles que otros, por razón de costo de manejo de materiales, el objetivo es asignar las máquinas en los sitios, para minimizar el costo total de manejo de materiales.

Los costos de manejo de materiales, según se coloque cada máquina en cada sitio, son:

		SITIOS			
		1	2	3	4
MÁQUINAS	A	13	10	12	11
	B	15	X	13	20
	C	5	7	10	6

X = La máquina B no cabe en el sitio 2

Como m ≠ n (m = 3 y n = 4), adicionamos una máquina ficticia (Fila 4, Variables de holgura), que tienen coeficiente cero (0) en la función objetiva. Para evitar que la máquina B sea asignada al sitio 2, castigamos en la función objetiva con un costo muy alto (M) a la variable X_{22}, variable artificial.

El menor elemento de cada fila ha sido restado de todos los elementos de cada fila, en la fila 1 el menor costo es 10, luego los nuevos elementos de la fila 1 son: 13 – 10 = 3; 10 – 10 = 0; 12 – 10 = 2; 11 – 10 = 1; Al menos en cada fila debe quedar un cero (0), el del elemento más pequeño. Teniendo como referencia la tabla anterior, el menor elemento de cada columna ha sido restado de todos los elementos de cada columna. Como en cada columna hay un cero, la tabla queda igual a la anterior.

Ahora, intentamos hacer una asignación completa, para ello hacemos la siguiente pregunta clave para cada fila. HAY UN SOLO CERO (0) EN LA FILA?, SI ES ASI, RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA COLUMNA RESPECTIVA. Una vez recorridas todas la filas, hacemos la misma pregunta para cada columna. HAY UN SOLO CERO (0) EN LA COLUMNA ?, SI ES ASI RESÉRVELO PARA ASIGNARLO Y TACHE TODOS LOS CEROS DE LA FILA RESPECTIVA.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-10	0	7
0	2	5	1
0	$\cancel{0}$	0	0

¿Hay un solo cero en la fila 1?: Si, en la columna 2, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 2.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-10	$\boxed{0}$	7
0	2	5	1
0	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0

¿Hay un solo cero en la fila 2?: Si, en la columna 3, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 3.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-10	$\boxed{0}$	7
$\boxed{0}$	2	5	1
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	0

¿Hay un solo cero en la fila 3?: Si, en la columna 1, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 1.

3	$\boxed{0}$	2	1
2	M-10	$\boxed{0}$	7
$\boxed{0}$	2	5	1
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$

¿Hay un solo cero en la fila 4?: Si, en la columna 4, entonces lo reservamos y tachamos todos los ceros de la columna 4.

Fíjese que en el último tablero, todos los ceros han quedado, ó reservados ó tachados, no se hizo necesario recorrer las columnas.
Aquí existe una asignación completa, en atención a que a cada máquina le ha sido asignado un sitio y a cada sitio le hemos asignado una máquina, los sitios reservados los señalizamos con ceros encerrados en un cuadro.

Solución Óptima

La máquina A es asignada al sitio 2, con un costo de manejo de materiales de $10

La máquina B es asignada al sitio 3, con un costo de manejo de materiales de $13

La máquina C es asignada al sitio 1, con un costo de manejo de materiales de $ 5

La máquina D es asignada al sitio 4, con un costo de manejo de materiales de $ 0

La última asignación corresponde a la máquina de holgura D, colocada para hacer igual el número de máquinas al número de sitios; lo anterior significa que el sitio 4 quedará vacío y por el momento no se usará, al menos para colocar alguna de las máquinas disponibles de que trata el problema.

El costo óptimo de manejo de materiales es de $28; que se logra asignando las máquinas a los sitios señalados.

2	9	$\boxed{0}$	8	8
2	1	6	$\boxed{0}$	5
$\boxed{0}$	4	3	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
3	7	$\cancel{0}$	11	5
3	$\boxed{0}$	2	1	1

2	9	$\boxed{0}$	8	8
2	1	6	$\boxed{0}$	5
$\boxed{0}$	4	3	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
3	7	$\cancel{0}$	11	5
3	$\boxed{0}$	2	1	1

$\boxed{0}$	7	$\cancel{0}$	6	6
2	1	8	$\boxed{0}$	5
$\cancel{0}$	4	5	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
1	5	$\boxed{0}$	9	3
3	$\boxed{0}$	4	1	1

APLICACION 2 El jefe de un departamento, tiene 5 obreros y 5 trabajos para hacer, los obreros difieren en su eficiencia y los trabajos difieren en su dificultad intrínseca. El estimado de los tiempos que cada hombre tomará para hacer cada trabajo, está dado en la siguiente tabla.

		TRABAJADORES				
		1	2	3	4	5
TRABAJOS	A	11	17	8	16	20
	B	9	7	12	6	15
	C	13	16	15	12	16
	D	21	24	17	28	26
	E	14	10	12	11	15

¿Cómo deberán asignarse los trabajos, uno a cada obrero, para minimizar el total de horas hombre?

Cada trabajo debe ser ejecutado por uno y solo un obrero y a cada obrero solo le debe ser asignado uno y solo un trabajo.

Solución : Aquí, el número de fuentes es igual al número de destinos (El número de filas es igual al número de columnas) ó dicho de otra forma, el número de trabajos es igual al número de obreros, luego no se hace necesario ninguna variable de holgura.

Restamos el elemento más pequeño de cada fila a todos los elementos de cada fila.

11	17	8	16	20
9	7	12	6	15
13	16	15	12	16
21	24	17	28	26
14	10	12	11	15

Restamos el elemento más pequeño de cada columna a todos los elementos de cada columna.

3	9	0	8	12
3	1	6	0	9
1	4	3	0	4
4	7	0	11	9
4	0	2	1	5

No se logro una asignación completa, ya que al trabajador 3, no le fue asignado ningún trabajo. Entonces, con un número de líneas, horizontales y / ó verticales iguales al número de ceros reservados, tachamos todos los ceros.

Número de líneas = Número de ceros reservados = 4

De los elementos no tachados, escogemos el menor (2), lo restamos de todos los elementos no tachados y lo sumamos en las intersecciones que forman las líneas horizontales con las verticales. Si no hay intersecciones, no se suma.

Con la tabla resultante, intentamos nuevamente hacer una asignación completa.

Aquí, hemos logrado una asignación completa. A cada trabajo le hemos asignado un trabajador y a cada trabajador le hemos asignado un trabajo.

Solución

Al trabajo A, le asignamos el trabajador 1, quien empleará 11 horas.

Al trabajo B, le asignamos el trabajador 4, quien empleará 6 horas.

Al trabajo C, le asignamos el trabajador 5, quien empleará 16 horas.

Al trabajo D, le asignamos el trabajador 3, quien empleará 17 horas

Al trabajo E, le asignamos el trabajador 2, quien empleará 10 horas.

El tiempo total para ejecutar los 5 trabajos es de 60 horas.

En general el problema de asignación de trabajadores es del tipo:

VARIABLE: Xij = Operador i a asignar a la tarea j.

Donde: i = 1,2,3,4,5

J = 1,2,3,4,5

RESTRICCIONES:

Asignación de tareas.

MODELO MATEMATICO DE PL.

MAX Z = 12X11 + 16X12 + 24X13 + 8X14 + 12X15 +6X12 + 8X22 + 20X23 + 14X24 + 6X25 +10X31 + 6X32 + 26X33 + 18X34 + 12X35 + 2X41 + 4X42 + 2X43 + 24X44 + 20X45 +7X51 + 10X52 + 6X53 + 6X54 + 18X55

RESTRICCIONES DE ASIGNACIÒN DE OPERADOR A TAREA (OP/TAREA).

X11 + X21 + X31 + X41 + X51 = 1

X12 + X22 + X32 + X42 + X52 = 1

X13 + X23 + X33 + X43 + X53 = 1

X14 + X24 + X34 + X44 + X54 = 1

X15 + X25 + X35 + X45 + X55 = 1

RESTRICCIÒN DE ASIGNACIÒN DE TAREAS A OPERADOR (TAREA/OP).

X11 + X12 + X13 + X14 + X15 = 1

X21 + X22 + X23 + X24 + X25 = 1

X31 + X23 + X33 + X34 + X35 = 1

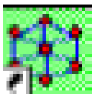
X41 + X42 + X43 + X44 + X45 = 1

X51 + X52 + X53 + X54 + X55 = 1

Xi >= 0

Para ilustrar el uso del software WinQsb e Invop, usaremos los datos numéricos del ejemplo 2.

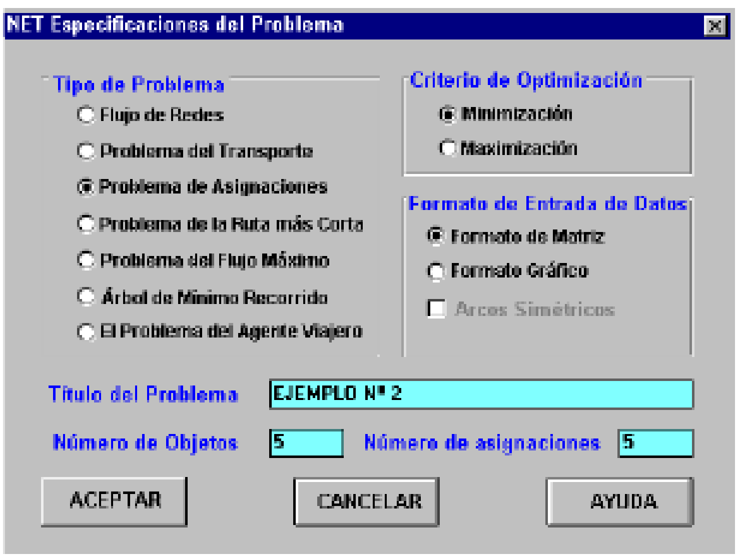
SOFTWARE DE APLICACIÓN : EL WIN QSB



El problema de asignaciones en el WinQsb, forma parte del módulo de redes y el ingreso de datos se efectúa mediante la ventana que se presenta abajo:

Los datos requeridos son los mismos que para el problema del transporte.

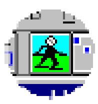
Los datos se pueden ingresar de dos formas: En una matriz ó tablero de doble entrada ó de forma gráfica.



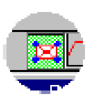
A continuación se ilustra el ingreso de datos en la matriz ó tabla de doble entrada. Fíjese que la siguiente tabla en comparación con la ofrecida en el problema del transporte, carece de disponibilidades y requerimientos.

Desde \ Hasta	TRABAJADOR 1	TRABAJADOR 2	TRABAJADOR 3	TRABAJADOR 4	TRABAJADOR 5
TRABAJO A	11	17	8	16	20
TRABAJO B	9	7	12	6	15
TRABAJO C	13	16	15	12	16
TRABAJO D	21	24	17	28	26
TRABAJO E	14	10	12	11	15

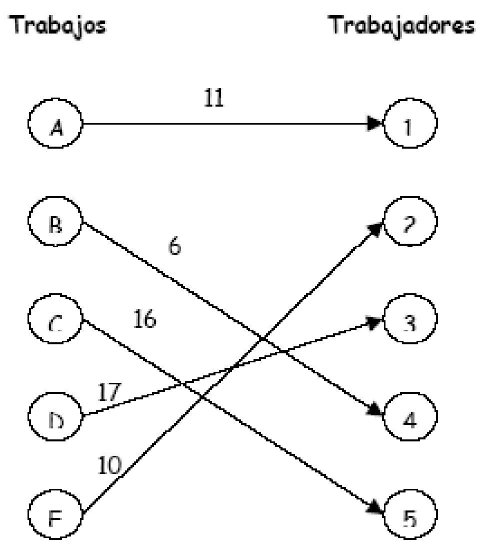
06-29-2001	Desde	Hasta	Asignación	Horas	Horas Totales	Costo Reducido
1	TRABAJO A	Trabajador 1	1	11	11	0
2	TRABAJO B	Trabajador 4	1	6	6	0
3	TRABAJO C	Trabajador 5	1	16	16	0
4	TRABAJO D	Trabajador 3	1	17	17	0
5	TRABAJO E	Trabajador 2	1	10	10	0
	Valor Total de la Función Objetivo				60	



Para solucionar el problema, se da clic sobre el icono que aparece en la parte superior, hacia el centro de la ventana; entonces el WinQsb le ofrecerá una ventana con la respuesta óptima del problema, mostrando en ella, que trabajador se debe asignar a cada uno de los cinco trabajos.



Si se usa éste icono, el WinQsb nos ilustrará mediante una red la respectiv respuesta óptima al problema.



SOFTWARE DE APLICACIÓN : EL SOLVER DEL MS EXCEL

Utilizaremos un ejemplo similar a los resueltos:

Se tienen tres personas (recurso) para asignarlos a tres labores diferentes. Cada uno de ellos puede efectuar cualquiera de las tareas existentes, pero con diferente nivel de especialidad. Sus respectivos jefes los han calificado de 1 a 10, para cada tarea en particular. Por supuesto el objetivo es el de asignar a las personas de manera tal que la calificación en conjunto sea la máxima. Ver tabla de calificaciones abajo.

Nota: También funciona para minimizar. Por ejemplo, en vez de calificación podrían ser tiempos de manufactura de cualquier tipo de productos, y el objetivo sería el de minimizar el tiempo total de manufactura.

Calificación de Operario por Tarea			
	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Operario 1	8	6	4
Operario 2	9	7	3
Operario 3	6	5	7

$X_{ij} = 1$ si asignamos el operario i a la tarea j, de lo contrario 0

En éste orden de ideas, nuestro deseo es maximizar la calificación total al asignar los operarios a las diferentes tareas.

$\text{Max } Z = 8X_{11} + 6X_{12} + 4X_{13} + 9X_{21} + 7X_{22} + 3X_{33} + 6X_{31} + 5X_{32} + 7X_{33}$

Sujeto a:

1. Cada operario sólo puede tener una tarea asignada

$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$ (Es decir, sólo se puede responder Si una sóla vez.)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

2. Cada tarea puede tener un sólo operario asignado (la restricción anterior no necesariamente garantiza esto, seguro!)

X11 + X21 + X31 = 1
X12 + X22 + X32 = 1
X13 + X23 + X33 = 1

3. La obvia: Xij = 0,1 para toda i y toda j.

Ahora en Excel...

Este puede ser el formato:

	A	B	C	D	E
1	Ejemplo del	Problema de asignacion			
2	Max Calific:	0			
3		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Suma
4	Operario 1				0
5	Operario 2				0
6	Operario 3				0
7	Suma	0	0	0	
8					
9	Matriz	8	6	7	
10	de	9	7	3	
11	Calificación	6	5	7	

Las variables de decisión, están localizadas en el rango de celdas B4:D6, como ya habíamos dicho son binarias, van a tomar el valor de 1 si se asigna ese operario a esa tarea, cero de lo contrario. La calificación que se logre está en la celda B2, y es el resultado de sumar el producto de dichas variables con su respectiva calificación en la matriz de abajo. Ya se había dicho que esto se logra fácilmente así: =SUMAPRODUCTO(B4:D6,B9:D11). Como un operario sólo se puede asignar a una tarea, colocamos una columna de Suma (E), ésta es por ejemplo para la celda E4: =B4+C4+D4. Cuando agreguemos las restricciones, ésta columna debe ser igual a uno, pues sólo se puede responder que si una vez, ni más, ni menos. De igual manera agregamos una fila (7), para asegurarnos que a una tarea sólo se asigne un operario, por ejemplo la celda B7: =B4+B5+B6 Deberá ser igual a 1. Ahora en el cuadro de diálogo de los parámetros de Solver, lo colocamos así:

Luego de hacer click en resolver...

	A	B	C	D	E
1	Ejemplo del Problema de asignacion				
2	Max Calific:	22			
3		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Suma
4	Operario 1	0	1	0	1
5	Operario 2	1	0	0	1
6	Operario 3	0	0	1	1
7	Suma	1	1	1	
8					
9	Matriz	8	6	7	
10	de	9	7	3	
11	Calificación	6	5	7	

La calificación máxima lograda es de 22. Y se asignó el operario 1 a la tarea 2, el operario 2 a la tarea 1 y el operario 3 a la tarea 3. Fácil, no?

Para los programas Lineales enteros es muy importante que Solver, esté debidamente configurado para un número suficiente de iteraciones, de tiempo, de precisión y de convergencia, para esto ver los detalles de Solver.

Como mencionamos el problema de asignación es un tipo especial de problema de Programación lineal en el que los Asignados son recursos que se destinan a tareas.

Los asignados pueden ser personas tanto como maquinas, vehículos, plantas etc. Para este tipo de aplicaciones se deben cumplir las siguientes suposiciones:

2. El numero de asignados es igual al numero de tareas
3. Cada asignado tiene una tarea asignada.
4. Cada tarea se debe realizar por un solo asignado
5. Existen costos asociados para cada asignado que realiza una determinada tarea
6. El objetivo es minimizar los costos totales con las asignaciones

Capitulo 9: OPTIMIZACION CON ENTEROS (PLE)

La programación lineal estándar asume que las variables de decisión son continuas. Sin embargo, en muchas aplicaciones los valores continuos no nos proporcionan valores factibles (por ejemplo 2,5 empleados). Por otro lado, como sabemos, dado que la programación lineal de enteros es difícil de resolver, alguien diría:¿entonces por qué preocuparme?, ¿Por qué no simplemente utilizamos la programación lineal estándar y redondeamos la respuesta al entero más cercano? Desafortunadamente, existen dos problemas con esto:

- La solución redondeada podría ser improbable;
- Redondear podría no general una solución óptima.

Por lo tanto, redondeando los resultados de una programación lineal puede proporcionar respuestas razonables, pero para garantizar soluciones óptimas debemos utilizar programación lineal de enteros.

La diferencia entre la programación lineal y la entera radica en la diferencia que la PL se maximiza o minimiza una función sobre una región de factibilidad convexa, mientras en la PLE la región de factibilidad generalmente no es convexa. Por tanto la solución de problemas enteros es de magnitud mas complicada.

Por defecto, el software de PL asume que todas las variables son continuas. Si usamos el software **Lindo** utilizaremos la herramienta de enteros GIN.

GIN seguido por una variable nombre que restringe el valor de la variable a enteros no-negativos (0,1,2,..). El pequeño ejemplo siguiente ilustra el uso de la aplicación .

Max 11X1 + 10X2

S. A. 2X1 + X2 $\leq$ 12

X1 - 3X2 $\geq$ 1

ENDl

GIN X1

GIN X2

El resultado luego de 7 iteraciones es:

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 66,00000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
X1	6,000000	-11,000000
X2	0,000000	-10,000000

FILA	DÉFICIT O SUPERAVIT (HOLGURA O EXCEDENTE)
2)	0,000000
3)	5,000000

Si no hubiéramos especificado que X1 y X2 son enteros en este modelo, LINDO no hubiera podido encontrar la solución óptima de X1 = 6 y X2 = 0. En vez, LINDO hubiera tratado a X1 y X2 como continuas y la solución sería X1 = 5,29 y X2 = 1,43.

Adicionalmente, note que simplemente redondeando (o aproximando) la solución continua al entero más próximo no genera la solución óptima en este ejemplo. En general, redondeando soluciones continuas no darían óptimos y, peor aún, serian no-factibles. Basado en esto, se podría imaginar que sería muy lento el encontrar una solución óptima a un modelo con muchas variables enteras. En general esto es cierto, y se estaría en una mejor posición si se utiliza el GIN solo cuando sea absolutamente necesario.

Como nota final, el comando GIN también acepta un argumento de valor entero en el lugar de la variable nombre. El número corresponde al número que se quiere que sean variables enteras generales. Estas variables deben aparecer primero en la formulación.. Por lo tanto, en este ejemplo simple, podríamos haber reemplazado nuestras dos GIN planteadas con la simple: GIN 2.

La mayoría de los paquetes comerciales utilizan el algoritmo Branch-and-bound (ramificación y acotación) y el Branch-and-cut para resolver programación de enteros. El primer paso es llevar el problema de programación de enteros a un problema de programación lineal. Sin embargo, algunos software, tales como el ILOG CPLEX (www.ilog.com) ejecutarán automáticamente los métodos heurísticos para aproximar la programación lineal para obtener una buena (y confiable) solución a la programación de enteros. La diferencia entre hacer este procedimiento usted mismo y dejar que un solucionador de programación de enteros lo haga, es que este último podría considerar los reembolsos de las restricciones y rechazar cualquier solución aproximada que la viole.

APLICACIONES DE LA PLE. CASOS. Relaciones condicionales

- **Aplicación de Programación de Enteros Mixtos y a Restricciones tipo " una O la otra"(y-o)**

Suponga que una panadería vende ocho tipos diferentes de pasteles. La preparación de las variedades 1, 2, y 3 envuelve un proceso complicado, por lo tanto la panadería ha decidido que es preferible no preparar este tipo de pasteles al menos que se puedan vender por lo menos 10 docenas de las variedades 1, 2 y 3 combinadas. Suponga también que la capacidad de la panadería limita que se produzcan más de 30 docenas de pasteles, y que la utilidad por unidad j de pastel es P_j \$. Si dejamos que Xj, j = 1, 2, … ,6 indique el número de docenas de pasteles tipo j a ser horneados, el beneficio máximo puede ser encontrado resolviendo el problema siguiente (asumiendo que la panadería puede vender todo lo que hornea):

Maximizar $Z = \sum P_j X_j$
Sujeto a las restricciones: $\sum X_j <= 30$
$X1 + X2 + X3 = 0$,
OR,
$X1 + X2 + X3 >= 10$

Donde todas las variables son no-negativas. La restricción anterior "ya sea una ó la otra" puede ser manejada de la siguiente manera: Deje que y sea una variable 0-1.

Luego, el problema equivalente es:

Maximizar $Z = \sum P_j X_j$
Sujeto a: $\sum X_j <= 30$
$X1 + X2 + X3 - 30y <= 0$,
$X1 + X2 + X3 - 10y >= 10$
$X_j > = 0$, $y = 0$, o 1.

- **Relaciones de tipo condicionales entre restricciones**

Suponga que, para que cierta variable X sea positiva, es necesario que otra variable Y exceda cierto valor umbral. Este enunciado condicional puede ser reformulado como:

$(x = 0)$ ó $(y >= a)$.

Dado que este enunciado condicional puede ser expresado como un enunciado tipo " o el uno- o el otro" mediante la negación de la hipótesis, el enunciado " o el uno- o el otro" puede ser expresado como:

$X <= dM$, $y >= ad$, $0 \leq d \leq 1$, siendo d entero

Donde M es un número positivo grande.

- **Caso Restricciones tipo 0-1 (On-Off)** Suponga que deseamos que una variable tome el valor "a" ó de lo contrario sea 0. Es fácil de cumplir esto mediante la siguiente condición: $X = da$; $0 <= d <=1$ siendo d un entero.

Obviamente, que si d satisface las dos últimas condiciones, el único valor posible que puede tomar son 0 y 1. Por lo tanto, si $d = 0$, entonces $x = 0$, y si $d = 1$, entonces $X = a$, tal como se requería.

- **Caso de Intervalos tipo Encendido - Apagado(On-Off)**

Suponga que queremos que x tome el valor de 0 ó que este en el intervalo fijo entre a y b. Las desigualdades cumplen estos requerimientos son : $da <= X <= db$; $0 < d < 1$ y d entero.

Obviamente, si $d = 0$, entonces $x = 0$, y si $d = 1$, entonces x satisface $a <=X <= b$. Estas son los únicos valores posibles para d.

- **Caso de una Variable Discreta Definida**

Suponga que una variable X tomo solo un número finito de valores de a1, a2,……hasta an.

$X = a1d1 + a2d2 + \ldots + andn$, $\sum di = 1$, $0 < di < 1$ siendo di un entero.

Note que la condición sobre los di's requiere que exactamente uno de ellos debe ser 1 y el resto 0. Y si $di = 1$, entonces $X = ai$.

- **Programas Lineales de Enteros 0 - 1**

Utilizando el comando INT en LINDO se restringe una variable a tomar valores 0 ó 1. Estas variables están referidas con frecuencia como variables binarias. En muchas aplicaciones, las variables binarias pueden ser de mucha utilidad para modelar situaciones de todo-o- nada. Algunos ejemplos podrían incluir el tomar en cuenta un costo fijo, construir una nueva planta, o comprar un número mínimo de cierto insumo para recibir descuento por cantidades.

Consideremos el siguiente problema

Maximizar 11X1 + 9X2 + 8X3 + 15X4
Sujeto a: 4X1 + 3X2 + 2X3 + 5X4 <= 8, y cualquier Xi es 0 ó 1.

Dado que este es un problema pequeño en tamaño, existen 4 variables que cada una puede tener 2 valores, existen $2^4 = 16$ posibilidades. Probando todas las 16 posibilidades de forma tal de identificar una solución óptima (si es que existe alguna) es un trabajo tedioso. Por lo tanto se debería utilizar el software de Programación Lineal de Enteros para resolver este problema y otros de mayor escala.

Utilizando LINDO, la formulación del problema es:

```
Max 11X1 + 9X2 + 8X3 + 15X4
s.a. 4X1 + 3X2 + 2X3 + 5X4 <= 8
END
INT X1
INT X2
INT X3
INT X4
```

Luego haga clic en SOLVE. El output muestra la solución óptima y el valor óptimo luego de 8 iteraciones del algoritmo Branch-and-bound.

Note que en vez de repetir cuatro veces el INT, se pude utilizar el INT 4. Las primeras cuatro variables aparecen en la función objetivo.

VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO

1) 24,00000

VARIABLE	VALOR	COSTO REDUCIDO
X1	0,000000	-11,000000
X2	1,000000	-9,000000
X3	0,000000	-8,000000

X4 1,000000 -15,000000

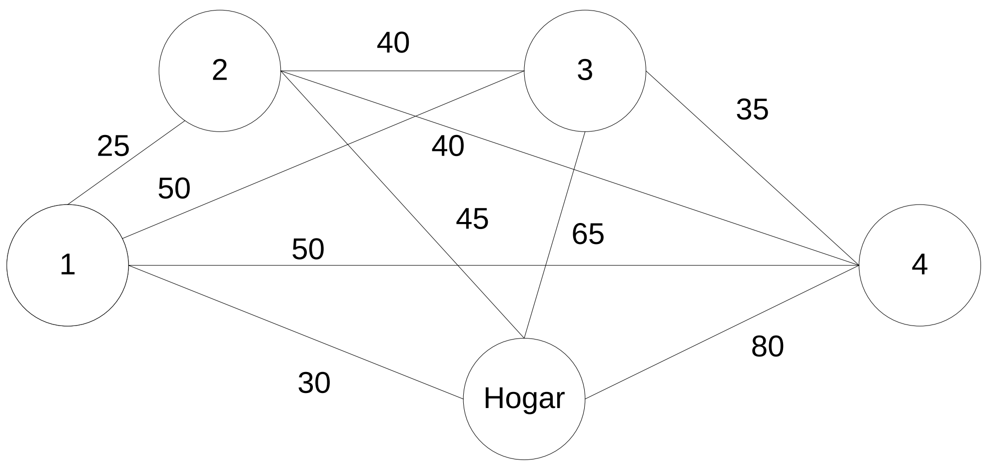
FILA DEFICT O SUPERÁVIT PRECIO DUAL

2) 0,000000 0,000000

NO. DE ITERACIONES = 8

APLICACIÓN FORMULACION PARA EL PROBLEMA DEL VENDEDOR

Un vendedor debe visitar las ciudades 1, 2,..n, y su viaje comienza y debe finalizar en Ciudad Hogar. Dejemos que C_{ij} sea el costo de viajar de la ciudad i a la ciudad j, el cual es dado. El problema es determinar una orden óptima para viajar las ciudades de tal forma que el costo sea mínimo. Considere el siguiente problema clásico llamado el problema del viajante:



$$Min\sum_i \sum_j d_{ij} X_{ij}$$

$$sa\sum_j X_{ij} = 1 \forall i$$

$$\sum_i X_{ij} = 1 \forall j$$

$$X_{ij} = 0 o 1$$

$$\sum_i \sum_j X_{ij} \leq$$

Esto ultimo debe ser menor que el numero de arcos

La formulación de programación lineal es:

Min 30x01 + 45x02 +65x03+ 80x04 + 25x12 + 50x13+ 50x14
+ 40x23+ 40x24 + 35x34 +30X10 +45X20+ 25X21 +65X30 + 50X31
+ 40X32 + 80X40+ 50X41+ 40X42 +35X43

Sujeto a:

X01+ X02+ X03+ X04=1
X01+ X02+ X03+ X04=1
x10+ x12+ x13+ x14=1
x20+ x21+ x23+ x24=1
x30+ x31+ x32+ x34=1
x40+ x41+ x42+ x43=1
X10+ X20+ X30+ X40=1
X01+ X21+ X31+ X33=1
x02+ X12+ X32+ X42=1
X03+ X13+ X23+ X43=1
X04+ X14+ X24+ X34=1

Todos los Xij = 0, ó 1
La solución a este problema de programación lineal produce los sub-viajes (0, 1, 2). Necesitamos introducir una restricción de viajes tal como

X01 + X10 + X12 + X21+ X02 + X20 >= 2

Agregando esta restricción adicional y resolviendo, necesitamos otra restricción de viaje, la cual es:

X01 + X10 **>=** 1,

Agregando este, el camino óptimo es: Ciudad Hogar a la ciudad 1, de ciudad 1 a ciudad 2, de ciudad 2 a ciudad 4, de ciudad 4 a ciudad 3 y de ciudad 3 a ciudad hogar, con una longitud total de 195 unidades.

FORMULACION PARA PRESUPUESTO DE CAPITALES

Suponga que una compañía de Investigación y Desarrollo (R & D) tiene una cantidad de dinero disponible para invertir de D Dólares. La compañía ha determinado que existen N proyectos de inversión alternativas y que por lo menos d_j dólares deben ser invertidos en el proyecto j si se decide que dicho proyecto amerita la inversión. La ganancia neta que la compañía podría obtener si invierte en el proyecto j es P_j dólares. El dilema de la compañía es que no puede invertir en todos los N proyectos porque $\sum \mathbf{d_j} > D$. Por lo tanto, la compañía debe decidir en cual proyecto invertir de forma tal de maximizar su utilidad.

Para resolver este problema al asesor formula el siguiente problema:

Pongamos que $X_j = 1$, si la compañía invierte en el proyecto j, y $X_j = 0$ si no lo hace, el monto total a ser invertido es por lo tanto $\sum d_j X_j$, y dado que este monto no puede exceder D dólares, tenemos la restricción siguiente:

$\sum d_j X_j <= D$

La utilidad total será $\sum P_j X_j$. Por lo tanto la compañía desea un problema tipo 0-1:

Maximizar $Z= \sum P_j X_j$
Sujeto a: $\sum d_j X_j \mathbf{<=} D$, $X_j = 0$, OR 1.

LA PROGRAMACION DE HORARIOS: Ejp. Turnos de Enfermeras

Para utilizar el trabajo como recurso lo más eficiente posible, es importante analizar los requerimientos de mano de obra varias veces al día. Esto es especialmente cierto en grandes compañías en las cuales las demandas de los clientes son repetitivas, pero cambian significativamente durante diferentes horas.

Por ejemplo, se necesitan más operadores telefónicos durante el horario comprendido desde el medio día hasta las 2:00p.m. y también desde la media noche hasta las 2:00 a.m. Sin embargo, muchos de estos operadores deben estar en servicio desde tempranas horas de la mañana. Dado que dichos empleados normalmente trabajan jornadas de 8 horas de trabajo, sería posible planificar sus horarios de trabajo de tal manera que una simple jornada pueda cubrir dos o más de estos “periodos pico” de demanda. Mediante el diseño de horarios inteligentes, la productividad del operador incrementaría, generando un grupo de trabajo menos numeroso, y una reducción de gastos de nómina. Entre otros ejemplos en el cual los modelos de horario de empleados tienen bastante utilidad se encuentran los conductores de autobuses, controladores de tráfico aéreo, y las enfermeras.

El siguiente es un ejemplo de problema y desarrollo de un modelo de programación lineal para el horario de trabajo de enfermeras.
Los hospitales enfrentan constantemente problemas con el horario de trabajo de sus enfermeras. Un modelo de planificación de horarios es un problema de programación de enteros para minimizar el número total de trabajadores sujeto a un número específico de enfermeras durante cada período del día.

Período	**Turno del Día**	**Número Requerido de Enfermeras**
1	8:00 - 10:00	10
2	10:00 - 12:00	8
3	12:00 - 02:00	9
4	02:00 - 04:00	11
5	04:00 - 06:00	13
6	06:00 - 08:00	8
7	08:00 - 10:00	5
8	10:00 - 12:00	3

Dado que cada enfermera trabaja jornadas de 8 horas diarias, él/ ella puede comenzar a trabajar al comienzo de cualquiera de los primeros cinco períodos: 8:00, 10:00, 12:00, 2:00 ó 4:00. En este ejemplo, no consideramos los períodos que comienzan en horas impares tales como las 9:00, 11:00, etc. Adicionalmente, no se necesita ninguna enfermera que comience a trabajar después de las 4:00, dado que su horario se extendería hasta después de la media noche cuando no son necesarias. Cada período es de 2 horas, por lo tanto cada enfermera que se presente a trabajar en el período t trabajará también t + 1, t + 2, y t + 3 --- es decir, 8 horas consecutivas. La pregunta es: ¿Cuantas enfermeras se deben reportar a trabajar durante cada período de forma tal de cumplir los requerimientos especificados en la tabla anterior?

Para modelar este problema, dejemos que X_t sea la variable de decisión la cual denota el número de enfermeras que comenzaran a trabajar en el período t. La fuerza laboral total, la cual deseamos minimizar es $\sum X_t$. Durante el período de tiempo 1, por lo menos 10 agentes deben estar al servicio, por lo tanto debemos tener $X_1 >= 10$. Similarmente, los requerimientos en el período 2 solo pueden ser cubiertos por $X_1 + X_2 >= 8$. De esta forma, escribimos los requerimientos para los períodos restantes. Estos son:

$X_1 + X_2 + X_3 >= 9$,
$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 >= 11$,
$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 >= 13$,
$X_3 + X_4 + X_5 >= 8$,
$X_4 + X_5 >= 5$,
$X_5 >= 3$,
Todas las variables son enteros.

Note que X_1 no es incluida en la restricción para el período de tiempo 5, dado que las enfermeras que comienzan en el período 1 no están trabando para el período 5. Adicionalmente, observe que podría ser necesario tener un número mayor de enfermeras que el requerimiento en algunos períodos. Por ejemplo, vemos que la primera restricción muestra que el número de enfermeras que comienzan a trabajar en el período 1 debe ser por lo menos 10. Todas estas enfermeras estarán trabajando para el período 2, pero solo 8 agentes las requieren. Por lo tanto igualmente si $X_2 = 0$, existirán 2 enfermeras extras trabajando durante el período 2.

Enfermeras Requeridas por Turno

Comienzo de Turno	:-10	-12	12- 2	2- 4	4- 6	6- 8	:-10
Enfermeras Requeridas	10	8	9	11	13	8	5
Enfermeras Asignadas	10	10	18	20	13	13	5
Variable	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
Enfermeras Comenzando en Turno	10	0	8	2	3	0	0
Total de Enfermeras Requeridas	23						

Aplicaciones al Marketing: Caso de Inversión en Publicidad

Suponga que existen 5 periódicos diferentes que son publicados en cierto país. Cada periódico cubre algunas de las nueve regiones del país, tal y como es mostrado en la tabla siguiente:

# de Periódico	**Región Cubierta**	**Costo por Publicidad**	**Beneficios por Publicidad**
1	1,2,3	3	12
2	2,3,6	4	10
3	4,5,6	3	14
4	5,7,8	7	19
5	6,8,9	5	16

El problema del gerente de Marketing es encontrar el costo mínimo total de forma tal que la publicidad alcance a todas las áreas del país. Este problema puede ser formulado como una programación lineal de tipo 0- 1:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Minimizar} & C = 3y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 5y_5 & & & \\
\text{s.a.} & y_1 & <= & 1 & \text{(Región 1)} \\
 & y_1 + y_2 & <= & 1 & \text{(Región 2)} \\
 & y_1 + y_2 & <= & 1 & \text{(Región 3)} \\
 & y_3 & <= & 1 & \text{(Región 4)} \\
 & y_3 + y_4 & <= & 1 & \text{(Región 5)} \\
 & y_2 + y_3 + y_5 & <= & 1 & \text{(Región 6)} \\
 & y_4 & <= & 1 & \text{(Región 7)} \\
 & y_4 + y_5 & <= & 1 & \text{(Región 8)} \\
 & y_5 & <= & 1 & \text{(Región 9)}
\end{array}
$$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1, \text{ para todos los } j$$

La solución óptima es hacer publicidad en los periódicos 1, 3, 4, y 5 con un costo total de $18,00. Esta solución es el costo mínimo asociado con la cobertura en cada una de las nueve áreas.

OPTIMIZACION DE OPERACIONES: Minimización desperdicio

Suponga que un almacén de maderas ofrece láminas de 10 metros, las cuales son cortadas en 3 metros, 4 metros y 5 metros dependiendo de las exigencias de los clientes. La lámina de madera de 10 metros puede ser cortada en 6 patrones de corte tal y como se muestra en la tabla siguiente:

Patrón	3 metros	4 metros	5 metros	Desperdicio (Mts.)
1	3	0	0	1
2	2	1	0	0
3	1	0	1	2
4	0	1	1	1
5	0	2	0	2
6	0	0	2	0

Existen otros patrones posibles pero que no son aplicables; por lo tanto, se podría cortar una lámina de madera de 10 metros en una de 3 metros y una de 4 metros dejando un desperdicio de 3 metros. Esto no tendría sentido dado que 3 metros de desperdicio podrían ser utilizados como una pieza de 3 metros, así como se muestra en el patrón 2. Si algún cliente ordena 50 láminas de 3 metros, 65 de 4 metros, y 40 de 5 metros. La pregunta sería cuantas láminas de 10 metros se necesitan para cortar estas órdenes, y que patrón se debería utilizar?

Para modelar este problema de decisión, denotemos por y_j el número de láminas de 10 metros a cortar de acuerdo al patrón *j, j* =1, ..., 6. Sea la demanda 50(3) + 65(4) + 40(5) = 610 metros, la cantidad de láminas realmente cortadas es:

$10(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$,

y por lo tanto el desperdicio total es:

$10(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) - 610$.

Esto implica que cuando nosotros:

minimizamos $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$,
el número total de láminas de 10 metros que necesitan ser cortadas, también minimizamos el desperdicio total, y vise versa. El número real de láminas de 3 metros obtenidas en el proceso de cortar es:

$3y_1 + 2y_2 + y_3$,
y por lo tanto:
$3y_1 + 2y_2 + y_3 >= 50$

debe mantenerse con el objetivo de satisfacer la demanda por láminas de 3 metros. De forma similar,
$y_2 + y_4 + 2y_5 >= 65$

para satisfacer la demanda de láminas de 4 metros y
$y_3 + y_4 + 2y_6 >=40$

para las láminas de 5 metros. Dado que las variables y_j deben ser enteros no negativos, $j = 1, ..., 6$, podemos resumir la formulación de *cortar las reservas* como:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P: Min} & z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 & \text{(Láminas de 10 metros)} \\
\text{s.a.} & 3y_1 + 2y_2 + y_3 & >= 50 \text{ (Láminas de 3 metros)} \\
 & y_2 + y_4 + 2y_5 & >= 65 \text{ (Láminas de 4 metros)} \\
 & y_3 + y_4 + 2y_6 & >= 40 \text{ (Láminas de 5 metros)} \\
 & y_j \text{ son enteros no negativos, } j = 1, .., 6 &
\end{array}
$$

La solución óptima a este problema, utilizando software, es cortar un total de 65 láminas de 10 metros y utilizar 25 veces el parámetro # 2 y 20 veces cada uno de los parámetros #5 y #6. El desperdicio total sería 25 x 0 +20 x 2 + 20 x 0 = 40 metros.

El ejemplo anterior ilustra una instancia simple del problema de cortar reservas o cortar pérdidas, el cual es ampliamente utilizado cuando se debe minimizar la cantidad de desperdicio. Este ejemplo se refiere a una situación unidimensional (la longitud de la lámina).

APLICACIÓN: Mezcla de componentes

Una compañía de químicos está produciendo dos tipos de sustancias (A y B) que requieren tres tipos de materia prima (I, II, y III). Los requerimientos en la composición de las tres sustancias así como también la utilidad son mostrados a continuación:

Sustancia	Composición	Utilidad por Kg.
A	No más de 20% de I No más de 10% de II Por lo menos 20% de III	10
B	No más de 40% de I No mas de 50% de III	8

La cantidad de material disponible así como también los costos de tratamiento se muestran a continuación:

Materia Prima	MontoDisponible (Kg.)	Costos de Procesamiento /Kg.
I	400	4
II	500	5
III	300	6

El problema de la compañía es encontrar cuanta sustancia producir, y a qué nivel de composición de forma tal de maximizar la utilidad.

Dado que tenemos 2 sustancias y tres materiales, introducimos 6 (=2 x 3) variables de decisión x_{ij}, i = A, B, y *j* = I, II, III.

Por ejemplo, X_{BIII} es el monto de materia prima III en la sustancia B. La función objetivo es maximizar la utilidad menos los costos de procesamiento:

$$\max 10(x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII}) + 8(x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII}) - 4(x_{AI} + x_{BI}) - 5(x_{AII} + x_{BII}) - 6(x_{AIII} + x_{BIII})$$

Volviendo a escribir esto en términos de las 6 variables de decisión, el problema equivalente es:

max: $6x_{AI} + 5x_{AII} + 4x_{AIII} + 4x_{BI} + 3x_{BII} + 2x_{BIII}$

Las restricciones de materiales son:

$x_{AI} + x_{BI} <= 400$
$x_{AII} + x_{BII} <= 500$
$x_{AIII} + x_{BIII} <= 300.$

La composición de las restricciones es:

$0,2(x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII}) <= x_{AI}$

$0,1(x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII}) <= x_{AII}$

$0,2(x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII}) <= x_{AIII}$

$0,4(x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII}) <= x_{BI}$

$0,5(x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII}) <= x_{BIIII}$

De la primera desigualdad en la tabla anterior, se puede derivar la restricción siguiente:

$-0,8x_{AI} + 0,2x_{AII} + 0,2x_{AIII}$

Por lo tanto nuestro problema tiene cinco restricciones de la tabla anterior más tres restricciones de materiales, y una función objetivo. Adicionalmente, requerimos que las variables de decisiones, x_{ij}, tome solo valores de enteros no-negativos.

Utilizando un soft de computadora, la solución óptima es:

$x_{AI} = 85$, $x_{AII} = 42$, $x_{AIII} = 299$, $x_{BI} = 306$, $x_{BII} = 458$, $x_{BIII} = 1$,

con una ganancia total de 4.516.

Esto significa que la compañía debería producir 426 Kg. de la sustancia A y 765 Kg. de la sustancia B. De los 400 Kg. del material I solo 391 Kg. es usado, mientras que todos los 500 Kg. del material II y todos los 300 Kg. del material III son utilizados.

LA PROGRAMACIÓN LINEAL CONTINÚA Y ENTERA EN MS EXCEL

Suponga que Chemistry Inc, manufactura Acido Sulfúrico y desearía determinar un plan agregado para los siguientes seis meses. Actualmente la empresa tiene 70 trabajadores y 9000 litros de ácido en inventario. Cada trabajador puede producir 100 litros al mes y le pagan 5 $ hora (160 horas de tiempo normal al mes). El tiempo extra se paga al 150% del costo normal. Se puede utilizar hasta un máximo del 20% adicional al tiempo normal en cualquier mes dado. Cuesta 80 centavos almacenar una litro de ácido al año, 200 $ contratar a un trabajador y 500 $ despedirlo. El pronóstico de ventas de los siguientes 6 meses es de 8000, 10000, 12000, 8000,6000 y 5000 litros de ácido.

Cuál es el nivel de mano de obra y de inventario que se debe manejar para obtener unos costos mínimos?

Resumen de Datos:

- Condiciones iníciales: 70 trabajadores y 9000 litros de ácido.
- Producción Estándar: 100 lt/mes. => 0.625 Lt / hora
- Tiempo Normal: 160 Horas/mes
- Costo tiempo extra: 150% del costo normal
- Tiempo extra máximo: 20% de tiempo normal en cualquier mes

Costos:

- 80 centavos/litro al año
- 200 $ contratar
- 500 $ despedir
- Sueldo Normal: 5 $ / hora

Pronóstico de Ventas:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
8000	10000	12000	8000	6000	5000

Formulación Matemática:

Variables:

T_i = No de trabajadores para el mes i; i = 1,2,3... (enero, febrero, marzo...) Entero No negativo

C_i = No de trabajadores contratados en el mes i; i=1,2,3... Entero No Negativo

D_i = No de trabajadores despedidos en el mes i; i=1,2,3... Entero No Negativo

I_i = Inventario final del mes i; i = 1,2,3 ... Continua No negativa (Si se deja tomar valores negativos, se asumiría que se pueden presentar retrasos en las ordenes, que podemos vender algo que aun no se tiene en la bodega, para suplirlo más adelante con más producción.)

Costo de llevar inventarios mensual: 80 centavos/12 = 6.6667 centavos = 0.066667 $/mes

H_i = Horas de tiempo extra en el mes i. (la suma de las horas utilizadas por todos los trabajadores)

Así que se tienen 30 variables, seis para cada ítem.

Costo de un trabajador al mes: 5 $ /hora * 160 horas/ mes = 800 $ / mes

Costo de hora en tiempo extra: 5 $ * 1.5 = 7.5 $.

A los trabajadores que trabajan en tiempo normal se les paga 800 $ /mes. En total en un mes se les paga: 800T. El número de trabajadores en ese mes, por el sueldo mensual; y así es para todas las variables, el costo unitario de la variable multiplicado por la variable.

Función Objetivo:

Min Z = $800T_1 + 800T_2 + 800T_3 + 800T_4 + 800T_5 + 800T_6$ (el total de salarios en tiempo normal)

$+200C_1 + 200C_2 + 200C_3 + 200C_4 + 200C_5 + 200C_6$ (el costo de contratar C empleados por mes)

$+500D_1 + 500D_2 + 500D_3 + 500D_4 + 500D_5 + 500D_6$ (el costo de despedir D empleados por mes)

$+0.066i_1 + 0.066i_2 + 0.066i_3 + 0.066i_4 + 0.066i_5 + 0.066i_6$ (costo de llevar inventario cada mes)

+7.5H1 +7.5H2 +7.5H3+7.5H4+7.5H5 +7.5H6 (costo de utilizar H horas extras en el mes)

En forma resumida:

Min Z = 800 Ti + 200 Ci +500 Di +0.06 Ii + 7.5 Hi (i=1,2,3,4,5,6)

Y las restricciones...

<u>No de trabajadores por cada período:</u>
El número de trabajadores por cada período, será los trabajadores con que comenzó el período más los que contrató menos los que despidió. Claro que no se puede contratar y a despedir gente al mismo tiempo. En algún período contratarán y en otro despedirán.

Ti= Ti-1 (No trabajadores del período anterior) + Ci (los contratados en el período) - Di (los despedidos).

Para enero:
T1 = 70 + C1 - D1. Que también se puede escribir así:
T1-C1+D1= 70

Para febrero:
T2 = T1 (aún no se sabe cuánto) +C2 - D2 También:
T2 -T1 -C2+D2= 0 e igual los demás:

En resumen:
Restricción de No de trabajadores:

T1 - C1 +D1 = 70
T2 - T1 -C2 +D2 = 0
T3 - T2 -C3 +D3 = 0
T4 - T3 -C4 +D4 = 0
T5 - T4 -C5 +D5 = 0
T6 - T5 -C6 +D6 = 0

<u>Restricción: Cumplir con la demanda. :</u>

Inventario Inicial + Producción - Ventas (demanda pronosticada) = Inventario Final. También...

Inventario Inicial + Producción en tiempo normal + Producción en tiempo extra - pronostico = IF

Para Enero:

$9.000 + (100 T1 + 0.625 H1) - 8.000 = I1$

También:
$I1 - 100T1 - 0.625 H1 = 1.000$

Para febrero: (El inventario inicial de un período es el inventario final del pasado)

$I1 + 100T2 + 0.625 H2 - 10.000 = I2$
$I1 + 100T2 + 0.625 H2 - I2 = 10.000$

Lo mismo para los demás. En resumen

<u>Restricción de Demanda:</u>

$$
\begin{aligned}
I1 - 100T1 - 0.625 H1 &= 1.000 \\
I1 + 100T2 + 0.625 H2 - I2 &= 10.000 \\
I2 + 100T3 + 0.625 H3 - I3 &= 12.000 \\
I3 + 100T4 + 0.625 H4 - I4 &= 8.000 \\
I4 + 100T5 + 0.625 H5 - I5 &= 6.000 \\
I5 + 100T6 + 0.625 H6 - I6 &= 5.000
\end{aligned}
$$

<u>Restricción de Horas extras</u>: en cada período el no de horas extras debe ser menor al 20% de las horas normales.

El total de horas normales en un mes es de : 160T. El 20% será de 0.2*160T= 32T O sea:

$Hi <= 32 Ti$ $Hi - 32 Ti <= 0$

$H1 - 32T1 <= 0$
$H2 - 32T2 <= 0$
$H3 - 32T3 <= 0$
$H4 - 32T4 <= 0$
$H5 - 32T5 <= 0$
$H6 - 32T6 <= 0$

Modelo Completo

Min $Z = 800T1 + 800T2 + 800T3 + 800T4 + 800T5 + 800T6$ (el total de salarios en tiempo normal)

$+200C1 \; +200C2+200C3+200C4+200C5+200C6$ (el costo de contratar C empleados por mes)

$+500D1 \; +500D2+500D3 \; +500D4 \; +500D5 \; +500D6$ (el costo de despedir D empleados por mes)

$+0.06i1 \; +0.06i2 \; +0.06i3 + 0.06i4 + 0.06i5+0.06i6$ (costo de llevar inventario cada mes)

$+7.5H1 \; +7.5H2 \; +7.5H3+7.5H4+7.5H5 \; +7.5H6$ (costo de utilizar H horas extras en el mes)

Sujeto a:

$T1 - C1 + D1 = 70$
$T2 - T1 - C2 + D2 = 0$
$T3 - T2 - C3 + D3 = 0$
$T4 - T3 - C4 + D4 = 0$
$T5 - T4 - C5 + D5 = 0$
$T6 - T5 - C6 + D6 = 0$

$I1 - 100T1 - 0.625\,H1 = 1.000$
$I1 + 100T2 + 0.625\,H2 - I2 = 10.000$
$I2 + 100T3 + 0.625\,H3 - I3 = 12.000$
$I3 + 100T4 + 0.625\,H4 - I4 = 8.000$
$I4 + 100T5 + 0.625\,H5 - I5 = 6.000$
$I5 + 100T6 + 0.625\,H6 - I6 = 5.000$

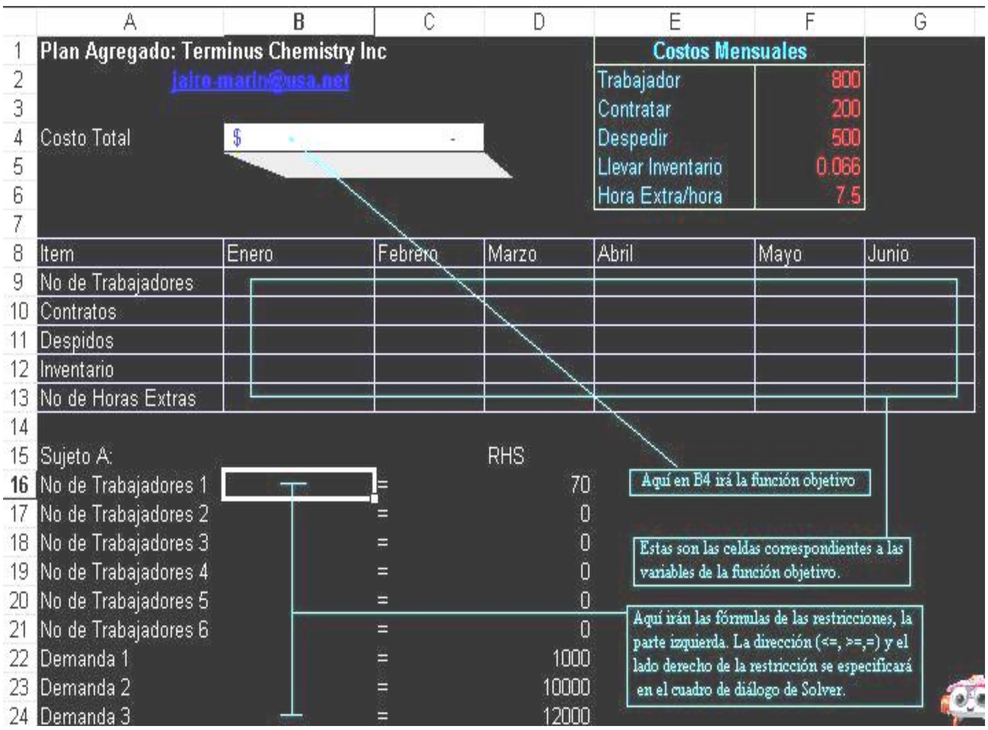
$H1 - 32T1 <= 0$
$H2 - 32T2 <= 0$
$H3 - 32T3 <= 0$
$H4 - 32T4 <= 0$
$H5 - 32T5 <= 0$
$H6 - 32T6 <= 0$

Hay infinidad de formas para modelar éste programa dentro del Solver del MS Excel .Por ejemplo se podría dejar como variables de decisión el número de contratos, despidos y horas extras, y todo lo demás en función de esto, o dejar el número de despidos y de contratos en función del número de trabajadores y que estos fueran las variables de decisión . Lo único que se necesita para comenzar a ver estas variantes de modelado, es comenzar a desarrollar ejercicios; primero los simples, como los de programación lineal continua de dos o tres variables, comenzar a cambiarlos, etc. Cuando lo haya hecho notará que se pueden modelar mucho más fácil y rápido si no se fuerza a que el modelo en Excel quede exactamente igual que el matemático, sino reemplazarlo por uno equivalente.

1. Primero el formato:

Un formato agradable, intuitivo y organizado evita los errores.

En cuanto al color, aunque pueda parecer totalmente irrelevante, nos puede mostrar rápidamente donde están las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo, así es que cada uno escoja los que les parezcan más apropiados.



Se debe dejar una celda que se corresponda con la función objetivo. En ella se escribirá la fórmula de maximización o minimización, en función de las variables de decisión. En este caso la celda para la función objetivo es la B4 y las variables de decisión están en el rango de las celdas B9:G13 (o sea desde la fila 9 hasta la fila 13 y desde la columna B hasta la columna G)

Se debe dejar una celda por cada restricción que represente el lado izquierdo de cada restricción. La dirección (o sea si es <=, <=, o =) se especificará más adelante en el cuadro de diálogo de Solver. Además el lado derecho de la restricción también se debe especificar allí. En la figura anterior, la del formato se ve que en la columna C filas 16 en adelante aparece el símbolo '=' y a la derecha de él aparece el lado derecho de la restricción. Esto es sólo por presentación, y para que nos ayude a recordar más adelante al introducir los valores en el Solver. Observe que hay seis celdas correspondientes al primer grupo de restricciones en el rango B16:B21, de igual manera debe existir una celda por cada restricción existente.

Luego de tener el formato de la Hoja, ahora viene lo más importante: Las fórmulas.

Para indicar como introducir las fórmulas, seguiré la convención siguiente: Coordenada Celda=Fórmula. Ejemplo B4=B5+B6, esto significa que en la celda B4 se debe escribir la fórmula "=B5+B6".

- Función Objetivo

Min Z = 800 Ti + 200 Ci +500 Di +0.06 Ii + 7.5 Hi (i=1,2,3,4,5,6)

B4= 800 * SUMA(B9:G9) + 200 * SUMA(B10:G10)+
500 * SUMA(B11:G11) + 0.066 * SUMA(B12:G12)+
7.5 * SUMA(B13:G13)

Notará que se escribió 800 * SUMA(B9:G9) en vez de escribir F2 * SUMA(B9:G9), por que en F2 está el valor de 800. Sucede que es mejor pasarle constantes a Solver en vez de variables. Se demora menos en encontrar la solución ya que un bucle es más rápido si trabaja con una constante que sobre la propiedad de un control. Así es que a menos que esté totalmente seguro de lo contrario le aconsejo que mientras pueda le pase a Solver constantes en vez de variables.

- Restricciones

Primer Grupo: Nº de Trabajadores.

Restricción	**Fórmula en Excel**
T1 - C1 +D1 = 70	B16 =B9-B10+B11
T2 - T1 -C2 +D2 = 0	B17=C9-B9-C10+C11
T3 - T2 -C3 +D3 = 0	B18=D9-C9-D10+D11
T4 - T3 -C4 +D4 = 0	B19=E9-D9-E10+E11
T5 - T4 -C5 +D5 = 0	B20=F9-E9-F10+F11

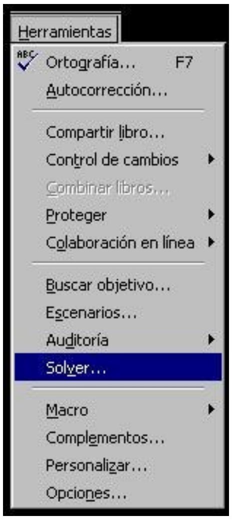
T6 - T5 -C6 +D6 = 0	B21=G9-F9-G10+G11

Segundo Grupo: Demanda

Restricción	Fórmula en Excel
I1 - 100T1 - 0.625 H1 = 1.000	B22=B12-100*B9-0.625*B13
I1 + 100T2 + 0.625 H2 - I2 = 10.000	B23=B12+100*C9+0.625*C13-C12
I2 + 100T3 + 0.625 H3 - I3 = 12.000	B24=C12+100*D9+0.625*D13-D12
I3 + 100T4 + 0.625 H4 - I4 = 8.000	B25=D12+100*E9+0.625*E13-E12
I4 + 100T5 + 0.625 H5 - I5 = 6.000	B26=E12+100*F9+0.625*F13-F12
I5 + 100T6 + 0.625 H6 - I6 = 5.000	B27=F12+100*G9+0.625*G13-F12

Tercer Grupo: Horas Extras

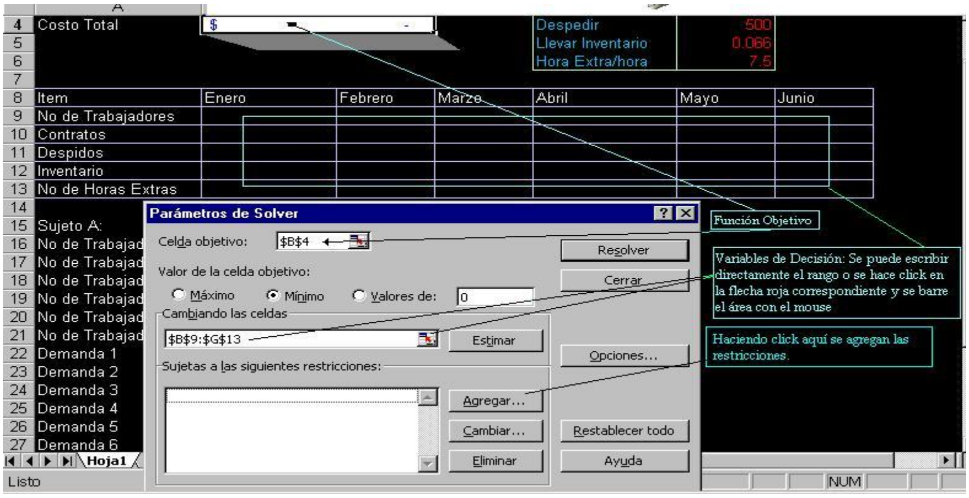
Restricción	Fórmula en Excel
H1 - 32T1 <= 0	B28=B13-32*B9
H2 - 32T2 <= 0	B29=C13-32*C9
H3 - 32T3 <= 0	B30=D13-32*D9
H4 - 32T4 <= 0	B31=E13-32*E9
H5 - 32T5 <= 0	B32=F13-32*F9
H6 - 32T6 <= 0	B33=G13-32*G9



Ahora, se debe invocar el cuadro de diálogo de Solver.

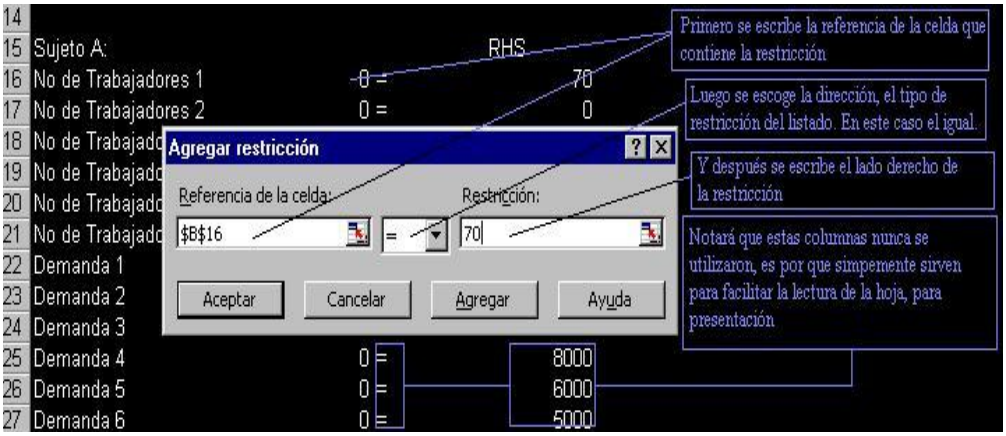
Del menú herramientas escoger Solver (en caso que no esté en el menú hacer clic en la opción "Complementos"), tal como se ve en figura:

El cuadro de diálogo luce así:



Donde dice "Celda Objetivo" se escribe la referencia de la celda que contiene la función objetivo. También puede seleccionarlo, haciendo clic en la flecha roja que se ve a la derecha del recuadro y luego señalándola con el mouse. Luego se escoge la opción "Mínimo", a continuación escriba el rango donde se encuentran las variables de decisión, tal como se puede ver en la figura anterior.

Agregar las restricciones:
Se hace clic en el botón agregar del cuadro de diálogo de Solver. En la parte izquierda se escribirá la referencia de la celda que contiene la parte izquierda de la restricción, luego se escoge la dirección, si es <=, >=, o =, a continuación se escribe el lado derecho de la restricción que para nosotros es una constante. Por ejemplo la primera restricción:



Y se presiona aceptar. De igual manera se hace para las demás restricciones. Los parámetros habrán quedado de la siguiente manera:

Antes de hacer clic en "Resolver" es conveniente revisar las opciones por defecto para el problema. Para esto hacer clic en el botón "Opciones..." y seleccionar "Adoptar modelo lineal" y "Asumir no negativos".

Presionar aceptar y luego "Resolver". Luego de haber hecho esto la solución que obtendremos es la siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G
4	Costo Total	$	332,707.00		Despedir	500	
5					Llevar Inventario	0.066	
6					Hora Extra/hora	7.5	
7							
8	Item	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
9	No de Trabajadores	72.5	72.5	72.5	72.5	60	50
10	Contratos	2.5	0	0	0	0	0
11	Despidos	0	0	0	0	12.5	10
12	Inventario	8250	5500	750	0	0	0
13	No de Horas Extras	0	0	0	0	0	0

El valor de la función objetivo es de 332.707, pero esta es del programa matemático continuo. como en el mes de enero no podemos tener 72 personas y media, es mejor que escojamos el No de trabajadores como variables enteras. Para hacer esto se le agrega una restricción de más en los parámetros de solver, donde le decimos que el rango B9:G9 es entera:

Volvemos a resolver y los resultados son ahora:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Plan Agregado: Terminus Chemistry Inc				Costos Mensuales		
2	jairo.marin@usa.net				Trabajador	800	
3					Contratar	200	
4	Costo Total	$	333,037.20		Despedir	500	
5					Llevar Inventario	0.066	
6					Hora Extra/hora	7.5	
7							
8	Item	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
9	No de Trabajadores	71	73	73	73	60	50
10	Contratos	1	2	0	0	0	0
11	Despidos	0	0	0	0	13	10
12	Inventario	8100	5400	700	0	0	0
13	No de Horas Extras	0	0	0	0	0	0

La solución ahora con las variables enteras es de **333.037,20**

Capitulo 10: PROGRAMACIÓN NO LINEAL

CONCEPTOS GENERALES:LA UTILIZACION DEL MS SOLVER

La programación lineal ha demostrado ser una herramienta sumamente poderosa, tanto en la modelización de problemas de la vida real como en la teoría matemática de amplia aplicación. Sin embargo, muchos problemas interesantes de optimización son no lineales.

El estudio de estos problemas implica una mezcla diversa de álgebra lineal, cálculo multivariado, análisis numérico y técnicas de computación. Entre las áreas especiales importantes se encuentra el diseño de algoritmos de computación (incluidas las técnicas de puntos interiores para programación lineal), la geometría y el análisis de conjuntos convexos y funciones, y el estudio de problemas especialmente estructurados, tales como la programación cuadrática. La optimización no lineal proporciona información fundamental para el análisis matemático, y se usa extensamente en las ciencias aplicadas (en campos tales como el diseño de ingeniería, el análisis de regresión, el control de inventario y en la exploración geofísica).

El algoritmo utilizado por el Solver de MS Excel es el de *Gradiente Reducido Generalizado (GRG)* en la versión GRG2, cuya estructura matemática puede ser analizada en Abadie(1978); Lasdon, Waren, Jain y Ratner(1978); Lasdon y Waren(1978); y Ríos(1988).
Básicamente, al igual que otros algoritmos de programación no lineal, parte de una solución factible conocida como punto inicial. El algoritmo intenta entonces moverse, a partir de este punto, en una dirección a través de la región factible, de tal forma que el valor de la función objetivo mejore. Tomando un salto o movimiento determinado en dicha dirección factible, se pasa a una nueva solución factible mejorada. De nuevo, el algoritmo identifica una nueva dirección factible, si existe, y un salto determinado avanzando hacia una nueva solución factible mejorada. El proceso continúa hasta que el algoritmo alcanza un punto en el cual no existe una dirección factible para moverse que mejore el valor de la función objetivo. Cuando no hay posibilidad de mejora, o el potencial para tal mejora es arbitrariamente pequeño, el algoritmo finaliza. Ahora bien, en ese momento la solución es un *óptimo local*, y por tanto no necesariamente *global*.

En este sentido, es preciso tener en cuenta dos características de las soluciones obtenidas al resolver un programa no lineal con Solver:

- El algoritmo puede finalizar en un óptimo local que puede no ser el óptimo global del problema.
- El óptimo local en que finaliza el algoritmo depende del punto inicial.

Si bien la posibilidad de terminar en un óptimo local no es deseable, en el caso de la programación entera ya habíamos comentado la posibilidad de aceptar soluciones subóptimas si estaban dentro del grado de tolerancia aceptable. Desgraciadamente, en los programas no lineales no se puede determinar fácilmente el grado de alejamiento entre el óptimo local y el global, dado que no existe un método genérico para obtener cotas del valor de la función objetivo.
Sin embargo, muchos programas no lineales tienen óptimos locales únicos que, por definición, necesariamente deben ser globales. Por ejemplo, las siguientes condiciones garantizan, si existe, que el óptimo es global:
· Función objetivo de máximo y cóncava, o el logaritmo de la función objetivo cóncava, con restricciones lineales.
· Función objetivo de mínimo y convexa, con restricciones lineales.

No obstante, en general, no conoceremos si la solución obtenida es un óptimo global.
Como consecuencia, se suele intentar la prueba de iniciar el algoritmo desde diferentes puntos para determinar si el problema tiene diferentes soluciones óptimas. Este procedimiento suele revelar la existencia de un determinado óptimo global, si existe, pero no es un método de total fiabilidad.

Dado el carácter de las soluciones de los programas no lineales es importante tener en cuenta los mensajes que proporciona el «Solver»:

- ✓ *Solver ha encontrado la solución. Todas las restricciones y condiciones de optimalidad están satisfechas*. En este caso habrá encontrado un óptimo local, que no necesariamente será global. Matemáticamente, este mensaje indica que las condiciones de Karush-Kuhn- Tucker para óptimos locales han sido satisfechas. Salvo en un problema con un solo óptimo global, se debería ejecutar el «Solver» desde diferentes puntos iníciales para incrementar la seguridad sobre la globalidad del óptimo.

- ✓ *Solver ha convergido hacia la solución actual. Todas las restricciones están satisfechas*.

- ✓ En este caso el valor de la función objetivo cambia muy lentamente en las últimas iteraciones. La opción «Convergencia» controla este proceso. El algoritmo termina si el cambio relativo en el valor de la función objetivo durante varias iteraciones es menor que el factor de convergencia. Si se intuye que «Solver» finaliza demasiado rápido o que el punto obtenido no es óptimo, será preciso reducir la convergencia para evitar soluciones subóptimas.

✓ *Solver no puede mejorar la solución actual. Todas las restricciones están satisfechas*. Este mensaje indica que el modelo presenta degeneración y que el algoritmo ha entrado en un ciclo. La degeneración puede ser evitada en muchos casos eliminando restricciones redundantes.

También es importante tener en cuenta que «Solver» presenta dificultades en muchos casos para empezar a aplicar el algoritmo cuando se inicializa en un punto de valor nulo para todas las variables. Por tanto, es aconsejable comenzar por una solución no nula. Además, en la mayoría de los casos, cuanto más cercanos sean los valores iníciales al óptimo más rápido será el proceso de resolución.

LIMITACIONES, EFICIENCIA Y OBSERVACIONES SOBRE LA UTILIZACIÓN DEL SOLVER EN LA OPTIMIZACIÓN EMPRESARIAL

Aunque no presente la estructura que hemos propuesto antes, se puede optimizar una hoja de trabajo con el «solver» tanto si el modelo es lineal como no. Si no se ajusta a dicha estructura, no suele ser fácil detectar si el modelo es lineal, y por tanto no se conoce la técnica a utilizar para su optimización. En este caso, resulta adecuado señalar la opción «Asumir modelo lineal» ya que así se llevará a cabo un test de linealidad que nos indicará el carácter del modelo.

Existen muchas funciones propias de la hoja de cálculo que presentan discontinuidades y que como consecuencia no pueden ser tratadas por el «solver». Una lista parcial de dichas funciones, que deben ser evitadas en la formulación de modelos a optimizar, incluye: ABS, MIN, MAX, ENTERO, REDONDEAR, SI, ELEGIR, CONTAR. En caso de duda sobre la continuidad de una función es recomendable su representación gráfica en el rango de valores considerado.
Aunque la parte derecha de las restricciones puede ser cualquier expresión numérica, para evitar posibles errores es adecuado utilizar siempre constantes, o referencias a celdas que contienen valores constantes. Si la parte derecha depende de una de las variables de decisión, el programa transforma internamente la restricción pasando dicha expresión a su parte izquierda.

El «Solver» reconoce el caso en que la parte izquierda de la restricción es una variable de decisión y la parte derecha una constante, tratando a las mismas como cotas superiores o inferiores, lo cual requiere menores tiempos de computación.
No existen diferencias en términos de eficiencia entre una restricción del tipo A1<=10 ó A1<=A2 donde A2 contiene el valor 10, dado que reconoce a la celda A2 como una constante. La segunda alternativa tiene ventajas para construir el modelo de forma más operativa. Tampoco existen diferencias en la eficiencia por el hecho de definir nombres para las celdas en lugar de utilizar referencias.

Las fórmulas introducidas en la parte derecha de las restricciones (incluso expresiones con constantes como 2+1) incrementan los tiempos de solución del modelo. En este caso, el programa crea internamente una nueva restricción en la que pasa la parte derecha a la parte izquierda de la restricción con signo contrario. En estos casos, lo recomendable es realizar los cálculos en otra zona de la hoja y referenciar dicha celda en la parte derecha de la restricción. En ese caso, la hoja

de trabajo ya habrá analizado esa expresión en la celda citada y el «Solver» puede determinar si depende de las variables de decisión.
En el caso de funciones lineales, con el objeto de mantener el modelo más manejable y fácil de estructurar, es recomendable utilizar la función SUMAPRODUCTO, tal como se recoge en la figura I para obtener la función objetivo.

La versión estándar del «Solver» que viene incorporada en la Excel existe un límite de 200 variables de decisión en las celdas cambiantes. En función del tipo de modelo también existen limitaciones respecto al número de restricciones. Si el modelo es lineal y se señala la opción «Asumir modelo lineal» no existe límite en el número de restricciones. Si el modelo no es lineal existe un límite de 100 restricciones, además de las correspondientes a cotas y a variables enteras.
Debido a las limitaciones de la versión estándar existen disponibles versiones con mayor capacidad, incluso para programas de gran tamaño. Sus características se pueden contrastar en la dirección www.frontsys.com. En general se trata de versiones que incluyen una opción especial para programación cuadrática, y que permiten la escala automática también en los programas lineales. Por otra parte, su velocidad de ejecución multiplica por cien la capacidad estándar, los test de linealidad indican donde se quiebra dicha condición, poseen indicadores de progresividad sobre el tiempo total estimado de resolución, etc.
Por defecto, la opción «Asumir modelo lineal» no está señalada, por lo que el método de optimización utilizado será el GRG. Si bien esto puede permitir llegar a la solución de un programa lineal, siempre será más rápido y seguro su resolución por el método simplex.
Por tanto, se deberá ejecutar siempre dicha opción ya que, por otra parte, ello supone que los informes de sensibilidad sean más completos.

En el proceso de solución, el «Solver» ajusta sólo los valores de las variables de decisión, permaneciendo constantes las celdas que no dependen de dichos valores. Dado que MS Excel realiza un chequeo previo para conocer qué celdas tendrán cambios, se pueden lograr ahorros de tiempo si se eliminan celdas que no tienen relación directa con el programa. Una opción puede ser la de copiar el modelo en otra hoja, sin referencias de celdas ni hojas. Este proceso se puede automatizar mediante macros.

PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA

Es un caso particular de programación matemática no lineal. Un programa matemático en el cual cada restricción g_i es lineal pero el objetivo es cuadrático se conoce como ***programa cuadrático***, es decir

$f(x_1,x_2,..,x_n) = S_{\ i=1,nS\ j=1,n}\ c_{ij}x_ix_j + S_{\ i=1,n}d_ix_i$

Ejemplo

Minimizar $z = x_1^2 + x_2^2$

Con las condiciones $x_1 - x_2 = 3$

$X_2 \geq 3$

Donde ambas restricciones son lineales, con n = 2 (dos variables) $c_{11} = 1$; $c_{12} = c_{21} = 0$; $c_{22} = 1$ y $d_1 = d_2 = 0$.

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

El programa matemático:

- Optimizar $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n)$
- Con la condición $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq b$
- Con todas las variables enteras y no negativas.

En que las funciones fi (xi) son funciones no lineales conocidas de una sola variable, b es un número entero conocido. Corresponde al modelo importante de decisión en ***etapas múltiples*** en que el ***número de etapas*** es n. La etapa 1 comprende la especificación de la variable x1 con contribución f1(x1) al rendimiento total; etc.

La ***programación dinámica*** es una forma de enfoque de los procesos de decisión de optimización de n etapas.

APLICACIONES

Una Compañía desea construir una planta que recibirá suministros desde tres ciudades A, B, C, tomando como origen la ciudad A, B tiene coordenadas (300 Km. al Este,400 Km. al Norte), y C tiene coordenadas (700 Km. al Este, 300 Km. al Norte) respecto de A. La posición de la planta debe estar en un punto tal que la distancia a los puntos A, B y C sea la mínima.

Sean x1 y x2 las coordenadas desconocidas de la planta respecto de A.

Utilizando la fórmula de la distancia, debe minimizarse la suma de las distancias:

$$(x_1^2 + x_2^2) + B\ ((x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2) + C\ ((x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2)$$

No hay restricciones en cuanto a las coordenadas de la planta ni condiciones de no negatividad, puesto que un valor negativo de x1 significa que la planta se localiza al Oeste del punto A. La ecuación es un programa matemático no lineal sin restricciones.

APLICACIÓN: **GASTOS OPTIMOS EN COMERCIALIZACION**

Supongamos que el presupuesto diario promedio para publicidad de un restaurante es de $ 100 y se asigna en su totalidad a periódicos y comerciales de radio

Suponga:

X1: número promedio en $ diarios gastados en anuncio de periódico

X2: número promedio diario de $ asignados a comerciales de radio

El costo anual es: $C(X1, X2)= 20 – 440\ X1 – 300X2 + 20X1^{2} +12\ X2^{2} + X1\ X2$

El modelo a resolver será Min Costo sujeto a:

$X1 + X2 = 100$

$X1, X2 >= 0$

La versión del modelo en Solver nos dará un informe de sensibilidad donde la columna del Multiplicador de Lagrange ($1.195 en este caso) nos indica que la rapidez del incremento inicial del costo anual del Departamento de Publicidad seria de $1.195 por cada peso adicional de presupuesto gastado en anuncios.

El multiplicador de Lagrange de una restricción es la tasa de cambio instantánea en el valor óptimo de la función objetivo cuando el lado derecho de la restricción aumenta.

Los valores de gradiente reducido en el SOLVER (informe de sensibilidad) tienen interpretación análoga a los valores de costo reducido del informe de PL estudiado. El gradiente reducido está relacionado con las restricciones que imponen un límite superior o inferior para las variables de decisión.

APLICACIÓN: OPCIONES DE INVERSION: Una persona dispone de $4000 para invertir y se le presentan tres opciones de inversión. Cada opción requiere de depósitos en cantidades de $1000, puede invertir lo que desee en las tres opciones.

Las ganancias esperadas son las siguientes

	Inversión				
Ganancias	0	1000	2000	3000	4000
Opción 1	0	2000	5000	6000	7000
Opción 2	0	1000	3000	6000	7000
Opción 3	0	1000	4000	5000	8000

¿Cuánto dinero deberá invertirse en cada opción para maximizar las ganancias?

Sea z la ganancia total, que es la suma de las ganancias de cada opción, las inversiones tienen la restricción de ser múltiplos de $1000, la tabla muestra las $f_i(x)$ = Etapa i, (i = 1, 2,3), x es la cantidad de dinero invertida en cada opción.

El programa matemático es el siguiente:

Maximizar z = f1(x1) + f2(x2) + f3(x3)

La persona sólo posee $4000 para invertir:

Las condiciones son:

X1 +x2 + x3 $\leq$ 4000

Con todas variables enteras y no negativas.

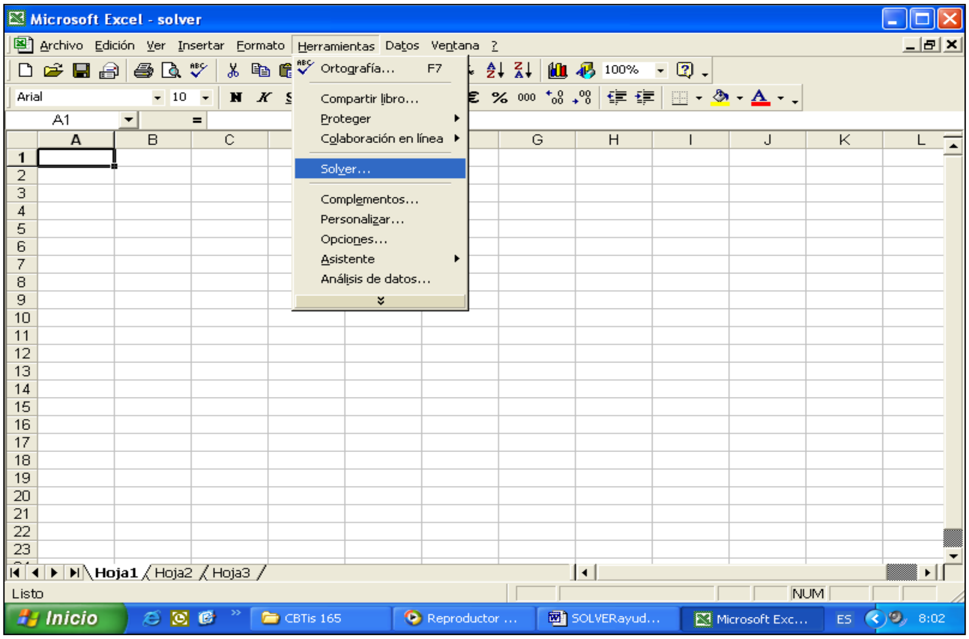
Los problemas no lineales pueden ser:

- Restringidos: cuando se tienen restricciones (lineales o no lineales),
- No-restringidos: cuando no se tienen restricciones y sólo se optimiza la función objetivo, que desde luego, no es lineal,
- Continuos: cuando todas las variables y funciones son continuas,
- Discretos: cuando alguna de las variables y/o funciones es discreta,
- Diferenciables: cuando todas las funciones del problema son doblemente diferenciables,
- Con restricciones de igualdad y/o desigualdad,
- Convexos, cuadráticos, separables,
- Con una sola variable independiente o con varias variables independientes.

Una de las características que hace que los problemas de optimización no lineal sean mucho más difíciles de resolver que los problemas lineales, es que la solución óptima no se encuentra en un punto extremo de la región de factibilidad.

La gran desventaja de los métodos de optimización no lineales, es que, generalmente encuentran un óptimo relativo o local, más no el óptimo local o absoluto, además se presentan de muchas formas distintas y no se dispone de un algoritmo que resuelva todos estos tipos especiales de problemas. En su lugar se han desarrollado algoritmos para algunas clases (tipos especiales) de problemas de programación no lineal.

PROGRAMACION NO LINEAL CON SOLVER DE MS EXCEL



1. En el menú **Herramientas** de Excel, haga clic en **Solver**. Si el comando **Solver** no aparece en el menú **Herramientas**, deberá instalar el complemento o macro automática Solver.
2. En el cuadro **Celda objetivo**, introduzca una referencia de celda o un nombre para la celda objetivo. La celda objetivo debe contener una fórmula.

MAXIMIZAR UNA FUNCIÓN: Para que el valor de la celda objetivo sea el valor máximo posible, haga clic en **Máximo**.

3. MINIMIZAR UNA FUNCIÓN: Para que el valor de la celda objetivo sea el valor mínimo posible, haga clic en **Mínimo**.

4. VALORES ESPECÍFICOS DE UNA FUNCIÓN: Para que la celda objetivo tenga un valor determinado (ejemplo pendiente de tangente m=2, m=4, m= - 3, haga clic en **Valor** y, a continuación, introduzca el valor en el cuadro.

5. En el cuadro **Cambiando la celda**, introduzca un nombre o referencia para cada celda ajustable, separando con comas las referencias no adyacentes. Las celdas ajustables deben estar directa o indirectamente relacionadas con las celdas objetivo. Pueden especificarse 200 celdas ajustables como máximo. Para que Solver proponga automáticamente las celdas ajustables basadas en la celda objetivo, haga clic en **Estimar**.
6. En el cuadro **Sujetas a las siguientes restricciones**, introduzca todas las restricciones que desee aplicar. Haga clic en **Resolver**.

7. Para mantener los valores de la solución en la hoja de cálculo, haga clic en **Conservar la solución de Solver** en el cuadro de diálogo **Resultados de Solver**. Para restaurar los datos originales, haga clic en **Restaurar valores originales**. Puede interrumpirse el proceso de solución presionando ESC. Microsoft Excel vuelve a realizar los cálculos de la hoja de cálculo con el último valor encontrado para las células ajustables.

CREAR FORMULAS EN MS EXCEL

La estructura o el orden de los elementos de una fórmula determinan el resultado final del cálculo. Las fórmulas en Microsoft Excel siguen una sintaxis específica, u orden, que incluye un signo igual (=) seguido de los elementos que van a calcularse (los operandos), que están separados por operadores de cálculo. Cada operando puede ser un valor que no cambie (un valor constante), una referencia de celda o de rango, un rótulo, un nombre o una función de la hoja de cálculo. Excel realiza las operaciones de de izquierda a derecha, siguiendo el orden de precedencia de los operadores, comenzando por el signo igual (=). Puede controlar el orden en que se ejecutará el cálculo utilizando paréntesis para agrupar las operaciones que deben realizarse en primer lugar. Por ejemplo, la siguiente fórmula da un resultado de 11 porque Excel calcula la multiplicación antes que la suma. La fórmula multiplica 2 por 3 y, a continuación, suma 5 al resultado. =5+2*3.- Por el contrario, si se utilizan paréntesis para cambiar la sintaxis, Excel sumará 5 y 2 y, a continuación, multiplica el resultado por 3, obteniéndose 21. =(5+2)*3.-

Operadores de cálculo de las fórmulas: Los operadores especifican el tipo de cálculo que se desea realizar con los elementos de una fórmula. Microsoft Excel incluye cuatro tipos diferentes de operadores de cálculo: aritmético, comparación, texto y referencia.

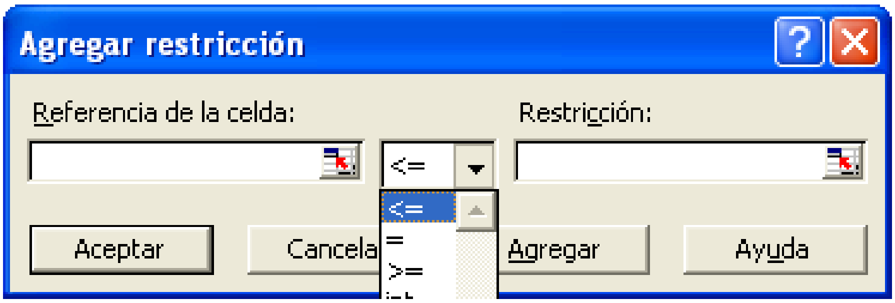
Operadores aritméticos.- Para ejecutar las operaciones matemáticas básicas como suma, resta o multiplicación; combinan números y generan resultados numéricos, utilice los siguientes operadores aritméticos.

Operador aritmético	**Significado**	**Ejemplo**
+ (signo más)	Suma	3+3
- (signo menos)	Resta Negación	3-1 -1
* (asterisco)	Multiplicación	3*3
/ (barra oblicua)	División	3/3
% (signo de porcentaje)	Porcentaje	20%
^ (acento circunflejo)	Exponente	3^2 (el mismo que 3*3)

Operador de comparación	**Significado**	**Ejemplo**
= (igual)	Igual a	A1=B1
> (mayor que)	Mayor que	A1>B1
< (menor que)	Menor que	A1<B1

>= (mayor o igual que)	Mayor o igual que	A1>=B1
<= (menor o igual que)	Menor o igual que	A1<=B1
<> (distinto)	Distinto de	A1<>B1

Agregar una restricción

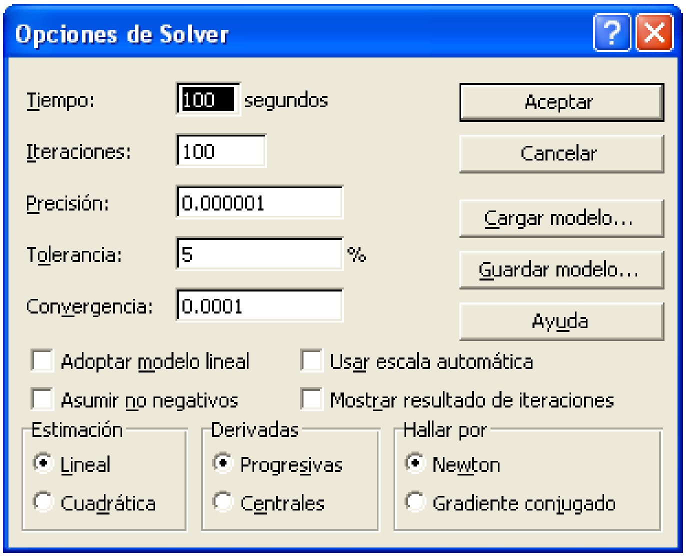


1. En el menú **Herramientas**, haga clic en **Solver**. Haga clic en **Agregar**. En el cuadro **Referencia de celda**, introduzca la referencia o el nombre de la celda o del rango de celdas para los que desee restringir el valor.

2. Haga clic en la relación (**<=**, **=**, **>=**, **Ent**, o **Bin**) que desee que haya entre la celda a la que se hace referencia y la restricción. Si hace clic en **Ent**, "entero" aparecerá en el cuadro **Restricción**. Si hace clic en **Bin**, "binario" aparecerá en el cuadro **Restricción**.

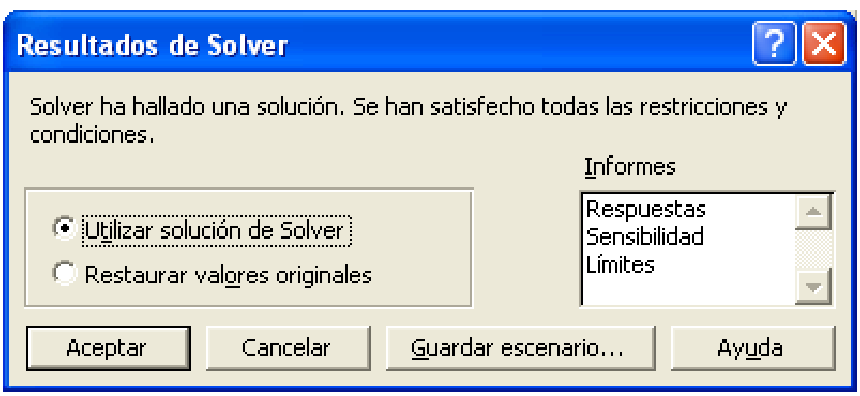
3. En el cuadro **Restricción**, introduzca un número, una referencia de celda, un nombre o una fórmula. Para aceptar una restricción y agregar otra, haga clic en **Agregar**. Para aceptar la restricción y regresar al cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**, haga clic en **Aceptar**.

Si se activa la casilla de verificación **Adoptar modelo lineal** en el cuadro de diálogo **Opciones de Solver**, no habrá límite en el número de restricciones. En problemas **no lineales**, cada celda ajustable puede tener hasta 100 restricciones, además de límites y restricciones enteras en las variables.



Cuando Solver encuentra una solución, muestra uno de los siguientes mensajes en el cuadro de diálogo **Resultados de Solver**.

- **Solver ha encontrado una solución. Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones**: Se han satisfecho todas las restricciones dentro de los valores de precisión en el cuadro de diálogo **Opciones de Solver** y se ha encontrado un valor máximo o mínimo local para la celda objetivo.
- **Solver ha llegado a la solución actual. Todas las restricciones se han satisfecho**: El cambio relativo en la celda objetivo es menor que el valor de **Convergencia** en el cuadro de diálogo **Opciones de Solver**. Si se introduce un valor menor que el valor de **Convergencia**, Solver puede buscar una solución mejor pero tardará más tiempo en encontrarla.



Si Solver no encuentra una solución óptima, mostrará uno de los siguientes mensajes en el cuadro de diálogo **Resultados de Solver**.

- **Solver no puede mejorar la solución actual. Todas las restricciones se han satisfecho:** Solamente se ha encontrado una solución aproximada, pero el proceso iterativo no puede encontrar un conjunto de valores mejor que los que se presentan. No puede alcanzarse mayor precisión o el valor de precisión es demasiado bajo. Cambie el valor de precisión a un número mayor en el cuadro de diálogo **Opciones de Solver** y ejecute otra vez el programa.

- **Cuando se ha alcanzado el límite de tiempo, se ha seleccionado Detener**: Ha transcurrido el tiempo máximo sin que se haya encontrado una solución satisfactoria. Para guardar los valores encontrados hasta este momento y guardar el tiempo de un nuevo cálculo en el futuro, haga clic en **Conservar la solución de Solver** o **Guardar escenario**.

- **Cuando se ha alcanzado el límite máximo de iteración, se ha seleccionado Detener**: Se ha alcanzado el número máximo de iteraciones sin que se haya encontrado una solución satisfactoria. Puede ser útil aumentar el número de iteraciones, pero deberán examinarse los valores finales para investigar el problema. Para guardar los valores encontrados hasta este momento y guardar el tiempo de un nuevo cálculo en el futuro, haga clic en **Conservar la solución de Solver** o **Guardar escenario**.

- **Los valores de la celda objetivo no convergen**: El valor de la celda objetivo aumenta (o disminuye) sin límites, aunque se hayan satisfecho todas las restricciones. Puede haberse omitido una o varias restricciones al definir el problema. Compruebe los valores actuales de la hoja de cálculo para ver la divergencia en la solución, compruebe las restricciones y ejecute otra vez el programa.

- **No se han satisfecho las condiciones para Adoptar modelo lineal**: Se ha activado la casilla de verificación **Adoptar modelo lineal**, pero los cálculos finales en los valores máximos de Solver no están de acuerdo con el modelo lineal. La solución no es válida para las fórmulas de la hoja de cálculo real. Para comprobar si se trata de un problema no lineal, active la casilla de verificación **Usar escala automática** y ejecute otra vez el programa. Si aparece de nuevo este mensaje, desactive la casilla de verificación **Adoptar modelo lineal** y ejecute otra vez el programa.

- **Solver ha encontrado un valor de error en una celda objetivo o restringida**: Una o varias fórmulas ha producido un valor de error en el último cálculo. Busque la celda objetivo o la celda restringida que contiene el error y cambie la fórmula para que produzca un valor numérico adecuado. Se ha introducido un nombre o una fórmula incorrectos en el cuadro de diálogo **Agregar restricción** o **Cambiar restricción**, o bien se ha introducido "entero" o "binario" en el cuadro **Restricción**. Para restringir un valor a un entero, haga clic en **Ent** en la lista de los operadores de comparación. Para definir una restricción binaria, haga clic en **Bin**.

Se muestra un mensaje de finalización y los valores más próximos a la solución que se desee.

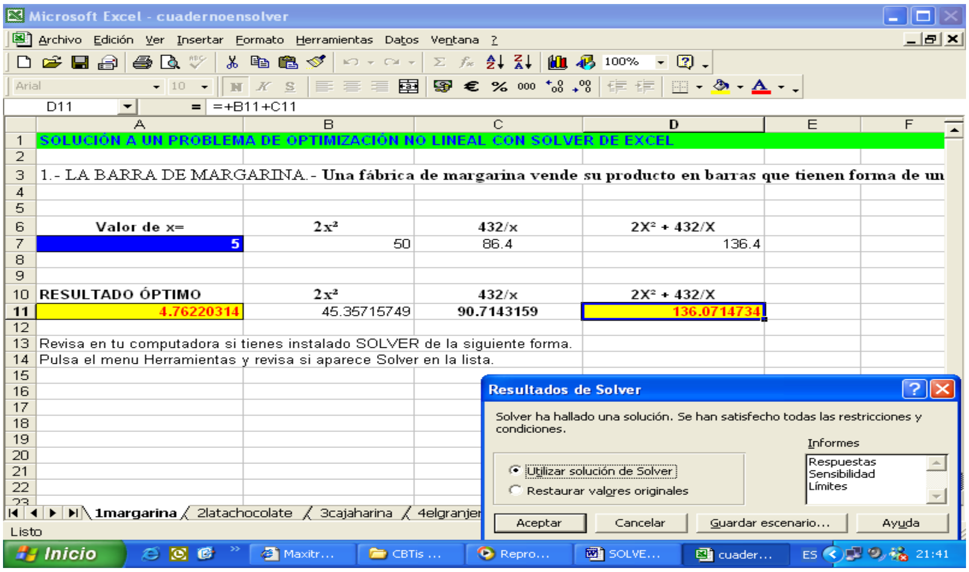
Conservar la solución de Solver: Haga clic para aceptar la solución y colocar los valores resultantes en las celdas ajustables.

Restaurar valores originales: Haga clic para restaurar los valores originales en las celdas ajustables.

Informes: Genera el tipo de informe que se especifique y lo coloca en una hoja independiente en la hoja de cálculo.

Límites: Muestra una lista con la celda objetivo y las celdas ajustables con sus valores correspondientes, los límites inferior y superior así como los valores del objetivo. No se genera este informe para los modelos que tengan restricciones enteras. El límite inferior es el valor mínimo que puede tomar la celda ajustable mientras se mantienen todas las demás celdas ajustables fijas y se continúa satisfaciendo las restricciones. El límite superior es el valor máximo.
Guardar escenario: Abre el cuadro de diálogo Guardar escenario, donde pueden guardarse los valores de celda para utilizarlos en el Administrador de escenarios de Excel.

Pantalla de respuestas Tipo: La celda A11 se ha seleccionado como celda para ubicar el resultado. La celda D11 se seleccionó como celda objetivo.



CONSIDERACIONES GENERALES:

El algoritmo que se emplea para solucionar los modelos de PLE es el de ramificación y acotamiento. El MS Solver utiliza este procedimiento para la optimización.

En el cuadro de dialogo del solver se incluye un valor de tolerancia (solo pertinente para los modelos de PE). En general se coloca 5% para asegurar que la solución se encuentre dentro del 5% del valor optimo. Si se colocara 0% se obliga a Solver a encontrar el verdadero optimo de la PLE con un costo de tiempo mayor.

La solución de PLE no produce información de sensibilidad, pero esto no quiere decir que los cambios en la RHS o en los coeficientes de la Función objetivo no afecten la solución.

Capitulo 11: MODELAMIENTO PARA EL CONTROL DE INVENTARIOS

LOS MODELOS DETERMINISTAS

Las decisiones sobre el control de inventarios es un problema tanto como una oportunidad para por lo menos tres departamentos de la empresa diferentes tales como Producción, Comercialización y Finanzas. La toma de decisiones en el control de inventarios tiene un impacto enorme en la productividad y desenvolvimiento de muchas organizaciones porque esta maneja el flujo total de materiales. El control de inventarios apropiado puede minimizar el desabastecimiento de materiales y por lo tanto reducir el capital de una organización. Adicionalmente posibilita que una organización compre o produzca un producto en cantidades mas económicas, por lo tanto minimizar el costo general de producción.

Los inventarios son materias primas para ser utilizadas, materiales en proceso o bienes finales.

Un buen modelo de inventarios nos permite:

- Atenuar brechas temporales entre oferta y demanda.
- Contribuir a la disminución de los costos de producción.
- Proporcionar una forma de "almacenar" trabajo; por ejemplo, fabricar mas unidades ahora, y liberar trabajo después
- Proporcionar un rápido servicio al cliente; es decir, estrategia competitiva.

La labor de la persona que administra un inventario consiste en establecer el balance entre las presiones y los costos conflictivos que actúan tanto a favor de los inventarios bajos como de los altos, y así determinar los niveles apropiados de inventario. La principal razón para tener inventarios bajos es que el inventario representa una inversión monetaria temporal en bienes, por la cual la empresa tiene que pagar intereses (en lugar de recibirlos).

El costo de manejo (o mantenimiento) de inventario es un costo variable que se paga para tener artículos a la mano. Entre esos costos figuran intereses, almacenamiento y manejo, impuestos, seguros y mermas. Cuando esos componentes cambian según el nivel del inventario, lo mismo sucede con el costo de manejo del mismos.

Es necesario indicar que en este curso no pretendemos extendernos en la Gestión de Inventarios que es propio de los conocimientos en Administración de la Producción y las Operaciones. Se pretende que el alumno conozca los principios de modelado y el uso básico del soft disponible que le permita encarar un curso más profundo de Stocks o Inventarios

Factores de costos que intervienen en las decisiones:

Interés o costo de oportunidad. Para financiar un inventario, las empresas tienen que conseguir un préstamo o perder la oportunidad de hacer una inversión que prometía una ganancia atractiva. El interés o el costo de oportunidad, el que tenga mayor valor, suele ser el componente más importante del costo de manejo.

Costos de almacenamiento y manejo. El inventario requiere espacio y tiene que ser acarreado para entrar o salir del almacén. Los costos de almacenamiento y manejo pueden generarse cuando una empresa alquila espacio, ya sea a corto o largo plazo. También se produce un costo de oportunidad a causa del almacenamiento, cuando una compañía podría haber usado productivamente ese espacio de almacén para otros propósitos.

Impuestos, seguros y mermas. Se pagan más impuestos cuando los inventarios son altos al final del año, y el seguro sobre los activos es más caro cuando los elementos por asegurar son más numerosos. Las mermas se presentan en tres formas. El robo o sustracción de elementos del inventario por clientes o empleados, que en algunas empresas representa un porcentaje significativo de ventas. La obsolescencia se presenta cuando el inventario no puede usarse o venderse en su valor total a causa de cambios de modelos, modificaciones de ingeniería o descensos inesperados de la demanda. El deterioro a causa de desperdicio o por daños físicos da por resultado una pérdida de valor.

Servicio al cliente. La creación de inventario puede acelerar las entregas y mejorar la puntualidad en el reparto de mercaderías. El inventario reduce las posibilidades de que haya faltantes y órdenes atrasadas, que son dos preocupaciones clave de los vendedores tanto minoristas como mayoristas. Un faltante se presenta cuando un artículo que normalmente se tiene en inventario no está disponible para satisfacer la demanda en el momento en que ésta se presenta, lo cual se traduce en la pérdida de una venta. Una orden atrasada es el pedido de un cliente que no es posible atender en la fecha prometida o solicitada, sino algún tiempo después.
Es factible que los clientes estén dispuestos a esperar hasta que pueda atenderse su pedido, pero la próxima vez preferirán buscar a un nuevo proveedor. En algunas ocasiones, los clientes reciben descuentos como compensación por las molestias que implica dicha espera.

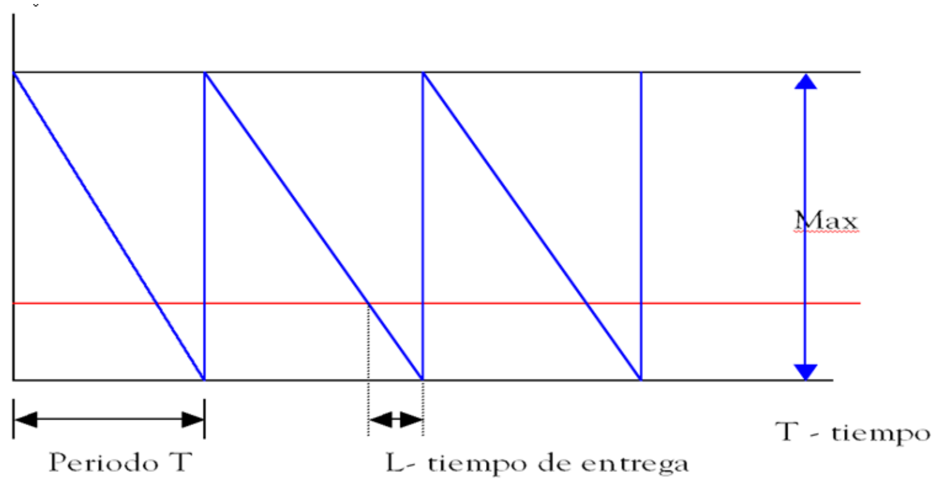
Costo de hacer pedidos. Cada vez que una empresa solicita mercancías tiene que pagar el costo de hacer pedidos, o sea, el gasto que implica la elaboración de una orden de compras en el caso de un proveedor, o de una orden de producción en el caso de una planta manufacturera. Cuando se trata de un mismo artículo, el costo de hacer un pedido es el mismo, independientemente del tamaño del pedido.

El modelo determinístico más utilizado se muestra a continuación:

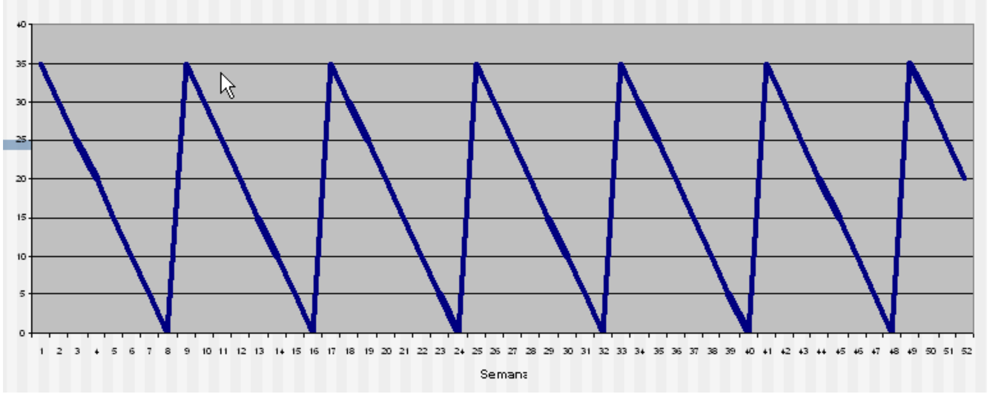
EL MODELO CLÁSICO EOQ (LOTE ECONÓMICO DE COMPRA):

Este es el modelo más simple construido basándose en el principio de que los bienes ingresan el mismo día que son ordenados sin permitir escasez (faltantes). Claramente, se debe ordenar nuevamente cuando el inventario alcanza 0, o considerando el tiempo de entrega L (lead Time)

La figura siguiente muestra los cambios en los niveles inventarios con respecto al tiempo:



La figura muestra el tiempo en el eje de las x y el nivel de inventario en el eje de las y. Se comienza en el tiempo cero cuando una orden llega. La cantidad de la orden es el tamaño del lote, Q. El lote completo es enviado al mismo momento por lo que el inventario se dispara instantáneamente desde 0 hasta Q. Los materiales son tomados del inventario a una tasa de demanda constante, x, medida en unidades por tiempo y el ciclo se repite de nuevo.



$$\frac{Q+0}{2} = \frac{Q}{2}$$

Punto de Reorden: (Linea horizontal del grafico anterior) es la demanda que ocurrirá durante el periodo de entrega, debido a que el tiempo de entrega es constante.

R = Dd * L (unidades)

L = Tiempo entrega en días

D = demanda diaria

R = punto de reorden

El patrón de inventario mostrado en la figura anterior, es obviamente una abstracción de la realidad porque no se espera que un sistema real opere exactamente como mostramos. La abstracción proporciona una estimación del tamaño de lote óptimo, llamado EOQ por sus siglas en Ingles.

Supuestos del modelo:

1. La tasa de demanda para el artículo es constante (por ejemplo, siempre es de 10 unidades diarias) y se conoce con certeza.
2. No existen restricciones para el tamaño de cada lote (por ejemplo, limitaciones a causa de la capacidad del camión o del manejo de materiales)
3. Los dos únicos costos relevantes son el correspondiente al manejo de inventario y al costo fijo por lote, tanto de hacer pedidos como de preparación.
4. Las decisiones referentes a un artículo pueden tomarse independientemente de las decisiones correspondientes a los demás (es decir, no se obtiene ventaja alguna al combinar varios pedidos que vayan dirigidos al mismo proveedor)
5. No hay incertidumbre en cuanto al tiempo de entrega o el suministro.
6. El tiempo de entrega es constante (por ejemplo, siempre es de 14 días) y se conoce con certeza.
7. La cantidad recibida es exactamente la que se pidió y las remesas llegan completas, no en forma fragmentada.

La cantidad económica de pedido será óptima cuando se satisfagan las restricciones o condiciones del modelo.
En realidad, pocas situaciones son tan simples y dignas de confianza. De hecho, se requieren planteamientos con diferentes tamaños de lote para reflejar los descuentos por cantidad, las tasas de demanda irregulares o las interacciones entre los artículos. Sin embargo, la EOQ constituye a menudo una primera aproximación aceptable del tamaño promedio de los lotes, aun cuando una o varias de las suposiciones no sean del todo aplicables.

Si analizamos los costos intervinientes vemos que podemos agrupar a los costos intervinientes en dos grandes grupos:

a) Costo de mantenimiento de los inventarios
b) Costo de pedidos

El costo anual por concepto del manejo de esta cantidad del inventario es un costo que se incrementa linealmente junto con Q, como muestra la figura (a), es el siguiente:

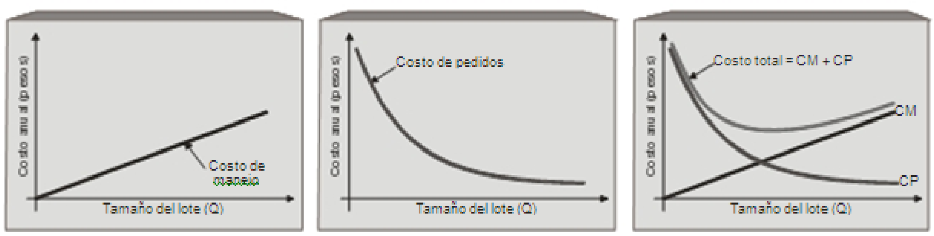
Costo anual de manejo de inventario = (Inventario del ciclo promedio) x (Costo de manejo unitario)

El costo anual por concepto de pedidos es:

Costo anual de hacer pedidos = (Número de pedidos/año)(Costo de hacer pedidos o de preparación)

El número promedio de pedidos por año es igual a la demanda anual dividida entre Q. Por ejemplo, si es necesario pedir 1.200 unidades cada año, y el tamaño promedio del lote es de 100 unidades, se harán 12 pedidos durante el año.
El costo anual de hacer pedidos o de preparación disminuye en forma no lineal al aumentar Q, como muestra la figura (b), porque entonces se hacen menos pedidos.

El costo anual total, como muestra la gráfica (c) es la suma de los dos componentes del costo:



(a) Costo anual de manejo de inventario (b) Costo anual de hacer pedidos (c)Costo anual total

Costo total = Costo de manejo anual + Costo anual de hacer pedido o de preparación.

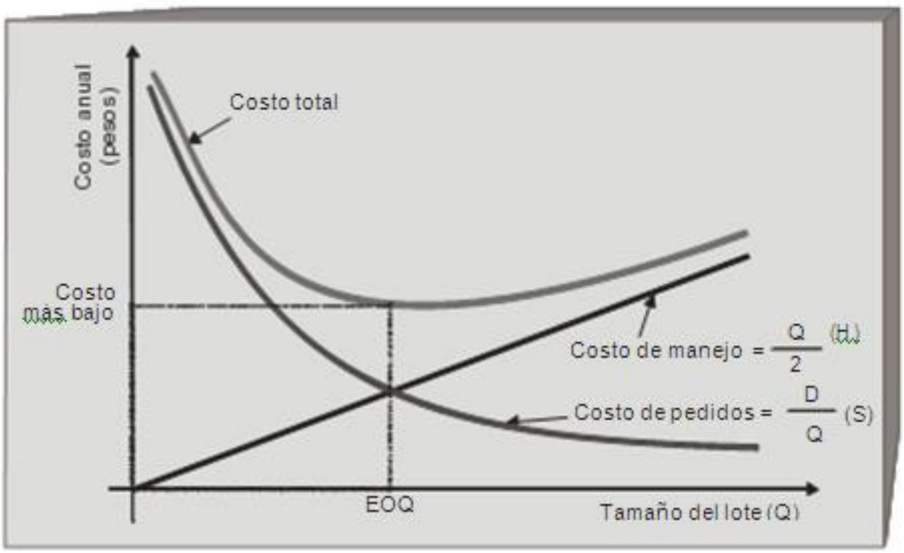
$$C = \frac{Q}{2}(H) + \frac{D}{Q}(S)$$

donde:
C = costo total por año
Q = tamaño del lote, en unidades
H = costo de mantener una unidad en inventario durante un año, calculado a menudo como proporción del valor del artículo
D = demanda anual, en unidades por año
S = costo de pedir o preparar un lote, en pesos por lote

Por medio del cálculo, encontramos la fórmula EOQ a partir de la fórmula del costo total.

Obtenemos la primera derivada de la función de costo total con respecto a Q, la igualamos a 0 y resolvemos para Q. Como se observa en la siguiente figura, la EOQ es la cantidad del pedido con la cual el costo anual de manejo de inventario es equivalente al costo anual de hacer pedidos.

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$



ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Cuando la fórmula de la EOQ se somete a un análisis de sensibilidad, podemos extraer conocimientos valiosos sobre la administración de inventarios. El análisis de sensibilidad es una técnica para modificar sistemáticamente los parámetros de importancia crucial, a fin de determinar los efectos del cambio. Consideremos los efectos que se reflejan en la EOQ cuando sustituimos diferentes valores en el numerador o el denominador de la fórmula.

Un cambio en la tasa de demanda. En virtud de que D está en el numerador, la EOQ (y, por lo tanto, el mejor nivel de inventario del ciclo) aumenta en forma proporcional a la raíz cuadrada de la demanda anual. Por lo tanto, a medida que aumenta la demanda, el tamaño del lote también debe aumentar, pero más lentamente que la demanda real.

Un cambio en los costos de preparación. Por el hecho de que S está en el numerador, al aumentar S aumenta la EOQ y, en consecuencia, también aumenta el inventario del ciclo promedio. Inversamente, al reducir S se reduce la EOQ, con lo cual es posible producir, de manera económica, lotes con tamaños más pequeños. Esta relación explica por qué se interesan tanto los fabricantes en reducir el tiempo y los costos de preparación. Cuando disminuyen las semanas de suministro, las rotaciones de inventario aumentan. Cuando el costo y el tiempo de preparación se vuelven triviales, se suprime un importante impedimento para la producción en lotes pequeños.

Un cambio en los costos de manejo de inventario. Por el hecho de que H se encuentra en el denominador, la EOQ disminuye a medida que H aumenta. Inversamente, cuando H disminuye, la EOQ aumenta. En este caso, los lotes de tamaños más grandes se justifican porque los costos correspondientes al manejo de inventario son más bajos.

Errores en la estimación de D, H y S. El costo total es muy poco sensible a los errores, aun en el caso de que las estimaciones sean erróneas por un amplio margen. Esto se debe a que los errores tienden a cancelarse mutuamente ya que el uso de la raíz cuadrada reduce el efecto del error. Así pues, la EOQ se localiza en una zona bastante amplia de tamaños aceptables de lote, lo cual permite que los gerentes se desvíen un poco de la EOQ, a fin de ajustarse a los contratos del proveedor o a las restricciones de almacenamiento.

Ejemplo 1: Suponga que su oficina utiliza 1200 cajas al año de papel para computadora. Usted debe determinar la cantidad que debe ser ordenada, y con qué frecuencia se debe hacer. Los datos a considerar son la tasa de demanda x= 1200 cajas al año, el costo de ordenamiento C_1 = \$5 por orden, costos de manutención o mantenimiento C_2 = \$1.20 por caja, por año.

La cantidad óptima para ordenar es Q* = 100 cajas, esto nos proporciona el número de ordenes = 1200/100 = 12, es decir, 12 ordenes por año, o una vez por mes.

MODELOS QUE PERMITEN AGOTAMIENTO (QUIEBRE DEL STOCK):

Existen dos costos adicionales en este modelo; los costos por escasez, (C_3), y los costos de ordenes retrasadas (C_4).

Porque los reemplazos son instantáneos, los artículos de órdenes retrasadas son enviados al momento de ser sustituidos y los mismos no se mantienen en el inventario. Las ordenes retrasadas son consideradas como inventarios negativos; por lo tanto el inventario mínimo es un número negativo y la diferencia entre el inventario mínimo y máximo es el tamaño del lote.

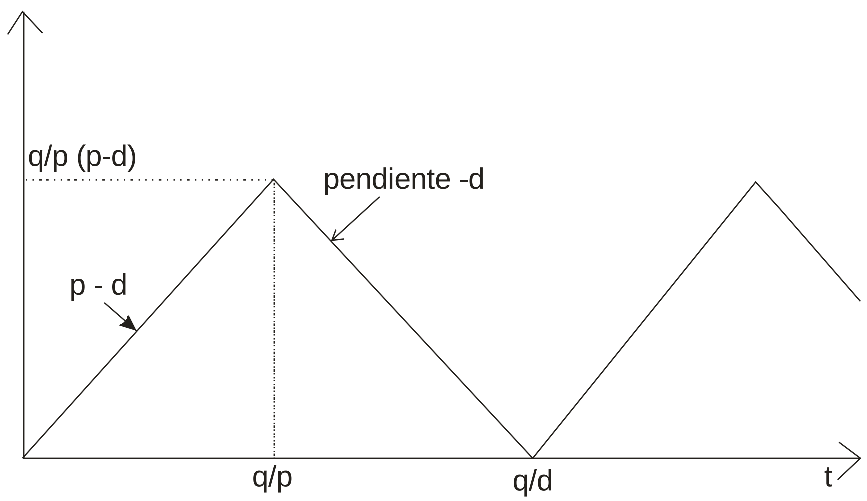
	Costo Ordenes		Costo Almacenamiento		Costo Escasez + Ordenes Retrasadas
Costo Total =	xC_1/Q	+	$(Q-S)^2C_2/(2Q)$	+	$xSC_3/Q + S^2C_4/(2Q)$

Ejemplo : Dado $C_3 = 0$, y $C_4 = 2\ C_2$, ¿escogería este modelo? Porque $S^* = Q^*/3$ bajo esta condición, la respuesta es, un sorprendente "Sí". Un tercio de las ordenes totales deben ser re-ordenadas.

Ejemplo: Considere el ejemplo numérico no. 1 con costos de escasez de C_4 = \$2,40 por unidad por año.
La decisión óptima es ordenar Q^* = 122 unidades, permitiendo un nivel de escasez S de 81,5 unidades.

MODELO DE PRODUCCIÓN :

Supongamos una tasa de producción constante K. Esta situación se presenta cuando un proceso de producción alimenta el inventario a una tasa k mayor a la tasa de demanda x.
El nivel máximo de inventario nunca alcanza el nivel Q porque los materiales son retirados al mismo tiempo que el producto es elaborado. La producción toma lugar al comienzo del período. Al final del período de producción, el inventario es reducido a una tasa de demanda x, hasta que alcanza 0 al final del ciclo.



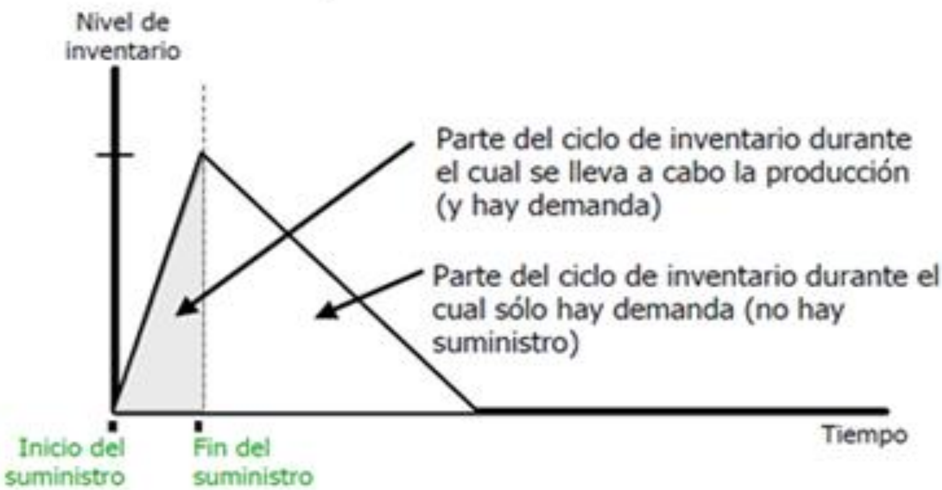
Q= número de unidades producidas en cada corrida de producción.

Buscando el valor que minimiza:

	Costo tenencia		Costo preparación
Costo Total =	h x inv. Promedio por año	+	(costo pedido por ciclo x ciclo/año)

1 / 2 (q/p) (p- d)   en el tiempo q/p

$$\text{Costo Total} = \frac{h \times (p-d)\,q.}{2\,p} + \frac{K \times D}{q}$$



ECUACIONES DEL MODELO:

$$= Q^{*}_{p} = \sqrt{\frac{2*D*S}{H*\left(1-\frac{d}{p}\right)}}$$

$$\text{Nivel de inventario máximo} = Q^{*}\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

$$\text{Coste de preparación} = \frac{D}{Q} * S$$

$$\text{Coste de almacenamiento} = 0{,}5 * H * Q\left(1-\frac{d}{p}\right)$$

D = Demanda anual.
S = Coste de preparación.
H = Coste de almacenamiento.
d = Demanda diaria.
p = Producción diaria.

Suponga que la demanda para un cierto aparato de ahorro de energía es x = 1800 unidades por año (o 6 unidades por día, asumiendo 300 días hábiles por año). La compañía puede producir a una tasa anual K de 7200 unidades (o 24 por día). El costo de elaboración es C_1 = \$300. Existe un costo de mantenimiento (holding) de C_2 = \$36 por unidad por año. El problema es encontrar el tamaño óptimo del lote, Q.

Q* = 200 unidades. El ciclo de producción óptima es 200/7200 = 0,0278 años, que es decir 8 y 1/3 al día. El número de ciclos por año es 1800/200 = 9 ciclos.

MODELO DESCUENTOS POR CANTIDAD

Permiten a la empresa ofrecer descuentos por cantidad o sea productos a precio reducido cuando éstos se compran en grandes cantidades.

En estos modelos se siguen empleando las hipótesis de EOQ.

Lo importante es que el Costo total que implica la compra sea el más bajo

Veamos un ejemplo aplicado. Supongamos que tenemos la siguiente información de la tabla que sigue:

Tramo	Volumen (u)	Descuento	precio
1	0-999	0	5
2	1000-1999	4	4.8
3	>=2000	5	4.75

Costo del pedido : $49

Demanda Anual :5.000 unidades

Costo de Inventario :20% del precio unitario

Primer Paso :Calcular Q* para cada tramo

- ✓ Q_1=700
- ✓ Q_2=714
- ✓ Q_3=718

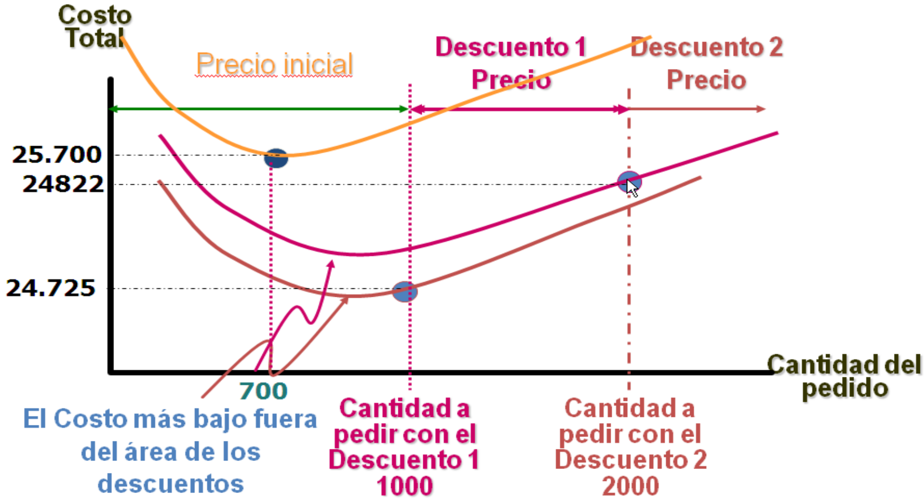
Segundo Paso: Ajustar los Valores al límite inmediatamente superior cuando sea el caso.

- ✓ **Q_1**=700
- ✓ **Q_2**=1000
- ✓ **Q_3**=2000

Tercer Paso: Calculo del Costo total para cada pedido

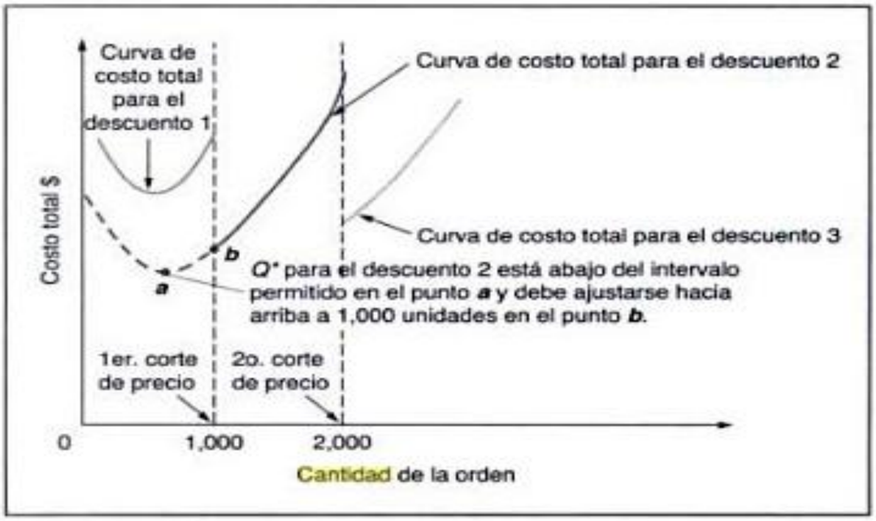
Seleccionar el costo total menor

Tramo	Precio	Q*	PxD	S	H	Total ($)
1	5	700	25000	350	350	25700
2	**4.8**	**1000**	**24000**	**245**	**480**	**24725**
3	7.75	2000	23750	123	950	24822



Ejemplo 1

Número de descuento	Cantidad para el descuento	Descuento (%)	Precio de descuento (*P*)
1	De 0 a 999	Sin descuento	\$5.00
2	De 1,000 a 1,999	4	\$4.80
3	A partir de 2,000	5	\$4.75



La forma directa de saber si se deben acelerar cantidades grandes es comparar el aumento de los costos con el precio normal con el ahorro generado por el precio de descuento.

Ejemplo2 :

D = 2000 u/año.

C_i = \$5

C_o = \$5

C_h = 1.50 + 0.10 * 5 = 2

1. Encuentre la Q optima con el precio base.

$$Q = \sqrt{\frac{2C_oD}{C_h}} = \sqrt{\frac{2*5*2000}{2}} = 100$$

2. Encontrar el costo del inventario con el precio base .

$$C_t = C_iD + C_o\frac{D}{Q} + C_h\frac{Q}{2}$$ = (5 * 2000)+ (5 * (200/100)) + (200/2) = 10,200

3. Calcular el costo del inventario con el precio de descuento, comparar este costo con el anterior y seleccionar la opción de menor costo.

Ejemplo 3:

Suponga que un proveedor nos ofrece un descuento del 5% si adquirimos lotes mayores o iguales a 200 unidades.

Datos :

$Q \geq 200$ desc. 5%

C_i = 5 * 0.95 = \$ 4.75

C_h = 1.50 + 0.10 (4.75) = \$ 1.975

C_t = 4.75 + 2000 + (5 * 2000/200) + (1.975 * 200/2) = 9747.5

C_t = $ 9747.5 $\Leftarrow$menor que la anterior.

Otro proveedor nos ofrece ahora un descuento del 40% si compramos lotes mayores o iguales a 120 unidades.

Datos: $Q \geq 120$ desc. 40%

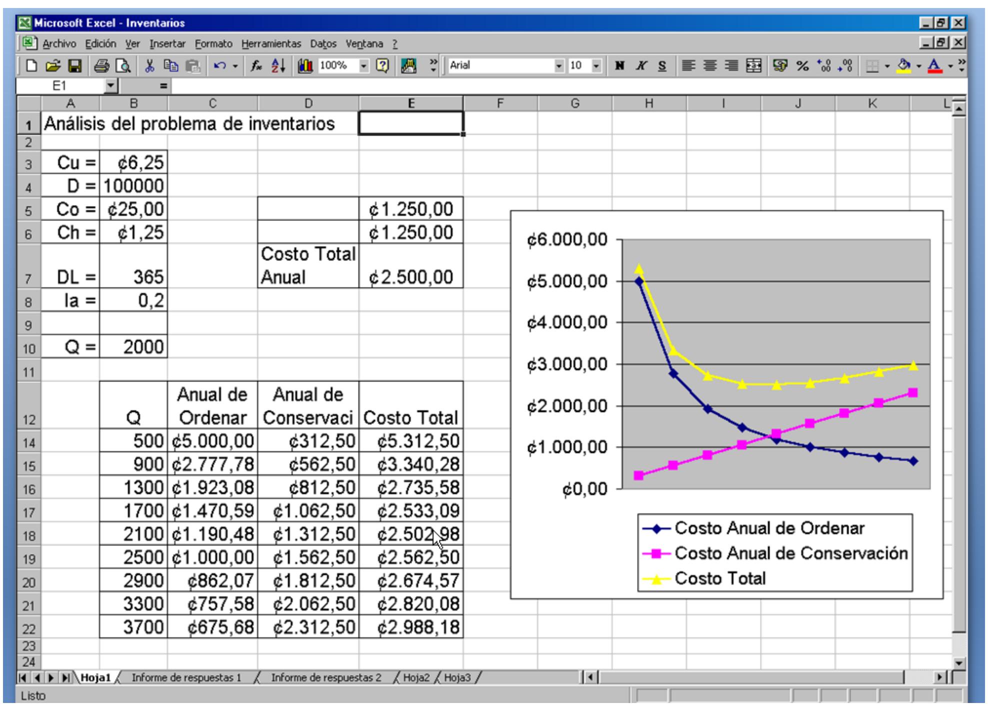
C_i = 5 * 0.66 = $ 3

C_h = 1.50 + 0.10 (3) = $ 1.80

C_t = 3 + 2000 + (5 * 2000/120) + (1.80 * 120/2) = 6191

C_t = $ 6191 $\Leftarrow$Optimo.

UTILIZACION DEL EXCEL PARA MODELOS DE INVENTARIOS



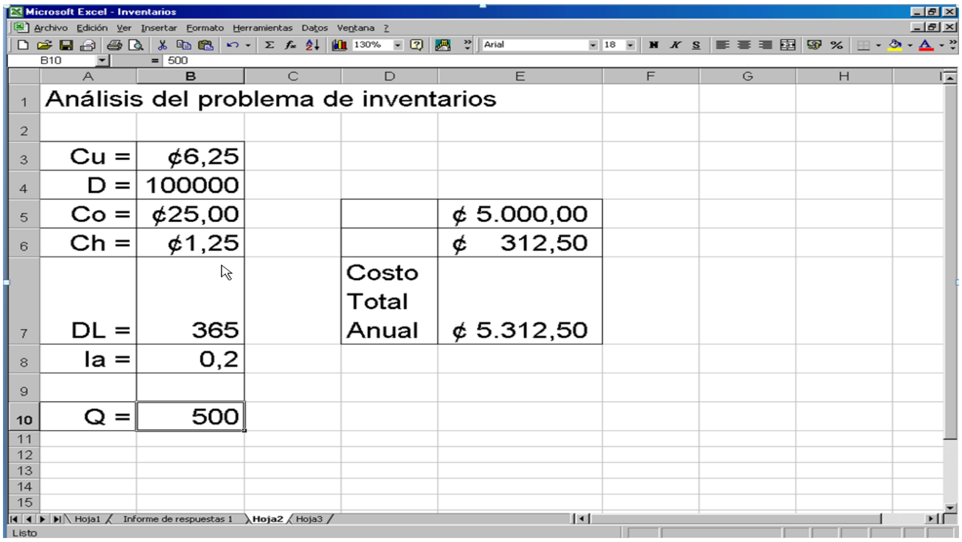
Análisis del problema de inventarios

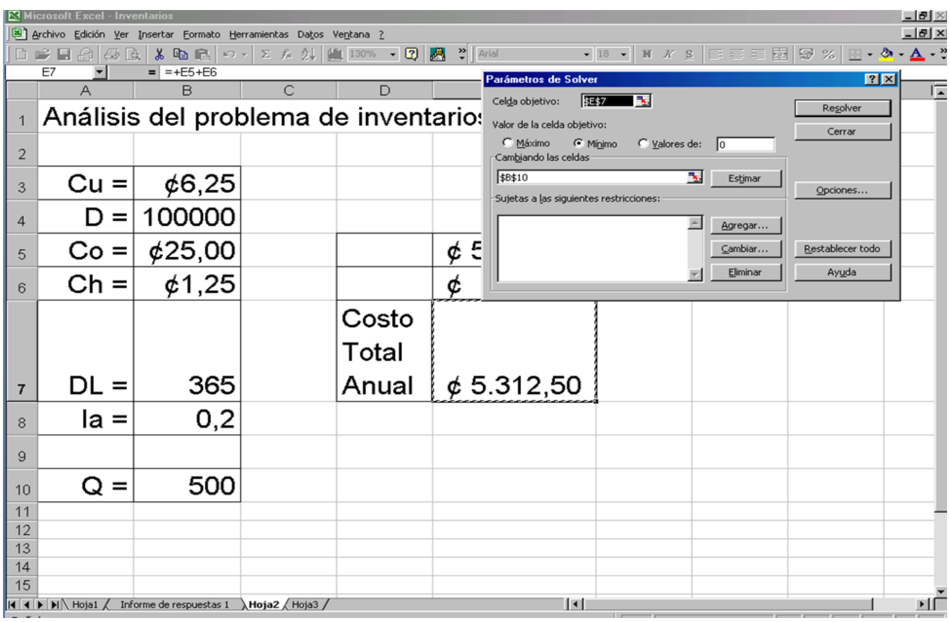
Cu =	¢6,25
D =	100000
Co =	¢25,00
Ch =	¢1,25
DL =	365
Ia =	0,2
Q =	2000

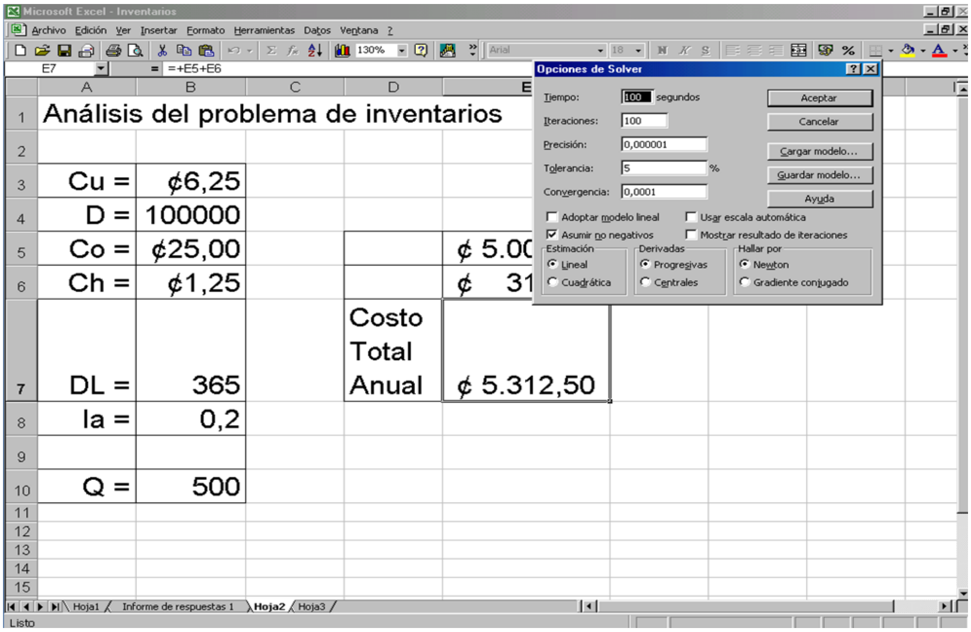
	¢1.250,00
	¢1.250,00
Costo Total Anual	¢2.500,00

Q	Anual de Ordenar	Anual de Conservaci	Costo Total
500	¢5.000,00	¢312,50	¢5.312,50
900	¢2.777,78	¢562,50	¢3.340,28
1300	¢1.923,08	¢812,50	¢2.735,58
1700	¢1.470,59	¢1.062,50	¢2.533,09
2100	¢1.190,48	¢1.312,50	¢2.502,98
2500	¢1.000,00	¢1.562,50	¢2.562,50
2900	¢862,07	¢1.812,50	¢2.674,57
3300	¢757,58	¢2.062,50	¢2.820,08
3700	¢675,68	¢2.312,50	¢2.988,18

Veremos en pantallas sucesivas el procedimiento para soluciones con el Solver del MS Excel : Tomamos los siguientes datos en una planilla tipo :







Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$E$7	Costo Total Anual	¢ 5.312,50	¢2.500,00

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$10	Q =	500	2000

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

✓ Cuánto puede cambiar la cantidad a ordenar óptima si los valores verdaderos de estos costos son diferentes a los estimados?

✓ Si los valores verdaderos son diferentes a los que estimamos, pero se usa el Q óptimo que calculamos con ellos, ¿cuánto puede exceder el costo variable total resultante al valor del costo variable total cuando se usa el Q óptimo?

Utilice los siguientes rangos:

- Ch de $1 hasta $1.25
- Co de $20 hasta $25

EOQ	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25
20	2000	1952	1907	1865	1826	1789
21	2049	2000	1954	1911	1871	1833
22	2098	2047	2000	1956	1915	1876
23	2145	2093	2045	2000	1958	1918
24	2191	2138	2089	2043	2000	1960
25	2236	2182	2132	2085	2041	2000

Q	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25
20	2000	2049	2098	2145	2191	2236
21	2049	2100	2149	2198	2245	2291
22	2098	2149	2200	2249	2298	2345
23	2145	2198	2249	2300	2349	2398
24	2191	2245	2298	2349	2400	2449
25	2236	2291	2345	2398	2449	2500

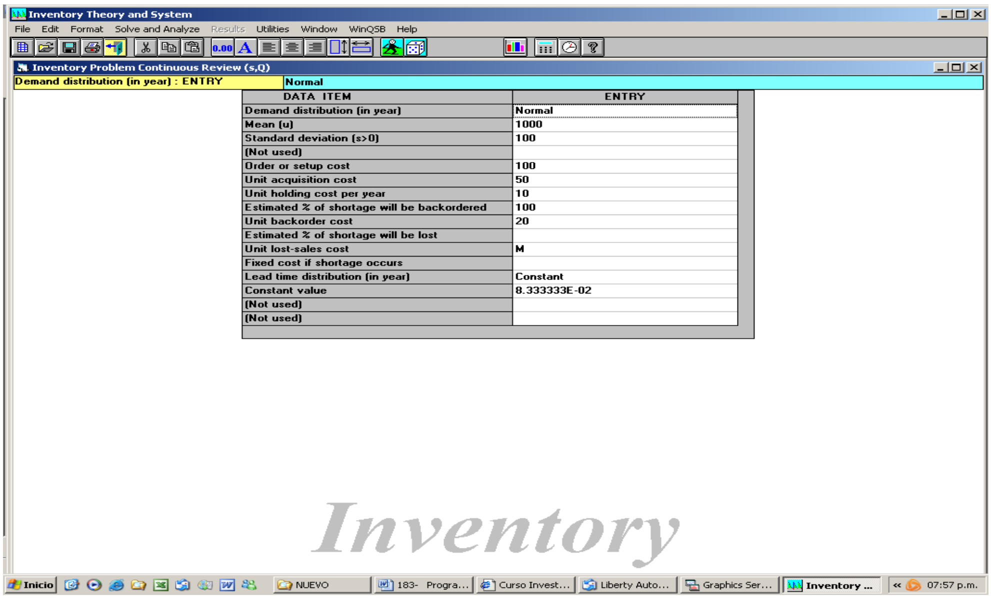
2000	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25
20	2000	2050	2100	2150	2200	2250
21	2050	2100	2150	2200	2250	2300
22	2100	2150	2200	2250	2300	2350
23	2150	2200	2250	2300	2350	2400
24	2200	2250	2300	2350	2400	2450
25	2250	2300	2350	2400	2450	2500

Sensibilidad	1	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25
20	0	1	2	5	9	14
21	1	0	1	2	5	9
22	2	1	0	1	2	5
23	5	2	1	0	1	2
24	9	5	2	1	0	1
25	14	9	5	2	1	0

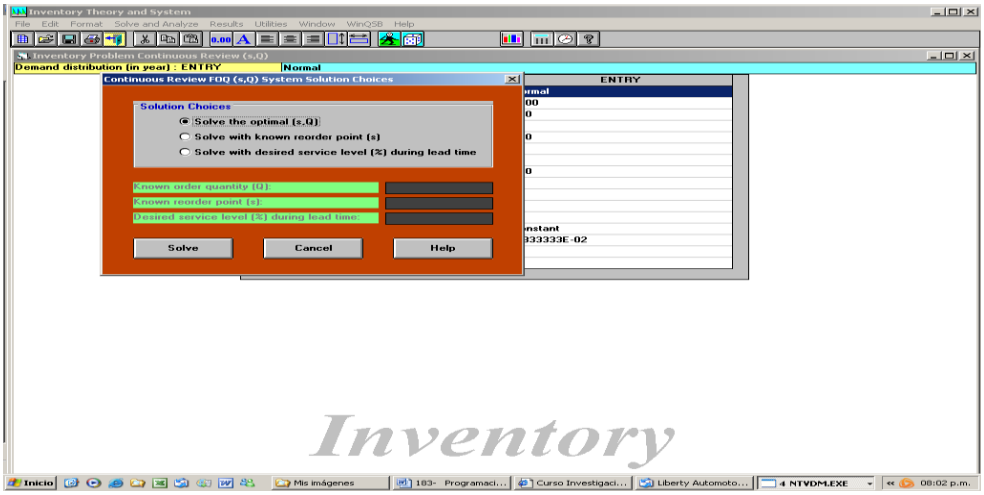
UTILIZACION DEL WINQSB EN MODELOS DE INVENTARIOS

El soft WIN QSB tiene un modulo de inventarios que permite no solo operar con los modelos sencillos planteados si no que además permite soluciones a modelos mas complejos inclusive los modelos probabilísticos que se verán mas adelante.

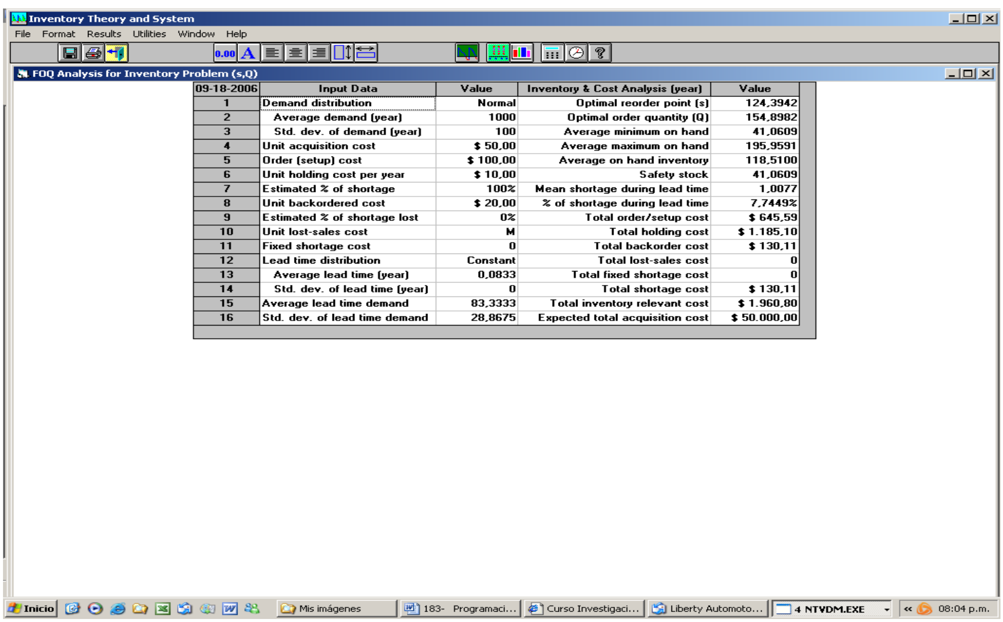
La pantalla inicial es la siguiente:



El programa permite además solucionar problemas de inventarios más complejos como los métodos probabilísticos de control (Modelos P y Q) y luego de ingresar los datos aparece una pantalla para elegir el caso que nos ocupa:



El reporte final, nos da una información más detallada que no es el objetivo de este capítulo.



09-18-2006	Input Data	Value	Inventory & Cost Analysis (year)	Value
1	Demand distribution	Normal	Optimal reorder point (s)	124,3942
2	Average demand (year)	1000	Optimal order quantity (Q)	154,8982
3	Std. dev. of demand (year)	100	Average minimum on hand	41,0609
4	Unit acquisition cost	$ 50,00	Average maximum on hand	195,9591
5	Order (setup) cost	$ 100,00	Average on hand inventory	118,5100
6	Unit holding cost per year	$ 10,00	Safety stock	41,0609
7	Estimated % of shortage	100%	Mean shortage during lead time	1,0077
8	Unit backordered cost	$ 20,00	% of shortage during lead time	7,7449%
9	Estimated % of shortage lost	0%	Total order/setup cost	$ 645,59
10	Unit lost-sales cost	M	Total holding cost	$ 1.185,10
11	Fixed shortage cost	0	Total backorder cost	$ 130,11
12	Lead time distribution	Constant	Total lost-sales cost	0
13	Average lead time (year)	0,0833	Total fixed shortage cost	0
14	Std. dev. of lead time (year)	0	Total shortage cost	$ 130,11
15	Average lead time demand	83,3333	Total inventory relevant cost	$ 1.960,80
16	Std. dev. of lead time demand	28,8675	Expected total acquisition cost	$ 50.000,00

A continuación se describirán los diferentes tipos de problemas de inventario disponibles en la ventana Especificaciones del problema de inventario (Inventory Problem Specification):

* Problema de cantidad económica de la orden para demanda determinística (Deterministic Demand Economic Order Quantity Problem)

* Análisis del problema de cantidad discontinua para demanda determinística (Deterministic Demand Quantity Discount Analysis Problem)

* Problemas con demanda estocástica para un solo periodo (Single-Period Stochastic Demand Problem)

* Problemas con demanda dinámica con existencias de reserva (Multiple-Period Dynamic Demand Lot-Sizing Problem)

* Sistema o modelo de cantidad fija de orden continuo (Continuous Review Fixed-Order-Quantity System)

* Sistema o modelo revisión continua (Continuous Review Order- Up-To System)

* Sistema o modelo de intervalo fijo de revisión periódica (Periodic Review Fixed-Order-Interval System)

* Sistema o modelo de revisión periódica con reaprovisionamiento opcional (Periodic Review Optional Replenishment System)

APLICACIÓN 1: Problema de cantidad económica de la orden para demanda determinística

Mediante un ejemplo demostraremos cómo se introducen los datos para la creación de un modelo sencillo de inventarios.

La materia prima principal para la creación de un producto cuesta $20 por unidad. Cada unidad del producto final requiere una unidad de esa materia prima. Si la demanda para el próximo año es de 1000 unidades
Cada orden por más unidades cuesta $5 y el costo de almacenaje por unidad por año es de $4.

¿Qué cantidad se debe pedir?

En la ventana Especificaciones del problema de inventario (Inventory Problem Specification) procedemos a digitar los datos básicos para la solución del problema:
La ventana siguiente muestra la información completa para la solución del problema:
* Demanda por año (Demand per Año): La demanda para el próximo año es de 1000 unidades.
* Costo de la orden (Order or Setup Cost per Order): Costo de cada nueva orden ($5).
* Costo de almacenar una unidad por año (Unit Holding Cost per Año): El costo de mantener una unidad es de $4.
* Costo por la falta de una unidad por año (Unit Shortage Cost per Año): El valor predeterminado es M, equivalente a una costo muy grande.
* Costo por la falta de una unidad independiente del tiempo (Unit Shortage Cost Independent of Time): Valor no suministrado en el ejemplo, por tanto lo dejamos en blanco.
* Tasa de reaprovisionamiento o producción por año (Replenishment or Production Rate per Año): El valor predeterminado es M, equivalente a una tasa muy grande.
* Tiempo de salida para una nueva orden por año (Lead Time for a New Order in Año): Valor no suministrado en el ejemplo, por tanto lo dejamos en blanco.
* Costo de adquisición de una unidad sin descuento (Unit acquisition Cost Without Discount): Costo de compra de una unidad ($20).
* Número de puntos de descuento (Number of Discount Breaks): Valor no suministrado en el ejemplo, por tanto lo dejamos en blanco.

* Cantidad de orden si es conocida (Order Quantity If You Known): Cantidad de unidades por pedido, si es conocido.
Una vez introducida la información procedemos a su solución mediante la opción Resolver el problema (Solve the Problem):
La solución óptima del problema se muestra a continuación:
La primera parte muestra un resumen de la información disponible por el ejemplo (columna Input Data).
La columna Economic Order Analysis presenta el análisis resultante del problema.
El número de unidades a pedir por Orden es de 50 unidades, generando un máximo de 50 unidades de inventario:
La fila Order Interval in Año nos muestra cada cuanto realizaremos el pedido de las 50 unidades (en este caso 0,05 equivale a una proporción del año). El costo total de ordenar unidades y el costo total de mantener unidades en inventario son de $100 y $100 respectivamente.
El costo total de compra equivale a $20.000 (Resulta de la multiplicación de los $20 que vale cada unidad por las 1.000 unidades que se van a pedir el próximo año). El costo total de este sistema por tanto será de $20.200.

Gráficos resultantes Podremos también realizar un análisis gráfico de los costos de este sistema activando la opción Análisis gráfico de los costos (Graphic Cost Analysis) en el menú Resultados (Results):
Aparecerá una ventana donde indicaremos unos simples parámetros de visualización del gráfico: Máximo costo, mínimos costo (ambos para el eje Y), mínima cantidad de reorden y máxima cantidad de reorden. Podremos pulsar OK sin modificar estos parámetros.
Para mostrar un gráfico que señale la intensidad de los pedidos elegiremos la opción Gráfico de la utilidad del inventario (Graphic Inventory Profile):

APLICACIÓN 2

Un supermercado compra uno de sus artículos a un precio de $50 y lo vende a $75. La demanda para el próximo mes tiene un comportamiento normal con media de 1.000 unidades y desviación de 35 unidades. El costo de hacer una nueva orden es de $25.
Una unidad faltante en inventario tiene un costo para la empresa de $70. La empresa cuenta con un inventario inicial de 100 unidades. Se desea prestar un nivel de servicio del 98%, determinar la utilidad del modelo.
El problema nos pide trabajar con una demanda con comportamiento normal:

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA:

Al resolver el problema tenemos la utilidad esperada del producto incluyendo los costos de inventario y el nivel deseado de servicio de ese producto a los clientes. Los resultados muestran varios aspectos importantes para el análisis:

* En el caso de un pedido, este deberá hacerse por cantidad aproximada de 872 unidades.

* El nivel de inventario alcanzará un punto máximo de 972 unidades (le sumamos 100 unidades disponibles a las 872 que se piden).

* El nivel de servicio es del 98%.

*La utilidad alcanzada es de $ 21**.349,63.**

Tercera parte

LOS MODELOS PROBABILISTICOS

Capitulo 12: DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO E INCERTIDUMBRE

INTRODUCCIÓN . EL CONCEPTO DEL RIESGO

Vimos anteriormente que los sistemas están formados por partes que funcionan juntas de una forma particular para obtener un objetivo. La relación entre las partes determina lo que el sistema hace y como funciona en general. Por lo tanto, las relaciones en el sistema son normalmente más importantes que cada parte individualmente. Los sistemas que son construidos como bloques de otros sistemas se llaman subsistemas.

Un sistema que no cambia es un sistema estático (es decir, determinístico.) La mayoría de las organizaciones con que tratamos son sistemas dinámicos, los cuales cambian a través del tiempo. Cuando el desarrollo del sistema sigue un patrón típico decimos que el mismo tiene un patrón de comportamiento. El sistema será estático o dinámico dependiendo del horizonte temporal que se escoja y de las variables en las cuales está concentrado. El horizonte temporal es el periodo de tiempo dentro del cual se estudia el sistema y las variables son los valores que cambian dentro del sistema.

En los modelos determinísticos como los que vimos, una buena decisión se valora de acuerdo a los resultados. Sin embargo, en los **modelos probabilísticos**, el gerente no está preocupado solamente por los resultados, sino que también con la **cantidad** de riesgo que cada decisión acarrea.

Como un ejemplo de la diferencia entre los modelos probabilísticos versus determinísticos, considere el pasado y el futuro: Nada que hagamos ahora puede cambiar el pasado, pero cualquier cosa que hacemos influencia y cambia el futuro, a pesar de que el futuro tiene un elemento de incertidumbre. Los gerentes se encuentran mucho mas cautivados por darle forma al futuro que por la historia pasada.

LA PROBABILIDAD El concepto de probabilidad ocupa un lugar importante en el proceso de toma de decisiones. En muy pocas situaciones de toma de decisiones existe información perfectamente disponible – todos los hechos necesarios.- La mayoría de las decisiones son hechas de cara a la incertidumbre. La probabilidad entra en el proceso representando el rol de sustituto de la certeza – un sustituto para el conocimiento completo.

Los modelos probabilísticos están ampliamente basados en aplicaciones estadísticas para la evaluación de eventos (o factores) incontrolables, así como también para la evaluación del riesgo de sus decisiones. La idea original de la estadística fue la recolección de información sobre y para el Estado. La palabra estadística no se deriva de ninguna raíz griega o latina, sino de la palabra italiana estate. La probabilidad tiene una historia mucho más larga. La Probabilidad se deriva del verbo probar lo que significa "averiguar" lo que no es tan fácil de obtener o entender. La palabra "prueba" tiene el mismo origen el cual proporciona los detalles necesarios para entender lo que se requiere que sea cierto.

Los modelos probabilísticos son vistos de manera similar a un juego; las acciones están basadas en los resultados esperados. El centro de interés se mueve desde un modelo determinístico a uno probabilístico usando técnicas estadísticas subjetivas para estimación, prueba y predicción. En los modelos probabilísticos, el riesgo significa incertidumbre para la cual la distribución de probabilidad es conocida. Por lo tanto, la evaluación de riesgo significa un estudio para determinar los resultados de las decisiones junto a sus probabilidades.

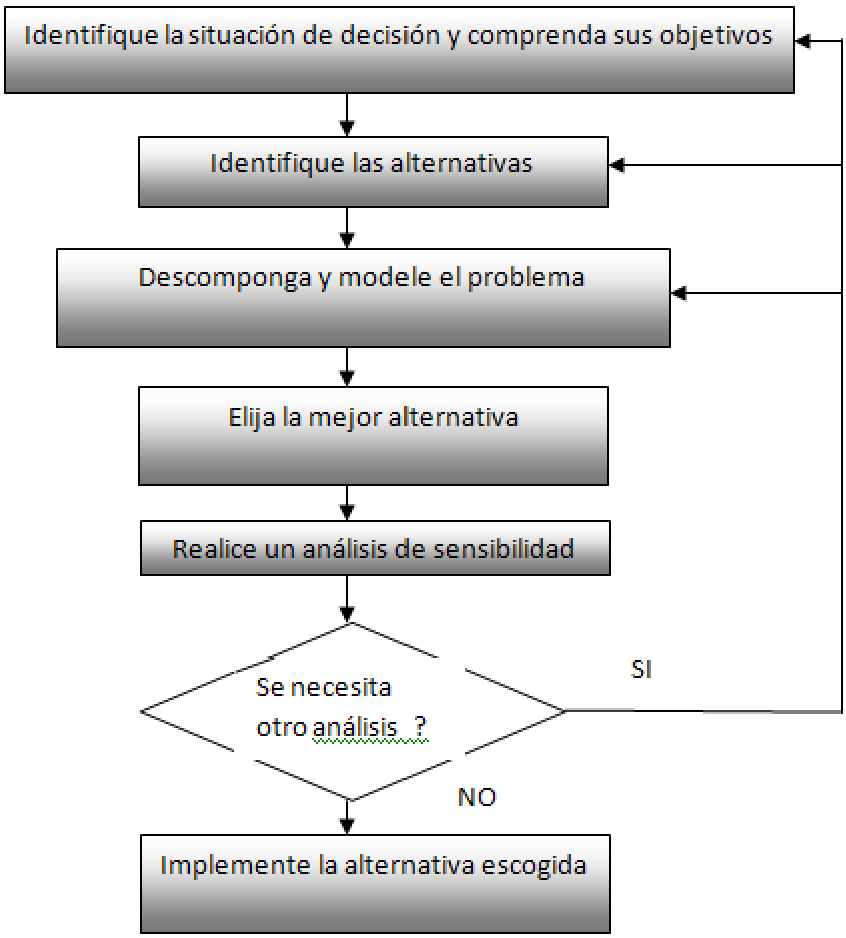
Los tomadores de decisiones generalmente se enfrentan a severa escasez de información. La evaluación de riesgo cuantifica la brecha de información entre lo que es conocido y lo que necesita saber para tomar una decisión óptima. Los modelos probabilístico son utilizados para protegerse de la incertidumbre adversa, y de la explotación de la propia incertidumbre.

La Dificultad en la Evaluación de la Probabilidad se obtiene de la información, la cual es escasa, vaga, inconsistente, o incompleta. Una afirmación tal como "la probabilidad de una baja de la oferta de electricidad se encuentra entre 0,3 y 0,4" es más natural y realista que su contraparte “exacta” de que "la probabilidad de una baja de electricidad es 0,36342."

Las dificultades de la toma de decisiones están representadas por la complejidad de las alternativas de decisión. La capacidad que tiene un decisor de procesar información limitada es un factor de exigencia cuando se consideran las implicancias de un solo curso de acción, pero en muchas decisiones se deben visualizar y comparar las implicancias de varios cursos de acción. Además, hay factores desconocidos que se inmiscuyen en la situación problemática y rara vez se conoce con certeza el resultado. La mayoría de las veces, el resultado depende de las reacciones de otras personas que quizás ni siquiera saben qué van a hacer. No es de sorprender entonces que a veces los que deben decidir pospongan la elección lo más posible y que luego decidan sin intentar considerar todas las implicancias de su decisión.

La toma de una decisión, fundamentalmente, tiene que ver con combinar información sobre probabilidades con información sobre deseos e intereses.
Abordar las decisiones como si fueran apuestas es la base de la **teoría de la decisión**. Significa que tenemos que compensar el valor de un cierto resultado contra su probabilidad de ocurrencia.

El origen de la teoría de la decisión para la toma de decisiones se deriva de la función de la utilidad del pago. Esta propone que las decisiones deben tomarse calculando la utilidad y la probabilidad de rangos de opciones y establece estrategias para una buena toma de decisiones:



En este capitulo se muestra el proceso de análisis de alternativas para la toma de decisiones, usando diferentes criterios de decisión, diferentes tipos de información e información de calidad variable. Se describe los elementos usados en el análisis de las alternativas de decisión y elección, así como también las metas y objetivos que guían la toma de decisiones. Se presenta los principales aspectos relacionados a las preferencias de las alternativas en la toma de decisiones, criterios y modos de elección; asimismo, se presentan las herramientas de evaluación de riesgo.

Los objetivos son importantes, tanto para identificar los problemas como para evaluar las soluciones alternativas. En la evaluación de alternativas, los objetivos del decisor deben expresarse como criterios que reflejen los atributos de las alternativas relevantes para la elección.

DE LOS DATOS AL CONOCIMIENTO

El conocimiento es lo que sabemos. La información es la comunicación de conocimientos. En cada intercambio de conocimientos, hay un emisor y un receptor. El emisor hace común lo que es privado, hace la información, la comunicación. La información se puede clasificar como formas **explícitas y tácitas**. La información explícita se puede explicar de forma estructurada, mientras que la información tácita es inconsistente e imprecisa de explicar.

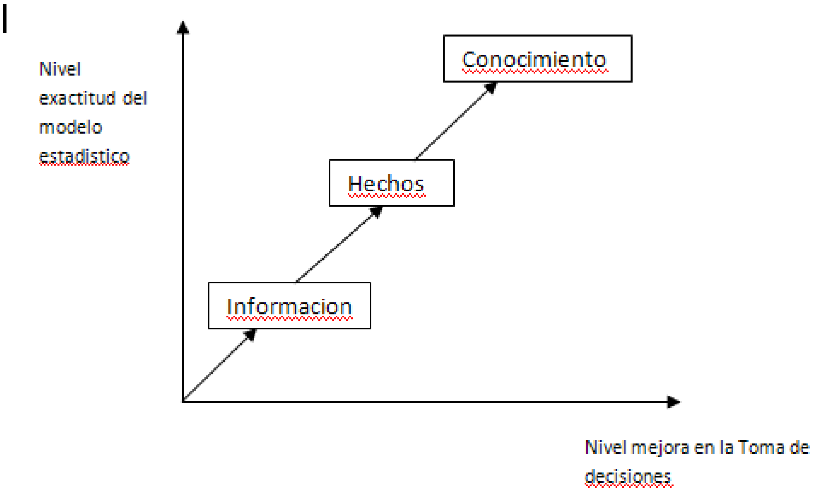
Los datos son conocidos como información cruda y no como conocimientos en sí. La secuencia que va desde los datos hasta el conocimiento es (observe el cuadro mas abajo): de **los Datos (Data) a la Información (Information), de la Información (Information) a los Hechos (Facts), y finalmente, de los Hechos (Facts) al Conocimiento (Knowledge).** Los datos se convierten en información, cuando se hacen relevantes para la toma de decisión a un problema. La información se convierte en hecho, cuando es respaldada por los datos. Los hechos son lo que los datos revelan.

Sin embargo el conocimiento instrumental es expresado junto con un cierto grado estadístico de confianza Los hechos se convierten en conocimiento, cuando son utilizados en la complementación exitosa de un proceso de decisión. La figura siguiente ilustra el proceso de razonamiento estadístico basado en datos para construir los modelos para la toma de decisión bajo incertidumbre.

donde:

Nivel de Exactitud del Modelo Estadístico. (Level of Exactness of Statistical Model)

Nivel de Mejoramiento en la Toma de Decisiones (Level of improvements on decisión making)



La figura anterior representa el hecho que a medida que la exactitud de un modelo estadístico aumenta, el nivel de mejoramiento en la toma de decisión también aumenta. Esta es la razón del porqué necesitamos la estadística de negocios. La estadística se creó por la necesidad de poner conocimiento en una base sistemática de la evidencia. Esto requirió un estudio de las leyes de la probabilidad, del desarrollo de las propiedades de medición y relación de datos.

Considerando el ambiente de incertidumbre, la posibilidad de que “las buenas decisiones” se tomen se incrementa con la disponibilidad “de la buena información”. La oportunidad de la disponibilidad de “la buena información” incrementa con el nivel de estructuración del proceso de Dirección de Conocimiento. La figura anterior también ilustra el hecho que mientras la exactitud de un modelo estadístico aumenta, el nivel de mejora en la toma de decisiones también aumenta.

El Proceso de Toma de Decisiones Estadísticas

A diferencia de los procesos de toma de decisiones determinísticas tal como, optimización lineal resuelto mediante ecuaciones, en decisiones con incertidumbre las variables son normalmente más numerosas y por lo tanto más difíciles de medir y controlar. Sin embargo, los pasos para resolverlos son los mismos:

1. Simplificar
2. Construir un modelo de decisión
3. Probar el modelo
4. Usar el modelo para encontrar soluciones: El modelo es una representación simplificada de la situación real. No necesita estar completo o exacto en todas las

relaciones. Se concentra en las relaciones fundamentales e ignora las irrelevantes. Este es entendido con mayor facilidad que un suceso empírico (observado), por lo tanto permite que el problema sea resuelto con mayor facilidad y con un mínimo de esfuerzo y pérdida de tiempo.
5. El modelo puede ser usado repetidas veces para problemas similares, y además puede ser ajustado y modificado.

Afortunadamente, los métodos probabilísticos y estadísticos para el análisis de toma de decisiones bajo incertidumbre son más numerosos y más poderosos que nunca. Las computadoras hacen disponible muchos usos prácticos.

Algunos de los ejemplos de aplicaciones para negocios son los siguientes:

- Un auditor puede utilizar técnicas de muestreo aleatorio para auditar las cuentas por cobrar de un cliente.
- Un gerente de planta puede utilizar técnicas estadísticas de control de calidad para asegurar la calidad de los productos con mínima inspección y menor número de pruebas.
- Un analista financiero podría usar métodos de regresión y correlación para entender mejor la analogía entre los indicadores financieros y un conjunto de otras variables de negocio.
- Un analista de Marketing podría usar pruebas de significancia para aceptar o rechazar una hipótesis sobre un grupo de posibles compradores a los cuales la compañía está interesada en vender sus productos.
- Un gerente de ventas podría usar técnicas estadísticas para predecir las ventas de los próximos periodos.

El análisis de decisiones es la disciplina que consiste en evaluar alternativas complejas en términos de valores (habitualmente en $ porque es lo que a los gerentes les importa) y de incertidumbre (lo que no conocemos).

El análisis de decisiones brinda información sobre las diferencias entre las alternativas definidas, y genera sugerencias de nuevas y mejores alternativas. Usamos números para cuantificar valores e incertidumbres subjetivas, lo cual nos permite comprender la situación de decisión. Los resultados numéricos deben reconvertirse para generar información cualitativa.

Los seres humanos pueden comprender, comparar y manipular números. Por lo tanto, para crear un modelo de análisis de decisiones es necesario crear la estructura del modelo y asignar las probabilidades y los valores para el modelo de computación. Aquí se incluyen los valores para las probabilidades, las funciones de valor para evaluar alternativas, las ponderaciones de valor para medir la concesión que se debe hacer entre los objetivos, y la preferencia de riesgo.

Una vez definida la estructura y los números, se puede comenzar el análisis. El Análisis de Decisiones implica mucho más que calcular la utilidad esperada y ponderada de cada alternativa. Si nos detuviéramos aquí, los decisores no tendrían demasiada información. Tenemos que examinar la sensibilidad de la utilidad esperada y ponderada para las probabilidades clave, y los parámetros de ponderación y preferencia de riesgo. Como parte del análisis de sensibilidad podemos calcular el valor de la información perfecta para incertidumbres que han sido modelizadas explícitamente.

Las metas del análisis de decisiones son : incorporar orientación, información, discernimiento y estructura al proceso de toma de decisión, para que ésta pueda ser mejor y más "racional".

ELEMENTOS DE LOS MODELOS DE DECISIÓN ESTOCASTICOS

La cuestión aquí es ver exactamente de qué modo se comporta un decisor cuando se enfrenta a una elección entre cursos de acción, cuyos resultados están regidos por el azar o las acciones de los competidores.

El análisis de decisiones es un proceso que le permite al decisor seleccionar una decisión (sólo una) entre un conjunto de alternativas posibles de decisión, cuando existe incertidumbre con respecto al futuro, con el objetivo de optimizar el pago (retorno) resultante, en términos de algún tipo de criterio de decisión numérico.

Los elementos de los problemas de análisis de decisiones son los siguientes:

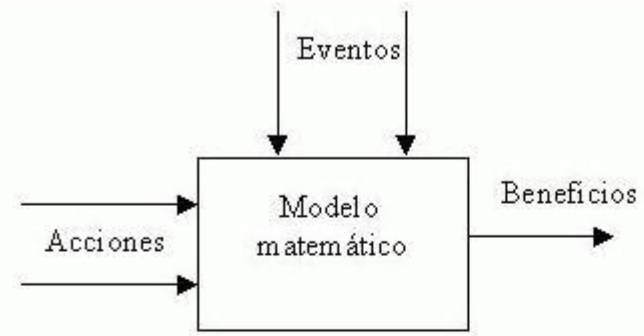
1. **Hay un decisor** responsable individual. Por ejemplo, el CEO de una compañía que quizás deba rendir cuentas ante los accionistas.

2. **Un número finito de eventos** (futuros) posibles, llamados Estados de la Naturaleza, es decir, un conjunto de escenarios posibles. Las circunstancias en las cuales se toma una decisión se llaman estados de la naturaleza. Los estados de la naturaleza se identifican y agrupan en el conjunto S; los miembros se denotan como s. El conjunto S es un grupo de conjuntos mutuamente excluyentes. Es decir, sólo puede ocurrir un estado de la naturaleza. ¿Qué puede hacer la naturaleza?

3. **Un número finito de alternativas posibles de decisión**. Hay una acción a, miembro del conjunto A, que puede ser adoptada por el decisor. Sólo puede adoptar una. ¿Qué puedo hacer? Una buena decisión requiere buscar un conjunto más rico de alternativas que las que se presentaron inicialmente o que las aceptadas tradicionalmente. Hay que ser breve en la parte de la lógica y la razón de su decisión. Es probable que existan mil cosas en un automóvil, pero no se necesitan todas para tomar decisiónes. Con media docena es suficiente.

La manera más sencilla de formular el problema de decisión es usando una Matriz de Beneficios (Matriz de pagos). Hay una matriz de beneficios X bien definida, monetaria sobre dos conjuntos de dominio dimensionales A y S. Las filas y las columnas se asignan a las alternativas de decisión posibles y a los estados posibles de la naturaleza, respectivamente. Veremos este punto con más detalle mas adelante.

Fuente de Errores en la Toma de Decisiones: La fuente principal de errores en los problemas de toma de decisiones arriesgadas son las presunciones falsas, no tener una estimación exacta de las probabilidades, depender de la expectativa, dificultades en medir la función de utilidad, y los errores de pronóstico.



Componentes de un modelo probabilístico

Considere la siguiente: **decisión de inversión:**

		Estados de la Naturaleza			
		Crecimiento	*Crecimiento medio*	*Sin cambio*	*Bajo*
		C	CM	SC	B
	Bonos	12%	8	6	3
Cursos de Acción	*Acciones*	15	7	3	-2
	Depósito	7	7	7	7

Los estados de la naturaleza son los estados de la economía durante un año. El problema es decidir qué acciones tomar entre los tres cursos posibles, con las tasas de retorno dadas tal y como son mostradas en la tabla.

LA INCERTIDUMBRE Y EL RIESGO

El dominio de los modelos de análisis de decisiones está entre los siguientes dos casos extremos, dependiendo del **grado de conocimiento** que tenemos sobre el resultado de nuestras acciones, como se muestra a continuación:

Ignorancia	Situación de riesgo	Conocimiento completo
Modelo de incertidumbre pura	Modelo probabilístico	Modelo determinista

Uno de los extremos de esta escala es determinista, como hemos visto en los problemas de la primera parte. El "polo" opuesto es la incertidumbre pura. Entre estos dos hay problemas con riesgo.

La probabilidad es un instrumento para medir las oportunidades de que un evento ocurra. Cuando se usa probabilidad se expresa la incertidumbre, el lado determinista tiene una probabilidad de 1 (o cero), mientras que el otro extremo tiene una probabilidad plana (todas igualmente probables). Por ejemplo, si se tiene certidumbre de la ocurrencia (o no ocurrencia) de un evento, usa una probabilidad de uno (o cero). Si se tiene incertidumbre, entonces usa la expresión "En realidad no sé", por lo tanto, puede o no ocurrir con una probabilidad del 50%.

Esta es la noción de **Bayes** de que la evaluación de la probabilidad siempre es subjetiva. Es decir, la probabilidad siempre depende de cuánto conoce el decisor. Si sabe todo lo que puede saber, la probabilidad pasará a ser 1 o 0.

Las situaciones de decisión con **incertidumbre plana** presentan el riesgo más grande. Para fines de simplicidad, considere el caso en que hay sólo dos resultados con una probabilidad de p. Así, la variación en los estados de la naturaleza es p (1-p). Esta variación es la mayor si definimos p = 50%. Es decir, igual chance para cada resultado. En tal caso, la calidad de la información está en su nivel más bajo.

Recordar que la **calidad de la información y la variación están inversamente relacionadas**. Una variación mayor de los datos implica una disminución en la calidad de los datos (es decir, de la información).

La información relevante para resolver un problema de decisión achica nuestra probabilidad plana. La información de utilidad desplaza la ubicación de un problema desde el extremo de la pura incertidumbre hacia el extremo determinista. La información relevante y útil achica la incertidumbre**.** .

La evaluación de la probabilidad no es más que la cuantificación de la incertidumbre. En otras palabras, la cuantificación de la incertidumbre permite comunicar la incertidumbre entre las personas, como la incertidumbre entre eventos, estados del mundo, creencias, etc. La probabilidad es la herramienta para comunicar la incertidumbre.

Existen tipos diferentes de modelos de decisión que ayudan a analizar distintos escenarios, dependiendo de la cantidad y el grado de conocimiento que tengamos. Los tres tipos más ampliamente utilizados son:

- Decisión tomada con pura incertidumbre,
- Decisión tomada con riesgo,
- Decisión tomada comprando información (empujando el problema hacia el "polo" determinista)

En las decisiones tomadas con pura incertidumbre, el decisor no tiene ningún conocimiento, ni siquiera de la probabilidad de ocurrencia de cualquier estado de la naturaleza.

En estas situaciones, el comportamiento del decisor se basa puramente en su actitud hacia la incógnita. Algunos de estos comportamientos son los optimistas, los pesimistas y los de arrepentimiento entre otros.

Para el Optimista: El vaso está medio lleno.
Para el Pesimista: El vaso está medio vacío.
Gerente: El vaso es el doble de grande de lo necesario.

Observe que esta categoría de problemas (es decir, los problemas con pura incertidumbre) resultan apropiados sólo para la toma de decisiones en la vida privada. No obstante, la persona pública (es decir, el gerente) tiene que tener cierto conocimiento de los estados de la naturaleza, para poder predecir las probabilidades de cada estado. De lo contrario no podrá tomar una buena decisión que sea razonable y defendible.

Siempre que un decisor tiene cierto conocimiento sobre los estados de la naturaleza puede asignar una probabilidad subjetiva a la ocurrencia de cada estado. Y cuando lo hace, el problema se clasifica como toma de decisiones bajo riesgo.

En muchos casos, el decisor puede necesitar la opinión de un especialista para limitar sus incertidumbres con respecto a la probabilidad de cada estado de la naturaleza. En tal caso, <u>el decisor puede comprar información relevante</u> a especialistas, para poder tomar una mejor decisión. El procedimiento para incorporar el asesoramiento de un experto en las incertidumbres del decisor se conoce como el **abordaje de Bayes**.

Por ejemplo, en una situación donde se debe tomar una decisión de inversión, se debe responder la siguiente pregunta: ¿En qué estado estará la economía el año próximo? Supongamos que limitamos las posibilidades a: Crecimiento (G), Igualdad (S), o Declinación (D); entonces, una representación típica de nuestra incertidumbre podría ilustrarse de la siguiente manera:

La información relevante reduce nuestra incertidumbre

LA TOMA DE DECISIONES CON INCERTIDUMBRE

Cuando las decisiones se toman con incertidumbre, el decisor no tiene conocimiento de los resultados de ninguno de los estados de la naturaleza y/o es costoso obtener la información necesaria. En tal caso, la decisión depende meramente del tipo de personalidad que tenga el decisor. El decisor debe adjudicar la probabilidad para convertir el problema de incertidumbre en riesgo.

Comportamiento según los tipos de personalidad y la toma de decisiones con pura incertidumbre:

Tomemos un cuadro de alternativas : Los datos numéricos corresponden a la tabla antes presentada

Actitud Pesimista, o Conservador (**Maximin**). Hipótesis de mínima. Algo como “Las cosas malas siempre me suceden a mí “.

	Bonos	3	
a) Escriba el número mínimo en cada fila de cursos de accion.	Acciones	-2	
b) Elija el número máximo y realice esa acción.	Depósitos	7	ELECCION

Actitud Optimista, Agresivo (**Maximax**). Algo así como “Las cosas buenas siempre me suceden a mí”.

	B	12	
a) Escriba el número máximo en cada fila de cursos de acción	A	15 ←	ELECCION
b) Elija el número máximo y realice esa acción.	D	7	

Coeficiente de Optimismo (Hurwicz),). A mitad de camino: Ni demasiado optimista ni demasiado pesimista:

a) Elija entre 0 y 1, 1 significa optimista y 0 significa pesimista,

b) Elija los números más alto y más bajo para cada acción,

c) Multiplique el beneficio más alto (en el sentido de las filas) por **α** y el más bajo por (1- **α**),

d) Opte por el curso de acción que da la suma más alta.

Por ejemplo, para **α** = 0,7, tenemos:

B	(0,7*12)	+	(0,3*3)	=	9,3
A	(0,7*15)	+	(0,3*-2)	=	<u>9,9</u>
D	(0,7*7)	+	(0,3*7)	=	7

Actitud :Mínimo arrepentimiento: (Pérdida de Oportunidad de **Savage**). Debo minimizar las situaciones deplorables. Mi decisión debe ser tal que valga la pena repetirla. Sólo debería hacer las cosas que siento que podría repetir con placer.
El arrepentimiento es el beneficio o rédito de la que hubiera sido la mejor decisión, dadas las circunstancias, menos el beneficio de la decisión tomada concretamente, dadas las circunstancias.

Proceso de evaluacion

a) Configure una tabla de arrepentimiento: Tome el número más alto de cada una de las columnas correspondientes a los estados de la naturaleza (por ejemplo, L) y réstele todos los números de dicha columna, es decir, L - Xi, j.

La Matriz de Arrepentimiento

	C	CM	SC	B	Paso b
Bonos	(15-12)	(8-8)	(7-6)	(7-3)	<u>4</u>
Acciones	(15-15)	(8-7)	(7-3)	(7+2)	9
Depósito	(15-7)	(8-7)	(7-7)	(7-7)	8

b) Elija el número máximo de cada acción,
c) Elija el número mínimo en Paso b, y adopte esa acción.

Limitaciones de la Toma de Decisiones bajo Incertidumbre

1. En general en el análisis de decisión se asume que el tomador de decisiones se enfrenta un problema donde debe escoger por lo menos y como máximo una opción del grupo de opciones. En algunos casos estas limitaciones pueden ser superadas mediante la formulación de una toma de decisión bajo incertidumbre como un juego suma cero de dos personas.

2. En la toma de decisiones bajo incertidumbre pura, el tomador de decisiones no tiene conocimientos sobre cual estado de la naturaleza es más “probable” que ocurra. Probablemente se ignora los estados de la naturaleza por lo tanto no podría estar pesimista u optimista. En tal caso, el tomador de decisiones intenta con las condiciones de seguridad.

3. Como mencionamos antes cualquier técnica utilizada en la toma de decisiones bajo incertidumbre pura, es solo apropiada para las decisiones de la vida privada. Adicionalmente, una persona pública (por ejemplo, un gerente) debe tener algunos conocimientos sobre el estado de la naturaleza tal que prediga las probabilidades de varios estados de la misma. De lo contrario, el tomador de decisiones no es capaz de proporcionar una decisión razonable y defendible.

LA TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO

El riesgo implica cierto grado de incertidumbre y la habilidad para controlar plenamente los resultados o consecuencias de dichas acciones. El riesgo o la eliminación del mismo es un esfuerzo que los gerentes deben realizar. Sin embargo, en algunos casos la eliminación de cierto riesgo podría incrementar otros riesgos. El manejo efectivo del riesgo requiere la evaluación y el análisis del impacto subsiguiente al proceso de decisión. Este proceso permite al tomador de decisiones evaluar las estrategias alternativas antes de tomar cualquier decisión.

El proceso de decisión se describe a continuación:

- ✓ El problema está definido y todas las alternativas confiables han sido consideradas. Se evalúan los resultados posibles para cada alternativa.
- ✓ Los resultados se discuten de acuerdo a su reembolso monetario o de acuerdo a la ganancia neta en activos o con respecto al tiempo.
- ✓ Los valores inciertos son cuantificados en términos de probabilidad.
- ✓ La calidad de la estrategia óptima depende de la calidad con que se juzgue. El tomador de decisiones deberá examinar e identificar la sensibilidad de la estrategia optima con respecto a los factores cruciales.

Cuando el decisor posee algún conocimiento sobre los estados de la naturaleza puede asignarle a la ocurrencia de cada estado alguna estimación subjetiva de probabilidad. En estos casos, el problema se clasifica como de toma de decisiones con riesgo. El decisor puede asignar probabilidades a la ocurrencia de los estados de la naturaleza.

El proceso de toma de decisión con riesgo es el siguiente:

a) Use la información que tenga para asignar su parecer personal (llamado probabilidades subjetivas) sobre el estado de la naturaleza, p(s); Use algunos de los criterios visto antes.

b) Cada curso de acción tiene asociado un determinado beneficio con cada uno de los estados de la naturaleza, X(a, s);

c) Calculamos el beneficio esperado, también llamado riesgo o R, correspondiente a cada curso de acción como R(a) = Sumas de [X(a, s) p(s)];

d) Aceptamos el principio que dice que deberíamos actuar para minimizar (o maximizar) el beneficio esperado;

e) Ejecute la acción que minimice R(a).

Para resolver esta cuestión se acude a criterios tal como:

1.CRITERIO DEL VALOR ESPERADO:

a) Con cada acción, multiplique la probabilidad y el beneficio y luego sume: Elija el número más grande y adopte esa acción.

b) Agregue el resultado por fila,

c) Seleccione el número más grande y tome esa acción. Utilizando los valores del ejemplo anterior de decisiones de inversión:

	C (0,4)		CM (0,2)		SC (0,3)		B (0,1)		**Valor esperado**
Bonos	0,4(12)	+	0,2(8)	+	03(6)	+	0,1(3)	=	**8,5**
Acciones	0,4(15)	+	0,2(7)	+	0,3(3)	+	0,1(-2)	=	8,1
Depósito	0,4(7)	+	0,2(7)	+	0,3(7)	+	0,1(7)	=	7

Los estados más probables de la naturaleza: (apropiado para decisiones no repetitivas)

a) Tome el estado de la naturaleza que tiene la probabilidad más alta (rompa los empates arbitrariamente),

b) En esa columna, elija la acción que tiene el mayor beneficio,

En nuestro ejemplo numérico, el Crecimiento tiene una chance del 40%, *por eso debemos comprar Acciones.*

2. CRITERIO DE LAPLACE. “Yo no sé nada”: Todos los estados de la naturaleza tienen igual probabilidad. Como yo no sé nada sobre la naturaleza, todo es igualmente probable:

a) Para cada estado de la naturaleza ponga una probabilidad igual (es decir, probabilidad plana),
b) Multiplique cada número por la probabilidad,

	C	CM	SC	B	Beneficio esperado
Bonos	0,25(12)	0,25(8)	0,25(6)	0,25(3)	**7,25**
Acciones	0,25(15)	0,25(7)	0,25(3)	0,25(-2)	5,75
Depósito	0,25(7)	0,25(7)	0,25(7)	0,25(7)	7

c) Añada filas de cursos de acción y complete la columna Beneficio Esperado,
d) Elija el número máximo en el paso c, y adopte ese curso de acción.

Mas adelante se vera esta aplicación cuando se desarrolle la aplicación de matrices de decisión y arboles en el cap.14

Capitulo 13: LA EVALUACION DE RIESGOS

EL VALOR DE LA INFORMACION

Hemos trabajado con tablas de distribución expresadas en términos del valor monetario esperado. Sin embargo, este no es siempre el mejor criterio de usar en la toma de decisiones. El valor del dinero varía de situación a situación y de una decisión a otra. Generalmente, el valor del dinero no es una función lineal de la cantidad de dinero. En tal caso, el analista debe determinar la utilidad monetaria del tomador de decisiones y seleccionar los cursos de acción que proporcione la utilidad esperada más elevada, en vez del valor monetario esperado mayor.

Los pagos individuales de seguros se enfocan en evitar la posibilidad de pérdidas financieras asociadas con la ocurrencia de algún evento indeseado. Sin embargo, las utilidades de diferentes resultados no son directamente proporcionales a sus consecuencias monetarias. Si la pérdida es considerada relativamente grande, un individuo es más propenso a pagar una prima asociada. Si un individuo considera que la pérdida no tiene consecuencias, esta persona no es más propensa a pagarla.

Las diferencias individuales en actitudes hacia el riesgo y sus diferencias, influenciarán sus opciones. Por lo tanto los individuos deben realizar cada vez la misma decisión con relación al riesgo percibido en situaciones similares. Esto no significa que todos los individuos deberían controlar la misma cantidad de riesgo en situaciones similares. Más aún, debido a la estabilidad financiera de un individuo, dos individuos enfrentando la misma situación podrían reaccionar de manera diferente a pesar de utilizar los mismos criterios. Una diferencia personal de opinión e interpretación de las políticas también puede producir diferencias.

La retribución monetaria esperada que se asocia con las diversas decisiones puede no ser razonable por las siguientes dos razones importantes:

1. El valor en dinero puede no expresar auténticamente el valor personal que el resultado tiene para uno. Esto es lo que motiva a algunas personas a jugar a la lotería por muy poco dinero.

2. Si usted acepta los valores monetarios esperados es probable que no esté reflejando con exactitud su aversión al riesgo. Por ejemplo, supongamos que tiene que elegir entre que le paguen $10 por no hacer nada, o participar de una apuesta cuyo resultado depende del lanzamiento de una moneda al aire, pudiendo ganar $1.000 si sale cara y perder $950 si sale cruz. La primera alternativa tiene una recompensa esperada de $10; la segunda tiene una recompensa esperada de

0,5(1000) + 0,5(- 950) = $25, y es claramente preferible a la primera (si la recompensa monetaria esperada fuere un criterio razonable). Pero usted quizás prefiera $10 seguros antes que correr el riesgo de perder $950.

¿Por qué algunas personas contratan seguros y otras no?

El proceso de toma de decisiones involucra factores *psicológicos* y *económicos*, entre otros. El concepto de utilidad es un intento de medir el provecho que tiene el dinero para el decisor en lo individual. Con el concepto de la utilidad podemos explicar por qué, por ejemplo, algunas personas compran billetes de lotería por 1 $ para ganar un millón. Por lo tanto, para tomar una decisión acertada considerando la actitud que tiene el decisor con respecto al riesgo, debemos convertir la matriz de beneficios monetarios en una matriz de utilidad.

La principal pregunta sería: ***¿Cómo se mide la función de la utilidad con cada decisor?***

Consideremos nuestro Problema de Decisión de Inversión. ¿Cuál sería la utilidad de $12?

a) Asigne 100 unidades de utilidad y 0 unidades de utilidad al elemento más grande y al más pequeño, respectivamente, de la matriz de beneficios. En nuestro ejemplo numérico, asignamos 100 unidades de utilidad a 15, y 0 unidades de utilidad a -2,
b) Pídale al decisor que elija entre las siguientes hipótesis:

- Recibir $12 por no hacer nada

Ó

- Jugar el siguiente juego: ganar $15 con probabilidad (p) y perder $2 con probabilidad (1-p), donde p es un número seleccionado entre 0 y 1.

Cambiando el valor de p, y repitiendo una pregunta similar, existe un valor de p con el que el decisor es indiferente ante las dos hipótesis. Digamos, p = 0,48.

c) Ahora, la utilidad para $12 es igual a 0,48(100) + (1-0,48) (0) = 48.
d) Repita el mismo proceso para hallar las utilidades de cada elemento de la matriz de beneficios.

Supongamos que definimos la siguiente matriz de utilidad:

A	B	C	D
12	8	6	3
15	7	3	-2
7	7	7	7

Matriz de beneficio

A	B	C	D
48	34	28	13
100	19	13	0
19	19	19	19

Matriz de utilidad

Ahora se puede aplicar cualquiera de las técnicas antes analizadas a esta matriz de utilidad (en lugar de monetaria) para tomar una decisión satisfactoria. Queda claro que la decisión podría ser diferente.

ACTITUDES RELATIVAS CON RESPECTO AL RIESGO Y SU IMPACTO

Probabilidad de un Evento y el Impacto de su Ocurrencia: El acercamiento de proceso orientado para manejar el riesgo y la incertidumbre es parte de cualquier modelo probabilístico. Esto le permite al tomador de decisiones examinar el riesgo dentro de su retorno esperado, e identificar aspectos críticos en controlar, limitar y mitigar el riesgo. Este proceso envuelve tanto el aspecto cuantitativo como el cualitativo de controlar el impacto del riesgo.

La teoría de la decisión no describe lo que las personas hacen dado que existen dificultades con los cálculos de probabilidad y la utilidad de los resultados. Las decisiones también pueden estar afectadas por la racionalidad subjetiva de las personas y por la manera en la cual el problema de decisión es percibido.

Tradicionalmente, el valor esperado de una variable aleatoria ha sido usado como la mejor ayuda para cuantificar el monto del riesgo. Sin embargo, el valor esperado en solitario no es necesariamente una buena medida por la cual tomar decisiones porque no hace clara la distinción entre probabilidad y severidad. Para demostrarlo, considere el siguiente ejemplo:

Suponga que una persona debe escoger entre dos escenarios 1 y 2 mostrados a continuación:

- Escenario 1: Existe 50% de posibilidad de perder $50, y 50% de que no.
- Escenario 2: existe 1% de posibilidad de perder $25, y 99% de que no.

Ambos escenarios resultan en una perdida esperada de $25, pero esto no refleja el hecho de que el escenario 2 podría considerarse más riesgoso que el primero. (Por supuesto, esto es subjetivo) El tomador de decisiones podría estar más preocupado sobre minimizar el efecto de ocurrencia de un evento extremo en vez de preocuparse por la media. El cuadro siguiente muestra la complejidad de la probabilidad de un evento, el impacto de la ocurrencia del mismo, y su indicador de riesgo asociado respectivamente:

Probabilidad alta	**Riesgo Aceptable sin acciones preventivas**	**Son requeridos planes alternativos**
Probabilidad Baja	**Necesito mediciones costo-beneficio del riesgo**	**Se requiere tomar acciones**
	Bajo impacto	**Alto impacto**

Como vimos antes recordamos que la certeza equivalente es la rentabilidad libre de riesgo. Adicionalmente, la diferencia entre la certeza que posea un tomador de decisiones y el valor monetario esperado (VME) es llamado *prima de riesgo*. Deberíamos usar el signo y la magnitud de la prima de riesgo en la clasificación de la actitud relativa del tomador de decisiones hacia el riesgo como sigue a continuación:

- Si la prima de riesgo es positiva, el tomador de decisiones está deseando tomar riesgo. Obviamente, unas personas aceptan más riesgo que otras; mientras más alta sea la prima de riesgo, mas riesgo es aceptado por el tomador de decisiones.
- Si la prima de riesgo es negativa. El tomador de decisiones evitará tomar riegos por lo cual se le llama adverso al riesgo.
- Si la prima de riesgo es cero. Al tomador de decisiones se le llama riesgo neutral.

EVALUACIÓN DEL RIESGO: ¿CUÁN ACERTADA ES SU DECISIÓN?

El riesgo es la inconveniencia de una apuesta, la cual es descrita en términos de probabilidad. El control de riesgo es un procedimiento de cuantificación de los valores de pérdida o ganancia y proporcionarlos con apropiados valores de probabilidad. En otras palabras, el control de riesgo significa construir la variable aleatoria que describe el riesgo. El indicador de riesgo es una cantidad que describe la calidad de la decisión.

Considerando nuestro Problema de Decisión de Inversión:

		Estados de la Naturaleza			
		Crecimiento	Crec. medio	Sin cambio	Bajo
		C	CM	SC	B
	Bonos	12%	8	6	3
Cursos de acción	Acciones	15	7	3	-2
	Depósito	7	7	7	7

Los estados de la naturaleza son los estados de la economía durante, digamos, un año. El Valor Esperado (es decir, promedios):

Valor esperado = $\sum x_i \cdot P(x_i)$

por sí solo no indica adecuadamente que la decisión es de calidad . Se necesita saber la varianza para tomar una decisión acertada. En nuestro ejemplo numérico también nos interesa el "riesgo" comparativo entre los cursos de acción alternativos. Una de las medidas del riesgo en general se expresa con la **desviación estándar**. La variación, o la desviación estándar, son valores numéricos que indican la variabilidad inherente a la decisión. Si el valor del riesgo es más bajo indica que lo que usted esperaba obtener es más probable. Por lo tanto, el riesgo también podría usarse para comparar cursos de acción alternativos. Lo que deseamos es un mayor retorno esperado con menor riesgo. Es por ello que al gerente le preocupa tanto el alto riesgo.

Una medida del riesgo es la varianza.

Varianza = $[\ \sum x_i \,.\, x_i \,.\, P(x_i)\ ]$ $\quad$ (Valor esperado)^2

La varianza es una medida del riesgo; por lo tanto, cuanto mayor la varianza, mayor el riesgo. La varianza no se expresa en las mismas unidades que el valor esperado (digamos, en $). En otras palabras, la varianza es difícil de entender y explicar por el término al cuadrado de su cálculo. Este problema puede resolverse trabajando con la raíz cuadrada de la varianza, llamada desviación estándar.

Desviación estándar = (Varianza)$^{1/2}$

Ambas, la varianza y la desviación estándar, proporcionan la misma información; siempre se puede obtener una de la otra. En otras palabras, el proceso de calcular una desviación estándar siempre involucra el cálculo de una varianza. Como la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, siempre se expresa en las mismas unidades que el valor esperado.

Ahora, la pregunta es "¿qué curso de acción tomar entre uno que tiene un resultado esperado mayor y otro, con resultado esperado menor pero riesgo mucho mayor?"

Para tomar una decisión acertada en estos casos, se puede usar otra medida de riesgo, conocida como el **Coeficiente de Variación**. El Coeficiente de Variación (C.V.) es el riesgo relativo con respecto al Valor Esperado, que se define como:

El Coeficiente de Variación (CV) = (Desviación estándar / Valor esperado) 100 %

Observe que el CV es independiente de la medida de unidad de valor esperado. La inversa de CV (es decir, 1/CV) se llama Relación Señal/ Ruido. El coeficiente de variación se usa para representar la relación entre la desviación estándar y el valor esperado; expresa el riesgo como porcentaje del valor esperado.

La siguiente tabla muestra las mediciones de riesgo calculadas para el Problema de Decisión de Inversión:

						Evaluación del riesgo	
	C (0,4)	CM (0,2)	SC (0,3)	B (0,1)	**Valor esperado**	**Desviación estándar**	**C. V.**
Bonos	12	8	6	3	8,5	3,12	37%
Acciones	15	7	3	-2	8,1	6,11	75%
Depósito	7	7	7	7	7	0	0%

De las columnas de Evaluación del Riesgo en la tabla se llega a la conclusión de que los Bonos son mucho menos riesgosos que las Acciones. Es claro que el Depósito está exento de riesgo. Ahora, la última pregunta es: Con toda la información relevante, ¿qué curso de acción asumir?
Todo depende de usted.
Volvamos a Laplace ("yo no sé nada !"): Todos los estados de la naturaleza tienen igual probabilidad. Como yo no sé nada sobre la naturaleza, todo es igualmente probable .

						Evaluación del riesgo	
	C (0,25)	CM (0,25)	SC (0,25)	B (0,25)	**Valor esperado**	**Desviación estándar**	**C. V.**
Bonos	12	8	6	3	7.25	3.27	45%
Acciones	15	7	3	-2	5.75	6.22	108%
Depósito	7	7	7	7	7	0	0%

Nuevamente de las columnas de Evaluación del Riesgo en la tabla se llega a la conclusión de que los Bonos son mucho menos riesgosos que las Acciones. Es claro que el Depósito está exento de riesgo. Ahora, la última pregunta es: Con toda la información relevante, ¿qué curso de acción asumir? También aquí todo depende de usted.

La Preferencia entre Alternativas: Refiriéndonos a las alternativas de los Bonos y las Acciones en nuestro ejemplo numérico, notamos basado en la varianza que la alternativa de los Bonos domina a la de las Acciones. Sin embargo, este no es siempre el caso.

Comportamiento de dos Inversiones

Por ejemplo, considere dos alternativas de inversión: Inversión I e Inversión II con sus características resumidas en la siguiente tabla:

Dos Carteras de Inversión				
Inversión I			Inversión II	
Rentabilidad %	*Prob.*		*Rentabilidad %*	*Prob.*
1	0,25		3	0,33
7	0,50		5	0,33
12	0,25		8	0,34

Para clasificar estas dos inversiones tenemos que calcular primero la media y la desviación estándar y luego analizar los resultados. Haciendo los cálculos, nos damos cuenta que la inversión I tiene una media de 6,75% y una desviación estándar de 3,9%, mientras que la inversión II tiene media 5,36% y una desviación estándar de 2,06%. Observe primero que bajo el análisis usual de media-varianza, estas dos inversiones no pueden ser clasificadas. Esto ocurre porque la inversión I tiene la media y la desviación estándar más grande. Por lo tanto la Aproximación de la Dominación Estándar no es útil aquí. Debemos reordenar el coeficiente de variación (CV) como una base sistemática de comparación. El CV para la inversión I es 57,74% y para la inversión II 38,43%. Por lo tanto, la inversión II tiene la preferencia sobre la otra. Claramente, este acercamiento puede ser utilizado para clasificar cualquier número de alternativas de inversión.

A**plicación**, considere una inversión de $10000 sobre un período de 4 años que retorna T(t) al final del año t, con R(t) siendo estadísticamente independiente como sigue:

R(t)	*Probabilidad*
$2000	0,1
$3000	0,2
$4000	0,3
$5000	0,4

¿Es esta una inversión atractiva dado que la tasa atractiva mínima de retorno es I =20%?

Se podría calcular el retorno esperado: E[R(t)] = 2000(0,1) +….= $4000

Sin embargo el valor presente, usando el factor de descuento $[(1+I)^n -1]/[I(1+I)^n]$ = 2,5887, n=4, para la inversión es: 4000(2,5887) - 10000 = $354,80.

Nada mal. Sin embargo, se necesita saber su riesgo asociado. La varianza de R(t) es:
$Var[R(t)] = E[R(t)^2] - \{E[R(t)]\}^2 = \$^2 10^6$.
Por lo tanto, su desviación estándar es 1000.

Una medida más apropiada es la varianza del valor presente, la cual es: $Var(PV) = \sum Var[R(t)]. (1+I)^{-2t}$ = 106 [0,6944+…+0,2326] = $1,7442(10^6)$, por lo tanto, su desviación estándar es 1320,68.

Aquí la pregunta es ¿Desea invertir?

CASO DE APLICACION : INVESTIGACION DE MERCADO

En muchos casos, el decisor puede necesitar la opinión de un especialista para reducir sus incertidumbres con respecto a la probabilidad de cada uno de los estados de la naturaleza. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema de decisión concerniente a la producción de un nuevo producto:

Estados de la naturaleza

	Mucha venta	Venta media	Poca venta
	A(0,2)	B(0,5)	C(0,3)
A1 (desarrollar)	3000	2000	-6000
A2 (no desarrollar)	0	0	0

Las probabilidades de los estados de la naturaleza representan los distintos grados que tiene el criterio del decisor (por ejemplo, un gerente) con respecto a la ocurrencia de cada estado. Nos referiremos a estas evaluaciones subjetivas de la probabilidad como probabilidades "a priori".

El beneficio esperado de cada curso de acción es A1 = 0,2(3000) + 0,5(2000) + 0,3(-6000) = -$200 y A2 = 0; entonces elegimos A2, que significa que no desarrollamos.

Sin embargo, el gerente se siente algo reacio a tomar esta decisión; por ello solicita la asistencia de una firma de investigación de mercado. Ahora nos enfrentamos a una nueva decisión. Es decir, con cuál firma de investigación de mercado debe consultar su problema de decisión. De esta manera es que el gerente debe tomar una decisión acerca de cuán "confiable" es la firma consultora. Mediante muestreo y luego analizando el desempeño previo de la consultora debemos desarrollar la siguiente matriz de confiabilidad:

Qué sucedió realmente en el pasado

		A	B	C
Lo que el consultor	Ap	0,8	0,1	0,1
predijo	Bp	0,1	0,9	0,2
	Cp	0,1	0,0	0,7

Todas las firmas de Investigación de Mercado llevan registros (es decir, conservan datos históricos) del desempeño alcanzado en relación con las predicciones anteriores que hubieren formulado. Para construir una matriz de confiabilidad debe tomar en consideración los "registros de desempeño" de la Firma de Investigación de Mercado correspondientes a los productos que tienen mucha venta, y luego hallar el porcentaje de los productos que la Firma predijo correctamente que tendrían mucha venta, venta media y poca o ninguna venta. Estos porcentajes se representan como $P(A_p|A) = 0,8$, $P(B_p|A) = 0,1$, $P(C_p|A) = 0,1$, en la primera columna de la tabla anterior, respectivamente. Se debe efectuar un análisis similar para construir las otras columnas de la matriz de confiabilidad.

Observe que para fines de consistencia, las entradas de cada columna en la matriz de confiabilidad deberían sumar uno.

a) Tome las probabilidades y multiplíquelas "hacia abajo" en la matriz, y luego súmelas:

b) SUMA es el resultado de sumar en sentido horizontal.

c) Es necesario normalizar los valores (es decir, que las probabilidades sumen 1) dividiendo el número de cada fila por la suma de la fila hallada en el paso b.

0,2	0,5	0,3	
A	B	C	SUMA
0,2(0,8) = 0,16	0,5(0,1) = 0,05	0,3(0,1) = 0,03	0,24
0,2(0,1) = 0,02	0,5(0,9) = 0,45	0,3(0,2) = 0,06	0,53
0,2(0,1) = 0,02	0,5(0) = 0	0,3(0,7) = 0,21	0,23

A	B	C
(0,16/0,24)=0,667	(0,05/0,24)=0,208	(0,03/0,24)=0,125
(0,02/0,53)=0,038	(0,45/0,53)=0,849	(0,06/0,53)=0,113
(0,02/0,23)=0,087	(0/0,23)=0	(0,21/0,23)=0,913

Capitulo 14: LA MATRIZ Y EL ARBOL DE DECISIONES.

Como hemos indicado antes muchos procesos de toma de decisiones pueden ser tratados por medio de ***tablas o matrices de decisión***, en las que se representan los elementos característicos de estos problemas. Consideremos los elementos que tenemos en el problema:

Los diferentes ***estados*** que puede presentar la naturaleza: F_1, F_2, ..., F_n. (Futuros Posibles)

Las ***acciones*** o ***alternativas*** entre las que seleccionará el decisor: $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,...,$\mathbf{a_m}$.

Las ***consecuencias*** o ***resultados*** $\mathbf{x_{ij}}$ de la elección de la alternativa $\mathbf{a_i}$ cuando la naturaleza presenta el estado $\mathbf{e_j}$.

Se supone, por simplicidad, la existencia de un número finito de estados y alternativas. El **formato general** de una tabla de decisión es el siguiente:

Forma general de una tabla de decisión					
	Estados de la Naturaleza				
Alternativas		$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	. . .	$\mathbf{F_n}$
	$\mathbf{a_1}$	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1n}
	$\mathbf{a_2}$	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2n}
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	$\mathbf{a_m}$	x_{m1}	x_{m2}	. . .	x_{mn}

CONCEPTO DE REGLA DE DECISIÓN

La tabla de decisión es un mero instrumento para dar respuesta a la cuestión fundamental en todo proceso de decisión: ¿ Cuál es la mejor alternativa ?

Para la elección de la alternativa más conveniente nos basaremos en el concepto de regla o criterio de decisión, que podemos definir de la siguiente forma:

Una **regla** o **criterio de decisión** es una aplicación que asocia a cada alternativa un número, que expresa las preferencias del decisor por los resultados asociados a dicha alternativa.

Notaremos por **S** a esta aplicación y **S(a)** el valor numérico asociado por el criterio **S** a la alternativa **a**.
La descripción de los diferentes criterios de decisión que proporcionan la alternativa óptima será realizada de acuerdo con el conocimiento que posea el decisor acerca del estado de la naturaleza, es decir, atendiendo a la clasificación de los procesos de decisión.

Según esto, distinguiremos:

- ✓ Tablas de decisión en ambiente de certidumbre
- ✓ Tablas de Decisión en ambiente de incertidumbre
- ✓ Tablas de Decisión en ambiente de riesgo

REGLAS DE DECISION
En los procesos de decisión bajo ***incertidumbre***, el decisor conoce cuáles son los posibles estados de la naturaleza, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre. En particular, esto excluye el conocimiento de información de tipo probabilístico sobre las posibilidades de ocurrencia de cada estado.

A continuación se describen las diferentes reglas de decisión en ambiente de incertidumbre,.(*Estos criterios ya los hemos mencionado antes*)

- ✓ Criterio de Wald
- ✓ Criterio Maximax
- ✓ Criterio de Hurwicz
- ✓ Criterio de Savage
- ✓ Criterio de Laplace

Los criterios descritos anteriormente no son los únicos que pueden utilizarse en ambiente de incertidumbre; muchas otras reglas de decisión son válidas en este contexto, por lo que parece preciso determinar propiedades que hagan un criterio preferible a otro.

CRITERIOS DE DECISIÓN BAJO RIESGO

Los procesos de decisión en ambiente de ***riesgo*** se caracterizan porque puede asociarse una probabilidad de ocurrencia a cada estado de la naturaleza, probabilidades que son conocidas o pueden ser estimadas por el decisor antes del proceso de toma de decisiones.

Los diferentes **criterios de decisión en ambiente de riesgo** se basan en estadísticos asociados a la distribución de probabilidad de los resultados. Algunos de estos criterios se aplican sobre la totalidad de las alternativas, mientras que otros sólo tienen en cuenta un subconjunto de ellas, considerando las restantes peores, por lo no que están presentes en el proceso de toma de decisiones. Representaremos por **R(a_i)** los resultados asociados a la alternativa **a_i**, y por **P(a_i)** la distribución de probabilidad correspondiente a tales resultados, esto es, el conjunto de valores que representan las probabilidades de ocurrencia de los diferentes estados de la naturaleza:

R	**x_{i1}**	**x_{i1}**	**. . .**	**x_{i1}**
P	**p_1**	**p_2**	**. . .**	**p_n**

Los **principales criterios** de decisión empleados sobre tablas de decisión en ambiente de riesgo son:

- Criterio del valor esperado
- Criterio de mínima varianza con media acotada
- Criterio de la media con varianza acotada
- Criterio de la dispersión
- Criterio de la probabilidad máxima

Veamos una Aplicación: En cierta ciudad se va a construir un aeropuerto en una de dos posibles ubicaciones A y B, la cual será elegida el próximo año. Una cadena hotelera está interesada en abrir un hotel cerca del nuevo aeropuerto, para lo cual tiene que decidir qué terrenos comprar. La siguiente tabla muestra el precio de los terrenos, el beneficio estimado que obtendrá el hotel en cada posible localización si el aeropuerto se ubica allí, y el valor de venta de cada terreno si finalmente el aeropuerto no se construye en ese lugar. ¿Cuál es la decisión más adecuada?

	Parcela en A	Parcela en B
Precio del terreno	18	12
Beneficio estimado del hotel	31	23
Valor de venta del terreno	6	4

Las ***alternativas*** posibles de que dispone el decisor son las siguientes:

- ✓ Comprar el terreno en A.
- ✓ Comprar el terreno en B.
- ✓ Comprar ambos terrenos.
- ✓ No comprar ningún terreno.

Por otra parte, los posibles ***estados de la naturaleza*** son:

- ✓ El aeropuerto se construye en A.
- ✓ El aeropuerto se construye en B.

Así, si la cadena hotelera compra el terreno en A y el aeropuerto se construye allí finalmente, obtendrá como rendimiento final el correspondiente a la explotación del hotel, 31, menos la inversión realizada en la compra del terreno, 18, es decir, 31-18 = 13. Por el contrario, si el aeropuerto se construye en B, el terreno adquirido en A deberá ser vendido, por lo que se obtendrá un beneficio de 6, al que habrá que restar la inversión inicial en la compra, 18. Esto proporciona un rendimiento final de 6-18 = -12.

De manera análoga se determinan los resultados de las restantes alternativas ante cada uno de los posibles estados de la naturaleza, dando lugar a la siguiente tabla de decisión:

Alternativas Terreno comprado	Estados de la Naturaleza	
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B
A	13	- 12
B	- 8	11
A y B	5	- 1
Ninguno	0	0

Criterio del valor esperado:
Este criterio basado en el modo de considerar las diferencias entre los riesgos busca determinar la escala de valores de utilidad que los resultados tienen subjetivamente para el que toma la decisión como ya hemos desarrollado antes.
Veremos su aplicación con un ejemplo concreto:
Un comerciante minorista debe decidir cuantas unidades comprar de una mercadería. Como la mercadería es perecedera no puede guardarse en stock por más de un día, por lo que no es deseable comprar más que la provisión para un día. La mercadería le cuesta al comerciante $1 por unidad mientras que la vende a $5. Cada unidad demandada que deje de comprar para la venta le representara dejar de ganar $4 sin tener en cuenta la pérdida de clientes.
Si este comerciante conociera exactamente la cantidad demandada es obvio que solicitaría esta sin excederse en su compra.

Esto no es el caso de nuestro comerciante y el nos pregunta que nivel de stock a mantener.

Supongamos que en base a sus registros y experiencia el comerciante puede armar una tabla donde nos indique las demandas y las probabilidades en que estas se dan, tal como la siguiente:

Demanda	Probabilidad
0	0.05

1	0.15
2	0.30
3	0.25
4	0.15
5	0.10
6 o mas	0

Por lo que se ve aquí el comerciante nunca solicitara mas de 5 unidades, por tanto solo las alternativas de compra que se le presentan son seis: comprar 0,1,2,3,4 ó 5, y los futuros posibles están dados por la demanda; esto es 0,1,2,3,4 ó 5 unidades.

Para construir nuestra matriz de resultados, tendremos que los resultados propiamente estarán representados por la ganancia que el comerciante tiene ante cada interacción de los futuros posibles con sus alternativas.

Llamando D a la demanda y S a la cantidad del stock, la ganancia se podría calcular como:

Caso en que $D \leq S$ Ganancia = 5 x D – 1 x S
Caso en que $D > S$ Ganancia = 4 x S

Por tanto armaremos la matriz de resultados como sigue

	Pi=0.05	**0.15**	**0.30**	**0.25**	**0.15**	**0.10**
	F1=0	**F2=1**	**F3=2**	**F4=3**	**F5=4**	**F6=5**
A1=0	0	0	0	0	0	0
A2=1	-1	4	4	4	4	4
A3=2	-2	3	8	8	8	8
A4=3	-3	2	7	12	12	12
1A5=4	-4	1	6	11	16	16
A6=5	-5	0	5	10	15	20

Si calculáramos la esperanza matemática siguiendo el criterio del valor esperado de los resultados tendríamos que adoptar como solución aquella que posee la optima, que en este caso es la máxima ya que nuestra matriz es de ganancias:

Para la primera alternativa tendríamos:
VE (A1) = 0 x 0.05 + 0 x 0.15 + 0 x 0.30 + 0x 0.25 + 0x 0.15 + 0 x 0.10 = 0$
Así para las demás alternativas obteniendo:

Alternativa	Stock	Ganancia esperada $
A1	0	0
A2	1	3.75

A3	2	6.75
A4	3	8.25
A5	4	8.50
A6	5	8

La elección cae sobre tener un stock de 4 unidades que nos permite una mayor ganancia esperada

Viendo la matriz de resultados anterior se puede ver que para cada futuro posible (Fi) existe una alternativa para la cual la ganancia es máxima(por ejemplo para F3 es A3, para F5 es A5 etc.
Denominaremos **Costo de oportunidad** asociado a cada resultado a la diferencia entre el valor máximo de la ganancia para Fi y el valor del resultado considerado. O sea esa "perdida de oportunidad" es la ganancia a la cual renuncia el decisor por no adopta la acción optima y cuando la matriz es de costos, la perdida de oportunidad es la cantidad que deja de ahorrar el decisor al no adoptar la acción optima.

C. Oport (Ai , Fj) = Máximo Xij – Xij Matriz de ganancias
C.Oport (Ai , Fj) = Xij – mínimo Xij Matriz de costos

En el ejemplo que estamos desarrollando vemos que ordenar una cantidad distinta a la demanda tiene un costo por no haber elegido la mejor o sea la estrategia que es el valor de la demanda. Cuando el valor del stock corresponde con el valor de la demanda el costo de oportunidad será cero porque es la máxima ganancia que se puede obtener para ese valor de la demanda.

Construiremos una matriz de **costos de oportunidad**

	Pi=0.05	*0.15*	*0.30*	*0.25*	*0.15*	*0.10*
	F1=0	*F2=1*	*F3=2*	*F4=3*	*F5=4*	*F6=5*
A1=0	0	4	8	12	16	20
A2=1	1	0	4	8	12	16
A3=2	2	1	0	4	8	12
A4=3	3	2	1	0	4	8
1A5=4	4	3	2	1	0	4
A6=5	5	4	3	2	1	0

Como el objetivo es maximizar ganancias debemos tender a minimizar los costos de oportunidad. Por tanto si obtenemos los Valores Esperados de los costos de oportunidad tendríamos:

VE (C.O.1) = 0 x 0.05 + 4 x 0.15 + 8 x 0.30 + 12 x 0.25 + 16 x 0.15 + 20 x 0.10 =10.40

Y para los restantes podríamos tener la tabla de valores siguiente:

Alternativa	Stock	Costo de oportunidad esperado $
A1	0	10.40
A2	1	6.65
A3	2	3.65
A4	3	2.15
A5	4	1.90
A6	5	2.40

Como minimizamos costos de oportunidad la alternativa adecuada vuelve a ser A5, lo cual es lógico que sea asi.

A este valor mínimo del costo de oportunidad se le denomina ***Costo del riesgo* y representa la perdida inevitable que implica tomar una decisión en condiciones de riesgo.**

Si en nuestro ejemplo aplicáramos una estrategia coincidente con el valor de la demanda obtendríamos lo que llamaremos: ***Ganancia con Información Completa (GIC)***

GIC = 0 x 0.05 + 4 x 0.15 + 8 x 0.30 + 12 x 0.25 + 16 x 0.15 + 20 x 0.10 =$10.40

En términos generales podemos expresar:

VE (COi) = GIC – VE (Ai)

Esto es que el valor esperado del costo de oportunidad de una determinada estrategia es igual a la diferencia entre la ganancia esperada con información completa y el valor esperado de la ganancia para esa alternativa.

Habíamos hablado antes del valor del costo del riesgo o sea el costo o perdida de ganancia en que se incurre por tener que tomar las decisiones en condiciones de riesgo en vez de hacerlo con certeza. Este costo además es el ***valor de la información adicional.***

En nuestro caso tenemos:

VE(CO5)= GIC – VE (A5) = 10.40$ - 8.50$ = 1.90$

O sea nuestro comerciante no pagaría más de $1.90 por conseguir la información adicional en virtud de que el incremento de ganancia que puede obtener con esa información adicional es de $ 1.90 y no sería lógico que esté dispuesto a pagar más de lo que le representara el beneficio.

EL ARBOL DE DECISIONES

El árbol de decisiones es una representación cronológica del proceso de decisión, mediante una red que utiliza dos tipos de nodos: los nodos de decisión, representados por medio de una forma cuadrada (el nodo de elección), y los nodos de estados de la naturaleza, representados por círculos (el nodo de probabilidad).

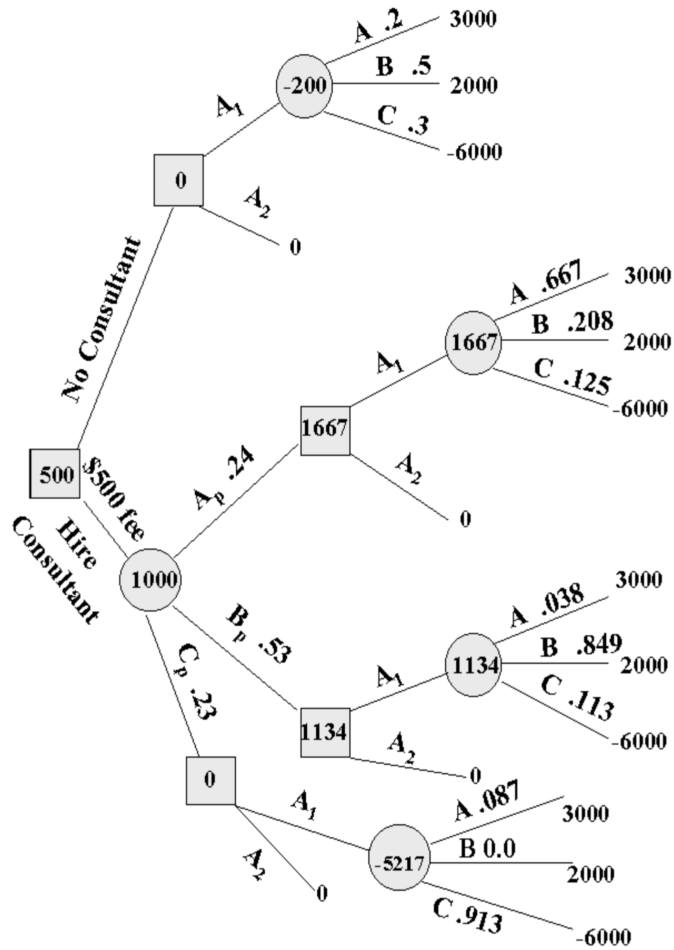
El proceso es el siguiente : Dibuje la lógica del problema construyendo un árbol de decisiones. Para los nodos de probabilidad asegúrese de que las probabilidades en todas las ramas salientes sumen uno. Calcule los beneficios esperados retrocediendo en el árbol, comenzando por la derecha y trabajando hacia la izquierda.

Usted puede imaginarse el trasladarse a la derecha a lo largo de las ramificaciones. En cada nodo *cuadrado* usted tiene control, puede tomar una decisión. En cada nodo del *círculo* "la Fortuna" asume el control .

A continuación se indica una descripción paso a paso de cómo construir un árbol de decisiones:

- ✓ Dibuje el árbol de decisiones usando cuadrados para representar las decisiones y círculos para representar la incertidumbre.
- ✓ Evalúe el árbol de decisiones, para verificar que se han incluido todos los resultados posibles.
- ✓ Calcule los valores del árbol trabajando en sentido contrario ,del lado derecho al izquierdo.
- ✓ Calcule los valores de los nodos de resultado incierto multiplicando el valor de los resultados por su probabilidad (es decir, los valores esperados).

Podemos calcular el valor de un nodo del árbol cuando tenemos el valor de todos los nodos que siguen. El valor de un nodo de elección es el valor más alto de todos los nodos que le siguen inmediatamente. El valor de un nodo de probabilidad es el valor esperado de los valores de los nodos que le siguen, usando la probabilidad de los arcos. Retrocediendo en el árbol, desde las ramas hacia la raíz, se puede calcular el valor de todos los nodos, incluida la raíz del árbol. Al poner estos resultados numéricos en el árbol de decisiones obtenemos como resultado el siguiente gráfico:



Referencias de la figura anterior

Supongamos que una organización esta evaluando contratar o no a un consultor el cual tiene como honorarios $ 500 para asesorar a Ud. si producir o no un producto

En la figura tenemos :No Consultant = Sin consultor;

$500 fee = $500 por honorarios;

Hire Consultant = Contratar consultor

Determine la mejor decisión con el árbol partiendo de la raíz y avanzando. Del árbol de decisiones surge que nuestra decisión es la siguiente:

- ✓ Contratar al consultor y luego aguardar su informe.

- ✓ Si el informe predice muchas ventas o ventas medias, entonces producir el producto.
- ✓ De lo contrario, no producirlo.

Verifique la eficiencia del consultor (%) calculando el índice: (Beneficio esperado recurriendo al consultor {monto en $}) / VEIP.

El beneficio esperado recurriendo al consultor surge del gráfico como BE = 1000 - 500 = 500, mientras que VEIP = 0,2(3000) + 0,5(2000) + 0,3(0) = 1600. Por lo tanto, la eficiencia de este consultor es: 500/1600 = 31%

Como trabajo rehaga este problema con distribución previa plana, es decir, trabajando sólo con las recomendaciones de la firma de marketing. Trabajar con distribución previa plana significa que asigna igual probabilidad, a diferencia de (0,2, 0,5, 0,3). Es decir, el dueño del problema no conoce el nivel de ventas si introduce el producto al mercado.

Finalmente, el árbol de decisión proporciona"un" método para la toma de decisiones efectivas pues:

- ✓ Claramente visualiza el problema, por lo tanto todas las opciones pueden ser tenidas en cuenta.
- ✓ Nos permiten ampliamente analizar las posibles consecuencias de una decisión.
- ✓ Proporcionan un esquema para cuantificar los valores de los resultados y las probabilidades para lograr los mismos.
- ✓ Nos ayudan a tomar mejores decisiones basadas en la información existente, así como también hacer mejores pronósticos.

Aplicacion: Una compañía, llamémosla ABC, desarrollo una nueva línea de productos. La alta gerencia quiere saber la estrategia adecuada que involucre a Marketing y Producción. Se consideran 3 estrategias que las referiremos como A = agresiva, B=básica y C= cuidado. Las condiciones del estudio las caracterizaremos como S= fuerte o dura y W= débil. La gerencia estimo los beneficios netos en millones de pesos según la tabla siguiente:

decisión	Estado de la naturaleza S	Estado de la naturaleza W
A	30	-8
B	20	7
C	5	15

La gerencia estima que las probabilidades de tener un mercado S o W son de 0.45 y 0.55 respectivamente.

Se puede calcular el valor esperado para cada decisión y seleccionar la mejor:

ER_A = 30 (0.45) – 8 (0.55) =9.10

ER_B= 20(0.45)+7(0.55) = 12.85

ER_C= 5(0.45)+15(0.55) = 10.50

La decisión óptima es seleccionar B.

Una manera más conveniente de representar este problema es usando *árboles de decisión*, como en la figura.

Como dijimos: Un *nodo cuadrado* representará un punto en el cual se debe tomar una decisión, y cada línea abandonando el cuadrado representará una posible decisión. Un *nodo círculo* representará situaciones cuyas ocurrencias son inciertas, y cada línea abandonando el círculo representará un posible acontecimiento

El proceso de usar un árbol de decisión para encontrar la decisión óptima se denomina *resolver el árbol.*

Para resolver el árbol se trabaja desde atrás hacia adelante. Esto se llama podar el árbol. Primero, las ramas terminales se llevan hacia atrás calculando un valor esperado para cada nodo terminal. Fig 13.3

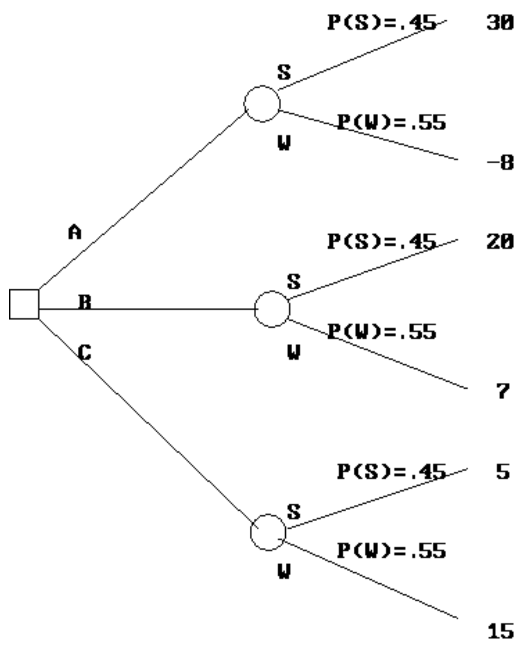


Figura 13.2: Árbol de decisión para ABC

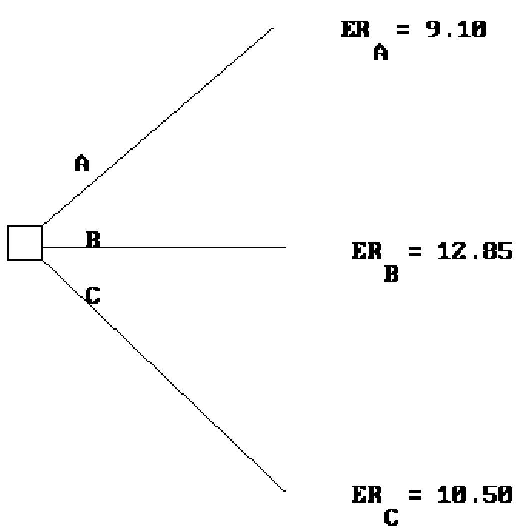


Figura 13.3: Árbol de decisión reducido para ABC

La Administración debe resolver un problema más simple que es el de elegir la alternativa que lleva al valor esperado más alto del nodo terminal. De esta forma un árbol de decisión provee una forma más gráfica de ver el problema. Se utiliza la misma información que antes y se realizan los mismos cálculos.

Análisis de Sensibilidad

El valor esperado de la estrategia A es:

$ER_{A\,=}$ 30 P(S) – 8 P(W)

ó lo que es lo mismo,

$ER_{A\,=}$ 30 P(S) – 8 (1-P(W)) =- 8 + 38P(S)

Así, el valor esperado es una función lineal de la probabilidad que las condiciones del mercado sean fuertes. Análogamente:

ER_B= 20 P(S) + 7(1 – P(S)) = 7 + 13P(S)

ER_C= 5 P(S) + 15(1 – P(S)) = 15 - 10P(S)

Se pueden dibujar esas tres funciones lineales sobre el mismo conjunto de coordenadas (ver figura3).

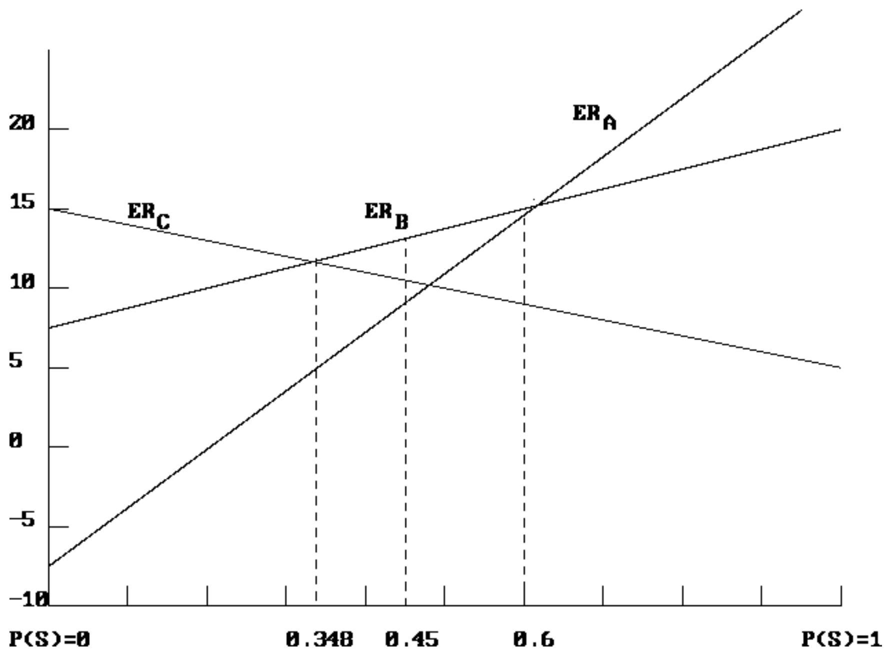


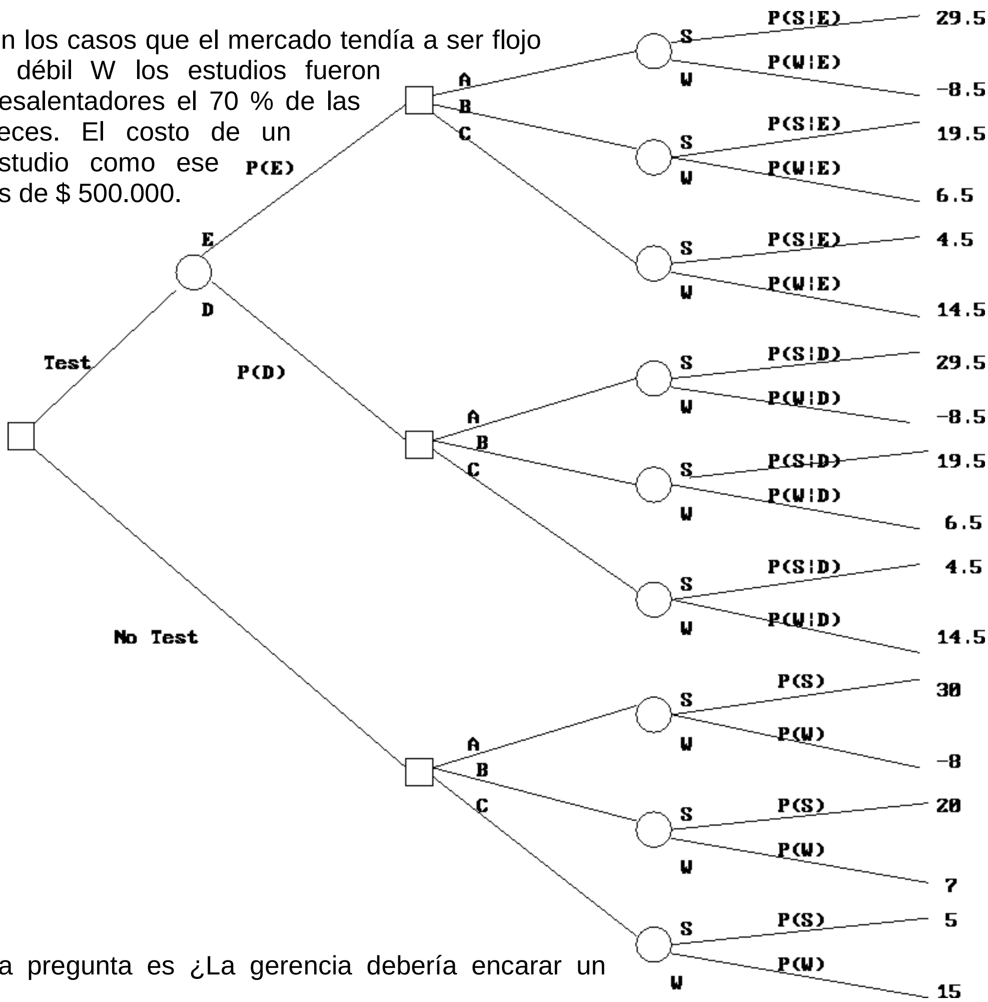
Figura 13.4: Valor esperado en función de P(S)

Ese diagrama muestra que la ABC debe seleccionar la estrategia básica (estrategia B) cuando la probabilidad de una demanda fuerte está entre *P*(*S*)=0.348 y *P*(*S*)= 0.6.
Sin embargo, si *P*(*S*) cae bajo 0.348, lo óptimo es elegir la estrategia C, por otro lado si *P*(*S*) está sobre 0.6, la estrategia agresiva A sería la óptima.

DECISIONES SECUENCIALES

Como ejemplo y tomando el problema visto en un principio realizaremos su aplicación más detallada. Volveremos a definir el problema con los siguientes datos: Pensando en la estrategia B, la Gerencia tiene la opción de consultar al grupo de Estudios de mercado de la empresa. Dentro del mes, este grupo indicara si el estudio es alentador E o desalentador D. En el pasado estos estudios han tendido a ser buenos: cuando el mercado tendía a ser difícil S esos estudios fueron alentadores el 60% de las veces y fueron desalentadores el 40%.

En los casos que el mercado tendía a ser flojo o débil W los estudios fueron desalentadores el 70 % de las veces. El costo de un estudio como ese es de $ 500.000.



La pregunta es ¿La gerencia debería encarar un estudio como este?

Construyamos el árbol de decisión para este problema de decisión secuencial. Ver figura 13.5. Es importante darse cuenta que el árbol se creó en el orden cronológico en el cual la información está disponible. La secuencia de eventos es:

- Test decisión
- Resultado del Test (si hubo)

Tomo decisión

Condición del mercado.

El nodo más a la izquierda corresponde a la decisión de hacer test o no hacer el test. Moviéndose a través de la rama "Test", el siguiente nodo a la derecha es un círculo, ya que este corresponde a un evento incierto. Hay dos resultados posibles. El test puede ser motivador (E) o desmotivador (D). Las probabilidades de estos dos eventos son *P* (*E*) y *P* (*D*) respectivamente. Como calcular esas probabilidades?

Aquí son importantes las nociones de probabilidades. La información dada es *condicional.* Dado S, la probabilidad de E es 60% y la probabilidad de D es 40%. Análogamente, se sabe que dado W, la probabilidad de E es de 30% y la probabilidad de D es de 70%. Esas probabilidades condicionales pueden escribirse como:

$P(E/S) = 0.6 \quad P(E/W) = 0.3 \quad P(D/S) = 0.4 \quad P(D/W)=0.7$

Además se sabe que $P(S)=0.45$ y $P(W)=0.55$. Esa es toda la información que se requiere para calcular $P(E)$ y $P(D)$. Para los eventos S_1, $S_2 \ldots . S_n$ que comparten el espacio posible de acontecimientos y un evento T, se tiene :

$$P(T) = P(T/S_1)\,P(S_1) + P(T/S_2)\,P(S_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots P(T/S_n)P(S_n)$$

que para el problema viene a ser:

$$P(E) = P(E/S\ P(S) + P(E/W)\ P(W)$$

$$= (0.6)(0.45)+(0.3)\ (0.55)$$

$$= 0.435$$

y

$$P(D) = P(D/S)\ P(S) + P(D/W)\ P(W)$$
$$=(0.4)\ (0.45) + (0.7)\ (0.55)$$
$$= 0.55$$

En la medida que nos movemos a la derecha del árbol de decisión, los siguientes nodos son cuadrados, correspondiendo a tres estrategias de marketing y producción.
Mas a la derecha los nodos circulares corresponden a condiciones inciertas del mercado: débil o fuerte, La probabilidad de esos dos eventos ahora es *condicional* a los eventos inciertos que ocurrieron previamente, digamos a los resultados del estudio de mercado, cuando ese estudio se llevo a cabo. Esto significa que se necesita calcular las siguientes probabilidades condicionales.

P(S/E) , P(W/E) , P(S/D) y P (W/D)

Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$P(R/T) = \frac{P(T/R)P(R)}{P(T)}$$

La que es válida para los dos eventos R y T. Para el ejemplo se tiene:

$$P(S/E) = \frac{P(E/S)PS)}{P(E)} = \frac{0.6*0.45}{0.435} = 0.621$$

Análogamente

P (W|E) = 0.379 P (S|D) = 0.318 P (W|D) = 0.682

Ahora, estamos listos para resolver el árbol de decisión. Como antes, esto se hace de atrás hacia adelante. Ver las figuras 5, 6 y 7 Se vuelve hacia atrás desde un nodo circular calculando los valores esperados. Se vuelve hacia atrás de un nodo cuadrado seleccionando la decisión que tiene el mejor valor esperado. El valor esperado cuando se realiza un estudio de mercado es de 12.96 millones de dólares, lo que es mayor que cuando no se realiza el estudio. Así el estudio debe ser llevado a cabo. Finalmente comparemos el valor esperado del estudio (denotado por *EVSI*,) lo cual corresponde al *valor esperado de la información muestral* (en ingles *expected value of sample information*) al *valor esperado de la información perfecta (en* ingles expected value of perfect information *EVPI) VEIP*.

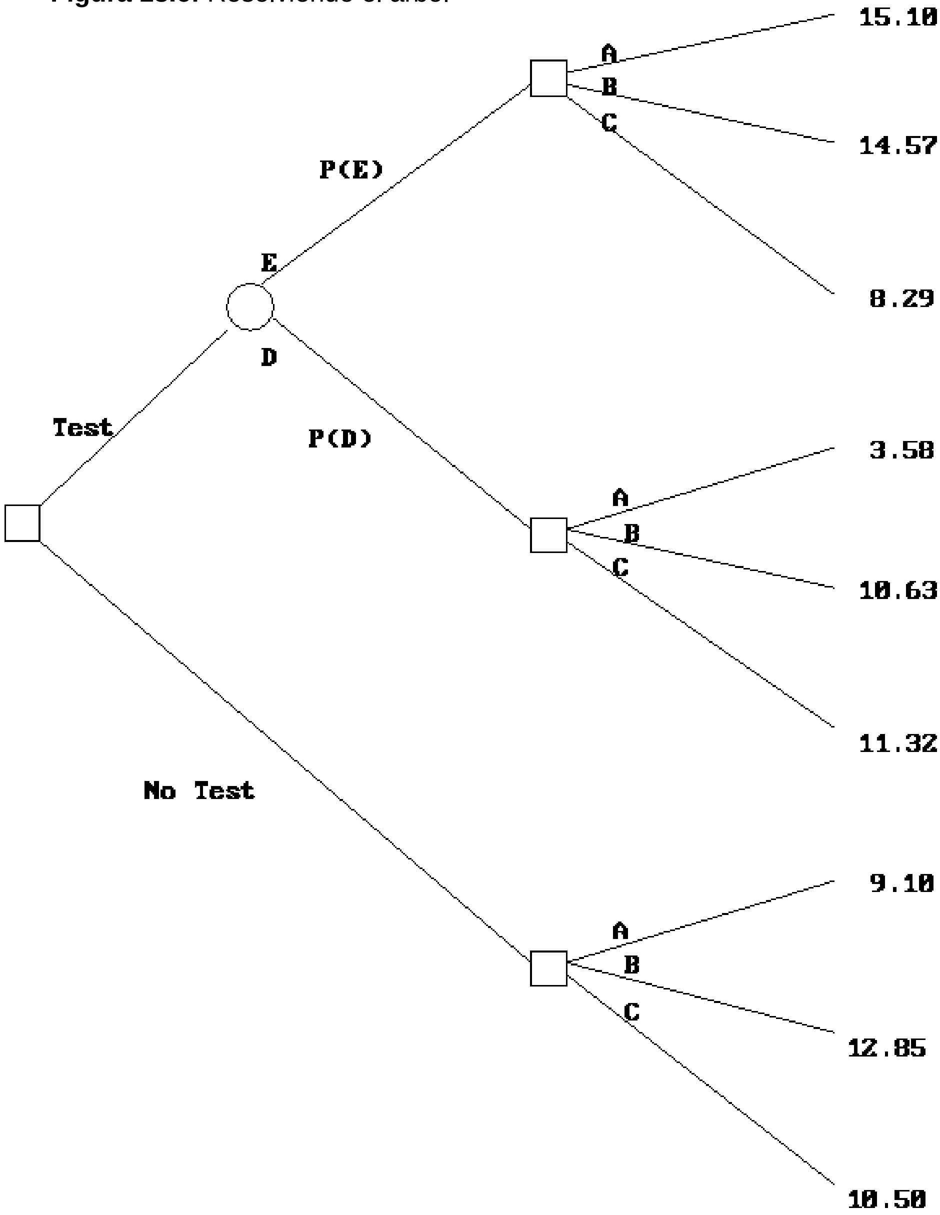
EVSI se calcula sin calcular el costo del estudio, así :

$$EVSI = (12.96 + 0.5)'12.85 = 0.61$$
$$VEIP = (30)(0.45) + (15)(0.55)'12.85 = 8.90$$

Se puede ver que el estudio de mercado no es muy efectivo. Si lo fuera el valor de *EVSI* debería ser mucho más cercano al valor de *EVPI*.

<u>Pero su EVSI es mayor que su costo, así es que es conviene realizarlo.</u>

Figura 13.6: Resolviendo el árbol



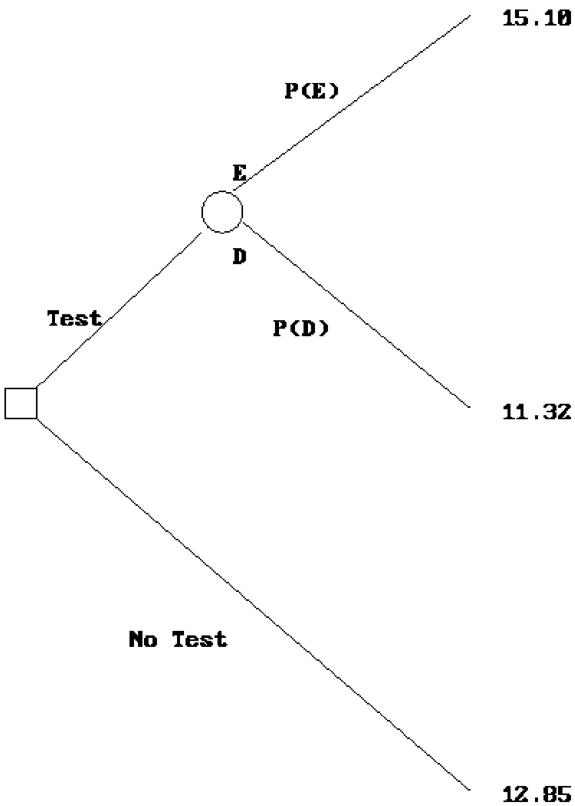


Figura 13.7: Resolviendo el árbol

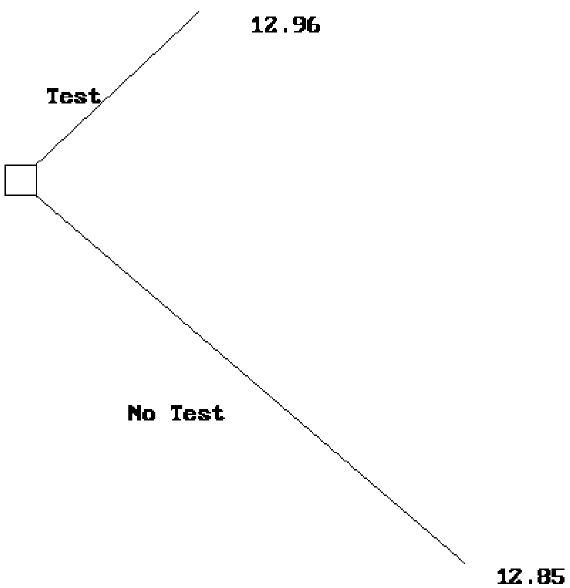


Figura 13.8: Resolviendo el árbol

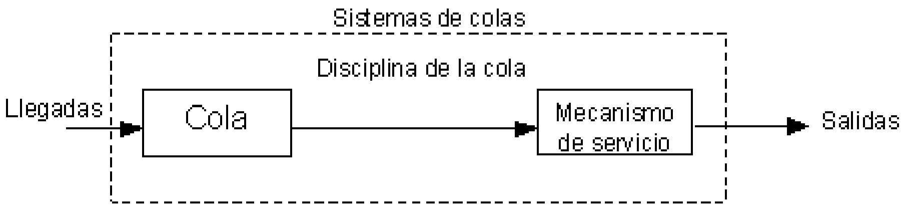
Capitulo 15: FENOMENOS DE ESPERA. COLAS

Una Cola es una línea de espera .La teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera particulares o sistemas de colas. Los modelos sirven para encontrar el comportamiento de estado estable , como la longitud promedio de la línea y el tiempo de espera promedio para un sistema dado. Esta información, junto con los costos pertinentes, se usa, entonces, para determinar la capacidad de servicio apropiada.

Costos de los sistemas de colas.

Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia , la cola y la instalación de servicio . Las *llegadas* son las unidades que entran en el sistema para recibir el servicio. Siempre se unen primero a la cola ; si no hay línea de espera se dice que la cola está vacía . De la cola, las llegadas van a la instalación de servicio de acuerdo con la *disciplina de la cola*, es decir, de acuerdo con la regla para decidir cuál de las llegadas se atiende. El primero en llegar primero en ser servido (FIFO) es una regla común, pero podría ser siguiendo alguna otra regla. Una vez que se completa el servicio, las llegadas se convierten en *salidas.*

Ambas componentes del sistema tienen costos asociados que se deben considerar.



Costo de Espera.

Esperar significa desperdicio de algún recurso activo que bien se puede aprovechar en otra cosa y esta dado por :

Costo total de espera = $C_w L$

Donde C_w = costo de espera por hora (en $) por llegada por unidad de tiempo y

L= longitud promedio de la línea.

Sistema de costo mínimo.

Aquí hay que tomar en cuenta que para bajas tasas de servicio, se tienen largas colas y costos de espera muy altos . Conforme aumenta el servicio disminuyen los costos de espera, pero aumenta el costo de servicio y el costo total disminuye , sin embargo , finalmente se llega a un punto de disminución en el rendimiento. Entonces el propósito es encontrar el balance adecuado para que el costo total sea el mínimo.

Ejemplos de sistemas de colas

Situación	***Llegadas***	***Cola***	***Mecanismo de Servicio***
Aeropuerto	Aviones	Aviones en carreteo	Pista
Aeropuerto	Pasajeros	Sala de espera	Avión
Dpto. de bomberos	Alarmas de incendio	Incendios	Dpto. de Bomberos.
Compañía telefónica	Números marcados	Llamadas	Conmutador
Lavado de coches	Autos	Autos sucios	Mecanismo de lavado
Tribunales	Casos	Casos atrasados	Juez
Panadería	Clientes	Clientes con números	Vendedor
Carga de camiones	Camiones	Camiones en espera	Muelle de carga
Oficina de correos	Cartas	Buzón	Empleados por correos
Fábrica	Subensamble	Inventario en proceso	Estación de trabajo.

Pagos	Órdenes de pago	Pendientes	Empleada Contable
Fotocopiado	Pedidos	Trabajos	Copiadoras
Hospital	Pacientes	Personas	Hospital

Tabla 15.1

Permitiendo que varíen el número de colas y el número de servidores, pueden hacerse los diagramas de los cuatro tipos de sistemas de la figura que sigue mas adelante. Cada línea de espera individual y cada servidor individual se muestran por separado.

Con el objeto de verificar si una situación determinada del sistema de líneas de espera se ajusta o no a un modelo conocido, se requiere de un método para clasificar las líneas de espera. Esa clasificación debe de responder preguntas como las siguientes:

1.-¿ El sistema de líneas de espera tiene un solo punto de servicio o existen varios puntos de servicio en secuencia?

2.-¿Existe solo una instalación de servicio o son múltiples las instalaciones de servicio que pueden atender a una unidad?

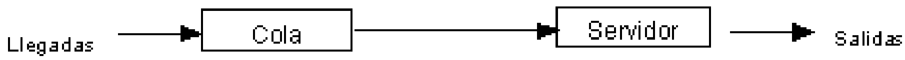
3.- ¿ Las unidades que requieren el servicio llegan siguiendo algún patrón o llegan en forma aleatoria?

4.- ¿El tiempo que requieren para el servicio se da en algún patrón de o asume duraciones aleatorias de tiempo?

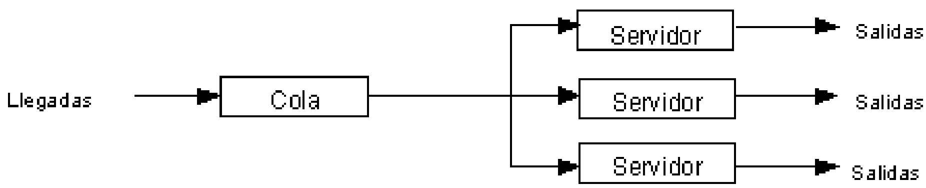
El primer sistema que se muestra en la figura 15.2, se llama un ***sistema de un servidor y una cola*** puede describir un lavado de coches automático o un muelle de descarga con un solo muelle. El segundo, ***una línea con múltiples servidores,*** es típico de una peluquería o una panadería en donde los clientes toman un número al entrar y se les sirve cuando llega el turno. El tercer sistema, aquél en que ***cada servidor tiene una línea de separada***, es característico de los bancos y las tiendas de autoservicio. El cuarto sistema , es una ***línea con servidores en serie***, puede describir una fábrica.

TIPO DE MODELOS

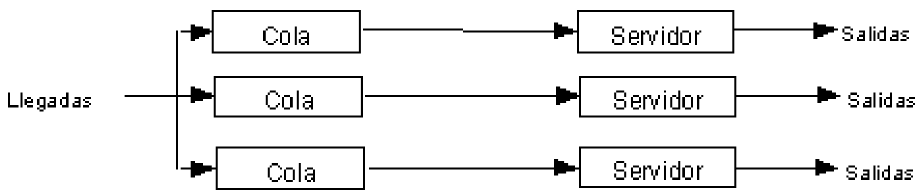
Una Cola , Un Servidor



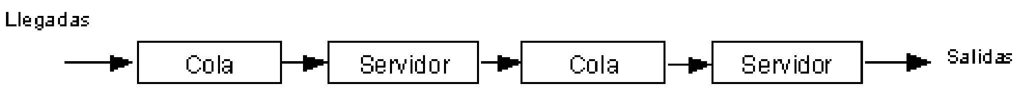
una cola, múltiples servidores



Varias colas, múltiples servidores



Una cola, Servidores Secuenciales



Modelo de un servidor y una cola.

Este modelo puede aplicarse a personas esperando en una cola para comprar boletos para el cine, a mecánicos que esperan obtener herramientas de un pañol o a trabajos de computadora que esperan tiempo de procesador.

Llegadas.

Consiste en la entrada al sistema que se supone es aleatoria. No tienen horario, es impredecible en qué momento llegarán. El modelo también supone que las llegadas vienen de una población infinita y llegan una a la vez .

Cola.

En este modelo se considera que el tamaño de la cola es infinito. La disciplina de la cola es primero en llegar, primero en ser servido sin prioridades especiales. También se supone que las llegadas no pueden cambiar lugares en la línea (cola) o dejar la cola antes de ser servidas.

Instalación de Servicio.

Se supone que un solo servidor proporciona el servicio que varía aleatoriamente.

Salidas.

No se permite que las unidades que salgan entren inmediatamente al servicio.

Características de operación .

- ✓ Un servidor y una cola.
- ✓ Llegada tipo Poisson.
- ✓ Cola infinita, primero en llegar primero en ser servido.
- ✓ Tiempos de servicio exponenciales.

ECUACIONES DEL MODELO :

μ = velocidad de atención

λ = velocidad o tasa de llegada

$\lambda / \mu = \rho$ factor de trafico

Longitud promedio de la cola : $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Tiempo de espera promedio en cola : $W_q = \dfrac{L_q}{\mu} = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

Sistema:

Longitud promedio del sistema $L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$:

Tiempo de espera promedio en el sistema $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$:

Utilización de la instalación : $U = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$

Probabilidad que haya n unidades en el sistema = $P = \rho^n (1 - \rho)$

Probabilidad de no esperar: $P_0 = 1 - \rho$

Aplicación : Caso de *supermercado*

Supóngase un supermercado grande con muchas cajas de salida, en donde los clientes llegan para pagar con una tasa de 90 por hora y que hay 10 cajas en operación. Si hay poco intercambio entre las líneas, puede tratarse este problema como 10 sistemas separados de una sola línea, cada uno con una llegada de 9 clientes por hora. Para una tasa de servicio de 12 por hora :

Entonces :

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(9)^2}{12(12-9)} =$$ 2.25 Clientes

$$W_q = \frac{L_q}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{9}{12(12-9)} =$$ 0.25 horas o 15 minutos.

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{9}{12-9} =$$ 3 clientes.

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{12-9} =$$ 0.33 horas o 20 minutos.

$$U = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \qquad \frac{9}{12} =$$ = 0.75 o 75%

$P(L_s < 3) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}$ 0.32

Entonces, para este ejemplo, el cliente promedio espera 15 minutos antes de ser servido. En promedio, hay un poco más de dos clientes en la línea o tres en el sistema. El proceso completo lleva un promedio de 20 minutos. La caja está ocupada el 75 % del tiempo. Y finalmente, el 32 % del tiempo habrá cuatro personas o más en el sistema (o tres o más esperando en la cola).

Evaluación del sistema cuando se conoce el costo de espera.

Los costos de servicio influyen en el método para encontrar el sistema de menor costo. Si el costo de servicio es una función lineal de la tasa de servicio, puede encontrarse una solución general para la tasa óptima.

Para aplicar una solución general, se necesita una tasa de servicio que pueda variar de manera continua.

Cuando los costos de servicio cambian en forma escalonada, se usa la técnica de prueba y error para encontrar el sistema de menor costo. Se calcula el costo total para una tasa de servicio, después para la siguiente y así sucesivamente. Esto continúa hasta que se encuentra un límite inferior o un mínimo tal, que el aumentar o el disminuir las tasas de servicio da costos totales más altos.

Aplicación 2 : Muelle de Carga. Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones para determinar el tamaño de la cuadrilla de operarios. El muelle tiene espacio sólo para un camión, así es un sistema de un servidor. Pero el tiempo de carga o descarga puede reducirse aumentando el tamaño de la cuadrilla de trabajo.

Supóngase que puede aplicarse el modelo de un servidor y una cola (llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales) y que la tasa promedio de servicio es un camión por hora para un cargador. Los cargadores adicionales aumentan la tasa de servicio proporcionalmente. Además, supóngase que los camiones llegan con una tasa de dos por hora en promedio y que el costo de espera es de $ 20 por hora por un camión. Si se le paga $ 5 por hora a cada miembro de la cuadrilla, ¿Cuál es el mejor tamaño de esta?

Datos :

A = 2 camiones por hora.

S = 1 camión por persona.

C_w = costo de espera = \$20 por hora por camión.

C_S = costo de servicio = \$ 5 por hora por persona.

Ahora sea k = número de personas en la cuadrilla. Se busca k tal que la suma de los costos de espera y servicio se minimicen :

Costo total = $C_w \, L_S + k \, C_S$

Las pruebas deben de empezar con tres miembros de la cuadrilla ya que uno o dos no podrían compensar la tasa de llegadas de dos camiones por hora. Para una cuadrilla de tres, la tasa de servicio es de tres camiones por hora y puede encontrarse L_{as} con la siguiente ecuación :

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

De la misma manera, para una de cuatro :

$$L_s = \frac{2}{4-2} = 1.0 \text{ camiones}$$

$$\begin{aligned}\text{Costo total}(4) &= (20)(1.0) + (4)(5) \\ &= \$40\end{aligned}$$

El costo es menor, por tanto se sigue adelante.

Para una de cinco :

$$L_s = \frac{2}{5-2} = 0.67$$

$$C(3) = C_w \;\; L_s + kC_s = (20)(0.67) + (5)(5) \;\; = 38.33$$

Este todavía es menor :

$$L_s = \frac{A}{S-A} = \frac{2}{6-2} = 0.5 \text{ camiones}$$

y

$$\begin{aligned} \text{costototal}(3) &= C_w L_s + kC_s \\ &= (20)(0.5) + (6)(5) \\ &= \$40 \end{aligned}$$

Como este costo es mayor que el de la cuadrilla de cinco, se rebasó el límite inferior de la curva de costo; el tamaño óptimo de la misma es cinco personas.

Evaluación del sistema con costos de espera desconocidos .

En lugar de estimar el costo de espera, el administrador puede especificar un promedio mínimo de tiempo de espera o de longitud de línea . Esto establece un límite superior para W_q , el tiempo de espera en la cola (o para L_q, la longitud de línea en la cola). Con este límite superior puede encontrarse la tasa de servicio necesaria para cualquiera tasa de llegadas dadas.

Aplicación 3: Restaurante de comida rapida. Considérese un restaurante de comida rápida con un menú limitado. El restaurante se está diseñando para que todos los clientes se unan a una sola línea para ser servidos. Una persona tomará la orden y la servirá. Con sus limitaciones, la tasa de servicio puede aumentarse agregando más personal para preparar la comida y servir las órdenes.

Esto constituye un sistema de un servidor y una cola. Si las llegadas y salidas son aleatorias, puede aplicarse el modelo de una cola. Supóngase que la administración quiere que el cliente promedio no espere más de dos minutos antes de que se tome su orden . Esto se expresa como :

W_q = 2 minutos

Supóngase también que la tasa máxima de llegadas es de 30 órdenes por hora.

$$W_q = \frac{L_q}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

arreglando términos,

$$\mu(\mu - \lambda)\frac{\lambda}{W_q} = 0$$

$$\mu^2 - \lambda\mu * \frac{\lambda}{W_q} = 0$$

Como la tasa de servicio debe ser mayor que la tasa de llegadas, puede descartarse la solución negativa. Entonces :

$$\mu = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{W_q}}$$

$$\mu = \frac{30}{2} + \sqrt{\frac{30^2}{4} + \frac{30}{0.033}} = 48.5$$

Para este ejemplo, se supuso :

30 ordenes por hora y W_q = 2 minutos o 0.033 horas

48.5 órdenes por hora.

Para cumplir los requerimientos, se necesita una tasa de casi 50 órdenes por hora. Si, por ejemplo, una cuadrilla de cinco pueden manejar 45 órdenes por hora y una de seis puede procesar 50 por hora, entonces sería necesario tener la cuadrilla de seis.

MODELO DE UN SERVIDOR CON TIEMPOS DE SERVICIO CONSTANTES.

Este modelo es igual que el anterior, excepto que se supone que el tiempo de servicio es exactamente el mismo en cada llegada en lugar de ser aleatorio. Todavía se tiene una sola línea, tamaño de la cola infinito, disciplina de la cola como primero en llegar primero en ser servido y llegadas Poisson.

Las aplicaciones típicas de este modelo pueden incluir un autolavado automático, una estación de trabajo en una pequeña fábrica o una estación de diagnóstico de mantenimiento preventivo. En general, el servicio lo proporciona una máquina.

Las características de operación están dadas por :

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_s = \frac{2\mu - \mu}{2\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$U = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad que haya n unidades en el sistema = $P = \rho^n (1 - \rho)$

Probabilidad de no esperar: $P_0 = 1 - \rho$

Aplicación 4 Lavadero automatico. Supóngase un lavado automático de autos con una línea de remolque, de manera que los autos se mueven a través de la instalación de lavado como en una línea de ensamble. Una instalación de este tipo tiene dos tiempos de servicio diferentes: el tiempo entre autos y el tiempo para completar un auto. Desde el punto de vista de teoría de colas, el tiempo entre autos establece el tiempo de servicio del sistema. Un auto cada cinco minutos da una tasa de 12 autos por hora. Sin embargo, el tiempo para procesar un auto es el tiempo que se debe esperar para entregar un auto limpio. La teoría de colas no considera este tiempo.

Supóngase que el lavado de autos puede aceptar un auto cada cinco minutos y que la tasa promedio de llegadas es de nueve autos por hora (con distribución Poisson). Sustituyendo:

$$L_q = \frac{(9)^2}{2(12)(12-9)} = 1.12 autos$$

$$W_q = \frac{9}{2(12)(12-9)} = 3.12 hs = 7.5 \min$$

$$L_S = \frac{9 \;\; 2(12-9)}{2(12)(12-9)} = 1.87 autos$$

$$W_s = \frac{9}{12} = 0.75 = 75\%$$

MODELO CON SERVIDORES MÚLTIPLES.

Supóngase que las llegadas son Poisson, los tiempos de servicio son exponenciales, hay una sola línea, varios servidores paralelos que denominaremos N y una cola infinita que opera con la disciplina de primero en llegar primero en ser servido. Las ecuaciones para las características de operación se vuelven un poco más complicadas. Sea:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^{N+1} P_0}{(N-1)(N-\frac{\mu}{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$U = \frac{\lambda}{N\mu}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{N=0}^{N-1} \rho^N / N! + \frac{\rho^N}{N!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{N}}\right)}$$

La cantidad P_0 es la probabilidad de que no haya llegadas en una unidad de tiempo, lo cual no lo hace más fácil de calcular

Aplicación 5 Fotocopiadora. Considérese el Centro de Estudiantes de la Facultad cuyo personal está tratando de decidir cuántas copiadoras debe de instalar para uso de los estudiantes. Se ha escogido un equipo particular que puede hacer hasta 10 copias por minuto. No se sabe cuál es el costo de espera para un estudiante, pero se piensa que no deben tener que esperar más de dos minutos en promedio. Si el número promedio de copias que se hacen por usuario es cinco, ¿cuántas copiadoras se deben instalar?

Se usa prueba y error para resolver este tipo de problemas, no se encuentra una solución general como se hizo para el modelo de un servidor. Se tratará primero con dos copiadoras, después con tres, y así hasta que se satisfaga el criterio del tiempo de espera.

¿Cuál es la tasa de servicio? Si el número promedio de copias es cinco y la copiadora puede hacer hasta 10 copias por minuto, entonces pueden atenderse en promedio hasta dos estudiantes por minuto. Pero, en esto no se toma en cuenta otros tiempos muertos como cambiar originales, para que un estudiante desocupe y otro comience a copiar. Supóngase que se permite un 70 % del tiempo para estas actividades. Entonces la tasa de servicio neta baja a 0.6 estudiantes por minuto. Además se supone que los periodos pico de copiado tienen una tasa de llegada de 60 estudiantes por hora, o 1 por minuto.

Se comenzará con dos copiadoras, ya que una no sería suficiente.

λ = 1 por minuto.

μ = 0.6 por minuto.

N = 2

$$L_{q=3.8mi} = \frac{(1/0.6)^3}{4-(1/0.6)^2} = 3.8$$

$$W_q = 3.8/1 = 3.8\,\mathrm{min}$$

Esto excede el criterio del máximo de 2 minutos de espera para el estudiante promedio. Se tratarán tres copiadoras.

$$L_q = \frac{(1/0.6)^4}{(3-\frac{1}{0.6})\left[6+\frac{4x1}{0.6}+(\frac{1}{0.6})^2\right]} = 0.31$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.37/1 = 0.37\,\mathrm{min}$$

Se necesitan tres copiadoras. La utilización de cada una será:

$$U = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{1}{3(0.6)} = 0.56 = 56\%$$

MEDIDAS DE RENDIMIENTO PARA EVALUAR UN SISTEMA DE COLAS

El objetivo último de la teoría de colas consiste en responder cuestiones administrativas pertenecientes al diseño y a la operación de un sistema de colas. El gerente de un banco puede querer decidir si programa tres o cuatro cajeros durante la hora de almuerzo. En una estructura de producción, el administrador puede desear evaluar el impacto de la compra de una nueva máquina que pueda procesar los productos con más rapidez.

Cualquier sistema de colas pasa por dos fases básicas. Por ejemplo, cuando el banco abre en la mañana, no hay nadie en el sistema, de modo que el primer cliente es atendido de forma inmediata. Conforme van llegando más clientes, lentamente se va formando la cola y la cantidad de tiempo que tienen que esperar se empieza a aumentar. A medida que avanza el día, el sistema llega a una condición en la que el efecto de la falta inicial de clientes ha sido eliminado y el tiempo de espera de cada cliente ha alcanzado niveles bastante estables.

Algunas medidas de rendimiento comunes

Existen muchas medidas de rendimiento diferentes que se utilizan para evaluar un sistema de colas en estado estable. Para diseñar y poner en operación un sistema de colas, por lo general, los administradores se preocupan por el nivel de servicio que recibe un cliente, así como el uso apropiado de las instalaciones de servicio de la empresa.

Algunas de las medidas que se utilizan para evaluar el rendimiento surgen de hacerse las siguientes preguntas:

Preguntas relacionadas con el tiempo, centradas en el cliente, como:

- ✓ ¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente recién llegado tiene que esperar en la fila antes de ser atendido? La medida de rendimiento asociada es el tiempo promedio de espera, representado con Wq
- ✓ ¿Cuál es el tiempo que un cliente invierte en el sistema entero, incluyendo el tiempo de espera y el de servicio? La medida de rendimiento asociada es el tiempo promedio en el sistema, denotado con W

Preguntas cuantitativas relacionadas al número de cliente, como:

- ✓ En promedio ¿cuántos clientes están esperando en la cola para ser atendidos? La medida de rendimiento asociada es la longitud media de la cola, representada con Lq
- ✓ ¿Cuál es el número promedio de clientes en el sistema? La medida de rendimiento asociada es el número medio en el sistema, representado con L

Preguntas probabilísticas que implican tanto a los clientes como a los servidores, por ejemplo:

- ✓ ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar a ser atendido? La medida de rendimiento asociada es la probabilidad de bloqueo, que se representa por, pw
- ✓ En cualquier tiempo particular, ¿cuál es la probabilidad de que un servidor esté ocupado? La medida de rendimiento asociada es la utilización, denotada con U. Esta medida indica también la fracción de tiempo que un servidor está ocupado.
- ✓ ¿Cuál es la probabilidad de que existan n clientes en el sistema? La medida de rendimiento asociada se obtiene calculando la probabilidad Po de que no haya clientes en el sistema, la probabilidad Pi de que haya un cliente en el sistema, y así sucesivamente. Esto tiene como resultado la distribución de probabilidad de estado, representada por Pn, n=0,1......
- ✓ Si el espacio de espera es finito, ¿Cuál es la probabilidad de que la cola esté llena y que un cliente que llega no sea atendido? La medida de rendimiento asociada es la probabilidad de negación del servicio, representada por Pd

Preguntas relacionadas con los costos, como:

- ✓ ¿Cuál es el costo por unidad de tiempo por operar el sistema?
- ✓ ¿Cuántas estaciones de trabajo se necesitan para lograr mayor efectividad en los costos?
- ✓ El cálculo específico de estas medidas de rendimiento depende de la clase de sistema de colas. Algunas de estas medidas están relacionadas entre sí. Conocer el valor de una medida le permita encontrar el valor de una medida relacionada.

RELACIONES ENTRE MEDIDAS DE RENDIMIENTO

El cálculo de muchas de las medidas de rendimiento depende de los procesos de llegadas y de servicio del sistema de colas en específico. Estos procesos son descritos matemáticamente mediante distribuciones de llegada y de servicio. Incluso sin conocer la distribución especifica, las relaciones entre algunas de las medidas de rendimiento pueden obtenerse para ciertos sistemas de colas, únicamente mediante el uso de los siguientes parámetros de los procesos de llegada y de servicio.

l = número promedio de llegadas por unidad de tiempo

m = número promedio de clientes atendidos por unidad de tiempo en una sección

Supongamos que una población de clientes infinita y una cantidad limitada de espacio de espera en la fila. El tiempo total que un cliente invierte en el sistema es la cantidad de tiempo invertido en la fila más el tiempo durante el cual es atendido:

Tiempo promedio en el sistema = Tiempo de espera + Tiempo de servicio

El tiempo promedio en el sistema y el tiempo promedio de espera están representados por las cantidades W y Wq, respectivamente. El tiempo promedio de servicio puede expresarse en términos de parámetros de m. Por ejemplo, si m es 4 clientes por hora, entonces, en promedio, cada cliente requiere 1 /4 para ser atendido. En general, el tiempo de servicio es 1/m, lo cual nos conduce a la siguiente relación:

$W = Wq + 1/m$

Consideremos ahora la relación entre el número promedio de clientes en el sistema y el tiempo promedio que cada cliente pasa en el sistema. Imaginemos que un cliente acaba de llegar y se espera que permanezca en el sistema un promedio de media de hora. Durante esta media hora, otros clientes siguen llegando a una tasa ¿¿digamos doce por hora?? Cuando el cliente en cuestión abandona el sistema, después de media hora, deja tras de sí un promedio de (1/2)*12 = 6 clientes nuevos.

Es decir, en promedio, existen seis clientes en el sistema en cualquier tiempo dado. Entonces:

Tiempo promedio de clientes = Número de llegadas x Tiempo promedio en el sistema.

De modo que:

$L = l * W$

Utilizando una lógica parecida se obtiene la relación entre el número promedio de clientes que esperan en la cola y el tiempo promedio de espera en la fila:

Tiempo promedio de clientes = Número de llegadas x Unidad de tiempo en la cola

de manera que: $Lq = l * Wq$

NOTACIÓN DE KENDALL

Por lo general, las tasas de llegada y de servicio no se conocen con certidumbre sino que son de naturaleza estocástica o probabilística. Es decir los tiempos de llegada y de servicio deben describirse a través de distribuciones de probabilidad y las distribuciones de probabilidad que se elijan deben describir la forma en que se comportan los tiempos de llegada o de servicio.

En teoría de líneas de espera o de colas se utilizan tres distribuciones de probabilidad bastante comunes:

- ✓ Markov. (generación Pioisson)
- ✓ Deterministica
- ✓ General

La distribución de Markov, en honor al matemático A.A. Markov quien identifico los eventos "sin memoria", se utiliza para describir ocurrencias aleatorias, es decir, aquellas de las que puede decirse que carecen de memoria acerca de los eventos pasados.

Una distribución determinística es aquella en que los sucesos ocurren en forma constante y sin cambio.

La distribución general sería cualquier otra distribución de probabilidad. Es posible describir el patrón de llegadas por medio de una distribución de probabilidad y el patrón de servicio a través de otra.

Para permitir un adecuado uso de los diversos sistemas de líneas de espera, Kendall, elaboro una notación abreviada para describir en forma sucinta los parámetros de un sistema de este tipo. En la notación Kendall un sistema de líneas de espera se designan como

A / B / C

En donde

A = se sustituye por la letra que denote la distribución de llegada.

B = se sustituye por la letra que denote la distribución de servicio.

C = se sustituye por el entero positivo que denote el número de canales de servicio.

La notación Kendall también utiliza M = Markoviano, D = determinística, G = General, por ejemplo un sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, servicio determinístico y tres canales de servicio se identificará en notación Kendall como:

M / D / 3

En todos los casos se supone que solo existe una sola línea de entrada.

Es evidente que existen otros atributos aparte de los que se analizaron antes y que deben de tomarse en consideración como por ejemplo:

- ✓ El tamaño de la población de los que provienen los elementos que ingresan al sistema de líneas de espera.
- ✓ La forma en que las unidades llegan para ingresar al sistema de líneas de espera; por ejemplo, una por una o en forma de grupos.
- ✓ Si las unidades rechazan o no debido a la longitud de la línea de espera y no ingresan al sistema
- ✓ Si las unidades se arrepienten y abandonan el sistema después de haber aguardado un tiempo en la fila.
- ✓ Si existe o no espacio suficiente para que todas las unidades que llegan aguarden en la fila.

Los modelos de Líneas de espera que se analizarán son los siguientes:

- Modelo M / M / 1
- Modelo M / M / S
- Modelo M / G / 1
- Modelo M / D / 1

EL MODELO M / M / 1

Este sistema trata de una distribución de llegada Markoviano, tiempo de servicio Markoviano, y un servidor.

Llegadas aleatorias (M / M / 1)

En las situaciones cotidianas es fácil encontrar ejemplos de llegadas aleatorias, puesto que las llegadas serán aleatorias en cualquier caso en la que una de ellas no afecte a las otras. Un ejemplo clásico de llegadas aleatorias son las llamadas que arriban a un conmutador telefónico o un servicio de emergencia.

Se ha determinada que las ocurrencias aleatorias de un tipo especial pueden describirse a través de una distribución discreta de probabilidad bien conocida, la distribución de **Poisson**. Este tipo especial de llegadas aleatorias supone características acerca de la corriente de entrada. En primer lugar, se supone que las llegadas son por completo independientes entre sí y con respecto al estado del sistema.

En segundo lugar la probabilidad de llegada durante un periodo específico no depende de cuando ocurre el periodo, sino más bien, depende solo de la longitud del intervalo. Se dicen que estas ocurrencias carecen de "memoria".

Si conocemos el número promedio de ocurrencias por periodo, podemos calcular las probabilidades acerca del número de eventos que ocurrirán en un periodo determinado, utilizando las probabilidades conocidas de la distribución de Poisson.

En particular, existe un promedio de l llegadas en un periodo, T, la probabilidad de n llegadas en el mismo periodo esta dado por:

P [n llegadas en el tiempo T] = $\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}$

Por ejemplo si existe un promedio de 6 llegadas aleatorias por hora, la probabilidad de que haya solo 3 llegadas durante una hora está dada por:

P [6 llegadas en el tiempo en una hora] = $\dfrac{e^{-6}(6)^3}{3!}$ **= 0.0892**

Tiempo de servicio aleatorio (M / M / 1)

Al igual que las llegadas aleatorias, la ocurrencia de tiempos de servicios aleatorios, carentes de memoria, es suceso bastante común en las situaciones cotidianas de líneas de espera. Y al igual que las llegadas aleatorias los tiempos de servicio carentes de memoria se describen a través de una distribución de probabilidad.

La diferencia entre las llegadas aleatorias y los tiempos de servicio aleatorios es que estos se describen a través de una distribución continua en tanto que las llegadas se describen a través de una distribución de Poisson, que es discreta. Si la duración de los tiempos de servicio es aleatoria, la **distribución exponencial negativa** describe ese tipo de servicio. Si la m es la tasa promedio de servicio entonces la distribución está dada por:

$$\mathbf{F\ (t) = m\ e^{-m\ t}}$$

Es posible emplear esta fórmula para calcular la probabilidad de que el servicio sea más prolongado que alguna duración especificada de tiempo T. En la siguiente figura se representa es modelo.

Características de operación

Para calcular las características de operación de una cola M / M / 1, primero debemos de observar que sí λ = tasa promedio de llegadas y μ = tasa promedio de servicio, entonces l debe de ser menor que m. Si esto no ocurriera el promedio de llegadas sería superior al número promedio que se atienden y el número de unidades que están esperando se volvería infinitamente grande. Si hacemos que r **=** $\boldsymbol{\lambda / \mu}$ puede denominarse a r como factor de utilización. Este valor es la fracción promedio de que el sistema este ocupado, también sería el número promedio de unidades que están siendo atendidas en cualquier momento. En términos de probabilidad tendríamos que:

Pw = probabilidad de que el sistema esté ocupado.

$$P_W = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

Entonces la probabilidad de que el sistema no esté trabajando, o esté vacío, P_0, puede obtenerse por medio de:

$$P_0 = 1 - Pw = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

A partir de esto podemos obtener la probabilidad de que haya n unidades en el sistema, **Pn,** mediante:

$$P_n = (P_0)(\frac{\lambda}{\mu})^n = P_0\rho^n$$

en donde n es cualquier entero no negativo. Este importante resultado nos permite calcular las características de operación de las líneas de espera.

La primera característica de operación que calculamos es el número promedio de unidades que se encuentran en el sistema, ya sea esperando o siendo atendidas. Denominaremos a este número promedio de unidades promedio, **L.** Entonces tenemos que:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Con estos valores obtenidos podemos calcular el número promedio de unidades que esperan ser atendidas, **Lq.** Dado que L es el número de unidades que están esperando o están siendo atendidas, y r es el número promedio de unidades que están siendo atendidas en algún momento dado entonces:

L = Lq + r

A partir de esto es fácil observar que

Lq = L - r

O también podríamos decir que

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Ahora examinaremos el tiempo de espera. Utilizaremos **W** para representar el tiempo promedio o esperado que una unidad se encuentra en el sistema. Para encontrar **W**, observaremos que se L el número esperado de unidades de en el sistema y l es el número promedio de unidades que llegan para ser atendidas por periodo, entonces el tiempo promedio de cualquier unidad que llega debe estar en el sistema está dado por:

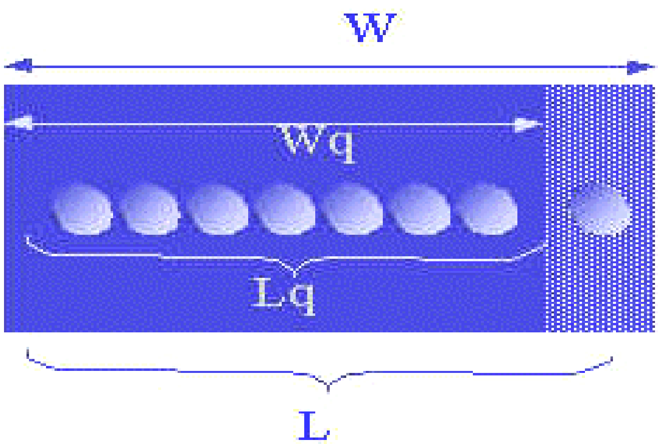
W = tiempo promedio de una unidad en el sistema

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

De manera similar, el tiempo esperado o promedio que una unidad tiene que esperar antes de ser atendida, **Wq**, esta dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

En la figura se representa este modelo. Fig 15.3



Aplicación 6.

A una línea de espera llegan 20 unidades por hora y el tiempo promedio de servicio es de 30 unidades por hora, realizar un análisis de esta línea de espera.

Datos

l = 20 unidades por hora

m = 30 unidades por hora

Con los datos anteriores podemos calcular la probabilidad de que el sistema esté ocupado:

Pw = 20 / 30 = 2 /3

r = Pw

Entonces la probabilidad de que el sistema no esté ocupado:

Po = 1 - r = 1 / 3

El número esperado de unidades en el sistema quedará definido por:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1-2/3}$$ = **2 Unidades**

El número esperado de unidades que esperan ser atendidas quedará definido por:

$$L_q = L - \rho = 2 - 2/3 = 4/3$$

Entonces en promedio habrá 4 / 3 de unidades esperando ser atendidas y 2 / 3 de unidad siendo atendida.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$ **de hora**

W = 6 minutos

De manera similar, el tiempo promedio que una unidad espera para ser atendida estará definido por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4/3}{20} = \frac{1}{15}$$ **de hora**

Wq = 4 minutos

EL MODELO M / M / S

Este modelo supone llegadas y tiempos de servicio aleatorios para canales de servicio múltiples, teniendo las mismas consideraciones que le modelo de canal único de servicio (M / M / 1), excepto que ahora existe una sola fila de entrada que alimenta los canales múltiples de servicio con iguales tasas de servicio.

El cálculo de las características de la línea de espera para el modelo M / M / S es algo más complicado que los cálculos para el caso de canal único, y dado que primordialmente nos interesa las implicaciones de estas características más que las formulas necesarias para calcularlos, nos apoyaremos en el uso de tablas elaboradas a partir de estas formulas para hacer los cálculos.

Características de operación.

En el modelo **M / M / S**, si m es la tasa promedio de servicio para cada uno de los **S** canales de servicio, entonces ya no se requiere que m > l, pero Sm debe ser mayor que l para evitar una acumulación infinita de líneas de espera. En el caso de **M / M / S**, la característica que se utilizará para hacer los demás cálculos es la probabilidad de que el sistema esté ocupado. En otras palabras, la probabilidad es que haya S o más unidades en el sistema. En este caso todos los canales de servicio se estarán utilizando y por ello se dice que el sistema está ocupado. Esto se puede representar como:

P (Sistema ocupado) = $P(n \geq S)$

Y lo podemos calcular por medio de la siguiente ecuación:

P (Sistema ocupado) = $$\frac{\rho^S (\mu S)}{S!\,(\mu S - \lambda)} \times Po$$

En donde **Po** estará representado por

$$Po = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=S-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left(\frac{S\mu}{S\mu - \lambda}\right)}$$

Con las ecuaciones anteriores podemos calcular los demás datos que requiera el sistema. En el modelo **M / M / S**, al igual que el modelo **M / M / 1**, se tiene que **L = Lq + r,** pero aquí utilizaremos el valor P (sistema ocupado) para calcular Lq:

Lq = P (sistema ocupado) x $\frac{\rho}{S-\rho}$

Ahora calcularemos el valor L

Lq = P (sistema ocupado) x $\frac{\rho}{S-\rho} + \rho$

En el caso de **M / M / S**, al igual que en el modelo **M / M / 1**, **W = L / l** y **Wq = Lq / l,** por ello se tiene que

$$W = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado})\, x \,\frac{\rho}{S-\rho} + \rho\right]$$

$$Wq = \frac{1}{\lambda}\left[P(\text{sistema ocupado})\, x \,\frac{\rho}{S-\rho}\right]$$

En la siguiente figura se representa este modelo.

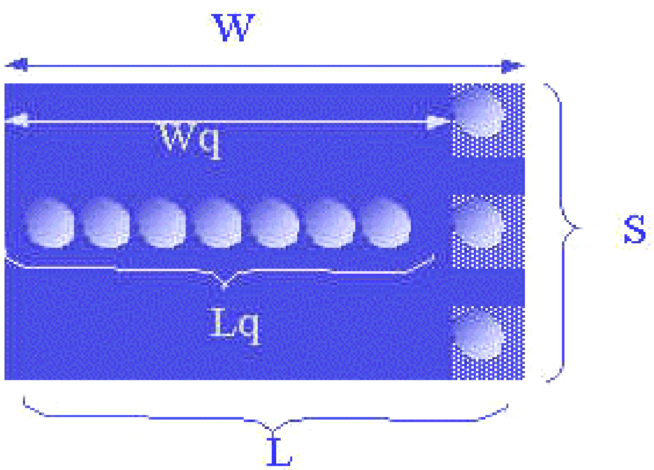


Fig 15.6

Aplicación 7

Para ejemplificar el modelo M / M / S, suponga que existen cinco canales de servicio con tasas promedio de servicio μ = 6 y una tasa de llegada de λ = 24 unidades por hora, esto implica que S = 5.

Entonces tenemos que

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{6} = 4$$

Nota: Para encontrar los valores de Po con una mayor rapidez nos podemos auxiliar de la tabla que se anexa a este sistema, la cual nos proporciona este valor teniendo como parámetros los valores de **S** y de r.

Considerando los valores obtenidos podemos calcular el valor de Po = 0.0130, la probabilidad de que el sistema este ocupado será P (sistema ocupado) = 0.5547, utilizando este valor obtenemos que:

$$Lq = \left[P(\text{sistema ocupado}) \times \frac{\rho}{S-\rho} \right] = (0.5547)\frac{4}{5-4} = 2.2188 \quad \textbf{Unidades}$$

L = 2.2188 + 4 = 6.2188 unidades

Ahora el tiempo promedio en del sistema quedará definido de la siguiente forma:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{6.2188}{24} = 0.2591 \text{ de hora}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{2.2188}{24} = 0.0925 \text{ de hora}$$

EL MODELO M / G / 1

Sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, distribución general de los tiempos de servicio (para el cual se supone conocida la desviación estándar), un canal de servicio y una línea de espera.

En este modelo las llegadas se distribuyen de acuerdo con la distribución de Poisson, al igual a los casos anteriores, pero los tiempos de servicio no necesariamente se distribuyen de acuerdo con la distribución exponencial negativa. Si consideramos el caso en que solo existe un solo canal, estamos considerando el caso M / G / 1, es decir, llegadas de tipo Markov, tiempo de servicio general y un canal de servicio.

La razón por la que podemos considerar el caso M / G / 1 es que las formulas que se utilizan para calcular sus características de operación son bastantes simples. Al igual que en el caso M / M / S, no es posible calcular en forma directa el numero esperado de unidades en el sistema (L). Para esto primero debe de calcularse el número de unidades que están esperando a ser atendidas (Lq), y utilizar este resultado para calcular el valor de L. Para calcular el valor de Lq debemos de conocer el valor de la desviación (s) estándar de la distribución que distingue los tiempos de servicio. Si no se conoce la distribución de los tiempos de servicio no es posible determinar las características de operación.

Ahora si conocemos la desviación estándar y la media de la distribución de los tiempos de servicio, puede obtenerse fórmula para el valor de Lq a partir de la siguiente ecuación.

$$Lq = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$$

Si utilizamos Lq podemos determinar el valor de L, por medio de la siguiente ecuación:

$$L = Lq + \rho$$

Al igual que las características de operación de los modelos M / M / 1 y M / S / 1, podemos calcular el tiempo esperado en el sistema de líneas de espera (W), y el tiempo que se invierte antes de ser atendido (Wq), esto lo podemos realizar por medio de las siguientes ecuaciones:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

EL MODELO M / D / 1

Sistema de líneas de espera con llegadas aleatorias, tiempo de servicio constante, una línea de servicio y una línea de espera.

En este modelo los tiempos de servicio son determinísticos, este es un caso especial de la situación M / G / 1 que se analizó con anterioridad, en donde la desviación estándar es igual a cero. En este caso se puede conocer el número de unidades que están esperando a ser atendidas (Lq), a través de la siguiente ecuación:

$$Lq = \frac{(\lambda / \mu)^2}{2(1 - \lambda / \mu)}$$

Todas las demás características de operación pueden determinarse a partir de este valor. Si utilizamos Lq podemos determinar el valor de L, por medio de la siguiente ecuación:

$$L = Lq + \rho$$

Al igual que las características de operación de los modelos M / M / 1 y M / S / 1, podemos calcular el tiempo esperado en el sistema de líneas de espera (W), y el tiempo que se invierte antes de ser atendido (Wq), esto lo podemos realizar por medio de las siguientes ecuaciones:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$$

Aplicación 8: **Despacho de ordenes de compra**. Debido a un reciente incremento en el negocio una secretaria de una cierta empresa tiene que despachar 20 órdenes de compra por día en promedio (asuma una distribución de Poisson). A la responsable del sector le toma aproximadamente 20 minutos realizar todo el procedimiento de carga en a PC para que pueda liberar las ordenes a los proveedores (asuma una distribución exponencial). Suponiendo que esta persona trabaja ocho horas diarias.

Datos

l = 20 / 8 = 2.5 Órdenes de Compra (OC)/hora

m = (1 / 20 min.)(60 min. / 1 hora) = 3 OC/hora

La tasa de utilización del la secretaria estará definida por:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2.5}{3} = 0.84$$

El tiempo promedio de espera antes de que la secretaria complete un OC se deducirá de la siguiente manera:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2.5}{(3)(3 - 2.5)} = 1.67$$ horas

Ahora el número promedio de OC que estarán en la línea de espera:

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2.5^2}{3(3 - 2.5)} = 4.17$$

Si deseáramos conocer la probabilidad de que a la secretaria tenga más de cinco OC pendiente, se determinaría de la siguiente manera:

K	$Pn_{\mu} = \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^{k+1}$
0	0.834
1	0.694
2	0.578
3	0.482
4	0.401
5	0.334
6	0.279

Aplicación9: Asignacion de enfermeras. Una enfermera esta asignada en una Sala de primeros Auxilios municipal para la vacunación antigripal de personas mayores y población de riesgo. Esta enfermera puede vacunar una persona cada tres minutos. Se estima que las personas llegarán en forma independiente y aleatoriamente en el transcurso del día, en un rango de una persona cada seis minutos, de acuerdo con la distribución de Poisson. También suponga que los tiempos de vacunación de esta enfermera están distribuidos exponencialmente.

Datos

l = 1 / 6 = 0.167 personas/min

m = 1 / 3 = 0.34 personas/min

La probabilidad de que el médico este de ocioso definirá de la siguiente manera:

$$Po = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{1/6}{1/3} = 0.5$$

Ahora la proporción de tiempo en que el médico está ocupado.

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1/6}{1/3} = 0.5$$

El número total de personas que están siendo vacunados y que esperan a ser vacunados

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1/6}{1/3 - 1/6} = 1$$

El número promedio de personas que esperan a ser vacunados.

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(1/6)^2}{1/3(1/3 - 1/6)} = 0.5$$

Aplicación 10: Atencion de llamadas. Call Center.Las llamadas llegan al conmutador de una oficina de reclamos de servicios públicos a una tasa de dos por minuto, él tiempo promedio para manejar cada una de estas es de 20 segundos. Actualmente solo hay un operador del conmutador. Las distribuciones de Poisson y exponencial parecen ser relevantes en esta situación.

Datos

l = 2 llamadas/minutos

m = (1 / 20 seg.)(60 seg.) = 3 llamadas/minuto

La probabilidad de que el operador este ocupado se definirá:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} = 0.67$$

El tiempo promedio que debe de esperar una llamada antes de ser tomada por él operador

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = 0.67$$

El número de llamadas que esperan ser contestadas

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = 1.34$$

Aplicación 11: Entradas para futbol. Al principio de la temporada de fútbol, la boletería del Club está muy ocupada el día anterior al primer partido. Los aficionados llegan a una tasa de cuatro cada 10 minutos y el tiempo promedio para realizar la transacción es de dos minutos.

Datos

l = (4 / 10) = 0.4 c/min.

m = (1 /2) = 0.5 c/min.

El número promedio de gente en línea se definirá de la forma siguiente:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(0.4)^2}{0.5(0.5-0.4)} = 3.2$$ **personas**

El tiempo promedio que una persona pasaría en la boletería

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{0.5-0.4} = 10$$ **minutos**

La proporción de tiempo que el servidor/ empleado está ocupado

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

Aplicación 12: Servicio de reparaciones. Electronics Corporation mantiene un equipo de servicio para reparar fallas de máquinas que ocurren con promedio de tres por día (aproximadamente de naturaleza de Poisson). El equipo puede atender a un promedio de ocho máquinas por día, con una distribución de tiempo de reparación que se asemeja la distribución de exponencial.

Datos

λ= 3 repar. /día

μ = 8 repar. /día

La tasa de utilización de este sistema se encontrará de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{8} = 0.375$$

El tiempo promedio de fallas para cada máquina que está descompuesta

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{8-3} = 0.2$$

Las máquinas que están esperando a ser reparadas el cualquier momento dado

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(3)^2}{8(8-3)} = 0.225$$

La probabilidad de que haya una máquina en el sistema, dos, tres o más máquinas en el sistema.

K	$Pn_{\mu} = \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^{k+1}$
0	0.375
1	0.140
2	0.052
3	0.019
4	0.007
5	0.002

Aplicación 13: Lavadero automatico. El Mardel Car Wash está abierto seis días a la semana, pero el día del negocio más pesado es siempre el sábado. A partir de datos históricos, en la empresa se estima que los coches sucios llegan a una tasa de 20 por hora, todo el día sábado. Con un equipo completo trabajando la línea de lavado a mano, él calcula que los automóviles se pueden lavar a una tasa de uno cada dos minutos. Este ejemplo se tiene una línea de espera de canal sencillo, los automóviles se lavan de uno en uno. Suponga llegadas de Poisson y tiempos exponenciales de servicio.

Datos

λ = 20 automóvil /hora

μ = (1 / 2 min.)(60 min.) = 30 automóvil / hora

El número promedio de automóviles en la línea se definirá de la siguiente manera:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{20}{30 - 20} = 2$$

El tiempo promedio que un automóvil espera antes de ser lavado

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{20}{30(30 - 20)} = 0.067$$

El tiempo promedio que un automóvil pasa en el sistema de servicio

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{30 - 20} = 0.1$$

La tasa de utilización del lavado de automóviles

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{30} = 0.67$$

La probabilidad de que no haya automóviles en el sistema

$$Po = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{20}{30} = 0.33$$

Aplicación 14: Problema de colas de Sueters del Mar SA.

Suéteres del Mar, tiene una fábrica de tejidos de punto en Mar del Plata. La planta tiene un gran número de maquinas tejedoras que con frecuencia generan problemas. Estas maquinas son reparadas basándose en el procedimiento: la primera en entrar, la primera en ser revisada (FIFO), por uno de los 7 miembros del personal de reparación. Durante varios recorridos, el gerente de producción ha observado que, en promedio, de 10 a 12 maquinas están fuera de operación en cualquier momento debido a que están detenidas. El sabe que contratar personal de reparaciones adicional bajaría el número de máquinas sin funcionar, lo cual traería como consecuencia un aumento en la producción, pero no sabe a cuantas personas más debería contratar. Se desea determinar dicho número.

Modelo y análisis del sistema de cola actual.

El primer paso que se debe dar consiste en analizar las condiciones de operación actuales. Se debe reconocer que las maquinas tejedoras conforman un modelo de colas. Los clientes están constituidos por las maquinas que se atascan de vez en cuando. Existe un gran número de tales maquinas, de modo que se podría suponer razonablemente, que la población de clientes es infinita. Se tienen 7 servidores independientes e idénticos que reparan las maquinas basándose en una estrategia de primera en entrar, primera en darle servicio. Se puede pensar en estas maquinas formando una sola fila en espera de pasar con el siguiente servidor que esté disponible.

Para modelar esta operación, el siguiente paso consiste en reunir y analizar los datos correspondientes a los procesos de llegada y de servicio. Se supone lo siguiente:

1.La aparición de maquinas atascadas puede ser aproximada por un proceso de llegada de Poisson con una tasa promedio de 25 por hora.

2.Cada máquina atascada requiere una cantidad aleatoria de tiempo para su reparación, que puede ser aproximada por una distribución exponencial con un tiempo promedio de servicio de 15 minutos, lo cual, para cada servidor, significa una tasa promedio de cuatro maquinas por hora.

Con estas observaciones, el sistema actual puede modelarse como un sistema de colas M / M / 7, con $\lambda =$ 25 maquinas por hora, $\mu =$ 4 maquinas por hora y una población y un área de espera infinita.

TABLA 5.2: Medidas de rendimiento obtenidas con ‘ Queuing Analysis ‘ en el WinQSB .

	Performance Measure	**Result**
1	System: M/M/7	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	25.0000
3	Service rate per server (mu) per hour =	4.0000
4	Overall system effective arrival rate per hour =	25.0000

5	Overall system effective service rate per hour =	25.0000
6	Overall system utilization =	89.2857 %
7	Average number of customers in the system (L) =	12.0973
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	5.8473
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	8.3333
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.4839 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.2339 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.3333 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	0.1017 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	70.1674 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0

Como se puede ver, el gerente de producción había estimado con bastante precisión el hecho de que entre 10 y 12 maquinas están atascadas, en promedio; en cualquier momento. De hecho, ese número en el informe es de 12.09. La línea 10 del reporte indica que las maquinas atascadas están fuera de operación durante un tiempo promedio de 0.4839 horas, aproximadamente 29 minutos.

Es necesario determinar el número de reparadores adicionales que se necesitarían contratar. Se conocen las medidas de rendimiento de un total de 7 trabajadores.

¿De qué manera cambian las medidas de rendimiento si se aumenta el personal de reparación. Las medidas de rendimiento asociadas para un número entre 7 y 11 reparadores se muestran en la TABLA 15.3

A medida que aumenta el tamaño del personal de 7 a 11, el número promedio de maquinas fuera de operación disminuye de aproximadamente 12 a 6.333. Similarmente, la cantidad promedio de tiempo que una maquina esta fuera de operación disminuye de 0.4839 horas (aproximadamente 29 minutos) a 0.2533 horas (aproximadamente 15 minutos).

Ahora se necesita información sobre los costos para determinar cuántos reparadores adicionales, si se requieren, deben contratarse.

TABLA 15.3 Medidas de rendimiento con diferentes tamaños de personal de reparación.

		Numero	de	reparadores	
	7	8	9	10	11
Utilización (%)	89.2857	78.1250	69.4444	62.5000	56.8182
Numero esperado en la cola	5.8473	1.4936	0.5363	0.2094	0.0830
Numero esperado en el sistema	12.0973	7.7436	6.7863	6.4594	6.3330
Probabilidad de que un cliente tenga que esperar	0.7017	0.4182	0.2360	0.1257	0.0630
Tiempo esperado en cola	0.2339	0.0597	0.0215	0.0084	0.0033
Tiempo esperado en el sistema	0.4839	0.3097	0.2715	0.2584	0.2533

Al analizar los méritos de contratar personal de reparación adicional en la empresa se deben identificar dos componentes importantes:

1. Un costo por hora basado en el tamaño del personal.
2. Costo total de = Costo por hora para * Numero de personal por hora cada reparador reparadores
3. Un costo por hora basado en el numero de maquinas fuera de operación.

Costo total por = Costo por hora para cada * Numero promedio la espera maquina fuera de operación máquina fuera de operación

Para seguir adelante, se necesita ahora conocer el costo por hora de cada miembro del personal de reparación (denotado con Cs) y el costo por hora de una maquina fuera de operación (denotado Ce), que es el costo de una hora de producción perdida. Suponga que el departamento de contabilidad le informa que cada mecánico para reparaciones le cuesta a la compañía $ 50 por hora, incluyendo impuestos, prestaciones, etc. El costo de una hora de producción perdida deberá incluir costos explícitos, como la cantidad de ganancias no obtenidas, y costos implícitos, como la pérdida de voluntad del cliente no se cumple con la fecha límite de entrega.

Sin embargo, suponga que el departamento de contabilidad estima que la compañía pierde $ 100 por cada hora que una maquina este fuera de operación.

Ahora se puede calcular un costo total para cada uno de los tamaños de personal. Para un personal de 7 reparadores, el numero esperado de maquinas en el sistema es 12. 0973.

Costo total = Costo del personal + Costo de la espera

Costo por hora por * Numero de + Costo por hora por * Número persona reparadores cada máquina fuera esperado de de operación máquinas fuera de operación = (50 * 7) + (100 * 12.0973) = $ 1559.73 por hora.

Realizando cálculos parecidos para cada uno de los tamaños de personal restantes se tiene como resultado los costos por hora de cada alternativa presentada en la TABLA 15.4.

De los resultados, se puede ver que la alternativa que tiene el menor costo por hora, $ 1128.63, es tener un total de 9 reparadores. En consecuencia, la recomendación a la gerencia de producción, es contratar a dos reparadores adicionales. Estos dos nuevos empleados tendrán un costo de $ 100 por hora, pero este costo adicional está más que justificado por los ahorros que se tendrán con menos maquinas fuera de operación. La recomendación reducirá el costo por hora de $1559.73 a $ 1128.63, un ahorro de aproximadamente $ 430 por hora, mayor que la cantidad que cubre sus honorarios.

TABLA 15.4: Costo por hora para diferentes tamaños de personal de reparación.

Tamaño de personal	Numero esperado en el sistema	Costo por hora ($)
7	12.0973	(50 * 7) + (100 * 12.0973) = 1559.73

8	7.7436	(50 * 8) + (100 * 7.7436) = 1174.36
9	6.7863	(50 * 9) + (100 * 6.7863) = 1128.63
10	6.4594	(50 * 10) + (100 * 6.4594) = 1145.94
11	6.3330	(50 * 11) + (100 * 6.3330) = 1183.30

Características claves

En resumen, para evaluar un sistema de colas en el que usted controla el número servidores o su tasa de servicio, se necesitan las siguientes estimaciones de costos y medidas de rendimiento:

- ✓ El costo por servidor por unidad de tiempo (Cs)
- ✓ El costo por unidad de tiempo por cliente esperando en el sistema (Ce)
- ✓ El número promedio de clientes en el sistema (L)

Aplicación 15: El problema de colas de la Comisión de Regulación de Transporte de Cargas.

La comisión de Transporte de Cargas tiene un número de estaciones para el pesaje de camiones a lo largo de la autopista de peaje, para verificar que el peso de los vehículos cumple con las regulaciones nacionales.

La Comisión está considerando mejorar la calidad del servicio en sus estaciones de pesado y ha seleccionado una de las instalaciones como modelo a estudiar, antes de instrumentar los cambios. La administración desea analizar y entender el desempeño del sistema actual durante las horas pico, cuando llega a la báscula el mayor número de camiones, suponiendo que el sistema puede desempeñarse bien durante este periodo, el servicio en cualquier otro momento será aun mejor.

El gerente de operaciones siente que el sistema actual cumple con las condiciones...:

1. Una población de clientes finita.
2. Un proceso de llegada en el que los clientes se presentan de acuerdo con un proceso de Poisson con una tasa promedio de $\lambda =$ clientes por unidad de tiempo.
3. Un proceso de colas que consiste en una sola línea de espera de capacidad infinita, con una disciplina de colas de primero en entrar primero en salir.

4. Un proceso de colas que consiste en un solo servidor que atiende a los clientes de acuerdo con una distribución exponencial con un promedio de $\mu =$ clientes por unidad de tiempo.

Su siguiente paso debe ser estimar las tasas promedio de llegada y de servicio en dicha estación.

De los datos disponibles, suponga que la gerencia determina que los valores son:

$\lambda =$ Número promedio de camiones que llegan por hora = 60.

$\mu =$ Número promedio de camiones que pueden ser pesados por hora = 66.

El valor de $\mu = 66$ es mayor que el de $\lambda =$ 60, de modo que es posible hacer el análisis de estado estable de este sistema.

CALCULO DE LAS MEDIDAS DE RENDIMIENTO.

En términos de los parámetros λ y μ , los investigadores han derivado formulas para calcular las diferentes medidas de rendimiento para cualquier sistema de colas

M / M / 1. Estas formulas a menudo expresan en términos de la *intensidad del tráfico,*

Para el problema de OTC, esta intensidad de tráfico es $\frac{\lambda}{\mu}$ = 60 / 66 = 0.9091.

Mientras más cerca esté de 1 más cargado estará el sistema, lo cual tiene como resultado colas más largas y tiempos de espera más grandes.
Las medidas de rendimiento para el problema de OTC se calculan de la manera siguiente.

1. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema (P_0):

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.9091 = 0.0909$$

Este valor indica que aproximadamente 9 % del tiempo, un camión que llega no tiene que esperar a que se le proporcione el servicio porque la estación de pesado está vacía. Dicho de otra manera, aproximadamente 91 % del tiempo un camión que llega tiene que esperar.

2. Número promedio en la fila (Lq) :

$Lq = (0.9091)^2 / (1 - 0.9091) = 9.0909$

En otras palabras en el estado estable, en promedio, la estación de pesado puede esperar tener aproximadamente 9 camiones esperando para obtener servicio (sin incluir al que se está pesando).

Cuando se ha determinado un valor para Lq, se puede calcular los valores de Wq, W y L, utilizando las relaciones siguientes:

3. Tiempo promedio de espera en la cola (Wq).

$Wq = Lq / \lambda = 9.0909 / 60 = 0.1515.$

Este valor indica que, en promedio, un camión tiene que esperar 0.1515 horas, aproximadamente 9 minutos, en la fila antes que empiece el proceso de pesado.

4. Tiempo promedio de espera en el sistema (W).

$W = Wq + 1/\mu = 0.1515 + 1/66 = 0.1667.$

Este valor indica que, en promedio, un camión invierte 0.1617 horas, 10 minutos, desde que llega hasta que sale.

5. Número promedio en el sistema (L):

$L = \lambda * W = 60 * 0.1617 = 10$

Este valor indica que, en promedio, existe un total de 10 camiones en la estación de pesado, ya sea en la bascula o esperando a ser atendidos.

6. Probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar (P(T>0)):

$P (T>0) = 1 – P_0 = 0.9091.$

Este valor como se estableció en el paso 1, indica que aproximadamente 91 % del tiempo un camión que llega tiene que esperar.

7. Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (Pn).

$\boldsymbol{Pn = \rho^{n} * P_0}$

Al utilizar esta fórmula se obtiene las siguientes probabilidades:

n	**Pn**
0	0.0909
1	0.0826
2	0.0751
3	0.0683

Distribución de probabilidad para el número de camiones que se encuentra en el sistema. Los números que aparecen en la tabla se pueden utilizar para responder una pregunta como: ¿Cual es la probabilidad de que no haya más de tres camiones en el sistema
En este caso, la respuesta de 0.3169 se obtiene mediante la suma de los 4 primeras probabilidades de la tabla, para n = 0, 1, 2, 3.

8. Calculo de la utilización:

U = 0.9091.

Este valor indica que aproximadamente 91 % del tiempo las instalaciones de pesado están en uso (un camión está siendo pesado). De manera equivalente, aproximadamente 9 % del tiempo la estación esta sin funcionar, sin que haya camiones que se estén pesando.

SISTEMAS DE COLAS . APLICACIÓN CON WIN QSB

El módulo a utilizar es Qa.exe. Este programa permite obtener la solución analítica del sistema para el caso en el que las distribuciones del tiempo entre llegadas y tiempo de servicio son exponenciales (sistemas M/M) y soluciones aproximadas para sistemas donde las distribuciones del tiempo entre llegadas y/o tiempo de servicio son de otro tipo (sistemas generales G/G).

Al abrir un nuevo problema hay que darle la unidad de tiempo en la que se va a trabajar (lo toma sólo como una etiqueta) y el tipo de sistema que queremos analizar: M/M o general.

1.-Si la elección es M/M, aparece una tabla donde hay que rellenar los datos necesarios: número de servidores, tasa de servicio, tasa de llegadas, capacidad de la cola (M para infinita) y tamaño de la población (M para infinita). Si la población es finita, la tasa de llegadas que hay que introducir es la tasa individual de llegadas.

Además, se pueden asignar costes por unidad de tiempo a una serie de situaciones. En este caso, al resolver el problema se nos devolverá el coste total del sistema por unidad de tiempo.

Una vez introducidos los datos, elegimos **Solve and Analyze** del menú y con la opción **Solve the perfomance**, obtenemos los parámetros usuales de rendimiento del sistema. En el menú **Results: Probability Summary**, nos muestra la probabilidad de que haya k clientes en el sistema.

En la opción **Perfom Sensitivity Analysis** del menú **Solve and Analyze** permite hacer un análisis de sensibilidad del sistema cuando uno de los parámetros de entrada varía. Se elige en ese caso el parámetro que se desea variar dando el intervalo de variación que se quiere estudiar y el paso. Como resultado nos muestra cómo cambian los principales parámetros de rendimiento del sistema de colas para los distintos valores del parámetro de entrada elegido. Si se quieren ver los resultados gráficamente, elegir

Results: Show Sensitivity Analysis-Graph de la barra de menú.

En la opción **Perfom Capacity Analysis** del menú **Solve and Analyze** permite hacer un análisis de sensibilidad pudiendo variar dos parámetros: el número de servidores y la capacidad de la cola.

2.-Si el sistema que se desea estudiar verifica que o bien la distribución del tiempo entre llegadas o/y la distribución del tiempo de servicio **NO** son Exponenciales, al definir el problema elegiremos la opción **General Queuing System**. Aparece entonces una pantalla de introducción de datos similar a la de los sistemas M/M con la diferencia de que ahora se puede dar una distribución cualquiera para la llegada y el servicio (hacer doble clic con el botón izquierdo y elegir la distribución).

Las distribuciones más usuales son:

1. **Exp/a/b:** Exponencial de media b, tomando valores para x>a. Normalmente, a=0.

2. **Gamma/a/b/c:** Gamma con parámetro de escala b, parámetro de forma (shape) c tal que media = bc y toma valores para x>a. Normalmente, a=0.

3. **Erlang/a/b/k**: Erlang con k entero, kb= media tomando valores para x>a.

Normalmente a=0.

4. **Normal/**μ/σ**:** Normal con μ= media y σ= desviación típica.

5. **Constante**: no hace falta poner Constante, solo el valor de la constante.

Para más información sobre las distribuciones posibles que se pueden utilizar en QA, usar el ***Help*** del menú en *Search for help:Distribution:Probability distribution*.

Además, se puede dar un coeficiente de presión para los servidores (service pressure coefficient: los servidores trabajan más rápido cuantos más clientes hay), un coeficiente disuasorio para las llegadas (arrival discourage coefficient: se producen menos llegadas cuanto más cargado está el sistema) y una distibución para el número de clientes que llegan en cada grupo (Bacth size distribution. Por defecto los clientes llegan de uno en uno al sistema).

Una vez introducidos los datos, elegimos **Solve and Analyze** del menú y al elegir la opción **Solve the perfomance**, como en muchos casos no existe solución analítica, permite resolver el problema de manera aproximada desde dos puntos de vista:

1. **Approximation by G/G/s**: aproximaciones numéricas a las fórmulas que existen para este tipo de sistemas.

2. **Monte Carlo Simulation**: aproximaciones a la solución mediante simulación (tema siguiente)

Se obtienen entonces aproximaciones a los valores reales de los parámetros más usuales de rendimiento del sistema. En el menú **Results: Probability Summary**, nos muestra estimaciones de la probabilidad de que haya k clientes en el sistema.

En las opciones **Perfom Sensitivity Analysis** y **Perfom Capacity Analysis** del menú **Solve and Analyze** permite realizar las mismas operaciones ya descritas con anterioridad para sistemas M/M.

QSS es un simulador que permite imitar un sistema de colas con múltiples servidores, diversos tipos de clientes y varias colas. Cada tipo de clientes puede tener distintos tipos de llegadas y tiempos de servicio que habrá que especificar.

Cuando un cliente sale de un servidor, éste pasa a la siguiente cola o servidor o acaba el servicio. Si la cola está llena, el cliente se queda en el servidor que está hasta que haya espacio. Si el cliente se va a unir a otra cola, se le puede asignar un tiempo fijo de llegada a esa cola (tiempo de transferencia).

QSS siempre supone que la población es infinita, por tanto, no permite simular situaciones donde la población es finita.

Al ejecutar **Qss.exe** se accede al procedimiento de simulación de sistemas de colas. En la barra de menú aparece la opción **File** donde se puede abrir un problema nuevo o cargar los datos de uno que se tenga definido con anterioridad.

Al abrir un nuevo problema, aparece una pantalla donde hay que dar **el número total de componentes del sistema de colas** (nº de tipos de clientes + nº de colas + nº de servidores) y la unidad de tiempo en la que se va a trabajar.

Introduciremos los datos en un formato de matriz (Spreadsheet).

En la siguiente pantalla, para cada componente del sistema hay que decir de qué tipo es:

• C = cliente

• S = servidor

• Q = cola

También se pueden asignar nombres a los distintos componentes del sistema.

A continuación aparece una matriz donde hay que introducir los datos del sistema de colas, por columnas. **Es conveniente hacer un gráfico del funcionamiento del sistema antes de comenzar a introducir los datos**.

• **1ª columna**: Tipo de componente, que ya se ha rellenado en la pantalla anterior.

• **2ª columna (Inmediate follower)** El formato completo de esta columna es:

Inmediate follower/Prob/transfer time. Lo primero que hay que indicar para cada componente del sistema es el siguiente componente al que éste se encuentra conectado. Prob se utiliza sólo cuando los componentes del sistema están conectados con cierta probabilidad. Si no es así, dejar en blanco (//). El tiempo de transferencia es el tiempo que se tarda en llegar de un componente al siguiente . Si éste se considera despreciable, no hay que indicar nada.

• **3ª-4ª columnas (Input rule-Ouput rule):** Solo hay que rellenarlas en caso de que se puede acceder a un servidor desde varios componentes (Input) o la salida de un servidor se puede dirigir a varios componentes (Ouput). Como reglas de selección para una situación dada, QSS utiliza las siguientes:

1. Random: elección aleatoria (es la establecida por defecto)

2. Probability: Se elige basado en una regla de probabilidad

3. RoundRobin: Se elige en orden round robin

4. Assembly: el servidor elige un individuo de cada cola a la vez. Hay que esperar a que todas las colas tengan al menos un cliente.

5. DisAssembly: Cuando un servidor acaba el servicio, manda un cliente a cada una de las colas.

6. LongestQueue: Se elige la cola más larga

7. ShortestQueue: Se elige la cola más corta

8. MaxQueueCapacity: Se elige la cola con mayor capacidad

9. MinQueueCapacity: Se elige la cola con menor capacidad

Se pueden escribir solo las tres primeras letras.

• **5ª columna (Queue discipline):** Solo se rellena para las componentes tipo cola y nos indica con qué regla los clientes de una cola van a pasar al servidor. Las reglas que están implementadas en QSS son:

1. FIFO: Se sirve primero al que llegó primero a la cola

2. LIFO: Se sirve primero al último que llegó a la cola

3. Random: Se sirve de manera aleatoria

4. PriorityIndex: Se sirve primero a los clientes en cola que tengan un índice de prioridad mayor.

5. SPT: Se sirve primero a los clientes que necesiten menor tiempo de procesamiento.

6. LPT: Se sirve primero a los clientes que necesiten un mayor tiempo de procesamiento.

7. MaxWorkDone: Se sirve primero al que mayor tiempo de procesamiento total lleva.

8**.** MinWorkDone: Se sirve primero al que menor tiempo de procesamiento total lleva.

Se pueden escribir solo las tres primeras letras. La opción por defecto es FIFO, en cuyo caso no hace falta rellenarlo.

• **6ª columna (Queue capacity):** QSS reserva, por defecto, un espacio de 50 clientes para el tamaño de las colas, pero es **imprescindible** introducir un número en la capacidad de cualquier cola.

• **7ª columna (Attribute value):** Solamente se rellena en las colas cuya disciplina sea Priority Index: se sirve primero al que mayor índice de prioridad tenga.

• **8ª columna (Interarrival Time distribution):** Distribución del tiempo entre llegadas consecutivas de los clientes al sistema. La más habituales son:

6. **Exp/a/b:** Exponencial de media b, tomando valores para x>a. Normalmente, a=0.

7. **Erlang/a/b/k**: Erlang con k entero, kb= media tomando valores para x>a. Normalmente a=0.

8. **Normal/**μ/σ**:** Normal con μ= media y σ= desviación típica (VER).

9. **Constante**: no hace falta poner Constante, solo el valor de la constante.

Para más información sobre las distribuciones posibles que se pueden utilizar en QSS, usar el **Help** del menú en Search for help:Distribution:Probability distribution.

• **9ª columna (Batch size distribution):** Los clientes llegan al sistema solos o en grupo. Si la llegada es en grupo, el tamaño del grupo se considera una variable aleatoria discreta y hay que dar la distribución. Consultar la ayuda para ver que distribuciones discretas admite QSS y cómo se introducen.

• **10ª columna (Service time distribution):** Para cada servidor hay que dar la distribución del tiempo de servicio. Puede ocurrir que un servidor tenga tiempos de servicio diferentes para clientes de distinto tipo. Entonces, se indicará la distribución del tiempo de servicio para cada cliente, separada por comas:

cliente A/exp/0/0.3, cliente B/normal/1/5

Una vez introducidos los datos se pueden guardar desde el menú archivo. Es conveniente hacer un gráfico del funcionamiento del sistema para comprobar si es ese sistema el que se pretendía definir. En la opción del menú **Format, Switch to graphic model** nos dibuja el sistema tal y como nosotros lo hemos definido.

Nuevamente en **Format: Switch to matrix form**, se puede ver la matriz de datos introducidos.

Para pasar a realizar la simulación, elegir del menú **Solve and Analyze.**

Perfom Simulation. Aparece una pantalla donde hay que introducir las condiciones de la simulación:

1. Inicio a utilizar para la generación de los números aleatorios.

2. Condición de parada: se puede dar en tiempo o en número de clientes que salen del sistema (Maximun number of data collection) y toma el mínimo entre ambos valores.

3. Longitud (en tiempo) del periodo transitorio.

Una vez relleno, pulsar **Simulate**. Realizará la simulación (**en caso de que no la realice, puede haber errores en la introducción de datos**) y una vez finalizada, se pueden observar los resultados **(Show Analysis)**. La pantalla de resultados que muestra es general. Si se quieren ver resultados específicos para cada tipo de componentes del sistema, elegir **Results** del menú y mostrará un análisis para todos los tipos de clientes (Show costumer analysis), para los servidores (Show server analysis) y para las colas (Show queue analysis).

También en el menú Results se puede seleccionar un análisis gráfico (Show graphic analysis). Se selecciona el tipo de componente para el que se quiere hacer el análisis gráfico (cliente, servidor, cola) y el parámetro que se quiere dibujar. Permite hacer algunos gráficos descriptivos, aunque no son de gran interés.

Aplicación SIMULACION DE COLAS EN UN BANCO CON WIN QSB :

Tomado de Análisis Cuantitativo Víctor Manuel Quesada Ibarguen y Juan Carlos Vergara Schmalbach. Univ. Cartagena (España)

Un banco posee dos cajeros (Pedro y Juan) los cuales atienden a un cliente en un promedio de 15 minutos con una desviación de 0.01. Los clientes llegan a una tasa de uno cada 10 minutos y hacen una sola cola cuya capacidad es de máximo 15 clientes. Se considera que la llegada de los clientes se comporta de forma muy similar a una distribución tipo Poisson y los cajeros con una distribución normal. Simular con 100 minutos de tiempo el modelo anterior.

Podemos observar que existen tres actores principales:

* Dos cajeros, los cuales serán considerados como servidores.

* Los clientes, representados por una tasa de llegada.

* La cola o línea de espera, a donde los clientes llegan para ser atendidos.

Hay que considerar que los bancos emplean un sistema de espera de tipo PEPS (FIFO – First In First Out), es decir, los primeros clientes en entrar serán los primeros en ser atendidos.

Para ingresar esta información registramos la cantidad de actores participantes en la ventana Especificaciones del Problema (Problem Specification).

Es recomendable darle nombres a cada uno de los actores para evitar confusiones futuras.

Los cajeros se denotan con la S (Server), los clientes con la C (Customer) y la cola con Q (Queue).

Al pulsar OK, aparecerá una plantilla donde ingresaremos la información primaria del problema.

Comencemos llenando los datos para los cajeros. Para programarlos es necesario introducir la información de que los cajeros dependen de los clientes. Para que WINQSB entienda esto en la columna Distribución de tiempos de servicio (Service Time Distribution) se ingresa la siguiente notación:

Clientes/Normal/0.06667/0.01

La notación completa es:

Nombre predecesor/Distribución/Parámetro 1/Parámetro 2/Parámetro 3

La primera corresponde a la conexión con los clientes, la segunda a la distribución de probabilidad de los servidores y los siguientes datos (parámetros) son utilizados de acuerdo a la información requerida por la distribución (por ejemplo, la distribución Normal requiere de dos parámetros: la media y la desviación).

Las distribuciones disponibles son:

* Beta (Beta)

* Binomial (Binomial)

* Constante (Constant)

* Discreta (Discrete)

* Erlang (Erlang)

* Exponencial (Exponential)

* Gamma (Gamma)

* Hypergeométrica (Hypergeometric)

* Laplace (Laplace)

* Normal (Normal)

* Pareto (Pareto)

* Poisson (Poisson)

* Función de poder (Power Function)

* Triangular (Triangular)

* Uniforme (Uniform)

* Weibull (Weibull)

De igual forma debemos completar los parámetros para los clientes. Lo primero es indicar la dependencia de una de las colas en la columna Sucesor inmediato (Immediate Follower). Luego, en la columna Distribución del tiempo entre llegada (Interarrival Time Distribution) con el siguiente formato:

Distribución/Parámetro 1/Parámetro 2/Parámetro 3

Para nuestro caso, la distribución quedaría:

Poisson/0.1

Los parámetros 2 y 3 no son requeridos para esta distribución. El resultado debe lucir como sigue:

La columna Distribución de los tamaños de los lotes (Batch Size Distribution), indica si los clientes llegan de forma agrupada o individual. En nuestro caso omitiremos llenar esta columna indicando que los clientes llegan de a uno al banco.

Para programar la cola, debemos indicar que los dos cajeros se alimentarán de ella colocando los nombres en las casillas correspondientes a la columna Sucesor inmediato (Immediate Follower).

En Disciplina de la cola (Queue Discipline) marcamos FIFO y en Capacidad de la cola (Queue Capacity) su capacidad (máximo 15 personas en espera).

ANALIZANDO LOS RESULTADOS

Para resolver el problema pulsamos sobre Realizar simulación (Perform Simulation) en el menú Resolver y analizar (Solve and Analyze).

En la nueva ventana podremos indicar la cantidad de minutos a simular y qué tipo de base (seed) para la generación de números aleatorios.

Pulsemos en el botón SIMULATE. WINQSB tomará el tiempo y mostrará las observaciones recolectadas durante ese tiempo:

El botón SHOW ANALYSIS nos mostrará los resultados de la simulación.

Se puede observar que en los 100 minutos llegaron 1123 clientes (Total Number of Arrival). El tiempo de espera promedio fue de 0.1879 (Average Waiting Time). El número máximo de personas en el sistema fue de 17: 15 en espera y 2 siendo entendidos (Maximun Number in the System). En promedio permanecieron 2,2144 personas en el sistema (Average Number in the System).

Un análisis desde el punto de vista de los cajeros nos muestra más información de la simulación:

Los cajeros tuvieron un promedio de utilización (Server Utilization) del 28,89%. El cajero 1 atendió 431 personas y el cajero 2 a 440 para un total de 871 (Customer Processed). De los 1123 solo finalizaron el proceso 871.

Desde el punto de vista de la cola tenemos:

El promedio de personas en la cola fue de 1.6366 (Average Q. Length). El máximo de personas en la cola es de 15 (Maximun Q. Length).

SIMULACIÓN EN MODO GRÁFICO

Podemos ingresar el problema mediante el modo gráfico que provee WINQSB en la ventana inicial:

El problema quedaría:

Para intercambiar los modos pulsamos en Pasar a formato matriz (Switch to Matrix Form) en el menú Formato (Format)

ANEXO: LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y LA DE POISSON

La distribución binomial es una distribución de probabilidades que surge al cumplirse cinco condiciones:

1. Existe una serie de N ensayos,
2. En cada ensayo hay sólo dos posibles resultados,
3. En cada ensayo, los dos resultados posibles son mutuamente excluyentes,
4. Los resultados de cada ensayo son independientes entre si, y
5. La probabilidad de cada resultado posible en cualquier ensayo es la misma de un ensayo a otro.

Para este tipo de distribución de probabilidad, la función matemática es la siguiente:

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$$

Donde: P(X) = probabilidad de X éxitos dados los parámetros n y p

n = tamaño de la muestra

p = probabilidad de éxito

1 – p = probabilidad de fracaso

X = numero de éxitos en la muestra (X = 0, 1, 2, …….. n)

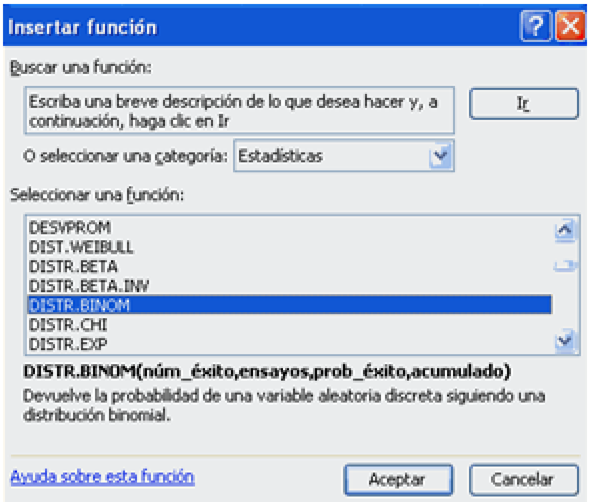
6. Veamos un ejemplo:

Supóngase que en cierta población el 52 por ciento de todos los nacimientos que se registraron son varones. Si aleatoriamente se escogen cinco registros de nacimientos dentro de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente tres de ellos pertenezcan a varones?

Tenemos los siguientes datos:

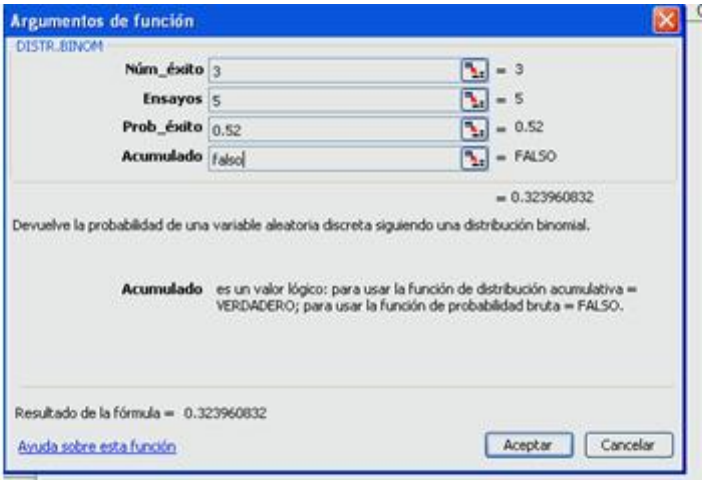
N = 5 X = 3 p = 0.52

Este problema los solucionamos con el Excel.



Escogemos en **Seleccionar una categoría**, a las **Estadísticas.** Y dentro de las estadísticas, escogemos a la **DISTR.BINOM.**

Ingresamos la información del problema y listo. P(X=3) = 0.3239



DISTRIBUCION DE POISSON

Se dice que existe un proceso de Poisson si podemos observar eventos discretos en un área de oportunidad – un intervalo continuo (de tiempo, longitud, superficie, etc.) – de tal manera que si se reduce lo suficiente el área de oportunidad o el intervalo,

1. La probabilidad de observar exactamente un éxito en el intervalo es constante.
2. La probabilidad de obtener más de un éxito en el intervalo es 0.
3. La probabilidad de observar un éxito en cualquier intervalo es estadísticamente independiente de la de cualquier otro intervalo.

La expresión matemática para la distribución de Poisson para obtener **X** éxitos, dado que se esperan l éxitos es:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{X}}{X!}$$

Donde: P(X) = probabilidad de X éxitos dado el valor de l

l = esperanza del número de éxitos.

e = constante matemática, con valor aproximado 2.711828

X = número de éxitos por unidad

La distribución de Poisson se considera una buena aproximación a la distribución binomial, en el caso que np < 5 y p < 0.1 ó n > 100 y p < 0.05 y en ese caso l = np. El interés por sustituir la distribución Binomial por una distribución de Poisson se debe a que esta ultima depende únicamente de un solo parámetro, l , y la binomial de dos, n y p.

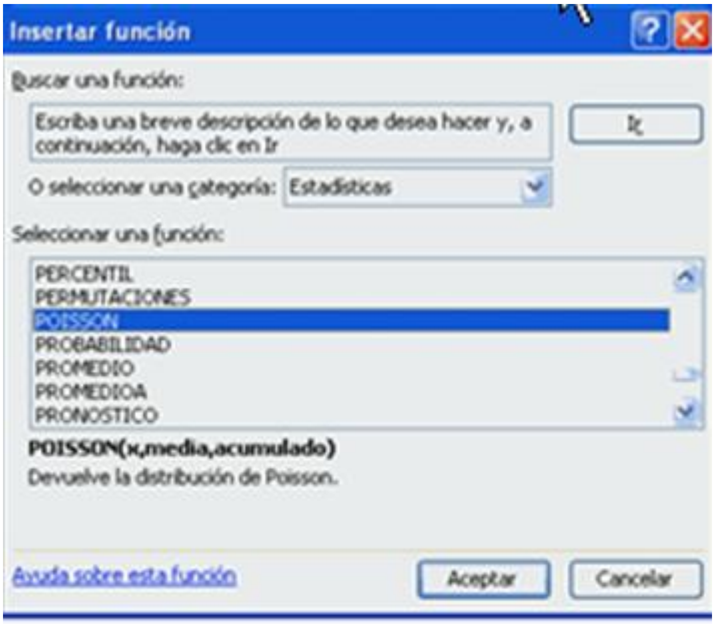
Veamos un ejemplo:

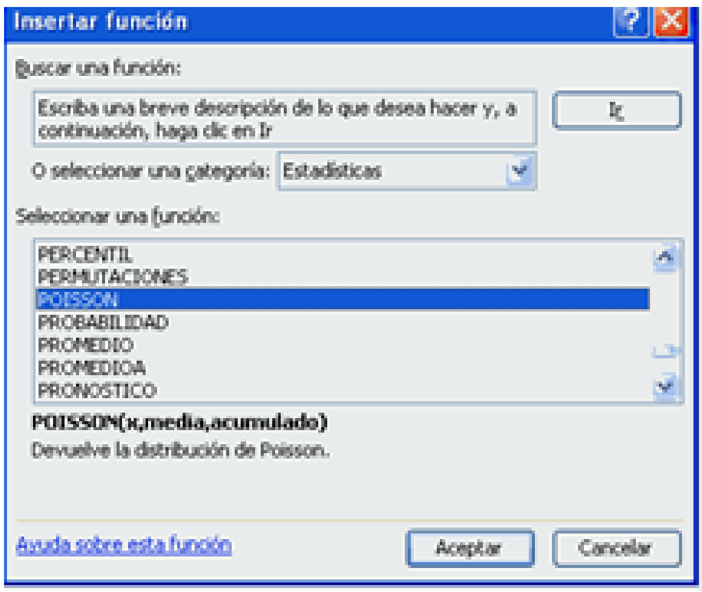
Si en promedio, llegan tres pacientes por minuto al servicio de emergencia del hospital del Niño durante la hora del almuerzo. ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto dado, lleguen exactamente dos pacientes? Y ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de dos pacientes en un minuto dado?

Datos: l = 3 pacientes por minuto

P(X=2) = ¿?

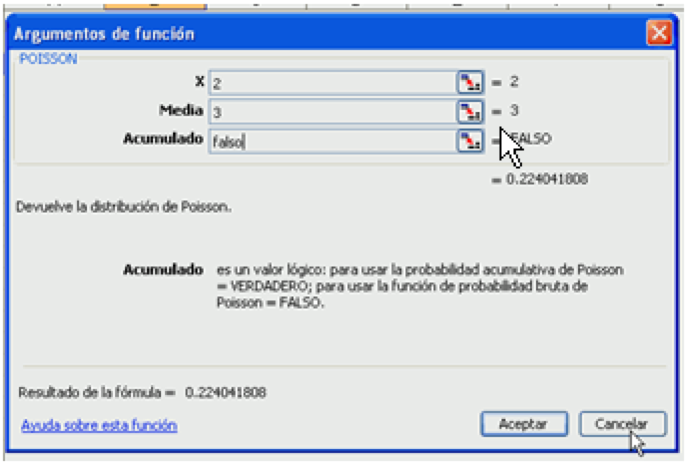
Para resolver esto utilizamos al Excel. De las funciones estadísticas, seleccionamos la función **POISSON**.





Ingresamos la información que tenemos: y listo, tenemos el resultado:

P(X=2) = 0.2240

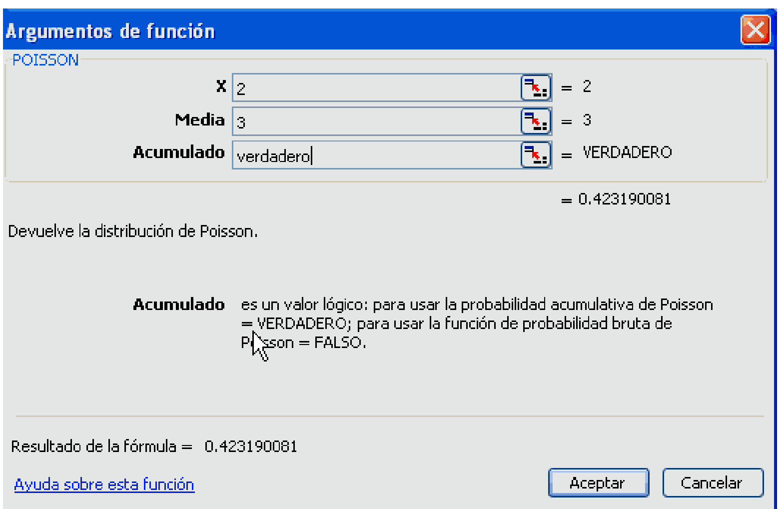


Para resolver la segunda parte del problema P(X>2) = ¿?

Con el Excel encontraremos P(X ≤ 2) y hacemos el siguiente cálculo:

P(X > 2) = 1 - P(X ≤ 2)

Utilizando nuevamente el Excel:



Entonces:

P(X>2) = 1 – 0.4232 = 0.5768

Se utiliza cuando las probabilidades de éxito (p) son menores a 0.05 y cuando (n) es muy grande (p.e. mayor a 100).

Por lo demás tiene casi las mismas características que una distribución binomial simple. Se le conoce también como ley de los eventos improbables.

Capitulo 16. SIMULACIÓN. MODELO DE MONTECARLO

Introducción

Simular es intentar duplicar las particularidades y características de un sistema real.

Se trata de construir un modelo matemático que aproxime tanto como sea posible a la realidad. La idea es imitar de manera matemática el comportamiento de un sistema práctico, obtener resultados y sacar conclusiones que permitan tomar decisiones.

Existen muchas técnicas de simulación: juegos, simulación de negocios, sistemas etc. Si bien nos dedicaremos a una técnica sencilla y de amplio uso.

La simulación de Monte Carlo es una técnica que combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen las computadoras para generar números pseudos-aleatorios y automatizar cálculos. Los orígenes de esta técnica están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40 en el laboratorio de Los Álamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. En años posteriores, la simulación de Monte Carlo se ha venido aplicando a una infinidad de ámbitos como alternativa a los modelos matemáticos exactos o incluso como único medio de estimar soluciones para problemas complejos. Así, en la actualidad es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Monte Carlo en las áreas informática, empresarial, económica, industrial e incluso social. En otras palabras, la simulación de Monte Carlo está presente en todos aquellos ámbitos en los que el comportamiento aleatorio o probabilístico desempeña un papel fundamental -precisamente, el nombre de Monte Carlo proviene de la famosa ciudad de Mónaco, donde abundan los casinos de juego y donde el azar, la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida.

Ventajas y desventajas de la simulación

. Es relativamente sencilla y flexible.

. El avance en software la hace más sencilla aun.

. Puede usarse para casos muy complejos que son insolubles o muy difíciles con los modelos convencionales

. Permite análisis de sensibilidad (¿que pasa …si?)

. Permite experimentar sin afectar el sistema real.

Algunas desventajas son:

. Los modelos para situaciones muy complejas pueden ser muy caros y llevar mucho tiempo.

. La simulación no genera situaciones óptimas.

. Cada modelo de simulación en general es único y no es transferible a otros problemas.

Son muchos los autores que han apostado por utilizar hojas de cálculo para realizar simulación Monte Carlo . La potencia de las hojas de cálculo reside en su universalidad, en su facilidad de uso, en su capacidad para recalcular valores y, sobre todo, en las posibilidades que ofrece con respecto al análisis de escenarios ("what-if anaylisis"). Las últimas versiones de Excel incorporan, además, un lenguaje de programación propio, el Visual Basic for Applications, con el cual es posible crear auténticas aplicaciones de simulación destinadas al usuario final. En el mercado existen de hecho varios complementos de Excel (Add-Ins) específicamente diseñados para realizar simulación Monte Carlo, siendo los más conocidos: @Risk, Crystall Ball, Insight.xla, SimTools.xla, etc.

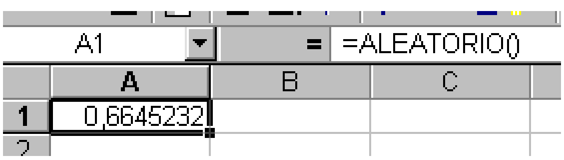
Interesa aquí mostrar un modelo sencillo de la utilización de la simulación. Esta es una técnica que está cobrando una gran importancia en los fenómenos estocásticos.

Aquí mostraremos su utilización con MS Excel y WIN QSB por lo ya comentado respecto a su gran difusión y sencillez de uso, pero no podemos dejar de indicar la creciente e importante participación de soft comerciales como @RISK y Crystal Ball para lo que recomendamos las páginas web que se encuentran en la referencia.

CONCEPTOS PREVIOS PARA SU APLICACIÓN EN MS EXCEL

La función ALEATORIO() de Excel

Las hojas de cálculo como Excel (y cualquier lenguaje de programación estándar) son capaces de generar números pseudos-aleatorios provenientes de una distribución uniforme entre el 0 y el 1. Este tipo de números pseudos-aleatorios son los elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener un número pseudos-aleatorio -proveniente de una distribución uniforme entre el 0 y el 1- usando la función ALEATORIO:



Los números generados mediante la función ALEATORIO tienen dos propiedades que los hacen equiparables a números completamente aleatorios:

1. Cada vez que se usa la función ALEATORIO, cualquier número real entre 0 y 1 tiene la misma probabilidad de ser generado (de ahí el nombre de distribución uniforme).

2. Los diferentes números generados son estadísticamente independientes unos de otros (es decir, el valor del número generado en un momento dado no depende de los generados con anterioridad).

La función ALEATORIO es una función volátil de Excel. Esto significa que cada vez que pulsamos la tecla F9 o cambiemos alguno de los inputs del modelo, todas las celdas donde aparezca la función ALEATORIO serán recalculadas de forma automática.

Se pueden encontrar ejemplos del uso de ALEATORIO en el propio menú de ayuda de Excel.

La técnica de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es una técnica cuantitativa que hace uso de la estadística y los computadoras para imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos (por lo general, cuando se trata de sistemas cuyo estado va cambiando con el paso del tiempo, se recurre bien a la simulación de eventos discretos o bien a la simulación de sistemas continuos).

La clave de la simulación Monte Carlo consiste en crear un modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando aquellas variables (inputs del modelo) cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Una vez identificados dichos inputs o variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento consistente en (1) generar – con ayuda del computador muestras aleatorias (valores concretos) para dichos inputs, y (2) analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados. Tras repetir n veces este experimento, dispondremos de n observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual nos será de utilidad para entender el funcionamiento del mismo – obviamente, nuestro análisis será tanto más preciso cuanto mayor sea el número n de experimentos que llevemos a cabo.

La idea básica es generar valores para las variables que componen el modelo bajo estudio. Los sistemas en general cuentan con muchas variables de naturaleza probabilística que se debe simular.

Los pasos son:

1. Fijar una distribución de probabilidad para las variables importantes.
2. Construir una distribución de probabilidad acumulada para cada variable del paso anterior.
3. Establecer un intervalo de números aleatorios para cada variable.
4. Generar números aleatorios.
5. Simular una serie de pruebas.
6. Examinar los resultados.

Aplicacion1 *:*

En la imagen inferior se muestra un análisis histórico de 200 días sobre el número de consultas diarias realizadas a un sistema de información empresarial llamado EIS residente en un servidor central. La tabla incluye el número de consultas diarias (0 a 5) junto con las frecuencias absolutas (número de días que se producen 0, 1, ..., 5 consultas), las frecuencias relativas (10/200 = 0,05, ...), y las frecuencias relativas acumuladas.

	A	B	C	D	E
1					
2		**Consultas EIS**	**Frec. Abs. (días)**	**Frec. Relativa**	**Frec. Relat. Ac.**
3		0	10	0,05	0,05
4		1	20	0,10	0,15
5		2	40	0,20	0,35
6		3	60	0,30	0,65
7		4	40	0,20	0,85
8		5	30	0,15	1,00
9		***Total***	***200***	***1,00***	
10					

Podemos interpretar la frecuencia relativa como la probabilidad de que ocurra el suceso asociado, en este caso, la probabilidad de un determinado número de consultas (así, p.e., la probabilidad de que se den 3 consultas en un día sería de 0,30), por lo que la tabla anterior nos proporciona la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta (la variable aleatoria es el número de consultas al EIS, que sólo puede tomar valores enteros entre 0 y 5).

Supongamos que queremos conocer el número esperado (o medio) de consultas por día. La respuesta a esta pregunta es fácil si recurrimos a la teoría de la probabilidad: Denotando por X a la variable aleatoria que representa el número diario de consultas al EIS, sabemos que:

$$E\ \ X\ \ = \sum_{i=0}^{5} x_i P(X - x_i) = 0x0.05 + 1x0.10 + ... + 5x0.15 = 2.95$$

Por otra parte, también podemos usar simulación de Monte Carlo para estimar el número esperado de consultas diarias (en este caso se ha podido obtener el valor exacto usando teoría de probabilidad, pero ello no siempre será factible). Veamos cómo:

Cuando se conozca la distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria discreta, será posible usar la columna de frecuencias relativas acumuladas para obtener los llamados intervalos de números aleatorios asociados a cada suceso.

En este caso, los intervalos obtenidos son:

• [0,00 , 0,05) para el suceso 0

• [0,05 , 0,15) para el suceso 1

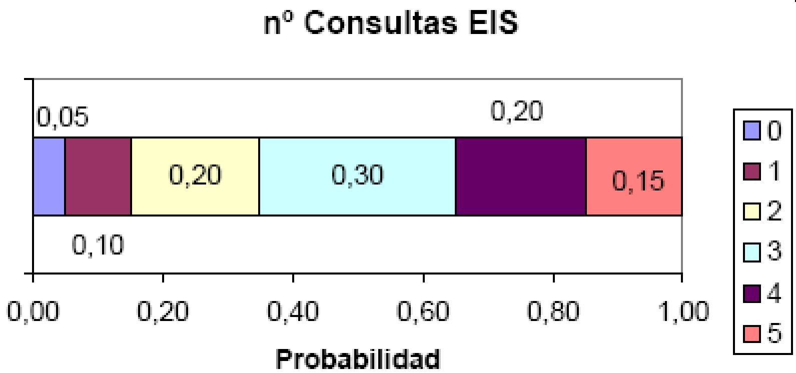
• [0,15 , 0,35) para el suceso 2

• [0,35 , 0,65) para el suceso 3

• [0,65 , 0,85) para el suceso 4

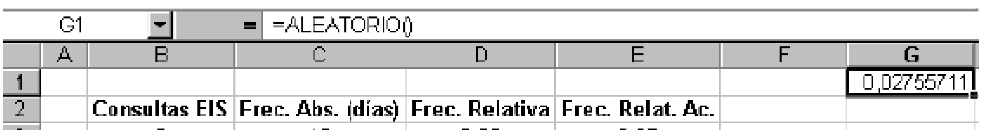
• [0,85 , 1,00) para el suceso 5

El gráfico siguiente nos muestra cada una de las probabilidades sobre el número de consultas. En él, se aprecia claramente la relación existente entre probabilidad de cada suceso y el área que éste ocupa.

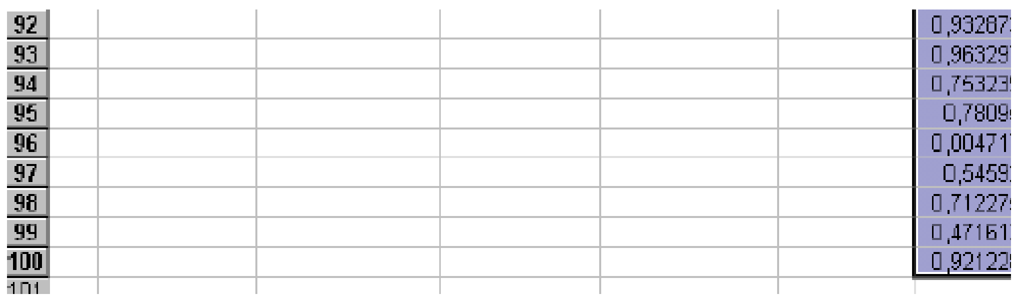


Esto significa que, al generar números pseudos-aleatorio con la computadora (proveniente de una distribución uniforme entre 0 y 1), estaremos llevando a cabo un experimento cuyo resultado, obtenido de forma aleatoria y según la distribución de probabilidad anterior, estará asociado a un suceso. Así por ejemplo, si la computadora nos proporciona el número pseudo-aleatorio 0,2567, podremos suponer que ese día se han producido 2 consultas al EIS.

Asignamos pues la función ALEATORIO a una casilla (la G1 en el caso de la imagen):



Seleccionando la celda y "arrastrando" con el ratón desde el borde inferior derecho de la misma podemos obtener un listado completo de números pseudos-aleatorios:



A continuación, podemos usar la función SI de Excel para asignar un suceso a cada uno de los números pseudos-aleatorios generados (como veremos, otra forma de hacer esta asignación será usando la función BUSCARV):

H1 `=SI(G1<E$3;B$3;SI(G1<E$4;B$4;SI(G1<E$5;B$5;SI(G1<E$6;B$6;SI(G1<E$7;B$7;B$8)))))`

	A	B	C	D	E	F	G	H
1							0,10772119	1
2		**Consultas EIS**	**Frec. Abs. (días)**	**Frec. Relativa**	**Frec. Relat. Ac.**		0,1411781	
3		0	10	0,05	0,05		0,72144284	
4		1	20	0,10	0,15		0,50145062	
5		2	40	0,20	0,35		0,9578586	
6		3	60	0,30	0,65		0,34066854	
7		4	40	0,20	0,85		0,91709909	
8		5	30	0,15	1,00		0,04148589	
9		***Total***	***200***	***1,00***			0,64428827	
10							0,76643621	

Repitiendo el proceso de seleccionar y “arrastrar” obtendremos algo similar a:

							G	H
94							0,20524876	2
95							0,95944028	5
96							0,87429246	5
97							0,63762462	3
98							0,32272825	2
99							0,72548037	4
100							0,15403118	2

Finalmente, usando la función PROMEDIO será posible calcular la media de los valores de la columna H:

= =PROMEDIO(H:H)

	C	D	E	F	G	H
					0,23259154	2
S	**Frec. Abs. (días)**	**Frec. Relativa**	**Frec. Relat. Ac.**		0,49286068	3
	10	0,05	0,05		0,59610971	3
	20	0,10	0,15		0,60479183	3

En este caso, hemos obtenido un valor estimado que corresponde exactamente con el valor real anteriormente calculado vía la definición teórica de la media. Sin embargo, debido a la componente aleatoria intrínseca al modelo, normalmente obtendremos valores “cercanos” al valor real, siendo dichos valores diferentes unos de otros (cada simulación proporcionará sus propios resultados). Se puede comprobar este hecho pulsando repetidamente sobre la función F9 (cada vez que se pulsa dicha tecla, Excel genera nuevos valores aleatorios y, por tanto, nuevos valores para la columna H y la casilla I1). Si en lugar de usar una muestra aleatoria formada por 100 observaciones hubiésemos usado una formada por 10, los valores que obtendríamos al pulsar repetidamente F9 no serían estimaciones tan buenas al valor real. Por el contrario, es de esperar que si hubiésemos usado 1.000 (o mejor aún 10.000) observaciones, los valores que obtendríamos en la casilla I1 estarían todos muy cercanos al valor real.

APLICACIÓN A UN SISTEMA DE INVENTARIOS

Tenemos como ejemplo un modelo de inventario con dos variables de decisión y 2 componentes probabilísticos.

1º Paso: Se quiere tomar decisiones sobre la cantidad de pedido y el punto de reorden de un producto de demanda diaria incierta. La idea es llevar a cabo varias corridas de la simulación probando con varias cantidades de pedido y puntos de reorden y ver de minimizar el costo total del inventario.

2º Paso: Tipos de variables

Entradas controlables = Variables de decisión= cantidad de pedido y punto de reorden.

Ent. Incontrolables= Demanda diaria y plazo de entrega.

Supongamos para este ejemplo que en los últimos días tenemos los datos de ventas siguientes y que fueron convertidos en una distribución de probabilidades.

D	frec.(dias)	Prob.	Prob. Acum.	Intervalo num aleat
0	15	0,05	0,05	01-05
1	30	0,1	0,15	06-15
2	60	0,2	0,35	16-35
3	120	0,4	0,75	36-75
4	45	0,15	0,9	76-90
5	30	0,1	1	91-100
	300	1		

Plazo entrega	frec.pedidos	Probabilidad	Prob. Acum.	Intervalo num.aleat.
1	10	0,2	0,2	01-20
2	25	0,5	0,7	21-70
3	15	0,3	1	71-100
	50	1		

3º Paso: realizamos un modelo de simulación para especificar el proceso

4º Paso: Especificar las variables que se desean probar.

Supongamos que establecemos una política de q= 10 y R=5 o sea que cuando el inventario llegue a 5 o menos se pedirán 10 unidades.

5º Paso: Utilización de la metodología de Montecarlo y se simula durante 10 días.

	q=10		R= 5						
DIA (2)	UNIDADES RECIBIDAS(2)	INV.INICIAL (3)	NUM. ALEAT (4)	DEMANDA (5)	INV.FINAL (6)	VENTAS PERD. (7)	HACER PEDIDO (8)	NUM ALEAT (9)	PLAZO ENTREG (10)
1	------	10	6	1	9	0	no		
2	0	9	63	3	6	0	no		
3	0	6	57	3	3	0	si	2	1
4	0	3	94	5	0	2	no		
5	10	10	52	3	7	0	no		
6	0	7	69	3	4	0	si	33	2
7	0	4	32	2	2	0	no		
8	0	2	30	2	0	0	no		
9	10	10	48	3	7	0	no		
10	0	7	88	4	3	0	si	14	1
				Total	41	2			

Este proceso se puede describir como:

. Comience cada día simulado revisando si llego el inventario ordenado(columna 2). Si es así aumente el inventario actual(col 2) en la cantidad pedida.(en nuestro ejp 10)

. Genere una demanda diaria a partir de la distribución de probabilidades de la D seleccionando un numero aleatorio(col.4). La demanda aleatoria se registra en col 5.

. Cada día debe calcular el inventario final y colocarlo en la col.6 = Inv. Final = I inicial – D. Si el inventario disponible no es suficiente para cubrir la D del día, registre lo que sea posible y anote las ventas perdidas (col.7)

. Revise el inventario final para ver si ha llegado al punto de reorden(5 unidades). Si es así y no hay ordenes pendiente haga un pedido(col.8).El plazo de entrega se simula con un numero aleatorio tomado de una tabla de números aleatorios y se coloca en la col.9. Este número aleatorio se convierte en un plazo de entrega según la tabla de datos que disponíamos.

6º Paso: Examinar los resultados.

El inventario promedio final es = 41 unid. / 10 días = 4.1 u/d

Ventas perdidas promedio= 2 / 10 días = 0.2 u/día

Número promedio de pedidos hecho = 3 / 10 d. = 0.3 pedidos / día

Si suponemos como dato que el costo de cada pedido es de $ 10 y el costo de mantenimiento es de 0.03 $ por unidad y por día (contando 200 días al año) y además suponemos que el costo del faltante es $ 8 tenemos que :

El costo total del inventario con la política q= 10 y R= 5 es:

Costo diario de pedido: 10$ x 0.3 p/d = $3

Costo diario faltantes = 8$ x 0.2 = $ 1.60

Costo diario Mantenimiento= 0.03 $/d x 4.1 u/d = $ 0.12

COSTO TOTAL= 3 + 0.12 + 1.60 = 4.72 $ /día

Lo idea es simular al menos 1000 días con algún software que convierta eso en menos laborioso tal como los mencionados.

SIMULACION DE UN PROBLEMA DE COLAS

Supongamos un muelle de carga y su respectiva cola de buques para descarga.

Supongamos que las llegadas de los buques no son de tipo Poisson y las tasas de descarga de los buques(tiempos de servicio) no son exponenciales ni constantes. Entonces no podríamos utilizar los modelos de colas vistos.

Pero digamos que tenemos un estudio realizado por la autoridad portuaria que nos permite que con esa información se pueda calcular una distribución de probabilidad de la variable tasa de descarga diaria.

Igual que antes se puede armar un intervalo de números aleatorios para las tasas de descarga.

Numero llegadas	Prob.	Prob. Acum.	Intervalo num aleat
0	0,13	0,13	01-13
1	0,17	0,3	14-30
2	0,15	0,45	31-45
3	0,25	0,7	46-70
4	0,2	0,9	71-90
5	0,1	1	91-100

Tasa diaria descarga	Prob.	Prob. acumulada	Intervalo num.aleat.
1	0,05	0,05	01-05
2	0,15	0,2	06-20
3	0,5	0,7	21-70
4	0,2	0,9	71-90
5	0,1	1	91-100

Pongamos que la disciplina de la cola es : Primero en entrar , primero en salir quedando los barcos que no se puedan descargar en el mismo día esperando hasta el día siguiente con los costos que esto involucra. Como la autoridad portuaria quiere contratar cuadrillas de descarga adicionales pretende realizar una simulación corta de 15 días.

Teniendo en cuenta lo anterior , la simulación nos da los siguientes datos:

Número promedio de barcos retrasadas para el día siguiente= 20 retrasos / 15 días

= 1.33 barcos retrasados por día.

Número promedio de llegadas = 41 / 15 = 2.73 llegadas

Número promedio de barcos descargados por día = 39 / 15 = 2.60 descargas

DIA (2)	Numero retrasado dia anterior	numero aleatorio	Numero llegadas por noche	Total que se deben descargar	NUM ALEAT (9)	Numero descargando
1	------	52	3	3	37	3
2	0	6	0	0	63	0
3	0	50	3	3	28	3
4	0	88	4	4	2	1
5	3	53	3	6	74	4
6	2	30	1	3	35	3
7	0	10	0	0	24	0
8	0	47	3	3	3	1
9	2	99	5	7	29	3
10	4	37	2	6	60	3
11	3	66	**3**	6	74	4
12	2	91	**5**	7	85	4
13	3	35	**2**	5	90	4
14	1	32	**2**	3	73	3
15	0	0	5	5	59	3
	20 dias		**41**			39

Con estos datos se puede llegar a tener una mejor idea en cuanto al personal adicional.

COMO LLEVAR ADELANTE UNA SIMULACIÓN EN EL WIN QSB

Para cualquier problema de colas que usted defina en QA, usted puede usar la simulación Monte Carlo para evaluar la actuación del sistema. Para simular el sistema de colas, aquí se muestra el procedimiento general:

1. Asuma que el problema se ha entrado y las distribuciones están definidas.
2. Seleccione la orden Simulate the System (Simule el Sistema). El programa planteará una forma para permitirle especificar el proceso de la simulación, incluyendo:

(a). Random seed (semilla del Azar): Usted puede escoger el valor por defecto o reloj del sistema, o entrar un valor particular para la semilla del azar. Cada vez usted ejecute la simulación, si la misma semilla del azar se usa, generará la misma sucesión números aleatorios. Por consiguiente, escogiendo el reloj del sistema como la semilla del azar garantiza una sucesión del azar diferente.

(b). Queuing discipline (Disciplina de la cola): Usted puede escoger FIFO (PEPS), LIFO (UEPS), o al azar para la disciplina de la cola. Disciplina de la cola es la regla para poder escoger al cliente en espera a ser servido cuando un servidor se pone disponible. Si el sistema tiene una solución de la forma aproximada, el resultado debe estar muy cerca del de la simulación usando la disciplina FIFO.

(c). Simulation time (Tiempo de la Simulación): Que indica cuanto tiempo funcionará el sistema de colas.

(d). Start collection time (Iniciar tiempo de colección): Indica cuando el programa empieza a recolectar datos sobre la actuación de la cola. Un tiempo de inicio distinto de cero para la recolección puede filtrar la inicialización del estado del sistema.

(e). Queue capacity (Capacidad de la Cola): esto permite al sistema el mantener a los clientes de espera. El valor por defecto es 1000 que es normalmente suficiente para la mayoría de las situaciones. No se recomienda el entrar una capacidad de cola grande ya que puede usar toda la memoria de la computadora.

(f). Maximum number of data collections (Número Máximo de recolecciones de datos): Esto es otra regla de detención para que el programa detenga el proceso de la simulación. Acompañado con el tiempo de la simulación, el programa detiene la simulación cuando cualquiera de los dos se alcanza.

Presione el comando OK para iniciar la simulación si las especificaciones anterior se han hecho. Cuando se haya terminado la simulación, el resultado se mostrará.

APLICACIÓN : Un almacén tiene 2 cajeras que atienden a razón de 1.5 minutos por cliente siguiendo una distribución exponencial. Los clientes llegan a este almacén siguiendo una distribución Poisson a razón de 30 por hora. Con esta información calcular: A)La probabilidad de que el sistema esté lleno, B) La intensidad de trafico.

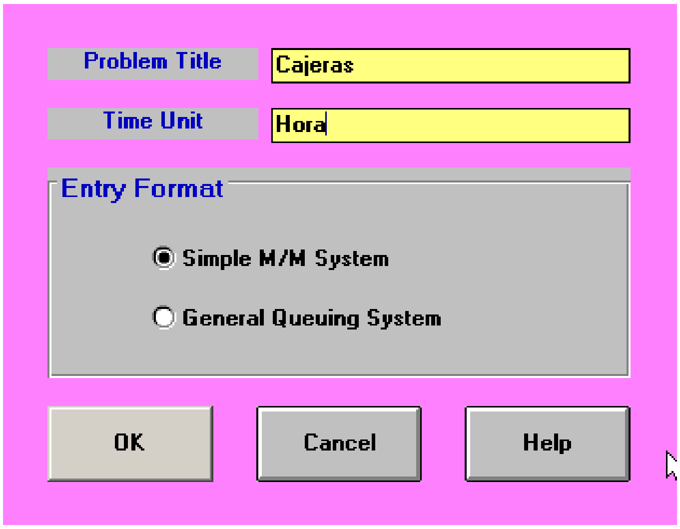
Datos:

Numero de servidores = 2

l =30 [cl/hr]
m =1/1.5 [cl/min]= 40 [cl/hr]
El problema será del tipo M/M/2/FIFO/¥ /¥

Procedimiento

1. Se iniciará un nuevo problema en el modulo Análisis de Colas (QA).
2. Se elegirá Sistema Simple M/M, por que es un modelo del que se conocen todos los datos. Este se llamará Cajeras, eligiendo como unidad de tiempo a horas:



3. En la hoja de cálculo se introducirá los datos conocidos como se muestra:

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Los valores de M, representan que es un valor infinito, como ya se menciono antes.

4. Al presionar el icono Solve the Problem se verá la ventana de los resultados:

02-05-2002	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0291 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0041 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0200 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	20,4545 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	$0
17	Total cost of idle server per hora =	$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	$0
19	Total cost of customer being served per hora =	$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	$0
21	Total queue space cost per hora =	$0
22	Total system cost per hora =	$0

De la ventana de resultados podemos concluir:

Customer arrival rate per hour = l = 30 [cl/hr]

Service rate per server per hour = m = 40 [cl/hr]

Overall system effective arrival rate per hour = Tasa de llegadas eficaces al sistema global por hora = 30

Overall system effective service rate per hour = Tasa de servicio eficaz del sistema global por hora = 30

Overall system utilization = Tasa de ocupación del sistema = r = 37.5 %

Average number of customers in the system = Número promedio de clientes en el sistema = L = 0.8727

Average number of customers in the queue = Número promedio de clientes en la cola = Lq = 0.1227

Average number of customers in the queue for a busy system = Número promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado = Lb = 0.6

Average time customer spends in the system = Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema = W = 0.0291 [horas]

Average time customer spends in the queue = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola = Wq = 0.0041 [horas]
Average time customer spends in the queue for a busy system = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola para un sistema ocupado = Wb = 0.02 [horas]
The probablity that all servers are idle = Probabilidad de que todos los servidores esten ociosos = P_0 = 45.45 %
The probablity an arriving costumer waits = Probabilidad de que un cliente espere al llegar al sistema = Pw = Pb = 20.45 %
Average number of customers being balked per hour = Numero promedio de clientes que no serán atendidos por el sistema por hora = 0

Por lo que las respuestas buscadas son

A. Tasa de ocupación del sistema = r = 37.5 %

B. Probabilidad de que un cliente espere al llegar al sistema = Pw = Pb = 20.45 %

Adicionalmente podemos realizar los siguientes análisis:

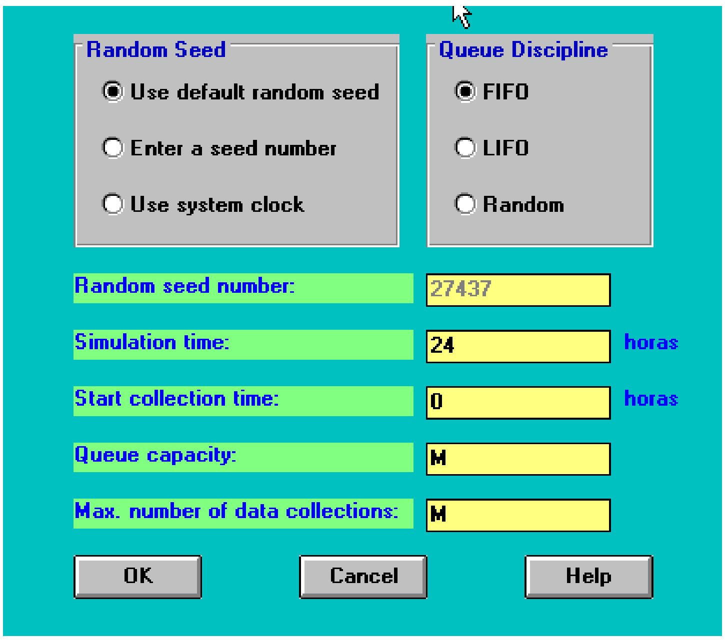
Observar las probabilidades estimadas de que existan de 0 hasta 200 clientes en la cola:

02-06-2002 13:31:38 n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4545	0,4545
1	0,3409	0,7955
2	0,1278	0,9233
3	0,0479	0,9712
4	0,0180	0,9892
5	0,0067	0,9960
6	0,0025	0,9985
7	0,0009	0,9994
8	0,0004	0,9998
9	0,0001	0,9999
10	0,0000	1,0000
11	0,0000	1,0000
12	0,0000	1,0000
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	1,0000
15	0,0000	1,0000
16	0,0000	1,0000
17	0,0000	1,0000
18	0,0000	1,0000
19	0,0000	1,0000
20	0,0000	1,0000
21	0,0000	1,0000
22	0,0000	1,0000
23	0,0000	1,0000
24	0,0000	1,0000
24	0,0000	1,0000
25	0,0000	1,0000
26	0,0000	1,0000
27	0,0000	1,0000
28	0,0000	1,0000
29	0,0000	1,0000
30	0,0000	1,0000
31	0,0000	1,0000
32	0,0000	1,0000
33	0,0000	1,0000
34	0,0000	1,0000
35	0,0000	1,0000
36	0	1,0000
37	0	1,0000
38	0	1,0000
39	0	1,0000
40	0	1,0000
41	0	1,0000
42	0	1,0000
43	0	1,0000
44	0	1,0000
45	0	1,0000
46	0	1,0000
47	0	1,0000
48	0	1,0000

En este caso no es necesario llegar a 200 clientes, ya que se puede observar claramente, que las probabilidades de que existan 9 clientes, ya son casi cero (0.0001), siendo así de que la probabilidad de que existan 10 clientes sea cero.

- También podemos realizar una simulación del sistema:

a. Si presionamos Simulate the System veremos la siguiente ventana:



En el que usaremos:

La semilla de aleatoriedad por defecto
Una disciplina de cola de tipo FIFO (PEPS)
Un tiempo de simulación de cola de 24 horas (1 día).
El momento que iniciará la recolección de datos será a las cero horas.
La capacidad de la cola es infinita (M).
El máximo de número de recolecciones de datos será infinito (M).
Si presionamos OK, se llevará adelante la simulación y veremos los siguientes resultados de la actuación de la cola durante 24 horas:

02-06-2002	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Simulation
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	27,3295
5	Overall system effective service rate per hora =	27,3295
6	Overall system utilization =	34,2151 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,7565
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0722
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,4174
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0277 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0026 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0153 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	48,8648 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	17,2951 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	$0
17	Total cost of idle server per hora =	$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	$0
19	Total cost of customer being served per hora =	$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	$0
21	Total queue space cost per hora =	$0
22	Total system cost per hora =	$0
23	Simulation time in hora =	24,0000
24	Starting data collection time in hora =	0
25	Number of observations collected =	656
26	Maximum number of customers in the queue =	4
27	Total simulation CPU time in second =	

System M/M/2 =Sistema M/M/2

Customer arrival rate per hour = l = 30 [cl/hr]

Service rate per server per hour = m = 40 [cl/hr]

Overall system effective arrival rate per hour = Tasa de llegadas eficaces al sistema global por hora = 27.3295

Overall system effective service rate per hour = Tasa de servicio eficaz del sistema global por hora = 27.3295

Overall system utilization = Tasa de ocupación del sistema = r = 34.2151 %

Average number of customers in the system = Número promedio de clientes en el sistema = L = 0.7565

Average number of customers in the queue = Número promedio de clientes en la cola = Lq = 0.0722

Average number of customers in the queue for a busy system = Número promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado = Lb = 0.4174

Average time customer spends in the system = Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema = W = 0.0277 [horas]

Average time customer spends in the queue = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola = Wq = 0.0026 [horas]

Average time customer spends in the queue for a busy system = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola para un sistema ocupado = Wb = 0.0153 [horas]

The probablity that all servers are idle = Probabilidad de que todos los servidores esten ociosos = P_0 = 48.8648%

The probablity an arriving costumer waits = Probabilidad de que un cliente espere al llegar al sistema = Pw = Pb = 17.2951 %

Average number of customers being balked per hour = Numero promedio de clientes que no serán atendidos por el sistema por hora = 0

Simulation time in hours = Tiempo de simulación en horas = 24

Starting data collection in hour = Iniciar recolección de datos en el tiempo = 0

Number of observations collected = Número de observaciones recolectadas = 656

Maxium number of costumers in queue = Número máximo de clientes en la cola = 4

Total simulation CPUtime in second = Tiempo total de simulación en el CPU = 0.1050

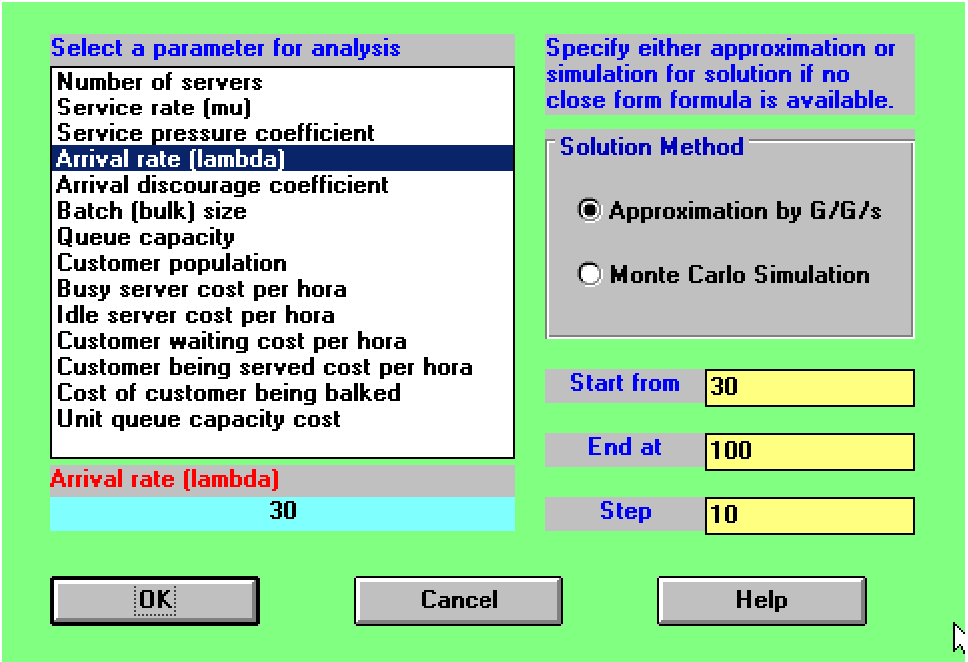
Las probabilidades estimadas para n clientes:

02-06-2002 14:07:08 n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4886	0,4886
1	0,3384	0,8270
2	0,1201	0,9472
3	0,0366	0,9838
4	0,0132	0,9970
5	0,0028	0,9998
6	0,0002	1,0000
7	0	1,0000
8	0	1,0000
9	0	1,0000
10	0	1,0000
11	0	1,0000
12	0	1,0000
13	0	1,0000
14	0	1,0000
15	0	1,0000
16	0	1,0000
17	0	1,0000
18	0	1,0000
19	0	1,0000
20	0	1,0000
21	0	1,0000
22	0	1,0000
23	0	1,0000
24	0	1,0000

Se puede observar que se puede esperar para un tiempo de simulación de 24 horas, un máximo de 6 clientes con una probabilidad de casi cero (0.0002).

- Otro de los análisis del que podemos disponer es el de Análisis de sensibilidad.

Si presionamos Perform Sensitivity Analysis podremos observar la siguiente ventana:



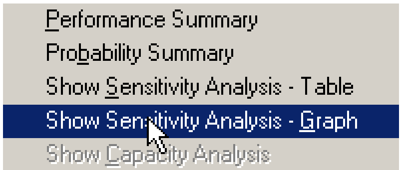
Si realizamos un análisis de sensibilidad, seleccionando como parámetro de análisis a la tasa de llegadas l , haciendo que esta cambie de 30 a 100 [cl/hr], con un paso de 10 [cl/hr], utilizando el modelo de aproximación G/G/s, podremos ver de que manera reacciona el sistema:

02-07-2002 Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
30	30,0000	0,3750	0,8727	0,1227	0,6000	0,0291	0,0041	0,0200	0,4545	0,204
40	40,0000	0,5000	1,3333	0,3333	1,0000	0,0333	0,0083	0,0250	0,3333	0,333
50	50,0000	0,6250	2,0513	0,8013	1,6667	0,0410	0,0160	0,0333	0,2308	0,480
60	60,0000	0,7500	3,4286	1,9286	3,0000	0,0571	0,0321	0,0500	0,1429	0,642
70	70,0000	0,8750	7,4667	5,7167	7,0000	0,1067	0,0817	0,1000	0,0667	0,816
80	Unstable	System!								
90	Unstable	System!								
100	Unstable	System!								

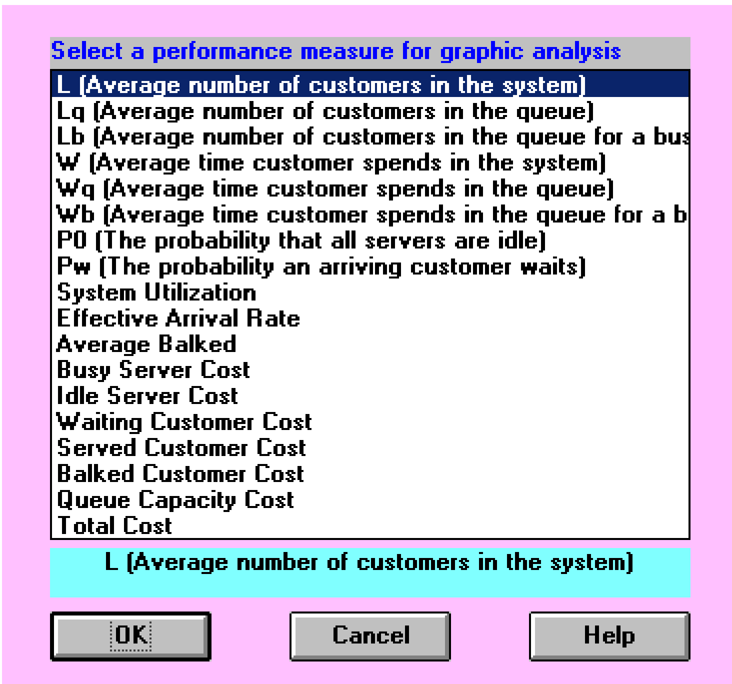
Podemos observar claramente de que la utilización del sistema va en incremento en una proporción de 10 [cl/hr], y cuando ésta llega a los 70 [cl/hr], se da una utilización del 87.5% (Máxima utilización posible), pero si seguimos incrementando hasta llegar a los 80 [cl/hr], el sistema se vuelve inestable, es decir el número de servidores es insuficiente.

- También podemos ver el gráfico del análisis de sensibilidad de un parámetro determinado en función del parámetro analizado:

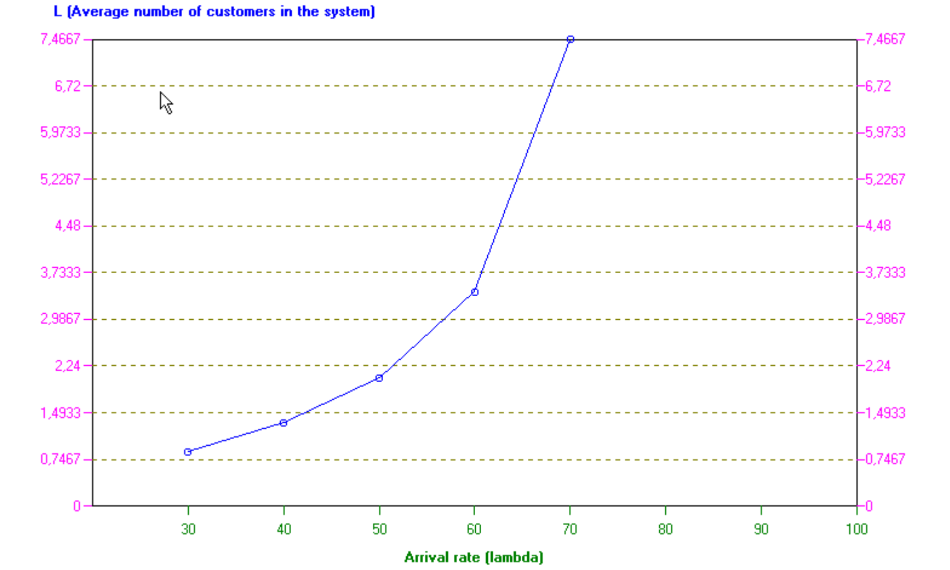
Si presionamos en: Show Sensitivity Analysis - Graph



Se abrirá la siguiente ventana:



En la que seleccionaremos como variable independiente para el gráfico a L (Número promedio de clientes en el sistema), en función de nuestro parámetro analizado (l):



En el que se puede ver un crecimiento exponencial.

Así sucesivamente se pueden ir analizando cada uno de los parámetros, dependiendo que necesidades se tiene.

Otro análisis disponible es el de Análisis de Capacidad:

Como éste análisis se realiza a partir de costos, se asumirán los siguientes costos

Costo de servidor ocupado por hora = 5 $

Costo de servidor ocioso por hora = 1 $

Costo por cliente en espera = 0.5 $

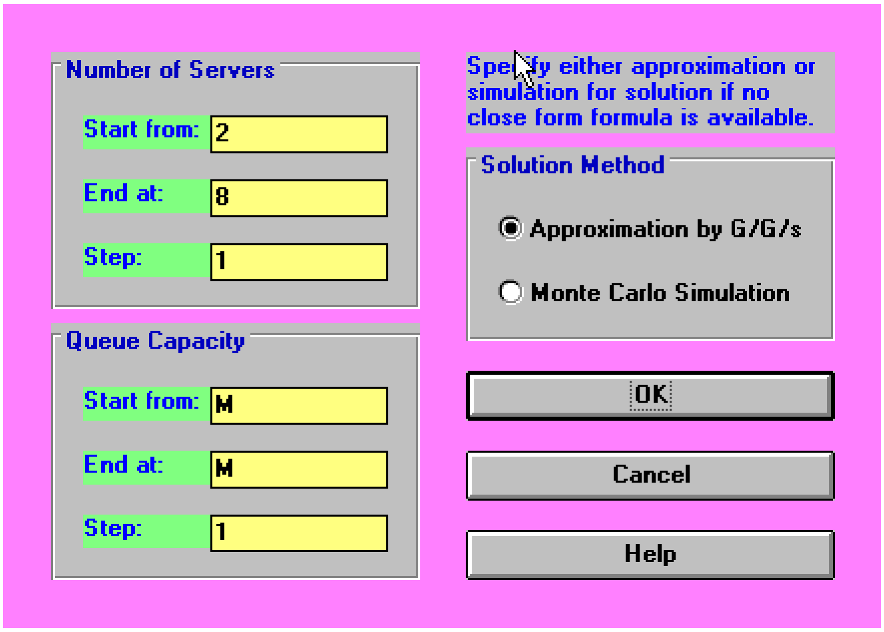
Costo por cliente servido por hora = 3 $

Costo por cliente no atendido = 1 $

Costo unitario por capacidad de cola = 3 $

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	5
Idle server cost per hora	1
Customer waiting cost per hora	0.5
Customer being served cost per hora	3
Cost of customer being balked	1
Unit queue capacity cost	3

a. Si presionamos Perform Capacity Analysis podremos observar la siguiente ventana:



En el que variaremos el número de servidores de 2 a 8, con un paso de 1, y en el que la capacidad de la cola es Infinita, seleccionando la formula G/G/s de aproximación.

c) Si presionamos en OK, la ventana de resultados será la siguiente:

02-07-2002 09:44:43	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost	Balked Customer Cost	Queue Capacity Cost
1	2	M	$7,3114	3,7500	1,2500	0,0614	2,2500	0	0
2	3	M	$8,2574	3,7500	2,2500	0,0074	2,2500	0	0
3	4	M	$9,2509	3,7500	3,2500	0,0009	2,2500	0	0
4	5	M	$10,2501	3,7500	4,2500	0,0001	2,2500	0	0
5	6	M	$11,2500	3,7500	5,2500	0,0000	2,2500	0	0
6	7	M	$12,2500	3,7500	6,2500	0,0000	2,2500	0	0
7	8	M	$13,2500	3,7500	7,2500	0,0000	2,2500	0	0

1. Una cadena de supermercados es abastecida por un almacén central. La mercadería que llega a este almacén es descargada en turnos nocturnos. Los camiones que descargan llegan en forma aleatoria siguiendo una Poisson a razón de dos camiones por hora. En promedio 3 trabajadores descargan 3 camiones por hora siguiendo una distribución exponencial. Si el número de trabajadores del equipo es incrementado, la razón de servicio se incrementa en la misma proporción. Cada trabajador recibe 5$ por hora durante el turno nocturno de 8 horas. El costo de tener el chofer esperando ser servido, se estima en 20 $ por hora. Se desea determinar el tamaño del equipo que minimiza el costo total.

Datos:

Numero de servidores = 2

l =2 [cl/hr]

m_1= 3 [cl/hr], m_2= 4 [cl/hr], m_3= 5 [cl/hr]…………

El problema será del tipo M/M/1/FIFO/¥ /¥

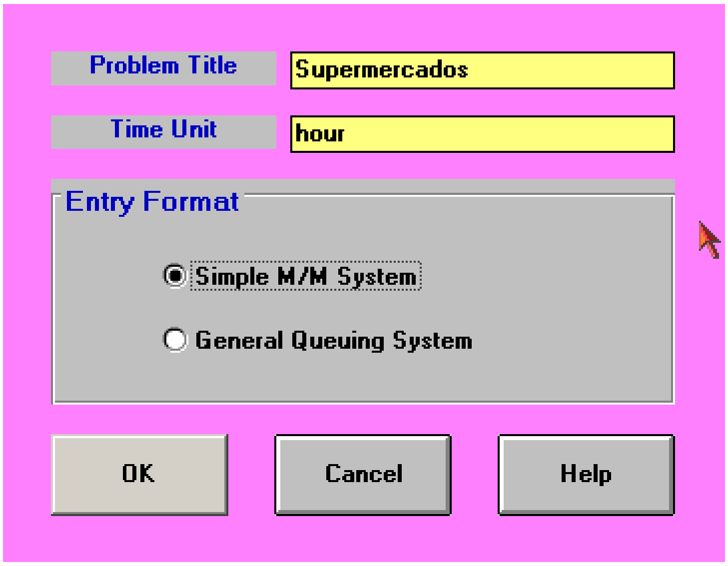
C_S = 5 [$/hr]

C_E = 20 [$/hr]

Procedimiento

Se iniciará un nuevo problema en el modulo Análisis de Colas (QA).

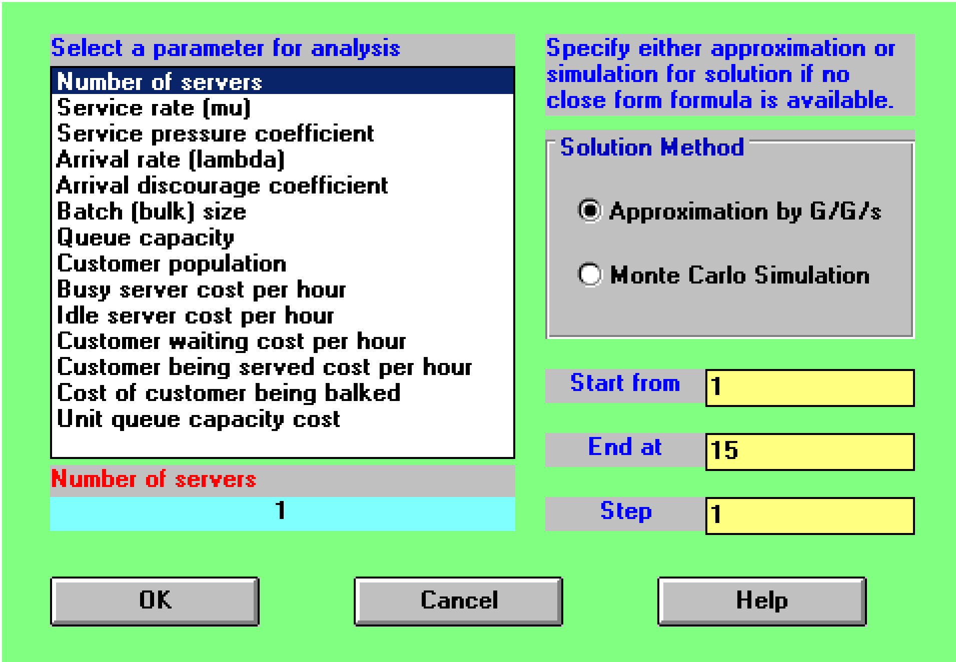
Se elegirá Sistema Simple M/M, por que es un modelo del que se conocen todos los datos. Este se llamará Supermercados, eligiendo como unidad de tiempo a horas:



En la hoja de cálculo se introducirá los datos conocidos como se muestra:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	1
Customer arrival rate (per hour)	2
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	5
Idle server cost per hour	5
Customer waiting cost per hour	20
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Si presionamos Perform Sensitivity Analysis podremos observar la siguiente ventana:

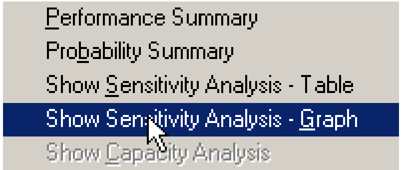


Si realizamos un análisis de sensibilidad, seleccionando como parámetro de análisis al número de servidores, haciendo que esta cambie de 1 a 10 con un paso de 1, utilizando el modelo de aproximación G/G/s en caso de no existir una formula para este modelo, podremos ver de que manera reacciona el sistema:

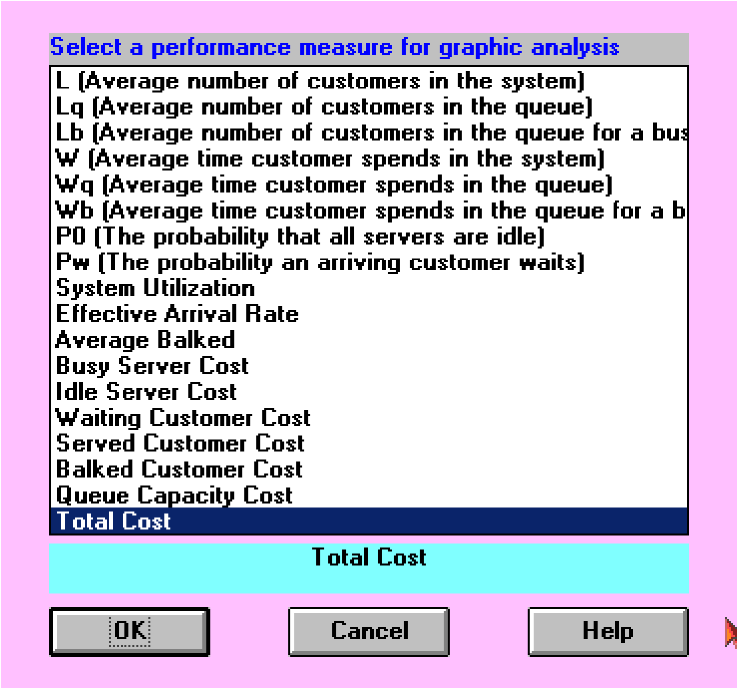
02-16-2002 Value	Pw	Average Balked	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost	Balked Customer Cost	Queue Capacity Cost	TOTAL COST
1									
2									
3	0,4444	0	10,0000	5,0000	17,7778	0	0	0	32,7778
4	0,1739	0	10,0000	10,0000	3,4783	0	0	0	23,4783
5	0,0597	0	10,0000	15,0000	0,7960	0	0	0	25,7960
6	0,0180	0	10,0000	20,0000	0,1802	0	0	0	30,1802
7	0,0048	0	10,0000	25,0000	0,0385	0	0	0	35,0385
8	0,0011	0	10,0000	30,0000	0,0076	0	0	0	40,0076
9	0,0002	0	10,0000	35,0000	0,0014	0	0	0	45,0014
10	0,0000	0	10,0000	40,0000	0,0002	0	0	0	50,0002
11	0,0000	0	10,0000	45,0000	0,0000	0	0	0	55,0000
12	0,0000	0	10,0000	50,0000	0,0000	0	0	0	60,0000
13	0,0000	0	10,0000	55,0000	0,0000	0	0	0	65,0000
14	0,0000	0	10,0000	60,0000	0,0000	0	0	0	70,0000
15	0,0000	0	10,0000	65,0000	0,0000	0	0	0	75,0000

Podemos observar claramente de que a medida que se incrementa el número de servidores (1-15), los costos totales van disminuyendo, pudiéndose notar que el que al llegar a 4 servidores, se tiene el costo mínimo (23.4783), siendo que desde 5 servidores, nuevamente el costo total va en aumento. Podemos ver el gráfico del análisis de sensibilidad de el costo total, en función del número de servidores:

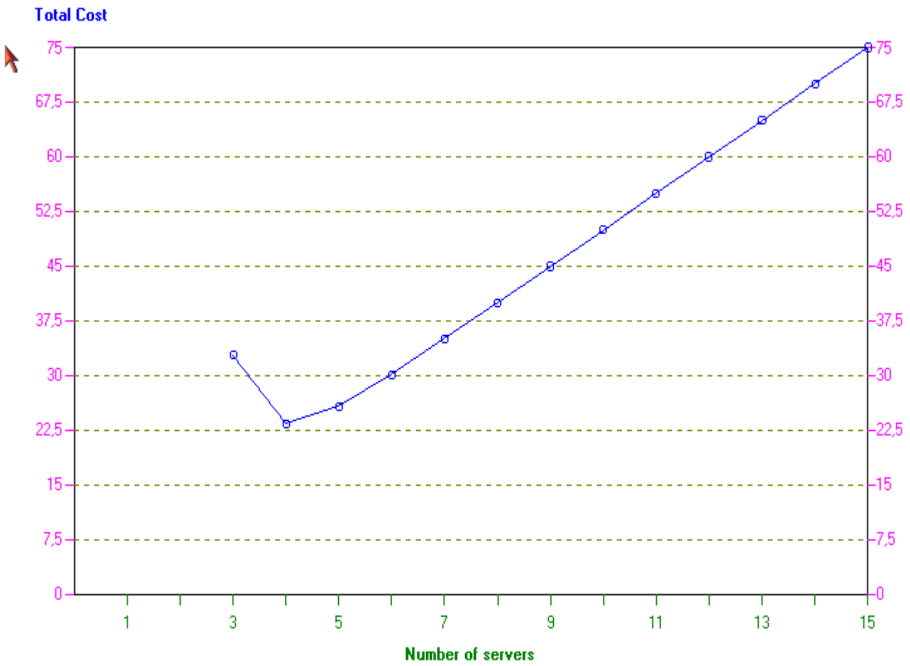
Si presionamos en: Show Sensitivity Analysis – Graph



Se abrirá la siguiente ventana:



Pudiéndose ver el siguiente gráfico



Por lo que la respuesta del número de servidores a seleccionar es 4

1. Cierta computadora tarda exactamente 1.5 horas en atender un servicio requerido. Si los trabajos llegan según una Poisson a razón de un trabajo cada 120 minutos, se desea saber:

a) ¿Qué tanto debe esperar en promedio un trabajo para recibir atención?
b) ¿Será necesario la compra de otra computadora?
c) Si la distribución del tiempo de servicio fuera Erlang con una media de 1.5 y con un parámetro k = 5, ¿Cuánto debería esperar un trabajo para ser atendido? ¿Cuál sería la probabilidad de ser atendido?

Datos:

Numero de servidores = 1

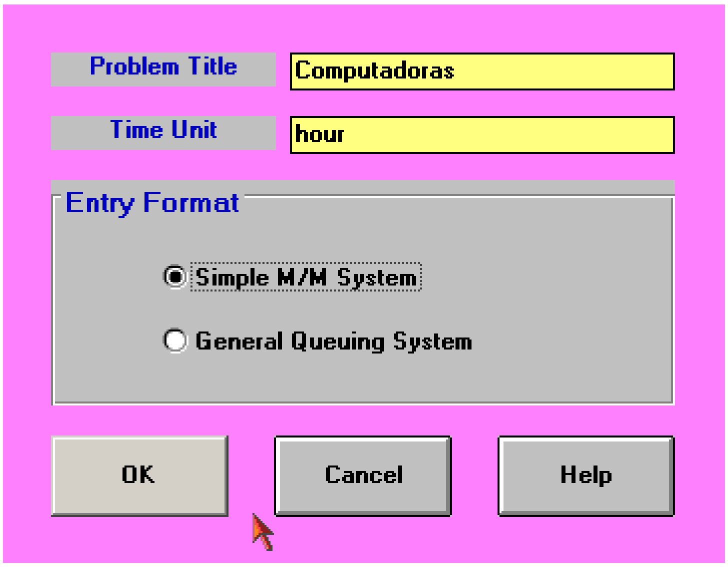
l =1/120 [tr/min] = 0.5 [tr/hr]

m = 1/1.5 [tr/hr] = 0.667 [tr/hr]

El problema será del tipo M/M/1/FIFO/

Procedimiento

1. Se iniciará un nuevo problema en el modulo Análisis de Colas (QA).
2. Se elegirá Sistema Simple M/M, por que es un modelo del que se conocen todos los datos. Este se llamará Computadora, eligiendo como unidad de tiempo a horas:



3. En la hoja de cálculo se introducirá los datos conocidos como se muestra:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	0.667
Customer arrival rate (per hour)	0.5
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Al presionar el icono Solve the Problem se verá la ventana de los resultados:

02-16-2002	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	0,5000
3	Service rate per server (mu) per hour =	0,6670
4	Overall system effective arrival rate per hour =	0,5000
5	Overall system effective service rate per hour =	0,5000
6	Overall system utilization =	74,9625 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,9940
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,2444
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,9940
10	Average time customer spends in the system (W) =	5,9880 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	4,4888 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	5,9880 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	25,0375 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw or Pb) =	74,9625 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

De la ventana de resultados podemos concluir:

Customer arrival rate per hour = l = 0.5 [tr/hr]

Service rate per server per hour = m = 0.667 [tr/hr]

Overall system effective arrival rate per hour = Tasa de llegadas eficaces al sistema global por hora = 0.5

Overall system effective service rate per hour = Tasa de servicio eficaz del sistema global por hora = 0.5

Overall system utilization = Tasa de ocupación del sistema = r = 74.9625 %

Average number of customers in the system = Número promedio de clientes en el sistema = L = 2.9940

Average number of customers in the queue = Número promedio de clientes en la cola = Lq = 2.2444

Average number of customers in the queue for a busy system = Número promedio de clientes en la cola para un sistema ocupado = Lb = 2.9940

Average time customer spends in the system = Tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema = W = 5.9880 [horas]

Average time customer spends in the queue = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola = Wq = 4.4888 [horas]

Average time customer spends in the queue for a busy system = Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola para un sistema ocupado = Wb = 5.9880 [horas]

The probablity that all servers are idle = Probabilidad de que todos los servidores estén ociosos = P_0 = 25.0375 %

The probablity an arriving costumer waits = Probabilidad de que un cliente espere al llegar al sistema = Pw = Pb = 74.9625 %

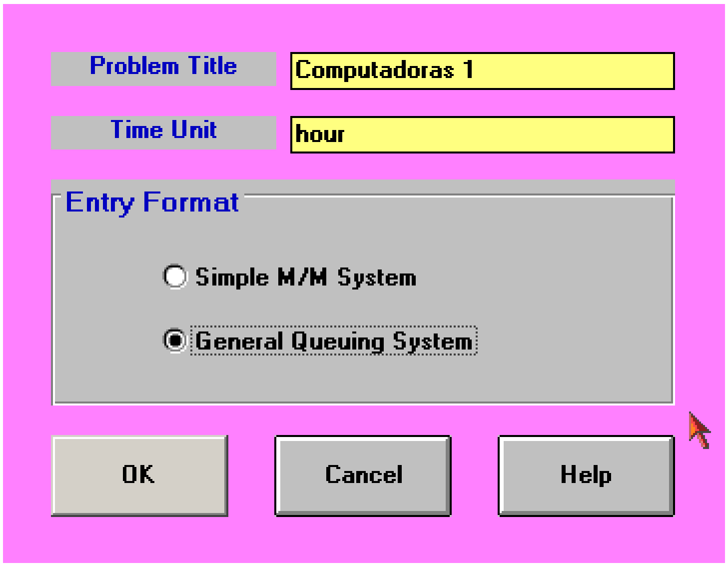
Average number of customers being balked per hour = Numero promedio de clientes que no serán atendidos por el sistema por hora = 0

Por lo que las respuestas buscadas son

Tiempo promedio que un cliente pasa en la cola = Wq = 4.4888 [horas]
No, porque la Tasa de ocupación del sistema = r = 74.9625 %

La resolución del inciso c es la que sigue:

1. Se iniciará un nuevo problema en el modulo Análisis de Colas (QA).
2. Se elegirá Sistema General de colas, por que es un modelo del que se conocen todos los datos de la distribución Erlang. Este se llamará Computadoras 1, eligiendo como unidad de tiempo a horas:



3. Como el problema es del tipo: $M/E_K/1/FIFO/¥\ /¥$. En la hoja de cálculo se introducirá los datos conocidos como se muestra:

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hour)	0.667
Customer arrival rate (per hour)	0.5
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hour	
Idle server cost per hour	
Customer waiting cost per hour	
Customer being served cost per hour	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Al presionar el icono Solve the Problem se verá la ventana de los resultados

Aplicacion: Inversión inicial y flujo de caja

Consideremos ahora un nuevo problema: supongamos que disponemos de un capital inicial de 250 Euros que deseamos invertir en una pequeña empresa. Supondremos también que los flujos de caja -tanto los de entrada como los de salida- son aleatorios, siguiendo éstos una distribución normal.

	A	B	C	D	E
1					
2		***Capital inicial:***	250	Euros	
3					
4		***Flujo de caja Enero***	Distribución	Media	Desv. Est.
5		*Entrante*	Normal	500	125
6		*Saliente*	Normal	400	100
7					

Para el primer mes, el valor esperado del flujo de entrada es de 500 Euros, mientras que el valor esperado para el flujo de salida es de 400 Euros. En meses posteriores, el valor esperado será el valor obtenido para en el mes anterior. Por su parte, las desviaciones estándar valdrán, en todos los casos, un 25% del valor medio (esperado) asociado. En base a lo anterior, podemos construir un modelo como se muestra en las siguientes imágenes:

	G	H	I
1	FLUJO ENERO		
2	**Entrante**	**Saliente**	**Neto**
3	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$5;$E$5)	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();$D$6;$E$6)	=$C$2+G3-H3
4			

	J	K	L
1	FLUJO FEBRERO		
2	**Entrante**	**Saliente**	**Neto**
3	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();G3;0,25*G3)	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();H3;0,25*H3)	=I3+J3-K3
4			

	M	N	O
1	**FLUJO MARZO**		
2	**Entrante**	**Saliente**	**Neto**
3	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();J3;0,25*J3)	=DISTR.NORM.INV(ALEATORIO();K3;0,25*K3)	=L3+M3-N3
4			

	B	C	D
10	*Iteraciones:*	=CONTAR(G:G)	
11	*Flujo Final Max:*	=MAX(O:O)	Euros
12	*Flujo Final Min:*	=MIN(O:O)	Euros
13	*Capital Final Esperado:*	**=PROMEDIO(O:O)**	Euros
14	*IC 95%*	=$C$13-INTERVALO.CONFIANZA(0,05;DESVEST($O:$O);$C$10)	=$C$13+INTERVA
15			

Seleccionando y “arrastrando” hacia abajo el rango G3:O3, hemos obtenido los siguientes resultados para 5.859 iteraciones:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1							FLUJO ENERO			FLUJO	
2		***Capital Inicial:***	250	Euros			Entrante	Saliente	Neto	Entrante	Sali
3							291,01	395,62	145,40	430,07	3
4		***Flujo de caja Enero***	Distribución	Media	Desv. Est.		541,36	506,25	285,11	740,18	61
5		*Entrante*	Normal	500	125		646,78	346,67	550,12	376,19	4
6		*Saliente*	Normal	400	100		449,09	526,56	172,53	401,77	3
7							492,15	545,81	196,34	374,14	5
8							418,22	318,54	349,68	454,23	3
9							539,29	283,93	505,36	312,83	1
10		*Iteraciones:*	5859				569,35	348,81	460,54	458,97	2
11		*Flujo Final Max:*	3.211,04	Euros			446,92	440,22	256,70	593,30	41
12		*Flujo Final Min:*	-1.543,65	Euros			367,36	402,95	214,41	326,45	4
13		*Capital Final Esperado:*	543,79	Euros			558,25	422,41	385,84	587,13	4
14		*IC 95%:*	528,47	559,12			541,35	400,85	390,50	719,73	4
15							382,66	367,75	264,91	392,01	1

Observamos que el valor esperado para el capital final es de unos 544 Euros, y que podemos afirmar, con un nivel de confianza del 95%, que dicho valor estará entre 528 y 560 Euros.

Capitulo 17: CADENAS DE MARKOV

Los modelos de Markov son útiles al estudiar la evolución de sistemas en ensayos que se repiten. En los periodos sucesivos en los que se realizan los ensayos no se puede determinar con certeza el resultado o estado del sistema y entonces se usan probabilidades de transición para describirlo.

En general nos limitaremos a procesos markovianos que tienen como base los siguientes supuestos:

1. Existe un número limitado o finitos de estados posibles
2. La probabilidad de que los estados cambien permanece igual a lo largo del tiempo
3. Se puede predecir cualquier estado futuro a partir del estado anterior y de la matriz de probabilidades de transición
4. El tamaño del sistema no cambia durante el análisis.

A estos se les llama cadenas de Markov con probabilidad de transición estacionarias. A estos procesos también se los denomina sin memoria.

En este texto no nos proponemos ir mas alla de estos casos particulares y fundamentalmente se apuntara al uso del software para solucionar estos problemas.

Veremos como ejemplo una aplicación sencilla a un caso de análisis de mercado. Describiremos la probabilidad de que un consumidor compre una determinada marca de producto M en un determinado momento y en el siguiente compre otra denominada A o si se quiere compre en una tienda M y luego en una tienda A.

Con este ejemplo además podríamos analizar la participación de mercado y la fidelizacion de los clientes a M y A.

Los periodos semanales o visitas (supongamos que son tiendas) se les llamara *ensayos del proceso*. O sea en cada ensayo el cliente compra en M o en A.

Lo que elige cada semana se denomina *estado del sistema* en ese periodo. Como en nuestro ejemplo hay solo dos alternativas (M y A) el sistema tiene dos estados:

Estado 1: Compra en M

Estado 2: Compra en AĦ

Evaluaremos la probabilidad que el cleinete compre en alguna tienda durante un periodo determinado:

Supongamos que disponemos de datos de 100 compradores en un periodo de 10 semanas.

En los procesos de Markov se expresara la probabilidad de elegir una tienda en determinado periodo solo considerando la tienda elegida en el lapso anterior.

Supongamos que en esos datos obtenidos vemos lo siguiente:

De todos los clientes que compraron en M en una semana determinada el 90% compraron en M la siguiente semana y el 10% cambio a A

Con los datos de A vemos que:

De todos los clientes que compraron en A en una semana determinada el 80% compraron en A la siguiente semana y el 20% cambiaron a M

Esto lo podríamos presentar en una matriz como la siguiente:

	M	A
M	0.9	0.1
A	0.2	0.8

Que llamaremos matriz de las probabilidades de transición. (La tabla como propiedad debe verificar que cada renglón su suma sea 1)

Este proceso como dijimos antes, supone que las probabilidades de transición serán las mismas para cualquier cliente y estas no cambian con el tiempo.

La matriz anterior se puede denotar como:

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{vmatrix}$$

Donde $P_{i\ j}$ = probabilidad de realizar una transición del estado i en un periodo determinado al estado j en el siguiente periodo.

Con esta matriz veríamos cual es la probabilidad de que un cliente compre en M o en A en el futuro.

Supongamos que comienzo con un cliente cuya ultima compra fue en M y queremos saber cual es la probabilidad que este cliente compre en M en el periodo siguiente o sea cual es la probabilidad que el sistema se encuentre en 1 despues de la primera transición:

$P_{11} = 0.9$

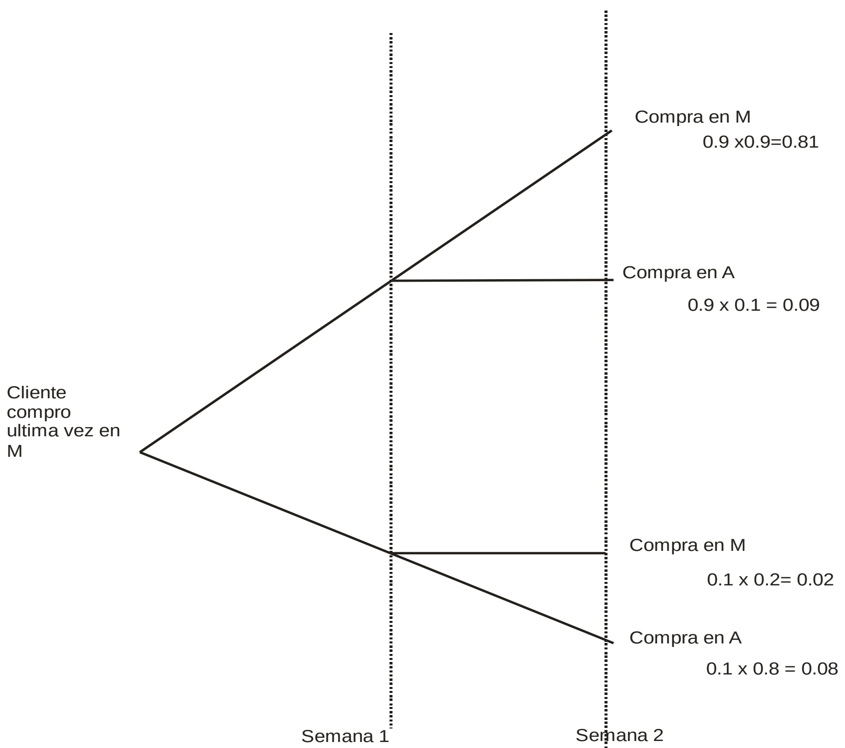
Si ahora veo al sistema en el periodo siguiente es :

(0.9) x (0.9) = 0.81

Y considerando que el cliente va a A en la primera visita y luego vuelva a M en la segunda tendríamos:

(0.1) x (0.2) = 0.02

Estas situaciones se ven en un diagrama de árbol tal como:



Viendo esto tenemos que la probabilidad que el cliente este en M en el segundo periodo es:

0.81 + 0.02 = 0.83

Y que se encuentre en A en el segundo periodo es :

0.09 + 0.08 = 0.17

En general diremos que :

$$\bar{P}_{(\text{ periodo próximo})} = \bar{P}_{(\text{ periodo actual})} \text{ x p}$$

Donde $\bar{P}$ (P raya)indica el vector de probabilidades de estado

En nuestro caso tendríamos que :

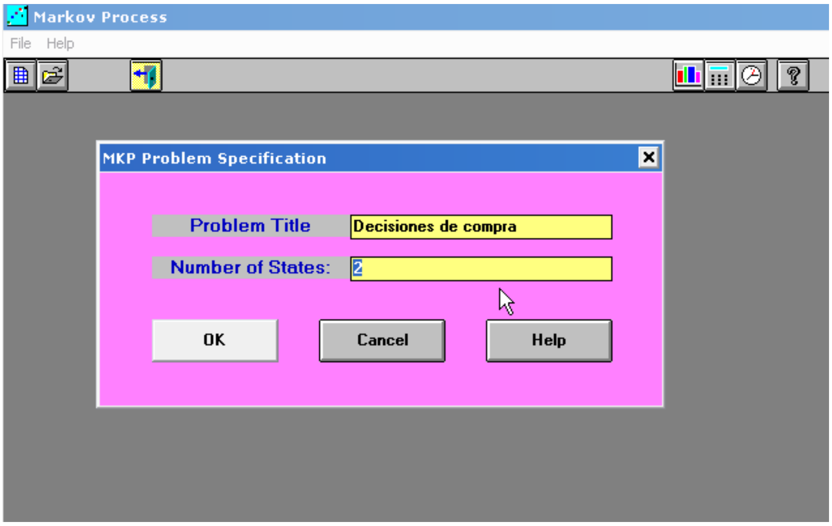
$$\bar{P}_{(1)} = \bar{P}_{(0)} \text{ x p}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades a que se tiende después de un numero grande se transiciones se las denomina probabilidad de estado estable (steady state)

RESOLUCION CON EL WIN QSB



La opción Nuevo Problema (New Problem) genera una plantilla llamada Especificaciones del problema PMK (MKP Problem Specification) en la cual, se introducirán las características de nuestro problema:

Para comenzar a armar un problema de este tipo es necesario ingresar los campos:

* Titulo del problema (Problem Title)

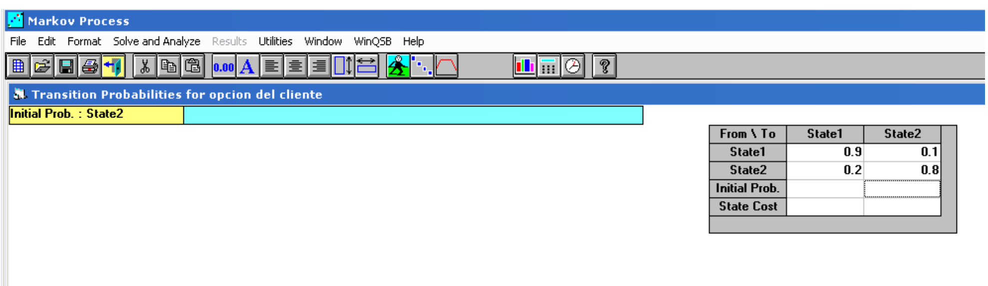
* Número de estados (Number of States)

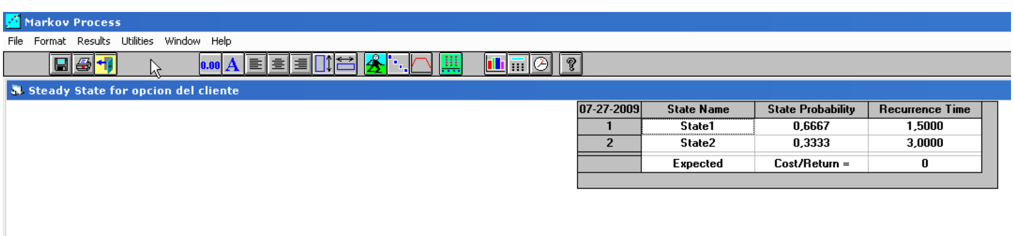
La plantilla vacía representa una matriz con las relaciones entre los estados (State), sus probabilidades iniciales (Initial Prob.) y el costo de cada uno de ellos (State Cost).

Veamos un ejemplo:

En el menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) tenemos las opciones de Resolver los estados completos (Solve Steady State) o mostrar el Proceso de Markov por pasos (Markov Process Step).

La primera opción da como resultado la siguiente tabla:

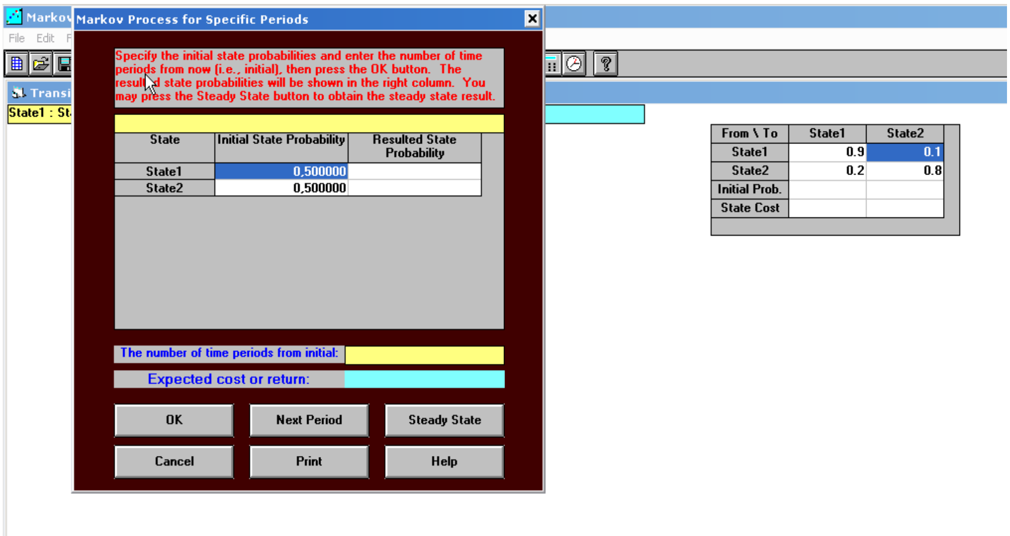




La matriz final indica las probabilidades de estado estable, lo cual significa que en el largo plazo el sistema estará el 66.6% del tiempo en el estado uno,33.3% estará en el estado dos.

14.3 RESOLVIENDO EL EJERCICIO PASO A PASO

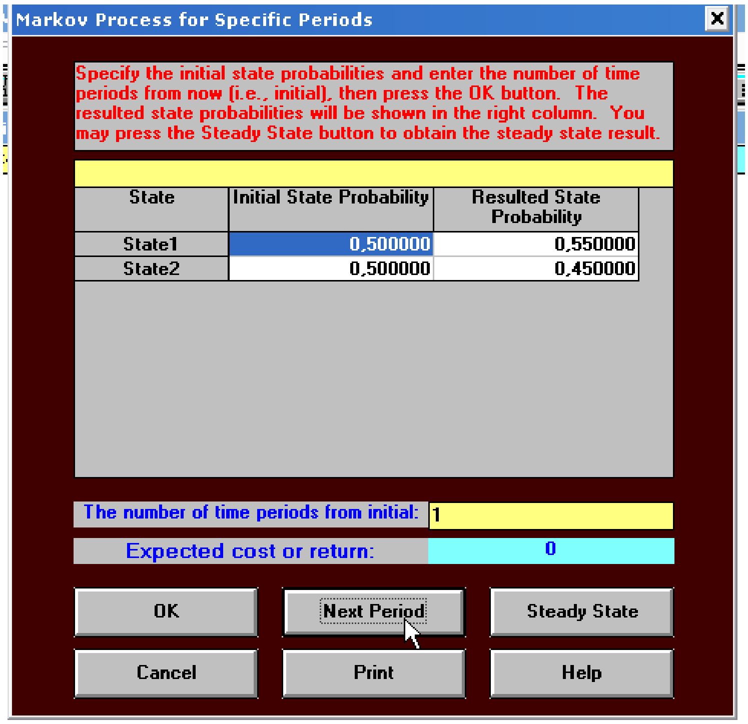
Regresando a la matriz inicial y tomando la segunda opción del menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) tenemos una ventana que nos permite controlar las iteraciones del proceso:

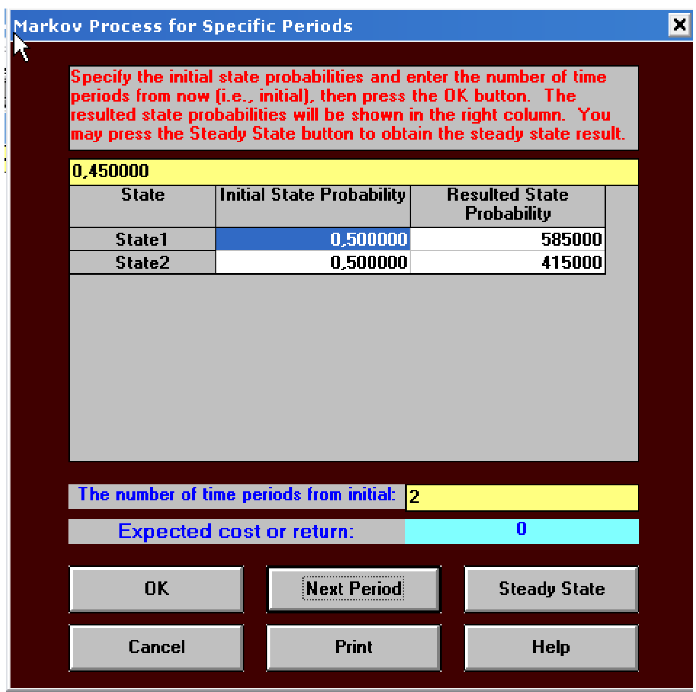


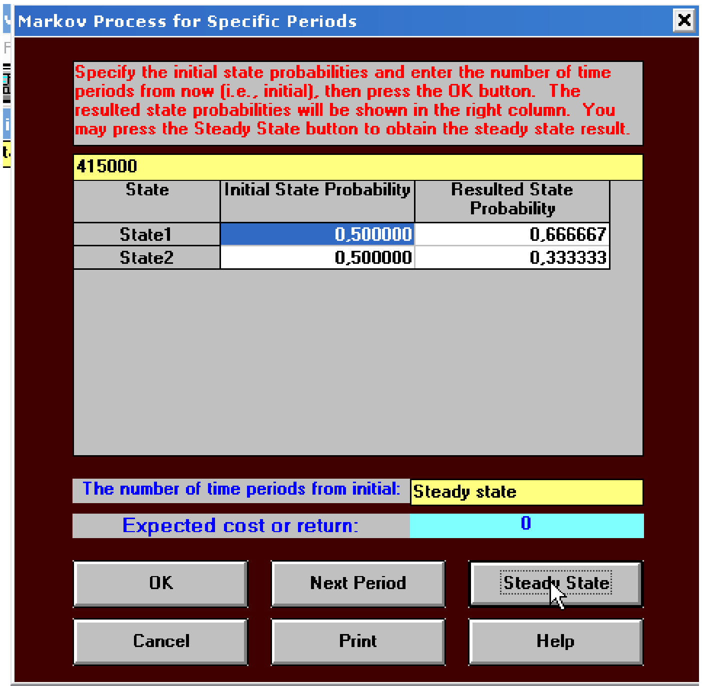
Podemos observar el Número de periodos procesados (The Number of Time Periods from Initial). Pulsemos en el botón NEXT PERIOD y luego en el botón OK:

Para el periodo dos (recuerde pulsar en NEXT PERIOD seguido del botón OK):

En la columna Probabilidad del estado resultante (Resulted State Probability) se muestran las probabilidades para los periodos. Pulsando es el botón STEADY STATE alcanzamos la matriz estable:


Markov Process for Specific Periods
Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.
State
Initial State Probability
Resulted State Probability
State1
0,500000
0,550000
State2
0,500000
0,450000
The number of time periods from initial:
1
Expected cost or return:
0
OK
Next Period
Steady State
Cancel
Print
Help


Markov Process for Specific Periods
Specify the initial state probabilities and enter the number of time periods from now (i.e., initial), then press the OK button. The resulted state probabilities will be shown in the right column. You may press the Steady State button to obtain the steady state result.
0,450000
State
Initial State Probability
Resulted State Probability
State1
0,500000
585000
State2
0,500000
415000
The number of time periods from initial:
2
Expected cost or return:
0
OK
Next Period
Steady State
Cancel
Print
Help



Para ver un Análisis paramétrico en el tiempo de los costos y las probabilidades de los estados seleccionamos la opción

La nueva ventana contiene:

* Retorno/Costo total esperado (Total Expected Return/Cost)

* Probabilidad de cada estado (Probability of State State#)

* Costo esperado de cada estado (Expected Cost of State State#)

Pulsemos el botón OK para mostrar el Retorno/Costo total esperado (Total Expected Return/Cost) para 10 periodos (1 por periodo – Step = 1).

Se puede observar como el costo comienza a estabilizarse para los últimos periodos

Aplicación.

Ingresemos un sistema representado por 4 estados:

La plantilla vacía representa una matriz con las relaciones entre los estados (State), sus probabilidades iníciales (Initial Prob.) y el costo de cada uno de ellos (State Cost).

En el menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) tenemos las opciones de Resolver los estados completos (Solve Steady State) o mostrar el Proceso de Markov por pasos (Markov Process Step).

La primera opción da como resultado la siguiente tabla:

La matriz final indica las probabilidades de estado estable, lo cual significa que en el largo plazo el sistema estará el 26% del tiempo en el estado uno, 29% estará en el estado dos, 21% estará en estado tres y 23% en estado cuatro, lo cual hace que el costo medio en que incurre el proceso es de 1387,3530.

RESOLVIENDO EL EJERCICIO PASO A PASO

Regresando a la matriz inicial y tomando la segunda opción del menú Resolver y analizar (Solve and Analyze) tenemos una ventana que nos permite controlar las iteraciones del proceso:

Podemos observar el Número de periodos procesados (The Number of Time Periods from Initial). Pulsemos en el botón NEXT PERIOD y luego en el botón OK:

Para el periodo dos (recuerde pulsar en NEXT PERIOD seguido del botón OK):

En la columna Probabilidad del estado resultante (Resulted State Probability) se muestran las probabilidades para los periodos. Pulsando es el botón STEADY STATE alcanzamos la matriz estable:

Para ver un Análisis paramétrico en el tiempo de los costos y las probabilidades de los estados seleccionamos la opción

La nueva ventana contiene:

* Retorno/Costo total esperado (Total Expected Return/Cost)

* Probabilidad de cada estado (Probability of State State#)

* Costo esperado de cada estado (Expected Cost of State State#)

Pulsemos el botón OK para mostrar el Retorno/Costo total esperado (Total Expected Return/Cost) para 10 periodos (1 por periodo – Step = 1).

Se puede observar como el costo comienza a estabilizarse para los últimos periodos (recuerde que el costo final es de 1987,3530).

Aplicación

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4 y la de tener que ir a A es 0,2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

SOLUCIÓN:

La matriz de transición P es la siguiente para el orden A,B,C

$$\begin{matrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{matrix}$$

El punto a) consiste en averiguar el término $P4_{33}$, es decir el término que ocupa la fila 3 y la columna 3 de la matriz P4. lo cual se obtiene con la fila 3 y la columna 3 de P2, cuyos valores son:

$$\begin{matrix} & & 0.48 \\ & & 0.48 \\ 0.18 & 0.30 & 0.52 \end{matrix}$$

$P2$, por tanto el término buscado es:

0,18.0,48+0,30.0,48+0,52.0,52= **0,5008**

Aplicación : En una comunidad hay 3 supermercados (S1, S2, S3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, ¼ de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10.000 personas. Cada mes es S1 retiene el 90% de sus clientes y pierde el 10% que se va al S2. Se averiguó que el S2 solo retiene el 5% y pierde el 85% que va a S1 y el resto se va a S3, el S3 retiene solo el 40%, pierde el 50% que va al S1 y el 10% va al S2.

a) Establecer la matriz de transición

b) ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?

a) La matriz de transición para el orden S1, S2, S3 es:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}85 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

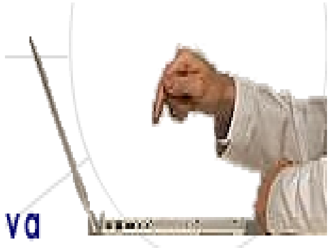
b) Para el mes de noviembre (han transcurrido 2 meses desde 1 de septiembre), la proporción de clientes es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}895 & 0{,}095 & 0{,}01 \\ 0{,}8575 & 0{,}0975 & 0{,}045 \\ 0{,}735 & 0{,}095 & 0{,}17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8158 & 0{,}0958 & 0{,}0883 \end{pmatrix}$$

La proporción es del 81,58% para S1, 9,58% para S2 y 8,83% para S3

Capitulo 18: ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS

En este capitulo veremos una introducción a los métodos de análisis de Proyectos , en especial a los de planeamiento y programación por las técnicas conocidas como Camino Critico y PERT. El texto ha sido tomado de la obra “ *Administración de la Producción y las Operaciones” de Carro,R y Gonzalez Gomez,D.”*



En general, los proyectos, relacionan actividades que deben ser controladas en cuanto a sus fechas de inicio y a sus duraciones. En este capitulo nos proponemos abordar algunos métodos generales de realizar la programación y el control para este tipo particular de procesos.

Decimos que la *gestión de proyectos* es la planificación, dirección y control de recursos para cumplir con las restricciones que nos impone el proyecto.

Aunque los proyectos pueden repetirse hay que pensar que cada proyecto tiene un resultado único. Cuando las tareas se terminan, también se termina el proyecto y el equipo de trabajo finaliza sus actividades. En los otros tipos de proceso: lineales e intermitentes se continuaba el ciclo de producción. Aquí el equipo de trabajo puede, en el mejor de los casos, dedicarse a otro proyecto, integrarse a uno nuevo o volver a sus tareas de rutina.
En los proyectos tenemos personal que puede provenir de diferentes actividades y tener diferentes habilidades. Probablemente, parte de este personal no estará asociado a todo el proyecto. Esto crea particularidades muy destacadas en este tipo de producción, no solo en la coordinación y control, sino en lo referente a la gestión del personal.

En general los administradores deben coordinar y mantener el proyecto dentro de los presupuestos y previsiones. Deben evitar demoras y continuamente reasignar tareas y relocalizar los recursos, haciendo que a veces sea necesario el cambio de fechas de terminación.

Para estas tareas se dispone de modelos de planeamiento de redes, descomponiéndose el proyecto total en una lista de tareas o actividades. Las técnicas graficas de Gantt que podrían aplicarse por su sencillez, y de hecho se hace, a este tipo de procesos no son aplicables ante la complejidad de algunos proyectos, el grado de detalle requerido y los plazos que en general son más largos.
Los proyectos complejos basan su dificultad en el número de operaciones o actividades que tengan los mismos y básicamente la aplicación de los métodos como CPM y PERT buscan identificar las actividades, graficar las relaciones de red, calcular el tiempo del proyecto y servir de control de avance.

La técnica de evaluación y revison de programas PERT (Program Evaluation and Review Technique) fue realizada al final de los años 50 para el programa Polaris y el CPM o método de la ruta critica (Critical Path Method) fue desarrollado en 1957 por las

compañías Remington Rand y Du Pont. Ambas técnicas aplican los diagramas de red para mostrar el flujo consecutivo y las interrelaciones entre actividades.
En el pasado existieron algunas diferencias metodológicas, básicamente en el tratamiento de los tiempos y los costos, pero en la actualidad cuando se habla de ellas se los entiende como diagramas de red genéricos.

La descripción de las tareas o actividades debe ser clara y aquí interviene la capacidad del grupo que lleva adelante el planeamiento, ya que un detalle muy amplio de las mismas perdería el detalle necesario para el análisis.
En esta descripción debemos conocer también las relaciones entre las actividades a fin de conformar lo que se llama un ***diagrama de precedencia*** que muestra la secuencia de realización del proyecto; o sea nos indica cuál debe ser la actividad a realizarse antes que otras posteriores.

LOS DIAGRAMA DE REDES

Los diagramas de redes ayudan a la toma de decisiones fundamentalmente al contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto?

- ¿Cuáles son las fechas programadas de inicio y finalización de cada actividad?

- ¿Cuáles son las actividades criticas que deben realizarse dentro de lo programado, sin demora, para no salirse del programa

- ¿Cuánto tiempo pueden demorarse las actividades no criticas antes de que éstas ocasionen demoras en el proyecto total?

Para aplicar las técnicas PERT-CPM, los proyectos deben tener las siguientes características:

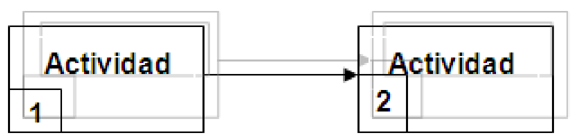
- Las tareas o trabajos deben estar perfectamente definidos.
- Las tareas son independientes y se llevan por separado de acuerdo a una secuencia dada.
- Las tareas o trabajos siguen un orden de precedencia.

Es de destacar que existen dos convenciones para estos diagramas. La que llamamos ***actividad en el arco*** (**AOA**) que representa las actividades sobre los arcos del grafico o la llamada ***actividades en el nodo*** **(AON)** en la cual se representan las actividades en los nodos y los arcos indican solamente las relaciones entre ellas.
Inicialmente, se descompone el proyecto total en una lista de tareas o actividades. Estas corresponden a la menor unidad de producción de interés que pueda ser programada. En función de la necesidad de detalle, una serie de actividades pueden englobarse en una sola o descomponerse en actividades más sencillas.

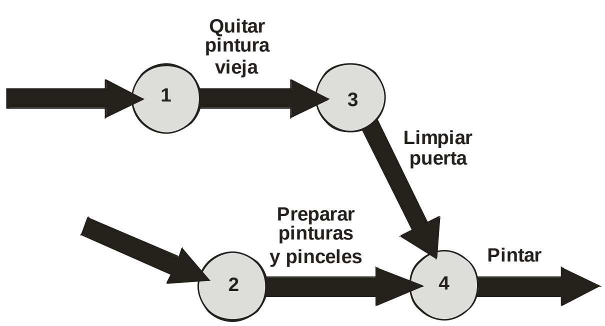
Los nodos de la red corresponden a estados de ejecución del proyecto y se denominan *acontecimientos*, *eventos*, *sucesos* o *etapas*.
El nodo o evento supone un punto donde culminan las actividades que llegan a el e inician las que salen de el
El diagrama de redes consiste en nodos y arcos que presentan en forma grafica las relaciones establecidas por el diagrama de precedencia.

La figura constituye la representación gráfica elemental de cualquier proyecto que quiera realizarse basado en la técnica del análisis de redes. Existen dos variantes, la que asocia las actividades a los nodos y aquella que las asocia a los arcos.

De esta forma, cada actividad corresponderá a un arco en la red, arco que tendrá su origen y destino en dos nodos distintos. Los nodos corresponden a los estados de ejecución del proyecto y suelen llamarse normalmente acontecimientos.



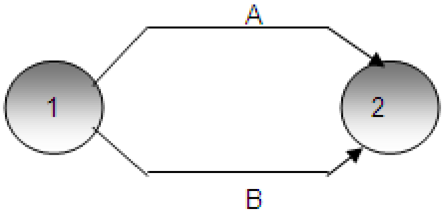
Actividades en los nodos



La figura muestra la descomposición de la totalidad del proyecto que se ha emprendido en una lista de tareas que corresponde a la unidad de producción de interés más pequeña que puede programarse. En función de la necesidad de detalle, una serie de tareas se pueden englobar en una o descomponerse en otras sencillas. En la figura, el nodo 4 corresponde al estado "después de limpiar la puerta, después de preparar pintura y pinceles y antes de pintar"

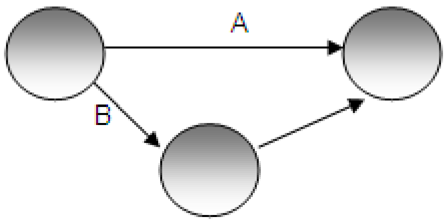
El sistema actividades en el arco –*AOA*- requiere a veces la adición de actividades ficticias (*dummy*) para aclarar la relación de precedencia entre algunas actividades. Las tareas *dummy* tienen tiempo de duración igual a cero y no requieren recursos. Se representan en líneas punteadas. Esta solución se usa también cuando dos actividades tienen iguales nodos de comienzo y finalización.

Ejp:



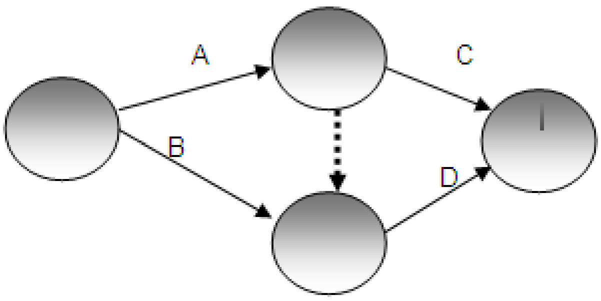
Esto no es posible ya que la
la actividad 1-2 debe ser unica

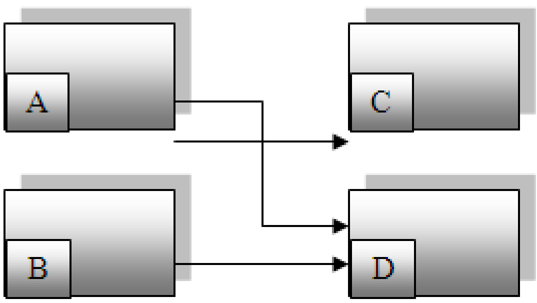
Para esto incorporamos una actividad ficticia



Supongamos la situación:

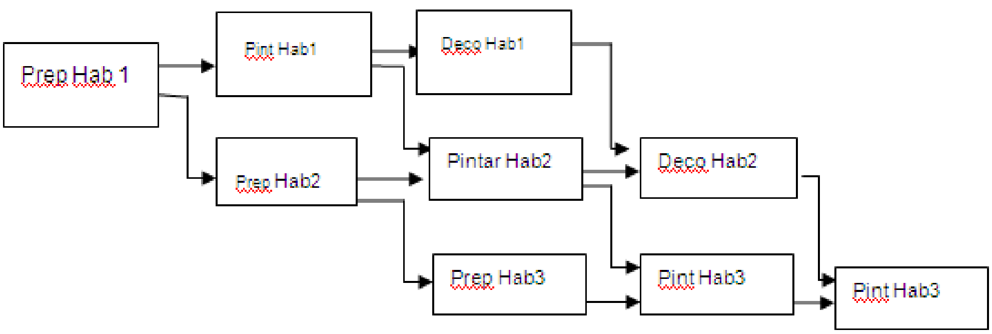
- Las actividades A y B pueden hacerse simultáneamente
- Cuando se termina A se puede iniciar C
- Cuando se termina A y B se puede iniciar D

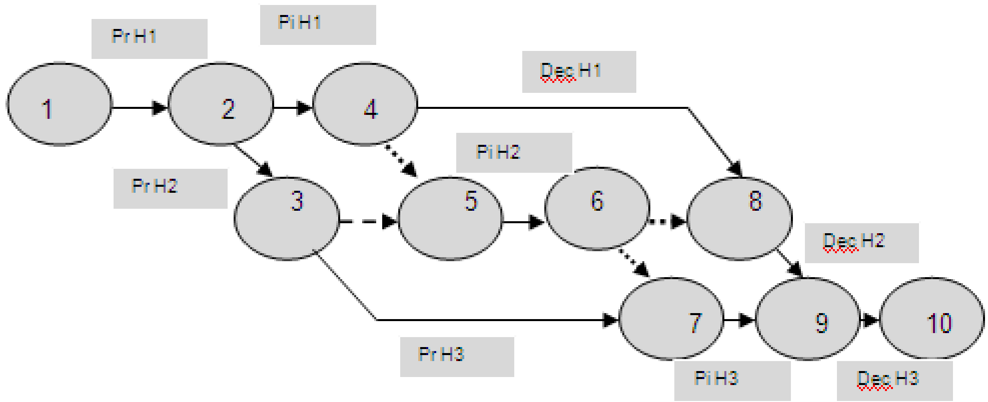




La ventaja del formato Actividades en el nodo (AON) es que se evitan las actividades ficticias.

Tomemos otro ejemplo:
Tenemos actividades que se repiten en un proyecto: debemos pintar tres habitaciones y cada habitación requiere una secuencia determinada: Preparar la habitación, pintar el techo y paredes y por fin decorar.



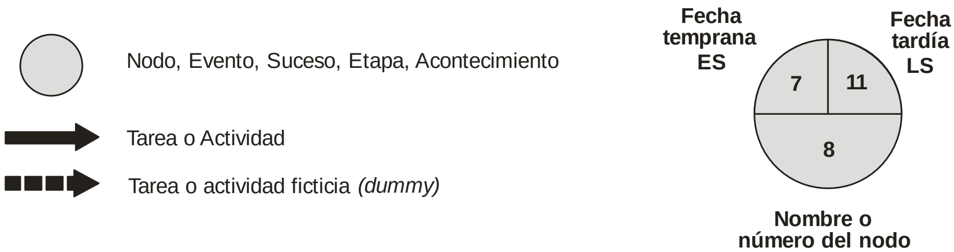


Tanto PERT como CPM se centran en buscar una ruta que consume el mayor tiempo, o sea que las dos técnicas mencionadas se focalizan en los tiempos.
Una vez representado el diagrama de red de un proyecto, es fácil calcular las fechas más significativas para cada una de las actividades, como la más temprana y la más tardía del inicio al fin.
Si se parte del supuesto de que el proyecto se inicia en la fecha cero (un valor relativo que puede indicar cualquier otra fecha cronológica de inicio), entonces existen distintos tiempos de comienzo y finalización para cada actividad y para todo el proyecto. Esto es parte de los cálculos de programación que veremos a continuación utilizando la siguiente simbología aceptada universalmente (AOA).

Cuando los proyectos tienen historia, o sea que anteriormente se han realizado otros proyectos similares, el director del proyecto dispone de información precisa y tiene un alto grado de certeza en los tiempos de las tareas elementales. En cambio si el proyecto es nuevo, no se dispondrá de comparaciones o experiencias y se deberá enfrentar al caso de riesgo o incertidumbre.
Para la resolución de la red se utiliza la siguiente notación:

- ***Número o nombre del nodo***: identificación particular del nodo (*8* en el ejemplo)
- ***Duración de la tarea***: Dij
- ***Tiempo más temprano de comienzo*** (*ES = Earliest Start time*): es el tiempo más temprano para comenzar la actividad. Cuando hay varias actividades precedentes es el mayor de los tiempos de finalización de éstas.
- ***Tiempo más temprano de finalización*** (*EF = Earliest Finish time*): es el tiempo más temprano de finalización. Es el tiempo mas temprano de inicio más la duración de la tarea (EF = ES + Dij)
- **Tiempo máximo de finalización** (*LF = Latest Finish time*): duración total del proyecto sin que éste se retrase. Es el último tiempo de comienzo de una actividad precedente ES. Si hay varias actividades es el menor de esos tiempos
- ***Máximo tiempo de inicio*** (*LS Latest Start time*): es el tiempo máximo de inicio (LF – Dij)
- ***Ruta*:** cualquier secuencia de actividades que pone en contacto los eventos inicial y final de una red.

- ***Ruta crítica*****:** trayectoria con el tiempo más largo para recorrer la red (por lo tanto define la fecha de terminación del proyecto). Si se demoran las actividades que están en esta ruta, se demorará la totalidad del proyecto.



A pesar de que en la práctica se utilizan siempre programas de computación para el análisis de redes, es ilustrativo explicar tanto el procedimiento como su aplicación.
Para centrar la explicación del modelo, se verá un ejemplo sencillo donde utilizaremos la metodología AOA. Supongamos un proyecto simple de la etapa de diseño para la construcción de un proyecto informático. La siguiente tabla muestra un listado de actividades o tareas con sus dependencias y duraciones que generalmente provienen de los sectores técnicos.

Tabla

Tarea	Descripción	Dependencia	Duración
A	Diseño General	-	3
B	Diseño *hardware*	-	4
C	Diseño *software*	A	2
D	Difusión en el mercado	A	5
E	Pruebas piloto	B, C	2

Los pasos de la técnica consisten en:

1. Identificar las actividades.
2. Plantear la secuencia de las actividades (*diagrama de precedencia*)
3. Construcción de la red.
4. Determinación de la ruta critica.

El método consiste en efectuar dos pasadas sobre la red, la primera desde el nodo inicio hacia el nodo final y la segunda hacia atrás, dando valores a los nodos a medida que se van recorriendo. Es importante no olvidar que cada nodo corresponde a una etapa o acontecimiento del proyecto y que le corresponden también dos fechas: la más temprana y la límite.
La fecha más temprana de un nodo es la menor en la que puede alcanzarse el estado del nodo, mientras que la fecha límite es la más tardía en la que puede ocurrir el acontecimiento si se desea mantener la fecha final del proyecto. También existe una ***holgura*** en los acontecimientos (nodos), que indica si se llega a ellos con tiempo sobrante, con el tiempo justo o con retraso, según la holgura sea positiva, cero o

negativa, respectivamente. La holgura de los nodos se calcula como la diferencia entre el tiempo límite y el tiempo más temprano.
En las dos pasadas sobre la red, se calcularán los tiempos más tempranos y los tiempos límites que aparecerán en los nodos a medida que se proceda a las pasadas. El método de cálculo es el siguiente:

Primera pasada (cálculo de fechas tempranas):

1. Asignar al nodo inicial del proyecto el valor 0.

2. Con todas aquellas actividades (i,j) que tienen su origen (i) en el nodo que se acaba de calcular, calcular el valor: ***ESj + Dij***
Si el nodo destino de la actividad (j) no tiene aún valor, asignar el valor calculado.
Si el nodo destino (j) ya tiene un valor hallado, pero éste es menor que el valor calculado, asignar este nuevo valor.
Si el nodo destino (j) tiene un valor mayor o igual que el calculado, no hacer nada con esta actividad.
La regla general para esta etapa es: ***ESi = max (ESi + Dij)***
Es decir que se utilizará siempre el mayor valor encontrado por los distintos caminos que arriban al nodo.

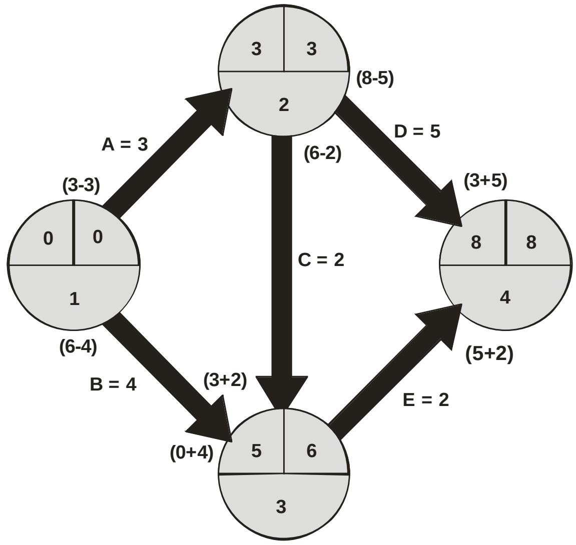
3. Cuando todos los nodos estén ya calculados con sus fechas tempranas de comienzo de cada actividad, se termina la primera pasada. El valor alcanzado de este último nodo indica la fecha más temprana de terminación de todo el proyecto tomando en cuenta la precedencia como los tiempos de todas las actividades de la red.

Segunda pasada (cálculo de fechas tardías):

1. Asignar al nodo final del proyecto el mínimo valor de finalización posible del proyecto total.

2. Con todas aquellas actividades (i,j) cuyo nodo destino (i) se está valorizando, calcular el valor: ***Valor destino - Duración de la actividad***
Si el nodo origen de la actividad no tiene aún valor, asignar el valor calculado.
Si el nodo origen ya tiene un valor hallado, pero éste es mayor que el valor calculado, asignar este nuevo valor.
Si el nodo origen tiene un valor menor o igual que el calculado, no hacer nada con esta actividad.
La regla general para esta etapa es: ***LSi = min (LSj - Dij)***, donde la minimización se presenta para todos los eventos j que sean sucesores inmediatos del evento i.
De esta manera calculamos los tiempos más lejanos de iniciación para cada actividad. Al llegar a cada nodo se utilizará el menor valor encontrado entre los distintos caminos.

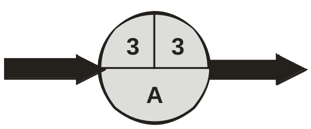
3. Cuando todos los nodos estén ya calculados se ha completado la segunda pasada.



La figura muestra el proceso de cálculo de las fechas tempranas y tardías del proyecto. Para ello se utilizan el método de las dos pasadas sobre la red, la primera desde el nodo inicio hacia el nodo final y la segunda al revés, dando valores a los nodos a medida que se van recorriendo.

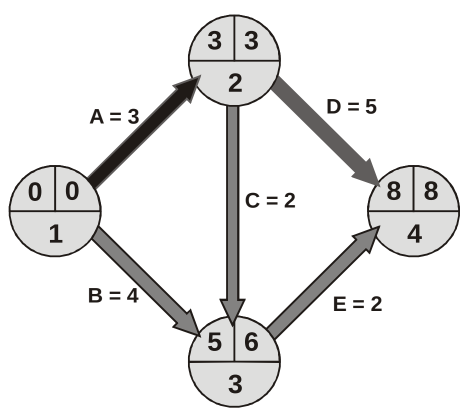
Una vez realizados todos los procesos para calcular el tiempo más temprano y el tiempo límite del proyecto, así como los tiempos correspondientes a todas las actividades del mismo, estamos en condiciones de determinar el ***camino crítico***.
Definiremos como ***nodo crítico*** a aquellos nodos que tienen iguales ambas fechas, tanto la temprana como la tardía; mientras que las ***tareas críticas*** son aquellas que tienen **margen total nulo**.

Nodo crítico



Tarea crítica

Esta figura, que cierra todo el proceso de cálculos, muestra la red con los dos resultados de los nodos (la del tiempo más temprano y la correspondiente a todas las actividades del proyecto y su forma de cálculo). Las actividades del camino crítico son aquellas de mínima holgura total.



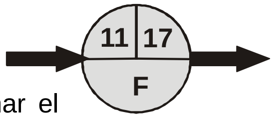
RUTAS DE LA RED:
1 - 2 - 4 =8 *
1 - 2 - 3 - 4 =7
1 - 3 - 4 =6

* Ruta más larga, por lo tanto es la *RUTA CRITICA*

La ruta crítica conecta aquellos nodos críticos en los que

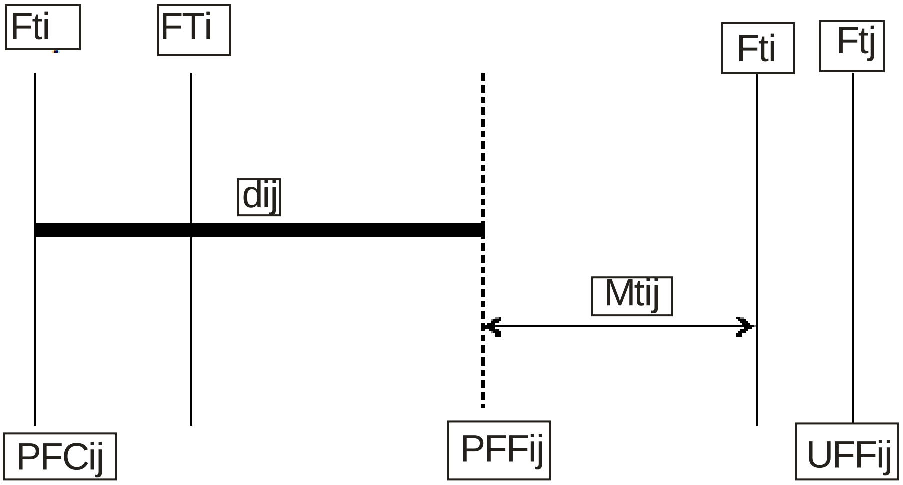
ESi = LSi. Estos eventos resultan críticos puesto que los tiempos más próximos en que pueden iniciarse son iguales.
Como vimos los eventos 1, 2 y 4 son críticos porque ES = LS, por lo tanto la ruta crítica es 1 - 2 - 4.
En un proyecto normal, con unos pocos cientos de actividades, sólo entre el 5 y el 10% de ellas forman parte de la ruta crítica.
Además, en el análisis de redes se puede calcular el ***margen del evento***. Las actividades que no se encuentran en la ruta crítica pueden tener algunas demoras, lo que se conoce como ***margen,*** sin afectar el tiempo de terminación del proyecto. La ***holgura***, como vimos anteriormente, es la cantidad máxima de deslizamiento que se permite en cada camino. El margen de cualquier camino se obtiene restando la longitud de esa ruta a la longitud del camino crítico.

Holgura



Margen = S = LS – ES o también ***S = LF – EF***

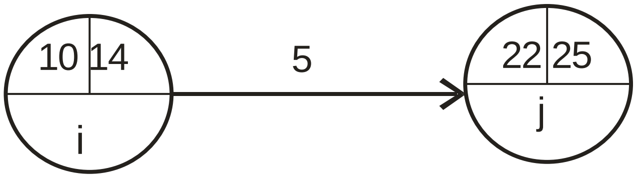
En otras palabras, es el tiempo que se puede demorar una actividad sin afectar el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto. ***Los eventos de la ruta crítica tienen holgura igual a cero.***
El Margen Total de una actividad representa el tiempo máximo que se puede retrasar una actividad sin demorar el proyecto. Esto es, si una actividad se extiende a su Margen Total, la actividad se convierte en crítica y el proyecto quedará, comprometido..



Margen total de una actividad.

Supongamos una actividad i-j, cuyos datos en lo que se refiere a duración y Fechas Tempranas y Tardías de los acontecimientos origen y fin de la misma son los siguientes:
Duración: 5 unidades de tiempo
Fecha Temprana del nodo i: 10
Fecha Tardía del nodo i: 14
Fecha Temprana del nodo j: 22
Fecha Tardía del nodo j es 25

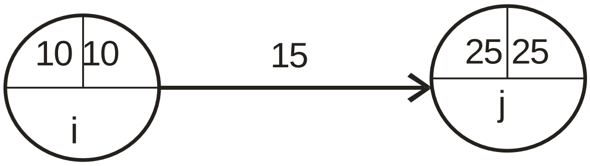
Esta tarea se grafica en la Figura



El Margen Total de la actividad es

Mti-j = 25 - 10 = 15

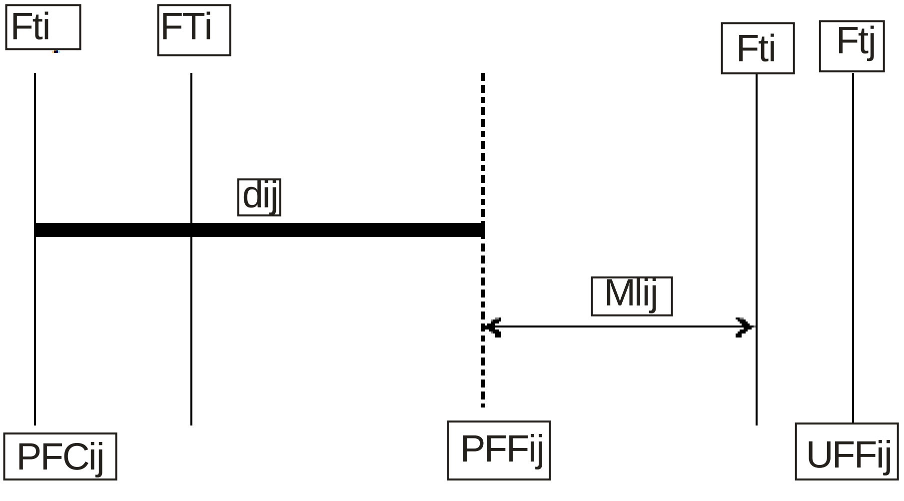
Esto significa que si la tarea se demora en 20 unidades de tiempo (o sea que la duración total fuera de 25 unidades en lugar de las 5 originales), el nodo origen tendría que tener su Fecha Temprana (en el ejemplo,10) y el nodo fin en su Fecha Tardía (25), tal como se ve en la figura que sigue. Tomar el Margen Total para programar una actividad significaría hacer crítica la actividad y quedarían comprometidas las tareas de una rama que concurre acontecimiento i y las tareas de una rama que emerge del acontecimiento j



Otro Margen a definir para las actividades es el "Margen Libre". Este margen es igual a la Fecha Temprana del nodo j menos la Fecha Temprana de i y menos la duración de la actividad ij:

MLi-j = Ftj - Fti - di-j

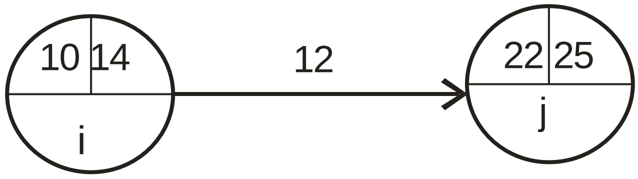
Gráficamente, el Margen Libre se observa en la Figura:



Esto es útil cuando se quiere que comience lo antes posible e interesa para no modificar las fechas temprana y tardía del nodo j. Tomando el mismo ejemplo de la Figura , el Margen Libre es:

MLi-j = 22 - 10 -5 = 7

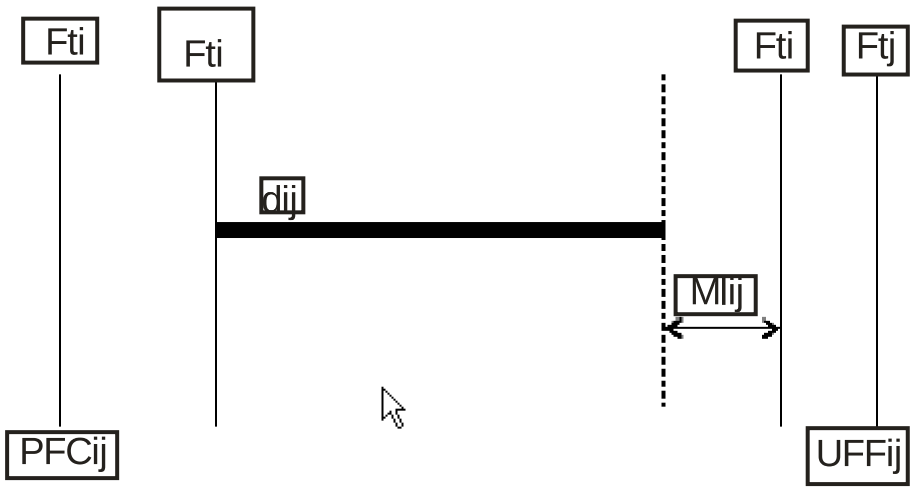
Esto significa que si la tarea se demora en 7 unidades de tiempo (la duración total de 12 unidades en lugar de las 5 originales), y programándola para que comience en su Fecha Temprana (en el ejemplo, 10), las fechas temprana y tardía del suceso j no se modificarían, como se indica en la Figura que sigue. Tomar el Margen Libre para programar una actividad significa hacer crítico su nodo origen, es decir comprometer al proyecto hacia atrás, y no modificar en absoluto el proyecto hacia adelante.



Por último tenemos el "Margen Independiente" de una actividad. Este margen es la diferencia entre la Fecha Temprana del nodo j y la suma de la Fecha Tardía de j más la duración de la tarea:

MIi-j = Ftj - (FTi + dij)

Es decir,
MIi-j = Ftj - FTi - di j

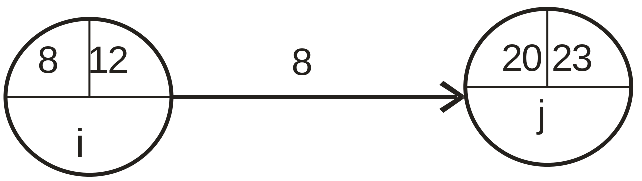


El Margen Independiente representa el Margen Total disponible para programar la actividad sin que se modifiquen los márgenes de los nodos origen y fin de la actividad. Es decir, si se toma todo el margen, el proyecto no se compromete ni hacia atrás del nodo i ni hacia adelante del nodo j.
Tomando el mismo ejemplo el Margen Independiente es:

MIi-j = 22 – 14 - 5 = 3

Esto significa que si la tarea se demora en 3 unidades de tiempo (que la
duración total fuera de 8 unidades en lugar de las 5), aunque se programe la actividad en su Fecha Tardía (es decir el 14) el margen del suceso i seguiría siendo de 4 y el de j de 3, como se indica en la Figura siguiente.
Si el Margen Independiente es negativo, indica que no es posible programar al actividad para que comience en la Fecha Tardía de “i” y que no se modifique la Fecha Temprana de “j”.
Supongamos que en el ejemplo anterior, la fecha de la tarea ij fuera de 10 unidades. En ese caso, el Margen Independiente sería:

MIij = 22 - 14 -10 = - 2



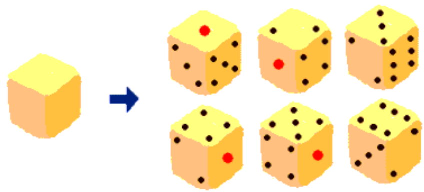
Para mantener los márgenes de los nodos i y j sin modificar habría que reducir la duración de la actividad de 10 a 8 unidades.

El camino critico esta compuesto por nodos críticos(Fecha tardia = Fecha temprana) y por actividades criticas que deben tener Margen Total igual cero.
Hay que tener en cuenta que no siempre dos nodos críticos definen la actividad critica. Se debe verificar además que el MT sea cero.

DIAGRAMA CALENDARIO

El diagrama calendario consiste en representar la red lógica dentro de un calendario que va a contemplar los días hábiles. El camino crítico aparece en el centro como una sucesión de tareas donde no hay margen.
Esta representación, donde los vectores que representan a las tareas son proporcionales al tiempo de duración de las mismas, es ideal para la función de controlar la ejecución del proyecto, ya que una línea vertical trazada en un momento cualquiera, indica cuáles tareas están en ejecución y qué grado de avance tiene cada una, cuales han sido realizadas, y cuales serán emprendidas en el futuro.
Puede decirse que el camino crítico se transforma en un Gantt logrando entonces todas las ventajas de este diagrama para realizar el control.

LA SITUACIÓN PROBABILISTICA



Hasta ahora se ha partido del supuesto que la duración de las tareas en el proyecto era constante y se conocía con exactitud. Por ejemplo, la actividad “diseño general” para la ilustración que se ha usado tenía una duración de 3 días. Normalmente, los datos en la práctica no son tan seguros. La duración de una actividad puede variar y el “diseño general” podría durar 2 o 5 días.

Distintos métodos determinísticos como el *Diagrama de Grantt* o el *Diagrama de Necesidades*, sustituyen esta serie de valores posibles por lo que se denomina el <u>*valor esperado*</u>, es decir, el valor promedio.
Los métodos probabilistas, que se presentan a continuación, se ajustan mucho más a la realidad, en la que *a priori* puede suponerse que la duración admite una gama de valores posibles para cada actividad, valores a cada uno de los cuales se les asignaría una cierta probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo, podría estimarse que la actividad “diseño general”, mencionada anteriormente, tiene una duración prevista entre 1 y 6 días, con una distribución probabilística como se presenta mas adelante en la figura.

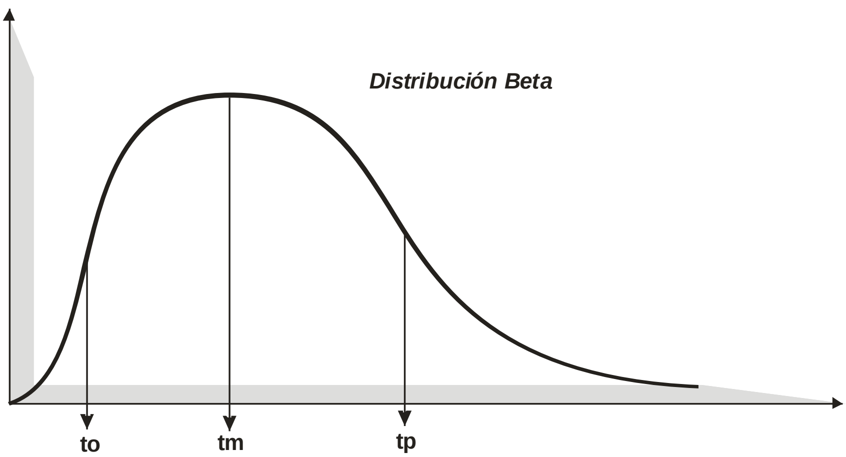
Un análisis probabilista de las actividades de la red permitirá al directivo elaborar datos importantes para la toma de decisiones. De esta forma podrá plantear y responder cuestiones tales como:

✓ ¿qué probabilidad existe de que una actividad se demore más allá del 15 de mayo?
✓ ¿qué probabilidad existe de que el proyecto no esté terminado el 16 de junio?
✓ ¿qué probabilidad existe de que una actividad sea crítica y afecte a la duración del proyecto?

Para analizar este tipo de cuestiones, es conveniente disponer de una información detallada a nivel de la distribución de las probabilidades y de la duración de cada una de las actividades del proyecto. En la práctica, en un proyecto con cientos o miles de actividades es impensable que se disponga del tiempo o de los conocimientos suficientes para llegar a la distribución de probabilidad detallada para todas las actividades. En vez de usar distribuciones empíricas, evaluadas punto por punto por los responsables del proyecto, se utilizan aproximaciones a las distribuciones probabilísticas teóricas, a las que se aproximan las reales (subjetivas) mediante la elección de determinados parámetros.
En el análisis de redes, se ha tendido a usar la denominada ***distribución Beta***, de la que se especifican los tiempos optimista, pesimista y más probable.

La distribución beta, β, se utiliza como modelo probabilístico en un gran número de problemas económicos: fidelidad a una marca, análisis de inversiones , valoración, duración de un trabajo complejo, etc..., debido, entre otras cosas, a su tremenda maleabilidad para representar situaciones harto diferentes. Así la distribución uniforme o rectangular es un caso particular de distribución beta ($p = q = 1$), también se obtienen las distribuciones triangulares ($p = 1$ y $q = 2$ ó $p = 2$ y $q = 1$), la distribución parabólica con máximo en el punto (0,5 ; 1,5) se obtiene para $p = q = 2$ y en el caso de que $p = q = \frac{5}{6}$ resulta una distribución que tiene una densidad tipo bañera.

Se entiende por ***tiempo optimista*** **(to)** el menor plazo en el que puede completarse la actividad si todo sale de acuerdo a lo previsto. En teoría, existiría solamente una posibilidad sobre cien de que la actividad se complete antes de este período de tiempo.
El ***tiempo pesimista*** **(tp)** es la duración máxima en la que se estima que puede alcanzarse la actividad bajo condiciones adversas ordinarias. De nuevo, la teoría asume que existe tan sólo una posibilidad entre cien de que esta duración sea superada.



Aplicando estos conceptos a la actividad “diseño general”, en vez de la certeza de ocurrencia de una duración igual a tres días, se especificarán los tres valores, to = 1, tp = 6 y m = 3, que nos servirán para ajustar una distribución Beta como distribución de probabilidad de la duración de la actividad. Para el desarrollo del modelo probabilístico, se usan conocimientos provenientes de la *teoría de la probabilidad y de la estadística*. En particular, se utilizarán cuatro conceptos de estadística:

- El valor esperado de una variable, que sigue una distribución Beta, viene dado por:

$$\text{tiempo esperado para cada actividad} = te = \frac{to\ +\ 4\ tm\ +\ tp}{6}$$

- La varianza de la distribución Beta se calcula como:

$$S^2 = \left(\frac{tp - to}{6} \right)^2 \quad \text{o la desviación estándar: } \sigma = \frac{tp - to}{6}$$

- A partir de un número grande de variables aleatorias (en cualquier caso superior a 30), la suma de los valores que éstas pueden tomar es otra variable aleatoria distribuida según la distribución normal, con valor medio igual a la suma de los valores medios de las variables. Esto puede afirmarse que es completamente cierto incluso cuando las variables individuales no siguen la distribución normal.

- La varianza de la suma de las variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas.

Diremos aquí que algunos autores (Sasieni,1986) plantean que no es posible justificar la utilización de la distribución Beta de forma rigurosa, pero convengamos que esta distribución posee características de ser unimodal, continua y tener un intervalo finito.

ANÁLISIS DE PROBABILIDADES

Como este análisis se plantea en una situación de incertidumbre, seguramente al director del proyecto le interesará conocer cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en un determinado tiempo; así por ejemplo, una de las preguntas típicas a realizarse es "¿cuál es la probabilidad de finalizar el proyecto en menos de 60 días?"
Para ver la distribución de probabilidades del tiempo de finalización se deberá asumir que los tiempos de cada actividad no dependen de los tiempos de otras actividades.
Esto permite calcular la *media* y la *varianza* de la distribución de probabilidades de la duración total del proyecto sumando los tiempos de duración y sus varianzas a lo largo del camino critico. Además, se utiliza el *teorema central del limite* que indica que la suma de variables independientes se aproxima a la distribución normal a medida que el número de variables aumenta.
En el caso del análisis de redes, la media de la distribución normal para el camino critico indicará el tiempo más temprano esperado de finalización del proyecto.

La magnitud de la varianza refleja la incertidumbre involucrada en la actividad. Conforme la varianza crece, la incertidumbre se hace mayor. Un conocimiento de la variación de las actividades en la ruta crítica y, por lo tanto, el total de la varianza asociada con la ruta crítica, facilitan el cálculo de probabilidades para las fechas de terminación del proyecto. La varianza de la ruta crítica se obtiene mediante la suma de las varianzas de las actividades individuales en la ruta o camino crítico.
Entonces para analizar la probabilidad de completar un proyecto en una fecha dada, y utilizando la distribución normal, tendremos que calcular:

$$Z = \frac{(D - Te)}{\sqrt{\sum \sigma^2}}$$

donde: D = fecha del proyecto de la cual queremos conocer su probabilidad de ocurrencia (fecha deseada)

Te = fecha más temprana esperada para la finalización

Los pasos a seguir resultan:

- Se suma la varianza asociada con cada una de las actividades de la ruta crítica[1]
- Se calcula Z (número de desviaciones estándar)
- Con Z se deberá buscar la probabilidad de cumplir con la fecha deseada de terminación del proyecto en la tabla de probabilidad normal[2]

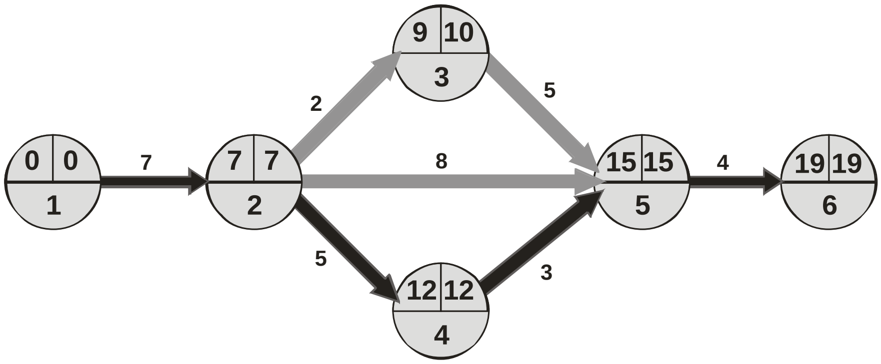
Estos conceptos pueden aplicarse a un ejemplo, en el que se han añadido las estimaciones optimista, pesimista y más probable que figuran en la tabla. El tiempo se encuentra expresado en semanas y a continuación se presenta el diagrama de redes del mismo. Se deberá calcular el tiempo esperado para cada actividad, determinar la ruta crítica y la duración esperada del proyecto, la varianza y la desviación estándar de la ruta crítica, la actividad que tiene el cálculo de tiempo más preciso y la probabilidad de que el proyecto termine en 20 semanas.

Tabla – ejemplo

Actividad	Duración optimista	Duración más probable	Duración pesimista	Media	Varianza
1-2	5	6	13	7	1,78
2-3	2	2	2	2	0
2-4	2	5	8	5	1,00
2-5	6	8	10	8	0,44
3-5	3	5	7	5	0,44
4-5	1	3	5	3	0,44
5-6	2	3	10	4	1,78

[1] Suponemos que en la ruta crítica los tiempos de las actividades son variables aleatorias independientes, entonces la varianza de la ruta crítica se puede calcular como la suma de las varianzas de las actividades de esa ruta.

[2] Si la ruta crítica contiene gran número de actividades independientes, se supone que la distribución del tiempo total de la ruta es normal. Z se mide en la tabla de distribución normal estandarizada.



Una vez hallados los valores esperados y las varianzas de cada una de las actividades, se representa la red utilizando los tiempos esperados, tal como se muestra en la figura anterior. La ruta crítica se señala mediante una secuencia de actividades con margen nulo (S = 0); por lo tanto, el camino crítico es 1 - 2 - 4 - 5 - 6. Además, la actividad 2-5 también es crítica. En otras palabras, existe doble ruta crítica: 1-2-4-5-6 y 1-2-5-6. La duración esperada Te de la ruta crítica es de 19 semanas.

La varianza total de la ruta crítica se obtiene sumando las varianzas de las actividades individuales de la ruta crítica:

$$\sigma^2_{(I)} = 1,78 + 1 + 0,44 + 1,78 = 5,0$$

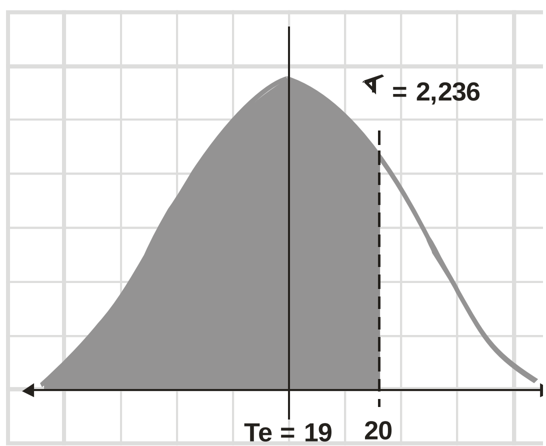
$$\sigma^2_{(II)} = 1,78 + 0,44 + 1,78 = 4,0$$

En este caso, la varianza que se utiliza es la mayor de las dos ($\sigma^2 = 5,0$) y la desviación estándar será la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{5} = 2,236$$

La actividad 2-3 es la que tiene la varianza mínima de todo el proyecto, la misma es cero.

La distribución normal de probabilidades suele proporcionar una aproximación razonable a la distribución de la duración de los proyectos y, por lo tanto, se puede utilizar para determinar las probabilidades para diversos tiempos de terminación de proyectos.



$$Z = \frac{D - Te}{\sigma} = \frac{20 - 18}{2{,}236} = 0{,}894$$

Con referencia a las tablas de probabilidades normales, determinamos que el área sombreada es 0.8133. Por lo tanto, podemos decir que la probabilidad de terminar el proyecto en 20 semanas es 0.8133, o 81.33%.

CONSIDERACIONES DE COSTO-TIEMPO
Aceleración de proyectos

Es frecuente que pueda disminuirse la duración de algunas actividades mediante el aumento de los recursos dedicados a su realización. Se incorpora aquí la posibilidad de realizar actividades de forma más rápida. La realidad indica que por lo general se presentarán conflictos entre los costos y los tiempos. Si se pretende acelerar el tiempo de ejecución del proyecto, se deberá adjudicar o relocalizar recursos que insumirán costos.
La hipótesis más sencilla consiste en suponer que la reducción de la duración de una actividad es proporcional al costo de realizarla, aunque esta hipótesis puede complicarse suponiendo distintos costos de reducción unitarios para distintos valores de ésta. Por ejemplo una, reducción de dos días puede costar 20.000 unidades monetarias por día, pero una reducción adicional, hasta un máximo de 5 días adicionales, puede costar 30.000 unidades monetarias, etc. Además, el adelanto en financiación de un proyecto puede traducirse en beneficios cuantificables en dinero, bien en forma de penalizaciones contractuales ahorradas, o bien en forma de costos de oportunidad, ya que la empresa puede dedicarse a otros proyectos.
En este punto se analiza la relación entre la duración de un proyecto y el costo del mismo. Los costos directos de las actividades son los relacionados con el aceleramiento de las mismas y se agregan al costo directo del proyecto. Estos pueden ser horas extras, más personal, compras o alquileres de equipos etc.
La idea principal se centra en encontrar una duración del proyecto que minimice la suma de los costos indirectos y los directos. A continuación se plantea un procedimiento sistemático para construir el costo con la duración del proyecto. El procedimiento se basa en:

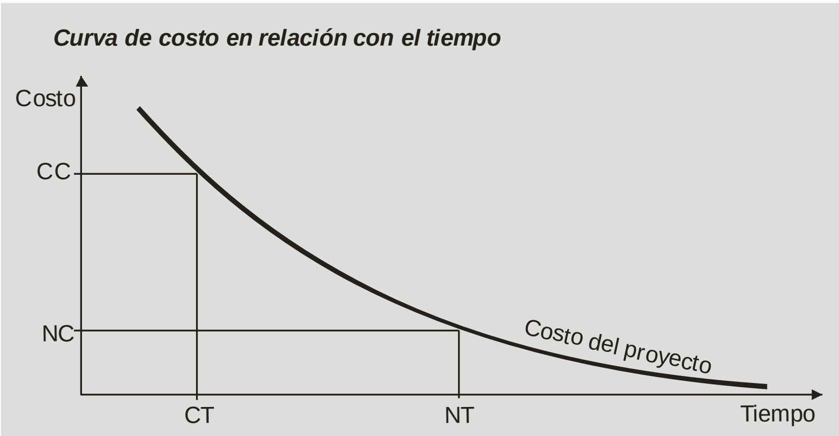
1. **Determinación del camino critico**, de la forma planteada anteriormente, puesto que para reducir la duración de un proyecto es necesario reducir simultáneamente la duración de todos sus caminos críticos. Esto es importante ya que las actividades de la ruta critica son las que, al reducirlas, producirán modificaciones en el tiempo total del proyecto. Para ello hay que reducir una actividad de cada camino crítico, que puede ser la misma si es común a varios caminos. Por tanto, habrá varias alternativas de reducción, que estarán entonces en función de las actividades que se haya decidido reducir y habrá que elegir una de ellas.

2. **Se deberá determinar el costo por unidad de tiempo para acelerar cada actividad** (tomemos como unidad al día) Para hacer una consideración de éstos, se necesitará conocer en la red y para cada actividad el costo normal o mínimo esperado

para cada actividad (NC); el tiempo normal (NT); el mínimo tiempo posible de la actividad (CT) y el costo asociado al tiempo mínimo de la actividad (CC)

3. La alternativa elegida se utilizará para reducir el proyecto durante un cierto número de días, disminuyendo la duración de todas las actividades que la compongan. La reducción máxima del proyecto dependerá de que no se reduzca una actividad más allá de su duración mínima posible y de que, en el proceso de reducción de las actividades elegidas, aparezca otro camino crítico. En cualquier caso es necesario volver a iniciar el proceso, reevaluando las posibilidades de reducción.

La relación costo-tiempo se obtiene de plantear un grafico que relacione por un lado el costo asociado al tiempo mínimo de la actividad (CC) con el mínimo tiempo posible de la actividad (CT); y por otro el costo normal o mínimo esperado para cada actividad (NC) con el tiempo normal (NT) Se tratará de unir estos puntos dependiendo de la estructura de costos real del proyecto. La figura *curva de costo en relación con el tiempo* muestra que, a pesar de que los costos unitarios son proporcionales, la curva presenta una pendiente variable. La razón es que para reducir el proyecto hay que apelar cada vez a procedimientos más caros.



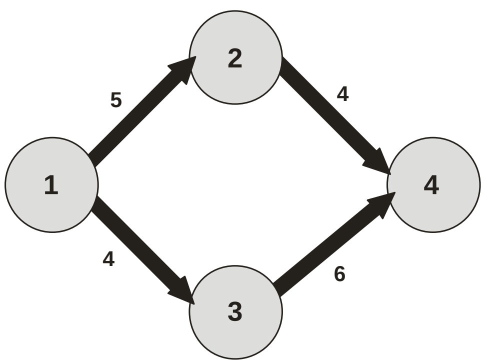
Como resumen de los pasos a seguir para la realización de este procedimiento, son:

1. Reducir en la ruta critica la actividad que tenga el costo mínimo. Aquì se aconseja reducir el tiempo de la ruta en un día. Se calcula el costo total del proyecto.
2. Nuevamente se procede a calcular la ruta y se realiza la segunda reducción en un día. Esto se repite hasta que el método brinde un resultado satisfactorio o no se pueda continuar reduciendo los tiempos porque el incremento de costos excede los beneficios de acortarla.
3. Se realiza la curva de costo total y encuentra el programa de costo mínimo.

Para comprender mejor la reducción de la duración de un proyecto, mostraremos las diferentes etapas del método aplicado a un caso práctico (*J. Monks, Problemas de la Administración de Operaciones, 1988*). El procedimiento utilizado, como explicáramos oportunamente, se basa en reducir de forma simultánea la duración que se ha atribuido a cada uno de los caminos críticos.

Una red tiene cuatro actividades con los tiempos que se muestran en la siguiente tabla. Los tiempos mínimos y factibles y los costos por día para obtener reducciones en los tiempos de las actividades también se incluyen en la misma. Si los costos fijos del proyecto son $ 90 por día, ¿cuál es el menor costo del tiempo programado?

TABLA - ejemplo		
Actividad	Tiempo mínimo	Costos directos de reducción de tiempo ($)
1-2	2	40 cada una
1-3	2	35 para el primer día y 80 para el segundo día
2-4	4	Ninguno posible
3-4	3	45 para el primer día y 110 para los otros días

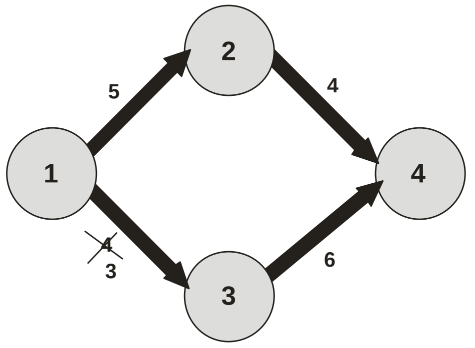


Primero calculamos el camino critico y el costo del camino critico:

	Tiempo de los caminos	Costo total del proyecto
Camino A	5 + 4 = 9	
Camino B	4 + 6 = 10	10 días x 90 = 900

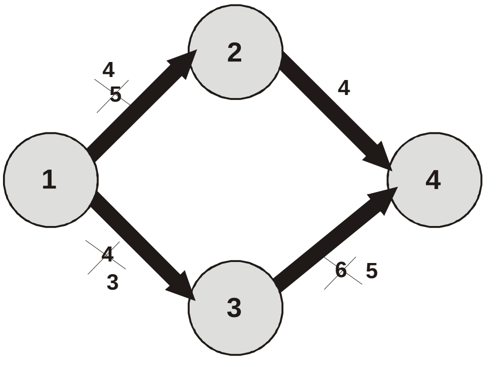
A continuación se deberá seleccionar la actividad que se puede reducir en el camino critico al menor costo. Se selecciona la actividad 1-3 por $ 35 por día, costo menor que $

90 por día. Se reduce esta actividad 1-3 a 3 días, como se muestra en la figura y se revisa el costo del camino critico.



Tiempos revisados	Costo fijo total	Ahorro sobre programación anterior
Camino A = 5 + 4 = 9	9 x \$ 90 = \$ 810	\$ 900 - (810 + 35) = \$ 55
Camino B = 3 + 6 = 9		

Ambos caminos son ahora críticos, por lo que se deberá seleccionar una actividad de cada camino.
Se seleccionarán la actividad 1-2 a \$ 40 por día y la actividad 3-4 a \$ 45 por día (\$ 40 + \$ 45 es menor que \$ 90).
A continuación se reducirán la actividad 1-2 a 4 días y 3-4 a 5 días, como se muestra en la siguiente figura. Al igual que en el primer caso, habrá que revisar el tiempo y el costo del camino critico.

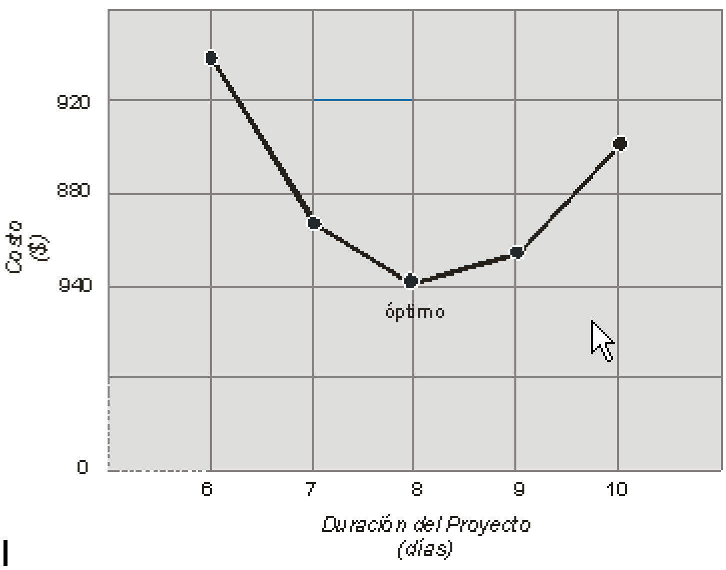


Tiempos revisados	Costo fijo total	Ahorro sobre programación anterior
Camino A = 4 + 4 = 8	8 x \$ 90 = \$ 720	\$ 810 - (720 + 40 + 45) = \$ 5
Camino B = 3 + 5 = 8		

De nuevo se debería reducir el tiempo de ambos caminos. Para ello, la actividad 1-2 ubicada en el camino A es la candidata porque continua en 4 días y puede hacerse en 3 con un costo de \$ 40. Pero cuando este costo se combina con el de \$ 80 para reducir la

actividad 1-3 en otro día, la suma es mayor que 90, por lo que la presente reducción no es económicamente justificada.
Al graficar las relaciones de costo obtendríamos:

Duración del proyecto (días)	Costos Indirectos	Actividad reducida	Costo Directo	Costo Total
10	900	*Ninguna*	0	900
9	810	*1-3*	0 + 35 = 35	845
8	720	*1-2 y 3-4*	35 + 85 = 120	840
7	630	*1-2 y 1-3*	120 + 120 240	870
6	540	*1-2 y 3-4*	240 + 150 390	930



El menor costo total estará en terminar el proyecto en 8 días con un costo total de $ 840. Sin embargo se observa que extenderse a 9 días añade solamente $ 5 a este costo.

El procedimiento descrito es un *método aproximado* y no está garantizada la obtención de una solución óptima, por lo que existen otros procedimientos específicos que permiten obtener el óptimo con mayor certeza. Estos procedimientos se basan en la técnica de la programación lineal. En la práctica, el cálculo realizado mediante una computadora emplea un método mas preciso. Este último tiene la ventaja de mostrar con claridad el fundamento conceptual del problema y las características de su solución. A veces, el proceso de optimización de un proyecto, tal como se ha descrito, se conoce como realización de un **PERT-costo**.

RECURSOS LIMITADOS

A continuación, se examinarán recursos para los que existe una limitación en la velocidad de su uso; esto es, en la cantidad de unidades por unidad de tiempo que es posible utilizar. Desde el comienzo de este capítulo se ha considerado siempre que existen recursos suficientes para todas las actividades. A partir de aquí, el análisis se centrará en el problema de hallar la duración mínima del proyecto compatible con un uso dado de recursos. En este sentido, *Weis* (1966), planteó una metodología para tratar este tipo de restricciones.
Para simplificar, se partirá de un solo recurso escaso, por ejemplo uso de la mano de obra, al que se aplicará una limitación constante en el tiempo.
Se dice que un plan es factible cuando, sumando los recursos usados en el proyecto de acuerdo con las fechas del comienzo y del final de la actividad, se cumplen las limitaciones del recurso escaso.
El problema es importante. Se ha demostrado que equivale, bajo ciertas condiciones, a muchos de los problemas más *difíciles* de la producción y las operaciones, por lo que no se conoce en este momento un procedimiento aceptable para su solución exacta. Por ello, la mayoría de los procedimientos prácticos son aproximados y obtienen soluciones aceptables *no óptimas*.
A continuación se expondrá brevemente el procedimiento de cálculo que se emplea para obtener el plan de aplicación para un proyecto cuando se presentan restricciones de recursos:

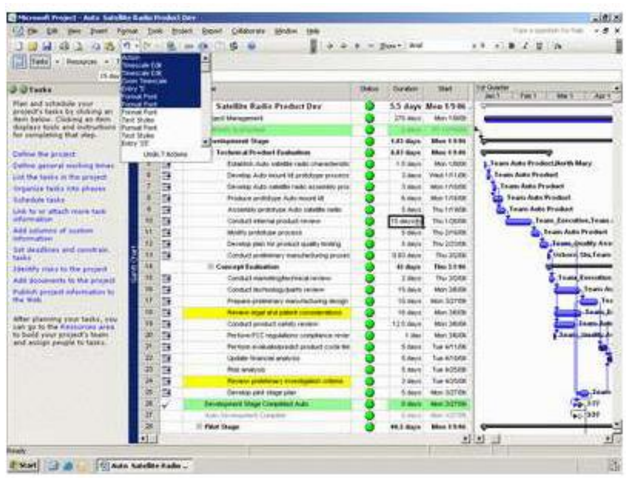
1 Se empieza considerando el instante inicial del proyecto, como por ejemplo, $t = 0$.
2 Se calcula el recurso escaso que dejan libres las actividades en curso.
3 Se eligen las actividades que van a realizarse, una a una (cuando varias actividades compiten por los mismos recursos, dar preferencia a las actividades de acuerdo con la regla "*seleccione primero la actividad con la holgura más pequeña*") mientras queden recursos disponibles.
4 Se incrementa el tiempo, situándose al final de la actividad que primero finaliza de las ya programadas.
5 Se repiten las operaciones desde el punto 1 hasta haber agotado todas las actividades, reprogramando las actividades no críticas (si es posible) para liberar recursos para tareas críticas o sin margen.

El concepto de actividad crítica (y camino crítico) ha de revisarse cuando hay recursos escasos. Es conveniente definir una actividad como ***crítica*** siempre que, al alargarse ésta, se prolonga inmediatamente el proyecto.
Este nuevo significado de la criticidad aparece porque, en un PERT sin recursos, la única circunstancia que bloquea el principio de una actividad es la terminación de sus predecesoras, pero, en el caso de la limitación de recursos, la actividad puede quedar también bloqueada por la falta de un recurso necesario, que tiene otra actividad que no precede necesariamente. En la práctica se usan muchas reglas de decisión y combinaciones de ellas y se puede encontrar en la literatura especializada su descripción y análisis.
La que se ha usado en este caso (*mínima holgura residual*) produce habitualmente soluciones aceptables, pero exige un nuevo cálculo de la red en cada iteración, por lo que ha de implementarse con la ayuda de la computadora.

PERT - CPM EN LA ACTUALIDAD

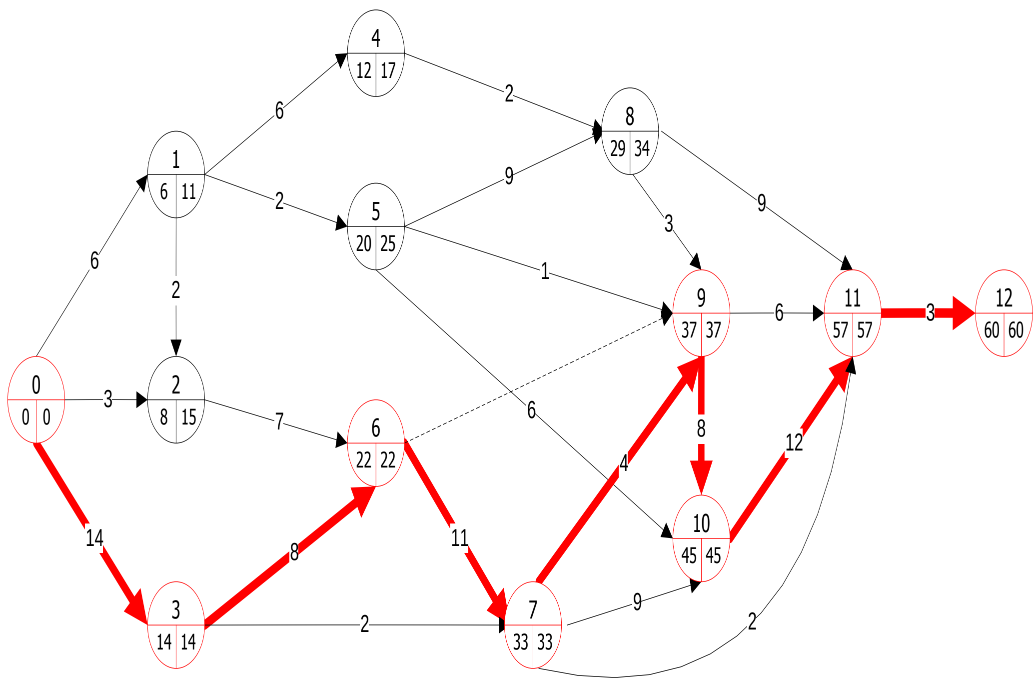
Los métodos PERT y CPM brindan una presentación grafica del diagrama de actividades criticas necesarias para cumplimentar un proyecto y muestran los márgenes disponibles de otras actividades. Esto permite además analizar los *trade off costo-tiempo*. Estos modelos asumen que los inicios y culminaciones de las actividades están claramente definidos, cosa que en la práctica no siempre es así.
Hay que tener en cuenta que en la etapa de control existen innumerables tareas que se deben monitorear pues pueden ser no criticas pero estar a punto de convertirse en tales ante un inconveniente cualquiera.
Mencionamos además las criticas de algunos autores a la *distribución beta* para el cálculo de los tiempos del PERT en lo que hace a la manera de calcular la media y la varianza, lo que podría conducir a otros caminos críticos.
También es de hacer notar el fuerte peso de la suposición de los recursos suficientes lo cual tampoco siempre podemos asegurar en la realidad tan cambiante de los administradores de proyectos. Por suerte, en ayuda a las dificultades de cálculo, están los paquetes de software que permiten evitar la complejidad matemática y brindar un marco para la toma de decisiones.
El objetivo perseguido en este capitulo no fue dar una exposición detallada y científica de las técnicas cuantitativas, sino presentar al administrador de proyectos las suposiciones involucradas que implican su uso teniendo en cuenta sus objetivos y la mayor complejidad del proyecto, de manera que conozca en cuánto puede ayudar a su decisión el uso de estas herramientas.
Como siempre decimos, los modelos no toman decisiones, los administradores sí lo hacen. Parece que deberíamos juzgar si es adecuado el uso de estas técnicas o por el contrario sus condicionantes en cuanto a los recursos las pueden hacer no adecuadas para evaluar un proyecto.

Para aquellos que gustan de las técnicas cuantitativas recomendamos la literatura que existe sobre el tema, la cual es muy amplia. Especialmente recomendamos el estudio de los manuales de uso y la aplicación de una herramienta de software informático como el MS Project.



Aplicaciones

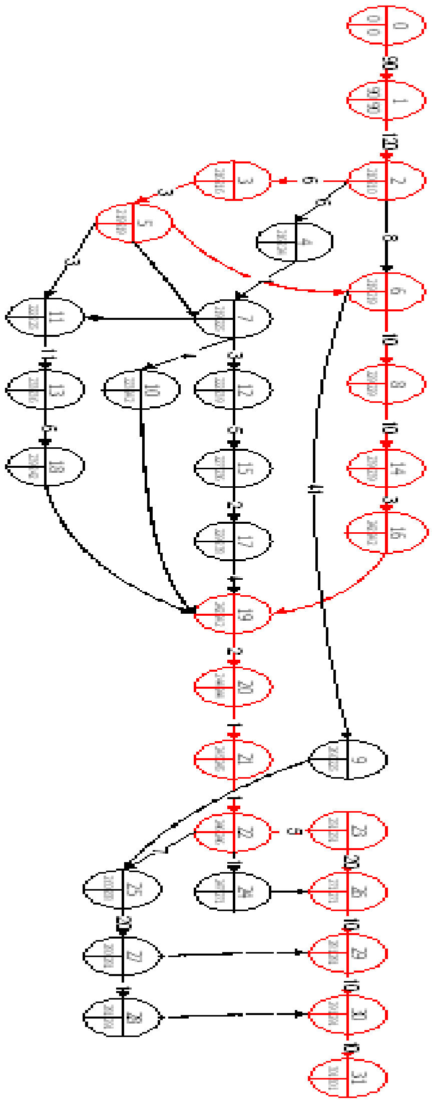
1.Dada la siguiente red, hallar el camino crítico.



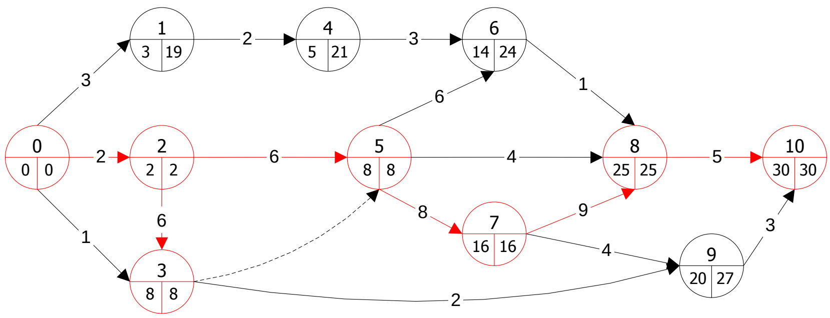
Solución en resaltado

2 Ejercicio

Calcular el camino crítico en la siguiente red.

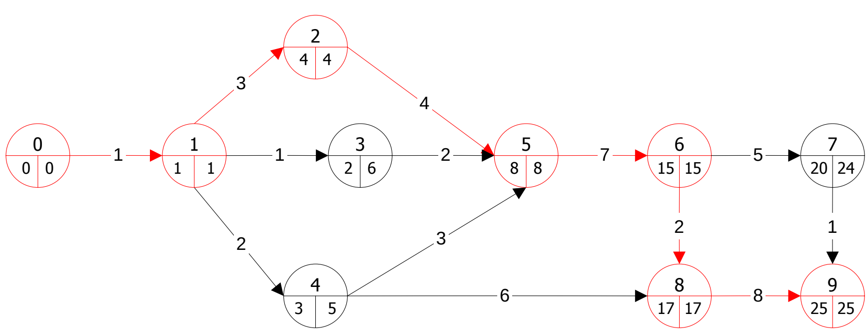


3 Ejercicio
Resolver el siguiente diagrama de flechas

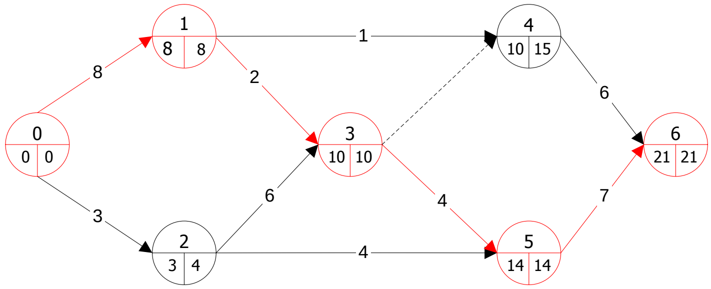


a) Duración total del proyecto: 30 días.
b) Camino crítico: (0,2,5,7,8,10) y (0,2,3,5,7,8,10).
c) Margen total de la tarea 4-6: MT(4-6)= 24-5-3= 16.
d) Margen libre de la tarea 4-6: ML(4-6)= 14-5-3= 6.
e) Intervalo de flotamiento del nodo 5: IF(5)= 8-8= 0.
f) Es crítica la tarea 5-8?: MT(5-8)= 25-8-4= 13 (No, MT(5-8) <> 0).
g) Que tareas deben haberse cumplido para poder comenzar la 5-8?: Tareas 2-5 y 2-3.
h) Si la iniciación de la tarea 1-4 se ha retrasado en 15 días. Cuánto aumenta la duración total del proyecto?: No aumenta, ya que el MT(4-6) = 16 > 15.
i) En el caso del punto h). En que momento puede iniciarse la actividad 6-8? En el día 23.
j) Si la tarea 2-5 se realiza en 8 días. Cuánto se atrasó la 2-3?

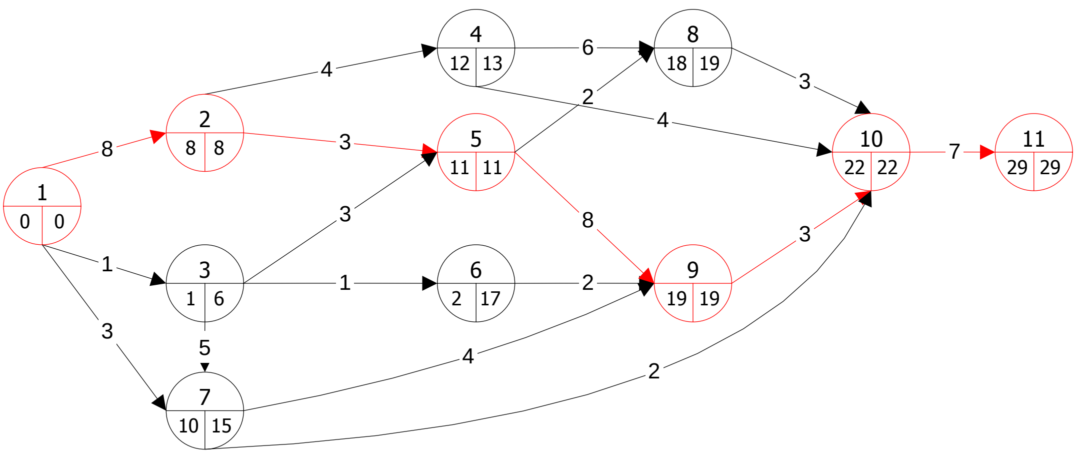
4 Ejercicio
Determinar la duración total del siguiente proyecto y el camino crítico.



5 Ejercicio
Determinar la duración total del siguiente proyecto y el camino crítico.



6 Ejercicio
Dado el siguiente proyecto.

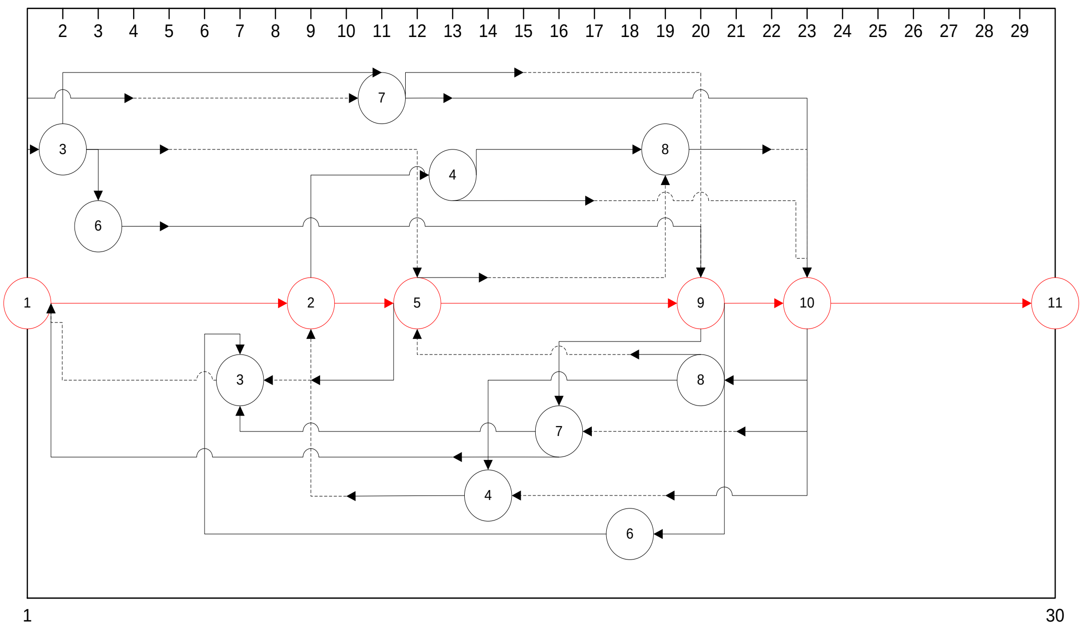


a) Calcular tiempo total del proyecto.
b) Indicar las tareas críticas.
c) Trazar el camino crítico.
d) Construir el diagrama calendario.
e) Dada la siguiente carga por cada una de las tareas a realizar para el proyecto indicar la pena de los recursos a utilizar.

Tareas	Carga
1-2	2
1-3	2
1-7	3
2-4	3

2-5	2
3-5	3
3-6	2
3-7	2
4-8	2
4-1	2
5-8	2
5-9	3
6-9	4
7-9	2
8-10	5
9-10	2
10-11	4

d) Diagrama Calendario:



7. Ejercicio
Dado el siguiente diagrama, resolverlo y presentar el diagrama calendario correspondiente.

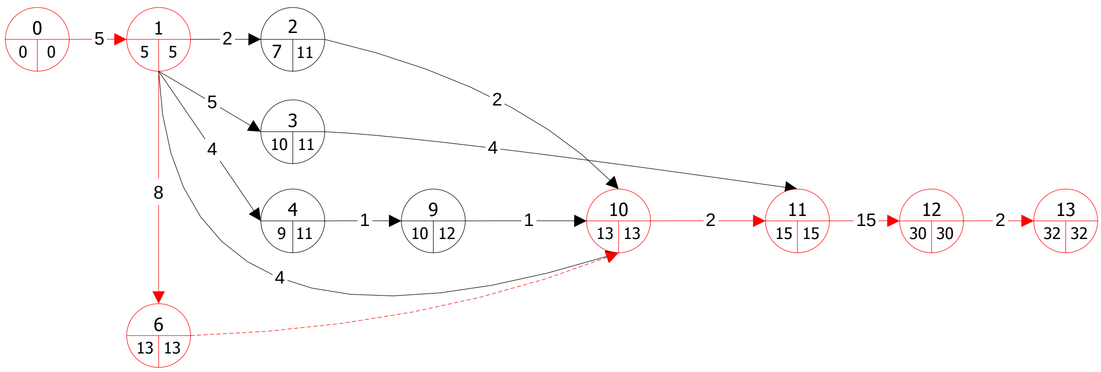
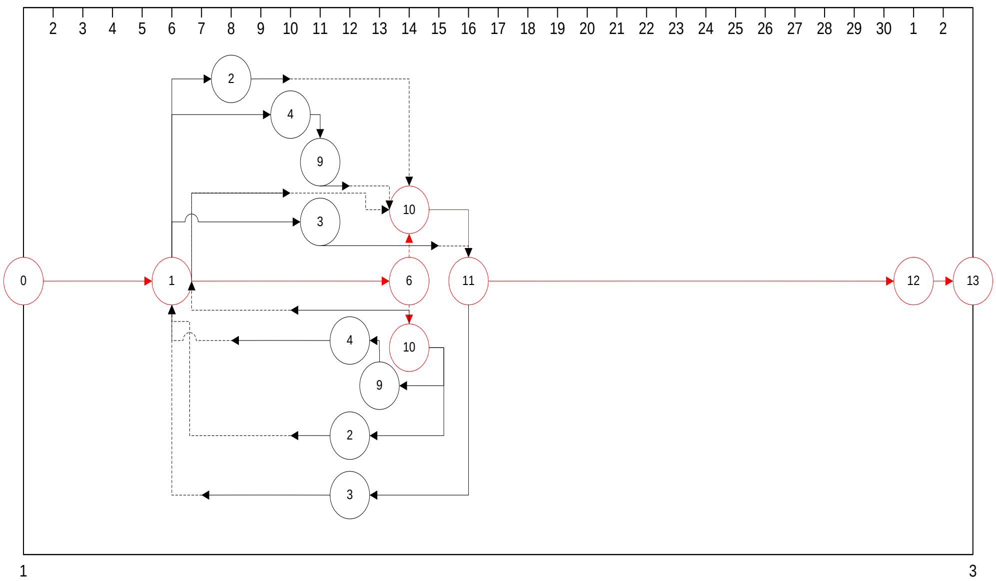


Diagrama Calendario:

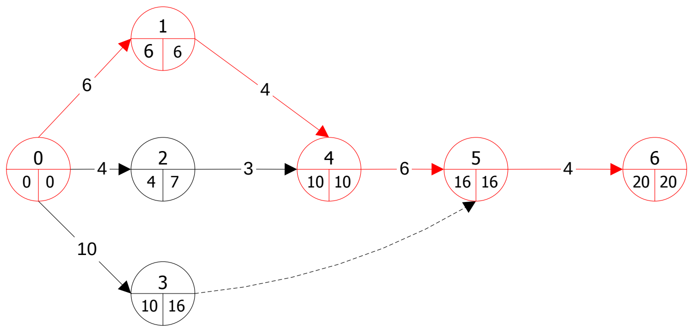


8 .Ejercicio :Carga Financiera – Aceleración de proyectos.
Para la ejecución de un proyecto deben efectuarse las siguientes tareas:

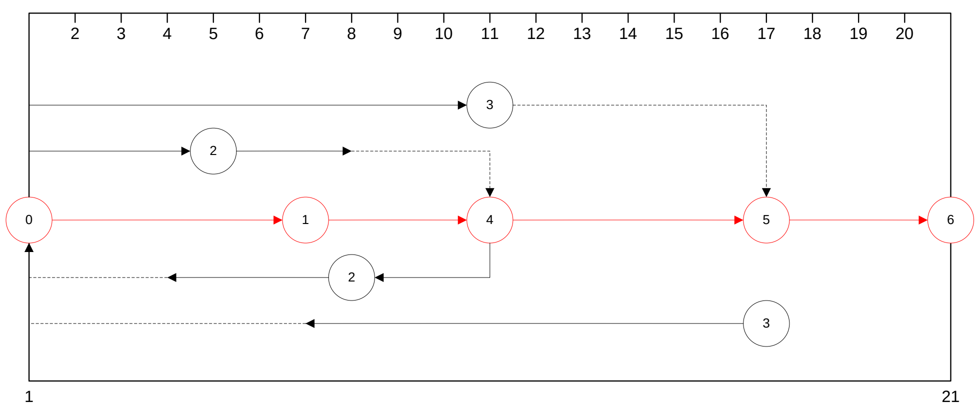
Tareas	Tiempo	Costo Total	Tiempo Mínimo	Costo por día de reducción
0-1	6	1200	4	500
0-2	4	400	4	-
0-3	10	1000	8	100
1-4	4	2000	2	1000
2-4	3	600	1	2000

3-5	0	0	-	-
4-5	6	1800	6	-
5-6	4	800	4	-

1.1 Representar la red y calcular el tiempo total del proyecto.



1.2 Construir el diagrama calendario.

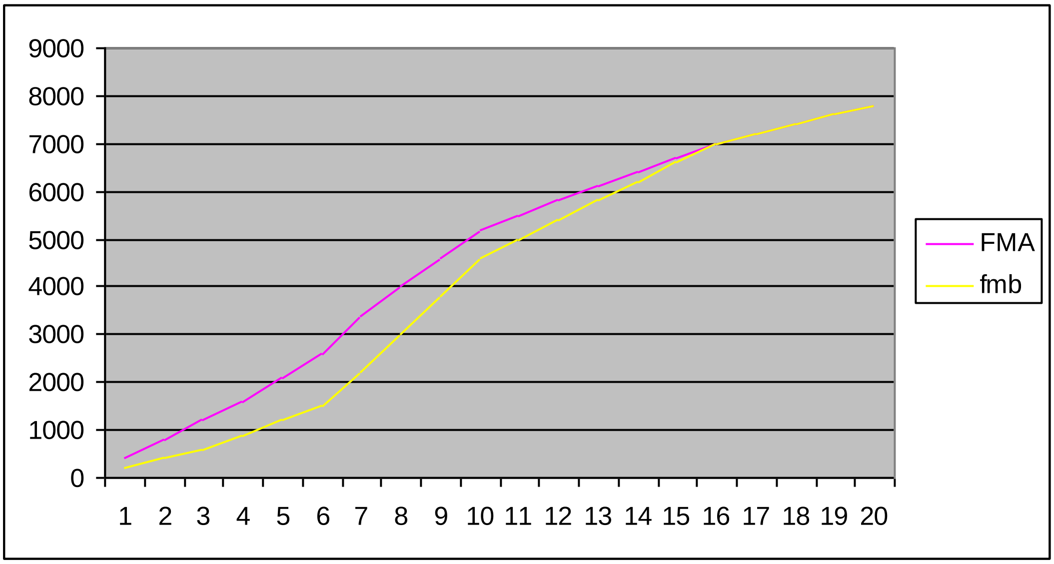


1.3 Representar la carga financiera.

Dia	Tarea	Costo x dia	Costo total por día	Cant. Dias	Subtotal	Costo total acumulado
1-2-3-4	0-1	200,00				
	0-2	100,00				
	0-3	100,00	400,00	4,00	1600,00	1600,00
5-6	0-1	200				
	0-3	100				
	2-4	200	500,00	2,00	1000,00	2600,00
7	0-3	100,00				
	2-4	200,00				
	1-4	500,00	800,00	1,00	800,00	3400,00
8-9-10	0-3	100,00				
	1-4	500,00	600,00	3,00	1800,00	5200,00
11-12-13-14-15-16	4-5	300,00	300,00	6,00	1800,00	7000,00
17-18-19-20	5-6	200,00	200,00	4,00	800,00	7800,00

fmb

Dia	Tarea	Costo x dia	Costo total por día	Cant. Dias	Subtotal	Costo total acumulado
1-2-3	0-1	200,00	200,00	3,00	600,00	600,00
4-5-6	0-1	200,00				
	0-2	100,00	300,00	3,00	900,00	1500,00
7	0-2	100,00				
	1-4	500,00				
	0-3	100,00	700,00	1,00	700,00	2200,00
8-9-10	1-4	500,00				
	2-4	200,00				
	0-3	100,00	800,00	3,00	2400,00	4600,00
11-12-13-14-15-16	4-5	300,00				
	0-3	100,00	400,00	6,00	2400,00	7000,00
17-18-19-20	5-6	200,00	200,00	4,00	800,00	7800,00

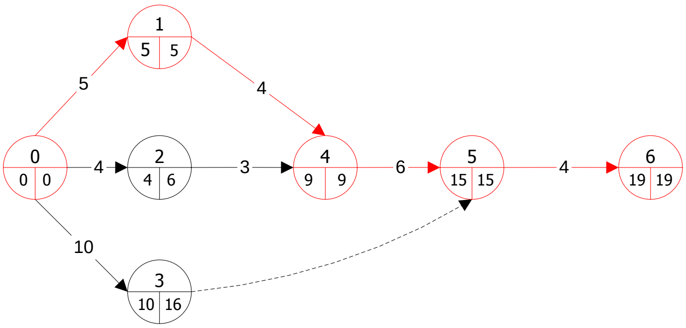


1.4 Indicar la posible aceleración del proyecto.

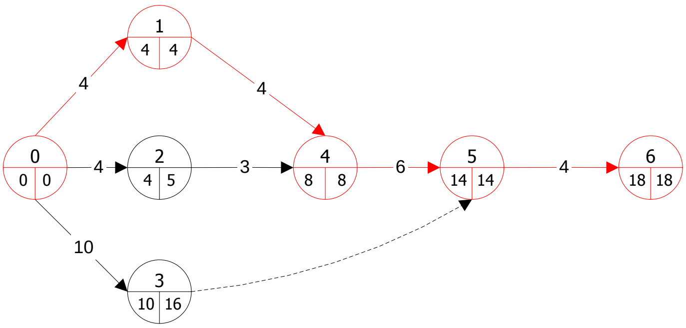
Camino Crítico	Tareas	Tiempo	Tiempo Minimo	Costo por día de reducción
X	0-1	6	4	500
	0-2	4	4	-
	0-3	10	8	100
X	1-4	4	2	1000
	2-4	3	1	2000
	3-5	0	-	-
X	4-5	6	6	-
X	5-6	4	4	-

Sólo puedo acelerar las tareas 0-1 y 1-4, ya que las tareas 4-5 y 5-6 no poseen margen de tiempo.

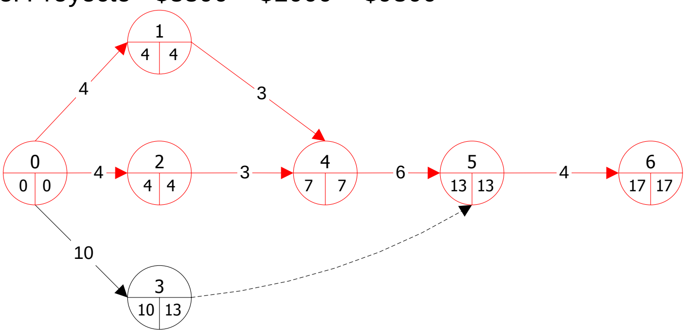
Adelantamos la tarea 0-1: tiempo 5.
Costo Directo del Proyecto= $7800 + $500 = $8300



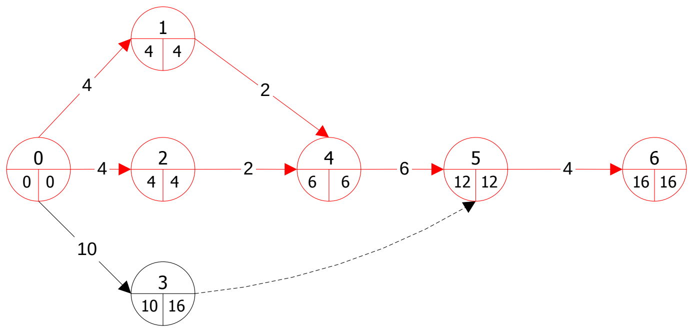
Adelantamos la tarea 0-1: tiempo 4.
Costo Directo del Proyecto= $8300 + $500 = $8800



Adelantamos la tarea 1-4: tiempo 3.
Costo Directo del Proyecto= $8800 + $1000 = $9800

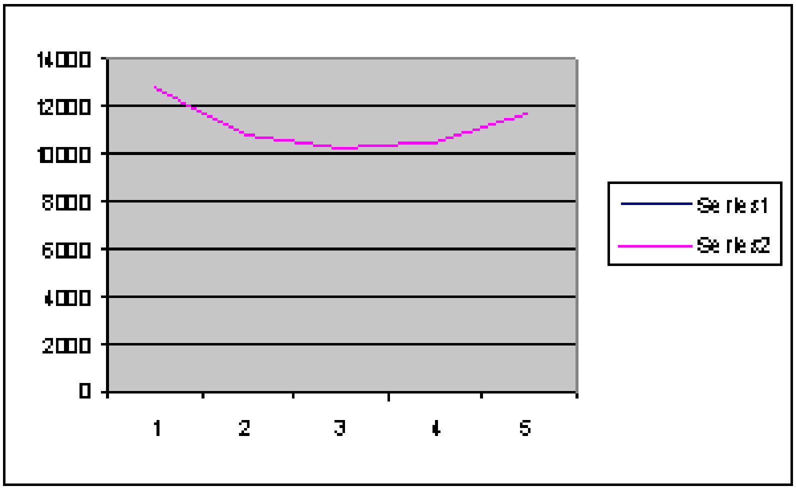


Adelantamos la tarea 1-4: tiempo 2 y la tarea 2-3: tiempo 2 que ahora es crítica.
Costo Directo del Proyecto= $9800 + $1000 + $2000= $12800

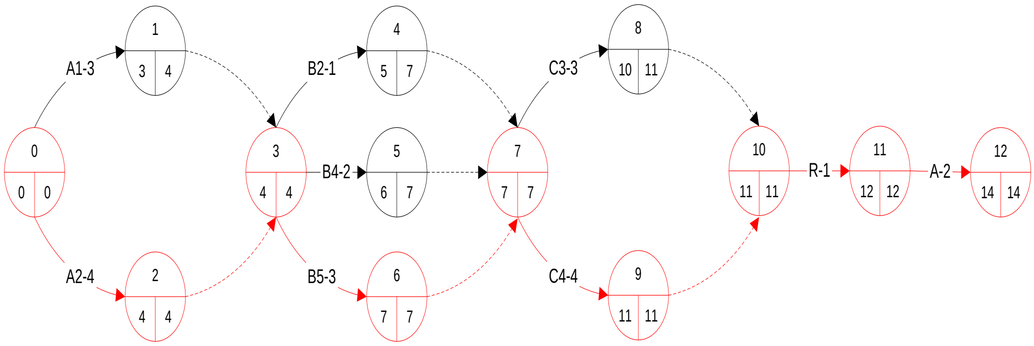


1.5 Obtener la curva de costo total.

Tiempo de Ejecucion	Costo Directo	Costo Indirecto	Costo Total
16	12800	-	12800
17	9800	1000	10800
18	8800	1500	10300
19	8300	2200	10500
20	7800	4000	11800



Ejercicio PERT



Tarea	t_o	t_n	t_p	t_e	σ_{te}^2	c.c.
0-1	2	3	4	3		
0-2	2	4	6	4	0.44	X
1-3	-	-	-	-		
2-3	-	-	-	-		
3-4	1	1	1	1		
3-5	2	2	2	2		
3-6	1	2	9	3	1.78	X
4-7	-	-	-	-		
5-7	-	-	-	-		
6-7	-	-	-	-		
7-8	2	3	4	3		
7-9	1	4	7	4	1.00	X
8-10	-	-	-	-		
9-10	-	-	-	-		
10-11	1	1	1	1	0.00	X
11-12	2	2	2	2	0.00	X
				σ_{cc}^2	3.22	
				σ_{cc}	1.80	

1) Probabilidad de concluir el proyecto en un máximo de 11 días.

$$T_x = 11 días$$

$$T_t = 14 días$$

$$z = \frac{11-14}{1,80} = -1,67$$

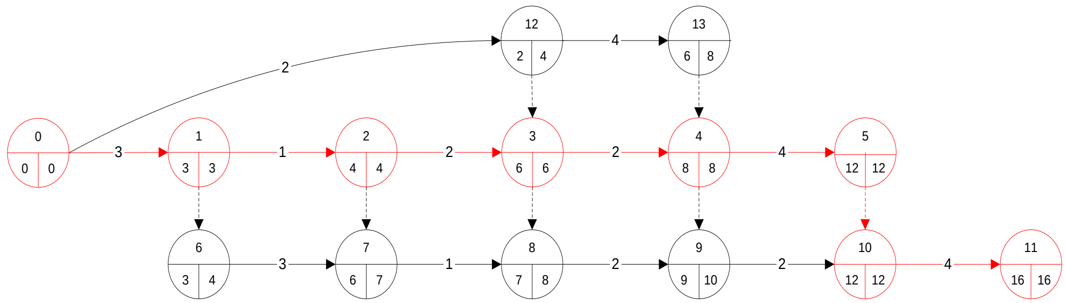
Por tabla, obtenemos que la P(-1,67)=0,047 = 4,7%

2) Días necesarios para concluir el proyecto con un 90% de seguridad..

$90\% \Rightarrow P(z) = 0{,}9$ por tabla obtenemos z=1,285

$T_x = (1{,}285 * 1{,}8) + 14 = 16{,}31$ días

Ejercicio



Tarea	to	tn	tp	te	(var,te)2	c.c.
0-1	1	3	5	3	0.44	X
0-12	1	2	3	2		
1-2	1	1	1	1	0.00	X
1-6	-	-	-			
2-3	1	2	3	2	0.11	X
2-7	-	-	-			
3-4	1	2	3	2	0.11	X
3-8	-	-	-			
4-5	2	3	10	4	1.78	X
4-9	-	-	-			
5-10	-	-	-			X
6-7	1	3	5	3		
7-8	1	1	1	1		
8-9	1	2	3	2		
9-10	1	2	3	2		
10-11	2	3	10	4	1.78	X
12-3	-	-	-			
12-13	2	3	10	4		
13-4	-	-	-			
				(var.cc)2	4.22	
				var.cc	2.05	

Duración del proyecto: 16 horas.

a) Probabilidad de concluir el proyecto en un máximo de 20 horas.

$T_x = 20 horas$

$T_t = 16 horas$

$$z = \frac{20 - 16}{2,05} = 1,95$$

Por tabla, obtenemos que la P(1,95)=0,97 = 97%

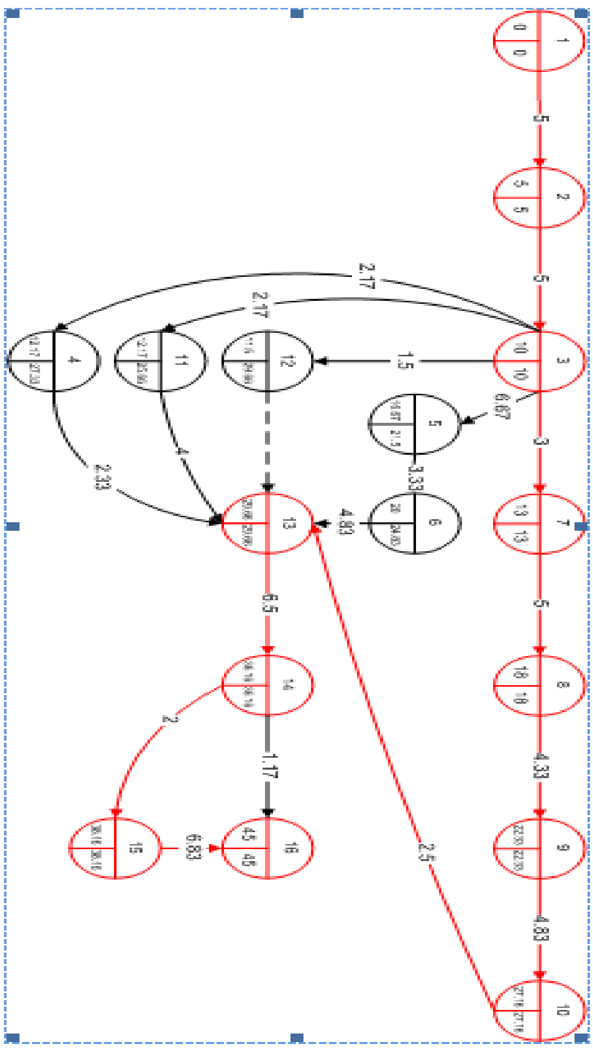
(Continuación Ej. 4.3)

b) Horas necesarias para concretar el proyecto con un 98% de seguridad.

$98\% \Rightarrow P(z) = 0,98$ por tabla obtenemos z=2,06

$T_x = (2,06 * 2,05) + 16 = 21$ horas.

Ejercicio



Tarea	to	tn	tp	te	(var.te)2	c.c.
1-2	4	5	6	5.00	0.11	X
2-3	3	5	7	5.00	0.44	X
3-4	1	2	4	2.17		
4-13	1	2	5	2.33		
3-5	4	7	8	6.67		
3-12	1	1	4	1.50		
5-6	2	3	6	3.33		
6-13	2	5	7	4.83		
10-13	1	2	6	2.50	0.69	X
12-13	0	0	0			
13-14	6	6	9	6.50	0.25	X
14-16	1	1	7	2.00		
3-7	2	3	4	3.00	0.11	X
7-8	4	5	6	5.00	0.11	X
8-9	2	4	8	4.33	1.00	X
9-10	2	5	7	4.83	0.69	X
14-15	1	1	2	1.17	0.03	X
15-16	6	7	7	6.83	0.03	X
3-11	2	2	3	2.17		
11-13	2	4	6	4.00		
				(var.cc)2	3.42	
				var.cc	1.85	

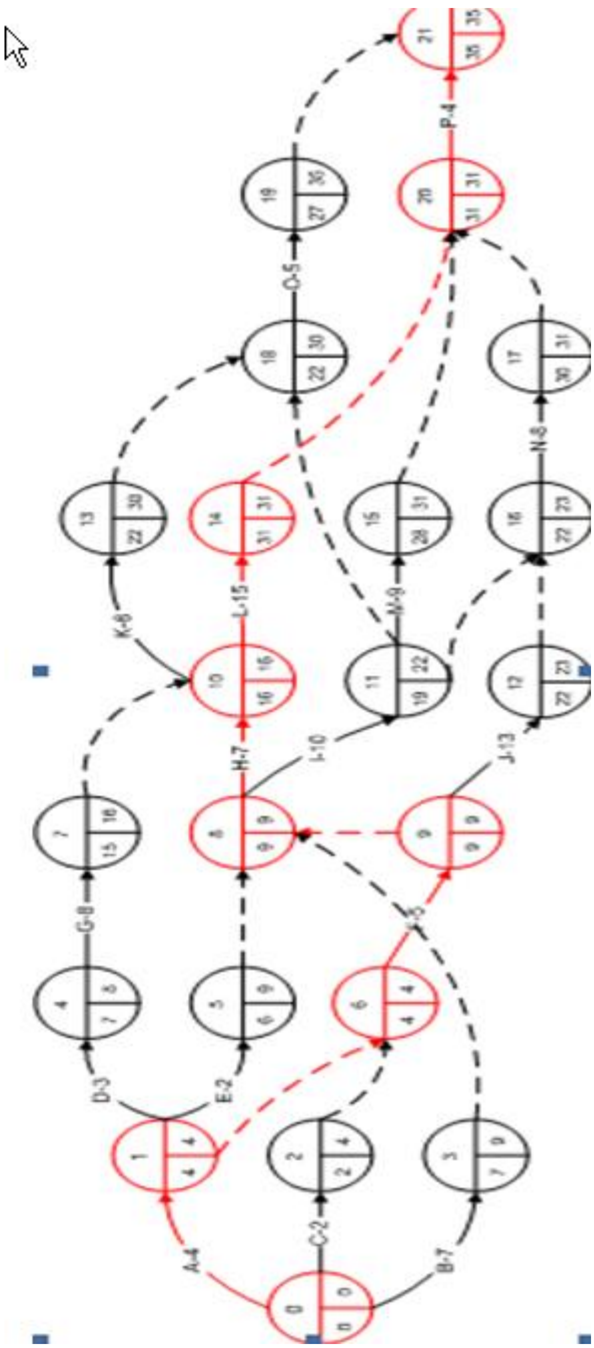
$90\% \Rightarrow P(z) = 0{,}9$ por tabla obtenemos z=1,285

$T_x = (1{,}285 * 1{,}85) + 45 = 48$ días

Ejercicio

Construir la red.

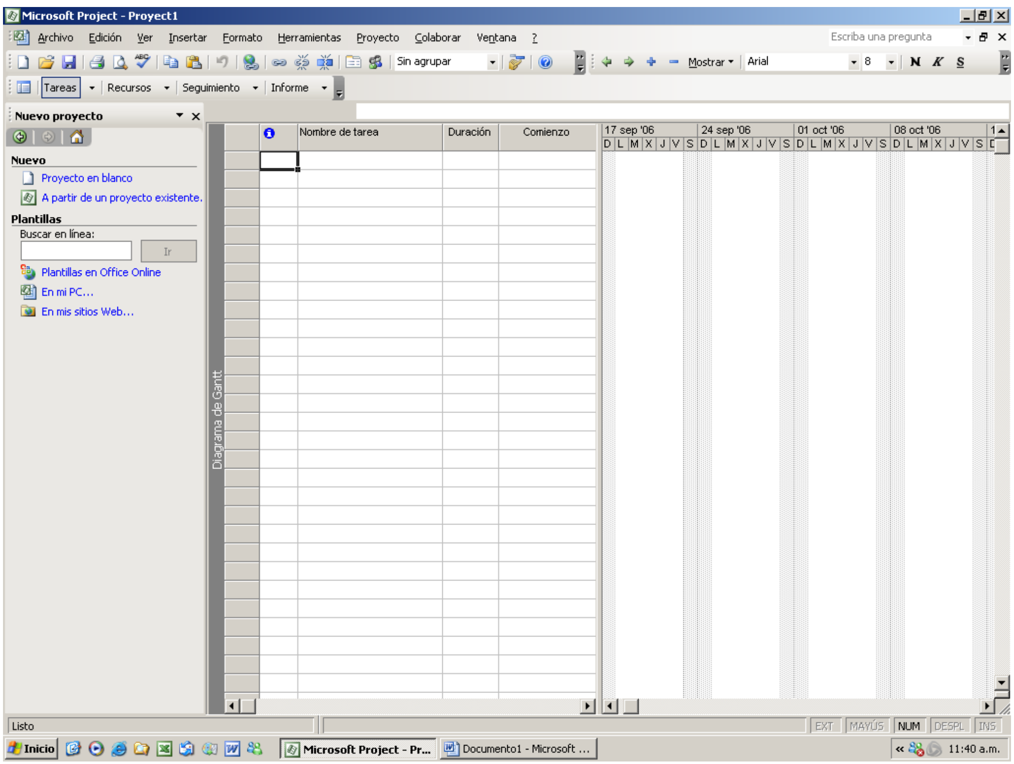
Duración total del proyecto: 35 días.


A-4
C-2
B-7
D-3
E-2
G-8
H-7
I-10
J-13
K-6
L-15
M-9
N-8
O-5
P-4

LA GESTION DE PROYECTOS CON MICROSOFT PROJECT

Se tratara de describir brevemente el uso de Microsoft Project para la gestión de Proyectos. No pretendemos aquí desarrollar ni siquiera una parte de la herramienta ,que permite una gran amplitud y versatilidad en el manejo no solo del planeamiento de proyectos si no también en el control de los mismos, en especial de los recursos involucrados con informes realmente importantes para la toma de decisiones.
Para esto solo plantearemos brevemente el uso de la herramienta en la confección de un diagrama simple de Gantt sin utilizar la carga de recursos monetarios y de personal que haría mas útil esta aplicación. Tampoco usaremos aquí la opción Diagrama de Red (PERT). Suponemos que el lector ya esta familiarizado con la Gestión de proyectos y ha leído el tema pertinente.
Dejando para el alumno que se introduzca en esta herramienta de fundamental uso en la gestión. Para este tema se invita a visitar la pagina: http://office.microsoft.com/es-/assistance/HA010745313082.aspx

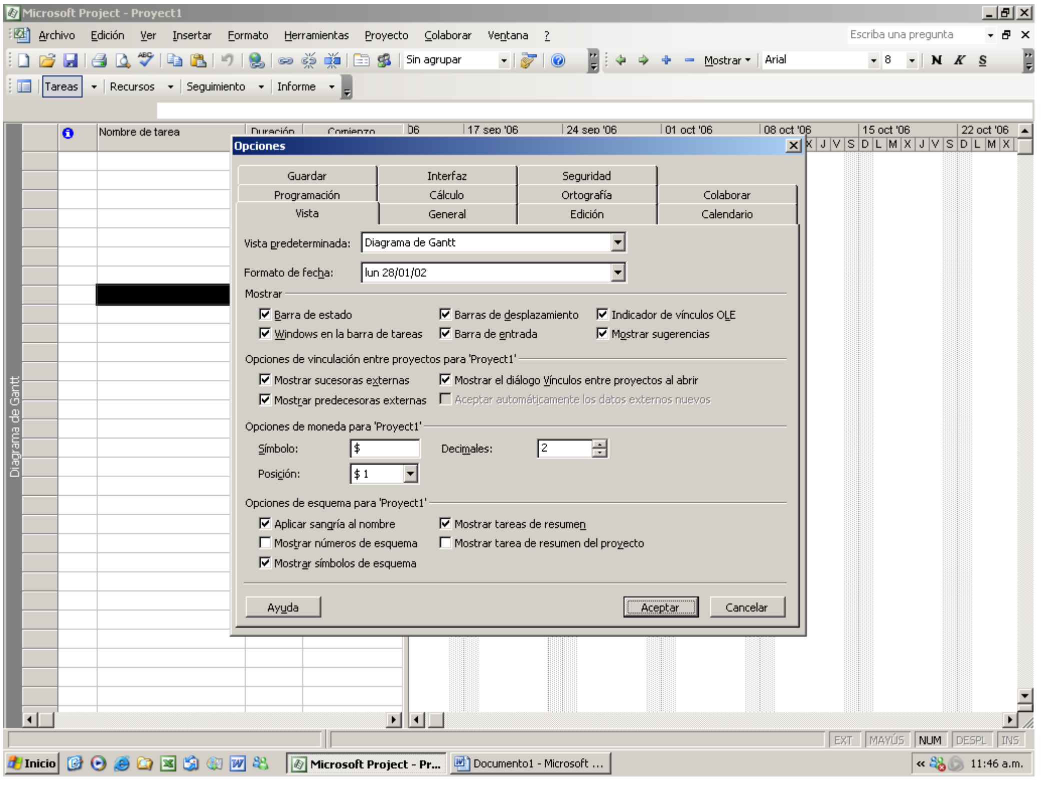
PASOS INICIALES:
Pantalla de inicio de MS Project 2003



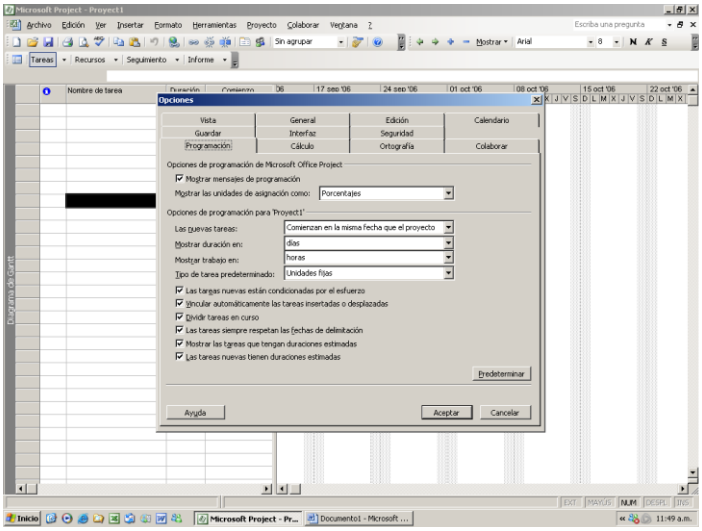
Cuando se inicia la aplicación, en la ventana de la derecha de la pantalla Ud. dispondrá de la posibilidad de iniciar un nuevo proyecto a partir de plantillas existentes.
En la ventana principal tendrá desplegada una planilla con las tareas del proyecto y su duración. A la derecha vera la plantilla para que se desarrolle un Diagrama de Gantt donde se representara la secuencia de tareas gráficamente.

Para cambiar las características de las celdas como su altura y otras características de la celda se puede manejar similar a el Excel y simplemente arrastrando los limites de la celda (ancho, alto) para darles otra dimensión.

Con el menú ***Herramientas / Opciones*** se despliega la siguiente pantalla donde Ud. personalice la planilla

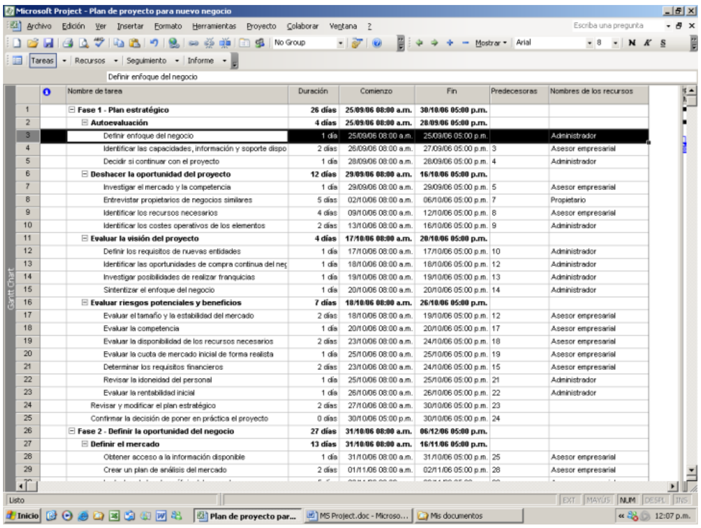


En la solapa ***Calendario*** Ud. dispone de las opciones de fechas para ajustar el diagrama a fechas actuales y personalizar la jornada laboral así como características generales de la herramienta. También se define cuando inician las tareas y como se muestra la duración: horas, días etc.



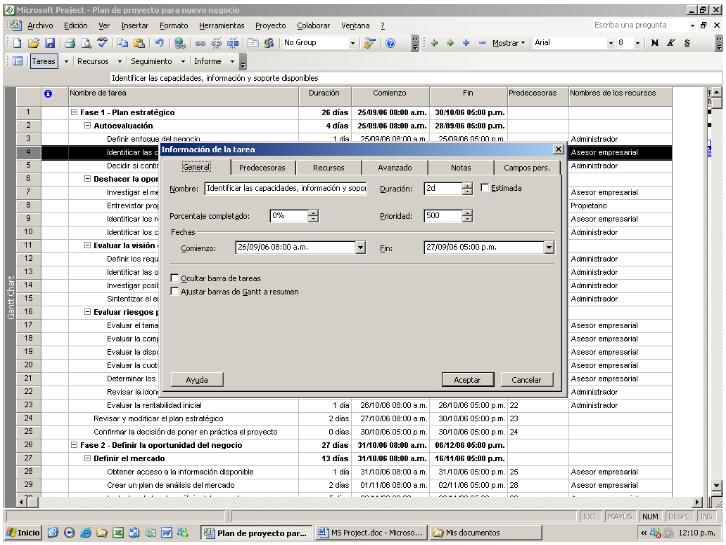
Desarrollo del Proyecto:

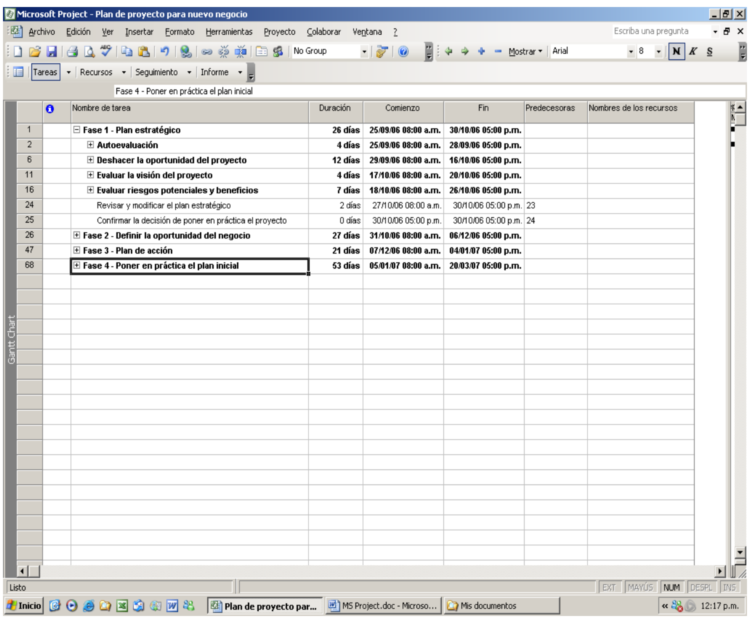
Entraremos a modo de ejemplo la siguiente información:



Haciendo doble clic en cada celda tendrá la pantalla con los datos de la tarea sus predecesoras y los recursos asignados. Las tareas predecesoras estarán dadas por el orden tecnológico del proyecto

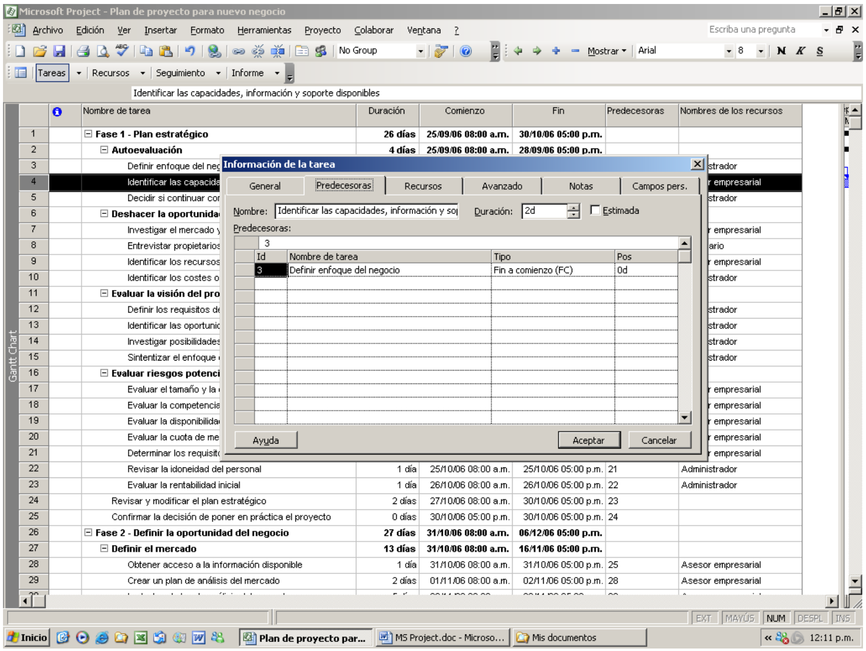
Ud. observara en las celdas de las tareas el símbolo – y + recuadrado en el lado izquierdo. Esto significa que puede contraer o expandir el detalle de la tarea. Haga clic sobre el mismo para ver el resultado





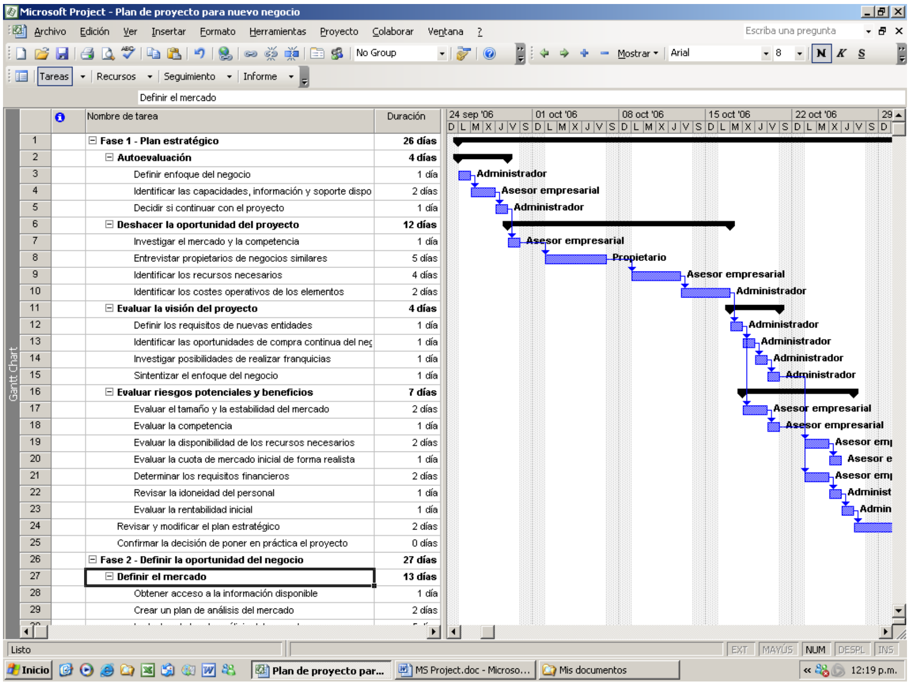
En el lado derecho de la pantalla principal se observa como se va configurando el Diagrama de Gantt de las tareas:

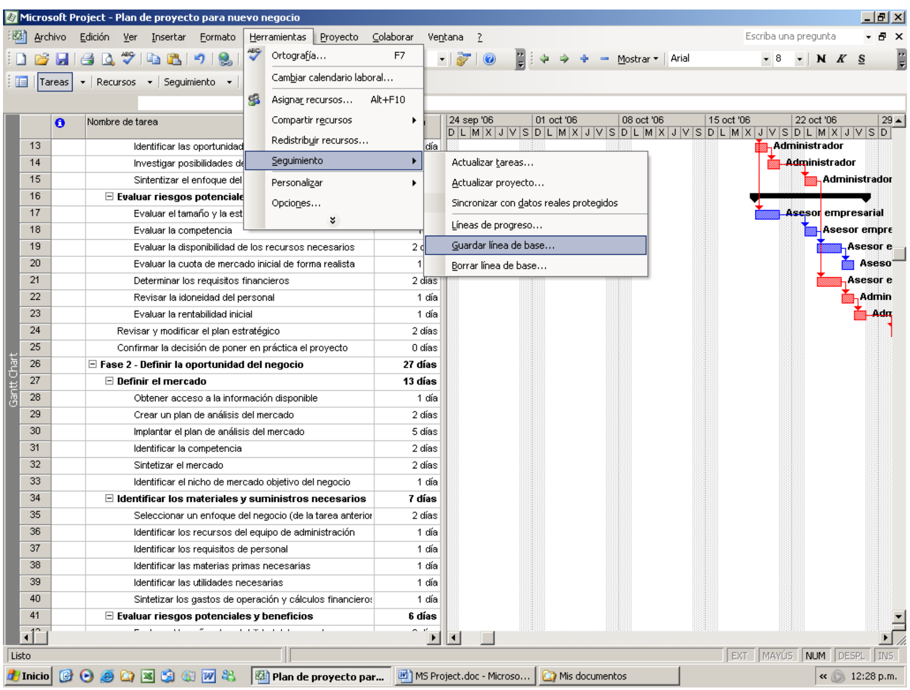
En el menú ***Formato*** se dispone del sub menu: ***asistente para Diagramas de Gantt,*** donde se puede cambiar la apariencia del mismo: en estas opciones Ud. puede indicarle que (además de otras cosas) marque la ruta critica (en rojo)

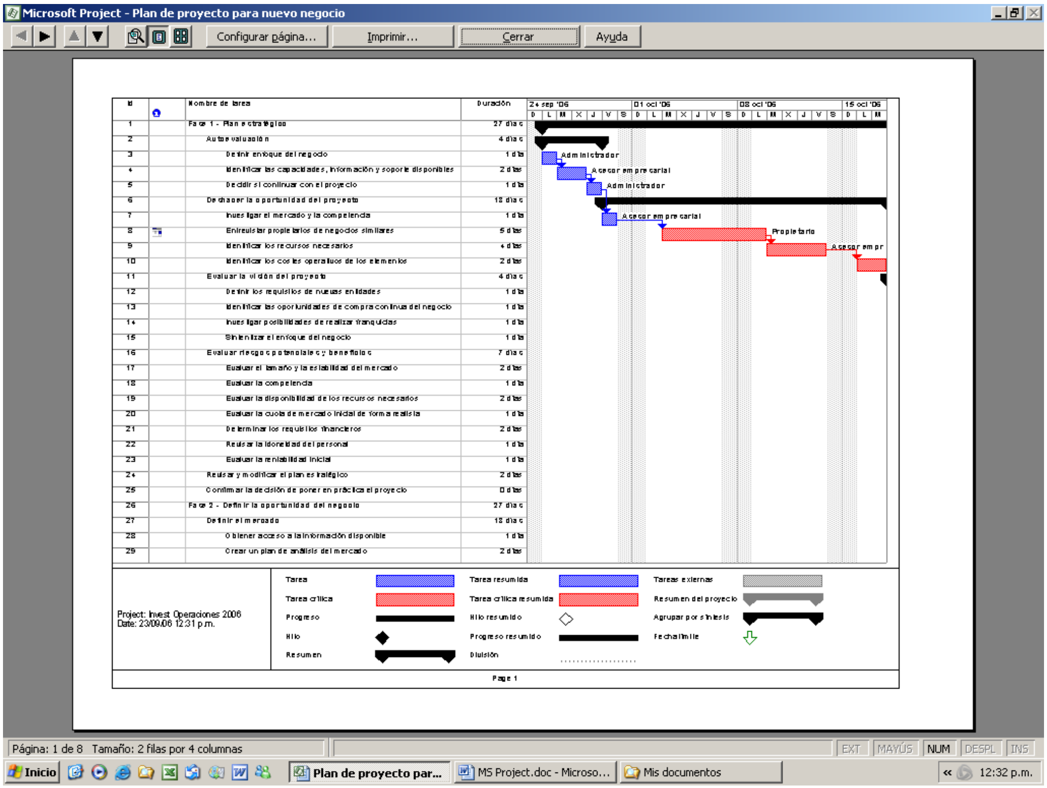


Se puede desplazar las barras de el diagrama de Gantt manualmente posicionandose sobre ella y Ud. vera como al desplazarlas cambian las fechas y se ajustan las tareas.
Los cambios se indicaran además en la tarea y a través de una pantalla tipo pop up que aparecerá indicándole que el cambio de esa actividad es posible o no y si Ud. acepta eso.

Una vez que el proyecto fue programado , se puede guardar el plan de base para futuros cambios y así poder comprar estos cambios con el proyecto base.
Para esto elija ***Herramientas / Seguimiento / Guardar Línea de base*** Para imprimir el grafico previamente puede elegir : ***Archivo / Vista Preliminar*** que le dará la vista de lo que podrá lograr por la impresora y si le parece adecuado luego darle la opción imprimir y configurar las opciones de impresión







SEGUIMIENTO DEL PROYECTO

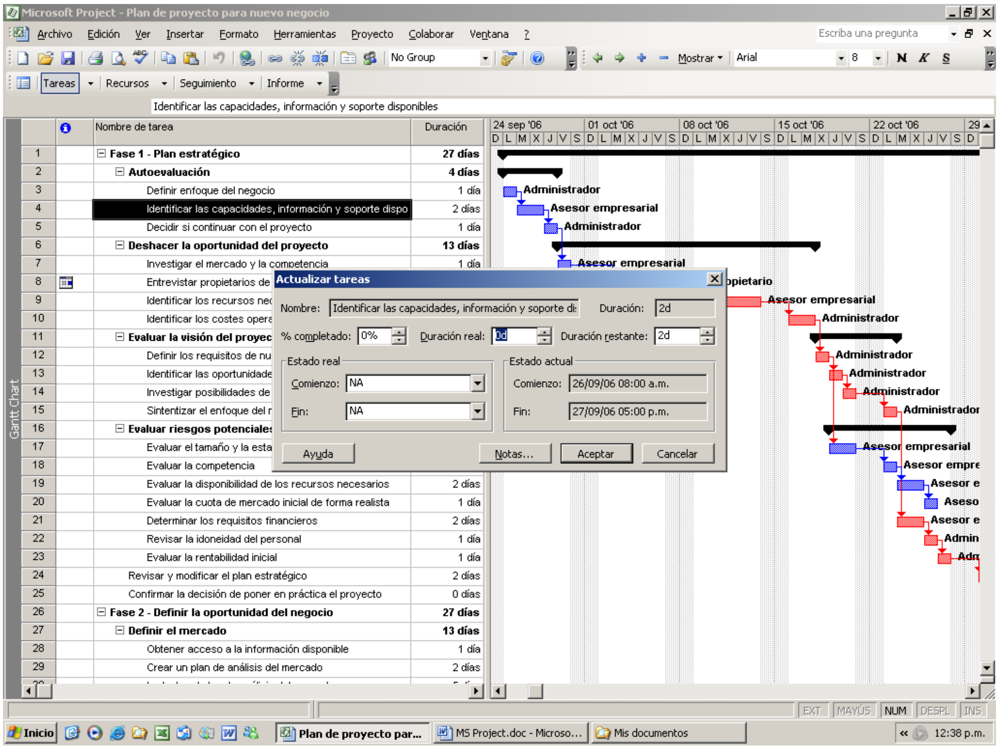
Veremos como puede observarse el seguimiento del cumplimiento de las tareas planeadas. No olvidemos que el Gantt no solo es una herramienta de planeamiento si no también de control.

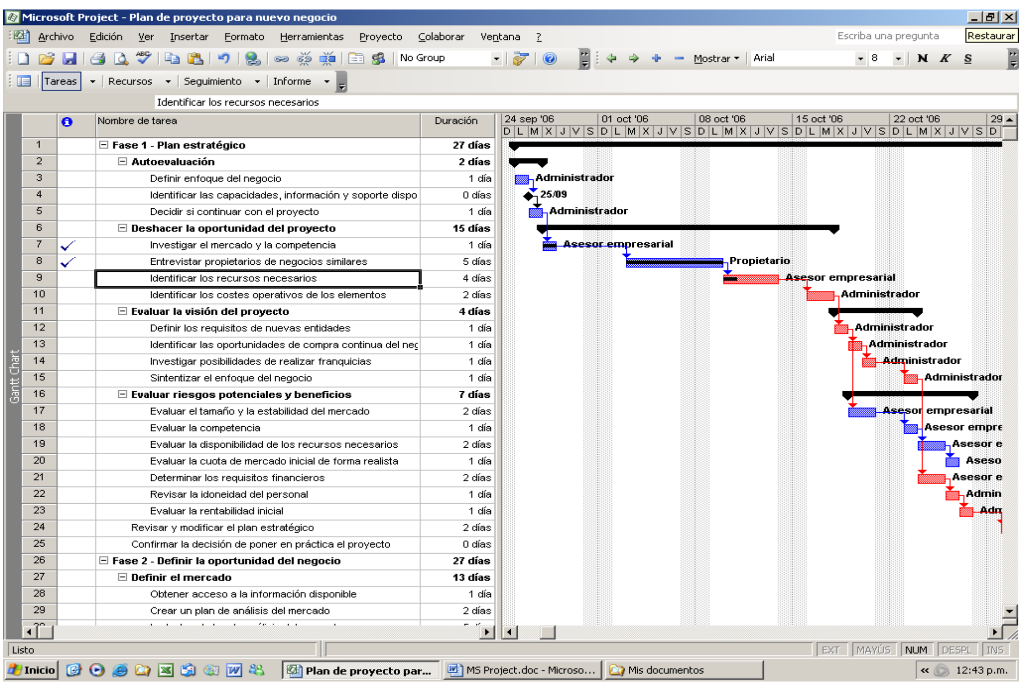
Ingresamos en ***Herramientas / Seguimiento / Actualizar tareas***

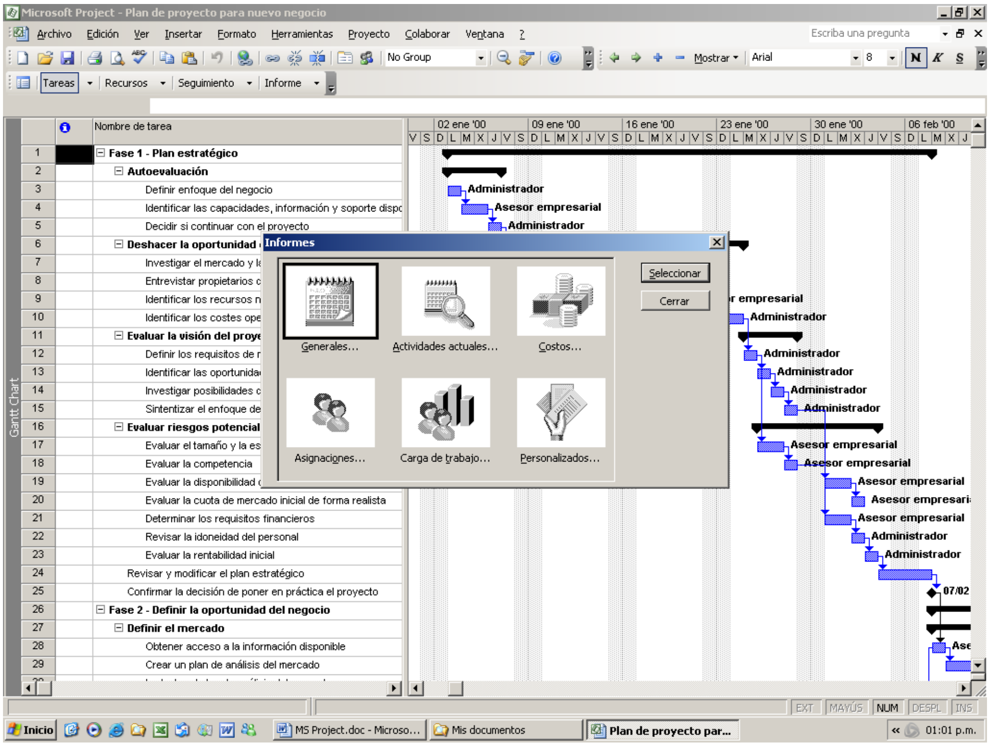
En el menú que nos aparece tenemos disponible la casilla que indica el % completado de la tarea. Completando esto observaremos en cada tarea una nueva barra indicando cuanto se completo de la misma

Aquí además observamos que cambian los colores de la tarea critica completada y aparece un tilde en la columna izquierda antes de la denominación de la tarea cuando esta se completo:

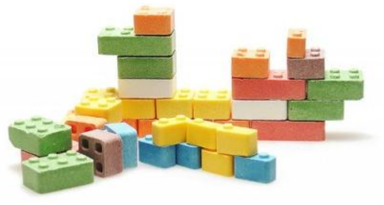
Con Ver / Informes se dispone de un amplio menú para los informes que se deseen


Microsoft Project - Plan de proyecto para nuevo negocio
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Proyecto Colaborar Ventana ?
Escriba una pregunta
No Group
Mostrar
Arial
8
Tareas Recursos Seguimiento Informe
Identificar las capacidades, información y soporte disponibles
Nombre de tarea
Duración
24 sep '06
01 oct '06
08 oct '06
15 oct '06
22 oct '06
Fase 1 - Plan estratégico 27 días
Autoevaluación 4 días
Definir enfoque del negocio 1 día
Identificar las capacidades, información y soporte dispo 2 días
Decidir si continuar con el proyecto 1 día
Deshacer la oportunidad del proyecto 13 días
Investigar el mercado y la competencia 1 día
Actualizar tareas
Nombre: Identificar las capacidades, información y soporte di
Duración: 2d
% completado: 0%
Duración real: 0d
Duración restante: 2d
Estado real
Comienzo: NA
Fin: NA
Estado actual
Comienzo: 26/09/06 08:00 a.m.
Fin: 27/09/06 05:00 p.m.
Ayuda
Notas...
Aceptar
Cancelar
Evaluar la disponibilidad de los recursos necesarios 2 días
Evaluar la cuota de mercado inicial de forma realista 1 día
Determinar los requisitos financieros 2 días
Revisar la idoneidad del personal 1 día
Evaluar la rentabilidad inicial 1 día
Revisar y modificar el plan estratégico 2 días
Confirmar la decisión de poner en práctica el proyecto 0 días
Fase 2 - Definir la oportunidad del negocio 27 días
Definir el mercado 13 días
Obtener acceso a la información disponible 1 día
Crear un plan de análisis del mercado 2 días
Administrador
Asesor empresarial
Gantt Chart
Inicio
Plan de proyecto par...
MS Project.doc - Microso...
Mis documentos
12:38 p.m.


Microsoft Project - Plan de proyecto para nuevo negocio
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Proyecto Colaborar Ventana ?
Escriba una pregunta
Restaurar
No Group
Mostrar
Arial
8
Tareas Recursos Seguimiento Informe
Identificar los recursos necesarios
Nombre de tarea
Duración
Fase 1 - Plan estratégico 27 días
Autoevaluación 2 días
Definir enfoque del negocio 1 día
Identificar las capacidades, información y soporte dispo 0 días
Decidir si continuar con el proyecto 1 día
Deshacer la oportunidad del proyecto 15 días
Investigar el mercado y la competencia 1 día
Entrevistar propietarios de negocios similares 5 días
Identificar los recursos necesarios 4 días
Identificar los costes operativos de los elementos 2 días
Evaluar la visión del proyecto 4 días
Definir los requisitos de nuevas entidades 1 día
Identificar las oportunidades de compra continua del ne
Investigar posibilidades de realizar franquicias 1 día
Sintentizar el enfoque del negocio 1 día
Evaluar riesgos potenciales y beneficios 7 días
Evaluar el tamaño y la estabilidad del mercado 2 días
Evaluar la competencia 1 día
Evaluar la disponibilidad de los recursos necesarios 2 días
Evaluar la cuota de mercado inicial de forma realista 1 día
Determinar los requisitos financieros 2 días
Revisar la idoneidad del personal 1 día
Evaluar la rentabilidad inicial 1 día
Revisar y modificar el plan estratégico 2 días
Confirmar la decisión de poner en práctica el proyecto 0 días
Fase 2 - Definir la oportunidad del negocio 27 días
Definir el mercado 13 días
Obtener acceso a la información disponible 1 día
Crear un plan de análisis del mercado 2 días
25/09
Propietario
Administrador
Asesor empresarial
Gantt Chart
Listo
Inicio
Plan de proyecto par...
MS Project.doc - Microso...
Mis documentos
12:43 p.m.


Microsoft Project - Plan de proyecto para nuevo negocio
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Proyecto Colaborar Ventana ?
Informes
Generales...
Actividades actuales...
Costos...
Asignaciones...
Carga de trabajo...
Personalizados...
Seleccionar
Cerrar
Nombre de tarea
Fase 1 - Plan estratégico
Autoevaluación
Definir enfoque del negocio
Identificar las capacidades, información y soporte disp
Decidir si continuar con el proyecto
Evaluar la cuota de mercado inicial de forma realista
Determinar los requisitos financieros
Revisar la idoneidad del personal
Evaluar la rentabilidad inicial
Revisar y modificar el plan estratégico
Confirmar la decisión de poner en práctica el proyecto
Fase 2 - Definir la oportunidad del negocio
Definir el mercado
Obtener acceso a la información disponible
Crear un plan de análisis del mercado
Administrador
Asesor empresarial

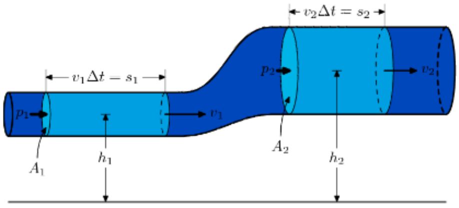
INDICE



SEGUNDA PARTE: LOS MODELOS DETERMINISTAS

Capitulo 3: LA PROGRAMACIÓN LINEAL.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g h_2 + P_2$$



Capitulo 4: EL APRENDIZAJE CON ASISTENCIA DEL COMPUTADOR.

EL SOFTWARE DE APLICACIÓN WINQSB.

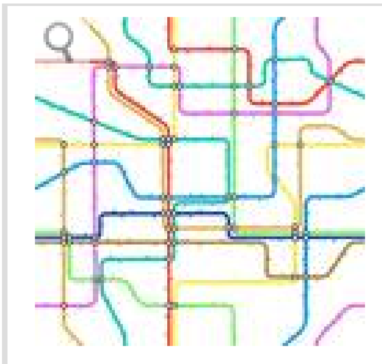
Capitulo 5: EL APRENDIZAJE CON ASISTENCIA DEL COMPUTADOR.

EL SOFTWARE DE APLICACIÓN LINDO.

Capitulo 6: EL APRENDIZAJE CON ASISTENCIA DEL COMPUTADOR.

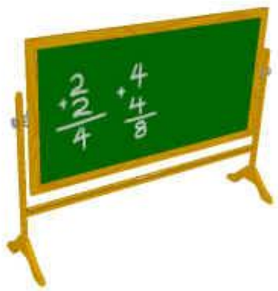
EL SOFTWARE MS EXCEL Y EL SOLVER.

Capitulo 7: EL MODELO DEL TRANSPORTE.



Capitulo 8: EL MODELO DE ASIGNACION.

Capitulo 9: OPTIMIZACION CON ENTEROS.



Capitulo 10: LA PROGRAMACIÓN NO LINEAL.

Capitulo 11: MODELAMIENTO PARA EL CONTROL DE INVENTARIOS.

TERCERA PARTE: LOS MODELOS PROBABILISTICOS

Capitulo 12: DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO e INCERTIDUMBRE

Capitulo 13: LA EVALUACION DE RIESGOS.

Capitulo 14: LA MATRIZ y EL ARBOL DE DECISIONES.

Capitulo 15: FENOMENOS DE ESPERA. COLAS

Capitulo 16: LA TECNICA DE SIMULACION.

Capitulo 17: CADENAS DE MARKOV

Capitulo 18: LA ADMINISTRACION DE PROYECTOS

ANEXO.

ANEXO: USO FUNCIONES DEL MS EXCEL

SUMAPRODUCTO

Multiplica los componentes correspondientes de las matrices suministradas y devuelve la suma de esos productos.

Sintaxis

SUMAPRODUCTO(**matriz1**;matriz2;matriz3; ...)

Matriz1, matriz2, matriz3, ... son de 2 a 255 matrices cuyos componentes desea multiplicar y después sumar.

Observaciones

✓ Los argumentos matriciales deben tener las mismas dimensiones. De lo contrario, SUMAPRODUCTO devuelve el valor de error #¡VALOR!.

✓ SUMAPRODUCTO considera las entradas matriciales no numéricas como 0.

Ejemplo

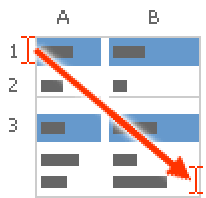
El ejemplo será más fácil de entender si lo copia a una hoja de cálculo en blanco.

⊞ Cómo copiar un ejemplo

1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.

2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda.

NOTA No seleccione los encabezados de fila ni de columna.



Seleccionar un ejemplo de la Ayuda

3. Presione CTRL+C.

4. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.

5. Para cambiar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+` (acento grave), o en la ficha **Fórmulas**, en el grupo **Auditoría de fórmulas**, haga clic en el botón **Mostrar fórmulas**.

	A	**B**	**C**	**D**
1	**Matriz 1**	**Matriz 1**	**Matriz 2**	**Matriz 2**
2	3	4	2	7
3	8	6	6	7
4	1	9	5	3
	Fórmula	**Descripción (resultado)**		
	=SUMAPRODUCTO(A2:B4;C2:D4)	Multiplica todos los componentes de las dos matrices y después suma los productos, es decir, 3*2 + 4*7 + 8*6 + 6*7 + 1*5 + 9*3. (156)		

Observación

El ejemplo anterior devuelve el mismo resultado que la fórmula SUMA(A2:B4*C2:D4) especificada como una matriz. El uso de matrices proporciona una solución más general para realizar operaciones similares a SUMAPRODUCTO. Por ejemplo, puede calcular la suma de los cuadrados de los elementos de A2:B4 utilizando la fórmula =SUMA(A2:B4^2) y presionando CTRL+MAYÚS+ENTRAR.

Cargar el complemento Solver

El complemento Solver es un programa de complemento de Microsoft Office Excel que está disponible cuando instala Microsoft Office o Excel. Sin embargo, para utilizarlo en Excel primero lo debe cargar.

1. Haga clic en el **Botón Microsoft Office** y, a continuación, haga clic en **Opciones de Excel**.

2. Haga clic en **Complementos** y, en el cuadro **Administrar**, seleccione **Complementos de Excel**.

3. Haga clic en **Ir**.

4. En el cuadro **Complementos disponibles**, active la casilla de verificación **Complemento Solver** y, a continuación, haga clic en **Aceptar**.

   Sugerencia Si **Complemento Solver** no aparece en la lista del cuadro **Complementos disponibles**, haga clic en **Examinar** para buscar el complemento.

   Si se le indica que el complemento Solver no está instalado actualmente en el equipo, haga clic en **Sí** para instalarlo.

5. Una vez cargado el complemento Solver, el comando **Solver** estará disponible en el grupo **Análisis** de la ficha **Datos**.

6. Opciones de Solver

1. Pueden controlarse las características avanzadas del proceso de solución, cargarse o guardarse definiciones de problemas y definirse parámetros para los problemas lineales y no lineales. Cada opción tiene una configuración predeterminada adecuada a la mayoría de los problemas.
2. **Tiempo máximo** Limita el tiempo que tarda el proceso de solución. Puede especificarse un valor tan grande como 32.367, pero el valor predeterminado 100 (segundos) es adecuado para la mayor parte de los pequeños problemas.
3. **Iteraciones** Limita el tiempo que tarda el proceso de solución mediante la limitación del número de cálculos provisionales. Aunque puede especificarse un valor tan grande como 32.767, el valor predeterminado 100 es adecuado para la mayor parte de los pequeños problemas.
4. **Precisión** Controla la precisión de las soluciones mediante el número que se especifica para determinar si el valor de una restricción cumple un objetivo o satisface un límite inferior o superior. Debe indicarse la precisión mediante una fracción entre 0 (cero) y 1. Cuantas más posiciones decimales tenga el número que se escriba, mayor será la precisión; por ejemplo, 0,0001 indica una precisión mayor que 0,01.
5. **Tolerancia** El porcentaje mediante el cual la celda objetivo de una solución satisface las restricciones externas puede diferir del valor óptimo verdadero y seguir considerándose aceptable. Esta opción sólo se aplica a los problemas que tienen restricciones enteras. Una tolerancia mayor tiende a acelerar el proceso de solución.
6. **Convergencia** Si el valor del cambio relativo en la celda objetivo es menor que el número del cuadro **Convergencia** para las últimas cinco iteraciones, Solver se detendrá. La convergencia se aplica únicamente a los problemas no lineales y debe indicarse mediante una fracción entre 0 (cero) y 1. Cuantas más posiciones decimales tenga el número que se escriba, menor será la convergencia; por ejemplo, 0,0001 indica un cambio relativo menor que 0,01. Cuanto menor sea el valor de convergencia, más tiempo se tardará en encontrar una solución.

7. **Adoptar un modelo lineal** Seleccione esta opción para acelerar el proceso de solución cuando todas las relaciones del modelo sean lineales y desee resolver un problema de optimización lineal.

8. **Adoptar no-negativo** Hace que Solver presuponga un límite de 0 (cero) para todas las celdas ajustables en las que no se haya establecido un límite inferior en el cuadro **Restricción** del cuadro de diálogo **Agregar restricción**.

9. **Usar escala automática** Seleccione esta opción para utilizar la escala automática cuando haya grandes diferencias de magnitud entre las entradas y los resultados; por ejemplo, cuando se maximiza el porcentaje de beneficios basándose en inversiones de millones de dólares.

10. **Mostrar resultado de iteraciones** Seleccione esta opción para hacer que Solver deje de mostrar temporalmente los resultados de cada iteración.

Cálculo

1. Especifica el enfoque que se utiliza para obtener los cálculos iniciales de las variables básicas en cada una de las búsquedas dimensionales.

2. **Tangente** Utiliza la extrapolación lineal de un vector tangente.

3. **Cuadrática** Utiliza la extrapolación cuadrática, que puede mejorar en gran medida los resultados de problemas no lineales.

Derivadas

1. Especifica la diferencia que se utiliza para calcular las derivadas parciales del objetivo y las funciones de la restricción.

2. **Progresiva** Se utilizan para la mayor parte de los problemas, en los que los valores de restricción cambian relativamente poco.

3. **Central** Se utiliza en los problemas en que las restricciones cambian rápidamente, en especial cerca de los límites. Aunque esta opción necesita más cálculos, puede ser útil cuando Solver devuelve un mensaje que indica que no puede mejorarse la solución.

Buscar

1. Especifica el algoritmo que se utiliza en cada iteración para determinar la dirección en que se hace la búsqueda.
2. **Newton** Utiliza un método quasi-Newton que normalmente necesita más memoria pero menos iteraciones que el método de gradiente conjugada.
3. **Conjugado** Necesita menos memoria que el método Newton, pero normalmente necesita más iteraciones para alcanzar un nivel de exactitud concreto. Use esta opción cuando se trate de un problema grande y la utilización de memoria deba tenerse en cuenta, o cuando al hacer un recorrido a través de iteraciones se descubra un progreso lento.
4. **Cargar modelo** Muestra el cuadro de diálogo **Cargar modelo**, donde puede especificar la referencia del modelo que desee cargar.
5. **Guardar modelo** Muestra el cuadro de diálogo **Guardar modelo**, donde puede especificar la ubicación en la que desee guardar el modelo. Haga clic únicamente cuando desee guardar más de un modelo con una hoja de cálculo; el primer modelo se guardará de forma automática.

DISTR.BETA

Devuelve la probabilidad para una variable aleatoria continua siguiendo una función de densidad de probabilidad beta acumulativa. La distribución beta se usa generalmente para estudiar las variaciones, a través de varias muestras, de un porcentaje que representa algún fenómeno, por ejemplo, el tiempo diario que la gente dedica a mirar televisión.

Sintaxis

DISTR.BETA(**x**;**alfa**;**beta**;A;B)

X es el valor, dentro del intervalo [A, B] con el que se evalúa la función.

Alfa es un parámetro de la distribución.

Beta es un parámetro de la distribución.

A es un límite inferior opcional del intervalo de x.

B es un límite superior opcional del intervalo de x.

Observaciones

✓ Si uno de los argumentos no es numérico, DISTR.BETA devuelve el valor de error #¡VALOR!.

✓ Si alfa ≤ 0 o si beta ≤ 0, DISTR.BETA devuelve el valor de error #¡NUM!.

✓ Si x < A, x > B, o si A = B, DISTR.BETA devuelve el valor de error #¡NUM!.

✓ Si pasa omite los valores para A y B, DISTR.BETA usa la distribución beta acumulada estándar, de manera que A = 0 y B = 1.

Ejemplo

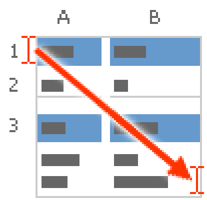
El ejemplo será más fácil de entender si lo copia a una hoja de cálculo en blanco.

Cómo copiar un ejemplo

1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.

2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda.

NOTA No seleccione los encabezados de fila ni de columna.



Seleccionar un ejemplo de la Ayuda

3. Presione CTRL+C.

4. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.

5. Para cambiar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+` (acento grave), o en la ficha **Fórmulas**, en el grupo **Auditoría de fórmulas**, haga clic en el botón **Mostrar fórmulas**.

	A	B
1	**Datos**	**Descripción**
2	2	Valor con el que se evalúa la función
3	8	Parámetro de la distribución
4	10	Parámetro de la distribución
5	1	Límite inferior
6	3	Límite superior
	Fórmula	**Descripción (resultado)**
	=DISTR.BETA(A2;A3;A4;A5;A6)	Función de densidad de probabilidad beta acumulativa para los parámetros anteriores (0,685470581)

DISTR.NORM

Devuelve la distribución normal para la media y desviación estándar especificadas. Esta función tiene un gran número de aplicaciones en estadística, incluidas las pruebas de hipótesis.

Sintaxis

DISTR.NORM(**x**;**media**;**desv_estándar**;**acum**)

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Media es la media aritmética de la distribución.

Desv_estándar es la desviación estándar de la distribución.

Acum es un valor lógico que determina la forma de la función. Si el argumento acum es VERDADERO, la función DISTR.NORM devuelve la función de distribución acumulada; si es FALSO, devuelve la función de masa de probabilidad.

Observaciones

✓ Si los argumentos media o desv_estándar no son numéricos, DISTR.NORM devuelve el valor de error #¡VALOR!

✓ Si el argumento desv_estándar ≤ 0, la función DISTR.NORM devuelve el valor de error #¡NUM!

✓ Si el argumento media = 0, desv_estándar = 1 y acumulado = VERDADERO, la función DISTR.NORM devuelve la distribución normal estándar, DISTR.NORM.ESTAND.

- ✓ La ecuación para la función de densidad normal (acumulado = FALSO) es:

- ✓ $$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

- ✓ Cuando acumulado = VERDADERO, la fórmula es el entero desde el infinito negativo a x de la fórmula dada.

Ejemplo

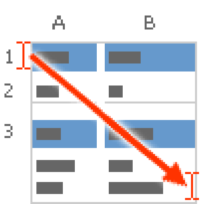
El ejemplo será más fácil de entender si lo copia a una hoja de cálculo en blanco.

Cómo copiar un ejemplo

1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.

2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda.

NOTA No seleccione los encabezados de fila ni de columna.



Seleccionar un ejemplo de la Ayuda

3. Presione CTRL+C.

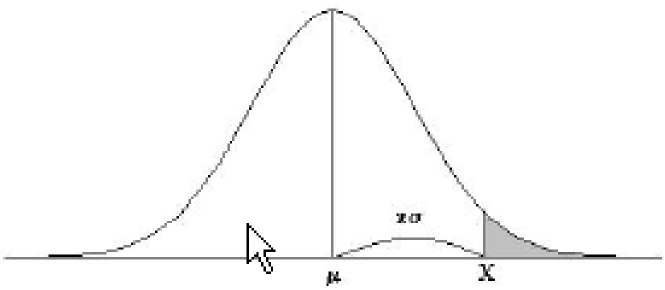
4. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.

5. Para cambiar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+` (acento grave), o en la ficha **Fórmulas**, en el grupo **Auditoría de fórmulas**, haga clic en el botón **Mostrar fórmulas**.

	A	B
1	**Datos**	**Descripción**
2	42	Valor cuya distribución desea obtener
3	40	Media aritmética de la distribución
4	1,5	Desviación estándar de la distribución
	Fórmula	**Descripción (resultado)**
	=DISTR.NORM(A2;A3;A4;VERDADERO)	Función de distribución acumulativa para los términos anteriores (0,908789)
	=DISTR.NORM(A2;A3;A4;FALSO)	Función de masa de probabilidad para los términos anteriores (0,10934005)

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$P\,[Z > 1] = 0.1587$
$P\,[Z > 1.96] = 0.0250$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

BIBLIOGRAFIA

TAHA, Hamdy A. Investigación de Operaciones. Una Introducción, 6º Edic. 1998. Pearson. Incluye el software TORA.

EPPEN, G D, Gould, F.J., SCHMIDT, C.P., Moore, Jefrrey H y Weatherford, Larry. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. 5º Edición.2000. Edit Pearson. Prentice Hall

ANDERSON, David, Sweeney, Dennis, y Williams, Thomas. Introducción a los Modelos Cuantitativos para la Administración. Grupo Editorial Iberoamericana. 1993

MATHUR, Kamlesh. SOLOW, Daniel. Investigación de Operaciones. Prentice Hall. 1996.

BONINI, HAUSMAN, BIERMAN, Análisis Cuantitativo para los Negocios. Mc Graw Hill, 9a.Edición. 1999

WINSTON, Wayne. Investigación de Operaciones. Grupo Editorial Iberoamérica. 1994.

BAZARAA, M. y JARVIS, J., Programación Lineal y Flujo en Redes, Limusa, 1976.

BRONSON, R., Investigación de Operaciones, Serie Schaum, Mc Graw Hill, 1990.

HILLIER, F. y LIEBERMAN, G., Introducción a la Investigación de Operaciones, Mc Graw Hill, 2003.

RENDER,STAIR Jr Y HANNA. Métodos cuantitativos para los negocios.9º Edic. Pearson.2006.

PRAWDA, Juan. Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Volumen I y Vol II. Edit Limusa.1995

KAUFFMAN, A. Métodos, modelos de la investigación operativa. Tomos I y II. Compañía Editorial continental.

CASTILLO E., CONEJO A., PEDREGAL P., GARCIA R. y ALGUACIL N.2002 Formulación y Resolución de Modelos de programación Matemática en Ingeniería y Ciencia. Centro de Documentación de la Fac. de Ciencias Económicas UNMP. //eco.mdp.edu.ar

BAZARAA, M., JARVIS, J., SHERALI, H., Programación Lineal y Flujo en Redes, Limusa, 1998.

JUAN MARTÍN GARCÍA Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas. Catedra UNESCO. UPC . Barcelona. España.2007.ISBN 84-607-9304-4

JAMES R. EVANS Y DAVID L. OLSON. Introduction to Simulation and Risk Analysis" Prentice Hall, 1998.

BANKS J., CARSON J.S, NELSON B.L. Y NICOL D.M. "Discrete-Event System Simulation", , Prentice Hall, 2001.

WAYNE L. WILSTON."Simulation Modeling using @RISK" de Duxbury, 2001.

MICHAEL PIDD "Computer Simulation in Management Science" , Wiley, 1998.

JERRY BANKS "Handbook of Simulation. Wiley, 1998.

WAYNE L. WINSTON Y S. CHRISTIAN ALBRIGHT "Practical Management Science", second edition, de. Duxbury, 2001.

BERNARD P. ZEIGLER, HERBERT PRAEHOFER Y TAG GON KIM. "Theory of Modeling and Simulation", second edition, Academic Press, 2000.

ROSS SHELDON "Simulación", segunda edición M. Prentice Hall, 1999.

COSS BU "Simulación: un enfoque práctico" . Editorial Limusa.

WIENER, Norbert, Cybernetics MIT Press,1948.

FORRESTER, Jay W., Industrial Dynamics MIT Press,1961.

FORRESTER, Jay ,Urban Dynamics, MIT Press,1969.

FORRESTER, Jay ,World Dynamics, Wright Allen Press,1971.

FORRESTER, Jay ,Principles of Systems, Wright Allen Press,1969.

MEADOWS, D.H. and D.L., The Limits to Growth ,Mentor,1972.

MEADOWS, D.H. and D.L., Beyond The Limits, D,ChelseaG.P,1992.

MEADOWS, D.H. and D.L., The Global Citizen, Island Press, 1991.

RICHARDSON, G.P Feedback Thought in Social Science and Systems Theory,.,University of Pennsylvania Press, 1991.

MARTÍNEZ,S & REQUENA,A Dinámica de Sistemas, , Alianza Ed., 1987.

GOODMAN, M.R Study Notes in System Dynamics,. MIT Press,1980.

ARACIL,J. Introducción a la Dinámica de Sistemas, Alianza Ed.,1983.

HANNON ,B Y RUTH, M Modeling Dynamics Biological Systems , , Springer,1997.

HANNON ,B Y RUTH, M Modeling Dynamic Economic Systems,Springer,1997.

HARGROVE J.L. Dynamic Modeling in The Health Sciences, , Springer,1998.

FEURZEIG,W & ROBERTS, NANCY .Modeling and Simulation in Science and Mathematics Education, ,Springer, 1999.

DEATON,M &. WINEBRAKE,J.J. Dynamic Modeling of Environmental Systems , , Springer Verlag , 2000.

HANNON ,B Y RUTH, Dynamic Modeling, 2 ed., Springer Verlag, 2001.

FORD , A. Modeling The Environment, , Island Press, 1999.

STERMAN,J.D. ,Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World, Mc-Graw Hill, 2000.

ODUM H.T. & E. Modeling for all Scales, ,Academic Press,2000.

CASTI, J . Reality Rules: Picturing the World in Mathematics Vol 1 y 2, , Wiley,1991.

CASTI, J Complexification, Harper Collins, 1994.

CASTI, J 24. Would –be Worlds: How Simulation is Changing the Frontiers of Science?, ,Wiley, 1997.

PINE, D Emerging Syntheses in Science, Ed., Addison-Wesley, 1988.

Material en Internet

Software **WINQSB** download de la pagina de la cátedra o de http://taylor.us.es/swansea/software/index.html y apuntes de Introducción al QSB de la cátedra.

MICROSOFT EXCEL, Office 2003. http://office.microsoft.com/en-us/default.aspx

Software **WINQSB** download de la pagina de la cátedra o de http://taylor.us.es/swansea/software/index.html y apuntes de Introducción al QSB de la cátedra

Aplicación del WINQSB a pronósticos en http://www.csupomona.edu/~sparisay/Courses/egr573/WinQSB-forecast/sld001.htm

@RISK 4.5. http://www.palisade.com/ free trial y Brochure

Andrés Codá: *"El modelo de transporte"* http://webs.sinectis.com.ar/acoda/trabajos/transpor.zip

"Investigación de Operaciones", Antecedentes, definición, método científico, y una serie de muestras de ejemplos sobre este tema en particular.
(http://www.geocities.com/CollegePark/Bookstore/5256/presupuestos/INVOPER.htm)

REVISTAS
SIAM - JOURNAL ON OPTIMIZATION (EEUU)

URL: (http://www.siam.org/journals/siopt/optcont.htm)
Revista editada por "Society for Industrial and Applied Mathematics"

» INVESTIGACION OPERATIVA (Brasil)

URL: (http://www.lcg.ufrj.br/ioperativa/**)**
Revista Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa.

» RIS (España)

URL: (http://www.dii.uchile.cl/revistas/frame_ris.html)
Revista Ingenieria de Sistemas.

» Annals of Operations Research (EEUU)

URL: (http://www.baltzer.nl/anor/anor.asp)
"Annals of Operations Research" consta de una serie de volumenes dedicados a presentar las principlales tendencias y campos de la Investigación Operativa.

» MATHEMATICAL PROGRAMMING (EEUU)

URL: (http://www.caam.rice.edu/~mathprog/mpsjournal/)
"Mathematical Programming" publlica artículos originales dedicados a Programación matemática, con especial atenación a la optimización de funciones con varias variables. Los articulos se dividen en dos: Unos dedicados a Series A y otros a Series B.

» Journal of Applied Probability Advances in Applied Probability (Australia)

URL: (http://www.shef.ac.uk/uni/companies/apt/apt2.html)
La revista "Journal of Applied Probability Advances in Applied Probability" trata de resolver, a traves de la probabilidad, problemas relacionados con la Fisica, medicina, biologia, etc...

» INTERFACES (EEUU)

URL: (http://silmaril.smeal.psu.edu/interfaces/)
Interfaces tiene como objetivo mejorar la comunicación entre el administradores y profesionales en OR/MS y de comunicar a la comunidad académica de dichas prácticas.

» TIMO SALMI (EEUU)

URL: (http://www.uwasa.fi/~ts/opas/jott/jottjour.html)

", Timo Salmi, de la Universidad de Vaasa (Finlandia) recoge una selección amplia de revistas académicas de Contabilidad, Finanzas e Investigación Operativa. Para cada una de ellas está la dirección de la página Web (si tiene) y en servicios como EBSCOo SwetsNet.

MICROSOFT EXCEL, Office 2003. http://office.microsoft.com/en-us/default.aspx
Tutorial del SOLVER en http://www.solver.com/tutorial.htm
MICROSOFT OFFICE PROJECT PROFESIONAL. Vers 2003.
http://office.microsoft.com/en-us/FX010857951033.aspx

WINQSB Software download de la página de la cátedra o de
http://taylor.us.es/swansea/software/index.html

@RISK 4.5.Software http://www.palisade.com/ free trial y Brochure

SADIO. Sociedad Argentina de Informática e Investigación Operativa.
http://www.sadio.org.ar/index.php .Ver su Capitulo estudiantil

ALIO - Asociación Latino-Iberoamericana de Investigación Operativa
http://www.dc.uba.ar/alio/

SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional
http://www.sobrapo.org.br

SEIO. Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. España
http://www.seio.es/

SOCIO. Sociedad Colombiana de Investigación de Operaciones http://www.socio.org.co

CENTRO DE GESTIÓN DE OPERACIONES. UNIVERSIDAD DE CHILE. Referencia a Publicaciones. http://www.dii.uchile.cl/~cgo/publicaciones.htm

IFORS - International Federation of Operational Research Societies. http://www.ifors.org

EURO - Asociación de Sociedades Europeas de Investigación Operativa pertenecientes a IFORS http://www.euro-online.org

DSI - Decision Sciences Institute
http://www.decisionsciences.org

ASSUME The Association of Statistics Specialists Using Microsoft Excel
http://www.jiscmail.ac.uk/cgi-bin/filearea.cgi?LMGT1=ASSUME&a=get&f=/welcome.html

DR. IGNACIO PONZONI. Universidad Nacional del Sur. Bahia Blanca
http://cs.uns.edu.ar/~ip/index.htm

OPTIMIZACION SOFWARE http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/SoftwareGuide/index.html

INTERNATIONAL INSTITUTE OF FORECASTING. /www.forecasters.org/

LINDO Systems: www.lindo.com

VENSIM. Ventana Systems Inc. www.vensim.com

POWERSIM. www.powersim.com

I SEE SYSTEMS: www.iseesystems.com

SITIO DE DESCARGA DE LINDO, TORA, WINQSB y otros: http://personalpuntocom.pe.tripod.com/winqsb.html

DECISIÓN TREE ANÁLYSIS: http://www.vanguardsw.com/decisionpro/jdtree.htm

JAVA. Aplicaciones estadísticas en Java: http://www.ruf.rice.edu/~lane/stat_sim/

MS EXCEL Funciones en Excel: http://www.cs.us.es/cursos/ai-2003/Lecciones/Indice%20del%20tutorial.htm

RISK INSTITUTE: http://www.riskinstitute.org/PERI/PTR/ptr_riskfi.htm