

PRENTICE **PRACTICA**

Electricidad y Magnetismo

Ejercicios y Problemas Resueltos

Francisco Gascón Latasa
Ana Bayón Rojo
Rafael Medina Ferro
Miguel Ángel Porras Borrego
Félix Salazar Bloise

PEARSON
Prentice
Hall

Electricidad y Magnetismo

Ejercicios y Problemas Resueltos

Electricidad y Magnetismo

Ejercicios y Problemas Resueltos

FRANCISCO GASCÓN LATASA

Catedrático de Universidad
ETS de Arquitectura
Universidad de Sevilla

ANA BAYÓN ROJO

RAFAEL MEDINA FERRO

MIGUEL ÁNGEL PORRAS BORREGO

FÉLIX SALAZAR BLOISE

Profesores Titulares de Universidad
ETSI de Minas
Universidad Politécnica de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Gascón, F.; Bayón, A.; Medina, R.; Porras, M. A.; Salazar, F.

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2004

ISBN: 84-205-4214-8

MATERIA: Electromagnetismo, 537

Formato 195 × 270 mm

Páginas: 432

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*).

DERECHOS RESERVADOS

© 2004 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Gascón, F.; Bayón, A.; Medina, R.; Porras, M. A.; Salazar, F.

ISBN: 84-205-4214-8

Depósito legal: M.

PEARSON PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Equipo editorial:

Editor: Miguel Martín-Romo

Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:

Director: José Antonio Clares

Técnico: José Antonio Hernán

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

ÍNDICE GENERAL

PRÓLOGO	XI
CAPÍTULO 1. TEORÍA DE CAMPOS	1
1.1. Campos escalares	1
1.1.1. Derivada direccional y gradiente	1
1.1.2. Integrales de un campo escalar	2
1.2. Campos vectoriales	3
1.2.1. Circulación y flujo de un campo vectorial	3
1.2.2. Divergencia y rotacional	4
1.2.3. Teoremas de la divergencia y de Stokes	6
1.3. Otras relaciones de interés	6
1.3.1. Operador vectorial nabla	6
1.3.2. Operadores de segundo orden. Laplaciano. Teorema de Green	7
1.3.3. Campos en coordenadas esféricas y cilíndricas	8
1.4. Campos conservativos. Potencial	9
Problemas resueltos	11
Problemas propuestos	22
CAPÍTULO 2. ELECTROSTÁTICA	25
2.1. Carga eléctrica	25
2.2. Ley de Coulomb	26

2.3. Campo eléctrico	28
2.4. Potencial electrostático	29
2.5. Ley de Gauss	30
2.5.1. Forma integral de la ley de Gauss	30
2.5.2. Forma diferencial de la ley de Gauss y ecuaciones de la electrostática	31
Problemas resueltos	32
Problemas propuestos	62
CAPÍTULO 3. EL CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA	65
3.1. Materiales conductores en equilibrio electrostático	65
3.2. Materiales dieléctricos	67
3.2.1. Vector polarización eléctrica	68
3.2.2. Cargas de polarización	68
3.2.3. Relación de constitución	69
3.2.4. Vector desplazamiento eléctrico. Ley de Gauss	69
3.2.5. Condiciones en la frontera entre dos medios	71
3.3. Energía electrostática	71
3.4. Sistemas de conductores	72
3.4.1. Coeficientes de potencial y capacidad	72
3.4.2. Condensadores	73
Problemas resueltos	73
Problemas propuestos	102
CAPÍTULO 4. CORRIENTE CONTINUA Y CIRCUITOS	107
4.1. Vector densidad de corriente	107
4.2. Intensidad de corriente	108
4.3. Ecuación de continuidad. Aplicación a corriente continua	108
4.3.1. Ecuación de continuidad	108
4.3.2. Ecuación de continuidad en corriente continua	109
4.3.3. Ecuación de continuidad en un hilo con corriente continua	109
4.4. Ley de Ohm. Conductividad y resistividad.	110
4.5. Conductor filiforme con corriente continua. Resistencia	110
4.6. Potencia que suministra el campo eléctrico. Efecto Joule	111
4.7. Generadores de corriente continua	112
4.7.1. Fuerza electromotriz de un generador	112
4.7.2. Potencia suministrada por un generador	113
4.8. Motores de corriente continua	114

4.8.1. Fuerza contraelectromotriz	114
4.8.2. Potencia transformada por un motor	115
4.9. Ley de Ohm en un circuito	115
4.10. Ley de Ohm en una rama	116
4.11. Redes de corriente continua	117
4.11.1. Leyes de Kirchhoff	117
4.11.2. Método de las corrientes de malla. Regla de Maxwell	118
4.12. Red pasiva. Equivalencia	118
4.13. Red activa. Equivalencia	120
4.13.1. Teorema de Thevenin	121
4.13.2. Teorema de Norton	121
Problemas resueltos	121
Problemas propuestos	149
CAPÍTULO 5. MAGNETOSTÁTICA	153
5.1. Ecuaciones puntuales de la magnetostática	153
5.2. Forma integral de las ecuaciones	154
5.3. El potencial vector	156
5.4. Ley de Biot y Savart	157
5.5. Fuerzas sobre corrientes	158
5.6. Momento sobre un circuito	158
5.7. El dipolo magnético	159
Problemas resueltos	159
Problemas propuestos	210
CAPÍTULO 6. MAGNETISMO DE LA MATERIA	213
6.1. Magnetización de la materia	213
6.2. Corrientes de magnetización	214
6.3. El campo magnético \mathbf{H}	214
6.4. Ley de Ampère para el campo \mathbf{H}	215
6.5. Tipos de magnetismo	216
6.6. Circuitos magnéticos	216
Problemas resueltos	218
Problemas propuestos	259
CAPÍTULO 7. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	265
7.1. Fuerza electromotriz	265

7.1.1. Fuerza electromotriz inducida en un circuito estacionario por un campo magnético variable con el tiempo	266
7.1.2. Fuerza electromotriz inducida en un circuito móvil en un campo magnético estacionario	267
7.1.3. Caso general	267
7.2. Autoinducción e inducción mutua	268
7.2.1. Coeficiente de autoinducción	268
7.2.2. Coeficiente de inducción mutua	268
7.3. Energía y fuerzas	269
7.3.1. Energía magnética	269
7.3.2. Fuerzas entre circuitos	271
Problemas resueltos	271
Problemas propuestos	297
CAPÍTULO 8. CORRIENTES VARIABLES CON EL TIEMPO	303
8.1. Corrientes lentamente variables en elementos lineales	303
8.2. Componentes básicos	304
8.2.1. Resistencia ideal	304
8.2.2. Condensador ideal	304
8.2.3. Autoinducción ideal	305
8.2.4. Inducción mutua ideal	305
8.2.5. Generador ideal	306
8.3. Régimen transitorio	306
8.4. Corriente alterna en régimen permanente	308
8.4.1. Magnitudes complejas	308
8.4.2. Impedancia de los componentes básicos	309
8.4.3. Impedancias equivalentes	311
8.4.4. Leyes de Kirchhoff	312
8.4.5. Potencia	312
8.4.6. Resonancia	312
Problemas resueltos	313
Problemas propuestos	339
CAPÍTULO 9. MOVIMIENTO DE CARGAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS	343
9.1. Fuerza de Lorentz	343
9.2. Carga en un campo eléctrico	343
9.3. Carga en un campo magnético	344

9.4. Carga en un campo electromagnético	345
9.5. Ciclotrón	346
9.6. Betatrón	347
Problemas resueltos	347
Problemas propuestos	359
CAPÍTULO 10. LEYES DE MAXWELL	361
10.1. Crítica de la ley de Ampère	361
10.2. Leyes de Maxwell. Forma diferencial	362
10.3. Leyes de Maxwell. Forma integral	363
10.4. Superficie de discontinuidad	363
10.5. Potencial escalar	365
10.6. Onda electromagnética linealmente polarizada	365
10.7. Reflexión y refracción	367
Problemas resueltos	368
Problemas propuestos	383
CAPÍTULO 11. ALGUNAS APLICACIONES A LA INGENIERÍA	385
APÉNDICE A. PROGRAMAS MATLAB	409
APÉNDICE B. PROPIEDADES ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS DE CIER-	
TOS MATERIALES	411
B.1. Constantes físicas	411
B.2. Resistividad y coeficiente de temperatura	412
B.3. Permitividades relativas	413
B.4. Permeabilidades relativas	413
BIBLIOGRAFÍA	415

PRÓLOGO

La presente obra ha sido desarrollada por los autores, después de haber impartido diversos cursos de Electricidad y Magnetismo en la ETSI de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid. El libro va dirigido, fundamentalmente, a estudiantes del primer ciclo de Escuelas Técnicas y Facultades de Ciencias. Asimismo, puede servir de consulta para quienes cursen asignaturas relacionadas con el Electromagnetismo, como Electrotecnia y Electrónica.

El objetivo de esta publicación es la de exponer los conceptos fundamentales del Electromagnetismo a través de problemas, haciendo, no obstante, una breve introducción teórica al principio de cada Capítulo. Los ejercicios, en la medida de lo posible, se estructuran siguiendo el mismo orden que los conceptos desarrollados en la introducción teórica, y dentro de éste, en grado de dificultad creciente.

El libro contiene más de doscientos problemas resueltos, muchos de los cuales han sido propuestos por el Departamento de Física Aplicada a los Recursos Naturales de la Universidad Politécnica de Madrid, en los exámenes oficiales de la ETSI de Minas, en los últimos veinte años.

El texto está estructurado en once capítulos en los que se han intentado abarcar las cuestiones más básicas del Electromagnetismo. De este modo, en el primer Capítulo se presentan algunos de los conceptos matemáticos más empleados en esta materia. El segundo y tercero se dedican al campo eléctrico en el vacío y en la materia, tratando en un tema aparte los circuitos de corriente continua, dada la importancia que tienen en distintas aplicaciones tecnológicas. El quinto y sexto, se refieren a la magnetostática y al magnetismo en las sustancias, respectivamente. En ellos se exponen diferentes procedimientos para calcular el campo magnético de distintos sistemas, tanto en el vacío como en presencia de materia, con especial interés en los circuitos magnéticos, en este último caso. En el Capítulo séptimo, se estudia el fenómeno de la inducción electromagnética, haciendo especial hincapié en los distintos orígenes de la fuerza electromotriz, dejando para el Capítulo octavo las corrientes lentamente variables con el tiempo. Dada la importancia que tiene en distintas ramas de la ciencia y la tecnología, hemos querido mostrar como un Capítulo independiente el referente al movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos; en éste se exponen los casos más representativos dándole un enfoque didáctico. Por último, el Capítulo décimo, que engloba todo lo anteriormente visto, se dedica a las ecuaciones de Maxwell, habiéndose elegido un punto de vista más conceptual que matemático; ello hace que no se hayan propuesto problemas donde sea necesario resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. A nuestro entender, se pueden contestar numerosas preguntas utilizando un aparato matemático sencillo, sin por ello perder rigor ni claridad. Para concluir el libro, se ha dedicado el Capítulo

undécimo a mostrar algunas de las muchas aplicaciones de la Teoría Electromagnética, incluyendo aclaraciones teóricas en los ejercicios donde ha sido necesario, razón por la cual, no aparece desarrollo teórico alguno al principio del tema.

No queremos terminar sin mostrar nuestro agradecimiento a todos los miembros de nuestros Departamentos, y muy especialmente al Dr. Faustino Fernández López, por su contribución docente a lo largo de sus muchos años de experiencia. Asimismo, agradecemos a la Dra. Mercedes Garrido Rodríguez su apoyo en la elaboración del texto y, naturalmente, a nuestros alumnos, sin los cuales no habría sido posible la realización de este libro.

Madrid, julio de 2004.

Los autores.

TEORÍA DE CAMPOS

Las magnitudes físicas y leyes fundamentales que gobiernan los fenómenos eléctricos y magnéticos se expresan matemáticamente en términos de campos escalares y vectoriales, e involucran operaciones diferenciales e integrales sobre dichos campos. De su definición, propiedades y relaciones mutuas se ocupa la teoría de campos. El objeto de este capítulo introductorio es recopilar y explicar los conceptos básicos de dicha teoría que serán utilizados a lo largo de los siguientes capítulos.

1.1. CAMPOS ESCALARES

Una magnitud que toma valores diferentes en distintos puntos del espacio se denomina **campo escalar**. Si \mathbf{r} es el vector de posición de un punto del espacio respecto de cierto punto O de referencia, el campo escalar puede definirse por medio de cierta ley $U = U(\mathbf{r})$. Si además se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) con origen en el punto O , con vectores unitarios $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ según los ejes X, Y, Z (Figura 1.1), la ley del campo puede expresarse por $U = U(x, y, z)$ ¹.

Un campo escalar puede representarse dibujando algunas de sus **superficies de nivel** (Figura 1.1), definidas por la Ecuación $U = \text{constante}$, es decir, como las superficies en que el campo toma un valor constante, análogo tridimensional de las curvas de nivel de un mapa topográfico.

1.1.1. Derivada direccional y gradiente

En cada punto, un campo escalar tiene en general infinitas derivadas distintas dependiendo de la dirección del desplazamiento. La **derivada direccional** en cada punto \mathbf{r} y en la dirección especificada por el vector unitario \mathbf{g} (Figura 1.1) se define como

$$\left[\frac{dU(\mathbf{r})}{ds} \right]_{\mathbf{g}} \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{g}) - U(\mathbf{r})}{\Delta s}. \quad (1.1)$$

En particular, las tres derivadas direccionales según los ejes cartesianos se llaman **derivadas**

¹En lo que sigue se supondrá que los campos son suficientemente regulares como funciones de x, y, z en su dominio de definición como para que las operaciones diferenciales e integrales que se explicarán a continuación estén bien definidas.

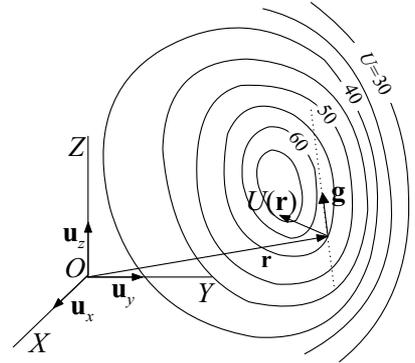
parciales,

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \equiv \left[\frac{dU(\mathbf{r})}{ds} \right]_{\mathbf{u}_x}, \quad \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \equiv \left[\frac{dU(\mathbf{r})}{ds} \right]_{\mathbf{u}_y}, \quad \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \equiv \left[\frac{dU(\mathbf{r})}{ds} \right]_{\mathbf{u}_z}. \quad (1.2)$$

Si se conoce la ley $U = U(x, y, z)$, las derivadas parciales respecto de cada una de las variables se calculan utilizando las reglas habituales de derivación para funciones de una variable y considerando el resto de las variables como constantes.

El **gradiente** ∇U (o $\text{grad} U$) de un campo escalar U en un punto del espacio es un vector cuya dirección y sentido son aquellos en los que tiene lugar la derivada direccional máxima, y su módulo coincide con dicha derivada direccional máxima. El vector gradiente es entonces perpendicular a la superficie de nivel que pasa por el punto considerado (Fig 1.1), apuntando en el sentido de crecimiento de U . En función de las derivadas parciales en un sistema de coordenadas cartesiano, el gradiente se expresa como

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z. \quad (1.3)$$



El diferencial dU del campo escalar en un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$, viene dado, en función del gradiente, por

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.4)$$

y la derivada direccional según \mathbf{g} , en la que el desplazamiento es $d\mathbf{r} = d\mathbf{s}\mathbf{g}$, por

$$\left[\frac{dU(\mathbf{r})}{ds} \right]_{\mathbf{g}} = \frac{\partial U}{\partial x} g_x + \frac{\partial U}{\partial y} g_y + \frac{\partial U}{\partial z} g_z = \nabla U \cdot \mathbf{g}, \quad (1.5)$$

es decir, como la proyección del gradiente sobre la dirección de \mathbf{g} .

1.1.2. Integrales de un campo escalar

De todas las integrales de un campo escalar que se pueden definir, la **integral de volumen** es la más utilizada. Si V es un volumen dado (Figura 1.2), la integral de U sobre el volumen V se define como

$$\int_V U(\mathbf{r}) dV \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i) \Delta V_i, \quad (1.6)$$

donde los volúmenes ΔV_i recubren V de modo que cada uno de ellos tiende a cero cuando su número N tiende a infinito, y $U(\mathbf{r}_i)$ el valor del campo escalar en un punto del volumen ΔV_i . De acuerdo con esta definición, el miembro de la izquierda en la Ecuación (1.6) suele interpretarse como la suma (continua) de los productos $U(\mathbf{r})dV$ de los valores del campo en cada punto \mathbf{r} del volumen V por los elementos infinitesimales de volumen dV entorno a cada punto. En coordenadas cartesianas el elemento de volumen suele tomarse como $dV = dx dy dz$.

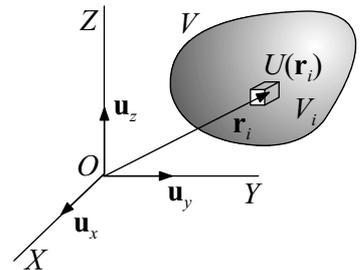


Figura 1.2. Construcción para la definición de integral de volumen.

De manera análoga pueden definirse la integral de un campo escalar sobre una superficie S y sobre una curva Γ . Si ΔS_i y Δl_i recubren S y Γ , respectivamente,

$$\int_S U(\mathbf{r})dS = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i)\Delta S_i, \quad \int_{\Gamma} U(\mathbf{r})dl = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i)\Delta l_i. \quad (1.7)$$

1.2. CAMPOS VECTORIALES

Un **campo vectorial** es una magnitud vectorial que toma diferentes valores en distintos puntos del espacio. Sus valores pueden determinarse por medio de cierta ley $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, que en un sistema de coordenadas cartesianas podrá expresarse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(x, y, z)\mathbf{u}_x + F_y(x, y, z)\mathbf{u}_y + F_z(x, y, z)\mathbf{u}_z. \quad (1.8)$$

Los campos vectoriales suelen representarse por medio de sus **líneas de campo** o líneas vectoriales, curvas trazadas de tal manera que el vector campo en cada punto resulta ser tangente a ellas (Figura 1.3). A partir de la ley (1.8), las ecuaciones de las líneas de campo pueden determinarse por

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (1.9)$$

A las líneas de campo se les asigna además un sentido, que coincide con el del campo vectorial. Nótese que, aunque adecuadas para muchos propósitos, dichas líneas no dan información alguna sobre el módulo del campo.

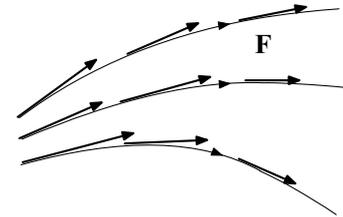


Figura 1.3. Líneas de campo de un campo vectorial.

1.2.1. Circulación y flujo de un campo vectorial

Las integrales de un campo vectorial más utilizadas en electricidad y magnetismo son la circulación y el flujo de un campo vectorial.

La **circulación** o integral de línea de un campo vectorial \mathbf{F} a lo largo de una curva Γ entre dos puntos A y B [Figura 1.4(a)] se define como

$$W_F(\Gamma) \equiv \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{l}_i, \quad (1.10)$$

donde $\Delta \mathbf{l}_i$ representan desplazamientos entre dos puntos consecutivos de una partición de N puntos de la curva Γ , realizada de modo que cuando N tiende a infinito, cada desplazamiento tiende a cero, y $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ es el valor del campo en un punto de cada elemento de la partición. De acuerdo con esta definición, la expresión del segundo miembro de la expresión (1.10) se interpreta como la suma (continua) de los valores de circulaiones infinitesimales $dW \equiv \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, siendo \mathbf{F} y $d\mathbf{l}$, respectivamente, el valor del campo y de un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la curva en cada uno de sus puntos. Puesto que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{F}||d\mathbf{l}| \cos \theta \equiv F dl \cos \theta$, siendo θ el ángulo que forman \mathbf{F} y $d\mathbf{l}$, la circulación (1.10) puede también escribirse como

$$W_F(\Gamma) = \int_A^B F dl \cos \theta. \quad (1.11)$$

La circulación depende pues de la forma y longitud de la curva Γ que une A con B y de los valores de la proyección $F \cos \theta$ de \mathbf{F} sobre Γ . Si \mathbf{F} es perpendicular a Γ en todos sus puntos, entonces la circulación es nula.

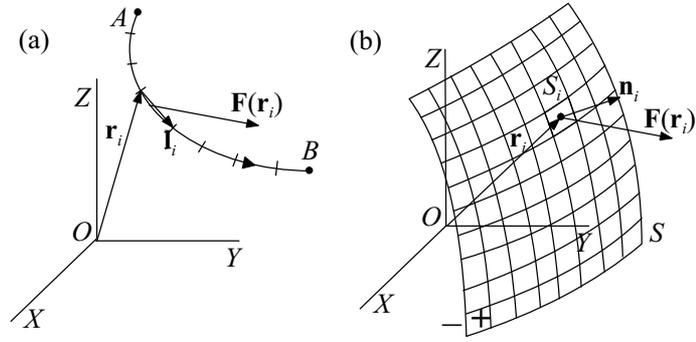


Figura 1.4. Construcciones para las definiciones de (a) circulación y (b) flujo de un campo vectorial.

El **flujo** de un campo vectorial \mathbf{F} a través de una superficie S [Figura 1.4(b)] se define como

$$\Phi_F(S) \equiv \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i, \quad (1.12)$$

donde los elementos de superficie ΔS_i forman un recubrimiento de S , de modo que cuando su número N tiende a infinito, el área de cada uno de ellos tiende a cero, $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ es el valor del campo en un punto de cada elemento, y \mathbf{n}_i un vector unitario y perpendicular a la superficie en dicho punto. Si la superficie es cerrada, la normal \mathbf{n}_i se toma hacia su exterior, o cara positiva. Si la superficie es abierta, se toma también hacia la cara positiva, eligiéndose en este caso las caras positiva y negativa arbitrariamente (véase Figura 1.4). Frecuentemente el flujo se escribe también como

$$\Phi_F(S) = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.13)$$

integral que se interpreta como la suma (continua) de los flujos infinitesimales $d\Phi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ a través de los elementos infinitesimales de superficie dS , siendo \mathbf{F} y $d\mathbf{S} \equiv dS\mathbf{n}$, respectivamente, el valor del campo y el vector elemento de área perpendicular a la superficie en cada uno de sus puntos. Si además se escribe $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{F}||d\mathbf{S}| \cos \theta \equiv F dS \cos \theta$, donde θ es el ángulo que forman \mathbf{F} y $d\mathbf{S}$ en cada punto de la superficie, el flujo puede expresarse como

$$\Phi_F(S) = \int_S F dS \cos \theta. \quad (1.14)$$

El valor de un flujo está entonces determinado por la forma y extensión de la superficie S , y por los valores de las proyecciones $F \cos \theta$ de \mathbf{F} sobre S . En particular, el flujo es nulo si \mathbf{F} es tangente a la superficie en todos sus puntos.

Para especificar que la circulación y el flujo se calculan a lo largo de una curva o superficie cerradas, el símbolo de integral se sustituye a menudo por el símbolo \oint .

1.2.2. Divergencia y rotacional

Los operadores diferenciales fundamentales que actúan sobre campos vectoriales son la divergencia y el rotacional.

La **divergencia** de un campo vectorial \mathbf{F} es un campo escalar, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ($\text{div } \mathbf{F}$), definido en cada punto como el flujo a través de una superficie cerrada que contiene el punto, por unidad de volumen encerrado y en el límite en que dicho volumen tiende a cero [Figura 1.5(a)], esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{V}. \quad (1.15)$$

La divergencia es una medida del flujo saliente del campo vectorial en el punto donde el volumen límite ($V \rightarrow 0$) está centrado. Los puntos del espacio en que la divergencia es positiva se denominan por ello puntos fuente del campo, porque en ellos parece surgir el campo vectorial. Los puntos en que la divergencia es negativa se llaman sumideros, por la razón contraria. Los campos vectoriales que en una región del espacio tienen divergencia nula se denominan solenoidales en dicha región. Si el campo \mathbf{F} se expresa por medio de sus componentes cartesianas, la divergencia puede calcularse como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (1.16)$$

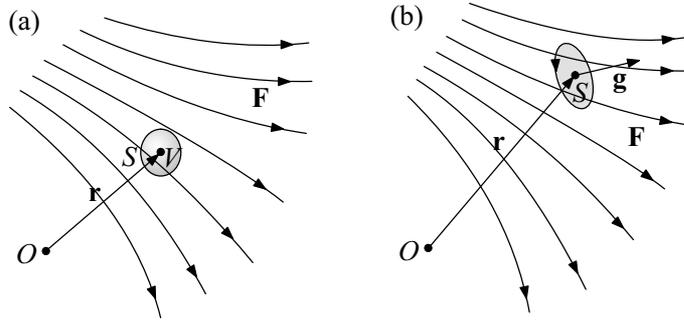


Figura 1.5. Construcciones para las definiciones de divergencia y rotacional.

El **rotacional** de un campo vectorial \mathbf{F} es otro campo vectorial, $\nabla \times \mathbf{F}$ (también **rot** \mathbf{F} o **curl** \mathbf{F}), cuya componente según una dirección cualquiera, especificada por el vector unitario \mathbf{g} , y en un punto de vector de posición \mathbf{r} , se define como la circulación a lo largo de una curva cerrada Γ que rodea al punto, contenida en un plano perpendicular a \mathbf{g} , por unidad de área encerrada S y en el límite que dicha área tiende a cero [Figura 1.5(b)], esto es,

$$(\nabla \times \mathbf{F})_{\mathbf{g}} \equiv \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{S}, \quad (1.17)$$

donde además el sentido de recorrido de la curva (o de $d\mathbf{l}$) se determina a partir de \mathbf{g} con la regla de la mano derecha (del tornillo o del sacacorchos). El rotacional es una medida de la tendencia del vector \mathbf{F} a rotar alrededor del punto considerado (si \mathbf{F} fuese el campo de velocidades de un fluido, su rotacional está directamente relacionado con la velocidad angular o vorticidad). Los campos vectoriales con rotacional nulo en una región del espacio suelen denominarse irrotacionales en dicha región. Si el campo \mathbf{F} se expresa por medio de sus componentes cartesianas, las componentes cartesianas del rotacional se pueden calcular como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z, \quad (1.18)$$

expresión que puede recordarse si se observa que coincide con el desarrollo del “determinante”

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.19)$$

Puede demostrarse que la divergencia y el rotacional de un campo vectorial determinan dicho campo. Si $\rho = \nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{F}$ representan las llamadas **fuentes escalares** y **fuentes vectoriales** del campo \mathbf{F} , respectivamente, verificando la condición $\rho, \mathbf{j} \rightarrow 0$ para $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, entonces \mathbf{F} viene dado por

$$\mathbf{F} = \nabla U + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.20)$$

donde U y \mathbf{A} se denominan **potencial escalar** y **potencial vector**, respectivamente, dados por

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{r} dV', \quad (1.21)$$

siendo $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ la distancia entre el **punto campo** \mathbf{r} y el **punto fuente** \mathbf{r}' .

1.2.3. Teoremas de la divergencia y de Stokes

El **teorema de la divergencia** (o de Ostrogradski-Gauss) permite calcular un flujo como una integral de volumen. Afirma que el flujo saliente de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral de su divergencia sobre el volumen encerrado:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1.22)$$

donde ∂V es la frontera o superficie que limita a V [Figura 1.6(a)]².

El **teorema de Stokes** permite transformar una circulación en un flujo. Según este teorema, la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada coincide con el flujo de su rotacional a través de una superficie (continua) cuya frontera sea dicha curva,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.23)$$

si la cara positiva de S (sentido de $d\mathbf{S}$) y el sentido de la circulación (de $d\mathbf{l}$) están relacionados por la regla de la mano derecha o del sacacorchos [Figura 1.6(b)].

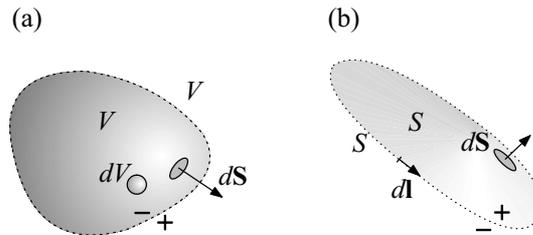


Figura 1.6. Sentidos del flujo y de la circulación en los teoremas (a) de la divergencia y (b) de Stokes.

1.3. OTRAS RELACIONES DE INTERÉS

1.3.1. Operador vectorial nabla

El gradiente, la divergencia y el rotacional pueden entenderse como el resultado de la acción del **operador vectorial nabla** [también llamado “del”, “atled” (delta al revés) o de Hamilton], cuyas componentes cartesianas son

$$\nabla = \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.24)$$

sobre campos escalares y vectoriales, ya que, formalmente, el gradiente se obtiene al “multiplicar” nabla por un campo escalar, y la divergencia y el rotacional se obtienen, respectivamente,

²En términos más rigurosos, la validez del teorema de la divergencia requiere continuidad de \mathbf{F} en V y su frontera ∂V .

como resultado de multiplicar, escalar y vectorialmente, nabra por un campo vectorial. La derivada direccional según el unitario \mathbf{g} , puede también escribirse como el resultado de multiplicar $(\mathbf{g} \cdot \nabla)$ por un campo escalar. La utilidad del vector nabra estriba en que todas las expresiones siguientes pueden encontrarse fácilmente a partir de las reglas de derivación ordinaria y considerando a nabra como un vector que cumple las reglas habituales del álgebra vectorial.

Si un campo escalar o vectorial se obtiene como combinación lineal o producto de varios, su gradiente, divergencia y rotacional, cuando están bien definidos, pueden calcularse por medio de las siguientes expresiones.

$$\nabla(aU + bV) = a\nabla U + b\nabla V, \quad (1.25)$$

$$\nabla(UV) = (\nabla U)V + U(\nabla V), \quad (1.26)$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G} \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot (U\mathbf{F}) = U\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla U, \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}), \quad (1.30)$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}, \quad (1.31)$$

$$\nabla \times (U\mathbf{F}) = U\nabla \times \mathbf{F} + \nabla U \times \mathbf{F}, \quad (1.32)$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}, \quad (1.33)$$

donde a y b son constantes.

1.3.2. Operadores de segundo orden. Laplaciano. Teorema de Green

Los operadores gradiente, divergencia y rotacional pueden aplicarse repetidamente a campos escalares y vectoriales, dando lugar a operadores diferenciales de segundo orden y superior.

Todo gradiente es irrotacional, y todo rotacional es solenoidal,

$$\nabla \times \nabla U = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (1.34)$$

La divergencia del gradiente de un campo escalar es de particular importancia, recibiendo el nombre de **laplaciano** (Δ , o ∇^2) del campo escalar,

$$\Delta U \equiv \nabla \cdot \nabla U, \quad (1.35)$$

y puede calcularse en coordenadas cartesianas como

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (1.36)$$

El gradiente de la divergencia y el rotacional del rotacional de un campo vectorial están relacionados por la importante expresión

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}, \quad (1.37)$$

estando definido el laplaciano de un campo vectorial como el laplaciano de cada una de sus componentes cartesianas,

$$\Delta \mathbf{F} \equiv \Delta F_x \mathbf{u}_x + \Delta F_y \mathbf{u}_y + \Delta F_z \mathbf{u}_z. \quad (1.38)$$

El **teorema de Green**, que involucra integrales de volumen del laplaciano y es consecuencia del teorema de la divergencia, afirma que si ∂V es la frontera de un volumen V , entonces

$$\int_V (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dV = \oint_{\partial V} (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.39)$$

y en particular, si $U_1 = 1$, la integral de volumen del laplaciano resulta ser igual al flujo del gradiente a través de su frontera,

$$\int_V \Delta U dV = \oint_{\partial V} \nabla U \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.40)$$

1.3.3. Campos en coordenadas esféricas y cilíndricas

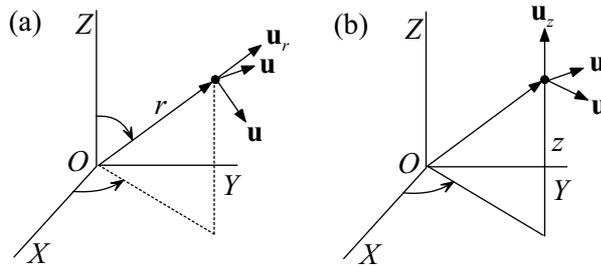


Figura 1.7. Definición de coordenadas (a) esféricas y (b) cilíndricas.

Además de en coordenadas cartesianas, la posición de los puntos del espacio puede expresarse por medio de sus **coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ) [Figura 1.7(a)], relacionadas con las cartesianas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (1.41)$$

o

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1.42)$$

los campos escalares por medio de una ley $U = U(r, \theta, \phi)$, y los campos vectoriales por medio de sus componentes según la triada ortogonal dextrógira de vectores unitarios asociados $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi)$,

$$\mathbf{F} = F_r(r, \theta, \phi)\mathbf{u}_r + F_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{u}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{u}_\phi, \quad (1.43)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z & \text{o} & \quad \mathbf{u}_x = \cos \phi \sin \theta \mathbf{u}_r + \cos \phi \cos \theta \mathbf{u}_\theta - \sin \phi \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{u}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{u}_y - \sin \theta \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_y &= \sin \phi \sin \theta \mathbf{u}_r + \sin \phi \cos \theta \mathbf{u}_\theta + \cos \phi \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{u}_x + \cos \phi \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z &= \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta \end{aligned} \quad (1.44)$$

De igual modo, la posición de un punto puede determinarse por sus **coordenadas cilíndricas** (ρ, ϕ, z) [Figura 1.7(b)], relacionadas con las cartesianas por

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (1.45)$$

o

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \quad (1.46)$$

los campos escalares por una ley $U = U(\rho, \phi, z)$, y las componentes de un campo vectorial por medio de sus componentes según la triada ortogonal dextrógira de vectores unitarios $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z)$,

$$\mathbf{F} = F_\rho(\rho, \phi, z)\mathbf{u}_\rho + F_\phi(\rho, \phi, z)\mathbf{u}_\phi + F_z(\rho, \phi, z)\mathbf{u}_z, \quad (1.47)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\rho &= \cos \phi \mathbf{u}_x + \sin \phi \mathbf{u}_y & \text{o} & \quad \mathbf{u}_x = \cos \phi \mathbf{u}_\rho - \sin \phi \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{u}_x + \cos \phi \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_y &= \sin \phi \mathbf{u}_\rho + \cos \phi \mathbf{u}_\phi \\ \mathbf{u}_z &= \mathbf{u}_z & \mathbf{u}_z &= \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para campos expresados en coordenadas esféricas, el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano pueden calcularse con las fórmulas de la siguiente tabla:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi, \quad (1.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}, \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right] \mathbf{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\phi, \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}, \quad (1.52)$$

y para campos expresados en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z, \quad (1.53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad (1.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{u}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{u}_z, \quad (1.55)$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (1.56)$$

donde las distintas derivadas parciales se definen como las derivadas direccionales según los vectores unitarios correspondientes. Para el cálculo de integrales también son útiles los desplazamientos y volúmenes infinitesimales

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \operatorname{sen} \theta d\phi \mathbf{u}_\phi, \quad dV = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi, \quad (1.57)$$

en coordenadas esféricas, y

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{u}_\rho + \rho d\phi \mathbf{u}_\phi + dz \mathbf{u}_z, \quad dV = \rho d\rho d\phi dz, \quad (1.58)$$

en coordenadas cilíndricas.

1.4. CAMPOS CONSERVATIVOS. POTENCIAL

Un campo vectorial \mathbf{F} se dice **conservativo** si deriva de un campo escalar, es decir, si existe un campo escalar U tal que su gradiente sea el campo vectorial,

$$\mathbf{F} = \nabla U. \quad (1.59)$$

El campo escalar U se denomina en este caso **función potencial** de \mathbf{F} . En un dominio de definición simplemente conexo, las definiciones siguientes de campo vectorial conservativo son equivalentes a la dada.

1) Un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo si y sólo si

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad (1.60)$$

lo que proporciona el método más sencillo de establecer el carácter conservativo de un campo vectorial.

2) Un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo si y sólo si su circulación entre dos puntos A y B cualesquiera,

$$\int_A^B \Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.61)$$

es independiente del camino de circulación Γ , pudiéndose evaluar ésta como el incremento de la función potencial entre A y B ,

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = U_B - U_A. \quad (1.62)$$

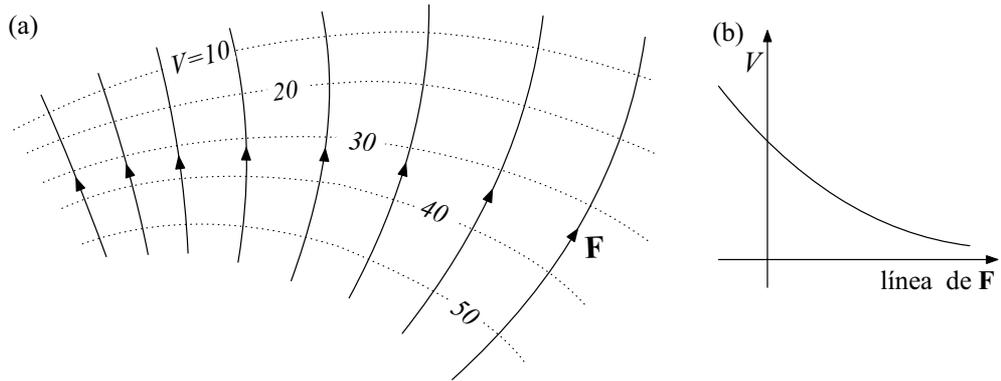


Figura 1.8. (a) Líneas de un campo vectorial conservativo y superficies de nivel de su potencial. (b) Ilustración de la variación del potencial a lo largo de una línea del campo vectorial.

3) Un campo vectorial es conservativo si y sólo si la circulación a lo largo de toda curva cerrada es nula,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (1.63)$$

Por motivos históricos, el campo escalar que se utiliza con más frecuencia en física no es la función potencial U , sino el potencial V , definido como $V \equiv -U$, diciéndose entonces que un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo si existe V tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (1.64)$$

y verificándose entonces que

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B. \quad (1.65)$$

Obviamente, si V es un potencial válido de \mathbf{F} , existen infinitos potenciales $V' = V + c$ que difieren en una constante c arbitraria.

Los campos conservativos son especialmente importantes en física pues representan fuerzas, como la electrostática, bajo cuya acción la energía de un sistema se conserva. El potencial V representa entonces la energía potencial asociada a la fuerza \mathbf{F} . Desde el punto de vista geométrico la relación entre un campo conservativo y su potencial V es la ilustrada en la Figuras 1.8(a) y (b). Las líneas de campo de \mathbf{F} son, por definición de gradiente, perpendiculares a las superficies de nivel de V [Figura 1.8(a)], y debido al signo menos, su sentido es el de decrecimiento del potencial V . El potencial V siempre disminuye en el sentido de una línea de campo, como se ilustra en la Figura 1.8(b).

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1.1** Determinar el gradiente del campo escalar $U = x^2 + y^2 + z^2$ y su derivada direccional según el vector $(\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z)/\sqrt{2}$ en el punto $(0, 1, 1)$.

Resolución

El vector gradiente en cualquier punto (x, y, z) se puede calcular, de la Ecuación (1.3), como

$$\nabla U = 2x\mathbf{u}_x + 2y\mathbf{u}_y + 2z\mathbf{u}_z = 2\mathbf{r},$$

y la derivada direccional en el punto especificado, de la Ecuación (1.5), como

$$\left[\frac{dU}{ds} \right]_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}} (0, 1, 1) = (2\mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_z \right) = 2\sqrt{2}.$$

- 1.2** De un campo escalar se conoce que es de la forma $U = y(x + y) + f(z)$, que su derivada en la dirección paralela al vector $4\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_z$ en un punto cualquiera vale $3z^4 + (4/5)y + 6$, y que el punto $(1, -1, 0)$ pertenece a la superficie de nivel de valor 2. Determinar completamente dicho campo escalar.

Resolución

Para determinar U basta calcular $f(z)$. Para ello utilizamos los datos del enunciado. Como la derivada en la dirección del vector unitario $\mathbf{g} = (4\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_z)/5$ es $3z^4 + (4/5)y + 6$, de la Ecuación del gradiente (1.3) y su relación [Ecuación (1.5)] con la derivada direccional, podemos escribir

$$\begin{aligned} 3z^4 + \frac{4}{5}y + 6 &= \left[\frac{dU}{ds} \right]_{\mathbf{g}} \\ &= \nabla U \cdot \mathbf{g} = \left[y\mathbf{u}_x + (x + 2y)\mathbf{u}_y + \frac{df}{dz}\mathbf{u}_z \right] \cdot \left[\frac{(4\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_z)}{5} \right] \\ &= \frac{4}{5}y + \frac{3}{5} \frac{df}{dz}, \end{aligned}$$

de donde $df/dz = 5z^4 + 10$. Integrando se obtiene $f(z) = z^5 + 10z + C$, donde C es una constante a determinar. Imponiendo que el punto $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ pertenezca a la superficie de nivel $U = y(x + y) + z^5 + 10z + C = 2$, se encuentra $C = 2$, y por tanto

$$U = y(x + y) + z^5 + 10z + 2.$$

- 1.3** Dada una función escalar $U = U(r)$ cuyo valor sólo depende de la distancia r a un punto O , demostrar que su gradiente está dado por $(dU/dr)\mathbf{u}_r$, siendo \mathbf{u}_r un vector unitario radial.

Resolución

La demostración puede realizarse partiendo de la expresión del gradiente en coordenadas cartesianas [Ecuación (1.3)]

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z.$$

Por depender U solamente de r , podemos escribir,

$$\nabla U = \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{u}_z.$$

Como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se encuentra $\partial r/\partial x = x/r$, $\partial r/\partial y = y/r$, $\partial r/\partial z = z/r$, y también

$$\nabla U = \frac{dU}{dr} \left(\frac{x}{r} \mathbf{u}_x + \frac{y}{r} \mathbf{u}_y + \frac{z}{r} \mathbf{u}_z \right).$$

El último vector es el vector de posición de un punto dividido por su módulo, \mathbf{r}/r , o sea, el vector unitario radial \mathbf{u}_r . Obtenemos entonces

$$\nabla U = \frac{dU}{dr} \mathbf{u}_r. \quad (1.66)$$

como se quería demostrar. La Ecuación (1.66) es en realidad la Ecuación (1.49) para el gradiente en coordenadas esféricas cuando el campo escalar $U(r, \theta, \phi)$ sólo depende de la coordenada radial r .

1.4 Si \mathbf{F} es un vector constante, determinar $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r})$.

Resolución

De la Ecuación (1.3) para el gradiente en coordenadas cartesianas, o de la Ecuación (1.24) que define el vector nabla, se tiene,

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) = \left(\mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_x x + F_y y + F_z z).$$

Realizando las derivadas parciales se obtiene

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z = \mathbf{F}.$$

1.5 Sea ϕ el ángulo que forma la proyección del vector de posición de un punto sobre el plano XY , como se indica en la Figura 1.9(a). Determinar la expresión del gradiente de un campo escalar $U = U(\phi)$ cuyo valor sólo depende de ϕ .

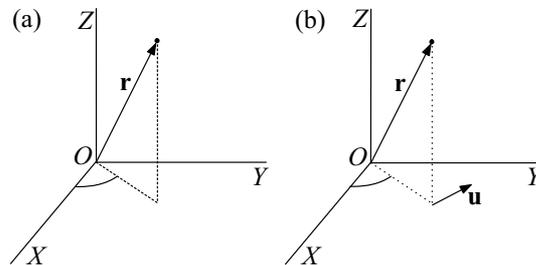


Figura 1.9. Un campo escalar puede depender sólo de ϕ .

Resolución

Partiendo de la Ecuación (1.3) para el gradiente en coordenadas cartesianas y teniendo en cuenta que U es una función exclusiva de ϕ , escribimos

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z = \frac{dU}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{dU}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{dU}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{u}_z.$$

Como además $\phi = \tan^{-1}(y/x)$ [Figura 1.9(b)], obtenemos, derivando parcialmente,

$$\nabla U = \frac{dU}{d\phi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{u}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{u}_y \right).$$

Si consideramos además que $\sin \phi = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \phi = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, y que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ [Figura 1.9(b)], se tiene finalmente

$$\nabla U = \frac{dU}{d\phi} \frac{1}{\rho} (-\sin \phi \mathbf{u}_x + \cos \phi \mathbf{u}_y)$$

o

$$\nabla U = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\phi} \mathbf{u}_\phi,$$

donde $\mathbf{u}_\phi = -\sin \phi \mathbf{u}_x + \cos \phi \mathbf{u}_y$ es el vector unitario mostrado en la Figura 1.9(b). Este ejercicio es en realidad la demostración de la Ecuación (1.53) para el gradiente en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) en el caso particular de que el campo escalar depende sólo del ángulo ϕ .

1.6 Dado el campo escalar $U = x^2 + y^2 + z^2$, calcular sus integrales de volumen sobre (a) un cubo de lado L centrado en el origen y sobre (b) una esfera de radio R también centrada en el origen.

Resolución

(a) Para la integral sobre el cubo, tomando como diferencial de volumen $dV = dx dy dz$, y teniendo en cuenta que, en el cubo, $-L/2 \leq x \leq L/2$, $-L/2 \leq y \leq L/2$, $-L/2 \leq z \leq L/2$, se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{\text{cubo}} U dV &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx dy dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2 dx dy dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 dx dy dz \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} L L + L \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} L + L L \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{L^5}{4}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

(b) La integral sobre la esfera es más difícil de realizar en coordenadas cartesianas, puesto que los límites de cada una de las variables x, y, z depende del resto de las variables. En coordenadas esféricas, en cambio, $U = r^2$, tomando como diferencial de volumen [Ecuación (1.57)] $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, y teniendo en cuenta que en la esfera $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, podemos escribir

$$\int_{\text{esfera}} U dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{r^5}{5} \Big|_0^R (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{5} \pi R^5.$$

En cálculos prácticos (véase Capítulo 2), y cuando el campo tiene simetría esférica, es corriente simplificarlos tomando el diferencial volumen $dV = 4\pi r^2 dr$ de una capa esférica de radio r y espesor diferencial dr , lo que equivale a haber realizado la integral en las variables θ y ϕ en la expresión anterior. Se escribe entonces

$$\int_{\text{esfera}} U dV = \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi R^5.$$

1.7 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = yz\mathbf{u}_x + xz\mathbf{u}_y + xy\mathbf{u}_z$, determinar su circulación a lo largo de la curva Γ intersección de las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x = y$, desde el punto $O(0, 0, 0)$ hasta el punto $A(2, 2, 8)$.

Resolución

La manera más directa y sistemática de calcular una circulación consiste en parametrizar la curva Γ . Definiendo, por conveniencia, el parámetro $t \equiv x$, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 2t^2,$$

de donde los desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{l}$ a lo largo de Γ están dados por

$$d\mathbf{l} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z = dt\mathbf{u}_x + dt\mathbf{u}_y + 4t dt\mathbf{u}_z,$$

y los valores de \mathbf{F} sobre la curva por

$$\mathbf{F} = 2t^3\mathbf{u}_x + 2t^3\mathbf{u}_y + t^2\mathbf{u}_z.$$

La circulación puede entonces calcularse como

$$W_F(\Gamma) = \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 (2t^3 dt + 2t^3 dt + t^4 4t) dt = \int_0^2 8t^3 dt = 32,$$

donde se ha usado además que $t = 0$ para el punto O y que $t = 2$ para el punto $A(2, 2, 8)$. Nótese que cualquier otra parametrización de la curva arrojaría el mismo resultado.

- 1.8** Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = 2R^2\mathbf{u}_x + yz\mathbf{u}_y + xy\mathbf{u}_z$, hallar la circulación de \mathbf{F} a lo largo de la curva ABC constituida por la recta AB y el cuadrante de circunferencia BC mostrados en la Figura 1.10.

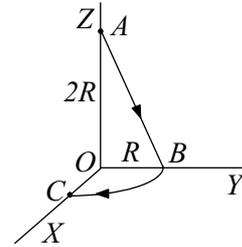


Figura 1.10. Curva ABC de circulación.

Resolución

Para el cálculo de la circulación es conveniente descomponerla en la suma de las circulaciones en los tramos AB y BC . Para la primera podemos escribir

$$W_F(AB) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (2R^2\mathbf{u}_x + yz\mathbf{u}_y + xy\mathbf{u}_z) \cdot (dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z). \quad (1.68)$$

En la recta AB se verifica que $x = 0$, $z = 2R - 2y$, y por consiguiente $dx = 0$, $dz = -2dy$ (relaciones que equivalen a parametrizar la curva, haciendo y la función de parámetro), siendo además $y = 0$ en el punto A , e $y = R$ en el punto B . La Ecuación (1.68) da entonces

$$W_F(AB) = \int_0^R 2y(R - y) dy = \frac{R^3}{3}.$$

En el cuadrante de circunferencia BC , análogamente,

$$W_F(BC) = \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^C (2R^2\mathbf{u}_x + yz\mathbf{u}_y + xy\mathbf{u}_z) \cdot (dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z), \quad (1.69)$$

y es suficiente considerar que en el plano XY , $z = 0$, y por tanto $dz = 0$, que $x = 0$ en B y $x = R$ en C , para transformar la Ecuación (1.69) en

$$W_F(BC) = 2R^2 \int_0^R dx = 2R^3.$$

La circulación entre A y C vendrá entonces dada por

$$W_F(AC) = W_F(AB) + W_F(BC),$$

1.9 Determinar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{u}_z$ a lo largo de la hélice de la Figura 1.11, de radio R y con paso de vuelta R , desde el punto A hasta el punto B situado N vueltas más arriba.

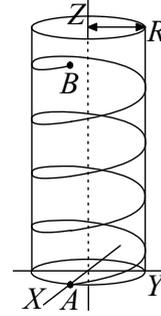


Figura 1.11. Hélice para el cálculo de la circulación.

Resolución

Como en los ejercicios anteriores, el cálculo puede realizarse usando coordenadas cartesianas, aunque la simetría cilíndrica del problema indica que el cálculo se simplificará haciendo uso de las coordenadas cilíndricas.

esto es,

$$W_F(AC) = \frac{7R^3}{3} .$$

En coordenadas cartesianas, unas ecuaciones paramétricas de la hélice son

$$x = R \cos \left(\frac{2\pi z}{R} \right) , \quad y = R \sin \left(\frac{2\pi z}{R} \right) , \quad z = z .$$

Las componentes cartesianas del desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{l}$ a lo largo de la hélice vienen entonces dadas por

$$dx = -2\pi z \sin \left(\frac{2\pi z}{R} \right) dz , \quad dy = 2\pi z \cos \left(\frac{2\pi z}{R} \right) dz , \quad dz = dz ,$$

y los valores del campo sobre la hélice por $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{u}_z = R^2\mathbf{u}_z$. Para la circulación entre A y B escribimos entonces

$$\begin{aligned} W_F(AB) &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{NR} R^2\mathbf{u}_z \cdot \left[-2\pi z \sin \left(\frac{2\pi z}{R} \right) dz\mathbf{u}_x + 2\pi z \cos \left(\frac{2\pi z}{R} \right) \mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z \right] \\ &= R^2 \int_0^{NR} dz = NR^3 , \end{aligned}$$

donde se ha usado que $z = 0$ en A y que $z = NR$ en B .

En coordenadas cilíndricas [Ecuación (1.45)], la expresión de la hélice en función del parámetro z es $\rho = R$, $\phi = 2\pi z/R$, $z = z$. De aquí que el desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{l}$ a lo largo de la hélice [Ecuación (1.58)] sea

$$d\mathbf{l} = d\rho\mathbf{u}_\rho + \rho d\phi\mathbf{u}_\phi + dz\mathbf{u}_z = 2\pi dz\mathbf{u}_\phi + dz\mathbf{u}_z ,$$

y los valores del campo sobre la hélice sean $\mathbf{F} = \rho^2\mathbf{u}_z = R^2\mathbf{u}_z$. La circulación resulta entonces

$$W_F(AB) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{NR} R^2\mathbf{u}_z \cdot (2\pi dz\mathbf{u}_\phi + dz\mathbf{u}_z) = R^2 \int_0^{NR} dz = NR^3 .$$

1.10 Determinar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_x + 2z\mathbf{u}_y$ a través del semidisco S de la Figura 1.12, de radio 2, tomando como positiva la cara que se dirige hacia las x positivas.

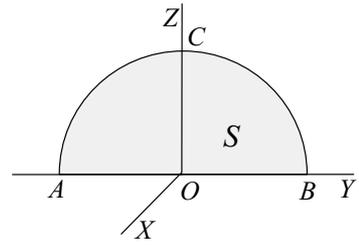


Figura 1.12. Semidisco S .

Resolución

En la Expresión (1.13) del flujo de un campo vectorial, el vector elemento de área tiene en este caso la expresión $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_x$, y los valores del campo sobre la superficie son $\mathbf{F} = -\mathbf{u}_x + 2z\mathbf{u}_y$. Se tiene entonces

$$\Phi_F(S) = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-\mathbf{u}_x + 2z\mathbf{u}_y) \cdot dS\mathbf{u}_x = - \int_S dS.$$

La última integral puede identificarse con el área del semidisco de radio 2, obteniéndose entonces

$$\Phi_F(S) = -2\pi.$$

1.11 Si \mathbf{A} es un vector constante, evaluar las siguientes cantidades: (a) $\nabla \cdot \mathbf{r}$, (b) $\nabla \times \mathbf{r}$, (c) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, (d) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$, (e) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$.

Resolución

Puesto que en coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$ y $\mathbf{A} = A_x\mathbf{u}_x + A_y\mathbf{u}_y + A_z\mathbf{u}_z$, todas las expresiones anteriores pueden evaluarse fácilmente utilizando las Expresiones (1.3), (1.16) y (1.19) del gradiente, divergencia y rotacional, respectivamente, en coordenadas cartesianas.

(a)

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

(b)

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

(c)

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z) = A_x\mathbf{u}_x + A_y\mathbf{u}_y + A_z\mathbf{u}_z = \mathbf{A}.$$

(d)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(A_y z - A_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z x - A_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x y - A_y x) = 0.$$

(e)

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (A_y z - A_z y) & (A_z x - A_x z) & (A_x y - A_y x) \end{vmatrix} = 2A_x\mathbf{u}_x + 2A_y\mathbf{u}_y + 2A_z\mathbf{u}_z = 2\mathbf{A}.$$

1.12 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$, determinar su flujo a través de la superficie cónica ABC de la Figura 1.13.

Resolución

El teorema de la divergencia [Ecuación (1.22)] proporciona un método alternativo al cálculo directo de un flujo incluso, en ocasiones, si la superficie es abierta. Para poder aplicar el teorema de la divergencia, cerramos la superficie cónica por medio de tres superficies planas contenidas en los tres planos coordenados. El flujo saliente a través de la superficie cerrada S así formada se puede ahora determinar a partir del teorema de la divergencia como

$$\Phi_F(S) = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 2 \int_V dV = 2V = \frac{\pi a^3}{6},$$

donde se ha usado que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2$ y que el volumen del cuarto de cono es $\pi a^3/12$. Por otro lado, el flujo a través de S puede escribirse como la suma de los flujos a través de cada una de las superficies que componen S , es decir, $\Phi_F(S) = \Phi_F(ABC) + \Phi_F(OAC) + \Phi_F(OBC) + \Phi_F(OAB)$. Téngase en cuenta que como el flujo $\Phi_F(S)$ proporcionado por el teorema de la divergencia es saliente, el sentido de los flujos a través de las distintas superficies debe tomarse en concordancia. La última relación nos permite calcular el flujo pedido a través de la superficie cónica como

$$\begin{aligned} \Phi_F(ABC) &= \Phi_F(S) - \Phi_F(OAC) - \Phi_F(OBC) - \Phi_F(OAB) \\ &= \frac{\pi a^3}{6} - \Phi_F(OAC) - \Phi_F(OBC) - \Phi_F(OAB), \end{aligned} \quad (1.70)$$

siendo los tres últimos flujos más sencillos de calcular por tratarse de superficies planas. Se tiene

$$\Phi_F(OAB) = \int_{OAB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{OAB} (x\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z) \cdot (-\mathbf{u}_z dS) = 0,$$

ya que en la superficie OAB , el vector elemento de área debe tomarse como $d\mathbf{S} = -dS\mathbf{u}_z$, y que $z = 0$ en todo punto de esta superficie. Por la misma razón se tiene $\Phi_F(OBC) = 0$. Para el tercer flujo,

$$\Phi_F(OAC) = \int_{OAC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{OAC} (x\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z) \cdot (-\mathbf{u}_y dS) = a \int_{OAC} dS = \frac{\pi a^3}{4},$$

ya que para el cuarto de circunferencia OAC , $d\mathbf{S} = -dS\mathbf{u}_y$, siendo además su área $\pi a^2/4$. Sustituyendo los resultados anteriores en la Ecuación (1.70), se obtiene el flujo buscado como

$$\Phi_F(ABC) = -\frac{\pi a^3}{12},$$

entendiéndose que se refiere al flujo a través de la superficie cónica desde la cara de detrás hacia la cara de delante de la Figura 1.13.

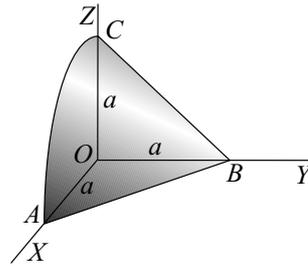


Figura 1.13. Superficie cónica ABC .

1.13 Determinar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = xy^2z\mathbf{u}_x + y^3z\mathbf{u}_y + (x^2 + y^2 - 2y^2z^2)\mathbf{u}_z$ a través del trozo de paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ sobre el plano XY , como se muestra en la Figura 1.14(a).

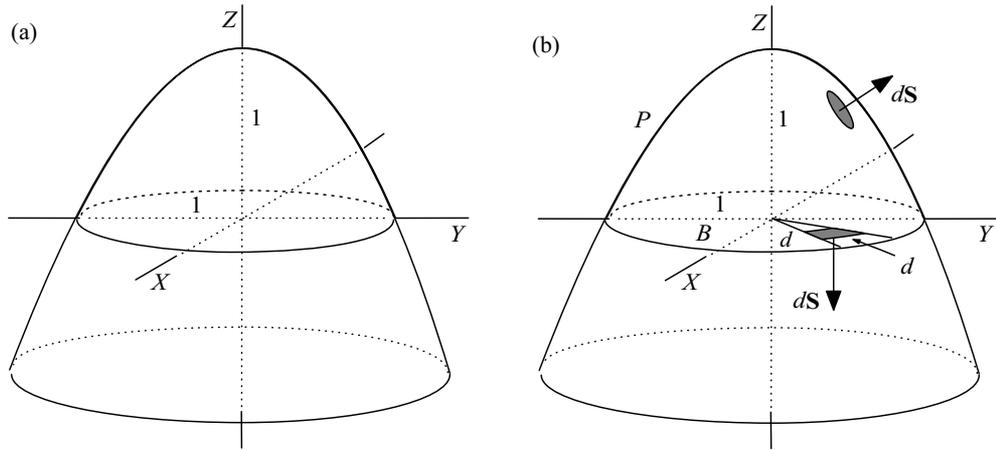


Figura 1.14. (a) Trozo de paraboloides sobre el plano XY . (b) Construcción para la resolución del problema.

Resolución

Puesto que la superficie no es plana, el cálculo directo del flujo es complicado, y de nuevo es conveniente recurrir al teorema de la divergencia. Cerrando la superficie con el disco B contenido en el plano XY [Figura 1.14(b)], podemos escribir

$$\Phi_F(S) = \Phi_F(P) + \Phi_F(B),$$

de donde S es la unión del paraboloides P y el disco B , y donde los vectores elemento de área deben tomarse según se indica en la Figura 1.14(b).

$$\Phi_F(P) = \Phi_F(S) - \Phi_F(B). \tag{1.71}$$

Para el primer flujo, del teorema de la divergencia [Ecuación (1.22)], se tiene

$$\Phi_F(S) = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0,$$

(donde V es el volumen encerrado por el paraboloides y el disco) ya que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Para el flujo a través de el disco, los valores del campo sobre él son $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{u}_z = \rho^2\mathbf{u}_z$ (puesto que $z = 0$ en el disco). El elemento de superficie puede tomarse, en coordenadas cilíndricas, como $d\mathbf{S} = \rho d\rho d\phi(-\mathbf{u}_z)$ [Figura 1.14(b)]. El flujo se puede calcular entonces de la siguiente manera:

$$\Phi_F(B) = \int_B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2\mathbf{u}_z \cdot \rho d\rho d\phi(-\mathbf{u}_z) = -\frac{\pi}{2}.$$

La Ecuación (1.71) da entonces

$$\Phi_F(P) = \frac{\pi}{2}.$$

1.14 En referencia a la Figura 1.12 del Problema 1.10, determinar la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = z^2\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z$ a lo largo de la semicircunferencia BCA de radio 2.

Resolución

Para el cálculo de una circulación, puede utilizarse en ocasiones el teorema de Stokes [Ecuación (1.23)]. Si como en el problema anterior, cerramos la curva por medio del segmento AB , podemos

escribir por el teorema de Stokes,

$$W_F(BCAB) = \oint_{BCAB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -2\pi,$$

donde S es el semidisco delimitado por $BCAB$. Dado el sentido de circulación, el flujo debe calcularse en el sentido del eje X positivo. El resultado de la integral se ha escrito directamente porque el flujo de $\nabla \times \mathbf{F} = -\mathbf{u}_x + 2z\mathbf{u}_z$ a través de S con la misma orientación ya ha sido calculado en el Problema 1.10.

Por otro lado, podemos también escribir $W_F(BCAB) = W_F(BCA) + W_F(AB)$, de donde la circulación buscada vale

$$W_F(BCA) = W_F(BCAB) - W_F(AB) = -2\pi - W_F(AB). \tag{1.72}$$

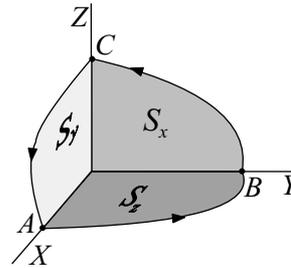
Para $W_F(AB)$ tenemos

$$W_F(AB) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (z^2\mathbf{u}_x + z\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z) \cdot dy\mathbf{u}_y = \int_A^B 5\mathbf{u}_z \cdot dy\mathbf{u}_y = 0.$$

ya que en el segmento AB , $d\mathbf{l} = dy\mathbf{u}_y$ y $z = 0$. De la Ecuación (1.72), obtenemos la circulación buscada como

$$W_F(BCA) = -2\pi.$$

1.15 Las curvas AB , BC y CA de la Figura 1.15 están contenidas en los planos XY , YZ y ZX respectivamente. Se considera un campo vectorial cuyo rotacional viene dado por $\nabla \times \mathbf{F} = a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z$, donde a , b y c son tres constantes. Obtener la relación que deben cumplir las áreas S_x , S_y y S_z para que la circulación de \mathbf{F} a lo largo de $ABCA$ sea nula.



Resolución

Utilizando el teorema de Stokes [Ecuación (1.23)], la circulación de \mathbf{F} a lo largo de $ABCA$ puede escribirse como

$$W_F(ABCA) = \oint_{ABCA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

siendo S cualquier superficie que tenga por contorno $ABCA$. Si elegimos la superficie formada por S_x , S_y y S_z ,

$$\begin{aligned} W_F(ABCA) &= \int_{S_x + S_y + S_z} (a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_x} (a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z) \cdot dS\mathbf{u}_x \\ &+ \int_{S_y} (a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z) \cdot dS\mathbf{u}_y \\ &+ \int_{S_z} (a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y + c\mathbf{u}_z) \cdot dS\mathbf{u}_z, \end{aligned}$$

donde, de acuerdo con el sentido de antihorario de circulación los vectores elemento de área $dS\mathbf{u}_x$, $dS\mathbf{u}_y$ y $dS\mathbf{u}_z$ de las tres superficies S_x , S_y y S_z , respectivamente, han sido tomados en el sentido positivo de los ejes coordenados. El cálculo de los tres flujos da la circulación como

$$W_F(ABCA) = aS_x + bS_y + cS_z.$$

Figura 1.15. Las superficies S_x , S_y y S_z están contenidas en los planos coordenados.

Para que la circulación sea nula, las áreas deben entonces verificar la relación

$$aS_x + bS_y + cS_z = 0.$$

1.16 Para un campo escalar $U = U(r)$ cuyo valor sólo depende de la distancia r a un punto O , demostrar que su laplaciano puede calcularse como $d^2U/dr^2 + (2/r)(dU/dr)$.

Resolución

El laplaciano de un campo escalar U está definido por la Ecuación (1.35) como la divergencia de su gradiente, $\nabla \cdot \nabla U$. Así pues, haciendo uso de la Ecuación (1.66) del Problema 1.3 para el gradiente de un campo escalar que sólo depende de r , podemos escribir

$$\Delta U = \nabla \cdot \left(\frac{dU}{dr} \mathbf{u}_r \right) = \nabla \cdot \left[\frac{dU}{dr} \left(\frac{x}{r} \mathbf{u}_x + \frac{y}{r} \mathbf{u}_y + \frac{z}{r} \mathbf{u}_z \right) \right].$$

Utilizando ahora la Expresión (1.16) de la divergencia en coordenadas cartesianas, obtenemos,

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dU}{dr} \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dU}{dr} \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dU}{dr} \frac{z}{r} \right),$$

o, haciendo uso de la regla de la derivada de un producto,

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) x + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) y + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) z + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr}.$$

Teniendo además en cuenta que $\partial f(r)/\partial x = [df(r)/dr](\partial r/\partial x) = [df(r)/dr](x/r)$ (análogamente para las otras dos derivadas parciales), la expresión anterior se transforma en

$$\Delta U = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + \frac{3}{r} \frac{dU}{dr} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) + \frac{3}{r} \frac{dU}{dr}.$$

Operando se obtiene finalmente

$$\Delta U = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr},$$

como se quería demostrar. Nótese que las expresiones alternativas

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rU) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right)$$

arrojan el mismo resultado, como puede comprobarse al realizar las derivadas. Este problema demuestra la Expresión (1.52) para el laplaciano en coordenadas esféricas en el caso particular de que el campo escalar sólo depende de la coordenada radial r .

1.17 Estudiar el carácter conservativo del campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{u}_x + x^2\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$.

Resolución

Basta calcular, a partir de la Ecuación (1.19), su rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & z \end{vmatrix} = (2x - 1)\mathbf{u}_z.$$

Por no ser nulo, el campo considerado no es conservativo.

1.18 Considérese un campo vectorial \mathbf{F} constante. Demostrar que su circulación a lo largo de una curva cerrada es nula.

Resolución

Es ilustrativo resolver el problema de tres formas distintas.

(a) Si \mathbf{F} es constante, el cálculo directo de la circulación da,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F} \cdot \oint d\mathbf{l} = 0,$$

ya que la suma vectorial de todos los desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{l}$ a lo largo de una curva cerrada es el vector nulo. (Nótese, por el contrario, que la integral $\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \mathbf{F} \oint d\mathbf{l}$, que aparecerá frecuentemente en electromagnetismo, no vale cero, sino $\mathbf{F}L$, siendo L la longitud de la curva cerrada.)

(b) Haciendo uso del teorema de Stokes [Ecuación (1.23)], y si S es una superficie que limita a la curva cerrada, se tiene,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

puesto que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

(c) Como \mathbf{F} es constante, es conservativo ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$). Por tanto su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula.

1.19 En referencia a la Figura 1.13 del Problema 1.12, calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{u}_x - a\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$ a lo largo del cuadrante de circunferencia CA .

Resolución

Antes de intentar el cálculo directo de una circulación, es conveniente estudiar si el campo vectorial dado es conservativo, en cuyo caso la circulación puede calcularse como la diferencia de valores de potencial entre el punto inicial y final [Ecuación (1.65)], si la determinación del potencial es factible.

El cálculo del rotacional de \mathbf{F} resulta en

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -a & z \end{vmatrix} = 0,$$

y por tanto \mathbf{F} es conservativo. El potencial puede calcularse por integración del siguiente modo. La relación $\nabla V = -\mathbf{F}$ en componentes cartesianas se escribe como

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -z. \quad (1.73)$$

Integrando, por ejemplo, la primera Ecuación en (1.73), se tiene

$$V = -\frac{x^2}{2} + g_1(y, z),$$

faltando por determinar la función $g_1(y, z)$. Pero derivando la relación anterior respecto de y e introduciéndola en la segunda Ecuación en (1.73), se obtiene $\partial g_1(y, z)/\partial y = a$, de donde

$$g_1(y, z) = ay + g_2(z),$$

faltando ahora por determinar $g_2(z)$. Derivando la relación anterior respecto de z y introduciéndola en la tercera Ecuación en (1.73), se obtiene $dg_2(z)/dz = -z$, de donde

$$g_2(z) = -\frac{z^2}{2} + c.$$

Reuniendo los resultados anteriores, el potencial buscado resulta ser

$$V(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} + ay - \frac{z^2}{2} + c, \quad (1.74)$$

donde c es una constante arbitraria. De hecho, para todo campo vectorial conservativo, existen infinitos potenciales que difieren entre sí en una constante arbitraria.

La circulación de \mathbf{F} entre C y A a lo largo del cuadrante de circunferencia puede ahora calcularse, según la Ecuación (1.65), como

$$\int_C^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = V_C - V_A,$$

y puesto que $(x, y, z) = (0, 0, a)$ en C , y $(x, y, z) = (a, 0, 0)$ en A , obtenemos de la Ecuación (1.74),

$$\int_C^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \left(-\frac{a^2}{2} + c\right) - \left(-\frac{a^2}{2} + c\right),$$

es decir,

$$\boxed{\int_C^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.20** En un punto \mathbf{r}_0 del espacio, se sabe que la derivada direccional negativa de mayor valor absoluto tiene lugar en la dirección de cierto vector \mathbf{s} . Determinar la relación entre el valor de dicha derivada y el vector gradiente en el punto \mathbf{r}_0 .

Solución: $[dU(\mathbf{r}_0)/ds]_{\mathbf{s}/|\mathbf{s}|} = -|\nabla U(\mathbf{r}_0)|$.

- 1.21** Demostrar que el vector unitario normal a una superficie definida por $U(\mathbf{r}) = \text{cte}$ está dado por

$$\mathbf{n} = \nabla U / |\nabla U|.$$

Como aplicación, calcular el vector unitario normal al paraboloido $z = (x^2 + y^2)/2$.

Solución:

$$\mathbf{n} = \frac{(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z)}{x^2 + y^2 + 1}.$$

- 1.22** Obtener la integral de volumen del campo escalar

$$U = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

sobre la esfera de radio R centrada en el origen. Sugerencia: utilice coordenadas esféricas.

Solución: πR^5 .

1.23 Determinar la divergencia y el rotacional de los siguientes campos vectoriales: (a) $\mathbf{F} = \text{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$, (b) $\mathbf{F} = \exp(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$.

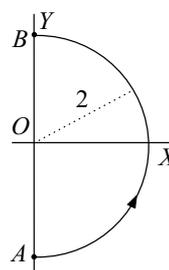
Solución: (a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3 \text{sen}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. (b) $\nabla \cdot \mathbf{F} = (3 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \exp(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

1.24 Demostrar que cualquier campo vectorial cuyo valor sólo depende de la distancia a un punto es irrotacional.

1.25 Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es un vector constante, calcular su circulación a lo largo de una recta que parte del origen y tiene longitud unidad.

Solución: $1/2$.

1.26 Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{u}_x - x\mathbf{u}_y$ a lo largo de la semicircunferencia de la Figura 1.16, entre los puntos A y B .



Solución: 4π .

Figura 1.16. Semicircunferencia AB .

1.27 Determinar el flujo del campo vectorial $\mathbf{u}_x \times \mathbf{r}$ a través de cualquier superficie cerrada (a) directamente, (b) haciendo uso del teorema de la divergencia.

Solución: 0 .

1.28 Determinar el flujo del vector de posición a través de la superficie lateral de un cilindro de radio R , longitud L , y cuyo eje coincide con el eje z , (a) a partir de la definición de flujo, (b) utilizando el teorema de la divergencia.

Solución: $2\pi R^2 L$.

1.29 Obtener el flujo del rotacional del campo vectorial $\mathbf{F} = (3x^2 + y)\mathbf{u}_x + 3xy\mathbf{u}_y + (xy + z)\mathbf{u}_z$ sobre la superficie del paraboloides $z = x^2 + y^2$ por encima del plano XY .

Solución: $-\pi$.

ELECTROSTÁTICA

En este capítulo se presentan los conceptos empíricos de carga eléctrica y de fuerzas entre cargas eléctricas en reposo, empleándose los elementos matemáticos del Capítulo 1 para introducir y desarrollar los conceptos de campo y potencial eléctricos, para el caso en que los fenómenos no dependen del tiempo. Aunque es la más simple de las situaciones del electromagnetismo, su comprensión resulta imprescindible tanto para explicar muchos de los fenómenos naturales e industriales, como para abordar los modelos electromagnéticos más complicados, que se verán en capítulos posteriores.

2.1. CARGA ELÉCTRICA

Al igual que la masa caracteriza los fenómenos de interacción gravitatoria, la carga eléctrica q caracteriza las interacciones electrostáticas, existiendo dos y sólo dos tipos de cargas eléctricas, conocidas como positiva y negativa. La carga eléctrica neta de un cuerpo es la suma de las cargas positivas y negativas del mismo, de modo que cuando un cuerpo presenta electrización positiva la suma de cargas positivas en él excede la suma de negativas, presentando electrización negativa en caso contrario. Si la suma de cargas positivas y negativas es nula se dice que el cuerpo es eléctricamente neutro.

También es un hecho experimental observado en todos los procesos de la naturaleza que la carga no puede crearse ni destruirse, lo que se conoce como **principio de conservación de la carga**: en cualquier proceso que se realiza en un *sistema aislado*, la carga neta o total no cambia. En el Sistema Internacional de unidades (SI), la unidad de carga eléctrica es el *culombio* (C).¹

Considérese ahora una distribución continua de carga de volumen V . Se define en el mismo un *diferencial macroscópico*, de volumen dV , como un volumen infinitesimal desde un punto de vista macroscópico, pero suficientemente grande desde el punto de vista microscópico como para contener un número elevado de constituyentes elementales (átomos, moléculas). Calculando la carga contenida en el mismo, se puede entonces definir una función de densidad de carga, que caracterice una distribución continua y que permita determinar por integración su carga total. Se

¹El culombio puede definirse en función de la unidad fundamental e (carga del electrón) por $1\text{ C} = 6,25 \times 10^{18} e$. Normalmente se define a partir de experimentos magnéticos como se detallará en el Capítulo 5, los cuáles permiten definir la unidad de corriente eléctrica llamada **amperio** (A) y a partir de ella el culombio: si por un alambre circula una corriente de 1A, la cantidad de carga que fluye por un punto del alambre en 1s es 1C.

define así la **densidad volumétrica de carga** (ρ) por

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \equiv \frac{dq}{dV}, \quad (2.1)$$

que representa la carga por unidad de volumen en cada punto. Su unidad en el SI es Cm^{-3} . La carga total q_V en el volumen V se obtiene como

$$q_V = \int_V \rho dV. \quad (2.2)$$

Si la carga sólo se distribuye sobre una superficie S , se define la **densidad superficial de carga** σ como

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \equiv \frac{dq}{dS}, \quad (2.3)$$

que representa la carga por unidad de superficie en cada punto. Su unidad en el SI es Cm^{-2} . La carga total q_S en la superficie S se obtiene como

$$q_S = \int_S \sigma dS. \quad (2.4)$$

Si la distribución de carga está distribuida en un hilo L , puede definirse asimismo la **densidad lineal de carga** λ como

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \equiv \frac{dq}{dl}, \quad (2.5)$$

que representa la carga por unidad de longitud en cada punto. Su unidad en el SI es Cm^{-1} . La carga total q_L en el hilo L se obtiene como:

$$q_L = \int_L \lambda dl. \quad (2.6)$$

Un caso de distribución de cargas eléctricas de particular interés se tiene con dos cargas iguales y de signo contrario, separadas una pequeña distancia, lo que se conoce como un **dipolo eléctrico**. Este tipo de distribución puede tenerse no sólo en el caso de dos cargas puntuales, sino también y como se verá en el Capítulo 3 debido a distribuciones de carga más complejas, en las cuales los centros de la carga negativa y de la carga positiva cumplan las características indicadas para el dipolo eléctrico.

El dipolo eléctrico se caracteriza por su **momento dipolar eléctrico**, expresado por

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}, \quad (2.7)$$

siendo \mathbf{d} el vector de módulo igual a la distancia de separación entre las cargas y dirigido de la carga negativa a la positiva. La unidad en el SI es el Cm. Es de especial interés el caso en que la distancia d tiende a cero (es muy pequeña comparada con el resto de dimensiones del problema) formándose un *dipolo puntual*, sin carga neta ni extensión en el espacio, pero caracterizado completamente por su momento dipolar². Un caso de dipolo puntual es el de las moléculas polarizadas, de carga neta nula y tamaño despreciable, pero con momento dipolar no nulo.

2.2. LEY DE COULOMB

Las diversas observaciones realizadas en el siglo XVIII por Coulomb y otros científicos permiten establecer que la fuerza entre dos cargas eléctricas en reposo tiene las siguientes características:

²El cálculo del campo y el potencial eléctricos creados por un dipolo se propone en el Problema 2.23.

- Dos cargas puntuales ejercen entre sí fuerzas que actúan a lo largo de la línea que las une y que resultan ser inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia de separación.
- Las fuerzas entre ellas son proporcionales al producto de las cargas.
- Las fuerzas son repulsivas si las cargas son de igual signo y atractivas si las cargas son de signo opuesto.

La expresión matemática de la fuerza se conoce como **ley de Coulomb**:

$$\mathbf{F}_q = k \frac{qq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.8)$$

que expresa la fuerza ejercida sobre la carga q situada en \mathbf{r} (Figura 2.1) debido a la acción de la carga q' , en \mathbf{r}' , siendo k una constante conocida como *constante de Coulomb*.

La fuerza $\mathbf{F}_{q'}$ sobre la carga q' debido a la carga q es el vector $-\mathbf{F}_q$. La Ecuación (2.8) suele expresarse en ocasiones de manera más sencilla como

$$\mathbf{F}_q = k \frac{qq'}{d^2} \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

siendo $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ la distancia entre las cargas y $\mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ el vector unitario en la dirección y sentido de q' a q .

El valor de la constante k depende del sistema de unidades escogido. En el SI su valor es

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2. \quad (2.10)$$

siendo ϵ_0 la *permitividad eléctrica del vacío* (o del espacio libre) de valor

$$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2. \quad (2.11)$$

La aplicación sucesiva de las Ecuaciones (2.8) o (2.9) conduce a la expresión siguiente para la fuerza resultante sobre una carga q , de vector de posición \mathbf{r} , debido a la presencia de N cargas puntuales:

$$\mathbf{F}_q = q \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = q \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 d_j^2} \mathbf{u}_j, \quad (2.12)$$

siendo $d_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$ la distancia entre la carga j -ésima y q , y $\mathbf{u}_j = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$ el vector unitario en la dirección y sentido de q_j a q . El hecho de que la fuerza resultante sea la suma de las fuerzas individuales se ha constatado experimentalmente y se denomina **principio de superposición de las fuerzas electrostáticas**.

Una distribución de carga continua puede considerarse como un conjunto de cargas puntuales de valores $dq' = \rho dV'$ (Figura 2.2). Por tanto, esta distribución ejerce una fuerza sobre q de vector de posición \mathbf{r} , dada por

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (2.13)$$

expresión en la que $\rho = \rho(\mathbf{r}')$ es una función de la posición, y la integral sustituye a la suma del caso discreto [Expresión (2.12)]. Ecuaciones análogas se obtienen en el caso de que la

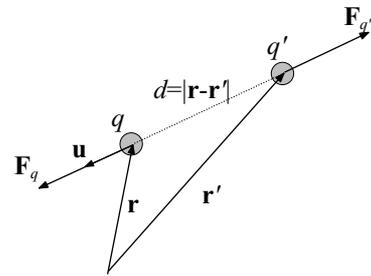


Figura 2.1. Fuerzas entre cargas.

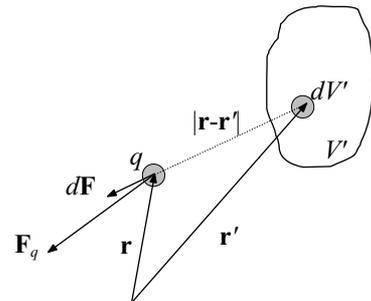


Figura 2.2. Fuerza debida a una distribución continua de carga.

carga estuviera distribuida en una superficie o una línea. El

vector \mathbf{r}' representa la posición de cada uno de los diferenciales de volumen dV' para los que está definida la función de densidad.

La ley de Coulomb y el principio de superposición son considerados como los dos principios básicos de la electroestática.

2.3. CAMPO ELÉCTRICO

En todas las expresiones obtenidas en el apartado anterior para la fuerza sobre una carga de referencia q en reposo debido a la presencia de otras cargas, se observa que dicha fuerza es proporcional a la carga testigo q . Puede así definirse, en cada punto del espacio, una magnitud independiente de la carga testigo

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad (2.14)$$

denominada **campo eléctrico** o **electrostático**³. El campo eléctrico en cada punto del espacio es, por tanto, la fuerza por unidad de carga que actúa sobre una carga testigo⁴ en reposo colocada en dicho punto. Al igual que dicha fuerza, tiene carácter de *campo vectorial*. La unidad de campo eléctrico es newton/culombio (NC^{-1}).

La Expresión (2.14) puede aplicarse a las ecuaciones de la sección anterior y obtener así las diferentes expresiones del campo eléctrico. Los puntos del espacio en donde existen cargas q' creadoras de campo se les denomina *puntos fuente* y se les asigna un vector de posición \mathbf{r}' . Asimismo los puntos en los cuáles se desea determinar el campo eléctrico se les denomina *puntos campo* y se les asigna un vector de posición \mathbf{r} . Así, aplicando la ley de Coulomb [Expresiones (2.8) o (2.9)], el campo debido a una carga puntual q' , de vector de posición \mathbf{r}' , resulta ser

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{u}, \quad (2.15)$$

siendo \mathbf{r} el vector de posición de un punto campo P , $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ la distancia de la carga q' al punto P y \mathbf{u} el vector unitario dirigido del punto fuente al punto campo. El campo debido a un conjunto de N cargas puntuales q_j en posiciones \mathbf{r}_j es, de la Ecuación (2.12),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 d_j^2} \mathbf{u}_j, \quad (2.16)$$

siendo $d_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$ la distancia de la carga j -sima a P , y $\mathbf{u}_j = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$ el vector unitario en la dirección y sentido de q_j a P . Y para una distribución continua de cargas, de la Ecuación (2.13), se obtiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.17)$$

En las expresiones anteriores \mathbf{r} representa el vector posición del punto donde se calcula el campo (punto campo) y \mathbf{r}_j o \mathbf{r}' el vector posición de una cualquiera de las cargas o de los diferenciales de carga (punto fuente). El vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ o $\mathbf{r} - \mathbf{r}_j$ que aparece en las expresiones no es sino el vector que va desde cada uno de los puntos fuente al punto campo, y su módulo representa la distancia entre ellos. La suma o la integración se realiza sobre la carga total: la variable, por tanto, no es \mathbf{r} , sino \mathbf{r}_j o \mathbf{r}' , siendo ρ también variable.

³Existen muchos fenómenos en los cuales el campo eléctrico depende del tiempo, como se verá en capítulos posteriores, y conviene entonces hacer referencia al término campo electrostático cuando se quiera resaltar la independencia respecto al tiempo de los fenómenos que se estudian. En electrostática, ambos conceptos coinciden.

⁴La carga testigo debe ser suficientemente pequeña (matemáticamente $q \rightarrow 0$) para que no altere el campo eléctrico debido al resto de cargas.

De las Expresiones (2.16) y (2.17) se extrae el **principio de superposición del campo electrostático**: el campo creado por un conjunto de cargas es igual a la suma de los campos producidos independientemente por cada una de ellas. Esta idea de superposición es la que debe tenerse presente en el momento de calcular el campo creado por una distribución de carga cualquiera, debiéndose escoger las coordenadas que resulten más adecuadas para cada ocasión.

El cálculo de la fuerza que actúa sobre una partícula cargada q cuando se introduce en una región en que existe un campo eléctrico \mathbf{E} es inmediata a partir de la Ecuación (2.14) de definición del campo eléctrico:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} . \quad (2.18)$$

2.4. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

En el Capítulo 1 se vio que si el rotacional de un campo vectorial se anula, entonces dicho campo es conservativo. De acuerdo con las Expresiones (2.15)-(2.17) el rotacional del campo electrostático creado por cualquier distribución de carga en reposo es nulo⁵

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad (2.19)$$

y por tanto, deriva de un potencial, es decir,

$$\mathbf{E} = -\nabla V . \quad (2.20)$$

De la expresión anterior y teniendo en cuenta la relación entre \mathbf{E} y \mathbf{F} , se deduce que el potencial V representa la energía potencial por unidad de carga,

$$V(\mathbf{r}) = E_p(\mathbf{r})/q . \quad (2.21)$$

La unidad de potencial en el SI es julio/culombio, a la que se da el nombre de *voltio* (V). A partir de esta unidad, resulta en ocasiones útil expresar la unidad de campo eléctrico como voltio/metro (Vm^{-1}).

Si se tiene en cuenta la Expresión (2.15) del campo \mathbf{E} creado por una carga puntual, puede calcularse el **potencial electrostático** en un punto P cualquiera del espacio, de vector posición \mathbf{r} , debido a una carga puntual situada en \mathbf{r}' a partir de la Expresión (2.20), resultando

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d} + c , \quad (2.22)$$

siendo $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ la distancia de la carga q' al punto P . Para que en la expresión no aparezca la constante de integración c , se toma como referencia de potenciales el infinito ($V_\infty = 0$) y así se tiene que para $r = \infty$, $V = 0$, y por tanto $c = 0$. Debe observarse que V es un *campo escalar* que depende de la distancia entre la carga que crea el campo y el punto objeto de estudio.

En el caso de una superposición de campos, también se verifica que el potencial del campo total es la suma de los potenciales de cada campo individual, hecho que se conoce como **principio de superposición de potenciales**. Así, para N cargas puntuales el potencial es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{d_j} , \quad (2.23)$$

con $d_j = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$. Y para una distribución finita continua de carga, el potencial es

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (2.24)$$

⁵En este caso es muy importante resaltar que la palabra electrostático no es casual, puesto que si los fenómenos dependiesen del tiempo, el rotacional del campo eléctrico no se anularía.

La **diferencia de potencial** (d.d.p.) entre dos puntos es la circulación (por cualquier camino) del campo electrostático \mathbf{E} entre dichos puntos, esto es⁶,

$$V_A - V_B = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.25)$$

Suele tomarse el infinito (puntos muy alejados de las fuentes) como referencia de potenciales ($V_B = V_\infty = 0$), con lo que la Ecuación (2.25) queda

$$V_A = \int_{\mathbf{r}_A}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.26)$$

lo que representa el trabajo necesario para llevar la unidad de carga positiva desde el infinito hasta el punto considerado.

2.5. LEY DE GAUSS

2.5.1. Forma integral de la ley de Gauss

Del estudio del flujo a través de una superficie cerrada del campo eléctrico creado por una determinada distribución de carga, se pueden obtener en numerosas ocasiones expresiones para el campo eléctrico creado por dicha distribución, a partir de ciertas consideraciones de simetría geométrica y del campo. Para este estudio es necesario conocer en primer lugar el flujo del campo creado por una carga puntual y, por aplicación del principio de superposición, el resultado puede extrapolarse a una distribución cualquiera.

El teorema de Gauss se emplea para determinar el flujo Φ_E a través de una superficie cerrada del campo eléctrico \mathbf{E} creado por una carga puntual q .

El teorema afirma que si V es una región del espacio suficientemente suave, de frontera ∂V y \mathbf{n} es el unitario normal en cada punto a la superficie ∂V , entonces, si $q \notin \partial V$ es una carga puntual, se verifica

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \notin V, \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \in V, \end{cases} \quad (2.27)$$

en donde \mathbf{r} es el vector de origen en q y extremo en cualquier punto de ∂V .

Si se tuviera un conjunto de cargas puntuales o bien una distribución continua de carga, considerando el principio de superposición, se podría aplicar el teorema a cada uno de los campos por separado, y el flujo total será la suma de los flujos creados por cada uno de los campos, cada uno de los cuáles sólo dependerá de que la carga sea interior o no a la superficie considerada. Se puede generalizar así el teorema anterior para el caso de una distribución cualquiera de carga de la siguiente manera,

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (2.28)$$

en donde q_{int} representa la carga interior a la superficie ∂V a través de la cual se calcula el flujo de \mathbf{E} . Este resultado [Expresión (2.28)] se conoce habitualmente como **ley** o **teorema de Gauss**.

Este teorema muestra que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada depende exclusivamente del valor q_{int} de la carga encerrada dentro de dicha superficie. Nótese que el flujo puede ser nulo aún cuando el campo no sea nulo, como puede comprobarse por la simple aplicación de la Expresión (2.15) del campo creado por una carga puntual. Debe observarse también que el flujo a través de una superficie es el mismo que a través de otra superficie cualquiera

⁶Obsérvese en la Expresión (2.25) el orden de los límites de la integral, al haberse suprimido el signo negativo.

que encierre la misma cantidad de carga. Debe insistirse en que el hecho de que el flujo a través de ambas superficies sea idéntico no implica que lo sea el valor del campo eléctrico en cada una de ellas. Asimismo, la redistribución de las cargas dentro de una superficie altera el flujo local producido por dichas cargas, pero no el flujo total a través de la superficie.

En algunos casos, el teorema de Gauss permite calcular expresiones del campo electrostático creado por distribuciones de carga con determinadas simetrías geométricas y eléctricas. Normalmente es posible este cálculo si se puede escoger una superficie para calcular el flujo (suele denominarse *superficie gaussiana*) de modo que el campo eléctrico en cualquiera de sus puntos tenga el mismo módulo y forme un ángulo constante con el vector normal a la superficie, como se verá en los problemas resueltos.

2.5.2. Forma diferencial de la ley de Gauss y ecuaciones de la electrostática

La ley de Gauss permite obtener la expresión del flujo de un campo eléctrico a través de una superficie y obtener, en ocasiones, conclusiones sobre cómo es el campo en ella. Sin embargo el hecho de tener una expresión integral hace que los resultados dependan de la región sobre la cual se está integrando. Se puede deducir, sin embargo, una ley equivalente, pero en este caso en forma diferencial, de manera que el resultado pueda aplicarse a cada punto del espacio y no necesite de un dominio de integración:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad (2.29)$$

siendo $\rho = \rho(\mathbf{r})$ la densidad de carga en el punto considerado. Esta expresión, que constituye una de las ecuaciones de Maxwell (Capítulo 10), representa la *forma diferencial de la ley de Gauss*⁷, que junto con la Ecuación (2.19),

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.30)$$

constituyen las ecuaciones fundamentales de la electrostática. Si se recuerda del Capítulo 1 que la divergencia es positiva en los puntos fuente o surgentes y negativa en los sumideros de campo, se observa que el campo eléctrico nace en los puntos con carga positiva y muere en los puntos con carga negativa. En el caso de que en un punto del espacio no exista carga eléctrica, la divergencia es nula.

Combinando el carácter conservativo del campo electrostático ($\mathbf{E} = -\nabla V$) con la ley de Gauss se obtiene el laplaciano del campo electrostático como

$$\Delta V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.31)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Poisson*. En las regiones en que la densidad de carga sea nula, la Ecuación (2.31) queda

$$\Delta V(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.32)$$

conocida como *ecuación de Laplace*.

Las Ecuaciones (2.31) y (2.32) son ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de un campo escalar (el potencial electrostático) y sus soluciones, a diferencia de las de la ley diferencial de Gauss, son relativamente fáciles de obtener. Es posible mediante integración de estas ecuaciones, y conocidas determinadas condiciones de contorno impuestas por las distribuciones de carga, obtener el valor del potencial en problemas particulares. Obsérvese la necesidad de estas condiciones de contorno y de condiciones materiales (Capítulo 3) cuando se resuelve un problema mediante ecuaciones puntuales, condiciones que están ya incluidas, sin embargo, en los problemas integrales.

⁷Esta ecuación es igualmente válida aunque no se estuviera en condiciones estáticas.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 2.1** Sobre un disco de plástico de radio $R = 10$ cm se ha distribuido una carga eléctrica por unidad de superficie proporcional a la distancia al centro, siendo la constante de proporcionalidad $c = 2 \mu\text{C}/\text{m}^3$. Determinar la carga total del disco.

Resolución

La carga total está dada por la integral

$$q = \int \sigma dS, \quad (2.33)$$

extendida al disco.

La integral puede resolverse directamente en coordenadas polares, tomando como elemento de área $ds = r dr d\phi$, como la integral doble

$$\begin{aligned} q &= \int_0^R \sigma r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^R cr^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi c R^3 / 3 = 4,2 \times 10^{-9} \text{C} \Rightarrow \boxed{q = 4,2 \text{ nC}}, \end{aligned}$$

en la que $\sigma = cr$ expresa la proporcionalidad de la densidad de carga con respecto a la distancia al centro del disco.

Si no se desea emplear integrales múltiples, puede resolverse también mediante una integral simple, eligiendo adecuadamente el elemento de superficie (Figura 2.3). Éste debe escogerse con una única dimensión diferencial, de modo que la densidad sea la misma para todos sus puntos y que al desplazar dicho elemento según la dimensión diferencial, recorra la totalidad del disco. Como la densidad superficial de carga $\sigma = cr$ sólo depende de la distancia r al centro del disco, es conveniente en este caso tomar como elementos de superficie anillos de radio r y espesor dr , siendo su área $dS = 2\pi r dr$. Sustituyendo en la Ecuación (2.33) se obtiene

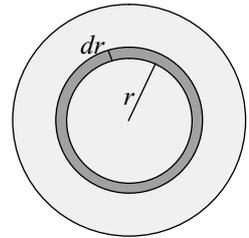


Figura 2.3. Disco cargado

$$q = \int_0^R cr 2\pi r dr = 2\pi c R^3 / 3 = 4,2 \times 10^{-9} \text{C}.$$

- 2.2** Determinar el flujo del campo electrostático creado por un cubo de lado L , cuya densidad de carga es proporcional a la distancia a una cualquiera de sus caras, a través de una esfera también de radio L , siendo el centro de la esfera coincidente con el centro del cubo.

Resolución

Para calcular dicho flujo, aplicamos la ley de Gauss,

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

para lo que resulta necesario determinar la carga interior a la esfera de radio L .

En la Figura 2.4(a), se representa una sección del cubo por un plano paralelo a una cualquiera de sus caras, pasando por su centro. Puede observarse que, independientemente de cuál hubiera

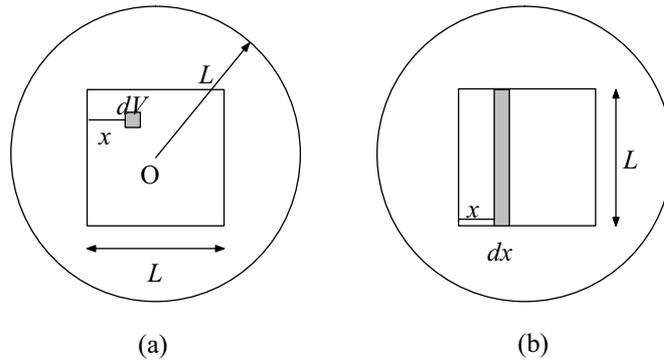


Figura 2.4. Flujo a través de una esfera del campo creado por un cubo: (a) mediante integración triple; (b) mediante integración sencilla.

vido su orientación en el espacio, la totalidad del cubo cargado se encuentra situado dentro de la esfera, por lo que la carga interior a la superficie esférica es la totalidad de la carga del cubo. Si suponemos que la densidad de dicho cubo es proporcional a la distancia a la cara izquierda del mismo, esto es, $\rho = ax$, siendo a una constante y x la distancia de un dV a dicha cara, para calcular la carga hay que resolver la integral

$$q_{\text{int}} = \int_V \rho dV = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \rho dx dy dz = \int_0^L ax dx \int_0^L dy \int_0^L dz = aL^4/2 .$$

También podría resolverse como una integral simple, eligiendo un elemento de volumen adecuado que tenga una única dimensión diferencial. Para ello puede observarse que todos los puntos a la misma distancia x de la cara izquierda del cubo tienen la misma densidad. Habrá que escoger como elemento diferencial aquél en que todos sus puntos tengan el mismo valor de x y tal que al moverse según esta coordenada permita recorrer el cubo completo. Se escoge entonces un cuadrado de lado L paralelo a la cara izquierda del cubo, y se le dota de un cierto espesor dx , tal como se observa en la Figura 2.4(b) (se ha representado una sección como en el caso anterior). El valor de este elemento de volumen es $dV = L^2 dx$. La carga del cubo se calcula como

$$q_{\text{int}} = \int_V \rho dV = \int_0^L axL^2 dx = aL^4/2 .$$

El flujo a través de la esfera de radio $2L$ será

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{aL^4}{2\epsilon_0} .$$

2.3 Comprobar si el campo existente en una cierta región del espacio, dado por $\mathbf{E} = kx^2\mathbf{u}_x + ky^2\mathbf{u}_y + 10\mathbf{u}_z$, siendo k una constante, representa un campo electrostático y determinar, en su caso, la densidad de carga en dicha región.

Resolución

Para resolver el problema hay que comprobar si dicho campo es conservativo, esto es, si deriva de un potencial. Para ello se calcula el rotacional de dicho campo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ kx^2 & ky^2 & 10 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} 10 - \frac{\partial}{\partial z} ky^2\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} kx^2 - \frac{\partial}{\partial x} 10\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} ky^2 - \frac{\partial}{\partial z} kx^2\right)\mathbf{u}_z = 0 .$$

Al anularse el rotacional en cualquier punto, el campo es conservativo y, por lo tanto, puede ser un campo electrostático.

Para calcular la densidad de carga en un punto cualquiera de dicha región, se aplica la ley de Gauss en forma diferencial [Ecuación (2.29)]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x}(kx^2) + \frac{\partial}{\partial y}(ky^2) + \frac{\partial}{\partial z}10 = 2kx + 2ky = \rho\varepsilon_0 ,$$

de donde resulta

$$\rho = (2kx + 2ky)\varepsilon_0 .$$

Por ejemplo, en un punto P de coordenadas $(2, -3, 1)$, la densidad, sustituyendo los valores de x, y, z , sería $-2k\varepsilon_0$.

- 2.4** Determinar el campo eléctrico y el potencial creados por un hilo rectilíneo de longitud L en un punto cualquiera a la derecha del hilo y en su eje. El hilo está cargado con densidad lineal de carga no homogénea $\lambda = ax$, siendo a una constante y x la distancia de un punto cualquiera del hilo al extremo izquierdo del mismo.

Resolución

Para simplificar las expresiones, se escoge como eje x la dirección del hilo y se toma como origen de referencia el extremo izquierdo del mismo (Figura 2.5), con lo que un elemento de dicho hilo situado a una distancia x' del origen tiene una carga $dq = \lambda dx' = ax'dx'$. Obsérvese que se

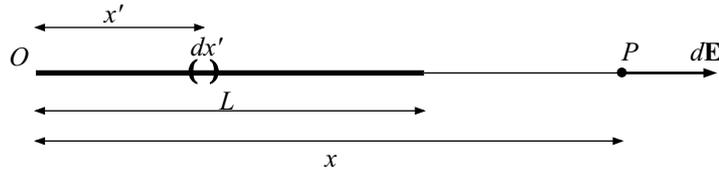


Figura 2.5. Hilo finito con densidad de carga variable.

denotan con primas ($'$) los puntos fuente, en coherencia con las fórmulas teóricas explicadas. El campo en un punto $P(x, 0)$ cualquiera del eje creado por un elemento dq' es

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{ax'dx'}{4\pi\varepsilon_0(x - x')^2} \mathbf{u}_x .$$

El campo total se obtiene de aplicar el principio de superposición para todos los elementos de carga del hilo, esto es, integrando para toda su longitud:

$$\mathbf{E} = \int_0^L \frac{ax'dx'}{4\pi\varepsilon_0(x - x')^2} \mathbf{u}_x = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{x'}{(x - x')^2} dx' \mathbf{u}_x .$$

La integral se resuelve fácilmente con el cambio de variable

$$x - x' = y , \quad -dx' = dy$$

resultando

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0} \int_x^{x-L} \frac{x-y}{y^2} dy \mathbf{u}_x = \frac{-a}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_x^{x-L} \frac{x}{y^2} dy - \int_x^{x-L} \frac{1}{y} dy \right) \mathbf{u}_x \\ &= \frac{a}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x}{y} \Big|_x^{x-L} + \ln y \Big|_x^{x-L} \right) \mathbf{u}_x . \end{aligned}$$

Y tomando los límites, el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{L}{x-L} + \ln \frac{x-L}{x} \right) \mathbf{u}_x .$$

Para determinar el potencial se aplica el principio de superposición, sumando los potenciales [Expresión (2.22)] creados por cada dq' en P , tomando como referencia de potenciales el infinito:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^L \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{x'}{(x-x')} dx' = \frac{-a}{4\pi\epsilon_0} \int_x^{x-L} \frac{x-y}{y} dy \\ &= \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left(-x \ln y \Big|_x^{x-L} + y \Big|_x^{x-L} \right) , \end{aligned}$$

con lo que

$$V = \frac{a}{4\pi\epsilon_0} \left(x \ln \frac{x}{x-L} - L \right) .$$

2.5 Determinar el campo y el potencial creado por un hilo de longitud L , que se ha cargado uniformemente con una carga total Q , en un punto cualquiera del espacio.

Resolución

Se define un sistema de coordenadas que permita simplificar los cálculos. Se considera, para ello, como punto campo un punto P cualquiera del espacio y se define el plano formado por el hilo y dicho punto P , plano al que designaremos por comodidad como plano XY (Figura 2.6). Se toma como origen de coordenadas uno de los extremos del hilo, haciendo coincidir éste con el eje X , con lo que las coordenadas del punto P serán (x, y) . El campo eléctrico \mathbf{E} estará contenido en el plano XY .

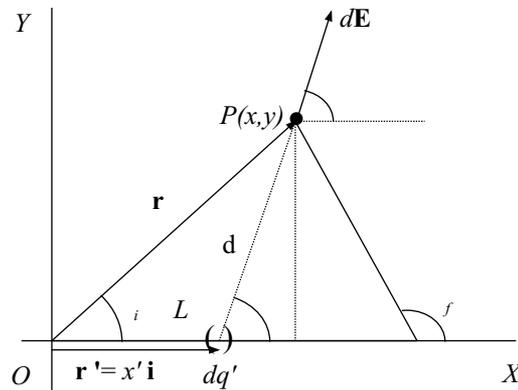


Figura 2.6. Campo creado por un hilo finito en un punto cualquiera.

En primer lugar, se expresa el campo creado por un elemento cualquiera dq' del hilo. La carga de dicho elemento viene dada por

$$dq' = \lambda dx' = \frac{Q}{L} dx' ,$$

el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ viene dado por

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y ,$$

y la distancia del elemento de carga (punto fuente) al punto campo es

$$d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}.$$

El valor del campo eléctrico creado por dq' en el punto P es

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{d^2} \frac{(x - x')\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{d}.$$

El campo total se obtiene, de acuerdo con el principio de superposición, sumando las contribuciones de todos los elementos dq , esto es, aplicando la Expresión (2.17) del campo para una distribución continua de carga,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dx'}{d^2} \frac{(x - x')\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y}{d}.$$

Para resolver la integral, es conveniente introducir el ángulo θ de la figura,

$$\cos \theta = \frac{x - x'}{d}, \quad \text{sen } \theta = \frac{y}{d}, \quad \cot \theta = \frac{x - x'}{y},$$

con lo que, derivando la última de las expresiones, resulta

$$\frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} = \frac{dx'}{y}.$$

Sustituyendo en la integral dx' y d , se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_L \frac{dx'}{d^2} \cos \theta \mathbf{u}_x + \int_L \frac{dx'}{d^2} \text{sen } \theta \mathbf{u}_y \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\text{sen}^2 \theta}{y^2} \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} y \cos \theta \mathbf{u}_x + \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{\text{sen}^2 \theta}{y^2} \frac{d\theta}{\text{sen}^2 \theta} y \text{sen } \theta \mathbf{u}_y \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left(\int_{\theta_i}^{\theta_f} \cos \theta d\theta \mathbf{u}_x + \int_{\theta_i}^{\theta_f} \text{sen } \theta d\theta \mathbf{u}_y \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} ((\text{sen } \theta_f - \text{sen } \theta_i) \mathbf{u}_x + (\cos \theta_i - \cos \theta_f) \mathbf{u}_y) \end{aligned}$$

Volviendo a las coordenadas cartesianas y expresando el resultado en función de los datos, se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L y} \left[\left(\frac{y}{\sqrt{(L-x)^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + y^2}} \right) \mathbf{u}_y \right].$$

Un caso de particular interés se tiene si el hilo comienza en O y es muy largo (*hilo semiinfinito*) con densidad λ . Si se estudia el caso en que el punto P esté sobre la vertical por O al hilo, esto es, $P(0, y)$ se tiene $\theta_i = \pi/2$ y $\theta_f = \pi$, obteniéndose

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y).$$

También es especialmente interesante el caso de un *hilo infinito* (muy largo) para el que $\theta_i = 0$ y $\theta_f = \pi$, en cuyo caso el campo resulta ser

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \mathbf{u}_y.$$

Para el cálculo del potencial en el punto P , se aplica la Expresión (2.24) del potencial de una distribución continua de carga, considerando como referencia de potenciales el infinito:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{dx'}{d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}.$$

La integral anterior es inmediata, obteniéndose

$$V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \operatorname{Arsh} \frac{x-x'}{y} \Big|_0^L = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \left(x-x' + \sqrt{(x-x')^2 + y^2} \right) \Big|_L^0.$$

Y tomando los límites

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}}.$$

En el caso de nuestro problema inicial, esto es, del hilo finito, se podría haber procedido de manera inversa, calculando en primer lugar el potencial, y, a posteriori, el campo eléctrico⁸ a partir de $\mathbf{E} = -\nabla V = -(\partial V/\partial x)\mathbf{u}_x - (\partial V/\partial y)\mathbf{u}_y$, esto es, derivando parcialmente respecto de x e y . Si quisiéramos aplicar este procedimiento para hallar el campo \mathbf{E} de un hilo muy largo existe una dificultad. En efecto, si calculamos el potencial para esta distribución de carga obtenemos que,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x-L + \sqrt{(x-L)^2 + y^2}} \rightarrow \infty.$$

De este modo, no es posible hallar el campo a partir de este potencial. La razón de que se haya obtenido un potencial infinito radica en que no puede asegurarse la convergencia de dicho potencial para distribuciones de carga que se extienden por una región infinita del espacio. Por ello, para encontrar el campo, debería calcularse primero el potencial del hilo de dimensiones finitas, su gradiente y, posteriormente, hacer tender la longitud a infinito (véase el Problema 5.10).

2.6 Determinar el campo y el potencial en un punto cualquiera del espacio para (a) una bola de goma de radio R cargada con una densidad uniforme ρ y (b) una bola de metal de radio R cargada con una densidad superficial uniforme σ .

Resolución

(a) Para resolver el problema se considera una superficie gaussiana esférica ∂V (Figura 2.7), concéntrica con la esfera cargada y de radio tal que la superficie pase por el punto P en que desea calcularse el campo.

Dado que en numerosas ocasiones, o bien el dato del problema es la carga total Q de la esfera o bien se pide expresar los resultados en función de ella, se va a comenzar determinando dicha carga total,

$$Q = \int_V \rho dV = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Si el dato del problema hubiera sido Q , la densidad se obtiene despejando en la expresión anterior:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}.$$

⁸Debe tenerse precaución con este método de calcular el campo, que sólo puede aplicarse sin riesgo si es conocido el potencial en todo punto del espacio.

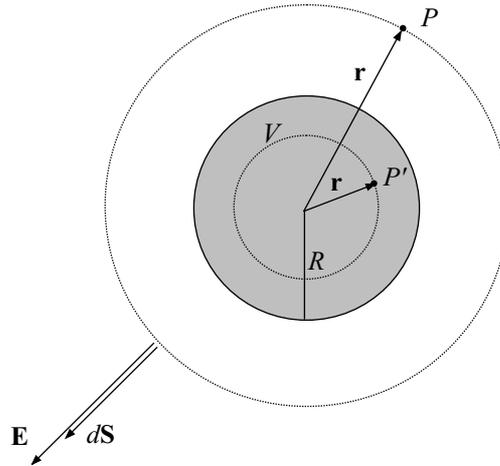


Figura 2.7. Superficies gaussianas para una esfera cargada.

De la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será radial, con sentido hacia el exterior (suponiendo que la esfera está cargada positivamente) y con el mismo módulo en todos los puntos de la superficie⁹. Supóngase en primer lugar que $r \geq R$, como en el punto P de la Figura 2.7. El flujo a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} E dS = E \oint_{\partial V} dS = E4\pi r^2,$$

siendo $4\pi r^2$ el área de la superficie esférica de radio r . Y aplicando la ley de Gauss, se obtiene que dicho flujo es

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Igualando las dos expresiones para el flujo y despejando se obtiene el campo para un *punto exterior* como el P ,

$$E_{(r \geq R)} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

expresión que coincide con el campo que crearía una carga puntual Q situada en el centro de la esfera. De hecho el campo creado por una carga puntual, conocido a partir de la ley de Coulomb, puede calcularse aplicando la ley de Gauss a una superficie esférica cualquiera de centro en la carga.

Para conocer el campo en un punto P' (Figura 2.7) interior a la superficie de la esfera cargada, el procedimiento es el mismo, construyendo una superficie esférica concéntrica de radio r que pase por dicho punto. La expresión del flujo a través de la superficie de radio r es la misma, pero como ahora es $r \leq R$, la carga interior a la superficie gaussiana varía. Se tiene así que

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0},$$

y entonces, de $\Phi_E = E4\pi r^2$, se obtiene el campo para un *punto interior* como el P' ,

$$E_{(r \leq R)} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

⁹Para comprobar esto, puede considerarse el campo en un punto creado por un elemento dq cualquiera y su simétrico respecto al diámetro que pasa por el punto considerado. Las componentes tangenciales de uno y otro son opuestas, quedando como resultado un campo radial.

Uniendo ambos resultados y expresándolo vectorialmente resulta

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \mathbf{u}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r & \text{si } r \leq R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r \geq R, \end{cases}$$

siendo \mathbf{u}_r el vector unitario en coordenadas esféricas. El campo en un punto de la superficie de la esfera puede calcularse mediante cualquiera de las dos expresiones, haciendo $r = R$:

$$\mathbf{E}_{(r=R)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \mathbf{u}_r.$$

Para determinar el potencial de un punto cualquiera, se calcula la diferencia de potencial entre dicho punto y el infinito, de potencial cero. Para un punto exterior como el P se tiene, al hacer la circulación del campo entre dicho punto y el infinito (Figura 2.8), que

$$\begin{aligned} V_P - V_\infty = V_P &= \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty E_{(r \geq R)} dr \\ &= \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = - \left. \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \right|_r^\infty. \end{aligned}$$

Y por tanto

$$V_P = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Para un punto interior como el P' resulta que, al circular el campo eléctrico hasta el infinito, las expresiones del campo son diferentes según se esté en el interior o en el exterior de la esfera. La diferencia de potencial se obtiene de

$$\begin{aligned} V_{P'} - V_\infty = V_{P'} &= \int_{P'}^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R E_{(r \leq R)} dr + \int_R^\infty E_{(r \geq R)} dr \\ &= \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \left. \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right|_r^R - \left. \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \right|_R^\infty = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}. \end{aligned}$$

El potencial resulta ser

$$V_{P'} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{(3R^2 - r^2)}{R^3}.$$

Uniendo ambos resultados,

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{(3R^2 - r^2)}{R^3} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{si } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r \geq R. \end{cases}$$

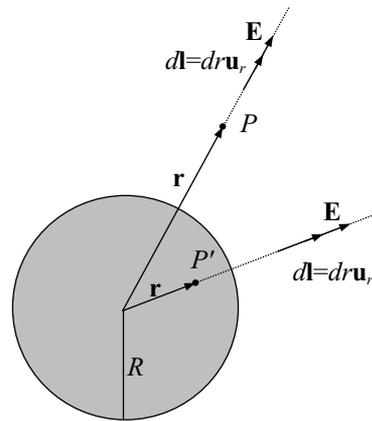


Figura 2.8. Potencial de una esfera cargada.

(b) En el caso de que la esfera esté cargada con densidad superficial uniforme, se procede como en el caso anterior, dado que la simetría del problema es análoga. Las superficies gaussianas a

considerar para resolver el problema son las que se indicaron entonces, reflejadas en la Figura 2.7. En este caso la carga total de la esfera es

$$Q = \int_S \sigma dS = \sigma S = \sigma 4\pi R^2 .$$

El flujo a través de la superficie esférica de radio r es, análogamente al caso anterior

$$\Phi_E = E 4\pi r^2 .$$

Aplicando la ley de Gauss a un punto exterior P ($r > R$) se obtiene que

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} .$$

Despejando se obtiene que, para un punto P exterior el campo es

$$E_{(r>R)} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} ,$$

idéntica expresión en función de la carga total Q que en el caso de una esfera uniformemente cargada en su volumen. Sin embargo, para un punto interior P' ($r < R$) la ley de Gauss para el flujo indica que

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 ,$$

al no existir ninguna carga interior a una superficie esférica de radio $r < R$, por estar toda ella concentrada en la superficie de la esfera metálica, lo cual implica que

$$E_{(r<R)} = 0 .$$

Debe observarse que el teorema de Gauss no puede aplicarse a los puntos situados exactamente en la superficie de la esfera, dado que en este caso las cargas estarían justo en la superficie gaussiana, incumpliendo una de las condiciones del teorema.

Uniendo ambos resultados y expresándolo vectorialmente resulta:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R , \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R , \end{cases}$$

siendo \mathbf{u}_r el vector unitario en coordenadas esféricas.

Dado que el campo en el exterior de la esfera es el mismo que en el caso de la esfera uniformemente cargada en volumen y que se toma como referencia el infinito, el potencial es también el mismo para puntos exteriores. En el caso de puntos interiores, puesto que el campo es nulo en dichos puntos, el potencial no varía y tiene el mismo valor que en la superficie de la esfera. Por tanto,

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} & \text{si } r < R , \\ \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & \text{si } r \geq R . \end{cases}$$

Puede representarse gráficamente el módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera cargada (Figura 2.9). En el caso de una esfera uniformemente cargada en volumen [Figura 2.9(a)], el campo varía linealmente con la distancia hasta llegar a la superficie de la esfera, presentando a partir de este punto una caída con el cuadrado de la distancia, como si se tratara del campo creado por una carga puntual. En el caso de distribuirse la carga sólo en la superficie, el campo es nulo hasta llegar a la misma, siguiendo el campo la misma ley para puntos exteriores [Figura 2.9(b)]. Obsérvese que el campo no tiene por qué ser una función continua; sí lo es, en cambio, el potencial.

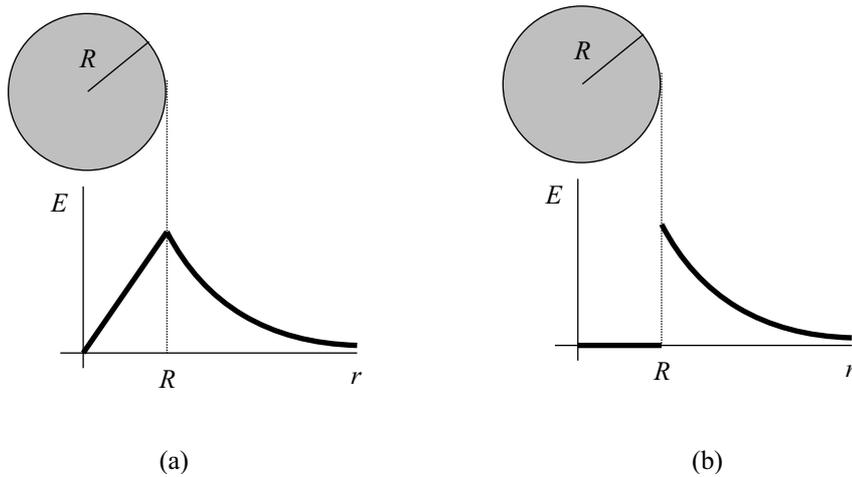


Figura 2.9. Campo creado por una esfera uniformemente cargada: (a) en volumen, (b) en superficie.

- 2.7** Sea un hilo de cobre muy largo (infinito) cargado con una densidad uniforme λ . Determinar el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio.

Resolución

Como superficie gaussiana ∂V , por la simetría del problema¹⁰, se considera un cilindro, de longitud L cualquiera, con eje en el hilo y de radio r de manera que la superficie pase por el punto P donde se desea calcular el campo (Figura 2.10).

De la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será radial (normal a la superficie lateral del cilindro), con sentido hacia el exterior (suponiendo que el hilo está cargado positivamente) y con el mismo módulo en todos los puntos de la superficie lateral¹¹. El flujo a través de ella, observando que a través de las bases del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares, es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{lat}}} E dS = E \int_{S_{\text{lat}}} dS = E2\pi rL,$$

siendo S_{lat} la superficie lateral del cilindro. Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0},$$

de donde, igualando y despejando

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

que muestra que el campo varía inversamente con la distancia al hilo. Esta expresión coincide con la calculada directamente por integración en el Problema 2.5.

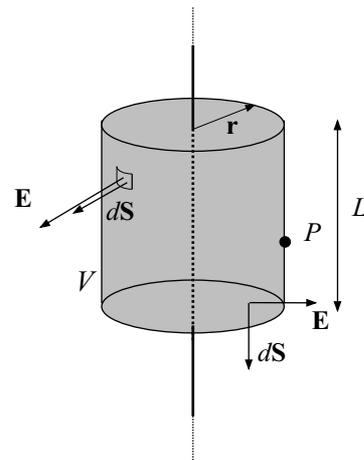


Figura 2.10. Superficie gaussiana para un hilo infinito.

¹⁰La palabra infinito se emplea en la práctica para indicar que el elemento tiene unas dimensiones lo suficientemente grandes y la región a estudiar lo suficientemente alejada de los extremos, como para que puedan aplicarse los razonamientos de simetría que se requieren en el cálculo.

¹¹Para comprobar esto, puede considerarse el campo creado en un punto por un elemento dq cualquiera y su simétrico respecto a la normal al hilo por el punto considerado. Las componentes tangenciales de uno y otro son opuestas, quedando como resultado un campo radial.

Expresándolo vectorialmente, resulta:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho,$$

siendo \mathbf{u}_ρ el vector unitario en coordenadas cilíndricas.

El razonamiento seguido para calcular el campo creado por un hilo infinito puede aplicarse análogamente para calcular el campo creado por una distribución cilíndrica de carga, teniendo presente las precauciones pertinentes para el cálculo del campo en puntos interiores a la superficie del cilindro cargado, de la misma manera que se hizo con la esfera.

- 2.8** Sea una chapa plana, infinita, cargada con una densidad uniforme σ . Determinar el campo eléctrico en un punto cualquiera del espacio.

Resolución

Como superficie gaussiana ∂V , por la simetría del problema, se puede escoger un cilindro recto (valdría cualquier superficie paralelepípedica), con su eje normal a la chapa y de modo que una de sus bases, de sección S cualquiera, pase por el punto P en donde desea calcularse el campo, y la otra base sea simétrica a la anterior con respecto a la chapa (Figura 2.11). De la simetría de la

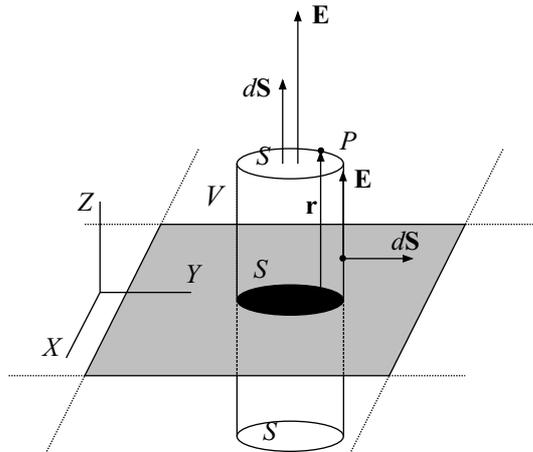


Figura 2.11. Superficie gaussiana para una chapa cargada.

distribución de carga, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será normal a la chapa, alejándose de ella (suponiendo que la chapa está cargada positivamente) y con el mismo módulo en todos los puntos de las dos bases del cilindro¹². El flujo a través de ∂V , observando que a través de la superficie lateral del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares, es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B_{\text{sup}}} E dS + \int_{B_{\text{inf}}} E dS = E2S,$$

por ser S el área tanto de la base superior B_{sup} como de la base inferior B_{inf} del cilindro. Aplicando la ley de Gauss se tiene:

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

¹²Para comprobar esto, puede considerarse el campo creado en un punto por un elemento dq cualquiera y su simétrico respecto a la normal a la chapa por el punto considerado. Las componentes paralelas a la chapa de uno y otro son opuestas, quedando como resultado un campo normal.

dato que el cilindro intercepta la misma sección S de chapa que área tienen sus bases. Igualando y despejando:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

que muestra que el campo es independiente de la distancia a la chapa.

Expresándolo vectorialmente, tomando los ejes coordenados de la figura, resulta

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z & \text{si } z > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

siendo (x, y, z) las coordenadas del punto campo.

2.9 Sobre una plancha de goma de de espesor $h = 1\text{ cm}$ se ha repartido uniformemente carga eléctrica con densidad volumétrica $\rho = 1,53\text{ nC/m}^3$. Determinar el campo eléctrico y el potencial en puntos interiores y exteriores a la plancha. (Tómese como origen de potenciales el plano central de la misma).

Resolución

Como superficie gaussiana ∂V , por la simetría análoga a la del Problema 2.8 de un plano infinito, se puede escoger un cilindro recto con su eje normal a la plancha y de modo que una de sus bases, de sección S cualquiera, pase por el punto P en donde desea calcularse el campo, y la otra base sea simétrica a la anterior con respecto a dicha plancha (Figura 2.12). Se toman dos cilindros diferentes, uno con las bases exteriores a la plancha y otro totalmente contenido en la plancha, para distinguir entre puntos exteriores como el P e interiores como el P' , pues como se verá la expresión del campo no es la misma en los dos casos. Por razonamiento análogo al caso del plano

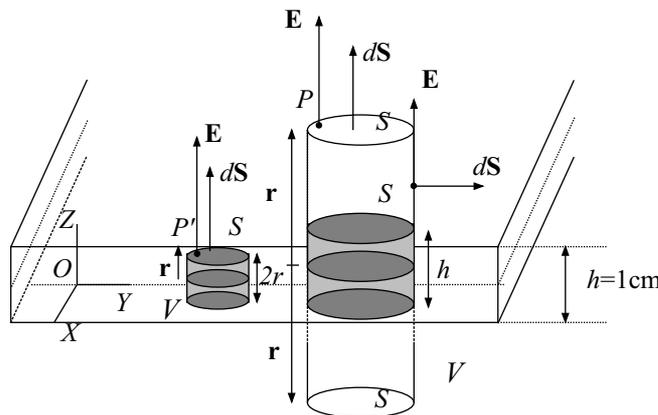


Figura 2.12. Superficies gaussianas para una plancha cargada.

infinito, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será normal a la plancha, alejándose de ella ya que está cargada positivamente, y con el mismo módulo en todos los puntos de las dos bases del cilindro. El flujo a través de ∂V para la superficie que pasa por el punto exterior P es, observando que a través de la superficie lateral del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares:

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B_{\text{sup}}} E dS + \int_{B_{\text{inf}}} E dS = E2S,$$

por ser S el área tanto de la base superior B_{sup} como de la base inferior B_{inf} del cilindro. Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho h S}{\varepsilon_0} .$$

Remarcar que la carga interior es el resultado de la intersección del cilindro con la plancha y no la totalidad del cilindro, de ahí que aunque el cilindro tenga de altura $2r$, el volumen cargado sea sólo hS . Igualando y despejando:

$$E_{\text{ext}} = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} = \frac{1,53 \times 10^{-9} \times 0,01}{2 \times 8,85 \times 10^{-12}} = 0,864 \text{ V/m} .$$

Expresándolo vectorialmente, tomando los ejes coordenados de la figura, resulta

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = 0,864 \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ V/m} = 0,864 \text{sgn}(z)\mathbf{u}_z \text{ V/m} = \begin{cases} 0,864 \mathbf{u}_z \text{ V/m} & \text{si } z > 0 , \\ -0,864 \mathbf{u}_z \text{ V/m} & \text{si } z < 0 , \end{cases}$$

siendo (x, y, z) las coordenadas del punto campo P .

El flujo a través de ∂V del cilindro que pasa por el punto interior P' , observando análogamente que a través de la superficie lateral del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares, tiene la misma expresión que para el punto exterior P :

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B_{\text{sup}}} E dS + \int_{B_{\text{inf}}} E dS = E 2S ,$$

siendo S el área tanto de la base superior B_{sup} como de la base inferior B_{inf} del cilindro. Sin embargo, al aplicar la ley de Gauss a este cilindro se tiene

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 2r S}{\varepsilon_0} ,$$

dado que la carga interior es el resultado de la intersección del cilindro con la plancha y en este caso es la totalidad del cilindro de altura $2r$. Igualando y despejando:

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho r}{\varepsilon_0} = \frac{1,53 \times 10^{-9} r}{8,85 \times 10^{-12}} = 172,9 r \text{ V/m}, \text{ con } r \text{ en metros} .$$

Expresándolo vectorialmente, tomando los ejes coordenados de la figura, resulta

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = 172,9 \mathbf{r} \text{ V/m} = 172,9 z \mathbf{u}_z \text{ V/m} ,$$

siendo (x, y, z) las coordenadas del punto campo P' .

Para determinar el potencial de un punto interior como el P' a una distancia r del plano medio de la plancha, se circula el campo eléctrico desde P' hasta un punto cualquiera O en dicho plano, referencia de potenciales. Dado que la circulación es independiente del camino y que cualquier punto del plano medio está a potencial cero, se toma como línea de circulación la perpendicular desde P' al plano, para la cual \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ son paralelos, resultando

$$V_{P'} - V_O = \int_{P'}^O \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^0 172,8 r dr = 86,4 r^2 \Big|_r^0 = -86,4 r^2 .$$

Al mismo resultado se puede llegar empleando coordenadas cartesianas para $P'(x, y, z)$, teniendo en cuenta que $d\mathbf{l} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$:

$$V_{P'} - V_O = \int_{P'}^O \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^0 172,8 z dz = 86,4 z^2 \Big|_z^0 = -86,4 z^2 ,$$

es decir, el mismo resultado sin más que sustituir r por z ,

$$V_{\text{int}} = -86,4 r^2 \text{ V} = -86,4 z^2 \text{ V} ,$$

con r o z expresados en metros.

Para un punto exterior como el P , es necesario primero realizar la circulación hasta un punto P_s de la superficie empleando la expresión para el campo en el exterior y luego desde dicho punto hasta el centro de la plancha, empleando la expresión para el campo en el interior. Resulta así

$$\begin{aligned} V_P - V_O &= \int_P^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^{P_s} \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} + \int_{P_s}^O \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_r^{5 \times 10^{-3}} 0,864 dr + \int_{5 \times 10^{-3}}^0 173 r dr = 0,864 r \Big|_r^{5 \times 10^{-3}} + 86,4 r^2 \Big|_{5 \times 10^{-3}}^0 \\ &= 4,32 \times 10^{-3} - 0,864 r - 2,16 \times 10^{-3} = (2,16 \times 10^{-3} - 0,864 r) \text{ V} , \end{aligned}$$

con r expresado en metros. Al mismo resultado se puede llegar empleando coordenadas cartesianas, tal como se hizo para puntos interiores, sin más que sustituir r por $|z|$, dado que z es negativo para puntos por debajo del plano medio de la plancha. Así pues:

$$V_{\text{ext}} = (2,16 \times 10^{-3} - 0,864 r) \text{ V} = (2,16 \times 10^{-3} - 0,864 |z|) \text{ V} ,$$

con r o z expresados en metros.

2.10 Calcular el campo y el potencial eléctricos creados por el hilo en forma de semianillo de radio R y carga Q homogénea de la Figura 2.13, en el punto P , situado en la perpendicular al plano del anillo por su centro, a una distancia z del plano del mismo.

Resolución

Sea $dq' = \lambda dl$ la carga de un elemento diferencial cualquiera de hilo (punto carga). El valor de λ se puede obtener a partir de la carga total del anillo. Al ser ésta homogénea resulta

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{\pi R} .$$

De la Figura 2.14 se observa que

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z , \quad \mathbf{r}' = R \cos \phi \mathbf{u}_x + R \text{sen} \phi \mathbf{u}_y ,$$

con lo que

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R \cos \phi \mathbf{u}_x - R \text{sen} \phi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z , \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2} .$$

El campo creado por el diferencial de carga en el punto campo P es

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R \cos \phi \mathbf{u}_x - R \text{sen} \phi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

en la que se ha aplicado que $dl = R d\phi$.

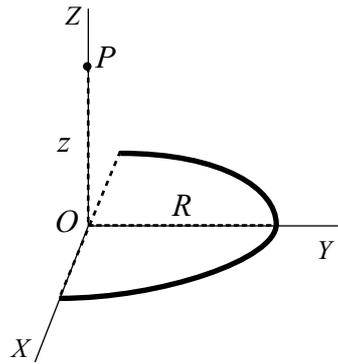


Figura 2.13. Semianillo cargado.

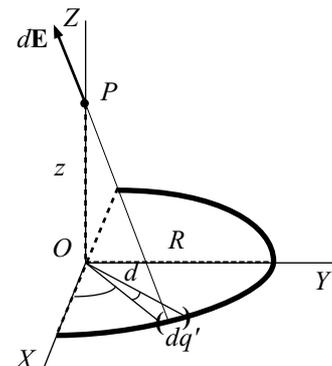


Figura 2.14. Campo creado por un diferencial de carga.

Aplicando el principio de superposición, se obtiene el campo creado por el hilo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^\pi \frac{\lambda R d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-R \cos \phi \mathbf{u}_x - R \operatorname{sen} \phi \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \left[\int_0^\pi -R \cos \phi d\phi \mathbf{u}_x + \right. \\ &+ \left. \int_0^\pi -R \operatorname{sen} \phi d\phi \mathbf{u}_y + \int_0^\pi z d\phi \mathbf{u}_z \right] = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} [-R \operatorname{sen} \phi|_0^\pi \mathbf{u}_x + R \cos \phi|_0^\pi \mathbf{u}_y + z \phi|_0^\pi \mathbf{u}_z] \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} (-2R \mathbf{u}_y + \pi z \mathbf{u}_z) . \end{aligned}$$

Obsérvese en la integración que z y R no son variables. El campo eléctrico pedido, expresando el resultado en función de la carga del hilo, es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi^2 \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} (-2R \mathbf{u}_y + \pi z \mathbf{u}_z) .$$

El potencial creado por el diferencial de carga en P es

$$dV = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} .$$

Y aplicando el principio de superposición:

$$V = \int_L \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_L dl = \frac{\lambda R}{4\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} ,$$

en la que se ha tenido en cuenta que la longitud del hilo es $L = \pi R$. El potencial¹³ en P , expresado en función de la carga del hilo, es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} .$$

2.11 Calcular el campo y el potencial eléctricos creados por la chapa de forma semicircular de radios $R_i = 20$ cm y $R_e = 40$ cm de la Figura 2.15, de densidad superficial uniforme $\sigma = 4 \mu\text{C}/\text{m}^2$, en el punto P , situado en la perpendicular al plano de la chapa por su centro, a una distancia $z = 30$ cm del plano del mismo.

Resolución

El problema puede resolverse por integración directa en coordenadas polares, análogamente al Problema 2.10. Un elemento de carga cualquiera, situado en $\mathbf{r}' = r' \cos \phi \mathbf{u}_x + r' \operatorname{sen} \phi \mathbf{u}_y$ (Figura 2.16) viene expresado en coordenadas polares por

$$dq' = \sigma dS = \sigma r' dr' d\phi .$$

El campo creado por este elemento en el punto P , situado en $\mathbf{r} = z \mathbf{u}_z$ es

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r' \cos \phi \mathbf{u}_x - r' \operatorname{sen} \phi \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\phi .$$

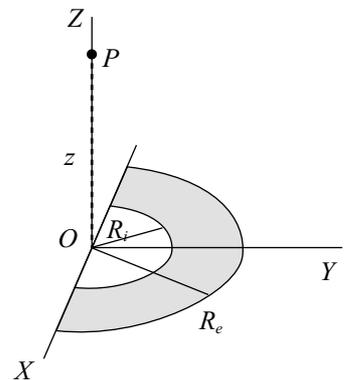


Figura 2.15. Chapa semicircular homogéneamente cargada

¹³En este problema el campo eléctrico no se puede determinar calculando el gradiente del potencial, dado que éste no está dado en todo punto del espacio, sino sólo en los puntos del eje Z (puede observarse que haciendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ sólo se obtiene la componente z). Una situación similar se da cuando se estudia el campo magnético (véase por ejemplo el problema 5.19).

Aplicando el principio de superposición e integrando¹⁴ se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(z) &= \int_{R_i}^{R_e} \int_0^\pi \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{-r'^2 \cos \phi \mathbf{u}_x - r'^2 \sin \phi \mathbf{u}_y + zr' \mathbf{u}_z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' d\phi \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_i}^{R_e} \frac{-r'^2}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \int_0^\pi \cos \phi d\phi \mathbf{u}_x + \right. \\
 &+ \int_{R_i}^{R_e} \frac{-r'^2}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \int_0^\pi \sin \phi d\phi \mathbf{u}_y + \\
 &+ \left. \int_{R_i}^{R_e} \frac{zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \int_0^\pi d\phi \mathbf{u}_z \right] \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_i}^{R_e} \frac{-2r'^2}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \mathbf{u}_y + \int_{R_i}^{R_e} \frac{\pi zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \mathbf{u}_z \right] \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{2r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} - 2 \ln \left(r' + \sqrt{r'^2 + z^2} \right) \right) \mathbf{u}_y - \frac{\pi z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \mathbf{u}_z \right] \Bigg|_{R_i}^{R_e}.
 \end{aligned}$$

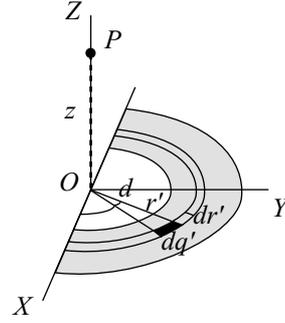


Figura 2.16. Diferenciales de carga para chapa semicircular.

Sustituyendo los límites de integración y particularizando para $R_i = 0,2 \text{ m}$, $R_e = 0,4 \text{ m}$ y $z = 0,2 \text{ m}$ resulta

$$\mathbf{E}_P = -16405 \mathbf{u}_y + 26208 \mathbf{u}_z \text{ V/m}.$$

También podría resolverse el cálculo del campo como una integral simple si se observa que puede tomarse como elemento diferencial una chapa de radio r' cualquiera y de espesor dr' (Figura 2.16). El campo creado por este diferencial de chapa de carga dq' es equivalente al del semianillo del Problema 2.10,

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi^2\epsilon_0(r'^2 + z^2)^{3/2}} (-2r' \mathbf{u}_y + \pi z \mathbf{u}_z),$$

siendo

$$dq = \sigma dS = \sigma \pi r' dr'.$$

Aplicando el principio de superposición para todos los diferenciales de chapa, hasta definir la chapa completa, esto es, integrando sobre r' entre los radios R_i y R_e , se obtiene el campo total

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(z) &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\sigma r' dr'}{4\pi\epsilon_0(r'^2 + z^2)^{3/2}} (-2r' \mathbf{u}_y + \pi z \mathbf{u}_z) \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{R_i}^{R_e} \frac{-2r'^2}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \mathbf{u}_y + \int_{R_i}^{R_e} \frac{\pi zr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \mathbf{u}_z \right] \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{2r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} - 2 \ln \left(r' + \sqrt{r'^2 + z^2} \right) \right) \mathbf{u}_y - \frac{\pi z}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \mathbf{u}_z \right] \Bigg|_{R_i}^{R_e} \\
 &= -16405 \mathbf{u}_y + 26208 \mathbf{u}_z \text{ V/m},
 \end{aligned}$$

resultado idéntico al obtenido por integración doble.

El potencial creado por el elemento diferencial de carga en el punto P , situado en $\mathbf{r} = z \mathbf{u}_z$ es

$$dV = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' d\phi.$$

Aplicando el principio de superposición,

$$V(z) = \int_{R_i}^{R_e} \int_0^\pi \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' d\phi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} dr' = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left(\sqrt{r'^2 + z^2} \right) \Bigg|_{R_i}^{R_e}.$$

¹⁴En los apéndices se incluye un programa para MATLAB con el cálculo de la integral.

Sustituyendo los límites de integración y particularizando, resulta

$$V_P = 15749 \text{ V} .$$

También puede obtenerse el potencial aplicando el resultado del Problema 2.10 para el diferencial de carga de la Figura 2.16, evitando así la integral doble:

$$dV = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma r' dr'}{4\epsilon_0\sqrt{r'^2 + z^2}} .$$

Aplicando el principio de superposición, resulta

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_{R_i}^{R_e} \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} dr' = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left(\sqrt{r'^2 + z^2} \right) \Big|_{R_i}^{R_e} = 15749 \text{ V} ,$$

resultado idéntico al obtenido por integración directa.

2.12

Se sabe que el plano (infinito) de la Figura 2.17 está cargado con una densidad de carga superficial σ homogénea. Determinar el valor de dicha densidad si es nulo el campo eléctrico creado por dicho plano y las cargas q y $2q$ en el punto medio A de la línea que las une. Datos: $q = 2\mu\text{C}$; $d = 10\text{cm}$.

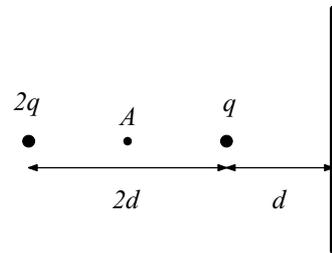


Figura 2.17. Plano cargado y dos cargas puntuales.

Resolución

Al cumplir el campo eléctrico el principio de superposición, se puede resolver el ejercicio calculando el campo creado por cada una de las cargas independientemente y sumando dichos campos.

Si se toman los ejes de la Figura 2.18, con el origen O en el plano cargado, y se aplica el resultado del Problema 2.8 resulta que en el punto A , situado a la izquierda del plano, el campo eléctrico \mathbf{E}_π creado por éste vale

$$\mathbf{E}_\pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\mathbf{u}_x) ,$$

El campo creado por la carga puntual q [expresión (2.15)] en el punto A , situado a una distancia d de la misma es

$$\mathbf{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0d^2}(-\mathbf{u}_x) ,$$

en el que puede observarse que $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -2d\mathbf{u}_x - (-d\mathbf{u}_x) = -d\mathbf{u}_x$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d$. El campo creado por la carga $2q$, también a una distancia d es

$$\mathbf{E}_{2q} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0d^2}\mathbf{u}_x ,$$

con $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -2d\mathbf{u}_x - (-3d\mathbf{u}_x) = d\mathbf{u}_x$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d$. El campo total en el punto A , que por hipótesis debe ser nulo, viene dado por

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_\pi + \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{2q} = 0 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{u}_x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0d^2}\mathbf{u}_x + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0d^2}\mathbf{u}_x .$$

Despejando:

$$\sigma = \frac{q}{2\pi d^2} = 3,18 \times 10^{-5} \text{ C m}^{-2} .$$

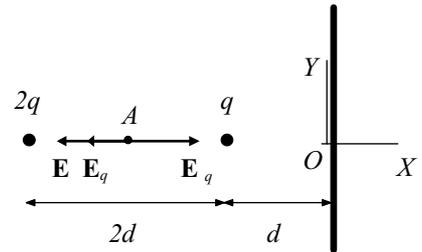


Figura 2.18. Esquema de los campos.

2.13 Dos hilos muy largos y paralelos, uno de densidad lineal de carga λ y otro de densidad lineal 2λ , ambos uniformes, están separados una distancia d . Determinar el lugar geométrico de los puntos para los cuáles el campo electrostático es nulo.

Resolución¹⁵

Del Problema 2.7 se tiene la expresión del campo creado por un hilo infinito a una distancia r cualquiera del mismo,

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Aplicando dicha expresión al caso de los hilos del problema (Figura 2.19) resulta, para el hilo de densidad λ , un campo

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1},$$

y para el hilo de densidad 2λ ,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}.$$

Recuérdese que estos vectores son perpendiculares a los hilos en cualquier punto del espacio.

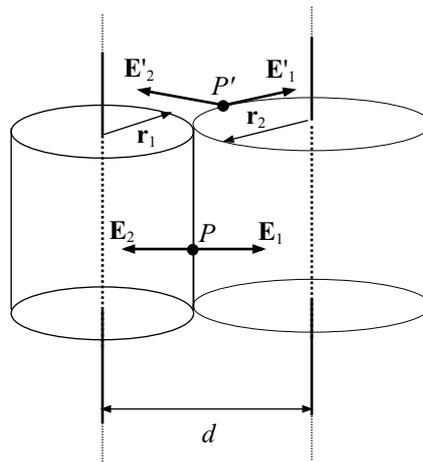


Figura 2.19. Esquema de los campos.

Para que el campo en un punto sea cero, debe anularse la suma vectorial de los campos creados por ambos hilos. Por tanto, los dos vectores \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 deben ser opuestos (de igual módulo y dirección, y sentidos contrarios). En un punto tal como el P' de la figura, no situado en el plano que contiene a ambos hilos, los campos creados por éstos forman siempre un ángulo cualquiera diferente de 0° o 180° , por lo que la suma vectorial nunca puede anularse. En los puntos contenidos en dicho plano, pero no situados entre ambos hilos, los vectores de campo tienen igual sentido, por lo que tampoco pueden anularse. Por tanto, los únicos puntos donde puede anularse el campo deben estar en el plano que contiene a los hilos y en la región situada entre ellos, como en el punto P de la figura. En tales puntos, para que el campo se anule, deberán ser iguales los módulos de los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Observando que en dicho punto, $d = r_1 + r_2$ se tiene

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 (d - r_1)} \Rightarrow r_1 = d/3.$$

El lugar geométrico pedido es la recta contenida en el plano que forman los dos hilos, paralela a ambos y que dista $d/3$ del hilo cargado con densidad λ .

2.14 La Figura 2.20 muestra un cilindro muy largo, de radio R , en cuyo volumen se ha distribuido carga eléctrica con densidad volumétrica $\rho = cr$, siendo r la distancia de cualquier punto del cilindro a su eje y c una constante. Determinar la diferencia de potencial entre el punto O del eje del cilindro y el punto P situado a una distancia $2R$ del mismo.

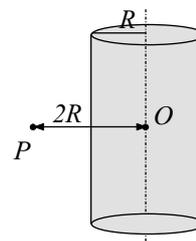


Figura 2.20. Cilindro con carga inhomogénea.

¹⁵Se supone que, en este tipo de ejercicios, no existe ninguna redistribución de las cargas en los distintos elementos que componen el sistema, a pesar de la cercanía de los mismos.

Resolución

Para determinar la diferencia de potencial entre el punto O y el punto P es necesario realizar la circulación del campo eléctrico entre dichos puntos, por lo que previamente es necesario calcular dicho campo en todos los puntos de la línea OP .

Para ello puede aplicarse el teorema de Gauss. Como superficie gaussiana ∂V , por la simetría del problema, se considera un cilindro de longitud L cualquiera, con eje en el hilo y de radio r tal que la superficie pase por el punto donde se desea calcular el campo (Figura 2.21). Para la aplicación del teorema de Gauss es necesario distinguir entre los puntos situados en el interior o en el exterior del cilindro, por ser diferente la carga interior a la superficie gaussiana. Por la simetría de la distribución, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será radial (normal a la superficie lateral del cilindro), con sentido hacia el exterior y con el mismo módulo en todos los puntos de la superficie lateral¹⁶. El flujo a través de ella, observando que a través de las bases del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares, es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{lat}}} E dS = E \int_{S_{\text{lat}}} dS = E 2\pi r L,$$

siendo S_{lat} la superficie lateral del cilindro gaussiano. Aplicando la ley de Gauss se tiene, para el caso de la superficie gaussiana exterior al cilindro cargado ($r \geq R$), que

$$\Phi_{E_{\text{ext}}} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R cr 2\pi r L dr = \frac{2\pi cLR^3}{3\varepsilon_0}.$$

Obsérvese que la integral se extiende hasta R y no hasta la totalidad del radio r de la superficie¹⁷, dado que sólo existe carga hasta dicho valor R . Igualando con la expresión del flujo y despejando se obtiene

$$E_{\text{ext}} = \frac{cR^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

Análogamente, para el caso de la superficie gaussiana interior al cilindro cargado ($r < R$), el flujo es

$$\Phi_{E_{\text{int}}} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r cr 2\pi r L dr = \frac{2\pi cLr^3}{3\varepsilon_0}.$$

Obsérvese que en este caso la integral se extiende hasta r y no hasta R , dado que el volumen cargado sólo ocupa el volumen encerrado por la propia superficie gaussiana de radio r . Igualando con la expresión del flujo y despejando, se obtiene

$$E_{\text{int}} = \frac{cr^2}{3\varepsilon_0}.$$

Expresado vectorialmente:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{cr^2}{3\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{cr^2}{3\varepsilon_0} \mathbf{u}_\rho & \text{si } r < R, \\ \frac{cR^3}{3\varepsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{cR^3}{3\varepsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho & \text{si } r \geq R, \end{cases}$$

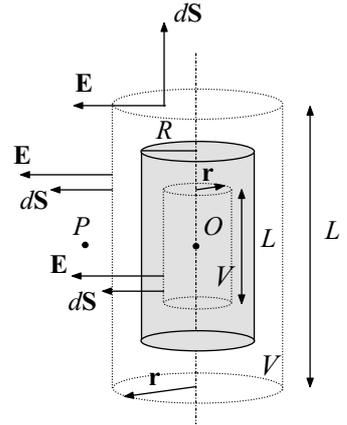


Figura 2.21. Superficies gaussianas para un cilindro cargado.

¹⁶Para comprobar esto, puede considerarse el campo creado en un punto por un elemento dq cualquiera y su simétrico respecto a la normal al eje del cilindro por el punto considerado. Las componentes tangenciales de uno y otro son opuestas, quedando como resultado un campo radial.

¹⁷Para calcular la carga interior se ha empleado un diferencial de volumen $dV = 2\pi r L dr$ consistente en un cilindro de radio r , altura L y espesor dr , que debe desplazarse desde 0 hasta R : en una posición cualquiera r , la densidad $\rho = cr$ es la misma para todos los puntos de ese cilindro. A idéntico resultado se podría llegar por integración triple en coordenadas cilíndricas del elemento $dV = r dr d\phi dz$.

siendo \mathbf{u}_ρ el vector unitario en coordenadas cilíndricas.

Para calcular la diferencia de potencial entre O y P se circula el campo eléctrico entre dichos puntos siguiendo la línea OP , en donde \mathbf{E} y $d\mathbf{l}(=dr\mathbf{u}_\rho)$ tienen igual dirección y sentido:

$$V_O - V_P = \int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R \frac{cr^2}{3\epsilon_0} dr + \int_R^{2R} \frac{cR^3}{3\epsilon_0 r} dr = \frac{cR^3}{9\epsilon_0} + \frac{cR^3}{3\epsilon_0} \ln r \Big|_R^{2R} .$$

Obsérvese que la expresión del campo eléctrico varía dependiendo de que el punto sea interior o exterior al cilindro cargado. Despejando, resulta

$$V_0 - V_P = \frac{cR^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} + \ln 2 \right) .$$

- 2.15** La plancha de goma de la Figura 2.22 es muy grande comparada con su espesor de 10 cm y está cargada con una densidad uniforme $\rho = 90 \text{ nC/m}^3$. A una distancia de 30 cm de la cara superior de la plancha se coloca, perpendicularmente a la misma, un hilo de 20 cm de longitud cargado con una densidad $\lambda = 2 \text{ nC/m}$. a) Calcular el campo eléctrico existente en el punto A de la figura, situado en la vertical del hilo a 20 cm de la cara superior de la plancha. b) Calcular el flujo del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica oblicua de la Figura 2.22, de 12 cm de radio, inclinada 20° respecto de la vertical y de 70 cm de altura, y que contiene completamente al hilo en su interior.

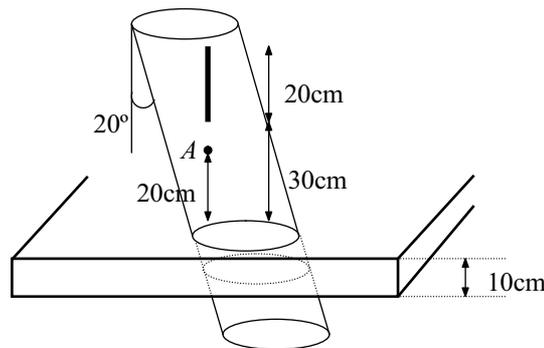


Figura 2.22. Figura del problema 2.15.

Resolución

a) Para calcular el campo eléctrico se aplica el principio de superposición, sumando vectorialmente los campos creados independientemente por la plancha y el hilo en el punto A . Para determinar el campo creado por la plancha se sigue el procedimiento del Problema 2.9. Como superficie gaussiana se puede escoger un cilindro recto con su eje normal a la plancha y de modo que una de sus bases, de sección S cualquiera, pase por el punto A en donde desea calcularse el campo, y la otra base sea simétrica a la anterior con respecto a la plancha (Figura 2.23). El campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será normal a la plancha, alejándose de ella (la plancha está cargada positivamente) y con el mismo módulo en todos los puntos de las dos bases del cilindro. El flujo a través de ∂V , observando que a través de la superficie lateral del cilindro será nulo, por ser $d\mathbf{S}$ y \mathbf{E} perpendiculares, es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{B_{\text{sup}}} E dS + \int_{B_{\text{inf}}} E dS = E2S ,$$

por ser S el área tanto de la base superior B_{sup} como de la base inferior B_{inf} del cilindro. Aplicando la ley de Gauss se tiene

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho h S}{\epsilon_0} .$$

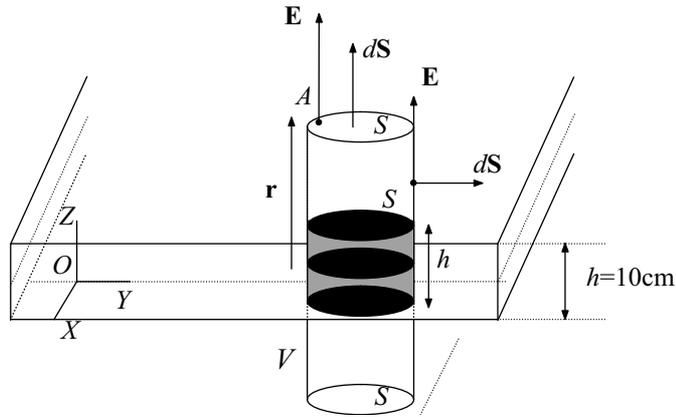


Figura 2.23. Superficie gaussiana para una plancha cargada.

Remarcar que la carga interior es el resultado de la intersección del cilindro con la plancha y no la totalidad del mismo, de ahí que aunque el cilindro tenga de altura $2r$ el volumen cargado sea sólo hS . Igualando y despejando:

$$E_{\text{plancha}} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} = 508,23 \text{ V/m} .$$

Expresándolo vectorialmente, tomando los ejes coordenados de la figura, resulta

$$\mathbf{E}_{\text{plancha}} = 508,23 \mathbf{u}_z \text{ V/m} .$$

Para calcular el campo eléctrico creado por el hilo, se aplica el principio de superposición para el campo eléctrico creado por todos los elementos diferenciales de carga $dq = \lambda dz$, como el de la Figura 2.24. Tomando el sistema de coordenadas indicado en la Figura 2.24, para el cual $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -z' \mathbf{u}_z$, el campo creado por dicho elemento en el punto A es

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\lambda dz'}{4\pi\epsilon_0 z'^2} (-\mathbf{u}_z) = 17,97 \frac{dz'}{z'^2} (-\mathbf{u}_z) .$$

El campo total creado por el hilo en el punto A es

$$\mathbf{E}_{\text{hilo}} = \int_{0,1}^{0,3} 17,98 \frac{dz'}{z'^2} (-\mathbf{u}_z) = 17,98 \left. \frac{1}{z'} \right|_{0,1}^{0,3} \mathbf{u}_z = -119,83 \mathbf{u}_z \text{ V/m} ,$$

dado que el hilo cargado comienza a $z' = 10$ cm del origen y acaba a 30 cm del mismo. Al mismo resultado se habría llegado si los ejes coordenados se hubieran colocado en cualquier otro punto, como por ejemplo en el plano medio de la plancha (Figura 2.23). En dicho caso cambiaría la expresión de $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0,25 - z') \mathbf{u}_z$, pero también los límites de integración, al estar las coordenadas z del hilo comprendidas entre 35 y 55 cm.

Sumando finalmente los campos creados por el hilo y la plancha se tiene

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_{\text{plancha}} + \mathbf{E}_{\text{hilo}} = 388,40 \mathbf{u}_z \text{ V/m} .$$

b) Para calcular el flujo a través de la superficie cilíndrica de la Figura 2.22 se aplica la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} ,$$

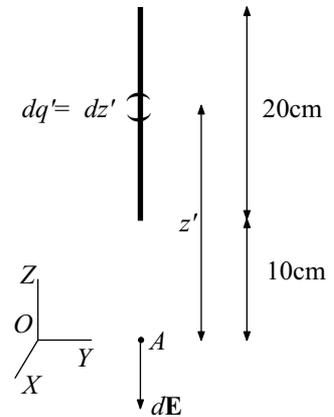


Figura 2.24. Campo creado por el hilo finito.

siendo q_{int} la carga total contenida en el interior del cilindro. Éste contiene en su totalidad al hilo, mientras que intersecta con la chapa sólo un trozo con forma de cilíndrico oblicuo. El volumen intersectado es el mismo que el de un cilindro recto de radio 12 cm y altura 10 cm. Por tanto,

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} (2 \times 10^{-9} \times 0,2 + 90 \times 10^{-9} \times \pi \times 0,12^2 \times 0,1) ,$$

y el flujo a través de la superficie resulta ser

$\Phi_E = 91,16 \text{ Vm} .$

2.16 La corona esférica de la Figura 2.25 (se representa la sección por el plano XY), de centro el origen de coordenadas, radio interior 2 cm y radio exterior 4 cm, está cargada con densidad homogénea $\rho = 2 \mu\text{C}/\text{m}^3$. El hilo AB de la figura está delimitado por los puntos $A(4 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ y $B(7 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ y está cargado con una densidad $\lambda = -4 \mu\text{C}/\text{m}$. a) Calcular el flujo del campo electrostático a través del cubo de la figura, centrado en el origen y de 10 cm de lado. b) Calcular el campo electrostático en el punto $P(0 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ de la figura.

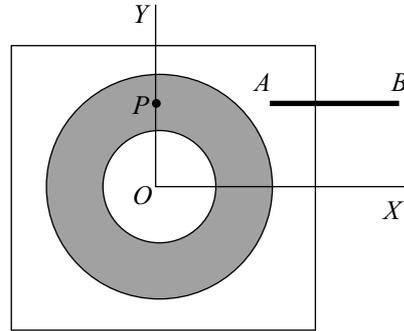


Figura 2.25. Corona esférica e hilo cargado.

Resolución

a) Para calcular el flujo a través del cubo, se aplica el teorema de Gauss:

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_V \rho dV + \int_L \lambda dl \right)_{\text{int}} ,$$

en donde las integrales deben evaluarse para el volumen cargado y la longitud de hilo cargado interiores al cubo.

La corona esférica cargada está en su totalidad dentro del cubo, mientras solamente lo está 1 cm del hilo. Resulta así

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[2 \times 10^{-6} \frac{4}{3} \pi (0,04^3 - 0,02^3) - 4 \times 10^{-6} \times 0,01 \right] .$$

El flujo pedido es

$\Phi_E = -4465 \text{ Vm} .$

b) Para calcular el campo eléctrico se aplica el principio de superposición, sumando vectorialmente los campos creados independientemente por la corona esférica y el hilo en el punto P .

Para determinar el campo creado por la corona esférica se sigue el procedimiento del Problema 2.6: se considera una superficie gaussiana esférica ∂V , concéntrica con la corona cargada y de radio r , tal que la superficie pase por el punto P en que desea calcularse el campo (una superficie esférica de radio $r = 0,03 \text{ m}$, Figura 2.26), y se aplica el teorema de Gauss a dicha superficie.

El campo en cualquier punto de la superficie es radial y, por tanto, paralelo a $d\mathbf{S}$. El flujo a través de la superficie gaussiana es:

$$\begin{aligned}\Phi_{E_e} &= \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} E dS \\ &= E \oint_{\partial V} dS = E4\pi r^2 = E4\pi(0,03)^2.\end{aligned}$$

Aplicando la ley de Gauss, se obtiene para dicho flujo

$$\Phi_{E_e} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} 2 \times 10^{-6} \frac{4}{3} \pi (0,03^3 - 0,02^3).$$

Igualando las dos expresiones para el flujo y despejando se encuentra que el campo en P es

$$\mathbf{E}_e = 1590 \mathbf{u}_y \text{ V/m}.$$

Para calcular el campo del hilo se aplica el principio de superposición debido a los elementos tales como el $dq' = \lambda dx$ representado en la Figura 2.26. El campo creado por dq' , teniendo en cuenta que $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x' \mathbf{u}_x$ es

$$d\mathbf{E}_h = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 x'^2} (-\mathbf{u}_x) = \frac{36000}{x'^2} dx' \mathbf{u}_x.$$

Integrando:

$$\mathbf{E}_h = \int_{0,04}^{0,07} \frac{36000}{x'^2} dx' \mathbf{u}_x = \left. \frac{-36000}{x'} \right|_{0,04}^{0,07} \mathbf{u}_x = 385714,29 \mathbf{u}_x \text{ V/m}.$$

El campo total en el punto P se obtiene sumando vectorialmente ambos campos:

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_h = 385714,29 \mathbf{u}_x + 1589,54 \mathbf{u}_y \text{ V/m}.$$

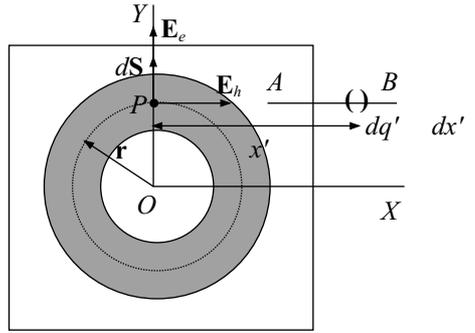


Figura 2.26. Campos creados por el hilo y la corona.

2.17 En un cable de corriente se acumula en su superficie una carga por unidad de longitud $\lambda = -20 \text{ nC/m}$. Este cable atraviesa perpendicularmente un disco cerámico, cuyo espesor se puede suponer despreciable y de cierto radio R . Debido a corrientes de fuga, el disco ha quedado cargado con una densidad superficial de carga uniforme $\sigma = -10 \text{ nC/m}^2$. Se desea conocer el campo eléctrico en el punto A de la figura, cuya distancia al hilo es mucho menor que el radio del disco cerámico, y la diferencia de potencial entre los puntos A , B y C de la Figura 2.27.

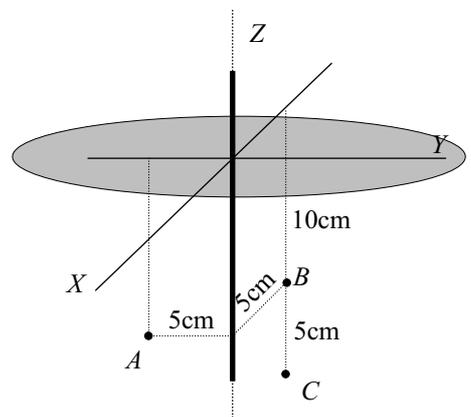


Figura 2.27. Disco e hilo cargados.

Resolución

Para calcular el campo eléctrico en el punto A se aplica el principio de superposición de campos electrostáticos, determinando dicho campo como la suma vectorial del campo creado por el hilo cargado y del campo del disco cerámico.

Para calcular el campo producido por el hilo se aplica el teorema de Gauss, tal como se hizo en el Problema 2.7. Tomando el resultado del mismo, el campo creado por un hilo infinito a una cierta distancia r_h de su eje es

$$\mathbf{E}_h = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_h} \frac{\mathbf{r}_h}{r_h} .$$

Aplicado al caso del punto A de la Figura 2.28, en donde se han reflejado las coordenadas cartesianas en centímetros, se tiene

$$\mathbf{E}_h = \frac{-20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 0,05} (-\mathbf{u}_y) = 7190 \mathbf{u}_y \text{ V/m} .$$

Para calcular el campo debido al disco cerámico debe observarse que el enunciado indica que el radio de éste es mucho mayor que la distancia del punto A tanto al disco como al hilo. Puede aproximarse entonces el campo creado por el disco al valor del campo creado por un plano infinito. Tomando el resultado del Problema 2.8, el campo creado por el disco a una distancia r_π del mismo es

$$\mathbf{E}_\pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_\pi}{r_\pi} ,$$

que aplicado al punto A resulta

$$\mathbf{E}_\pi = \frac{-10 \times 10^{-9}}{2\epsilon_0} (-\mathbf{u}_z) = 565 \mathbf{u}_z \text{ V/m} .$$

El campo total en el punto A es la suma vectorial de ambos campos:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_h + \mathbf{E}_\pi = 7190 \mathbf{u}_y + 565 \mathbf{u}_z \text{ V/m} .$$

Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos de la figura, se obtiene la correspondiente al hilo y al disco, sumándose ambas.

Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, tales como el A y el B , debida al hilo, se tendrá que

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_h} \frac{\mathbf{r}_h}{r_h} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_h} dr_h ,$$

en donde r_h representa la distancia desde un punto cualquiera al eje del hilo y dr_h el elemento diferencial de longitud en la dirección perpendicular al mismo, resultado de proyectar $d\mathbf{l}$ en la dirección de \mathbf{E} . De esta integral se puede observar que la diferencia de potencial entre dos puntos depende únicamente de la distancia al hilo. Puesto que los tres puntos A , B y C están a la misma distancia de éste, los tres tendrán el mismo potencial debido al campo producido por el hilo.

En cuanto a la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera debida al campo creado por el disco, se tiene:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_\pi}{r_\pi} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr_\pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (r_{\pi B} - r_{\pi A}) ,$$

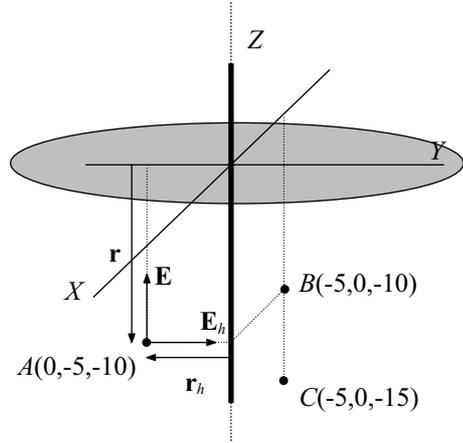


Figura 2.28. Campos creados por el disco y el hilo cargados.

en donde r_π representa la distancia desde un punto cualquiera al disco y dr_π el elemento diferencial de longitud en la dirección perpendicular al mismo, resultado de proyectar $d\mathbf{l}$ en la dirección de \mathbf{E} . Por lo tanto, para estos puntos, la diferencia de potencial sólo depende de la distancia de ellos al disco. Así pues, para los puntos A , B y C del ejercicio, se tiene:

$$V_A - V_B = 0, \quad V_A - V_C = V_B - V_C = \frac{-10 \times 10^{-9}}{2\varepsilon_0}(0,15 - 0,10) = -28,25 \text{ V}.$$

Obsérvese que, de $\mathbf{E} = -\nabla V$, y puesto que el campo va dirigido hacia el plano, el punto C debe ser el de mayor potencial, como se obtiene de los cálculos. Resumiendo,

$$V_A - V_B = 0, \quad V_A - V_C = V_B - V_C = -28,25 \text{ V}.$$

2.18

- a) Determine en todo punto del espacio el campo electrostático creado por la carga puntual $q > 0$ y la corona esférica de la Figura 2.29 de radios interior y exterior R y $2R$, cargada con densidad volumétrica de carga ρ constante.
b) Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B .

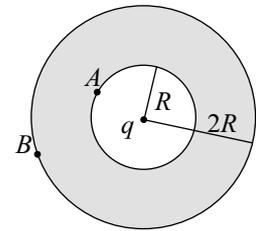


Figura 2.29. Carga puntual interior a una corona esférica cargada

Resolución

- a) Puesto que la distribución de carga es simétrica puede aplicarse el teorema de Gauss para calcular el campo de forma sencilla.

En la Figura 2.29 se observan tres regiones claramente definidas: la región comprendida entre la carga puntual y el radio interior de la corona esférica; la propia corona esférica; y la región exterior a la corona. Para resolver el problema se consideran superficies gaussianas esféricas (de trazo discontinuo en la Figura 2.30), con centro en la carga puntual. De la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será radial, con sentido hacia el exterior y con el mismo módulo en todos los puntos de la superficie.

Al aplicar el teorema de Gauss para el cálculo del flujo, la carga interior va a ser diferente según la superficie que se considere. Así, si $r < R$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Si $R \leq r < 2R$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)\rho \right).$$

Y si $r \geq 2R$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q + \frac{4}{3}\pi[(2R)^3 - R^3]\rho \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q + \frac{28}{3}\pi R^3\rho \right),$$

dado que en este último caso, la carga interior a la superficie gaussiana es la carga puntual q y la totalidad de la corona esférica.

El flujo a través de una cualquiera de las superficies gaussianas es

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} E dS = E \oint_{\partial V} dS = 4\pi r^2 E,$$

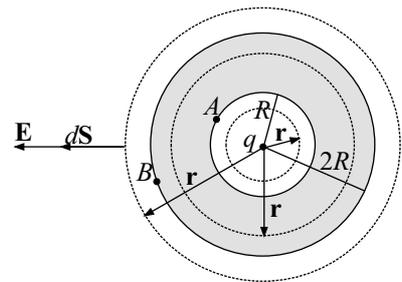


Figura 2.30. Superficies gaussianas para el Problema 2.18

siendo $4\pi r^2$ el área de la superficie esférica de radio r para cada caso. Esta expresión es la misma para cualquiera de las superficies esféricas de radio r de la Figura 2.30. Comparando dicha expresión con los valores de flujo anteriormente calculados, se obtiene el valor del campo eléctrico,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \mathbf{u}_r & \text{si } r < R, \\ \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left(q + \frac{4}{3} \pi (r^3 - R^3) \rho \right) \mathbf{u}_r & \text{si } R \leq r < 2R, \\ \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left(q + \frac{28}{3} \pi R^3 \rho \right) \mathbf{u}_r & \text{si } r \geq 2R, \end{cases}$$

siendo \mathbf{u}_r el vector unitario en la dirección radial en coordenadas esféricas.

b) Para calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B es necesario conocer el campo eléctrico entre dichos puntos. Busquemos una línea de circulación en la que sea cómodo hallar la integral. Eligiendo una línea radial desde A hasta B' , situado en la misma superficie esférica que B , los vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ tienen la misma dirección y sentido (Figura 2.31). Y siguiendo una línea desde B' hasta B contenida en la superficie esférica, los vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ son perpendiculares, siendo la circulación nula en esa línea. La diferencia de potencial queda, por tanto,

$$V_A - V_B = V_A - V_{B'} = \int_A^{B'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^{2R} E dr,$$

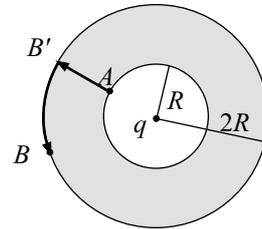


Figura 2.31. Línea de circulación para calcular la diferencia de potencial.

dato que en la línea AB' , $d\mathbf{l} = dr\mathbf{u}_r$. Sustituyendo la expresión obtenida para el campo eléctrico entre R y $2R$, se tiene:

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_R^{2R} \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \left(q + \frac{4}{3} \pi (r^3 - R^3) \rho \right) dr = \frac{q - 4\pi R^3 \rho / 3}{4\pi \varepsilon_0} \int_R^{2R} \frac{dr}{r^2} + \int_R^{2R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr \\ &= \frac{q - 4\pi R^3 \rho / 3}{8\pi \varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Reordenando el resultado,

$$V_A - V_B = \frac{q}{8\pi \varepsilon_0 R} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

- 2.19** Una esfera de centro O y radio $R = 2$ m está uniformemente cargada con densidad de carga $\rho = 4\text{nC/m}^3$ salvo en un hueco esférico de radio $R/4 = 50$ cm cargado con densidad $3\rho = 12\text{nC/m}^3$. Se plantean dos casos: que el centro del hueco esférico esté en el centro de la esfera o que esté en un punto O' situado a 1 m de O . Determinar el campo eléctrico creado por esta distribución de carga en un punto cualquiera del espacio para ambos casos. Para el caso en que el hueco sea excéntrico respecto de la esfera, particularizar el valor del campo para el punto medio del segmento que une O con O' .

Resolución

En el caso en que el hueco sea concéntrico con la esfera, el problema tiene simetría y se puede aplicar con sencillez el teorema de Gauss para calcular el campo, tal como se hizo en el Problema 2.6.

Se considera una superficie gaussiana esférica ∂V (en la Figura 2.32 se representa una sección por un plano diametral), concéntrica con la esfera cargada y de radio tal que la superficie pase por el punto P en que desea calcularse el campo. De la simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie gaussiana será radial, con sentido hacia el exterior y con el mismo módulo en todos los puntos de dicha superficie. Hay que considerar tres casos: $r \leq R/4$, $R/4 < r \leq R$, $r > R$, dado que la carga interior a la superficie gaussiana tiene una expresión matemática diferente según cada uno de los casos. La expresión analítica del flujo a través de la superficie gaussiana es, sin embargo, la misma:

$$\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial V} E dS = E \oint_{\partial V} dS = 4\pi r^2 E. \quad (2.34)$$

Aplicando la ley de Gauss para cada uno de los casos se tiene que, para $r \leq R/4$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r 3\rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} 3\rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0} r^3.$$

Para $R/4 < r \leq R$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_0^{R/4} 3\rho dV + \int_{R/4}^r \rho dV \right) = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{3R^3}{64} + r^3 - \frac{R^3}{64} \right) = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} \left(r^3 + \frac{R^3}{32} \right).$$

Y para $r > R$,

$$\Phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\int_0^{R/4} 3\rho dV + \int_{R/4}^R \rho dV \right) = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} \left(R^3 + \frac{R^3}{32} \right) = \frac{11\pi\rho}{8\varepsilon_0} R^3.$$

Obsérvese que el límite superior de la integral es R y no r , dado que la densidad de carga es nula¹⁸ para $r > R$. Despejando el campo eléctrico de la Expresión (2.34) del flujo, se obtiene que

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} r \mathbf{u}_r & \text{si } r \leq R/4 \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r + \frac{R^3}{32r^2} \right) \mathbf{u}_r & \text{si } R/4 < r \leq R \\ \frac{11\rho}{32\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

siendo \mathbf{u}_r el vector unitario habitual en coordenadas esféricas. Particularizando para los datos del problema, resulta

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 451,76 r \mathbf{u}_r & \text{si } r \leq 0,5 \\ 150,59 \left(r + \frac{1}{4r^2} \right) \mathbf{u}_r & \text{si } 0,5 < r \leq 2 \\ 1242,35 \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

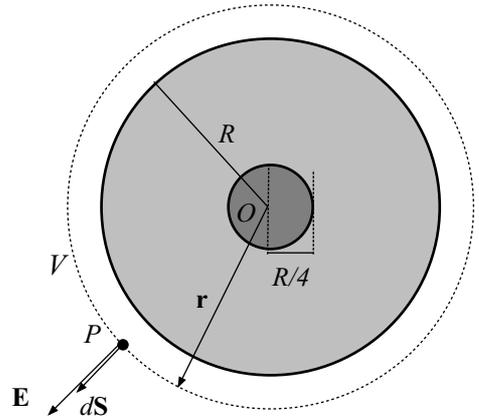


Figura 2.32. Superficies gaussianas para esferas cargadas concéntricas.

¹⁸Una situación similar se produce cuando se aplica el teorema de Ampère en magnetostática (véase Apartado 5.2).

con r la distancia en metros de un punto cualquiera a O .

Si el hueco no es concéntrico, el problema no tiene simetría y no puede abordarse aplicando directamente el teorema de Gauss. Sin embargo, si se utiliza el principio de superposición, el campo creado por la esfera con el hueco sería la suma del campo de una esfera maciza con centro en O , de radio R y densidad ρ , y del campo de una pequeña esfera también maciza colocada en O' , de radio $R/4$ y de densidad 2ρ . Para calcular el campo producido por cada una de estas dos esferas, se toman las superficies esféricas independientes indicadas con líneas punteadas en la Figura 2.33 (se representa una sección por un plano diametral), con ∂V_1 centrada en O y ∂V_2 centrada en O' , ambas pasando por P , y se sigue el procedimiento detallado en el Problema 2.6, debiéndose distinguir según el punto sea interior o exterior a las respectivas esferas. Para la esfera

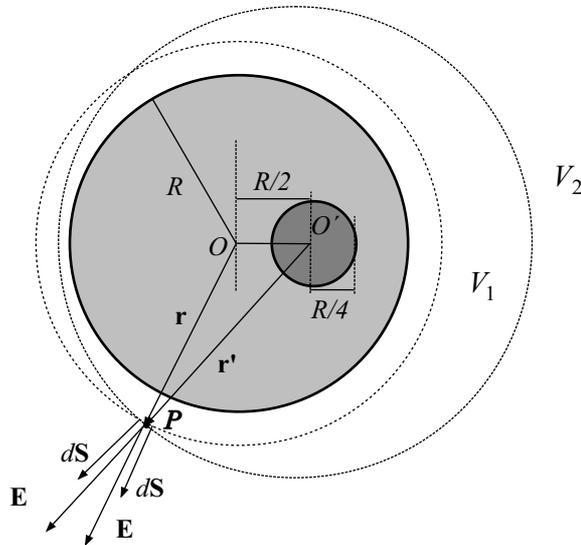


Figura 2.33. Superficies gaussianas para esferas cargadas excéntricas.

de radio R y densidad ρ , resulta aplicando la expresión obtenida en dicho ejercicio,

$$\mathbf{E}_\rho = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{si } r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

siendo \mathbf{r} el vector posición de un punto cualquiera como el punto P de la Figura 2.33 respecto de O . Para la esfera de radio $R/4$ y densidad 2ρ resulta, sustituyendo R por $R/4$ y ρ por 2ρ ,

$$\mathbf{E}_{2\rho} = \begin{cases} \frac{2\rho r'}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'} & \text{si } r' \leq R/4 \\ \frac{\rho R^3}{96\epsilon_0 r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} & \text{si } r' > R/4 \end{cases}$$

siendo \mathbf{r}' el vector posición¹⁹ de un punto cualquiera P respecto de O' . Sumando ambos campos

¹⁹Esta notación con prima (') se emplea, en este caso, para diferenciar los vectores de posición referidos a O' de los referidos a O , no debiendo confundirse, por lo tanto, con el concepto de punto fuente.

resulta:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{2\rho r'}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'} & \text{si } r' \leq R/4 \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\rho R^3}{96\epsilon_0 r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} & \text{si } r' > R/4 \text{ y } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\rho R^3}{96\epsilon_0 r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} & \text{si } r > R \end{cases}$$

debiéndose tener en cuenta que $\mathbf{r} = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}'$. Para los valores numéricos del problema resulta:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 150,59 \mathbf{r} + 301,18 \mathbf{r}' & \text{si } r' \leq 0,5 \\ 150,59 \mathbf{r} + \frac{37,65}{r'^3} \mathbf{r}' & \text{si } r' > 0,5 \text{ y } r \leq 2 \\ \frac{1204,70}{r^3} \mathbf{r} + \frac{37,65}{r'^3} \mathbf{r}' & \text{si } r > 2 \end{cases}$$

con r y r' expresados en metros.

Particularizando para el punto medio del segmento OO' , se tiene que $\mathbf{r} = \mathbf{OO}'/2 = 0,5\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{r}' = \mathbf{O}'\mathbf{O}/2 = -0,5\mathbf{u}_r$, con lo que el valor del campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = 75,29 \mathbf{u}_r - 150,59 \mathbf{u}_r = 225,88 \mathbf{u}_r ,$$

siendo \mathbf{u}_r el vector unitario en coordenadas esféricas respecto de O .

- 2.20** Determinar el campo eléctrico creado por la plancha infinita de espesor h de la Figura 2.34, cargada con densidad uniforme ρ , salvo en un orificio cilíndrico de radio R descargado, en un punto P cualquiera del eje del orificio cilíndrico, por encima de dicha plancha. Particularizar para el campo en un punto a 2 m de la superficie de la plancha, creado por una plancha de 20 cm de espesor, con un orificio de radio $R = 40$ cm, siendo la densidad de la misma $\rho = 6 \mu\text{C}/\text{m}^3$.

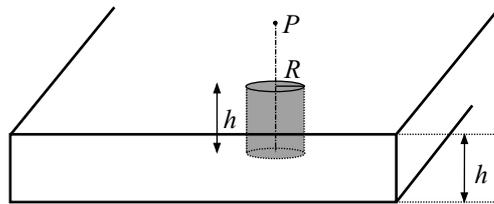


Figura 2.34. Plancha cargada infinita con un orificio cilíndrico.

Resolución

La figura no tiene simetría para poder aplicar directamente el teorema de Gauss. Pero si se emplea el principio de superposición, el campo creado por la plancha de la figura es el creado por una plancha infinita de densidad uniforme ρ , restándole el campo producido por un cilindro de altura h y radio R cargado con densidad ρ .

El campo debido a la plancha se tiene del Problema 2.9, que para un punto exterior, tal como el punto P de la Figura 2.34, vale

$$\mathbf{E}_{\text{plancha}} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0} \mathbf{u}_z , \quad (2.35)$$

en donde \mathbf{u}_z es el vector unitario perpendicular a la plancha.

El campo creado por el cilindro de densidad ρ puede resolverse por integración directa mediante coordenadas cilíndricas, que dará lugar a una integral triple, o mediante integrales sencillas, calculando en primer lugar el campo del anillo de la Figura 2.35 de radio r' cualquiera en el punto P , extendiéndolo a continuación a un disco de radio R constituido por la superposición de anillos y por último definiendo el cilindro como un conjunto de discos.

Para encontrar el campo creado por el anillo de radio r' y carga $q' = \lambda 2\pi r'$, se sigue el procedimiento del Problema 2.10. De la Figura 2.35 se observa que, considerando el elemento diferencial de carga $dq' = \lambda dl = \lambda r' d\phi$, con $\lambda = q'/2\pi r'$, se tiene

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z, \quad \mathbf{r}' = r' \cos \phi \mathbf{u}_x + r' \sin \phi \mathbf{u}_y,$$

con lo que

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -r' \cos \phi \mathbf{u}_x - r' \sin \phi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r'^2 + z^2)^{1/2},$$

siendo $P(0, 0, z)$ las coordenadas del punto P respecto de los ejes de la figura y ϕ el ángulo que forma r' con el eje X de la misma. El campo producido por la carga elemental dq' es

$$d\mathbf{E}_h = \frac{\lambda r' d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r' \cos \phi \mathbf{u}_x - r' \sin \phi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h &= \int_0^{2\pi} \frac{\lambda r' d\phi}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r' \cos \phi \mathbf{u}_x - r' \sin \phi \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda r'}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \left[\int_0^{2\pi} -r' \cos \phi d\phi \mathbf{u}_x + \left[\int_0^{2\pi} -r' \sin \phi d\phi \mathbf{u}_y + \left[\int_0^{2\pi} z d\phi \mathbf{u}_z \right] \right] \right] \\ &= \frac{\lambda r'}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \left[-r' \sin \phi \Big|_0^{2\pi} \mathbf{u}_x + r' \cos \phi \Big|_0^{2\pi} \mathbf{u}_y + z\phi \Big|_0^{2\pi} \mathbf{u}_z \right] = \frac{\lambda r' z}{2\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z. \end{aligned}$$

Obsérvese en la integración que z y r' no son variables. El resultado sólo tiene componente en la dirección Z cómo podía haberse supuesto previamente por la simetría del problema. El campo eléctrico expresado en función de la carga del hilo es

$$\mathbf{E}_h = \frac{q' z}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z. \quad (2.36)$$

Procediendo como en el Problema 2.11, se puede obtener el campo creado por un disco de carga $q' = \sigma\pi R^2$. Se considera para ello el disco como superposición de anillos, siendo el elemento diferencial de carga $dq' = \sigma dS = \sigma 2\pi r' dr'$, con lo que el campo creado por cada anillo es, según la Expresión 2.36,

$$d\mathbf{E}_h = \frac{dq' z}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z = \frac{z\sigma 2\pi r' dr'}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z,$$

y se integra en r' :

$$\mathbf{E}_d = \int_0^R \frac{z\sigma 2\pi r' dr'}{4\pi\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{(r'^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_0^R \mathbf{u}_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathbf{u}_z,$$

que expresado en función de la carga total del disco y teniendo en cuenta que²⁰, en nuestro caso, $z > 0$, resulta ser

$$\mathbf{E}_d = \frac{q'}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathbf{u}_z. \quad (2.37)$$

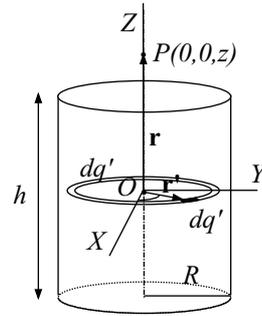


Figura 2.35. Diferenciales de carga para el cilindro finito.

²⁰Obsérvese que $\sqrt{z^2}$ es igual a $|z|$ y no a z (véanse también los problemas 5.12 y 5.13).

Integrando en z la Ecuación (2.37) se puede obtener el campo creado por el cilindro de densidad ρ en un punto situado a una altura z , como superposición de discos, considerando que el elemento diferencial de carga es $dq' = \rho dV = \rho\pi R^2 dz$. Hay que observar que, por ejemplo, el disco correspondiente a la base superior del cilindro estaría a una distancia $z - h/2$ del punto P y el correspondiente a la base inferior a una distancia $z + h/2$. Resulta, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{cil}} &= \int_{z-h/2}^{z+h/2} \frac{\rho\pi R^2}{2\pi R^2 \varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) dz \mathbf{u}_z = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(z - \sqrt{R^2 + z^2}\right) \Big|_{z-\frac{h}{2}}^{z+\frac{h}{2}} \mathbf{u}_z \\ &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[h + \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2} \right] \mathbf{u}_z . \end{aligned}$$

Restando este valor al campo creado por la plancha [Expresión (2.35)], se obtiene el campo total en un punto P a una altura z ,

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{\text{plancha}} - \mathbf{E}_{\text{cil}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2} \right] \mathbf{u}_z .$$

Considerando el caso particular de una plancha con una densidad $\rho = 6 \mu\text{C}/\text{m}^3$, de 20 cm de espesor y con un orificio de radio $R = 40$ cm, si P está a 2 m de la superficie de la plancha, el valor de z es $z = 2,1$ m, con lo que el campo resulta ser

$$\mathbf{E}_P = 66564 \mathbf{u}_z \text{ V/m} .$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 2.21** En los vértices de un cuadrado de 20 cm de lado se colocan cuatro cargas en la forma indicada en la Figura 2.36. Calcular la fuerza que se ejerce sobre la carga de -1 C situada en el centro del cuadrado.

Solución: $1,27 \times 10^{12} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)$ N

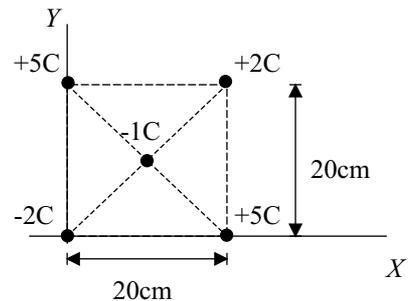


Figura 2.36. Fuerza sobre una carga puntual.

- 2.22** Se considera una esfera de radio R cargada uniformemente con densidad volumétrica de carga ρ . Determine el flujo del campo eléctrico creado por dicha esfera a través de un cubo de lado R con uno de sus vértices en el centro de la esfera.

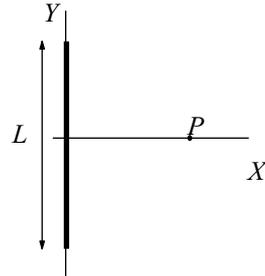
Solución: $\frac{\pi R^3 \rho}{6\varepsilon_0}$

- 2.23** Determinar el campo y el potencial eléctricos creados por un dipolo eléctrico de momento dipolar \mathbf{p} (carga q y distancia entre cargas d), en un punto cualquiera del espacio de vector de posición \mathbf{r} , suponiendo que la carga negativa del dipolo se encuentra situada en \mathbf{r}' . Particularizar para el caso en que $r \gg d$.

Solución:
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \cdot \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

Si $r \gg d$,
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \cdot \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

2.24 Determinar el potencial electrostático creado por el hilo de la Figura 2.37, de longitud L y densidad lineal de carga λ , en un punto P de la mediatriz del hilo situado a distancia cualquiera x .



Solución:
$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + x^2}}{-L/2 + \sqrt{(L/2)^2 + x^2}}$$

Figura 2.37. Hilo cargado de longitud L .

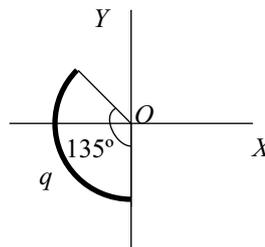
2.25 Determinar el campo y el potencial electrostático creados por un cilindro hueco muy largo, de radio a , cargado con densidad de carga por unidad de longitud λ uniforme, en un punto cualquiera del espacio situado a una distancia r del eje del cilindro. Tómese como origen de potenciales un punto cualquiera en la superficie el cilindro.

Solución:
$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho & \text{si } r > a. \end{cases} \quad V = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq a, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r} & \text{si } r > a. \end{cases}$$

2.26 Determinar, para todo punto del espacio, el campo electrostático creado por una esfera de radio R , cargada en todo su volumen con una densidad de carga inhomogénea $\rho = kr$, donde r es la distancia al centro de la esfera y k una constante.

Solución:
$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{u}_r & \text{si } r \leq R, \\ \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R. \end{cases}$$

2.27 Determinar el campo eléctrico en el centro O creado por el trozo de anillo de la figura, de radio 20 cm y cargado con una carga total homogéneamente distribuida de $q = 12\mu\text{C}$.



Solución: $1958905\mathbf{u}_x + 811405\mathbf{u}_y \text{ V/m}$

Figura 2.38. Trozo de anillo cargado.

2.28 Un hilo recto muy largo tiene una densidad de carga $\lambda = 10^{-5} \text{ C/m}$. a) Calcular el campo eléctrico a una distancia de 0,5 m del hilo. b) Si a una distancia $2D$ se añade otro hilo paralelo al anterior de igual densidad de carga, pero de signo contrario, calcular el campo y el potencial en un punto situado en el plano que equidista de ambos hilos y a una distancia y del plano que contiene a los hilos.

Solución: a) $3,6 \times 10^5 \mathbf{u}_\rho$ V/m b) $\frac{\lambda D}{\pi \epsilon_0 D^2 + y^2}$ en la dirección de la perpendicular al plano y sentido hacia el hilo con densidad negativa.

- 2.29** Un alambre semicircular, de radio a y centro O , está uniformemente cargado con carga q_c y otro alambre rectilíneo, de longitud b , cargado uniformemente con carga q_r , están situados como se indica en la Figura 2.39. Hallar la relación entre las cargas de ambos alambres para que el campo eléctrico se anule en O .

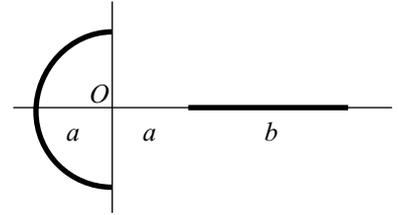


Figura 2.39. Alambre semicircular y alambre recto cargados.

Solución: $\frac{q_c}{q_r} = \frac{\pi a}{2(a+b)}$

- 2.30** Calcular el campo creado por un plano cargado con densidad σ , salvo en un agujero circular de radio R , en un punto cualquiera a una altura z sobre la perpendicular al plano por el centro del agujero circular.

Solución: $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \mathbf{u}_z$

- 2.31** El hilo vertical infinito de la Figura 2.40 tiene una densidad lineal $\lambda_1 = -30 \mu\text{C}/\text{m}$, mientras que la densidad del hilo horizontal, semiinfinito y situado a 1 m del anterior, es de $\lambda_2 = 0,2 \text{mC}/\text{m}$. Calcular el campo eléctrico en los puntos P_1 y P_2 de la figura, a 50 cm del extremo del hilo semiinfinito.

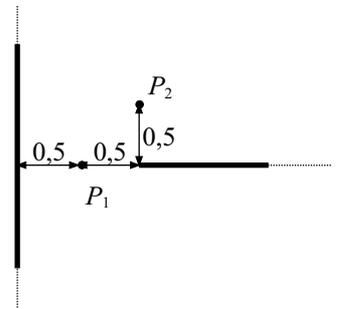


Figura 2.40. Combinación de hilo infinito e hilo semiinfinito.

Solución: $\mathbf{E}_{P_1} = -4675738 \mathbf{u}_x$ V/m ,
 $\mathbf{E}_{P_2} = -4136230 \mathbf{u}_x + 3596722 \mathbf{u}_y$ V/m .

- 2.32** Se considera la plancha infinita de espesor $h = 50$ cm de la Figura 2.41, cargada con densidad uniforme $\rho = 2 \mu\text{C}/\text{m}^3$, salvo en un hueco esférico cargado con densidad doble, con centro en el plano medio de la plancha y de diámetro h . Determinar el campo eléctrico creado en un punto $P(-1, 1, 2)$, cuyas coordenadas están dadas en metros respecto al centro de la esfera.

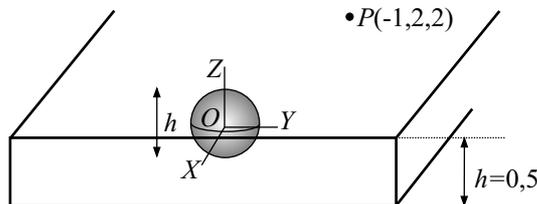


Figura 2.41. Plancha infinita con orificio circular.

Solución: $-43,6 \mathbf{u}_x + 87,2 \mathbf{u}_y + 56584,4 \mathbf{u}_z$ V/m .

EL CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA

3

Las cargas eléctricas objeto del capítulo anterior aparecen y alcanzan posiciones de equilibrio en la materia. El campo eléctrico que originan influye en sus propiedades y en las de otros objetos materiales circundantes, lo que a su vez repercute en las características del propio campo eléctrico. El objeto de este capítulo es estudiar las características de las cargas eléctricas que pueden existir en los medios materiales y las propiedades de los campos eléctricos estáticos que crean.

La distribución macroscópica de carga en un medio material es una manifestación de sus cargas elementales (electrones, núcleos, iones. . .) y de su estructura microscópica. Así, los materiales llamados **conductores** deben sus propiedades eléctricas a la existencia de cargas elementales **libres**, lo que significa que no están unidas a posiciones fijas del medio, sino que pueden desplazarse distancias macroscópicas por él. Ejemplos de cargas libres y medios conductores son los electrones en los metales, o los iones positivos y negativos en una disolución electrolítica. Por el contrario, en los materiales **dieléctricos**, también llamados aislantes o no conductores, las cargas eléctricas elementales están **ligadas** a posiciones fijas, pudiendo sólo desplazarse distancias del orden del tamaño molecular, como ocurre con los electrones de las moléculas bajo la acción de fuerzas externas¹. El carácter libre o ligado de las cargas se traduce en comportamientos eléctricos sustancialmente distintos para conductores y dieléctricos.

3.1. MATERIALES CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

La Figura 3.1(a) ilustra la estructura microscópica de los materiales conductores más característicos, los metales. En ausencia de campos eléctricos aplicados, en cada elemento de volumen, o diferencial macroscópico, no existe carga neta, y los electrones libres se mueven (en una visión clásica simplificada) sin orden alrededor de los iones positivos que forman la red metálica, sin dar lugar por tanto a ningún desplazamiento neto de carga. Cuando el conductor es sometido a un campo eléctrico [Figura 3.1(b)], los electrones se mueven ordenadamente bajo la acción de la fuerza electrostática, originando una corriente eléctrica (Capítulo 4). Sin embargo, en ausencia de fuentes de energía (generadores) que mantengan dicha corriente en contra de la “fricción” con los iones positivos, los electrones tienden a encontrar posiciones de equilibrio, en las que no experimenten fuerza neta. La experiencia muestra que dichas posiciones de equilibrio se alcanzan

¹La división entre conductores y aislantes no es estricta, existiendo materiales semiconductores. Incluso en los mejores aislantes, existe una ínfima cantidad de carga libre.

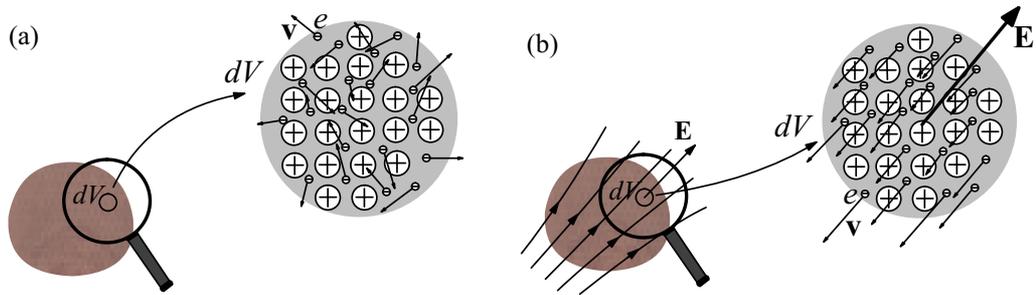


Figura 3.1. Dibujo ilustrativo de un medio metálico y su estructura microscópica (a) en ausencia de campo eléctrico, (b) bajo la acción de un campo eléctrico.

en un tiempo brevísimo [inversamente proporcional a la conductividad (Capítulo 4), del orden de 10^{-14} s en buenos conductores metálicos], situación en la que no puede existir campo en el interior del conductor, pues de lo contrario los electrones seguirían moviéndose. La nulidad del campo en el interior implica, en la mayoría de los casos, la aparición de **cargas inducidas** en la superficie del conductor, como consecuencia del exceso o defecto de electrones, cuyo campo cancela los campos externos.

Independientemente del tipo y geometría del material conductor, el **equilibrio electrostático** se caracteriza por las siguientes propiedades (Figura 3.2):

- (1) En el interior del conductor, el *campo eléctrico es nulo*, $\mathbf{E} = 0$ (condición de equilibrio electrostático).
- (2) En consecuencia, *todos los puntos de un conductor tienen el mismo potencial*.
- (3) En particular, por ser la superficie del conductor equipotencial, *el campo eléctrico en la superficie del conductor es perpendicular a la superficie*.
- (4) Como consecuencia de la ley de Gauss [$\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$], en el interior del conductor, no existe carga neta alguna.
- (5) Así, en un conductor en equilibrio sólo puede acumularse carga eléctrica en su superficie.
- (6) Si en un punto de la superficie de un conductor la densidad superficial de carga es σ , el campo eléctrico inmediatamente fuera del conductor sobre dicho punto toma el valor $E = \sigma/\epsilon_0$.

Las propiedades (3) y (6) pueden resumirse en la expresión $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0)\mathbf{n}$, siendo \mathbf{n} la normal exterior al conductor en el punto considerado. Macroscópicamente, se considera que la carga se distribuye sobre una superficie de espesor despreciable y que el campo eléctrico sufre una discontinuidad en ella. Desde el punto de vista microscópico, en cambio, la distribución superficial de carga puede tener el espesor de varias capas atómicas, variando el campo eléctrico gradualmente sobre él.

De las propiedades (1-6) y las leyes de la electrostática (Capítulo 2), pueden comprenderse cualitativamente todas las peculiaridades y fenómenos relacionados con los conductores en campos eléctricos estáticos, como los fenómenos de carga por influencia, apantallamiento electrostático, o el efecto puntas, como se verá en los ejercicios resueltos. A diferencia de los problemas del Capítulo 2, la determinación del campo y potenciales eléctricos en problemas con conductores requiere la determinación de la distribución de cargas inducidas en las superficies de los conductores que satisfagan las condiciones (1-6) de equilibrio electrostático.

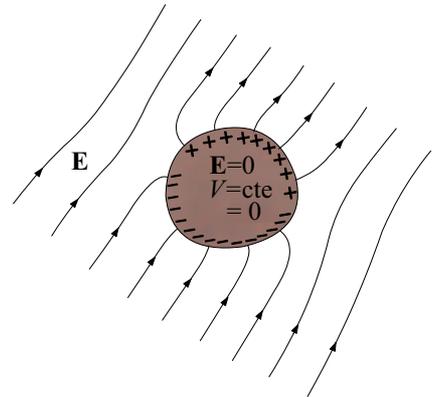


Figura 3.2. Conductor sometido a un campo eléctrico estático, una vez alcanzado el equilibrio electrostático.

3.2. MATERIALES DIELECTRICOS

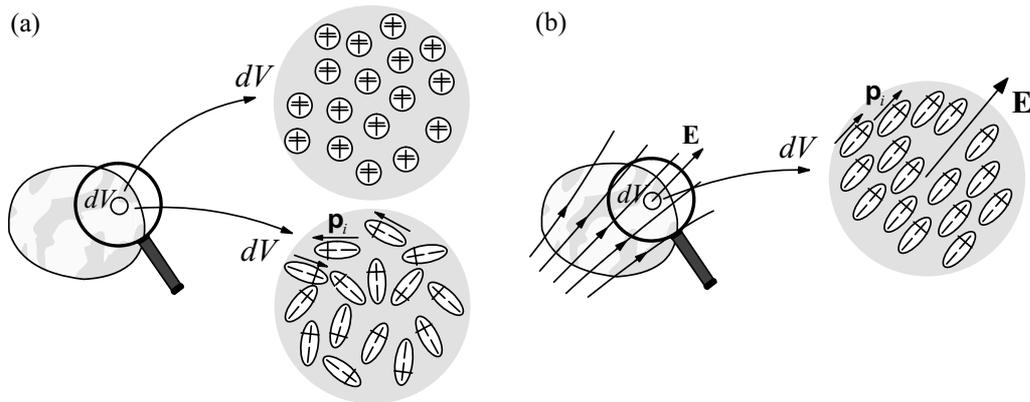


Figura 3.3. (a) Dibujo ilustrativo de un medio dieléctrico y su estructura microscópica en ausencia de campo eléctrico, en los casos en que esté constituido por moléculas no polares (arriba) o por moléculas polares (abajo). (b) Polarización del dieléctrico bajo la acción de un campo eléctrico.

En los materiales dieléctricos, en cambio, las cargas elementales positivas y negativas están fuertemente ligadas a posiciones fijas. La Figura 3.3(a) ilustra su estructura microscópica. Las moléculas de los dieléctricos son eléctricamente neutras. En algunos casos, además, la distribución molecular de carga tampoco da lugar a un momento dipolar eléctrico \mathbf{p} . Estas son las llamadas **moléculas no polares**, como el He, O₂, CO₂, en las que el centro de “gravedad” de las cargas positivas coincide con el de las negativas [Figura 3.3(a), arriba]. Existen, por otro lado, **moléculas con momento dipolar eléctrico permanente \mathbf{p}** , en las que el centro de carga positiva no coincide con el de carga negativa [Figura 3.3(a), abajo], como son el H₂O o el CO. En ausencia de campos eléctricos aplicados, los dipolos moleculares contenidos en cada diferencial macroscópico dV están generalmente orientados al azar, no dando lugar, como en el caso de moléculas no polares, a un momento dipolar eléctrico neto en el dV , y por tanto a ningún campo eléctrico dipolar resultante.

En presencia de un campo eléctrico, en cambio, un dieléctrico experimenta el fenómeno de su **polarización** [Figura 3.3(b)]. Si las moléculas son no polares, la distribución molecular de carga se ve deformada bajo por la fuerza electrostática, dando lugar a dipolos moleculares con cierto momento dipolar eléctrico \mathbf{p}_i orientados en el sentido del campo. Si las moléculas son polares, la fuerza electrostática ejerce un momento $\mathbf{M} = \mathbf{p}_i \times \mathbf{E}$ sobre los dipolos moleculares ya existentes que tiende a orientarlos en el sentido del campo. En ambos casos, además, la fuerza $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{E})$ que un campo no uniforme ejerce sobre los dipolos puede hacerlos desplazarse distancias microscópicas.

Tanto en dieléctricos con moléculas polares como con moléculas no polares, el resultado es la aparición de un momento dipolar eléctrico neto $d\mathbf{p}$ en el dV , suma de los moleculares \mathbf{p}_i y orientado generalmente en la dirección del campo eléctrico², momento dipolar que origina un campo eléctrico. Así, un *dieléctrico polarizado crea un campo eléctrico que se superpone al aplicado, modificándolo* (Figura 3.4).

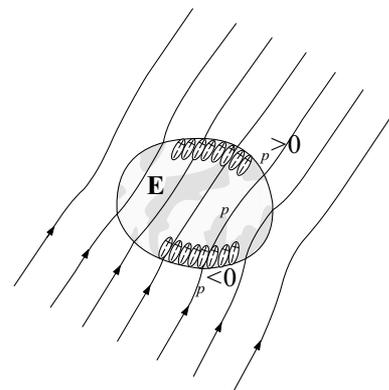


Figura 3.4. Campo eléctrico uniforme deformado por el campo de un dieléctrico polarizado.

²En muchos dieléctricos con estructura cristalina (anisótropos), la estructura molecular entra también en juego, dando lugar a un momento dipolar eléctrico no paralelo al campo eléctrico.

El campo eléctrico creado por un dieléctrico puede explicarse, alternativamente, como resultado de la aparición de **cargas de polarización** inducidas en su superficie y en su volumen. Como se ilustra en la Figura 3.4, la polarización del dieléctrico da lugar a regiones superficiales con un exceso de carga negativa o positiva, caracterizada macroscópicamente por una densidad superficial de carga σ_p . También, si la polarización es inhomogénea, la polarización puede originar, al contrario que en los conductores, una densidad volumétrica de carga ρ_p (véase Sección 2.2). El campo eléctrico en el dieléctrico y sus alrededores es la superposición de los campos externos y el creado por las cargas de polarización.

En los siguientes apartados se introducen las magnitudes que cuantifican la polarización de un dieléctrico, las cargas de polarización, y las técnicas que permiten resolver problemas sencillos de electrostática en presencia de materiales dieléctricos.

3.2.1. Vector polarización eléctrica

La polarización de un dieléctrico se mide por su polarización eléctrica. Si un pequeño volumen ΔV entorno a un punto contiene un momento dipolar eléctrico total $\Delta \mathbf{p}$ como consecuencia de la polarización de sus moléculas, el **vector polarización eléctrica** en dicho punto se define como

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dV}, \quad (3.1)$$

es decir, como el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen. En función de las propiedades moleculares, podemos escribir $\Delta p = N \langle \mathbf{p}_i \rangle$, donde N es el número de moléculas en ΔV y $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ es el valor medio del momento dipolar eléctrico de la moléculas. Entonces

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta V} \langle \mathbf{p} \rangle = n \langle \mathbf{p} \rangle, \quad (3.2)$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen. La polarización eléctrica \mathbf{P} se mide en C m^{-2} en el S.I., y tiene carácter de campo vectorial definido sobre el dieléctrico, aunque puede extenderse al vacío y materiales conductores sin más que asignarle el valor $\mathbf{P} = 0$.

3.2.2. Cargas de polarización

La reordenación espacial de la carga microscópica que conlleva la polarización de un dieléctrico tiene como consecuencia la aparición de distribuciones macroscópicas de carga, tanto en la superficie como en el volumen del dieléctrico.

En la superficie del dieléctrico, puede surgir una **densidad superficial de carga de polarización** σ_p , como se intuye en la Figura 3.5. Su valor en cada punto de la superficie del dieléctrico puede determinarse como la proyección de \mathbf{P} sobre la normal exterior a la superficie, es decir,

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta, \quad (3.3)$$

donde \mathbf{P} y \mathbf{n} representan la polarización eléctrica y la normal exterior en el punto de la superficie considerado, y θ es el ángulo que forman.

Además, si la polarización no es homogénea, de modo que su divergencia no sea nula, aparecerá también una **densidad volumétrica de carga de polarización** ρ_p , como puede entenderse intuitivamente en la Figura 3.5. Su valor en cada punto puede determinarse por la expresión

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (3.4)$$

Como las cargas de polarización son consecuencia de una reordenación de la carga molecular, se verifica siempre que, en cualquier dieléctrico finito, la carga total de polarización es nula, $q_p = 0$.

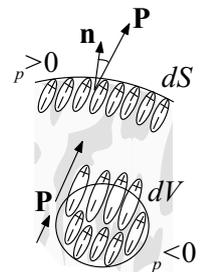


Figura 3.5. Origen microscópico de las cargas de polarización en la superficie y en el volumen de un dieléctrico polarizado.

3.2.3. Relación de constitución

La polarización \mathbf{P} de un dieléctrico es consecuencia de un campo eléctrico \mathbf{E} en su seno³. La magnitud de la polarización depende de la del campo eléctrico, la polarizabilidad de las moléculas y la estructura microscópica del dieléctrico, estando dada por cierta relación del tipo

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}), \quad (3.5)$$

denominada **relación de constitución**, que es característica de cada material y que debe encontrarse experimentalmente o por medio de modelos apropiados sobre la estructura de la materia. Para muchos materiales, y si el campo eléctrico no es muy intenso, se verifica una sencilla relación de proporcionalidad entre la polarización producida y el campo eléctrico aplicado, relación que, por conveniencia, suele escribirse en la forma

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

donde la constante adimensional $\chi_e \geq 0$ se denomina **susceptibilidad eléctrica** del material, y es característica de cada material y de sus condiciones termodinámicas, como la presión y la temperatura. Los materiales que satisfacen la relación de constitución dada en la Ecuación (3.6) se denominan dieléctricos *lineales, homogéneos e isotrópicos*. El vacío, como medio aislante que no admite polarización, puede considerarse un dieléctrico con susceptibilidad $\chi_e = 0$.

En algunos materiales, debido, por ejemplo, a inhomogeneidades en su composición, la susceptibilidad χ_e puede depender del punto, denominándose dichos dieléctricos *inhomogéneos*. En la mayoría de los dieléctricos con estructura cristalina, polarización y campo eléctrico pueden tener distintas direcciones, estando en este caso χ_e representado por un tensor de segundo orden. Dichos materiales se denominan *anisótropos*. La Ecuación (3.6) deja de ser válida en algunos materiales, llamados *ferroeléctricos* [por analogía con los materiales ferromagnéticos (Capítulo 6)], que presentan una polarización espontánea o permanente en ausencia de campo eléctrico. En todo caso, la relación de proporcionalidad en la Expresión (3.6) deja de ser válida para campos eléctricos suficientemente intensos (comparables al campo eléctrico interno de las moléculas), diciéndose entonces que el dieléctrico se comporta de modo *no lineal*. Como caso extremo de no linealidad, puede producirse la *ruptura dieléctrica* o ionización del material para campos eléctricos que superen un valor límite, llamado *rigidez dieléctrica*, confiriendo la aparición de cargas libres propiedades conductoras.

3.2.4. Vector desplazamiento eléctrico. Ley de Gauss

La mayor dificultad en la resolución de problemas con dieléctricos estriba en la determinación del campo eléctrico. En efecto, la polarización del dieléctrico está originada en principio por ciertas cargas externas, que llamaremos en este capítulo **cargas de no polarización** q_{np} , como son la carga libre de los conductores, otras distribuciones fijas de carga sobre materiales dieléctricos, o cargas puntuales, y que son en general conocidas. El campo eléctrico puede en principio determinarse, según el principio de superposición (Capítulo 2), como el campo creado por todas las cargas presentes en el espacio, es decir, como el creado por las cargas de no polarización más el creado por las de polarización (es decir, por el dieléctrico):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{q_{np}} \frac{dq_{np}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{q_p} \frac{dq_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.7)$$

Sin embargo, las cargas de polarización se determinan a través de \mathbf{P} [Ecuaciones (3.3) y (3.4)], que a su vez está determinado por el campo eléctrico \mathbf{E} que se quiere determinar [Ecuación (3.5)], lo cuál imposibilita el uso directo del principio de superposición.

³Excepto en materiales ferroeléctricos, en donde \mathbf{P} puede subsistir sin \mathbf{E} .

Una aproximación alternativa al problema consiste en la introducción del **vector desplazamiento eléctrico**, definido como

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.8)$$

y cuya unidad en el SI es el Cm^{-2} . Su utilidad estriba fundamentalmente en el hecho de que verifica [como puede verse de las Ecuaciones (3.4) y (2.29)] la importante relación

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{np}}, \quad (3.9)$$

denominada **ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico**, y que constituye una de las ecuaciones de Maxwell (Capítulo 10) que resumen todo el electromagnetismo⁴. La Expresión (3.9) afirma que la divergencia de \mathbf{D} está exclusivamente determinada por las cargas de no polarización, o en otros términos, son sus únicas fuentes y sumideros. Conocidas las cargas de no polarización, la resolución de la Ecuación (3.9) junto con las adecuadas condiciones de contorno (Sección 3.2.5.), permite determinar \mathbf{D} , y de su definición [Ecuación (3.8)] y la relación de constitución [Ecuación (3.5)], el campo eléctrico.

Haciendo uso del teorema de la divergencia [Ecuación (1.22)], la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico puede expresarse también en la forma integral

$$\Phi_D(\partial V) = \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{int,np}}, \quad (3.10)$$

donde ∂V es la superficie cerrada que limita un volumen V y $q_{\text{int,np}}$ la carga de no polarización contenida en dicho volumen. En problemas con alta simetría, la aplicación de este teorema es suficiente para determinar \mathbf{D} a partir de la carga de no polarización, de igual modo a como se hizo en el Capítulo 2 para la determinación de \mathbf{E} a partir del conocimiento de todas las cargas.

En el caso específico de dieléctricos lineales [con relación de constitución dada por la Expresión (3.6)], la definición de \mathbf{D} se reduce a

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.11)$$

donde

$$\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e \geq 1, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad (3.12)$$

se denominan, respectivamente, **permitividad dieléctrica relativa** (o constante dieléctrica), y **permitividad** (absoluta) del material dieléctrico, pudiendo ser funciones del punto en dieléctricos inhomogéneos, o magnitudes tensoriales en dieléctricos anisótropos. Para el vacío $\varepsilon_r = 1$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$.

La mayoría de los problemas resueltos y propuestos involucran únicamente dieléctricos lineales homogéneos e isótropos, y la simetría de la distribución de carga permite la aplicación de la ley de Gauss [Ecuación (3.10)] para la determinación de \mathbf{D} . El campo eléctrico se puede determinar entonces como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad (3.13)$$

y en consecuencia, el vector polarización y las densidades de carga de polarización por medio de las expresiones

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D}, \quad \sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{\text{np}}. \quad (3.14)$$

Los tres vectores \mathbf{E} , \mathbf{P} y \mathbf{D} tienen entonces igual dirección y sentido en este tipo de dieléctricos. La última relación establece además que en un dieléctrico lineal homogéneo e isótropo, solo puede existir carga de polarización en el volumen si sobre él se distribuye carga de no polarización.

⁴Sigue siendo válida cuando los campos varían con el tiempo.

3.2.5. Condiciones en la frontera entre dos medios

En el estudio de un problema de electrostática aparecen en general distintos medios conductores y dieléctricos. El carácter conservativo del campo eléctrico y la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico, llevan a establecer las siguientes condiciones para los campos en las superficies de separación entre dos medios⁵.

En la superficie de separación entre dos medios 1 y 2, el campo electrostático, por ser conservativo, mantiene su componente tangencial:

$$E_{2,t} - E_{1,t} = 0, \quad (3.15)$$

es decir, dicha componente es continua (Figura 3.6), independientemente de que se trate de la separación entre dos dieléctricos o dieléctrico-conductor, y de las densidades de carga superficiales que puedan existir.

Por el contrario, la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico requiere que la componente del vector desplazamiento normal a la superficie sufra una discontinuidad igual a la densidad superficial de carga de no polarización en la superficie de separación entre los medios:

$$D_{2,n} - D_{1,n} = \sigma_{np}, \quad (3.16)$$

expresión válida para separaciones dieléctrico-dieléctrico o dieléctrico-conductor.

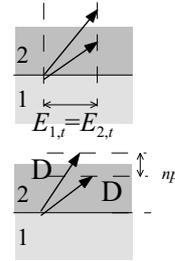


Figura 3.6. Condiciones para \mathbf{E} y \mathbf{D} en la frontera entre dos medios.

3.3. ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Se entiende por energía electrostática de un sistema de cargas eléctricas la *energía potencial* de interacción entre dichas cargas. La energía electrostática coincide con el trabajo que una fuerza externa debe realizar para formar la distribución de carga a partir de otra en que las cargas están infinitamente separadas entre sí (por tanto, sin energía de interacción). Para una distribución de carga *originada* por densidades volumétrica ρ_{np} y superficial σ_{np} de carga de no polarización, y si los medios dieléctricos presentes son lineales, la energía electrostática de la distribución *total* de carga (es decir, incluida la de polarización) resulta estar dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_{np}(\mathbf{r})V(\mathbf{r})dv + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{np}(\mathbf{r})V(\mathbf{r})dS, \quad (3.17)$$

donde las integrales se extienden a los volúmenes v y superficies S donde hay carga de no polarización (superficies de conductores y otras superficies o volúmenes donde se haya distribuido carga ajena a la polarización), y $V(\mathbf{r})$ es el potencial electrostático en cada punto del espacio (que incluye por tanto la contribución de las cargas de polarización). En función de los campos, la energía electrostática también puede expresarse como

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv, \quad (3.18)$$

donde ahora la integral se extiende a todo el volumen v del espacio donde hay campo. La magnitud

$$e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.19)$$

en el integrando de la Ecuación (3.18) tiene entonces el significado de energía por unidad de volumen, denominándose **densidad de energía electrostática**, y se interpreta como la densidad

⁵En el Capítulo 10, se modifican para el caso de campos no estáticos y se amplían para la inducción y el campo magnéticos.

de energía almacenada en cada punto del espacio como consecuencia de la existencia de un campo eléctrico. Su unidad en el SI es el Jm^{-3} .

Consideraciones energéticas permiten determinar la **fuerza electrostática** \mathbf{F}_e que un sistema eléctrico ejerce sobre una de sus partes sin necesidad de cálculos complejos que involucren el campo eléctrico. Si el sistema está en equilibrio, la fuerza electrostática sobre una parte del sistema debe estar compensada con una fuerza externa, es decir, $\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_{\text{ext}}$. En un desplazamiento infinitesimal sin aceleración, sus trabajos son entonces opuestos, $dW_e = -dW_{\text{ext}}$, y como el trabajo realizado por la fuerza externa coincide con el incremento de energía electrostática dU_e , se tiene $dW_e = -dU_e$. Si se escribe además $dW_e = F_{e,x}dx + F_{e,y}dy + F_{e,z}dz$ y $dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy + (\partial U/\partial z)dz$, se obtiene

$$\mathbf{F}_e = -\nabla U_e. \quad (3.20)$$

3.4. SISTEMAS DE CONDUCTORES

3.4.1. Coeficientes de potencial y capacidad

Muchas de las características de interés de conjuntos complejos de conductores en medios dieléctricos, como sus cargas y sus potenciales, pueden determinarse sin necesidad de resolver detalladamente las ecuaciones de la electrostática si se conocen los llamados coeficientes de potencial, o bien los de capacidad. El ejemplo más familiar de sistema de conductores es el condensador (Sección 3.4.2).

La linealidad de las ecuaciones básicas de la electrostática implica que para un sistema de N conductores inmersos en materiales dieléctricos lineales, los potenciales V_i están relacionados linealmente con las cargas q_j de cada conductor, es decir,

$$V_i = \sum_{j=1}^N p_{ij}q_j, \quad (3.21)$$

donde p_{ij} son los **coeficientes de potencial**, determinados únicamente por la geometría de los conductores y los dieléctricos, pero independientes de las cargas y los potenciales. El coeficiente de potencial p_{ij} es el potencial del conductor i cuando el único conductor cargado en el sistema es el j y su carga es la unidad, lo que permite su sencilla determinación experimental. En el S.I. se mide por tanto en $\text{VC}^{-1} \equiv \text{F}^{-1}$, estando el *Faradio* F definido como $\text{F} \equiv \text{CV}^{-1}$. Los coeficientes de potencial verifican las relaciones $p_{ij} = p_{ji}$ y $p_{ii} \geq p_{ij} > 0$. La inversa de la Ecuación (3.21) es la relación, también lineal,

$$q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij}V_j, \quad (3.22)$$

entre las cargas y los potenciales de cada conductor, donde c_{ij} , $i \neq j$, se llaman **coeficientes de influencia** y c_{ii} **coeficientes de capacidad**. Su unidad en el S.I. es el Faradio F y sus valores dependen exclusivamente de la geometría de los conductores y los medios dieléctricos, verificando además que $c_{ii} > 0$ y $c_{ij} = c_{ji} < 0$.

De la Ecuación (3.17), la energía electrostática almacenada en un sistema de N conductores viene dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i, \quad (3.23)$$

o, en función de los coeficientes de potencial y de los de capacidad, por las funciones cuadráticas de las cargas o potenciales

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij}q_iq_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}V_iV_j. \quad (3.24)$$

3.4.2. Condensadores

Un condensador, como caso más sencillo de sistema de conductores, es un conjunto de dos conductores o *armaduras*, 1 y 2, con cargas opuestas, q y $-q$, respectivamente, dispuestos de modo que el campo eléctrico quede confinado entre ellos, es decir, en *influencia total*. Los condensadores se utilizan para almacenar carga eléctrica y energía electrostática.

La carga eléctrica que adquiere cada armadura (en valor absoluto) por unidad de diferencia de potencial aplicada entre ellas se denomina **capacidad del condensador**

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}. \quad (3.25)$$

En función de los coeficientes de potencial, la capacidad de un condensador viene dada por la expresión

$$C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1} > 0, \quad (3.26)$$

dependiendo entonces exclusivamente de la geometría de las armaduras y del dieléctrico que se sitúa entre ellas. De las Ecuaciones (3.23) y (3.24), la energía electrostática almacenada en un condensador se puede calcular por cualquiera de las expresiones siguientes:

$$U_e = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2. \quad (3.27)$$

Los condensadores suelen integrarse en circuitos eléctricos, representándose por el símbolo $||$, y asociarse además entre sí para aumentar la carga y energía acumuladas, o reducir la diferencia de potencial entre sus armaduras. En la asociación en paralelo [Figura 3.8(a)] todos los condensadores se someten a la misma diferencia de potencial entre sus armaduras. La capacidad del condensador así formado está dada por la suma de las capacidades,

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (3.28)$$

siendo por tanto mayor que la capacidad que los individuales. Si los condensadores se conectan en serie [Figura 3.8(b)] y luego se cargan sometiendo sus armaduras extremas a una diferencia de potencial, todos los condensadores adquieren la misma carga, dividiéndose la diferencia de potencial en fracciones más pequeñas. La capacidad del condensador equivalente (cuyas armaduras son las extremas) está dada por

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (3.29)$$

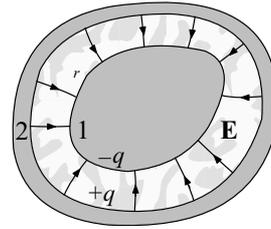


Figura 3.7. Condensador.

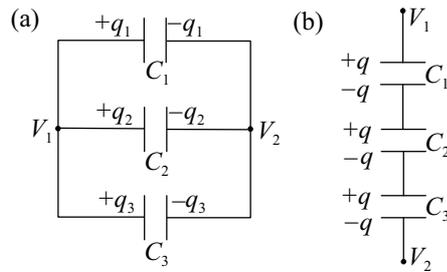


Figura 3.8. Asociación de condensadores (a) en paralelo, (b) en serie.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 3.1 Estudiar el signo del potencial de un conductor en equilibrio electrostático con carga eléctrica Q positiva. Calcular dicho potencial en el caso de que el conductor sea una esfera de radio R (Nota: se supone que el potencial en el infinito es nulo).

Resolución

Para inferir el signo del potencial es necesario estudiar la distribución de carga inducida en el equilibrio electrostático y la forma del campo eléctrico a su alrededor. En el equilibrio, la carga Q positiva debe distribuirse [propiedad (5), Sección 3.1.] sobre la superficie del conductor [Figura 3.9(a)]. Las líneas del campo eléctrico surgen perpendicularmente a la superficie del conductor [propiedad (3)], alejándose indefinidamente de él, como se muestra en la Figura 3.9(a). El potencial del conductor V_C puede determinarse como la circulación del campo eléctrico entre uno cualquiera de sus puntos, por ejemplo el punto P en su superficie, y el origen de potenciales ($|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$), es decir,

$$V_C = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Como la circulación del campo electrostático es independiente del camino, para la determinación del signo del potencial es conveniente tomar la línea de campo Γ que partiendo de P se aleja indefinidamente del conductor. La circulación es así evidentemente positiva, por ser \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ vectores de la misma dirección y sentido sobre todos los puntos de la línea de campo Γ . El potencial del conductor es, en conclusión,

$$V_C > 0.$$

Se puede llegar al mismo resultado a partir del dibujo aproximado del campo y por medio del siguiente razonamiento. Puesto que el potencial electrostático decrece en el sentido del campo ($\mathbf{E} = -\nabla V$), y alcanza en el infinito un valor nulo, entonces, necesariamente, el potencial del punto P , es decir, el del conductor, debe ser positivo.

Puede demostrarse de modo análogo que si la carga Q fuese negativa, entonces el potencial del conductor sería negativo. De este problema puede extraerse la conclusión general de que un conductor aislado (muy alejado de cualquier otra carga) adquiere un potencial del mismo signo que su carga.

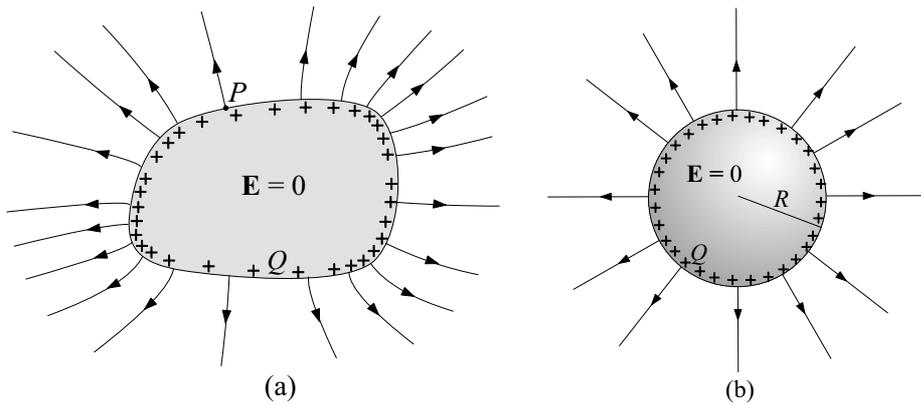


Figura 3.9. Conductor cargado positivamente en equilibrio electrostático, (a) con forma arbitraria, (b) esférico.

En el caso de que el conductor sea esférico, la carga Q se distribuye, por simetría, uniformemente sobre su superficie [Figura 3.9(b)]. Del resultado del Problema 2.6, se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & r > R \end{cases} \quad (3.30)$$

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases} \quad (3.31)$$

para el campo y potencial electrostáticos a una distancia r arbitraria del centro de la esfera. El potencial de la esfera conductora es entonces

$$V_C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

- 3.2** Se aproxima una carga puntual positiva a un conductor descargado. Demostrar que, en el equilibrio electrostático, el conductor adquiere un potencial positivo.

Resolución

Como paso previo es preciso investigar sobre la distribución de carga inducida en la superficie del conductor y la forma de las líneas del campo eléctrico. La presencia de la carga puntual positiva atrae a los electrones libres del conductor, induciendo así cierta densidad superficial de carga negativa en la zona de la superficie más cercana a la carga puntual. Como la carga eléctrica neta del conductor es nula, la zona superficial más alejada de la carga puntual quedará cargada positivamente, como se ilustra en la Figura 3.10. De la expresión $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0)\mathbf{n}$ se sigue que de los puntos de la superficie del conductor con carga positiva (negativa) surgen (mueren) líneas de campo eléctrico. Es importante aquí darse cuenta de que las líneas de campo que surgen de las cargas positivas no pueden retornar, haciendo un lazo, a la región de carga negativa del conductor, como la línea discontinua entre A y B en la Figura 3.10. La razón es que, en tal caso, la diferencia de potencial entre A y B , calculada como la circulación del campo eléctrico a lo largo de dicho lazo arrojaría el valor

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0,$$

en contradicción con el hecho de que todos los puntos de un conductor son equipotenciales ($V_A = V_B$).

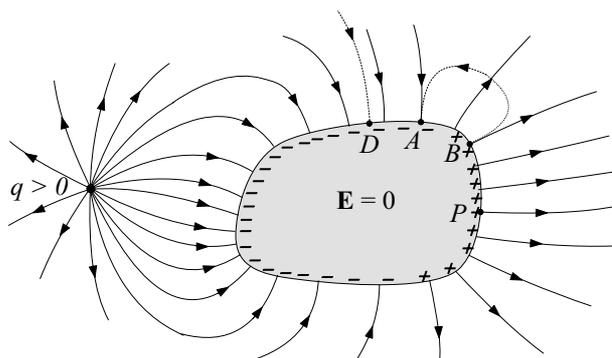


Figura 3.10. Conductor descargado en presencia de una carga eléctrica puntual positiva.

Así pues, toda línea de campo que nazca en la zona de carga positiva del conductor debe alejarse indefinidamente de éste, lo que nos permite demostrar que su potencial es positivo: el potencial del conductor puede calcularse, en efecto, como la circulación del campo eléctrico a lo largo de la línea de campo eléctrico Γ que nace en P (Figura 3.10), obteniendo

$$V_C = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0.$$

puesto que \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ tienen la misma dirección y sentido en todo el camino de integración. En conclusión, un conductor descargado en presencia de una carga positiva adquiere un potencial

positivo. Si la carga externa fuese negativa, puede demostrarse de un modo completamente análogo que el potencial del conductor sería negativo.

En la Figura 3.10 se ha dibujado, además, todos los tipos de líneas de campo que pueden existir. Debe notarse que todas las líneas que terminan en la región de carga negativa del conductor deben necesariamente proceder de la carga puntual positiva: si existiese alguna línea procedente de puntos infinitamente alejados del conductor (como la línea discontinua que finaliza en el punto D de la Figura 3.10), se tendría

$$V_C = \int_D^\infty \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} < 0$$

al realizar la circulación a lo largo de dicha supuesta línea de campo, resultado que está en contradicción con el hecho de que el potencial del conductor es positivo.

- 3.3** La Figura 3.11 representa dos esferas conductoras de diferentes radios, lo suficientemente alejadas entre sí como para poder despreciar su influencia mutua, pero unidas mediante un hilo metálico. Se introduce en el sistema cierta carga Q . Demostrar que, en el equilibrio electrostático, la carga que adquiere cada esfera es proporcional a su radio, pero que la densidad superficial de carga y el campo eléctrico en la superficie de cada esfera son inversamente proporcionales a su radio. (**Efecto puntas.**)

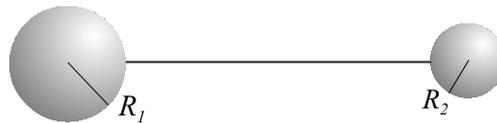


Figura 3.11. Dos esferas metálicas unidas por un hilo metálico muy largo.

Resolución

Cuando se alcanza el equilibrio electrostático, las dos esferas tienen el mismo potencial V , por estar unidas por medio de un hilo conductor. La carga Q se distribuye sobre las superficies de las dos esferas (ignorando la que pueda acumularse sobre el hilo, si su superficie es muy pequeña). Despreciando la influencia mutua entre ambas, sus cargas Q_i ($i = 1, 2$) se distribuyen homogéneamente sobre cada una de las dos superficies, y su potencial se puede calcular como $V = Q_i/4\pi\epsilon_0 R_i$ (Problema 3.1). De aquí que la carga sobre cada una de las esferas sea $Q_i = 4\pi\epsilon_0 V R_i \propto R_i$, es decir, proporcional al radio. Sin embargo, la densidad superficial de carga en cada una de las esferas vendrá dada por $\sigma_i = Q_i/4\pi R_i^2 = \epsilon_0 V/R_i \propto 1/R_i$, y el campo eléctrico en sus superficies por $E_i = \sigma_i/\epsilon_0 = V/R_i \propto 1/R_i$, es decir, inversamente proporcionales al radio. En conclusión, cuanto más pequeña sea la esfera, menor carga total adquiere, pero mayor es la densidad de carga y el campo eléctrico en su superficie.

Este problema ilustra el llamado efecto puntas en los conductores: en las zonas puntiagudas de un conductor (menor radio de curvatura), la densidad de carga eléctrica y el campo eléctrico son mayores que en las zona más planas. Esta es la razón por la que los arcos eléctricos (ruptura dieléctrica, Problema 3.14) que producen la descarga de un conductor ocurren preferentemente en la puntas de los conductores, donde la mayor intensidad del campo eléctrico puede ionizar el aire circundante con mayor facilidad. Por esta misma razón, el campo eléctrico alrededor de pequeñísimas partículas de polvo cargadas puede ser tan intenso como para provocar chispas, y éstas producir explosiones en presencia de compuestos inflamables en el aire (grisú).

- 3.4** Se aproxima un objeto cargado positivamente a un conductor que se mantiene a potencial nulo conectándolo a tierra. Demostrar que el conductor adquiere carga negativa. (**Conexión a tierra de un conductor. Carga por influencia.**)

Resolución

La conexión a tierra de un conductor consiste en unirlo físicamente a ella, utilizando, por ejemplo, un hilo metálico. En el equilibrio electrostático, el conductor y tierra son equipotenciales, puesto que forman un único conductor. Además, siendo la tierra enorme en comparación con los conductores manejados habitualmente, puede afirmarse que el potencial del conjunto es igual al de tierra y que éste no se ve alterado por la conexión del conductor. El potencial de tierra suele tomarse como referencia ($V_T = 0$) para mediciones de potencial de otros conductores. Así, un conductor conectado a tierra tiene potencial nulo. En la resolución de problemas con conexiones a tierra, se supondrá además que la tierra está descargada, de modo que su potencial coincide con el del infinito, es decir $V_T = V(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = 0$.

En el problema propuesto, el objeto cargado positivamente crea un campo eléctrico que debe ser cancelado en el interior del conductor por ciertas cargas inducidas en su superficie. Supongamos primero que existe alguna región superficial donde $\sigma > 0$. En tal caso, surgiría de ellas un campo eléctrico $\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_0)\mathbf{n}$ hacia el exterior y cuyas líneas de campo se alejarían indefinidamente del conductor (como se vio en el Problema 3.2, no pueden retornar a él ni, en este caso, a tierra). La existencia de dichas líneas implican (como se demostró en el Problema 3.9) un valor positivo para el potencial del conductor, en contradicción con el hecho de que su potencial es nulo por estar conectado a tierra. En conclusión, la carga en la superficie del conductor sólo puede ser negativa.

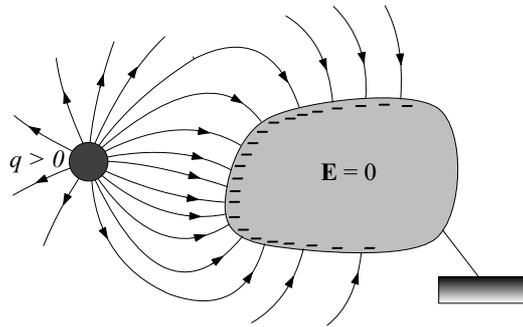


Figura 3.12. Carga por influencia de un conductor conectado a tierra.

En la Figura 3.12 se muestra un dibujo aproximado del campo eléctrico. Es interesante observar que toda línea de campo que intercepta el conductor debe provenir del objeto cargado positivamente ya que la existencia de alguna línea que proviniese de puntos muy alejados implicaría un valor negativo para el potencial del conductor.

- 3.5** Se tiene un conductor hueco conectado a tierra, o Jaula de Faraday. Demostrar que (a) el campo y el potencial creados por cargas externas no alcanzan el hueco del conductor ($\mathbf{E} = 0, V = 0$ en el hueco) y que (b) el campo y potencial creados por cargas contenidas en el hueco no alcanzan el exterior ($\mathbf{E} = 0, V = 0$ en el exterior). Este fenómeno es conocido como apantallamiento o blindaje electrostático. (**Jaula de Faraday.**)

Resolución

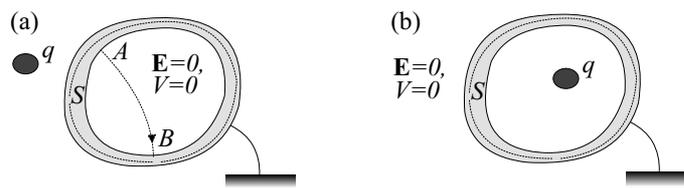


Figura 3.13. Jaula de Faraday (a) con cargas en su exterior y (b) con cargas en su interior.

Para demostrar (a) [Figura 3.13(a)] consideramos la superficie cerrada S de la Figura 3.13(a), contenida en el interior del conductor. Independientemente de la existencia de campos externos, el campo eléctrico es nulo en todos los puntos de S , y por tanto también es nulo el flujo a través de ella. El teorema de Gauss implica entonces que la carga total en el interior de S , es decir, en la

superficie interior del conductor, es nula. Si existe carga en alguna región superficial, digamos A , debe entonces existir otra opuesta en otra región B . Las líneas de campo que parten de una región deberían entonces terminar en la otra. Esta última situación tampoco es posible ya que implica una diferencia de potencial entre ambas regiones, como se vio en el Problema 3.10. No pueden por tanto existir cargas en la superficie interna ni campo eléctrico en el hueco, $\mathbf{E} = 0$. Debe notarse que esta conclusión se refiere sólo a conductores con huecos *vacíos* y que no requiere la conexión a tierra. Si existe además tal conexión, el potencial de cualquier punto del hueco, evaluado como la circulación del campo eléctrico entre el punto y el conductor, da como resultado $V = 0$.

Para demostrar (b) [Figura 3.13(b)], consideramos la misma superficie cerrada S contenida en el interior del conductor. Como el flujo a través de ella es nulo, también debe serlo la carga total en el interior de S . Si la carga en el hueco es q , la carga inducida en la superficie interior del conductor debe ser ahora $-q$. La conexión a tierra del conductor es ahora esencial para la no aparición de cargas inducidas en la superficie externa y la cancelación del campo eléctrico y el potencial en el exterior. Si hubiese carga en la superficie externa, habría un campo eléctrico exterior, cuyas líneas se alejarían indefinidamente del conductor (o viceversa), lo que implicaría una diferencia de potencial entre el conductor y el infinito. La conexión a tierra garantiza entonces la no existencia de cargas inducidas en la superficie exterior y que el campo y el potencial eléctricos son nulos en el exterior.

- 3.6** En un hueco practicado en un conductor A descargado se ha introducido otro conductor B cargado negativamente. Alcanzado el equilibrio electrostático, ¿cuál es el signo del potencial de cada conductor?, ¿cuál de los dos tiene menor potencial?

Resolución

En la Figura 3.14 se muestra la distribución espacial de carga en el equilibrio electrostático. La carga negativa $-Q < 0$ del conductor B se distribuye sobre su única superficie. Como el flujo del campo eléctrico a través de la superficie cerrada S es nulo, la carga interior en su interior, de acuerdo con el teorema de Gauss, también es nula. En la superficie interior del conductor A se induce entonces una carga $+Q$, y puesto que el conductor A está descargado, debe inducirse una carga $+Q$ en su superficie externa.

Un dibujo aproximado del tipo de líneas de campo eléctrico debido a esta distribución de carga se muestra en la Figura 3.14. Realizando la circulación del campo eléctrico a lo largo de la línea de campo que termina en M , obtenemos

$$V_A = \int_M^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0.$$

Para el conductor B podemos escribir,

$$V_B = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_N^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_M^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

$$V_B = \int_P^N \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} + V_A < 0,$$

por ser la circulación de PN negativa, la circulación MN nula y V_A negativo. En la última ecuación es evidente, además, que $V_B < V_A$.

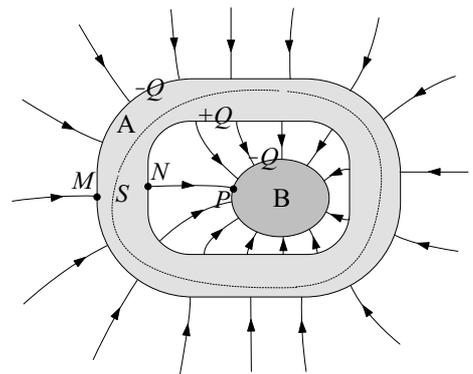


Figura 3.14. Un conductor cargado negativamente en el hueco de un conductor descargado.

- 3.7** Un cilindro hueco de hierro, muy largo y descargado tiene radios interior $R_1 = 10$ cm y exterior $R_2 = 11$ cm. A lo largo de su eje se ha situado un hilo, también muy largo, cargado con densidad lineal de carga $\lambda = -1,7 \mu\text{C}/\text{cm}$. Determinar los valores de las cargas inducidas en las superficies del cilindro y el campo electrostático en todo punto del espacio.

Resolución

El flujo del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica S mostrada en la Figura 3.15 es nulo, por ser el campo eléctrico nulo sobre ella. Del teorema de Gauss se deduce entonces que la carga total en su interior es nula. Como hilo tiene carga por unidad de longitud λ , en la superficie interna del cilindro debe inducirse una carga $-\lambda = 1,7 \mu\text{C}/\text{cm}$. A su vez, el cilindro es eléctricamente neutro, por lo que en su superficie externa debe situarse una carga por unidad de longitud $\lambda = -1,7 \mu\text{C}/\text{cm}$ (Figura 3.15)

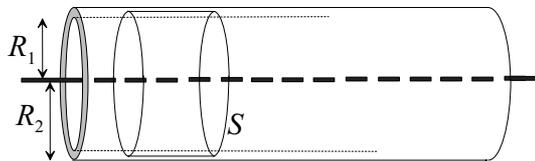


Figura 3.15. Hilo cargado rodeado de un cilindro hueco metálico y descargado.

En el Problema 2.7 se vio que el campo eléctrico creado por un hilo muy largo con densidad lineal de carga λ viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho \quad (3.32)$$

donde r es la distancia al hilo y \mathbf{u}_ρ el vector unitario radial respecto del hilo. Según el Problema 2.25 el campo eléctrico creado por un cilindro de longitud muy grande y de radio R , cargado sobre su superficie con carga λ por unidad de longitud, está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < R, \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho & r > R, \end{cases} \quad (3.33)$$

donde r es la distancia al eje del cilindro y \mathbf{u}_ρ el vector unitario radial respecto del eje del cilindro.

En la configuración de cargas de la Figura 3.15, se tiene entonces, por el principio de superposición: si $r < R_1$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho = -\frac{3,06 \times 10^6}{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \mathbf{u}_\rho,$$

con r expresado en metros. Si $R_1 < r < R_2$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho = 0,$$

como podría esperarse del interior de un conductor. Si $r > R_2$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho = -\frac{3,06 \times 10^6}{r} \frac{\text{V}}{\text{m}} \mathbf{u}_\rho,$$

con r también expresado en metros.

- 3.8** Una corona esférica de cobre, de radio interior $R_i = 0,4$ m y de radio exterior $R_e = 0,8$ m, tiene una carga neta $Q = 1$ mC. En su interior, se sitúa concéntricamente una esfera de hierro de radio $R_B = 0,2$ m y conectada a tierra. Determinar las cargas inducidas en las superficies de los dos conductores y el campo y potencial eléctricos en las distintas regiones del espacio.

Resolución

Sean Q_i y Q_e las cargas inducidas en las superficies interna y externa de la corona esférica, y Q_B la carga inducida en el conductor esférico (Figura 3.16).

La conservación de la carga de la corona esférica implica que

$$Q_i + Q_e = Q. \quad (3.34)$$

Por otro lado, el potencial del conductor esférico es nulo por estar conectado a tierra. El potencial de cualquier punto del conductor B es la suma de los potenciales debidos a las tres superficies esféricas con carga, estando cada uno de ellos determinado por la Ecuación (3.31). Podemos entonces establecer la ecuación

$$V_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} + \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 R_e} = 0. \quad (3.35)$$

Además, el campo eléctrico en el interior de la corona esférica es nulo. El campo eléctrico en cualquiera de sus puntos es la suma de los campos creados por las tres superficies esféricas con carga, estando éstos determinados por la Ecuación (3.30). Se tiene entonces, para $R_i < r < R_e$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r + 0 = 0. \quad (3.36)$$

(Esta ecuación se puede obtener también de aplicar el teorema de Gauss a una superficie cerrada contenida en el interior de la corona esférica y que rodea el hueco. Como el flujo es nulo, la carga interior debe verificar $Q_B + Q_i = 0$.)

Las tres ecuaciones (3.34-3.36) permiten determinar los valores de las tres cargas desconocidas:

$$Q_i = \frac{1}{3} \text{ mC}, \quad Q_e = \frac{2}{3} \text{ mC}, \quad Q_B = -\frac{1}{3} \text{ mC}.$$

Establecidos los valores de las cargas sobre, el campo y potencial electrostáticos en cualquier punto del espacio pueden calcularse sumando las contribuciones de cada una de ellas, determinadas por las ecuaciones (3.30) y (3.31). Para puntos interiores al conductor esférico ($r < R_B$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad V(\mathbf{r}) = 0.$$

Para puntos entre el conductor esférico y la corona esférica ($R_B < r < R_i$),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = -\frac{3,00 \times 10^6}{r^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} \mathbf{u}_r,$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} + \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 R_e} = \left(-\frac{3,00 \times 10^6}{r} + 14,978 \times 10^6 \right) \text{ V}.$$

En puntos tales que $R_i < r < R_e$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad V(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 R_e} = 7,49 \times 10^6 \text{ V},$$

y para puntos a distancias $r > R_e$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r + \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{6,00 \times 10^6}{r^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} \mathbf{u}_r,$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{6,00 \times 10^6}{r} \text{ V}.$$

En todas las ecuaciones, r se expresa en metros.

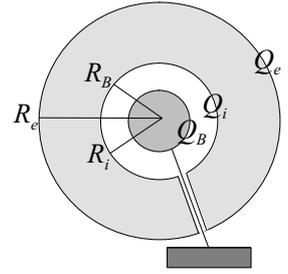


Figura 3.16. Corona esférica de cobre y esfera de hierro concéntrica conectada a tierra.

- 3.9** Se considera una carga puntual q positiva a distancia d a un objeto conductor conectado a tierra, cuya superficie es plana y muy grande, como se muestra en la Figura 3.17(a). Determinar (a) el potencial eléctrico en todo punto del espacio, (b) la densidad superficial de carga inducida en el conductor, (c) su carga total y (d) la fuerza que la carga ejerce sobre el plano. (**Método de las cargas imagen.**)

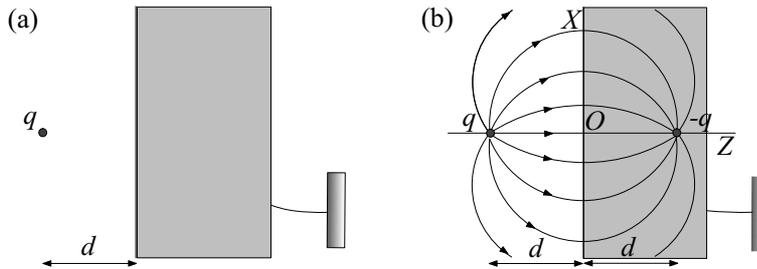


Figura 3.17. (a) Carga puntual q enfrentada a un conductor plano conectado a tierra. (b) Carga real q y carga imagen $-q$.

Resolución

En los problemas anteriores, encontrar las cargas inducidas, el campo eléctrico y potencial que satisfacen las condiciones (1-6) ha sido posible por la alta simetría del problema. En problemas con menos simetría, el procedimiento anterior no es factible. La solución puede encontrarse a veces por el método de las imágenes. En un problema con ciertas distribuciones de carga fija y ciertos conductores, se trata de encontrar el valor y posición en el interior de los conductores de ciertas cargas ficticias (cargas imagen, en general puntuales) que reemplacen a los conductores y creen un potencial y campo eléctrico que satisfagan las condiciones de contorno que debieran verificarse en sus superficies. El potencial y campo creados por dicha distribución equivalente son fácilmente calculables, y por satisfacer las ecuaciones básicas de la electrostática en el espacio libre ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, o sea $\Delta V = 0$) y las condiciones de contorno del problema con conductores son, por unicidad, el potencial y campo eléctrico en el espacio libre debidos a la distribución original.

En el problema propuesto, por su simetría de revolución entorno al eje Z [Figura 3.17(b)], probamos a reemplazar el conductor por una carga puntual imagen en el eje Z . Recordando el Problema 2.23 para el potencial creado por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$, notamos que el plano bisectriz es equipotencial de valor nulo. Así, si la carga imagen $-q$ se sitúa en el punto $(0, 0, d)$, entonces todo el plano XY tiene potencial $V = 0$ y por tanto, el campo eléctrico es perpendicular a dicho plano. En otras palabras, el potencial y campo de $+q$ y la imagen $-q$ satisfacen las condiciones de contorno en la superficie del conductor. La conclusión es que, en el exterior del conductor, el campo creado por las dos cargas puntuales es igual al creado por la carga dada y el conductor.

(a) El potencial electrostático en todo punto a la izquierda del conductor puede expresarse entonces como la suma de los creados por las dos cargas

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (d+z)^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (d-z)^2}}.$$

En el interior del conductor, en cambio, el potencial es $V = 0$. De la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$, puede determinarse también el campo eléctrico.

(b) En la superficie del conductor, campo eléctrico y densidad de carga están relacionados por

$\mathbf{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\mathbf{n}$. En este caso, la normal exterior es $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_z$, y el campo en la superficie vale

$$\mathbf{E}(0, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2d}{(x^2 + y^2 + d^2)} \mathbf{u}_z,$$

de donde

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)}.$$

(c) La carga total del conductor puede determinarse integrando sobre su superficie. Introduciendo $\rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $dS = \rho d\rho d\phi$, se tiene

$$\int_{\text{plano}} \sigma dS = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2)} = -qd \left. \frac{-1}{(\rho^2 + d^2)} \right|_0^\infty = -q.$$

La igualdad entre los valores absolutos de la carga puntual y la del conductor es consecuencia de que todas las líneas de campo que surgen de la carga puntual son interceptadas por el conductor, es decir, están en influencia total.

(d) La fuerza que la carga q ejerce sobre el plano puede calcularse como la resultante de las fuerzas sobre cada elemento de superficie con carga σdS . Ahora bien, por el principio de acción y reacción, dicha fuerza es contraria a la que el plano ejerce sobre la carga q , es decir, el producto de q por el campo creado por el *plano*, siendo este campo el mismo que el creado por la carga imagen $-q$. Así podemos escribir

$$\mathbf{F}_{q \rightarrow \text{plano}} = -\mathbf{F}_{\text{plano} \rightarrow q} = -\mathbf{F}_{q' \rightarrow q} = -\frac{(-q)q}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} (-\mathbf{u}_z) \Rightarrow \mathbf{F}_{q \rightarrow \text{plano}} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} \mathbf{u}_z.$$

3.10 Una molécula de agua, de momento dipolar eléctrico de módulo $p = 6,2 \times 10^{-30}$ Cm, está situada a 10^{-5} metros de un ión de sodio, cuya carga es $Q = 1,6 \times 10^{-19}$ C, de modo que el átomo de oxígeno del agua apunta al ión. Calcular la fuerza que experimenta la molécula y su aceleración.

Resolución

Debido a su momento dipolar eléctrico permanente \mathbf{p} , la molécula de agua en el seno del campo eléctrico \mathbf{E} creado por el ion de sodio experimenta una fuerza $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$. En referencia a la Figura 3.18, el campo eléctrico creado por el ion a una distancia x viene dado por

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \mathbf{u}_x.$$

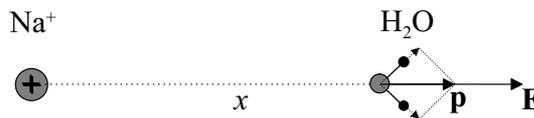


Figura 3.18. Molécula de agua en el campo eléctrico de un ion de sodio.

Por otro lado, el momento dipolar eléctrico de la molécula de agua es consecuencia de los momentos dipolares eléctricos de los dos enlaces H-O. Con la orientación dada para la molécula de agua, este momento dipolar eléctrico \mathbf{p} tiene la misma dirección y sentido que \mathbf{E} . Para la fuerza podemos escribir entonces

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \nabla(pE) = \frac{\partial(pE)}{\partial x} \mathbf{u}_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \mathbf{u}_x = -p \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 x^3} \Rightarrow \mathbf{F} = -1,79 \times 10^{-23} \text{ N } \mathbf{u}_x.$$

Para determinar la aceleración, calculamos primero la masa de la molécula de agua como su masa molar dividida por el número de avogadro, $m = 0,018 / (6,02 \times 10^{23})$ kg, con lo que

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -599 \text{ m/s}^2 \mathbf{u}_x.$$

3.11 Una varilla de material dieléctrico [Figura 3.19], de longitud L y sección A está polarizada a lo largo de su longitud de acuerdo con la ecuación $P_x = ax^2 + b$, siendo a y b constantes. a) Encontrar la densidad volumétrica de carga de polarización y la densidad superficial de carga de polarización. b) Demostrar explícitamente que la carga total de polarización es nula.

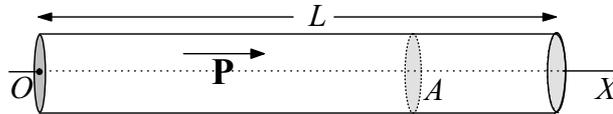


Figura 3.19. Varilla polarizada.

Resolución

a) La polarización \mathbf{P} del dieléctrico provoca la aparición de cargas de polarización en su volumen y en su superficie. La densidad volumétrica de carga de polarización está dada por

$$\rho_p = -\text{div}\mathbf{P} = -\text{div}[(ax^2 + b)\mathbf{u}_x] = -2ax.$$

La densidad superficial de carga de polarización en cada punto de la superficie de la varilla viene dada por $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{P} debe evaluarse en el punto considerado y \mathbf{n} es la normal exterior al dieléctrico en dicho punto. En la superficie lateral de la varilla \mathbf{P} y \mathbf{n} son perpendiculares (Figura 3.20), y por tanto $\sigma_p = 0$ en dicha superficie. En la base derecha (Figura 3.20)

$$\sigma_p(x=L) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = (aL^2 + b)\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = aL^2 + b,$$

y en la base izquierda,

$$\sigma_p(x=0) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = b\mathbf{u}_x \cdot (-\mathbf{u}_x) = -b$$

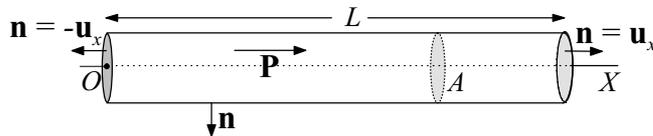


Figura 3.20. Normales a las superficies de la varilla.

b) La carga total de polarización en la varilla, q_p , contando la que se origina en la superficie y la que se origina en el volumen, debe ser cero. En efecto, q_p está dada por

$$\begin{aligned} q_p &= \sigma_p(x=L)A + \sigma_p(x=0)A + \int_V \rho_p dV \\ &= (aL^2 + b)A - bA + \int_{x=0}^{x=L} (-2ax)Adx \\ &= (aL^2 + b)A - bA - aAL^2 = 0. \end{aligned}$$

- 3.12** Un recipiente cúbico contiene gas hidrógeno a temperatura $T = 293 \text{ K}$ y presión $p = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$. Al aplicar sobre él un campo eléctrico uniforme y perpendicular a dos caras, se observa la aparición en ellas de una densidad superficial de carga de valor absoluto $81 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Considerando el hidrógeno como un gas ideal, determinar el momento dipolar eléctrico medio de sus moléculas, $|\langle \mathbf{p} \rangle|$. [Datos adicionales: número de Avogadro $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, constante universal de los gases $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol K})$].

Resolución

De la Ecuación (3.2), el momento dipolar eléctrico de las moléculas de hidrógeno puede calcularse a partir de la expresión

$$|\langle \mathbf{p} \rangle| = \frac{|\mathbf{P}|}{n}, \tag{3.37}$$

siendo \mathbf{P} el vector polarización eléctrica y n el número de moléculas por unidad de volumen.

Como el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a un par de caras (Figura 3.21), también lo será el vector polarización eléctrica, originando en ellas cargas de polarización positiva y negativa de valor absoluto $|\sigma_p| = |\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|$. De aquí que

$$|\mathbf{P}| = |\sigma|. \tag{3.38}$$

Por otro lado, dado que el número de Avogadro representa el número de moléculas en un mol, el número de moléculas por unidad de volumen puede escribirse como $n = mN_A/V$, donde m es el número de moles de hidrógeno y V el volumen del recipiente. De la ecuación de estado de los gases ideales ($V/m = RT/p$) se tiene entonces

$$n = \frac{pN_A}{RT}. \tag{3.39}$$

Introduciendo las Ecuaciones (3.38) y (3.39) en Ecuación (3.37), se obtiene

$$|\langle \mathbf{p} \rangle| = \frac{RT}{pN_A} |\sigma_p| \Rightarrow |\langle \mathbf{p} \rangle| = 1,64 \times 10^{-30} \text{ Cm.}$$

como el valor medio del momento dipolar eléctrico de las moléculas de hidrógeno.

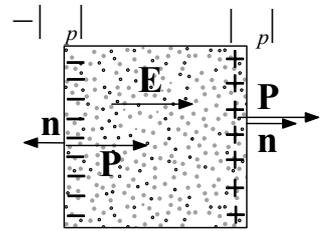


Figura 3.21. Recipiente cúbico conteniendo gas hidrógeno polarizado por un campo eléctrico uniforme.

- 3.13** Se considera una esfera de hierro de radio R , con carga positiva Q , en equilibrio electrostático, y rodeada de vidrio, cuya permitividad relativa es $\epsilon_r = 9$. Se desea determinar el campo eléctrico, el vector polarización, las cargas inducidas en la superficie interior del vidrio y el potencial de la esfera de hierro.

Resolución

Dada la simetría esférica del problema, la carga Q del conductor se distribuye uniformemente sobre la superficie de la esfera de hierro, y lo mismo ocurre con la carga de polarización en la superficie de vidrio en contacto con el conductor. Por la misma razón, los vectores desplazamiento eléctrico y campo eléctrico son radiales respecto del centro de la esfera de hierro.

Aplicando la ley de Gauss (3.10) para el vector desplazamiento eléctrico a la superficie esférica S_1 de radio $r < R$ (Figura 3.22), se tiene

$$\Phi_D(S_1) = 4\pi r^2 D = q_{\text{int,np}} = 0,$$

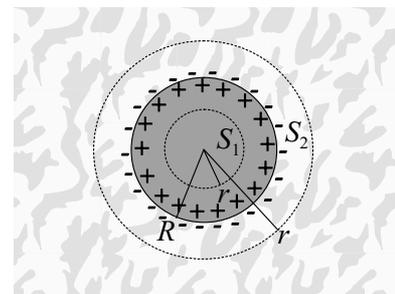


Figura 3.22. Esfera de hierro cargada rodeada de vidrio.

por no contener S_1 ninguna carga de no polarización. De aquí que $D = 0$, o sea, $\mathbf{D} = 0$ en el interior del conductor, y también $\mathbf{E} = 0$, como corresponde a un conductor en equilibrio.

Aplicando de nuevo la ley de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico a la superficie esférica S_2 de radio $r > R$ (Figura 3.22), se tiene $\Phi_D(S_2) = 4\pi r^2 D = q_{\text{int,np}} = Q$, de donde

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r,}$$

en el vidrio ($r > R$). Este campo es el mismo que crearía una carga puntual inmersa en vidrio y es $\varepsilon_r = 9$ veces menor que el que crearía en el vacío. La razón puede encontrarse en el apantallamiento parcial producido por las cargas de polarización en la superficie del vidrio, cuyo valor es

$$\boxed{\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -\frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi R^2},}$$

donde se ha tenido en cuenta que la normal exterior al dieléctrico es $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_r$, y se ha evaluado \mathbf{D} en la superficie del vidrio en contacto con la esfera de hierro.

El potencial de la esfera de hierro se puede calcular como la circulación del campo eléctrico entre cualquier punto P de su superficie y puntos infinitamente alejados. Tomando un camino de circulación radial, se tiene

$$V_{\text{esfera}} = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r dr \Rightarrow \boxed{V_{\text{esfera}} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R}.}$$

3.14 Se ponen en contacto las superficies planas de un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 3,4$ y un conductor con densidad superficial de carga $\sigma = 1,3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. ¿Cuánto valen las densidades superficial y volumétrica de carga de polarización en el dieléctrico?

Resolución

La presencia del conductor cargado origina la polarización del dieléctrico, y ésta la aparición de cargas de polarización en su superficie. En puntos del dieléctrico cuya distancia h al conductor sea pequeña en comparación a las dimensiones lineales de la superficie de separación, el vector desplazamiento eléctrico puede suponerse uniforme y perpendicular a la superficie, como se muestra en la Figura 3.23. Su magnitud D puede determinarse por la ley de Gauss (3.10). Tomando la superficie cilíndrica vertical S de base A , se tiene $\Phi_D(S) = DA = q_{\text{int,np}} = \sigma A$. En el cálculo del flujo se ha tenido en cuenta que en la base inferior del cilindro $\mathbf{E} = 0$ (conductor en equilibrio), $\mathbf{P} = 0$ (en un conductor en equilibrio la polarización es nula), y por tanto $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = 0$. Se tiene entonces que $D = \sigma$ en cualquier punto del dieléctrico próximo al conductor.

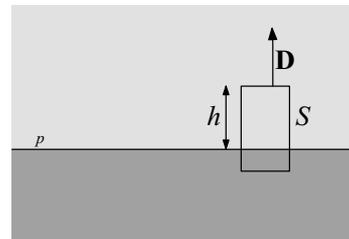


Figura 3.23. Dieléctrico en contacto con conductor cargado.

La densidad superficial de carga de polarización puede ser así calculada como

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} (-D) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} (-\sigma) \Rightarrow \boxed{\sigma_p = -0,92 \mu\text{C}/\text{m}^2,}$$

donde se ha tenido en cuenta que, en la superficie de separación, \mathbf{D} y la normal exterior al dieléctrico \mathbf{n} tienen misma dirección pero sentidos contrarios.

La densidad volumétrica de carga de polarización está dada por

$$\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{np} = 0,$$

por ser nula la densidad de carga no polarización en el dieléctrico.

- 3.15** En el volumen de una esfera de caucho, de radio $R = 10$ cm y permitividad relativa $\varepsilon_r = 3$, se han distribuido iones Cr^{3+} con densidad no uniforme $\rho = kr$, siendo $k = 2 \mu\text{C}/\text{m}^4$ y r la distancia al centro en metros. Calcular 1) las densidades y las cargas totales de polarización en el volumen y la superficie de la esfera y 2) el campo eléctrico en el interior y el exterior del dieléctrico.

Resolución

1) La esfera dieléctrica de caucho se polariza por la presencia de los iones Cr^{3+} de densidad $\rho = kr$, dando lugar a una densidad volumétrica de carga de polarización

$$\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \rho_{np} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} kr \Rightarrow \rho_p = -\frac{4}{3} r \mu\text{C}/\text{m}^3,$$

y por tanto a una carga total de polarización en el volumen V de la esfera

$$Q_p(V) = \int_V \rho_p dV = \int_0^R \left(-\frac{4}{3}r\right) 4\pi r^2 dr \quad Q_p(V) = -0,42 \text{ nC},$$

donde para realizar la integral de volumen se ha tomado el diferencial de volumen $dV = 4\pi r^2 dr$ mostrado en la Figura 3.24(a).

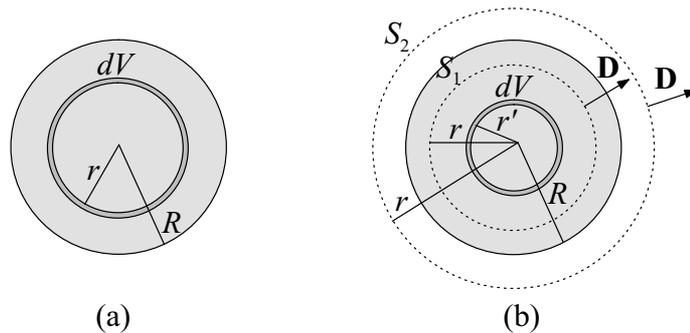


Figura 3.24. (a) Esfera de caucho cargada. (b) Construcción para la resolución del problema.

La cantidad total de carga de polarización en la superficie de la esfera de caucho, $Q_p(S)$, puede deducirse del hecho de que la carga total de polarización de un dieléctrico es siempre nula. Se tiene así que

$$Q_p(S) = -Q_p(V) = 0,42 \text{ nC}.$$

Como además, por la simetría esférica del problema, esta carga se distribuye uniformemente sobre la superficie de la esfera de caucho, su densidad superficial es

$$\sigma_p = \frac{Q_p(S)}{4\pi R^2} = 3,3 \text{ nC}/\text{m}^2.$$

2) Para el cálculo del campo eléctrico en puntos interiores a la esfera ($r < R$), se aplica la ley de Gauss (3.10) para el vector desplazamiento a la superficie esférica S_1 de radio r [Figura 3.24(b)], obteniéndose

$$\Phi_D(S_1) = 4\pi r^2 D = q_{\text{int},np}, \quad (3.40)$$

donde en el cálculo del flujo se ha tenido en cuenta que \mathbf{D} es, por simetría, radial y de módulo constante en la esfera de radio r . Por otro lado la carga de no polarización, es decir, la carga de iones Cr^{3+} , dentro de la superficie S_1 se puede calcular como

$$q_{\text{int,np}} = \int_{V_1} \rho dV = \int_0^r kr' 4\pi r'^2 dr' = \pi kr^4, \quad (3.41)$$

donde V_1 es el volumen contenido por la superficie S_1 , y se ha tomado como elemento de volumen $dV = 4\pi r'^2 dr'$ [Figura 3.24(b)]. Haciendo uso de la Ecuación (3.41) en la Ecuación (3.40), y despejando D se obtiene $D = kr^2/4$, es decir, $\mathbf{D} = (kr^2/4)\mathbf{u}_r$, y por tanto

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{kr^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon_r} \mathbf{u}_r = 18823r^2 \mathbf{u}_r \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

como el valor del campo en puntos interiores a la esfera de caucho.

Para puntos exteriores ($r > R$), aplicando el teorema de Gauss a la superficie esférica S_2 de radio r [Figura 3.24(b)], se obtiene de nuevo

$$\Phi_D(S_1) = 4\pi r^2 D = q_{\text{int,np}}, \quad (3.42)$$

siendo ahora $q_{\text{int,np}}$ la carga de no polarización dentro de la superficie S_2 , que coincide con la carga total de iones de Cr^{3+} en la esfera de caucho y se calcula como

$$q_{\text{int,np}} = \int_V \rho dV = \int_0^R kr' 4\pi r'^2 dr' = \pi kR^4. \quad (3.43)$$

De las Ecuaciones (3.42) y (3.43), se tiene $\mathbf{D} = (kR^4/4r^2)\mathbf{u}_r$, y teniendo en cuenta que en el vacío $\varepsilon_r = 1$,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r = \frac{1,8823}{r^2} \mathbf{u}_r \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

como el valor del campo eléctrico en exterior de la esfera de caucho.

- 3.16** Sobre la superficie plana de un conductor, se ha colocado una capa de poliestireno de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2,6$ y rigidez dieléctrica $E_{\text{max}} = 20 \text{ kV/cm}$. Determinar la máxima densidad superficial de carga que puede adquirir el conductor sin que se produzca la **ruptura dieléctrica** del poliestireno.

Resolución

La rigidez dieléctrica E_{max} es la intensidad $|\mathbf{E}|$ del campo eléctrico máxima que puede soportar un material dieléctrico sin que sus moléculas se ionicen, permitiendo así el paso de la corriente eléctrica. Su valor es característico de cada sustancia, dependiendo además de sus condiciones de presión y temperatura.

En el Problema 3.14 se ha demostrado que el módulo del desplazamiento eléctrico en un dieléctrico situado sobre un conductor plano cargado con densidad superficial de carga σ está dado por $|\mathbf{D}| = |\sigma|$. La intensidad del campo eléctrico está entonces dada por $|\mathbf{E}| = |\sigma|/\varepsilon_0 \varepsilon_r$ cantidad que, para que no se produzca la ruptura dieléctrica, no debe superar la rigidez dieléctrica, es decir, $|\sigma|/\varepsilon_0 \varepsilon_r \leq E_{\text{max}}$. De aquí que la densidad superficial de carga del conductor no deba superar la cantidad

$$|\sigma| = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\text{max}} = 4,58 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2.$$

- 3.17** Durante una tormenta se observan rayos entre las nubes y la tierra. Se estima que la altura de las nubes es $h \simeq 1000 \text{ m}$ y la rigidez dieléctrica del aire $E_{\text{max}} \simeq 3 \times 10^6 \text{ V/m}$. Estimar un valor mínimo para la diferencia de potencial entre las nubes y la tierra, suponiendo que el campo eléctrico entre ambos es uniforme y vertical hacia abajo.

Resolución

La presencia de rayos asegura que se ha producido la ruptura dieléctrica del aire, es decir, $|\mathbf{E}| > E_{\max}$. Para la diferencia de potencial entre la tierra y las nubes se tiene, suponiendo el campo eléctrico uniforme,

$$V = \int_{\text{nubes}}^{\text{tierra}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \simeq |\mathbf{E}|h > E_{\max}h \simeq 3 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \times 1000 \text{ m} = 3 \times 10^9 \text{ V}.$$

3.18 Las dos puntas conductoras de la Figura se mantienen a una diferencia de potencial $V_1 - V_2 = 300 \text{ V}$ uniéndolas a una fuente de fuerza electromotriz adecuada, como se muestra en la Figura 3.25(a). Determinar el campo eléctrico en la línea que une las puntas, supuesto éste uniforme, en función de la distancia d entre ambas. Determinése también a qué distancia se producirá una chispa entre las puntas, suponiendo que el aire se comporta como un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r \simeq 1$, cuya rigidez dieléctrica es $E_{\max} = 3 \times 10^5 \text{ V/m}$.

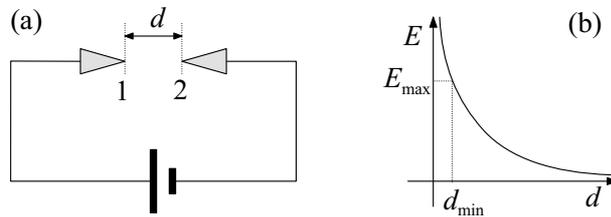


Figura 3.25. (a) Dos conductores en forma de punta cuya diferencia de potencial se mantiene constante. (b) Variación del campo eléctrico con la distancia entre las puntas.

Resolución

Si el campo entre las puntas se supone uniforme, podemos escribir

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed = 300 \text{ V}.$$

La intensidad del campo en función de la distancia d está entonces dada por

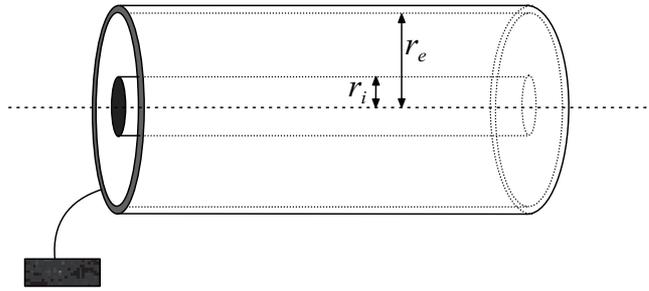
$$E = \frac{300}{d} \text{ V},$$

donde d se expresa en metros.

El hecho de que el campo sea inversamente proporcional a la distancia d [Figura 3.25(b)] hace que a cierta distancia de acercamiento d_{\min} se alcance el valor de la rigidez dieléctrica, produciéndose una chispa entre las puntas. Como $E_{\max} = 300/d_{\min}$ se obtiene

$$d_{\min} = \frac{300}{E_{\max}} = 10^{-3} \text{ m}.$$

3.19 El cable coaxial de la Figura 3.26 está formado por un cilindro conductor de radio $r_i = 2 \text{ mm}$, rodeado de una corona cilíndrica de material aislante, de rigidez dieléctrica $E_{\max} = 20 \times 10^6 \text{ V/m}$, rodeada a su vez por una corona cilíndrica conductora, de radio r_e y conectada a tierra. El conductor interior adquiere cierta densidad lineal de carga λ uniforme y por ello un potencial $V = 12 \text{ kV}$. ¿Cuál debe ser el grosor de aislante para que el campo en ningún punto del aislante alcance el 25% del valor de la rigidez dieléctrica?


Figura 3.26. Cable coaxial.

Resolución

La resolución requiere determinar el campo eléctrico en el aislante en función de su grosor e imponer que su módulo no sobrepase la rigidez dieléctrica.

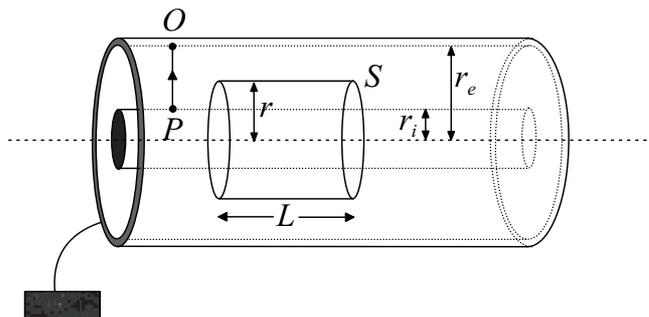
Suponiendo que el cable es muy largo, el campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico son radiales respecto del eje del cable y de módulo constante en cilindros concéntricos con éste. Aplicando entonces el teorema de Gauss a la superficie S de la Figura 3.27, se tiene $\Phi_D(S) = 2\pi r L D = q_{\text{int, np}} = \lambda L$, de donde

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{u}_\rho,$$

y por tanto, en el aislante

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} \mathbf{u}_\rho, \quad (3.44)$$

donde λ y ε_r tienen valor desconocidos y \mathbf{u}_ρ es el unitario radial respecto del eje del cable coaxial.


Figura 3.27. Cable coaxial. Construcción para la resolución del problema.

Por otro lado, el potencial del conductor interior, igual a 12kV, puede calcularse como la circulación del campo eléctrico a lo largo del camino de P a O mostrado en la Figura 3.27, es decir,

$$V = \int_P^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = 12000 \text{ V}.$$

De la última igualdad, se tiene la expresión

$$\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{12000}{\ln(r_e/0,002)},$$

donde r_e se expresa en metros, que, sustituida en la Ecuación (3.44), nos da la expresión del campo eléctrico en el aislante

$$\mathbf{E} = \frac{12000}{\ln(r_e/0,002)r} \mathbf{u}_\rho$$

en función de r_e . Para cumplir con los márgenes de seguridad, el campo más intenso en el aislante, que tiene lugar a distancia $r = r_e = 0,002$ m, debe ser el 25% de la rigidez dieléctrica, esto es,

$$|\mathbf{E}| = \frac{12000}{\ln(r_e/0,002)0,002} < 0,25E_{\max} = 0,25 \times 20 \times 10^6 \text{ V/m},$$

de donde $r_e > 0,0066$ m, o lo que es lo mismo, el espesor de aislante debe ser

$$r_e - r_i > 0,0046 \text{ m}.$$

3.20

La Figura 3.28 muestra la sección recta de un hilo conductor muy largo cargado con densidad lineal de carga $-\lambda$ negativa, que está rodeado de una zona de aire ($\epsilon_0 \simeq 1$) de radio R , alrededor de la cuál están situadas dos capas cilíndricas concéntricas. La primera de ellas, de radio interior R y exterior $2R$, tiene permitividad relativa $\epsilon_{r1} = 2$; la segunda, de radio interior $2R$ y exterior $3R$, tiene permitividad relativa $\epsilon_{r2} = 3$. Determinar 1) el campo eléctrico en las distintas zonas del espacio, 2) las densidades de carga de polarización en los dieléctricos y 3) la diferencia de potencial entre un punto a distancia R del hilo y otro a distancia $3R$.

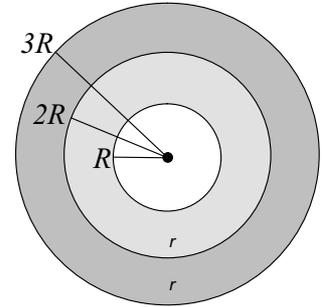


Figura 3.28. Sección recta de un hilo conductor rodeado de dos capas cilíndricas de material dieléctrico.

Resolución

1) Suponiendo que el hilo tiene longitud infinita, la distribución de carga, incluidas las cargas de polarización, tendrá simetría cilíndrica. Entonces los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} tendrán dirección radial respecto del hilo y módulo constante en superficies cilíndricas concéntricas con el hilo. Para determinar \mathbf{D} , aplicamos la ley de Gauss a la superficie cilíndrica S de radio arbitrario r y longitud arbitraria L , cuya sección recta se muestra en la Figura 3.29. Se tiene entonces $\Phi_D(S) = 2\pi rLD = q_{\text{int,np}} = -\lambda L$, de donde

$$\mathbf{D} = \frac{-\lambda}{2\pi r} \mathbf{u}_\rho.$$

El campo eléctrico en la zona de aire ($r < R$) valdrá

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho;$$

en el primer dieléctrico ($R < r < 2R$),

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0\epsilon_{r1}} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}r} \mathbf{u}_\rho = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 2r} \mathbf{u}_\rho,$$

en el segundo dieléctrico ($2R < r < 3R$),

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0\epsilon_{r2}} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r2}r} \mathbf{u}_\rho = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 3r} \mathbf{u}_\rho,$$

y en el exterior a todo el sistema ($r > 3R$),

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_\rho.$$

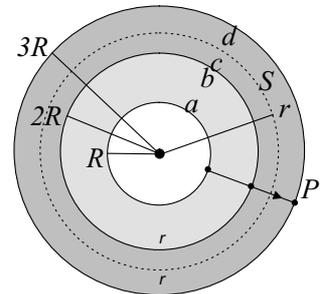


Figura 3.29. Superficie S para la aplicación de la ley de Gauss y camino MNP para el cálculo de la diferencia de potencial.

2) La presencia de carga en el hilo polariza los dieléctricos, y surgen en consecuencia cargas de polarización en sus superficies y volúmenes. En la superficie cilíndrica a (Figura 3.29) perteneciente al primer dieléctrico y de radio R , la densidad superficial de carga de polarización será

$$\sigma_p^{(a)} = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \mathbf{D}_{r=R} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{-\lambda}{2\pi R} \mathbf{u}_\rho \cdot (-\mathbf{u}_\rho) = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{\lambda}{2\pi R} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi R},$$

donde se ha tenido en cuenta que el vector unitario normal exterior a dicha superficie es $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho$. En la superficie b , también perteneciente al primer dieléctrico, pero de radio $2R$ y de normal exterior $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$,

$$\sigma_p^{(b)} = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \mathbf{D}_{r=2R} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{-\lambda}{2\pi 2R} \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho = \frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{(-\lambda)}{4\pi R} = \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)}{4\pi R}.$$

Análogamente, en las superficies c y d del segundo dieléctrico, de radios $2R$ y $3R$, y normales exteriores $\mathbf{n} = -\mathbf{u}_\rho$ y $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho$, respectivamente, se obtiene, análogamente,

$$\sigma_p^{(c)} = \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\varepsilon_{r_2}} \frac{\lambda}{4\pi R} = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{4\pi R},$$

$$\sigma_p^{(d)} = \frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\varepsilon_{r_2}} \frac{\lambda}{6\pi R} = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{6\pi R}.$$

Nótese que en la superficie esférica de radio $2R$ se acumulan dos distribuciones de carga de polarización.

En cuanto a las densidades volumétricas de carga de polarización en el primer y segundo dieléctrico, se tiene

$$\rho_p^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{r_1} - 1}{\varepsilon_{r_1}} \rho_{\text{np}}^{(1)} = 0,$$

$$\rho_p^{(2)} = -\frac{\varepsilon_{r_2} - 1}{\varepsilon_{r_2}} \rho_{\text{np}}^{(2)} = 0,$$

por ser nulas las densidades volumétricas de carga de no polarización en los dieléctricos.

3) La diferencia de potencial entre un punto a distancia R y otro a distancia $3R$ puede calcularse como la circulación del campo eléctrico entre los puntos M y P a lo largo del camino radial que pasa por N , es decir,

$$\begin{aligned} V_M - V_P &= \int_M^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_M^N \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_N^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_R^{2R} \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r} \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho dr + \int_{2R}^{3R} \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r} \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho dr \\ &= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln(3/2)}{3} \right]. \end{aligned}$$

3.21 Utilizando las condiciones en la frontera entre dos medios, determine los vectores campo eléctrico y desplazamiento eléctrico en la superficie de un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo, de permitividad relativa ε_r , en contacto con un conductor en equilibrio electrostático cuya densidad superficial de carga es σ .

Resolución

Sea 1 el medio conductor y 2 el dieléctrico. En el conductor $\mathbf{E}_1 = 0$, y también $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = 0$. Se trata de determinar \mathbf{E}_2 y \mathbf{D}_2 en el dieléctrico, inmediatamente fuera del conductor.

La condición en la frontera $E_{2,t} - E_{1,t} = 0$ implica que $E_{2,t} = 0$, es decir, \mathbf{E}_2 , y por tanto $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_2$, son normales a la frontera entre los dos medios. La condición $D_{2,n} - D_{1,n} = \sigma_{\text{np}}$,

con $D_{1,n} = 0$ y σ la densidad de carga en la superficie del conductor, implica entonces $D_2 = \sigma$, o lo que es lo mismo,

$$\mathbf{D}_2 = \sigma \mathbf{n},$$

siendo \mathbf{n} la normal exterior al conductor. De aquí que

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \mathbf{n}.$$

- 3.22** Determinar la energía electrostática acumulada (a) en una esfera conductora de radio R y carga Q ; (b) en una esfera de radio R sobre la que se ha distribuido homogéneamente una carga Q . Ambas están situadas en el vacío.

Resolución

(a) Si la esfera es conductora, la carga se encuentra distribuida sobre su superficie. Puesto que la densidad superficial de carga y el potencial en cada punto de la superficie valen $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ y $V = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$, respectivamente, se tiene, de acuerdo con la Fórmula (3.17),

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{\text{np}}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_S dS = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} 4\pi R^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

A idéntico resultado puede llegarse usando la Expresión (3.18). El campo y el desplazamiento eléctricos, cuando no son nulos (a distancias $r > R$ del centro de la esfera), valen $\mathbf{E} = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{D} = Q/(4\pi r^2) \mathbf{u}_r$. Entonces

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

donde, para realizar la integral, se ha tomado el elemento de volumen $dv = 4\pi r^2 dr$. Nótese que la integral está limitada al volumen v donde hay campo, es decir, al exterior de la esfera.

(b) Del Problema 2.6, el potencial electrostático creado por una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida en su volumen es

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \left(\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) & \text{si } r < R, \end{cases}$$

y la densidad volumétrica de carga eléctrica de no polarización vale $\rho = Q/(4\pi R^3)$. La Expresión (3.23) para la energía electrostática en función del potencial y la densidad de carga da entonces

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{2} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \left(\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) 4\pi r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Es importante darse cuenta aquí que la integral se ha realizado sobre la región v donde hay carga.

Como en el Apartado (a), se puede realizar también el cálculo de la energía a partir de la Expresión (3.18) en función de los campos. El campo eléctrico creado por la esfera vale

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R, \\ \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathbf{u}_r & \text{si } r < R, \end{cases}$$

y como tanto en el vacío como en el conductor, $D = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, el vector desplazamiento eléctrico vale

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r & \text{si } r > R, \\ \frac{Qr}{4\pi R^3} \mathbf{u}_r & \text{si } r < R, \end{cases}$$

La Expresión (3.18), que es conveniente escribir como

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{2} \int_{\text{int.esfera}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{1}{2} \int_{\text{ext.esfera}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv,$$

da entonces

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi R^3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^R r^2 4\pi r^2 \, dr + \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 \, dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Nótese que como en este caso hay campo en todos los puntos del espacio, el volumen v es todo el espacio.

3.23 A partir de la Expresión (3.17), demostrar que la energía electrostática acumulada en un sistema de N conductores está dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i,$$

siendo q_i y V_i las cargas y potenciales de cada conductor.

Resolución

Si tenemos en cuenta que solo hay carga en las superficie de los conductores, la Ecuación (3.17) se puede poner en la forma

$$U_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{\text{np}}(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \sigma(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dS.$$

Como además la superficie de cada conductor es equipotencial, de valor V_i , se tiene,

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i \int_{S_i} \sigma(\mathbf{r}) \, dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i,$$

como quería demostrarse.

3.24 Capacidad de una esfera conductora. Determinar el coeficiente de capacidad de una esfera conductora aislada de radio $R = 10$ cm inmersa en un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 90$.

Resolución

El coeficiente de capacidad c_{11} de una esfera conductora se puede determinar como el cociente entre el valor de una carga q que se introduzca en ella y el potencial que adquiere. Del Problema 3.13, dicho potencial vale

$$V_{\text{esfera}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R},$$

y por tanto su coeficiente de capacidad vale

$$c_{11} = \frac{q}{V_{\text{esfera}}} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R \Rightarrow \boxed{c_{11} = 1 \text{ nF}}.$$

3.25 Condensador esférico. Determinar la capacidad de un condensador esférico, formado por una esfera conductora, de radio R_1 , rodeada de una corona esférica dieléctrica, de permitividad relativa ϵ_r y radios interior y exterior R_1 y R_2 , rodeada a su vez de una corona esférica de radio interior R_2 .

Resolución

Si las armaduras del condensador tienen cargas eléctricas $+q$ y $-q$ (Figura 3.30), su capacidad se determina como el cociente entre la carga positiva y la diferencia de potencial entre las armaduras positiva y negativa. Para determinar dicha diferencia de potencial, se necesita conocer el campo eléctrico entre las armaduras del condensador.

Por simetría, las cargas $+q$ y $-q$ se distribuyen uniformemente sobre la superficie externa del conductor 1 y la interna del conductor 2, respectivamente, y las cargas de polarización en el dieléctrico se distribuirán también con la misma simetría esférica. En consecuencia, el campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico deben ser radiales respecto del centro de las esferas. Aplicando entonces el teorema de Gauss a la superficie esférica S de radio r tal que $R_1 < r < R_2$, se tendrá $\Phi_D(S) = 4\pi r^2 D = q_{\text{int,np}} = q$, de donde $D = Q/4\pi r^2$, o

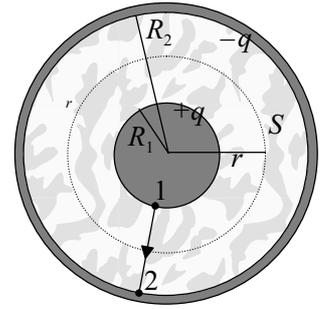


Figura 3.30. Condensador esférico.

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r,$$

y el campo eléctrico entre las armaduras estará dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \mathbf{u}_r.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras puede entonces calcularse como la circulación del campo eléctrico a lo largo del camino radial que une los puntos 1 y 2 de la Figura 3.30, es decir,

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r dr \\ &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right). \end{aligned}$$

La capacidad del condensador esférico está entonces dada por

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

3.26 Condensador plano-paralelo. El condensador plano-paralelo consiste en dos placas metálicas conductoras iguales y paralelas, de área A , separadas entre sí por una distancia d por una lámina de material aislante de permitividad relativa ε_r . Despreciando los efectos de borde (es decir, supuestas las dimensiones lineales de las armaduras muy grandes en comparación con su separación), determinar su capacidad.

Resolución

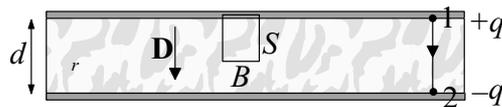


Figura 3.31. Condensador plano-paralelo.

Si introducimos cargas $+q$ y $-q$ en cada armadura, la capacidad puede determinarse como el cociente entre la carga $+q$ y la diferencia de potencial que adquieren. Despreciando efectos de borde, las cargas $+q$ y $-q$ se distribuyen con densidades uniformes $\sigma = q/A$ y $-\sigma = -q/A$ (Figura 3.31) en sus superficies internas (para que el campo eléctrico se anule en el interior de cada una de las armaduras). También ignorando los efectos de borde, el campo eléctrico y el desplazamiento eléctrico estarán dirigidos verticalmente hacia abajo. Tomando entonces la superficie cilíndrica vertical S de la Figura 3.31, se tiene $\Phi_D(S) = DB = q_{\text{int,np}} = \sigma B$, donde B es el área de la base de S y D el valor del desplazamiento eléctrico sobre dicha base. El desplazamiento eléctrico toma entonces el valor $D = \sigma = q/A$ en cualquier punto del dieléctrico, y el campo eléctrico vale entonces, en módulo, $E = q/(\varepsilon_0\varepsilon_r A)$. La diferencia de potencial entre las armaduras se puede calcular entonces como la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 de la Figura 3.31 por el camino indicado, obteniéndose

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E dr = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r A} \int_1^2 dr = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r A} d.$$

La capacidad resulta ser entonces

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d}.$$

3.27 Condensador cilíndrico. Determinar la capacidad de un condensador cilíndrico, formado por un conductor cilíndrico, de radio R_1 y longitud L , rodeado de otro conductor cilíndrico hueco, de radio interior R_2 , misma longitud L , y concéntrico con el primero, y entre los cuales se ha introducido un dieléctrico de permitividad dieléctrica ε_r . Ignorar los efectos de borde ($L \gg R_2 - R_1$).

Resolución

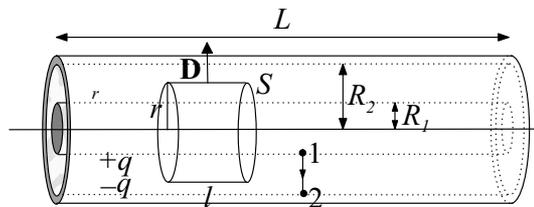


Figura 3.32. Condensador cilíndrico.

Procediendo como en los problemas anteriores, introducimos cargas $+q$ y $-q$ en ambas armaduras. Ignorando los efectos de borde, estas cargas se repartirán homogéneamente en la superficie del conductor cilíndrico y en la superficie interna del cilindro conductor hueco (Figura 3.32) con densidades lineales de carga $\lambda = q/L$ y $-\lambda = -q/L$. Ignorando también los efectos de borde, el campo eléctrico y el vector desplazamiento eléctrico serán radiales respecto del eje común del conjunto. Tomando entonces la superficie cilíndrica S de la Figura 3.32, de radio r y longitud l , el teorema de Gauss para el vector desplazamiento eléctrico afirma que $\Phi_D(S) = 2\pi r l D = q_{\text{int,np}} = \lambda l = ql/L$, de donde la magnitud del desplazamiento eléctrico está dada por $D = \lambda/(2\pi r) = q/(2\pi r L)$, o

$$\mathbf{D} = \frac{q}{2\pi r L} \mathbf{u}_\rho,$$

donde \mathbf{u}_ρ es el unitario radial respecto del eje de los cilindros, y el campo eléctrico entre las armaduras del condensador vendrá dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r L} \mathbf{u}_\rho.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras se puede calcular entonces como la circulación del campo eléctrico entre los puntos 1 y 2 de la Figura 3.32 por el camino señalado, esto es,

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

De aquí que la capacidad del condensador cilíndrico venga dada por

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}.$$

3.28 Las armaduras de un condensador plano paralelo tienen área A y están separadas por una distancia $2d$. Se dispone de dos tipos de material dieléctrico, de permitividades relativas ϵ_r y $2\epsilon_r$, que pueden disponerse entre las armaduras en las dos configuraciones mostradas en la Figura 3.33. ¿En qué disposición se consigue una mayor capacidad? (ignorar los efectos de borde).

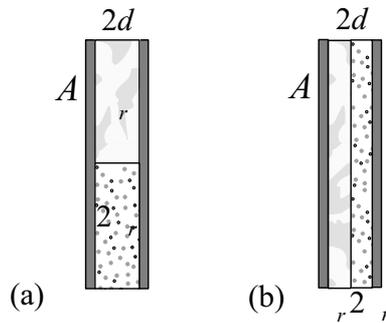


Figura 3.33. Condensadores plano-paralelos con dos dieléctricos distintos.

Resolución

En el caso (a), el condensador es equivalente al mostrado en la Figura 3.34(a), es decir a la asociación de dos condensadores en paralelo. Su capacidad puede entonces calcularse como la suma de las capacidades de los dos condensadores plano-paralelos con sus respectivas capacidades, esto es,

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0\epsilon_r A/2}{2d} + \frac{\epsilon_0 2\epsilon_r A/2}{2d} \Rightarrow C = \frac{3\epsilon_0\epsilon_r A}{4d}.$$

En el caso (b), nótese que la inserción de una plancha metálica en la superficie de separación entre los dos dieléctricos no cambia la capacidad. A su vez, ésta puede “desdoblarse” en dos, como se muestra en la Figura 3.34(b). El condensador es así equivalente a la asociación de dos en serie, y su capacidad vendrá dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{\epsilon_0\epsilon_r A} + \frac{d}{\epsilon_0 2\epsilon_r A},$$

de donde

$$C = \frac{2\epsilon_0\epsilon_r A}{3d}.$$

La capacidad en la configuración (a) es entonces mayor que en la configuración (b).

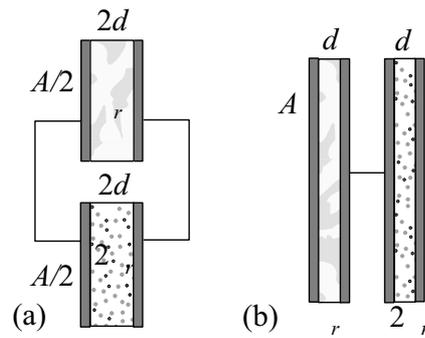


Figura 3.34. Equivalencias de los condensadores plano-paralelos de la Figura 3.33.

3.29 Se asocian en paralelo dos condensadores plano-paralelos idénticos y sin dieléctrico entre su armaduras. Se aplica cierta tensión V_0 entre los extremos de la asociación, retirándose la fuente de alimentación una vez cargados los condensadores. Posteriormente, se introduce un dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r entre las armaduras de uno de los condensadores, de modo que la mitad del condensador no alterado pasa al condensador modificado. Determinar la nueva diferencia de potencial entre los extremos de la asociación y el valor de la permitividad relativa del dieléctrico.

Resolución

Inicialmente, al aplicar una tensión V_0 , ambos condensadores adquieren cargas iguales q , puesto que tienen idéntica capacidad C [Figura 3.35(a)] por ser idénticos. Al retirar la fuente de tensión, la diferencia de potencial entre sus armaduras V_0 permanecerá, ya que los condensadores han quedado cargados. Al introducir el dieléctrico [Figura 3.35(b)] en uno de ellos, sin embargo, cambia su capacidad, y por tanto la capacidad de la asociación, y también la diferencia de potencial y las cargas en cada uno de ellos.

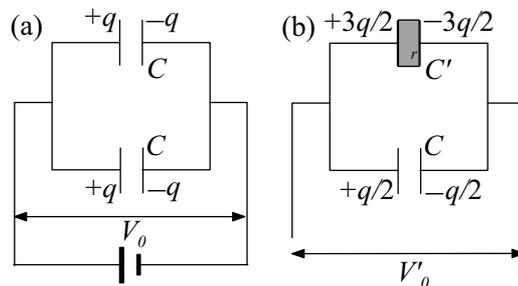


Figura 3.35. Dos condensadores en paralelo.

Si el condensador inalterado queda con la mitad de su carga, tendremos, comparando las situaciones inicial y final,

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{q/2}{V'_0},$$

de donde la nueva diferencia de potencial debe ser

$$V'_0 = \frac{V_0}{2}.$$

Por otro lado, la nueva capacidad del condensador con dieléctrico se verá aumentada en un factor ϵ_r ,

$$C' = \epsilon_r C,$$

y a su vez estará dada por el cociente entre su nueva carga, $3q/2$ y su nueva diferencia de potencial V' ,

$$C' = \frac{3q/2}{V_0/2} = 3C.$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\epsilon_r = 3.$$

3.30 Los dos condensadores de la Figura 3.36 están conectados a tierra y están descargados. Son iguales, salvo que en el número 2 el espacio entre sus armaduras está lleno de un dieléctrico de permitividad $\epsilon_r = 6$, y el número 1 no tiene ningún dieléctrico. El condensador 1 se carga a través de A con una carga Q . Una vez cargado se unen los puntos A y B . (a) Determinar la carga que adquiere cada condensador tras la conexión. (b) Comparar la energía electrostática del conjunto formado por los dos condensadores antes y después de conectarlos.

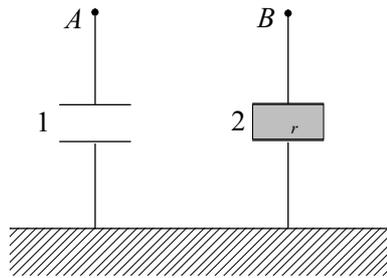


Figura 3.36. Dos condensadores conectados a tierra.

Resolución

(a) Al introducir una carga $+Q$ en la armadura superior del condensador 1, su armadura conectada a tierra se carga con $-Q$ por influencia. Al conectar los extremos A y B , la carga Q se reparte en los dos condensadores de acuerdo con su capacidad, es decir,

$$Q_1 = CV, \quad Q_2 = 6CV, \tag{3.45}$$

donde V es la diferencia de potencial entre las armaduras superiores y las inferiores de ambos condensadores, y se ha tenido en cuenta que la capacidad del condensador 2 es seis veces superior, por la inclusión del dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 6$, a la capacidad C del condensador 1. Dividiendo entre sí las dos ecuaciones en la Expresión (3.45), se tiene

$$Q_2 = 6Q_1. \tag{3.46}$$

Por otro lado, en la redistribución de cargas, ésta se conserva, de donde

$$Q_1 + Q_2 = Q. \tag{3.47}$$

De las Ecuaciones (3.46) y (3.47), se obtiene

$$Q_1 = \frac{1}{7}Q, \quad Q_2 = \frac{6}{7}Q.$$

(b) La energía electrostática antes de la conexión vendrá dada por

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C},$$

puesto que el único condensador cargado es el 1. Después de la conexión, en cambio,

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{(Q/7)^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{(6Q/7)^2}{6C} = \frac{1}{7} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

La energía electrostática después de la conexión es entonces 7 veces menor que antes de la conexión.

3.31 Entre los puntos A y B de la Figura 3.37 se aplica una diferencia de potencial de 100 V. Determinar la energía acumulada en cada condensador.

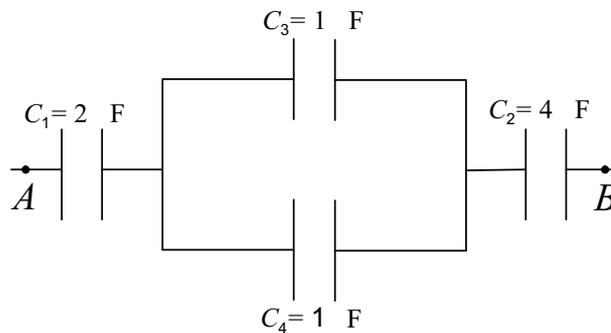


Figura 3.37. Asociación de condensadores.

Resolución

Debido a la diferencia de potencial entre A y B , en las armaduras izquierda del condensador 1 y la derecha del 2 se inducirán cargas $+Q$ y $-Q$, determinadas por la capacidad equivalente del conjunto,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3 + C_4} + \frac{1}{C_2} \implies C = \frac{4}{5} \mu\text{F},$$

es decir, $Q = C(V_A - V_B) = 80 \mu\text{C}$.

En la Figura 3.38 se muestra la distribución de cargas en los distintos condensadores. Como en la armadura derecha del condensador 1 la carga inducida es $-Q$, las armaduras izquierdas de los condensadores 3 y 4 tendrán, por conservación de la carga, una carga total $+Q$, que se reparte en $Q/2$ en el 3 y $Q/2$ en el 4, por ser sus capacidades iguales. Análogamente se deducen los valores de las cargas en el resto de las armaduras. Las energías electrostáticas acumuladas en cada condensador son entonces

$$U_{e,1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1} = 1600 \mu\text{J}, \quad U_{e,2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2} = 800 \mu\text{J},$$

$$U_{e,3} = \frac{1}{2} \frac{(Q/2)^2}{C_3} = 800 \mu\text{J}, \quad U_{e,4} = \frac{1}{2} \frac{(Q/2)^2}{C_4} = 800 \mu\text{J}.$$

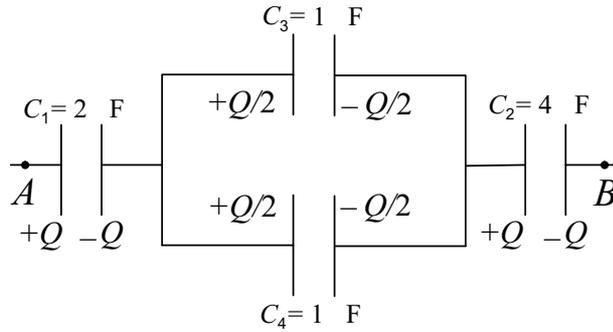


Figura 3.38. Cargas en cada condensador de la asociación.

3.32 Se considera un condensador plano-paralelo cuyas armaduras tienen longitud l , anchura a , y separación d , relleno con un bloque de dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r . Determinar la fuerza que se opone a que se extraiga el bloque cuando sólo quede una longitud x de dieléctrico entre las armaduras (Figura 3.39), en los casos en que (a) las armaduras del condensador se mantienen a una diferencial de potencial constante V [Figura 3.39(a)] por medio de una batería, (b) se ha introducido una carga Q [Figura 3.39(b)] en el condensador y se ha aislado posteriormente.

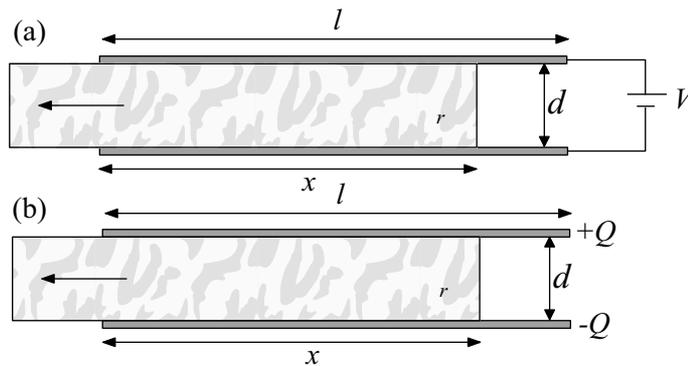


Figura 3.39. Condensador plano-paralelo del que se extrae su dieléctrico manteniendo (a) una diferencia de potencial constante, (b) una carga constante.

Resolución

La fuerza que se opone a la extracción del dieléctrico es la fuerza electrostática que ejerce el resto del sistema sobre él, fuerza que viene dada por la Ecuación (3.20) o, en este caso unidimensional, por $F_e = -dU_e/dx$, donde U_e es la energía electrostática del condensador. La resolución del problema requiere calcular U_e en función de la posición del bloque x .

(a) Si la diferencia de potencial se mantiene constante, es conveniente expresar la energía electrostática del condensador como

$$U_e = \frac{1}{2}C_1V^2 + \frac{1}{2}C_2V^2, \tag{3.48}$$

donde el primer término representa la energía electrostática del trozo de condensador que aún tiene dieléctrico, cuya capacidad es

$$C_1 = \frac{\epsilon_0\epsilon_rxa}{d}, \tag{3.49}$$

y el segundo término representa la energía electrostática del trozo sin dieléctrico, de capacidad

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0(l-x)a}{d}. \quad (3.50)$$

Al escribir las ecuaciones anteriores se han ignorado los efectos de borde en los extremos de las armaduras y en la transición entre dieléctrico y vacío. De la Ecuación (3.48), se obtiene la energía electrostática en función del desplazamiento x como

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 a V^2}{d} [(\varepsilon_r - 1)x + l],$$

y por tanto la fuerza ejercida por el sistema es

$$F_e = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 a V^2}{d} (\varepsilon_r - 1),$$

que es una fuerza constante hacia la derecha.

(b) Si por el contrario, la carga del condensador se mantiene constante en el proceso, es conveniente escribir la energía electrostática del condensador como

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2}, \quad (3.51)$$

donde Q_1 es la carga en el trozo de condensador con dieléctrico y Q_2 la carga en el trozo sin dieléctrico. Para determinar sus valores, tenemos en cuenta que, por conservación de la carga eléctrica,

$$Q_1 + Q_2 = Q. \quad (3.52)$$

Por otro lado, debe verificarse que $Q_1 = C_1 V'$ y $Q_2 = C_2 V'$ (siendo V' la diferencia de potencial entre las armaduras cuando el desplazamiento del bloque es x) y por tanto $Q_1/Q_2 = C_1/C_2$. Como además la relación entre las capacidades es, de las ecuaciones (3.49) y (3.50), $C_1/C_2 = \varepsilon_r x/(l-x)$, la relación entre las cargas es

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\varepsilon_r x}{l-x}. \quad (3.53)$$

Resolviendo las Ecuaciones (3.52) y (3.53) para Q_1 y Q_2 obtenemos

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_r x}{(\varepsilon_r - 1)x + l} Q \quad Q_2 = \frac{l-x}{(\varepsilon_r - 1)x + l} Q.$$

Sustituyendo estos valores de las cargas y los valores de las capacidades, dados por las Expresiones (3.49) y (3.50), en la Ecuación (3.51), obtenemos la energía electrostática en función del desplazamiento x como

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 a [(\varepsilon_r - 1)x + l]},$$

y finalmente la fuerza ejercida por el condensador como

$$F_e = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 a [(\varepsilon_r - 1)x + l]^2} (\varepsilon_r - 1),$$

fuerza que se dirige también hacia la derecha pero que depende ahora del trozo extraído.

3.33 Un sistema eléctrico está formado por dos chapas metálicas planas, paralelas y de área A muy grande, inmersas en un fluido de permitividad relativa ε_r . Estando las chapas conectadas a una pila ideal de fuerza electromotriz V y separadas una distancia D , se aumenta su separación muy lentamente aplicando una fuerza exterior hasta que su distancia es D' (Figura 3.40). Calcular (a) el aumento de energía del sistema, (b) el trabajo realizado por la fuerza exterior.

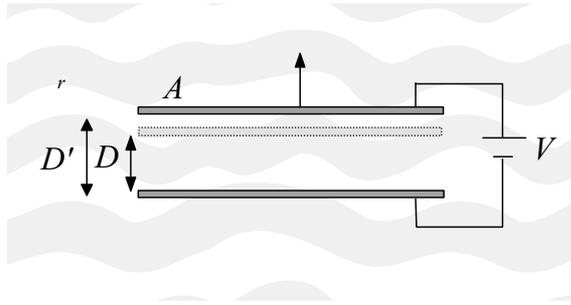


Figura 3.40. Ensanchamiento de un condensador plano-paralelo por una fuerza aplicada.

Resolución

(a) El aumento de energía del sistema está dado por

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} C' V^2 - \frac{1}{2} C V^2.$$

Como la capacidad inicial viene dada por $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r A / D$ y la final por $C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r A / D'$, se tiene

$$\Delta U_e = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A V^2}{2} \frac{D' - D}{D D'}.$$

(b) Si el movimiento de la armadura superior se realiza muy lentamente, puede asumirse que la fuerza exterior, F_{ext} , es equilibrada en cada momento por la fuerza F_e que ejerce el sistema sobre la armadura, que a su vez puede calcularse como $F_e = -dU_e/dx$ siendo U_e la energía electrostática expresada en función del desplazamiento x de la armadura superior respecto de la inferior. Para una distancia arbitraria x entre las armaduras, la energía electrostática está dada por

$$U_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A V^2}{x}.$$

Podemos escribir entonces

$$F_{\text{ext}} = F_e = -\frac{dU_e}{dx} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A V^2}{2x^2}.$$

El trabajo realizado por F_{ext} viene dado entonces por

$$W_{\text{ext}} = \int_D^{D'} F_{\text{ext}} dx = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A V^2}{2} \int_D^{D'} \frac{dx}{x^2} \Rightarrow W_{\text{ext}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A V^2}{2} \frac{D' - D}{D D'}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 3.34** Un conductor hueco A en equilibrio electrostático tiene una carga neta Q positiva. En su interior existe otro conductor B con carga neta nula. Razonar 1) Si la carga de A se sitúa toda en su superficie externa o, por el contrario, se reparte entre la superficie externa y la superficie interna. 2) Si después se conecta B a tierra, ¿seguirá B descargado o adquirirá carga eléctrica? 3) En el último caso, razónese el signo de la carga de B .

Solución:

- 1) Toda en la superficie externa. 2) Adquiere carga de tierra. 3) Dicha carga es negativa.

3.35 Se tiene un conductor esférico de radio R y con carga eléctrica $Q > 0$, rodeado de una corona esférica conductora de radios interior y exterior $2R$ y $3R$, respectivamente, concéntrica con el conductor esférico, y conectada a tierra. En el equilibrio electrostático, determinar el campo eléctrico en las distintas regiones del espacio. Determinar también la diferencia de potencial entre ambos conductores.

Solución:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \text{ para } R < r < 2R, \mathbf{E} = 0 \text{ en el resto de las regiones, } V_1 - V_2 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

3.36 Un cable de alta tensión está a un potencial $V = 2$ kV respecto de tierra y a una altura $h = 20$ m sobre la superficie de la tierra (Figura 3.41). Esta diferencia de potencial implica la existencia de un campo eléctrico \mathbf{E} entre el cable y la tierra, que supondremos vertical y uniforme. (a) Calcular el valor de este campo eléctrico. (b) Comprobar que la diferencia de potencial entre un punto situado a 2 m de altura y la superficie de la tierra es de 200 V. (c) Dar entonces una explicación al hecho experimental de que una persona (de 2 m de altura aproximadamente) paseando bajo el cable de alta tensión no se electrocute.

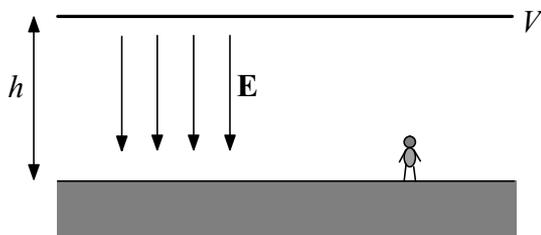


Figura 3.41. Paseando bajo un cable de alta tensión.

Solución:

(a) $E = 100$ V/m. (c) La persona es equipotencial.

3.37 Un cilindro hueco de material dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r , radio interior $R/2$, radio exterior R , y longitud infinita, ha sido cargado homogéneamente en todo su volumen con una densidad volumétrica de carga ρ . (a) Determinar las densidades volumétrica y superficial de cargas de polarización en el dieléctrico. (b) Comprobar que la carga total de polarización del dieléctrico por unidad de longitud es nula. (c) Determinar la diferencia de potencial entre un punto del eje del cilindro y otro que diste $2R$ de dicho eje.

Solución:

(a)

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho, \quad \sigma_p(R/2) = 0, \quad \sigma_p(R) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{3\rho R}{8},$$

(c)

$$V(0) - V(2R) = -\frac{3\rho R^2}{16\epsilon_0\epsilon_r} + \frac{\rho R^2}{8\epsilon_0\epsilon_r} \ln 2 - \frac{3\rho R^2}{8\epsilon_0} \ln 2.$$

3.38 En un cilindro macizo muy largo, de radio $R = 0,2$ m, se introduce una carga de densidad $\rho = 10^{-8}$ C/m³. Calcular la densidad superficial de carga en el caso de que el cilindro sea un conductor en equilibrio electrostático y en el caso de que sea dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 2$.

Solución:

$\sigma = 10^{-9}$ C/m² si es conductor, $\sigma = \sigma_p = 0,5 \times 10^{-9}$ C/m² si es dieléctrico.

- 3.39** En la Figura 3.42 se representa el sistema siguiente: una esfera de radio a cargada con una densidad volumétrica de carga $\rho = (\rho_0/a)r$, donde ρ_0 es una constante y r la distancia al centro; una corona esférica concéntrica con la esfera, de material dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r , de radios interior y exterior b y c , respectivamente; un conductor esférico hueco, también concéntrico, de radios interior y exterior d y e . Este conductor está cargado, pero el valor de la carga se desconoce, aunque se sabe que el campo eléctrico es nulo a distancias del centro $r > e$. Determinar a) la carga en el conductor y cómo esta carga está distribuida en el mismo, b) las densidades superficiales de polarización en la corona esférica dieléctrica, y c) la diferencia de potencial entre un punto a distancia a y otro a distancia e .

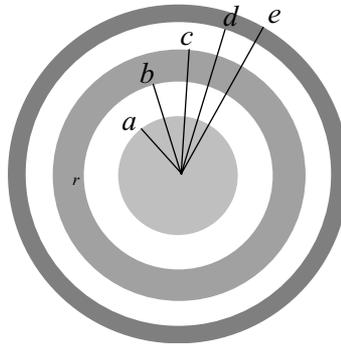


Figura 3.42. Esfera cargada rodeada de una corona esférica dieléctrica y una corona esférica conductora.

Solución:

- a) Carga del conductor $-\rho_0\pi a^3$, toda ella en la superficie interior.
b)

$$\sigma_p(b) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\rho_0 a^3}{4b^2}, \quad \sigma_p(c) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\rho_0 a^3}{4c^2}.$$

- c)

$$V(a) - V(e) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{d} \right) + \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_r \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

- 3.40** En un condensador esférico de radios R_1 y R_2 , determinar el potencial de ruptura (diferencia de potencial máxima aplicable entre sus armaduras sin que se produzca la ruptura dieléctrica) si la rigidez del dieléctrico es $E_{\max} = 20$ kV/mm.

Solución:

$$V_{\max} = 20R_1(R_2 - R_1)/R_2 \text{ kV } (R_1 \text{ y } R_2 \text{ expresados en milímetros}).$$

- 3.41** Entre las placas de un condensador plano-paralelo, de área muy grande A se inserta paralelamente un bloque, sin que contacte con las placas, cuyo área es también A y cuyo espesor es la mitad de la separación d entre las placas. Dicho bloque puede ser conductor o dieléctrico de permitividad ϵ_r . Determinar la capacidad en ambos casos.

Solución:

Si es conductor

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}.$$

Si es dieléctrico

$$C = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d(1 + \varepsilon_r)}.$$

- 3.42** Un condensador de capacidad $C_1 = 10 \mu\text{F}$ está cargado, siendo la diferencia de potencial entre sus armaduras $V_1 = 5000 \text{ V}$. Ambas armaduras se conectan a las de otro descargado y de capacidad $C_2 = 5 \mu\text{F}$. Calcular la energía electrostática de cada condensador antes y después de la conexión.

Solución:

Antes de la conexión

$$U_{e,1} = 125 \text{ J}, \quad U_{e,2} = 0 \text{ J}.$$

Después de la conexión

$$U_{e,1} = 55,55 \text{ J}, \quad U_{e,2} = 27,77 \text{ J}.$$

- 3.43** Un condensador de $1 \mu\text{F}$ y otro de $2 \mu\text{F}$ se conectan en paralelo a una línea de 1200 V . Calcular la carga de cada condensador y su voltaje. Posteriormente, los condensadores cargados se desconectan de la línea y ellos entre sí, y se vuelven a conectar por las armaduras de distinto signo formando un circuito. Calcular la carga final de cada uno y su voltaje.

Solución:

Cuando están en paralelo y en línea

$$q_1 = 12 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad q_2 = 24 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad V = 1200 \text{ V}.$$

Cuando están en circuito

$$q_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad q_2 = 8 \times 10^{-4} \text{ C}, \quad V_1 = 4000 \text{ V}, \quad V_2 = 4000 \text{ V}.$$

CORRIENTE CONTINUA Y CIRCUITOS

4

La corriente eléctrica es la carga eléctrica en movimiento. Las corrientes de forma genérica, se pueden clasificar en cuatro tipos: corrientes de conducción, corrientes de magnetización, corrientes de desplazamiento y corrientes de convección.

En la corriente de *conducción*¹, cargas eléctricas libres, llamadas portadores de la corriente, se mueven en un medio material en reposo y neutro en conjunto. El ejemplo más característico es la corriente en los metales, en la que sus electrones libres y cuasilibres (portadores) se desplazan respecto del metal en reposo, movidos por algún agente externo. Corrientes de conducción pueden darse también en electrólitos o en gases ionizados. Al contrario de las corrientes de conducción, las de *convección* se originan por el desplazamiento del propio medio, que está cargado. Desplazamientos de masas de líquidos y gases cargados por diversas causas (como diferencias de presión en la atmósfera) dan lugar a este tipo de corriente (por ejemplo, una nube). Las corrientes de *magnetización* están relacionadas con la magnetización de la materia (Capítulo 6). Las corrientes de *desplazamiento* (Capítulo 10) tienen que ver con el cambio de la polarización de un medio con el tiempo. El fenómeno más importante relacionado con las corrientes eléctricas es la aparición de un campo magnético (Capítulo 5 y siguientes) aunque el presente capítulo se centra en el estudio de la corriente eléctrica en sí, tratando exclusivamente con corrientes de conducción y, especialmente, con lo que se conoce como corriente continua.

4.1. VECTOR DENSIDAD DE CORRIENTE

Para caracterizar la corriente eléctrica se emplea el **vector densidad de corriente**, definido como

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv qn(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidades, es decir, la velocidad de los portadores de corriente en cada punto \mathbf{r} del material y en cada instante de tiempo t , q es la carga de cada portador (en el caso de un metal, $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$ C) y n el número de ellos por unidad de volumen.

Nótese que en el caso de portadores con carga q positiva, \mathbf{j} tiene la misma dirección y sentido que el movimiento de éstos, mientras que si los portadores son negativos, como en un metal, el

¹En ciertos textos se denominan corrientes reales o verdaderas.

sentido de \mathbf{j} es el contrario a su velocidad. Si, como en un electrólito o un gas ionizado, existen varios portadores, la densidad de corriente se escribe como

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_i q_i n_i(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t), \quad (4.2)$$

donde el índice i se refiere a los distintos tipos de portador.

La unidad del vector densidad de corriente en el SI es el $\text{Cs}^{-1}\text{m}^{-2}$. El culombio/segundo recibe el nombre de *amperio*, que se simboliza por A, y así la unidad de \mathbf{j} suele escribirse como Am^{-2} . El amperio se considera una unidad fundamental del SI de unidades, en lugar del culombio.²

4.2. INTENSIDAD DE CORRIENTE

Considérese una superficie S cualquiera, orientada (según se indica en la sección 1.2.1), en el material donde fluye la corriente eléctrica. Si ΔQ es la carga que atraviesa la superficie S en un tiempo pequeño Δt , la **intensidad de corriente** I a través de dicha superficie se define como la carga que atraviesa la superficie por unidad de tiempo, es decir,

$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \equiv \frac{dq}{dt}. \quad (4.3)$$

La intensidad de corriente es una magnitud instantánea, es decir, en general depende del tiempo. Su unidad en el SI es el amperio, de símbolo A.

La intensidad de corriente es de mayor utilidad en la práctica que la densidad de corriente, sobre todo para describir la corriente que circula por conductores filiformes (con forma de hilo). La importancia del vector densidad de corriente \mathbf{j} estriba en que permite determinar la intensidad de corriente I a través de cualquier superficie S , por medio de la expresión

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.4)$$

que indica que la intensidad de corriente a través de una superficie se puede calcular como el flujo de \mathbf{j} a través de dicha superficie. El sentido de $d\mathbf{S}$ viene marcado por la orientación de la superficie y así la intensidad puede resultar positiva o negativa dependiendo del signo del producto escalar $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$. De este modo, a través de un mismo dispositivo, la intensidad puede resultar positiva o negativa, dependiendo únicamente del sentido de $d\mathbf{S}$, y por tanto de la orientación de la superficie.

4.3. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD. APLICACIÓN A CORRIENTE CONTINUA

4.3.1. Ecuación de continuidad

Las distribuciones de carga eléctrica en el espacio se especifican por medio de la densidad de carga eléctrica ρ , y su movimiento por medio del vector densidad de corriente \mathbf{j} . Atendiendo al principio de conservación de la carga eléctrica, debe existir una relación entre ρ y \mathbf{j} y que debe ser verificada por toda distribución y corriente de cargas existentes en la naturaleza. Dicha relación se denomina **ecuación de continuidad**,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4.5)$$

²Para definir el amperio como unidad fundamental es necesario recurrir al concepto de fuerza magnética (Capítulo 5), de ahí que en este apartado se introduzca como unidad derivada del culombio.

ecuación puntual que verifica toda densidad de corriente y densidad de carga. La expresión integral de esta ecuación, para una superficie cerrada y , por tanto, orientada hacia fuera, es

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}, \quad (4.6)$$

que expresa que la intensidad a través de una superficie cerrada es igual a la disminución en la unidad de tiempo de la carga contenida en el volumen encerrado por la misma.

4.3.2. Ecuación de continuidad en corriente continua

La corriente eléctrica se dice **continua, estacionaria, o constante** si ninguna de las magnitudes definidas anteriormente depende del tiempo: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, y por tanto, la intensidad I que atraviesa cualquier superficie, dada por el flujo de \mathbf{j} , es también independiente del tiempo.

Para la corriente continua $\partial\rho/\partial t = 0$ y la ecuación de continuidad afirma que

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (4.7)$$

es decir, el vector densidad de corriente es solenoidal: sus líneas vectoriales o de corriente no tienen fuentes ni sumideros. Si dichas líneas han de estar contenidas en un volumen finito del espacio, han de ser, por tanto, curvas cerradas. Expresada en forma integral resulta que

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (4.8)$$

4.3.3. Ecuación de continuidad en un hilo con corriente continua

La ecuación de continuidad suele expresarse particularizada a la corriente que circula por un hilo conductor. Considérese el segmento de hilo entre dos secciones rectas, de áreas S_1 y S_2 , en general diferentes, como se muestra en la Figura 4.1.

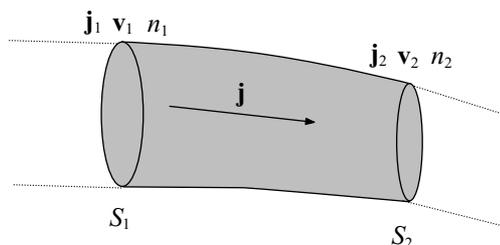


Figura 4.1. Esquema para la deducción de la ecuación de continuidad en un hilo metálico.

La intensidad saliente en el volumen delimitado por dichas secciones y la superficie lateral es, suponiendo \vec{j} paralelo al hilo y uniforme en cada sección,

$$I(t) = 0 = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{LAT}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -j_1 S_1 + j_2 S_2 = -e(n_2 v_2 S_2 - n_1 v_1 S_1), \quad (4.9)$$

en la que la tercera de las integrales se anula, por ser $d\mathbf{S}$ perpendicular a \mathbf{j} (tangente al hilo) en la superficie lateral. Despejando se obtiene que

$$j_1 S_1 = j_2 S_2, \quad (4.10)$$

ecuación de continuidad para un hilo con corriente continua, y que expresa la igualdad de la intensidad en todas las secciones del hilo. En el caso frecuente de que la densidad de electrones sea igual en todas las secciones del hilo, $n_1 = n_2$, la ecuación de continuidad se reduce a

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (4.11)$$

que afirma que la velocidad de los electrones en cada sección del hilo es inversamente proporcional a su sección. Esta ecuación es análoga a la que puede encontrarse en mecánica de fluidos y que expresa la relación inversa entre la velocidad del fluido en una sección y el área de ésta.

4.4. LEY DE OHM. CONDUCTIVIDAD Y RESISTIVIDAD.

Se encuentra experimentalmente que, en la mayoría de los materiales conductores, incluyendo metales, electrólitos y gases ionizados, la corriente es proporcional al campo eléctrico aplicado, de su misma dirección y sentido, y nula cuando éste no existe. Más precisamente,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} . \quad (4.12)$$

Esta relación se denomina **ley de Ohm**, y los conductores que la verifican *conductores óhmicos*.³

La constante de proporcionalidad σ que aparece en la ley de Ohm se llama **conductividad**, y su inversa

$$\rho = \frac{1}{\sigma} , \quad (4.13)$$

resistividad. La unidad de la resistividad, de acuerdo con la ley de Ohm [Ecuación (4.12)] y con la Ecuación (4.13), es VA^{-1}m . El *ohmio* (Ω) se define como VA^{-1} , escribiéndose entonces la unidad de resistividad como Ωm . Las de la conductividad son evidentemente $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Al Ω^{-1} se le denomina *siemens* (S).

Los valores de conductividad y resistividad son propios de cada material, variando además de manera significativa con la temperatura. Esta variación suele expresarse empíricamente por

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots] , \quad (4.14)$$

donde T es la temperatura y ρ_0 la resistividad a $T = T_0$. El coeficiente α se denomina coeficiente de temperatura⁴ y se mide en K^{-1} .

Cuando la disposición de los átomos en el material se mantiene de una forma regular en el espacio, la resistividad depende de la dirección en que se aplica el campo eléctrico. Tal es el caso de los sólidos cristalinos, los cuáles se comportan de forma anisótropa frente a una excitación externa. Para ellos, la ley de Ohm (4.12) debe sustituirse por la expresión $\mathbf{j} = \bar{\sigma} \mathbf{E}$, donde $\bar{\sigma}$ representa el tensor de segundo orden denominado tensor de conductividad eléctrica. Para otros materiales, la resistividad y la conductividad no dependen únicamente del material y su temperatura, sino que dependen también del propio campo aplicado. Estos materiales son conductores **no lineales**, y la ley de Ohm (4.12) debe sustituirse por $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E})\mathbf{E}$.

4.5. CONDUCTOR FILIFORME CON CORRIENTE CONTINUA. RESISTENCIA

Consideremos ahora un conductor óhmico, con forma de hilo, de sección S y resistividad ρ no necesariamente constantes a lo largo del mismo, sometido a una diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre dos secciones de éste. De aquí, la existencia de un campo eléctrico estático en el hilo, en el sentido de los potenciales decrecientes y, según la ley de Ohm, una corriente continua en el mismo sentido. El vector densidad de corriente \mathbf{j} puede suponerse aproximadamente perpendicular y uniforme en cada sección recta del hilo (Figura 4.2).

³El campo \mathbf{E} que aparece en la expresión representa la fuerza por unidad de carga independientemente de que su origen sea o no electrostático y se representa en ocasiones como \mathbf{E}_{ef} . En el caso de que el origen sea únicamente electrostático, como ocurre en un conductor, será necesario mantener éste fuera del equilibrio mediante dispositivos adecuados (generadores) para que el campo sea no nulo.

⁴En los apéndices se presenta una tabla con valores de resistividad y coeficiente de temperatura de algunos materiales.

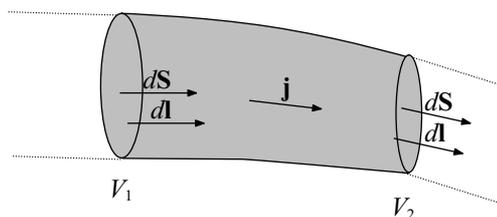


Figura 4.2. Orientación de superficies y sentido de recorrido para la aplicación de la ley de Ohm a un conductor filiforme.

La **ley de Ohm** aplicada al conjunto de puntos de dicho hilo conduce a que

$$V_1 - V_2 = RI, \quad (4.15)$$

lo que indica que la diferencia de potencial (caída de tensión) entre dos puntos de un conductor filiforme es proporcional a la intensidad que circula por él. La constante de proporcionalidad $R \geq 0$ es una propiedad de cada conductor, cuyo valor es

$$R = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}, \quad (4.16)$$

y se denomina **resistencia eléctrica** del objeto filiforme, que depende únicamente de la resistividad (y de aquí de la temperatura) del material con que está hecha, y de su forma y dimensiones. Si como es frecuente, la resistividad y la sección no varían a lo largo del hilo, la resistencia, de la Ecuación (4.16), resulta ser

$$R = \frac{\rho L}{S}, \quad (4.17)$$

siendo L la longitud del hilo. La resistencia de un hilo de sección uniforme aumenta, por tanto, con su resistividad y longitud y disminuye al aumentar su sección.

Para poder aplicar correctamente la Expresión (4.15), establecido un sentido de circulación dI para calcular la diferencia de potencial (del punto 1 al 2 en la Figura 4.2), el vector dS normal a la sección de conductor, que se emplea en el cálculo de I , se debe tomar en el mismo sentido que dI .⁵ Si el sentido de circulación escogido, determinado por dI , fuese contrario al vector densidad de corriente eléctrica, la intensidad y la diferencia de potencial calculadas tendrían signo negativo.

4.6. POTENCIA QUE SUMINISTRA EL CAMPO ELÉCTRICO. EFECTO JOULE

En un conductor filiforme sometido a una diferencia de potencial $V_1 - V_2 (> 0)$, los portadores se están desplazando bajo la acción de un campo eléctrico en el sentido de 1 a 2. La fuerza electrostática está por tanto realizando un trabajo sobre los portadores, suministrando el campo eléctrico una **potencia**

$$P = (V_1 - V_2)I \quad (4.18)$$

a los portadores entre dos secciones 1 y 2 del conductor. Ahora bien, en una corriente estacionaria la energía de los portadores contenidos entre 1 y 2 no varía en el tiempo. Por lo tanto, los portadores deben estar, al mismo tiempo, perdiendo la energía suministrada por el campo eléctrico, cediéndola constantemente al medio (la red iónica en un metal) a través de los choques con los átomos de la red. La potencia perdida por las cargas libres debido a este hecho es, aplicando la ley de Ohm,

$$P = (V_1 - V_2)I = RI^2. \quad (4.19)$$

⁵Si el vector dS se hubiera tomado en sentido contrario a dI , la ley de Ohm (4.15) se convierte en $V_1 - V_2 = -RI$.

Esta energía, al ser absorbida por los iones positivos del metal, se transforma en agitación térmica de éstos (vibraciones alrededor de sus posiciones de equilibrio), lo que a nivel macroscópico se manifiesta como un incremento de temperatura del metal. Si el metal no está térmicamente aislado, la energía por unidad de tiempo P se transfiere en forma de calor al medio circundante. Este fenómeno se denomina **efecto Joule**.

El efecto Joule es el fundamento de los calentadores eléctricos, planchas, estufas. . . Si la temperatura de la resistencia llega a ser suficientemente alta, se pondrá incandescente, emitiendo luz visible, lo cual es el fundamento de las bombillas eléctricas (en este caso RI^2 incluye también la energía disipada como energía luminosa o electromagnética). Si el conductor tiene un punto de fusión no muy alto, se fundirá al calentarse: ésta es la base de los fusibles térmicos que se utilizan para proteger aparatos eléctricos de subidas bruscas de tensión.

4.7. GENERADORES DE CORRIENTE CONTINUA

4.7.1. Fuerza electromotriz de un generador

Para mantener una corriente continua en el conductor filiforme es necesario mantener una diferencia de potencial $V_1 > V_2$ entre sus extremos. Para que realmente circule la corriente, es además necesario hacer coincidir los extremos, constituyendo un *circuito* (recuérdese que las líneas vectoriales de \mathbf{j} en corriente continua son cerradas). Esa es la misión del **generador eléctrico**, que permite el paso de la corriente y mantiene la diferencia de potencial, evitando la llegada al equilibrio. El generador produce campos de origen no electrostático debido a campos magnéticos variables, al movimiento de cargas en presencia de campos magnéticos, a diferencia de concentraciones...

Considérese un circuito en el que se incluya un generador, en primer lugar abierto (por medio de un interruptor), de modo que no circule corriente. En esta situación el generador se caracteriza por un extremo o *borne positivo* a mayor potencial V_1 , y otro extremo o *borne negativo* a menor potencial V_2 . La diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que mantiene a circuito abierto es su **fuerza electromotriz** \mathcal{E} , abreviadamente f.e.m.,

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E} \quad (\text{a circuito abierto}). \quad (4.20)$$

Por esta razón, la fuerza electromotriz también se denomina voltaje o tensión a circuito abierto. Es una cantidad estrictamente positiva que se mide en voltios (V).

Cuando el circuito está cerrado, y circula cierta corriente de intensidad I (Figura 4.3) siempre *saliendo por el borne positivo*, la diferencia de potencial entre sus bornes es menor que la fuerza electromotriz y de valor

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E} - rI. \quad (4.21)$$

La cantidad $r > 0$, cuya unidad es el ohmio, se denomina **resistencia interna** del generador. Un generador se dice ideal si $r = 0$; la diferencia de potencial entre bornes es, entonces, $V_1 - V_2 = \mathcal{E}$, independientemente de que circule corriente o no.

Analicemos el significado físico de la fuerza electromotriz. En la Figura 4.3 puede verse que en el generador hay dos campos eléctricos: \mathbf{E} debido a las cargas en los bornes (electrostático) y \mathbf{E}_{ns} debido a otras causas (no electrostático). La fuerza resultante sobre una carga q es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ns})$, por lo que a $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ns}$ se le denomina campo efectivo \mathbf{E}_{ef} . La fuerza electromotriz (f.e.m.) de una línea cerrada es la circulación del campo efectivo \mathbf{E}_{ef} a lo largo de dicha línea

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.22)$$

e igual únicamente a la circulación del campo no electrostático \mathbf{E}_{ns} por ser nula la circulación del campo electrostático \mathbf{E} a lo largo de una línea cerrada. Considerando una línea cerrada que

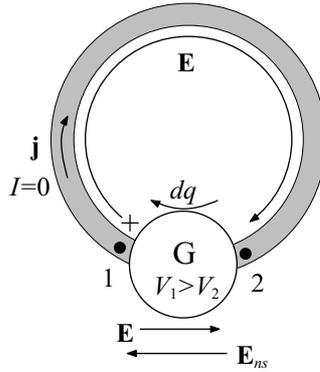


Figura 4.3. Esquema del comportamiento de un generador.

incluya únicamente como fuente de campo no electrostático al generador (como, por ejemplo, en la Figura 4.3), dicho campo estará sólo contenido entre los bornes del dispositivo. Así resulta que para un generador

$$\mathcal{E} = \int_{\text{gen}} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} , \quad (4.23)$$

resultado positivo si se circula en el sentido del campo no electrostático y, por tanto, de la corriente. Este resultado se conoce como f.e.m. del generador y representa el trabajo por unidad de carga realizado por una fuerza que lleva los portadores del polo negativo al polo positivo, venciendo el campo electrostático interno del generador. Es equivalente, por tanto, a la energía suministrada por el generador por unidad de carga circulante. Si una carga dq de portadores atraviesa el generador del borne negativo al positivo (de 2 a 1, Figura 4.3), realizando el generador un trabajo dW_G , la fuerza electromotriz es entonces

$$\mathcal{E} \equiv \frac{dW_G}{dq} . \quad (4.24)$$

Un generador ideal es aquél en que este trabajo $dW_G = dq\mathcal{E}$ se invierte íntegramente en aumentar la energía del dq . Puesto que dicho dq pasa del punto 2 de menor potencial al 1 de mayor potencial, este aumento es $dQ(V_1 - V_2)$. De aquí que

$$dq\mathcal{E} = dq(V_1 - V_2) \longrightarrow \mathcal{E} = (V_1 - V_2) \quad (\text{generador ideal}), \quad (4.25)$$

como se dijo anteriormente.

En los generadores reales, del trabajo $dq\mathcal{E}$ desarrollado por el generador, una parte se pierde en el propio generador, y el resto se invierte en aumentar la energía del dq a su paso por el generador, es decir,

$$dq\mathcal{E} = dq(V_1 - V_2) + \text{pérdidas} \longrightarrow V_1 - V_2 = \mathcal{E} - rI \quad (\text{generador real}). \quad (4.26)$$

Las pérdidas por unidad de carga están modelizadas por rI .

4.7.2. Potencia suministrada por un generador

La energía generada en la unidad de tiempo es

$$P_{\text{generada}} = \frac{dq}{dt} \mathcal{E} = \mathcal{E}I , \quad (4.27)$$

y puesto que $\mathcal{E} = V_1 - V_2 + rI$,

$$P_{\text{generada}} = \mathcal{E}I = (V_1 - V_2)I + rI^2 . \quad (4.28)$$

El término rI^2 representa la parte de la potencia generada que se disipa en el propio generador, mientras que el término $(V_1 - V_2)I$ corresponde a la potencia realmente suministrada al circuito (potencia en bornes),

$$P_{\text{suministrada}} = (V_1 - V_2)I = \mathcal{E}I - rI^2 \quad (4.29)$$

4.8. MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA

4.8.1. Fuerza contraelectromotriz

En los circuitos se suelen incluir otros elementos, que toman energía eléctrica del circuito para transformarla en otros tipos de energía. Estos dispositivos son la base de la mayor parte de las aplicaciones técnicas de la corriente eléctrica. Ejemplos son los motores eléctricos, que producen energía mecánica, o una pila recargándose, que acumula energía “química”. Nos referiremos a ellos con el nombre genérico de **motores**.

Un motor tiene un borne positivo y otro negativo. La corriente siempre *entra por el borne positivo*. Un motor se caracteriza por su **fuerza contraelectromotriz** \mathcal{E} (f.c.e.m.), que es la energía que el motor transforma (en energía mecánica, química...) por cada unidad de carga circulante, coincidente con la circulación del campo no electrostático en el interior del motor. También es una magnitud positiva que se mide en voltios.

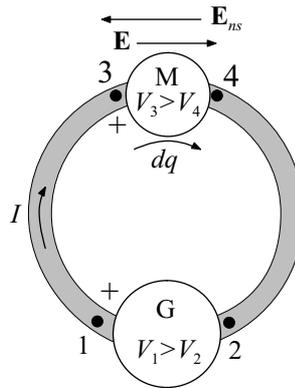


Figura 4.4. Esquema del comportamiento de un motor.

Si una carga dq circula por el motor de 3 a 4 (Figura 4.4), pierde una energía $dq(V_3 - V_4)$ (por pasar de un punto a otro de menor potencial). Un motor ideal transforma íntegramente esta energía: $dW_{\text{transf}} = dq\mathcal{E}$. De aquí que

$$dq(V_3 - V_4) = dq\mathcal{E} \longrightarrow V_3 - V_4 = \mathcal{E} \quad (\text{motor ideal}). \quad (4.30)$$

La diferencia de potencial entre los bornes 3 y 4 de un motor ideal coincide con la fuerza contraelectromotriz.

En los motores reales sólo parte de la energía $dq(V_3 - V_4)$ es transformada por el motor y otra parte se pierde en su interior, es decir,

$$dq(V_3 - V_4) = dq\mathcal{E} + \text{pérdidas} \longrightarrow V_3 - V_4 = \mathcal{E} + rI \quad (\text{motor real}), \quad (4.31)$$

donde se ha supuesto, como ocurre en la mayor parte de los motores, que las pérdidas por unidad de carga son proporcionales a la intensidad. La caída de potencial entre los bornes de un motor real es, por tanto, mayor que su fuerza electromotriz. Obsérvese que el borne positivo de un motor está siempre a mayor potencial. La cantidad r se denomina **resistencia interna del motor** y se mide en ohmios.

4.8.2. Potencia transformada por un motor

Como se ha visto, la energía transformada por un motor cuando circula una carga dq es $dq\mathcal{E}$, y por tanto la energía transformada por unidad de tiempo es

$$P_{\text{transformada}} = \frac{dq}{dt}\mathcal{E} = \mathcal{E}I, \tag{4.32}$$

y puesto que $\mathcal{E} = (V_3 - V_4) - rI$,

$$P_{\text{transformada}} = \mathcal{E}I = (V_3 - V_4)I - rI^2. \tag{4.33}$$

El término $(V_3 - V_4)I$ es la potencia consumida o extraída del circuito (o potencia en bornes),

$$P_{\text{consumida}} = (V_3 - V_4)I = \mathcal{E}I + rI^2 \tag{4.34}$$

La potencia transformada es menor que la extraída del circuito en la cantidad rI^2 , que representa una potencia disipada en el propio motor por efecto Joule.

4.9. LEY DE OHM EN UN CIRCUITO

Considérese un circuito formado por varios generadores y motores, de fuerzas electromotrices y contraelectromotrices \mathcal{E}_i y \mathcal{E}'_i y resistencias internas r_i , unidos por medio de conductores de resistencias R_i , como el de la Figura 4.5. El símbolo $\sim\sim\sim$ representa la resistencia de un tramo del circuito, que incluye la del hilo conductor y la de cualquier otro dispositivo que se caracterice, eléctricamente, por una resistencia. El símbolo $|$ se utiliza para aparatos polarizados (generadores y motores). El trazo más largo representa el borne o polo positivo y el trazo menor corresponde al borne negativo.

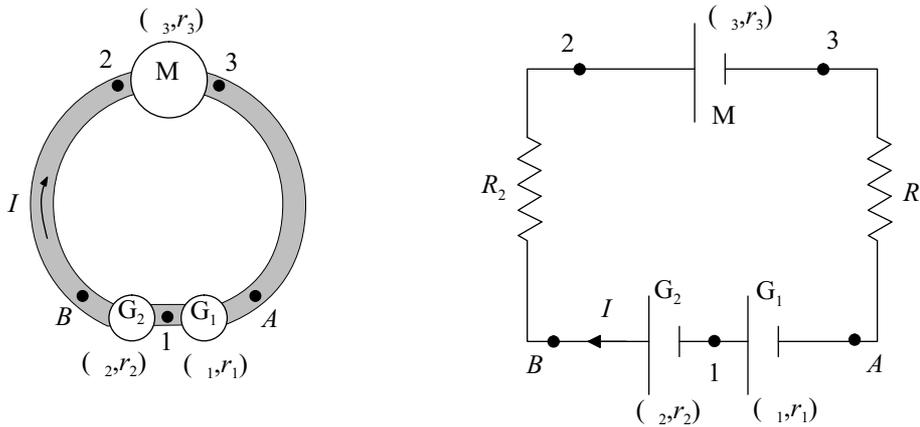


Figura 4.5. Ejemplo de un circuito simple.

Si se calcula la diferencia de potencial, siguiendo el sentido de la corriente, empezando y terminando en el mismo punto, se obtiene **la ley de Ohm para un circuito** que establece que

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i, \tag{4.35}$$

y permite determinar la intensidad I que circula. Debe observarse que la f.e.m. de los generadores se introduce en la fórmula con signo positivo y la f.c.e.m. de los motores con signo negativo. El término $\sum_i R_i$ incluye todas las resistencias del circuito, incluidas las internas de los generadores

y motores. Si la intensidad saliese negativa, el montaje sería incorrecto para los valores de f.e.m. dados y el motor o los motores no funcionarían⁶.

En la práctica existen dispositivos, denominados reversibles, que pueden funcionar indistintamente como generadores o motores. Salvo que se especifique lo contrario, de ahora en adelante se supondrá que todos los dispositivos presentes en los circuitos, como el de la Figura 4.5, son reversibles. De esta forma, al no saberse cuáles actúan realmente como generadores, se desconoce también el sentido de la corriente. Para aplicar la ley de Ohm en este caso, debe asignarse un sentido arbitrario a la corriente, indicado por la flecha de la Figura 4.5. Las f.e.m. se introducen con signo positivo si el dispositivo se comporta como generador en el sentido supuesto de la corriente, y con signo negativo, si se comporta como motor en el sentido supuesto. Al calcular la intensidad, si ésta resultase positiva, el sentido asignado es el correcto y los dispositivos funcionarían tal como se habían considerado; si resultase negativa, el sentido de la corriente es contrario al asignado, los supuestos generadores son realmente motores, y viceversa.

Si en la ley de Ohm, representamos por \mathcal{E}_i las f.e.m. de los generadores y por \mathcal{E}'_i las f.c.e.m. de los motores, y multiplicamos en ambos miembros por la intensidad I que recorre el circuito, resulta, despejando adecuadamente,

$$\sum_i \mathcal{E}_i I = \sum_i \mathcal{E}'_i I + \sum_i R_i I^2 . \quad (4.36)$$

Esta ecuación expresa el principio de conservación de la energía en un circuito de corriente continua, esto es, que la energía generada en la unidad de tiempo se invierte parte en energía transformada en los motores y parte en energía disipada en forma de calor.

4.10. LEY DE OHM EN UNA RAMA

Considérese una porción de circuito, como la limitada por los puntos A y B de la Figura 4.5, a la que se denomina rama⁷. Establezcamos un sentido arbitrario $d\mathbf{l}$ de recorrido de la rama, por ejemplo desde A hacia B . Se obtiene que

$$V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I . \quad (4.37)$$

Esta expresión suele denominarse **ley de Ohm en una rama** y puede aplicarse a cualquier trozo de un circuito. En $\sum_i R_i$ deben incluirse todas las resistencias del circuito, incluidas las internas de generadores y motores.

Obsérvese que el sentido de recorrido del circuito (marcado por $d\mathbf{l}$) no tiene por qué coincidir con el sentido de la corriente. Por ello resulta conveniente establecer un criterio de signos para \mathcal{E}_i y para I en función únicamente de $d\mathbf{l}$, que es el mostrado en la Figura 4.6. La f.e.m. es positiva

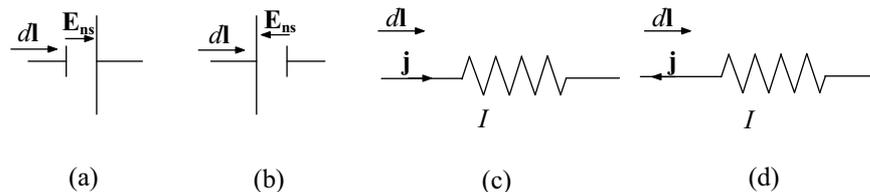


Figura 4.6. Criterio de signos para aplicar la ley de Ohm en una rama.

cuando en la circulación se entra por el polo negativo [Figura 4.6(a)], esto es, en la expresión

⁶Realmente el motor o los motores podrían funcionar a un régimen inferior, con un valor de f.e.m. menor que el nominal.

⁷En redes eléctricas, una rama es la porción de red entre dos nudos, unión de tres o más conductores.

$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l}$, \mathbf{E}_{ns} y $d\mathbf{l}$ tienen el mismo sentido. Y la intensidad es positiva cuando se circula en el mismo sentido de la corriente, esto es, \mathbf{j} y $d\mathbf{l}$ (y por tanto \mathbf{j} y $d\mathbf{S}$ en la expresión $I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$)⁸ tienen el mismo sentido [Figura 4.6(c)].

Multiplicando en ambos miembros de la Ecuación (4.37) por la intensidad I que atraviesa la rama y despejando adecuadamente, se obtiene

$$(V_B - V_A)I = \sum_i \mathcal{E}_i I - \sum_i R_i I^2, \quad (4.38)$$

que indica que la energía suministrada por una rama al resto del circuito [si $(V_B - V_A)I > 0$] o absorbida de él [si $(V_B - V_A)I < 0$], es la diferencia entre la generada por los generadores de la rama y la consumida en las resistencias y los motores de la misma.

4.11. REDES DE CORRIENTE CONTINUA

Hasta ahora se ha considerado únicamente un circuito simple, esto es, todos los elementos del circuito están recorridos por una misma intensidad, al estar conectados uno a continuación de otro (conexión en serie), hasta cerrar el circuito. Considérese ahora una **red** de conductores en la que se incluyen también dispositivos reversibles, tipo generador o motor. Se denomina **nudo** al punto donde concurren tres o más conductores, **rama** a la porción de circuito comprendido entre dos nudos consecutivos y **mall**a a cualquier trayectoria cerrada en la red, sin pasar dos veces por la misma rama.

4.11.1. Leyes de Kirchhoff

El problema básico de la teoría de redes es determinar las intensidades que circulan por cada rama de la red. Para ello, se numeran los nudos y las ramas de la red, y se asigna un sentido arbitrario a la corriente⁹ en cada rama, denominando I_i a la intensidad por la rama i y R_i a la resistencia total de dicha rama, incluyendo las resistencias internas de generadores y motores. Cualquier problema en una red puede resolverse de manera sistemática, sin más que aplicar dos reglas conocidas como **leyes de Kirchhoff**:

1. (*Ley de nudos*). La suma algebraica de las corrientes que circulan por un nudo es cero,

$$\sum_i I_i = 0.$$

2. (*Ley de mallas*). La suma algebraica de las diferencias de potencial entre los extremos de las ramas que componen una malla es cero,

$$\sum_i d.d.p._i = 0.$$

Como la diferencia de potencial en cada rama de la malla puede expresarse como $d.d.p._i = R_i I_i - \sum_i \mathcal{E}_i$, en donde $\sum_i \mathcal{E}_i$, representa la suma de las f.e.m., con su signo, de la rama i , se

⁸Debe recordarse que la orientación de $d\mathbf{S}$ es arbitraria y, para aplicar la ley de Ohm en la forma de la Expresión (4.15) ($V_1 - V_2 = RI$) debe tomarse en el mismo sentido que $d\mathbf{l}$. Podría haberse tomado un criterio alternativo para el cual la flecha no indicase el sentido de \mathbf{j} sino de $d\mathbf{S}$. En este caso, habría que introducir el término RI como positivo cuando coinciden los sentidos de $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$, y como negativo ($-RI$) cuando los sentidos son contrarios, tal como se comentó en la Sección 4.5. Una intensidad negativa al calcular un resultado indicaría que \mathbf{j} tiene sentido contrario al dibujado para $d\mathbf{S}$.

⁹Alternativamente, la flecha de cada rama puede indicar el sentido de $d\mathbf{S}$.

puede escribir que, en una malla, la suma *algebraica* de las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en las resistencias, es decir,

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i .$$

La primera de las leyes es consecuencia inmediata de la no acumulación de carga en el interior de una superficie cerrada alrededor de un nudo, en corriente continua. El número de ecuaciones independientes que se pueden obtener a partir de la primera ley es una menos que el número de nudos existentes en la red.

La segunda ley es consecuencia inmediata de que la circulación del campo electrostático a lo largo de una línea cerrada es cero. El criterio de signos es el indicado anteriormente en la Figura 4.6. Mediante la segunda ley de Kirchhoff, y en adición a las de la primera ley, se podrán obtener las ecuaciones independientes necesarias hasta llegar al número de ramas existentes en la red. Al seleccionar las mallas para completar el número de ecuaciones, todas las ramas deberán escogerse al menos en una ocasión. Al obtener los resultados, y dado que no es posible conocer a priori los sentidos de las corrientes, si una intensidad saliese negativa indicaría que el sentido asignado a la corriente era contrario al real.¹⁰

4.11.2. Método de las corrientes de malla. Regla de Maxwell

Las leyes de Kirchhoff conducen a un número de ecuaciones suficientemente elevado para dificultar en ocasiones el cálculo, si no se dispone de herramientas adecuadas. La regla de Maxwell define un método con un menor número de ecuaciones para calcular las intensidades por una red. El método se basa en la hipótesis (de cálculo) de que cada malla j es recorrida por cierta intensidad i_j en todas sus ramas, denominada **intensidad de malla**. El número de mallas a considerar coincide con las definidas siguiendo la segunda ley de Kirchhoff. Al aplicar las leyes de Kirchhoff a dichas mallas, asignando signo positivo a la intensidad de malla siguiendo el sentido de recorrido de la misma, se obtiene un conjunto de tantas ecuaciones (N) como mallas, del tipo

$$\mathcal{E}_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} i_j . \quad (4.39)$$

La matriz de resistencias R_{ij} , que incluye las resistencias internas de generadores y motores, es una matriz simétrica en la que un elemento R_{ii} de la diagonal principal es la suma de todas las resistencias de la malla i , mientras un elemento R_{ij} , $i \neq j$, es la suma de las resistencias comunes a las mallas i y j , con signo positivo si los sentidos de $d\mathbf{l}$ coinciden para ambas mallas y con signo negativo, si los sentidos son contrarios. Las \mathcal{E}_i y las i_j constituyen vectores columna. Los signos para \mathcal{E}_i son los indicados en el criterio de signos de la Figura 4.6. Las intensidades de malla i_j son las incógnitas a obtener, introducidas siempre con signo positivo. Las intensidades reales I_i por cada rama se obtienen a partir de las intensidades de malla como la suma o diferencia de las intensidades de malla que recorren dicha rama.

4.12. RED PASIVA. EQUIVALENCIA

Se denomina **red pasiva** en corriente continua a una red constituida sólo por resistencias.

Consideremos una red pasiva cualquiera (Figura 4.7) y dos de sus puntos A y B . Al establecer una diferencia de potencial $V_A - V_B$ entre ellos, por el punto A entra una cierta intensidad de corriente I , y sale la misma intensidad I por el punto B . Se denomina **resistencia equivalente**

¹⁰Si se sigue el criterio alternativo de que las flechas indiquen el sentido de $d\mathbf{S}$, una intensidad negativa indica que la corriente tiene sentido contrario al sentido de $d\mathbf{S}$ indicado en la rama.

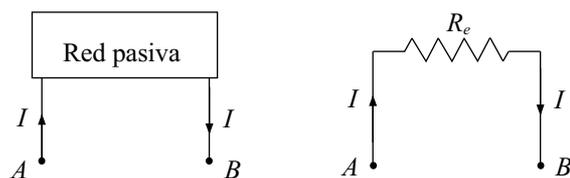


Figura 4.7. Equivalente de un red pasiva.

de la red pasiva entre los puntos A y B a una única resistencia R_e de valor tal que al establecer la misma diferencia de potencial $V_A - V_B$ que había entre los extremos, circula la misma intensidad I por ella.

Dos resistencias conectadas en la forma indicada en la Figura 4.8 se dice que están conectadas en **serie**. Están recorridas por la misma corriente, pero la diferencia de potencial entre sus extremos es, en general, diferente. La resistencia equivalente para N resistencias en serie R_i verifica

$$R_e = \sum_{i=1}^N R_i, \quad (4.40)$$

mayor que cualquiera de las resistencias individuales.



Figura 4.8. Resistencias en serie.

Dos resistencias conectadas en la forma indicada en la Figura 4.9 se dice que están conectadas en **paralelo**. Están sometidas a la misma diferencia de potencial, pero cada una está recorrida, en general, por distinta corriente. La resistencia equivalente R_e entre los puntos A y B para N resistencias R_i en paralelo verifica

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}, \quad (4.41)$$

menor que cualquiera de las resistencias individuales.

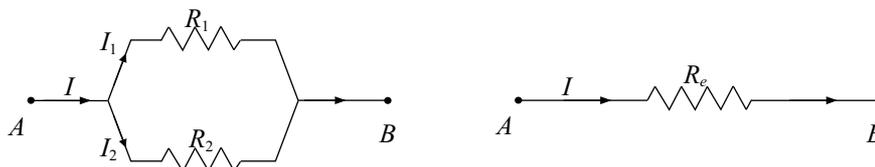


Figura 4.9. Resistencias en paralelo.

Hay una forma de agrupar tres resistencias en que no se cumplen ninguna de las condiciones de las dos asociaciones anteriores (Figura 4.10), denominada asociación en **triángulo**. En este caso, no se puede hablar de una resistencia equivalente a ellas tres, pero sí de otra asociación equivalente, denominada asociación en **estrella**. Diremos que ambas asociaciones son equivalentes, si para las mismas diferencias de potencial entre sus puntos A , B y C , las intensidades que recorren el resto de las ramas del circuito son las mismas.

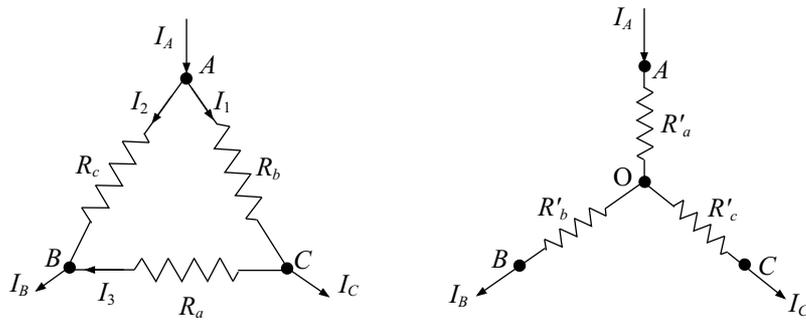


Figura 4.10. Asociaciones en triángulo y estrella.

La equivalencia entre ambas asociaciones viene dada por

$$R'_a = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad (4.42)$$

$$R'_b = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad (4.43)$$

$$R'_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}, \quad (4.44)$$

que expresa el valor de cualquier resistencia de la asociación en estrella, en función de las resistencias de la asociación en triángulo (**teorema de Kennelly**). Obsérvese que las fórmulas indican, de forma práctica, que cada resistencia de la estrella es el producto de las resistencias que confluyen en el nudo, dividido por la suma de las resistencias de la asociación.

Análogamente, despejando de las expresiones anteriores, puede obtenerse el valor de cada una de las resistencias en triángulo en función de los valores de las resistencias en estrella:

$$R_a = \frac{R'_a R'_b + R'_a R'_c + R'_b R'_c}{R'_a}, \quad (4.45)$$

$$R_b = \frac{R'_a R'_b + R'_a R'_c + R'_b R'_c}{R'_b}, \quad (4.46)$$

$$R_c = \frac{R'_a R'_b + R'_a R'_c + R'_b R'_c}{R'_c}. \quad (4.47)$$

Cualquier red pasiva puede reducirse a una resistencia equivalente sin más que aplicar de manera paulatina las equivalencias en serie, paralelo, triángulo o estrella anteriormente descritas, como se verá en los problemas.

4.13. RED ACTIVA. EQUIVALENCIA

Se llama **red activa** en corriente continua a la formada por resistencias, generadores y motores. Eliminando los generadores y los motores y sustituyéndolos sólo por sus resistencias internas se obtiene la red pasiva correspondiente. Considérense dos redes activas cualesquiera representadas en la Figura 4.11. Al colocar una resistencia entre dos de sus puntos A y B o A' y B' , circulará una corriente por cada una de las resistencias. Se dice que las dos redes son equivalentes si al colocar resistencias de igual valor r , la corriente I que pasa por ellas es la misma para ambas redes.

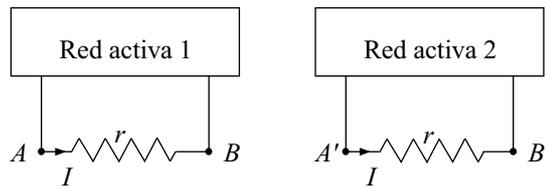


Figura 4.11. Redes activas equivalentes.

4.13.1. Teorema de Thevenin

Un circuito entre dos de cuyos puntos A y B hay una diferencia de potencial $V_A - V_B$ y la resistencia equivalente de la red pasiva entre dichos puntos es R_e es equivalente a un generador ideal de f.e.m. $\mathcal{E}_e = V_A - V_B$ y una resistencia en serie R_e (Figura 4.12).

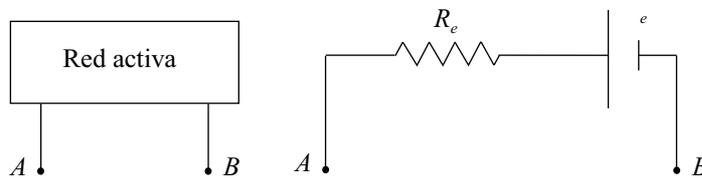


Figura 4.12. Equivalente Thevenin de una red activa.

4.13.2. Teorema de Norton

Un circuito entre dos de cuyos puntos A y B hay una diferencia de potencial $V_A - V_B$ y la resistencia equivalente de la red pasiva entre dichos puntos es R_e es equivalente a un generador ideal de intensidad $I = (V_A - V_B)/R_e$ y una resistencia en paralelo R_e (Figura 4.13). Un generador de intensidad (ideal) es un dispositivo que suministra una intensidad constante, independientemente de lo que se conecte entre sus bornes y se representa por $\text{---}\bigcirc\text{---}$.

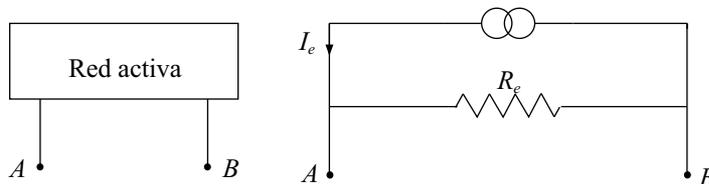


Figura 4.13. Equivalente Norton de una red activa.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 4.1 Por un hilo de tungsteno, de resistividad $5,5 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ y de sección 1 mm^2 , circula una corriente de 1 A. a) Estimar la velocidad de los electrones, sabiendo que el número de electrones por metro cúbico es del orden de $8,4 \times 10^{28}$. b) Determinar la densidad de corriente en el conductor. c) Calcular el campo eléctrico en el conductor.

Resolución

a) En un hilo metálico por el que fluye una corriente eléctrica, el vector densidad de corriente es aproximadamente paralelo al hilo. Puede suponerse, además, que es uniforme en toda la sección recta del mismo, con lo que la intensidad de corriente está dada por

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = jS = -envS,$$

donde $S = 10^{-6} \text{ m}^2$ es el área de la sección recta del hilo, y v la velocidad de los electrones. Como $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ e $I = 1 \text{ A}$, de la ecuación anterior se obtiene:

$$v = -7,4 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}.$$

El signo $-$ indica que, en el caso estudiado, la velocidad tiene sentido contrario a la densidad de corriente. Esta velocidad es mucho menor que la velocidad media de agitación térmica de los electrones a temperatura ambiente, $v_T \simeq 10^5 \text{ ms}^{-1}$. Sin embargo, el movimiento térmico, aunque muy intenso, es aleatorio, y en consecuencia, no da lugar a una corriente neta, siendo lícito ignorarlo.

b) Como se ha indicado en el apartado anterior, $I = jS$ para cada sección de conductor. Despejando el valor de la densidad de corriente, se encuentra

$$j = I/S = 1/10^{-6} = 10^6 \text{ Am}^{-2}.$$

c) De la expresión de la ley de Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, se puede despejar el valor del campo eléctrico en cualquier punto del conductor,

$$E = \rho j = 5,5 \times 10^{-8} \times 10^6 = 0,055 \text{ Vm}^{-1}.$$

4.2

El extremo 1 de un hilo metálico está en contacto con agua fundente y el extremo 2 con agua hirviendo, de modo que se ha generado a lo largo del hilo una distribución de temperatura $T = ax$, con $a = 100^\circ\text{C/m}$, como se indica en la Figura 4.14. La longitud del hilo es de 1 m, el área de su sección recta es 1 mm^2 , y su resistividad varía con la temperatura de acuerdo con la expresión $\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$, con $\rho_0 = 10^{-8} \Omega\text{m}$, y el coeficiente de temperatura $\alpha = 0,0004 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Determinar la resistencia del hilo.

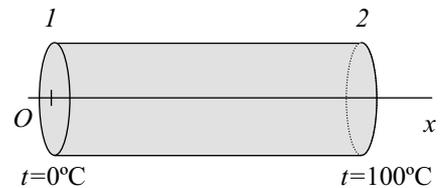


Figura 4.14. Hilo metálico sometido a un gradiente de temperatura.

Resolución

Aplicando la Expresión (4.16) para la resistencia de un hilo,

$$R = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 \rho_0 (1 + \alpha T) \frac{dl}{S}.$$

Teniendo en cuenta el valor de la temperatura en función de la posición en el hilo, $T = ax$, se puede integrar la expresión, observando que $dl = dx$. Al ser la sección S de éste constante, la integral para la longitud total del hilo $L = 1 \text{ m}$ queda:

$$R = \int_0^L \rho_0 (1 + \alpha(ax)) \frac{dx}{S} = \frac{\rho_0}{S} \left(L + a\alpha \frac{L^2}{2} \right) = \frac{10^{-8}}{10^{-6}} (1 + 100 \times 0,0004/2).$$

La resistencia total del hilo es

$$R = 10,2 \times 10^{-3} \Omega.$$

- 4.3** Un fusible es un hilo conductor destinado a interrumpir la corriente cuando ésta sobrepasa cierto valor crítico. Cuando la potencia disipada al entorno es inferior a la absorbida por el sistema, aumenta la temperatura del hilo hasta fundirse. Como modelo simple, puede suponerse que la potencia que un hilo irradia a su entorno es proporcional a su superficie, $P_{ev} = c \times S_L$. Determinar qué radio debe elegirse para un fusible cilíndrico de resistividad ρ , con objeto de que se funda al superar la intensidad el valor de 10 A.

Resolución

Para determinar la potencia evacuada a través de la superficie, hay que tener en cuenta que el fusible es un cilindro, y que el calor se irradia a través de la superficie lateral. Si se considera el fusible de radio r y longitud l , resulta

$$P_{ev} = c2\pi rl ,$$

siendo c una constante de proporcionalidad. La potencia disipada por efecto Joule [Expresión (4.19)] en el fusible es

$$P = I^2 R = I^2 \rho \frac{l}{S} = I^2 \rho \frac{l}{\pi r^2} ,$$

dado que la superficie S de la expresión corresponde a la sección de conductor. Igualando ambas expresiones, se obtiene el valor del radio del fusible

$$r = \left(I^2 \frac{\rho}{2\pi^2 c} \right)^{1/3} .$$

Para el caso de una corriente de 10 A es

$$r = \left(\frac{50\rho}{\pi^2 c} \right)^{1/3} .$$

- 4.4** Al aplicar una diferencia de potencial de 220 V a cada una de las lámparas marcadas como 1, 2 y 3 consumen respectivamente 60, 100 y 150 W. Si se conectan las lámparas en serie y se les somete a una diferencia de potencial de 380 V en los extremos de la conexión, determinar la potencia que consumirá cada una. (Supóngase despreciable el efecto que la variación de temperatura tiene sobre el valor de la resistencia de las bombillas.)

Resolución

La potencia consumida por cada bombilla individualmente permite determinar su resistencia, que es el único valor característico de las mismas, independientemente de como se conecten (siempre que se desprecie el efecto de la temperatura). Para ello, utilizando la Ecuación (4.19) de la potencia consumida y reemplazando en ella la Expresión (4.15) de la ley de Ohm, resulta

$$P = RI^2 = V^2/R \Rightarrow R = V^2/P .$$

Aplicándolo a cada bombilla se tiene

$$R_1 = \frac{220^2}{60} = 806,67 \Omega ; \quad R_2 = \frac{220^2}{100} = 484 \Omega ; \quad R_3 = \frac{220^2}{150} = 322,67 \Omega .$$

En el montaje en serie, en primer lugar es necesario determinar la intensidad que pasa por él:

$$V = R_e I \Rightarrow I = \frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{380}{806,67 + 484 + 322,67} = 0,24 \text{ A} ,$$

habiéndose tenido en cuenta que la resistencia equivalente es la suma de las resistencias conectadas en serie. Esta intensidad, por ser corriente continua, es la misma en todo el circuito y, por tanto,

para cada una de las bombillas. La potencia consumida por cada bombilla se obtiene a partir de la expresión de las pérdidas por efecto Joule (4.19)

$$P_i = R_i I^2 ,$$

resultando

$$P_1 = 44,75 \text{ W} \quad P_2 = 26,85 \text{ W} \quad P_3 = 17,90 \text{ W} .$$

- 4.5** El voltímetro V_1 de la Figura 4.15 marca una tensión de 240 V cuando circula una corriente de intensidad I por un hilo de cobre de longitud total L , sección constante y resistencia R . ¿En qué posición debe conectarse el voltímetro V_2 (Figura 4.15) para que indique una tensión de 40 V?

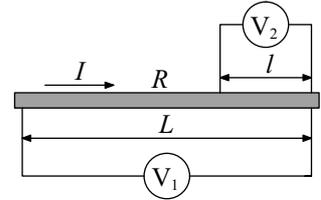


Figura 4.15. Divisor de tensión.

Resolución

Aplicando la ley de Ohm (4.15) para un conductor filiforme se puede relacionar la diferencia de potencial medida por los voltímetros con la resistencia del trozo de hilo respectivo. Así para el tramo de longitud L , donde se conecta el voltímetro V_1 , sustituyendo la Expresión (4.17) para la resistencia, se tiene

$$V_1 = R_L I = \rho \frac{L}{S} I = 240 \text{ V} .$$

Y para el trozo de longitud l , que mide el voltímetro V_2 ,

$$V_2 = R_l I = \rho \frac{l}{S} I = 40 \text{ V} .$$

Puede observarse que la intensidad de corriente es la misma en todas las secciones de conductor, por ser corriente continua. Como también son iguales en ambos casos la sección y la resistividad del material, dividiendo ambas expresiones resulta

$$V_1/V_2 = L/l = 240/40 = 6 .$$

Por tanto la longitud l en relación con la longitud total del hilo es

$$l = L/6 .$$

- 4.6** Las resistividades del hierro y del carbono varían con la temperatura T de acuerdo con la ecuación $\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$, donde

	ρ_0 (Ωm)	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
Hierro	10^{-7}	0,0050
Carbono	350×10^{-7}	-0,0005

Se asocian en serie un hilo de hierro y un hilo de carbono, ambos de la misma sección, con objeto de que el valor de la resistencia R de la asociación no dependa de la temperatura. Determinar cuál debe ser la relación entre las longitudes de ambos hilos para conseguirlo.

Resolución

Al estar asociados ambos hilos en serie, la resistencia equivalente del conjunto será la suma de las resistencias de cada uno de ellos. Aplicando la Expresión (4.17) para la resistencia de un hilo de sección constante, se obtiene que, para el hilo de hierro, de longitud l_h

$$R_h = \rho_h \frac{l_h}{S} = \frac{1}{S} \rho_{0h} (1 + \alpha_h T) l_h = \frac{1}{S} 10^{-7} (1 + 0,0050 T) l_h ,$$

y para el hilo de carbono, de longitud l_c

$$R_c = \rho_c \frac{l_c}{S} = \frac{1}{S} \rho_{0c} (1 + \alpha_c T) l_c = \frac{1}{S} 350 \times 10^{-7} (1 - 0,0005 T) l_c .$$

Sumando ambas expresiones resulta

$$R = R_h + R_c = \frac{1}{S} [10^{-7} (1 + 0,0050 T) l_h + 350 \times 10^{-7} (1 - 0,0005 T) l_c] .$$

Para que esta resistencia no dependa de la temperatura los términos que en la ecuación multiplican a T deberán anularse:

$$10^{-7} \times 0,0050 l_h + 350 \times 10^{-7} \times (-0,0005) l_c = 0 .$$

Y simplificando la ecuación resulta que

$$l_h = 35 l_c .$$

4.7 Se alimenta una cierta resistencia R mediante un generador de f.e.m. \mathcal{E} y resistencia interna r . Determinar el valor de la resistencia R para que la potencia disipada en ella sea máxima.

Resolución

El esquema del circuito al que se refiere el enunciado del problema es el de la Figura 4.16. La potencia disipada por la resistencia se obtiene de la Expresión (4.19) de las pérdidas por efecto Joule en una resistencia,

$$P = I^2 R .$$

Si se aplica la ley de Ohm [Expresión (4.35)] al circuito, puede determinarse la intensidad I que pasa por la resistencia R :

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} .$$

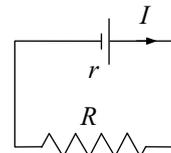


Figura 4.16. Circuito con generador y resistencia.

Se puede observar que en el sumatorio de resistencias se incluyen tanto la resistencia R como la resistencia interna r del generador. Sustituyendo este valor de la intensidad en la expresión de la potencia, resulta

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} .$$

Se desea que esta potencia sea máxima. Aplicando el concepto matemático de máximo de una función, habrá que derivar respecto de la variable (en este caso R) e igualar a cero, para obtener dicho máximo:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (R + r)^2 - 2(R + r) \mathcal{E}^2 R}{(R + r)^4} = 0 .$$

Despejando en la ecuación anterior resulta

$$(R + r)^2 = 2(R + r)R \Rightarrow R + r = 2R ,$$

siendo el valor de resistencia pedido

$$R = r .$$

Del resultado del problema puede observarse cómo para aumentar las pérdidas por efecto Joule (por ejemplo para generar mucho calor), no se debe pensar en usar resistencias más elevadas. El motivo lo explica la ley de Ohm: al aumentar la resistencia del circuito disminuye la intensidad de corriente que pasa por él, lo que afecta al cálculo de las pérdidas por efecto Joule, que incluye no sólo el valor de la resistencia sino también el de la intensidad.

- 4.8** En el circuito de la Figura 4.17, determinar la \mathcal{E}_1 del generador 1 para que en el generador 2 el borne positivo tenga menor potencial que el negativo. Si $\mathcal{E}_1 = 8 \text{ V}$, ¿qué potencia suministra el generador 2 al circuito?

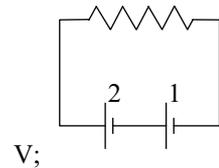


Figura 4.17. Esquema del problema 4.8.

Resolución

Marcando los puntos A , B y C en el esquema del circuito (Figura 4.18), la diferencia de potencial entre los bornes del generador 2 es

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_2 - r_2 I = 2 - 0,5 I < 0 ,$$

puesto que el enunciado indica que el borne positivo debe tener menor potencial que el negativo.

Para determinar la intensidad I que recorre el circuito se aplica la ley de Ohm (4.35), que siguiendo el sentido de la corriente resulta

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_1 + 2}{1 + 0,5 + 0,5} = \frac{\mathcal{E}_1 + 2}{2} ,$$

en donde se han sumado las f.e.m., puesto que ambos dispositivos funcionan como generadores. Si se sustituye el valor de la intensidad en la expresión de la diferencia de potencial se obtiene que

$$V_A - V_B = 2 - 0,5 I = 2 - 0,5 \frac{\mathcal{E}_1 + 2}{2} < 0 .$$

Despejando \mathcal{E}_1 se tiene el valor de la f.e.m. pedida

$$\mathcal{E}_1 > 6 \text{ V} .$$

Luego, como se observa del resultado, es posible que el borne positivo de un generador no siempre esté a mayor potencial que el negativo.

La potencia que el generador 2 suministra al circuito es, según la Expresión (4.29),

$$P_2 = (\mathcal{E}_2 - r_2 I) I = 2 I - 0,5 I^2 .$$

Si $\mathcal{E}_1 = 8 \text{ V}$, la intensidad que recorre el circuito es, a partir de la ley de Ohm,

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow I = \frac{8 + 2}{1 + 0,5 + 0,5} = 5 \text{ A} ,$$

y sustituyendo en la expresión de la potencia resulta

$$P_2 = -2,5 \text{ W} .$$

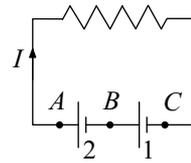


Figura 4.18. Sentido de la corriente en el circuito.

El resultado indica que el generador 2 no está aportando energía al circuito sino extrayéndola de él. Por tanto, no siempre se aporta más energía con más generadores en un circuito, sino que dependiendo de los valores de los f.e.m. y de las resistencias convendrá o no instalar alguno de ellos.

4.9 Con un generador de f.e.m. \mathcal{E} y resistencia interna r se quiere alimentar un motor cuya resistencia interna es r' . Determinar la f.c.e.m. \mathcal{E}' del motor para que la potencia eléctrica aprovechada por el mismo sea la mayor posible.

Resolución

El esquema del circuito al que se refiere el enunciado del problema es el de la Figura 4.19. La potencia eléctrica aprovechada por el motor es

$$P = \mathcal{E}'I .$$

Para determinar la intensidad que recorre el circuito se aplica la ley de Ohm [Expresión (4.35)] siguiendo el sentido de la corriente, resultando

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{r + r'} .$$

Obsérvese que la f.c.e.m. del motor \mathcal{E}' se introduce con signo negativo. Sustituyendo el valor de la intensidad en la expresión de la potencia aprovechada por el motor resulta

$$P = \mathcal{E}'I = \frac{\mathcal{E}\mathcal{E}' - \mathcal{E}'^2}{r + r'} .$$

Como se pide que esta potencia sea máxima, se deriva respecto a la variable (\mathcal{E}' en este caso) y se iguala a cero¹¹:

$$\frac{dP}{d\mathcal{E}'} = \frac{\mathcal{E} - 2\mathcal{E}'}{r + r'} = 0 .$$

El valor de la fuerza contraelectromotriz del motor es, despejando,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}/2 .$$

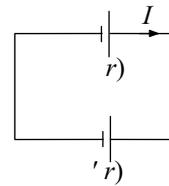


Figura 4.19. Generador alimentando un motor.

4.10 En el circuito de la Figura 4.20, las resistencias del generador y del motor son iguales. Cuando el interruptor está abierto, el voltímetro marca 20 V. Cuando el interruptor está cerrado, el voltímetro marca 19 V y el amperímetro (de resistencia interna despreciable) 0.5 A. Estudiar el consumo de potencia en el motor (absorbida de la red, transformada y perdida por efecto Joule).

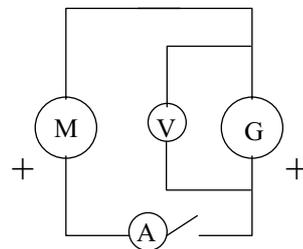


Figura 4.20. Esquema del problema 4.10.

Resolución

Cuando el interruptor está abierto, por el circuito no pasa ninguna corriente. Como el voltímetro está midiendo en bornes del generador y el circuito está abierto, el voltímetro da la f.e.m. \mathcal{E} del generador. Por tanto, para el generador

$$\mathcal{E} = 20 \text{ V} .$$

¹¹Calculando la derivada segunda, puede comprobarse que el resultado es un máximo.

Cuando el interruptor está cerrado, el voltímetro mide la d.d.p. en bornes del generador ($V = 19 \text{ V}$) y el amperímetro la intensidad que pasa por el circuito ($0,5 \text{ A}$), resultando

$$V = 19 = \mathcal{E} - r_g I = 20 - 0,5 r_g ,$$

de donde la resistencia interna r_g del generador, que según el enunciado coincide con la resistencia interna r_m del motor, es

$$r_g = r_m = \frac{20 - 19}{0,5} = 2 \Omega .$$

La f.c.e.m. del motor \mathcal{E}' puede obtenerse de la ley de Ohm (4.35),

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow \mathcal{E} - \mathcal{E}' = (r_g + r_m) I \Rightarrow \mathcal{E}' = 20 - (2 + 2) \times 0,5 = 18 \text{ V} .$$

También se podía haber obtenido observando que en los puntos en que está conectado el voltímetro, éste no sólo mide la d.d.p. en bornes del generador, sino también la d.d.p. en bornes del motor:

$$V = 19 = \mathcal{E}' + r_m I = \mathcal{E}' + 0,5 \times 2 \Rightarrow \mathcal{E}' = 18 \text{ V} .$$

La potencia absorbida por el motor de la red es

$$P_{\text{absorbida}} = \mathcal{E}' I + r_m I^2 = 18 \times 0,5 + 2 \times 0,5^2 = 9,5 \text{ W} .$$

La potencia eléctrica transformada en energía mecánica es

$$P_{\text{transformada}} = \mathcal{E}' I = 18 \times 0,5 = 9 \text{ W} .$$

La diferencia son las pérdidas por efecto Joule

$$P_{\text{Joule}} = r_m I^2 = 2 \times 0,5^2 = 0,5 \text{ W} .$$

- 4.11** Se quieren determinar las resistencias internas de un amperímetro A y de un voltímetro V , de los cuáles se tiene dudas acerca de su calidad. Para ello se ha montado la red de la Figura 4.21. La lectura del voltímetro es de 6 V y la del amperímetro 1 A . Calcular el valor de las resistencias del voltímetro y del amperímetro y realizar una crítica de la calidad de los aparatos.

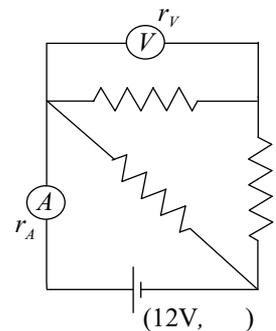


Figura 4.21. Esquema del problema 4.11.

Resolución

El ejercicio puede resolverse aplicando las leyes de Kirchhoff, para lo cual conviene primero simplificar la red, con objeto de que los cálculos sean más sencillos.

Para ello se aplica el concepto de resistencia equivalente de una red pasiva, siendo importante resaltar que sólo pueden simplificarse tramos de red en los cuáles existan únicamente resistencias, sin generadores o motores. Si se observa el conjunto formado por las resistencias de la Figura 4.22(a), estas resistencias están asociadas en triángulo y pueden transformarse en una asociación en estrella, tal como se indica en la Figura 4.22(b). Para calcular el valor de las resistencias se aplican las Expresiones (4.42) del teorema de Kennelly. Recordando que estas expresiones representan el producto de las resistencias que confluyen en cada nudo dividido por la suma de

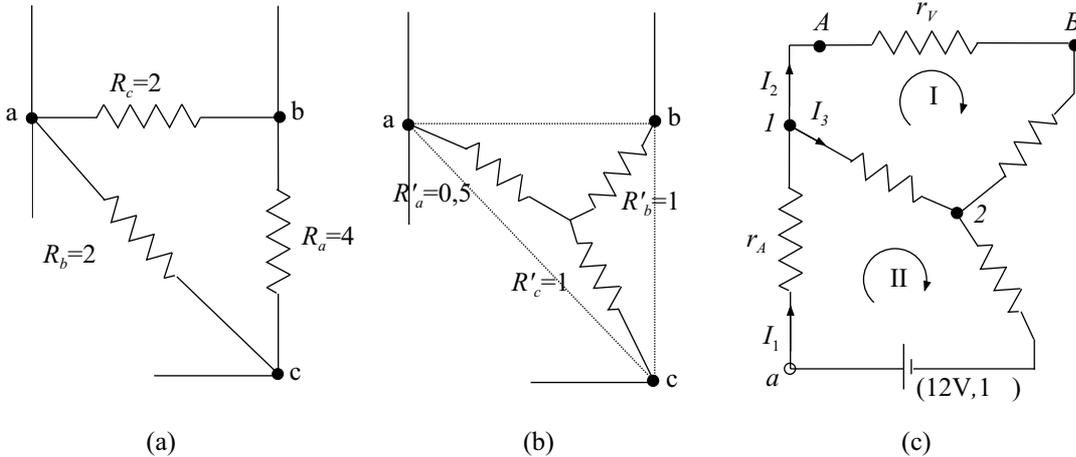


Figura 4.22. Esquema para simplificar la red.

todas ellas, se obtiene

$$R'_a = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{2 \times 2}{4 + 2 + 2} = 0,5 \Omega ,$$

$$R'_b = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{4 \times 2}{4 + 2 + 2} = 1 \Omega ,$$

$$R'_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{4 \times 2}{4 + 2 + 2} = 1 \Omega .$$

La red queda reducida a la forma de la Figura 4.22(c), con dos nudos (1 y 2), de los que se obtendrá una ecuación, y tres ramas, por lo que para resolver el problema se necesitan dos mallas independientes. Se han tomado las mallas (I) y (II), definidas, respectivamente, por 1AB21 y 12a1, con las cuáles se han considerado todas las ramas de la red. Debe observarse que el punto a no es ningún nudo, pues en él no confluyen 3 o más conductores, sino un punto que se ha marcado en la red para facilitar la definición de las mallas. En la red se han señalado arbitrariamente los sentidos de las corrientes en las diferentes ramas y el sentido de recorrido de las mallas ($d\mathbf{l}$) para aplicar las leyes de Kirchhoff.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a uno cualquiera de los nudos, por ejemplo al 1, resulta

$$\sum_i I_i = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3 . \tag{4.48}$$

Aplicando la ley de mallas, $\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i$, resulta para (I) y (II)

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 0 &= (r_V + 1)I_2 - 0,5I_3 . \\ \text{(II)} \quad 12 &= (2 + r_A)I_1 + 0,5I_3 . \end{aligned} \tag{4.49}$$

Siguiendo el criterio de signos explicado, la f.e.m. de 12 V se ha introducido con signo positivo porque al recorrer la malla se entra por el polo negativo. Las intensidades llevan signo positivo porque ha coincidido el sentido asignado a las ramas con el de recorrido de la malla, salvo en el caso de I_3 en la malla (I).

Dado que se conocen las lecturas de amperímetro y voltímetro, se tienen dos ecuaciones adicionales. De la lectura del amperímetro,

$$I_1 = 1 \text{ A} .$$

Aplicando la ley de Ohm [Expresión (4.15)] al voltímetro, se obtiene

$$V_A - V_B = r_V I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{6}{r_V} .$$

Sustituyendo estos valores en la Ecuación de nudos (4.48)

$$I_3 = I_1 - I_2 = 1 - \frac{6}{r_V} ,$$

y reemplazando todas las intensidades en las Ecuaciones de mallas (4.49),

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 0 = 6 + \frac{6}{r_V} + 0,5 \left(\frac{6}{r_V} - 1 \right) \Rightarrow \\ \text{(II)} \quad 12 = 2 + r_A + 0,5 \left(1 - \frac{6}{r_V} \right) \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} r_V = \frac{18}{11} \Omega . \\ r_A = \frac{23}{3} \Omega . \end{array}$$

Los aparatos de medida (voltímetro y amperímetro) no deben alterar la corriente que pasa por la red, pues de lo contrario sus medidas serían erróneas. Un voltímetro, al montarse en paralelo con la rama a medir, debe tener una resistencia muy elevada comparada con las resistencias de la red, para que sea despreciable la corriente que pase por él. Un amperímetro, al montarse en serie con la rama a medir, debe tener una resistencia despreciable, comparada con las demás del circuito, para no modificar la intensidad. Analizando los resultados encontrados se puede observar que ni el voltímetro ni el amperímetro tienen resistencias adecuadas para ser utilizados en la red del problema.

El ejercicio puede también resolverse aplicando la regla de Maxwell [Expresión (4.39)]. Para ello puede simplificarse la red al igual que en la resolución anterior o puede realizarse directamente, dado que en este caso las incógnitas (intensidades de malla) son únicamente tres. Tomando las mallas indicadas en la Figura 4.23, $13a1$, 1231 y $1AB21$, con intensidades de malla respectivas i_1, i_2, i_3 y aplicando la regla de Maxwell se tiene:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + r_A & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 + r_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

La f.e.m. de 12 V es positiva porque en el sentido de recorrido marcado en la malla se entra por el polo negativo. En la diagonal principal se han sumado las resistencias totales de cada malla. La rama 13 es común a las mallas (i_1) y (i_2) y es recorrida en sentido diferente para cada una de las mallas, de ahí que el valor $R_{12} = R_{21}$ de 2Ω se introduce con signo negativo. Lo mismo ocurre con la rama 12 común a las mallas (i_2) y (i_3), por lo que el valor $R_{23} = R_{32}$ de 2Ω es también negativo.

Sustituyendo las ecuaciones adicionales aportadas por el voltímetro y el amperímetro

$$V_A - V_B = r_V i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{6}{r_V} \quad i_1 = 1 \text{ A} ,$$

en las ecuaciones de malla, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas, r_V, r_A e i_2 :

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + r_A & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 + r_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i_2 \\ 6/r_V \end{pmatrix}$$

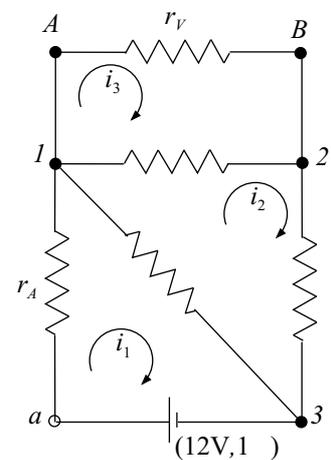


Figura 4.23. Esquema para aplicar la regla de Maxwell.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a

$$r_V = \frac{18}{11} \Omega \quad r_A = \frac{23}{3} \Omega .$$

4.12 En la red de la Figura 4.24, las resistencias están en kΩ, siendo despreciables las resistencias internas de los demás elementos. Determinar los equivalentes Thevenin y Norton entre A y B.

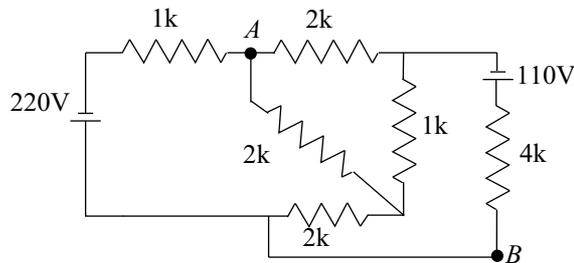


Figura 4.24. Red del problema 4.12.

Resolución

Para determinar los equivalentes Thevenin y Norton es necesario calcular la diferencia de potencial y la resistencia equivalente entre los puntos pedidos. Y para calcular la diferencia de potencial es siempre necesario conocer las intensidades que recorren la red entre dichos puntos.

En primer lugar puede observarse la existencia de una asociación en triángulo que puede simplificarse mediante el teorema de Kennelly, convirtiéndola en una asociación en estrella, Figura 4.25(a). Los valores de las resistencias de la estrella se obtienen aplicando las Fórmulas (4.42),

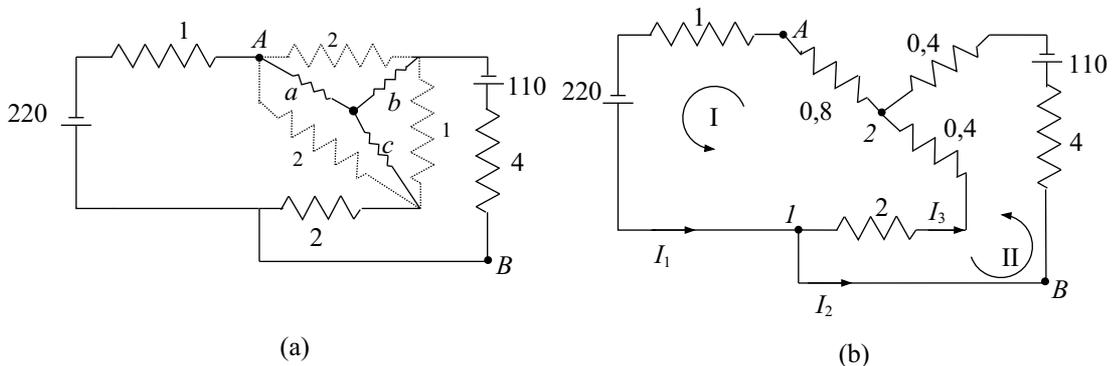


Figura 4.25. (a) Simplificación de la red. (b) Esquema para aplicar las leyes de Kirchhoff.

que representan en la práctica el producto de las resistencias que confluyen en el nudo dividido por la suma de las resistencias de la asociación:

$$a = \frac{2 \times 2}{2 + 2 + 1} = 0,8 \quad b = \frac{2 \times 1}{2 + 2 + 1} = 0,4 \quad c = \frac{2 \times 1}{2 + 2 + 1} = 0,4 .$$

La red resultante [Figura 4.25(b)] consta tan sólo de dos nudos y tres ramas, con lo que al aplicar las leyes de Kirchhoff se obtendrán tres ecuaciones con tres incógnitas.

Aplicando la ley de nudos a cualquiera de los nudos 1 o 2 resulta

$$I_1 = I_2 + I_3 . \tag{4.50}$$

Puesto que hay tres incógnitas hacen falta dos ecuaciones adicionales que se obtienen de la ley de mallas. Se definen dos mallas independientes y tal que contengan todas las ramas de la red [Figura 4.25(b)]: la malla (I) definida por $12A1$ y la malla (II) definida por $1B21$, siendo el recorrido de la malla el indicado en la propia definición de la malla y reflejado en la figura. Aplicando las ecuaciones de malla y sustituyendo en ellas el valor de I_3 de la Ecuación de nudos (4.50) resulta

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 220 &= 1,8I_1 + 2,4I_3 \Rightarrow 220 = 4,2I_1 - 2,4I_2 . \\ \text{(II)} \quad -110 &= 4,4I_2 - 2,4I_3 \Rightarrow -110 = -2,4I_1 + 6,8I_2 . \end{aligned}$$

Para calcular la diferencia de potencial entre A y B puede emplearse el camino $A1B$, que pasa por el generador de 220 V . Entre 1 y B hay un hilo sin resistencia, no existiendo diferencia de potencial, con lo que sólo es necesario calcular la d.d.p. entre A y 1 . Para ello sólo hace falta determinar el valor de I_1 , que despejando de las ecuaciones anteriores conduce a

$$I_1 = 54 \text{ mA}.$$

No es necesario pasar en las ecuaciones los valores en $\text{k}\Omega$ a Ω . Basta con observar que, en la ley de Ohm, $V_A - V_B = RI$, si se introduce R en $\text{k}\Omega$ el valor de I debe ir en mA para obtener la d.d.p. en V .

La diferencia de potencial entre A y B se determina mediante la ley de Ohm en una rama [Expresión (4.37)], para las diferentes ramas que existieran entre dichos puntos. Aplicando la ley de Ohm al camino $A1B$ indicado anteriormente se obtiene

$$V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \Rightarrow V_A - V_B + 220 = 1 \times 54 \Rightarrow V_A - V_B = -166 \text{ V} .$$

Obsérvese que los valores de la f.e.m. y de la intensidad se han introducido con signo positivo según el criterio de signos explicado: en el recorrido se entra por el polo negativo y la corriente está en el mismo sentido que el recorrido (\mathbf{j} y $d\mathbf{l}$ en el mismo sentido). La f.e.m. del equivalente Thevenin es, por tanto, $\mathcal{E}_e = 166 \text{ V}$.

Para calcular la resistencia equivalente se sigue el esquema indicado en la Figura 4.26. En primer lugar [Figura 4.26(a)] se construye la red pasiva eliminando los generadores y motores de la red. Los

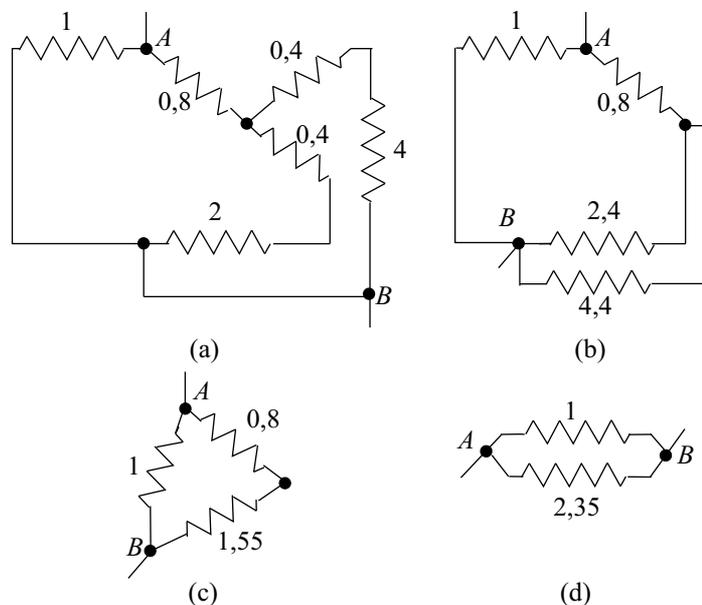


Figura 4.26. Cálculo de la resistencia equivalente de la red pasiva.

puntos A y B deben mantenerse inalterables a lo largo de todas las operaciones de simplificación, dado que se calcula la resistencia entre dichos puntos. En la Figura 4.26(b) se han sumado los valores de las resistencias 4 y 0.4 $k\Omega$ de la Figura 4.26(a) que están en serie, como también las de 2 y 0.4 $k\Omega$, lo que se observa fácilmente porque no existe ningún nudo entre ellas. Las resistencias de 4.4 y 2.4 $k\Omega$ de la Figura 4.26(b) están en paralelo (sus extremos están al mismo potencial):

$$\frac{1}{4.4} + \frac{1}{2.4} = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_1 = 1.55 \text{ k}\Omega ,$$

quedando el esquema de la Figura 4.26(c). Las resistencias de 1.55 y 0.8 $k\Omega$ están en serie y se suman, resultando el Esquema 4.26(d), con dos resistencias en paralelo. El resultado final es

$$\frac{1}{2.35} + \frac{1}{1} = \frac{1}{R_e} \Rightarrow R_e = 0.70 \text{ k}\Omega .$$

Teniendo en cuenta el Esquema 4.12, el equivalente Thevenin es el de la Figura 4.27(a). Obsérvese que el polo negativo está en el lado del punto A dado que que es el de menor potencial ($V_A - V_B$ es negativo).

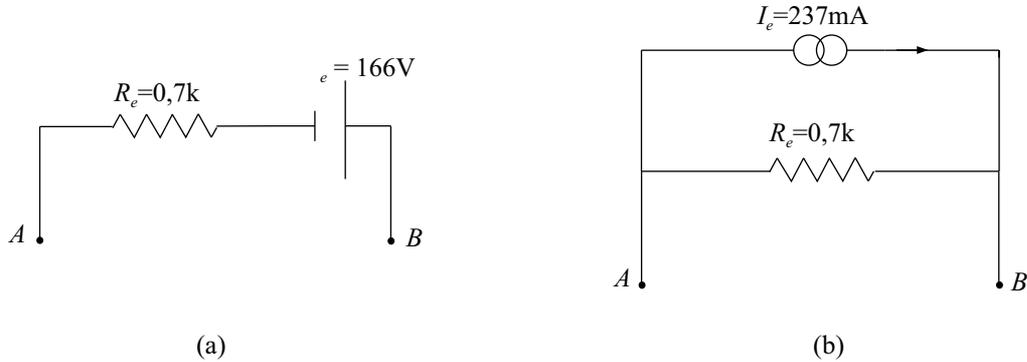


Figura 4.27. (a) Equivalente Thevenin. (b) Equivalente Norton.

Para el equivalente Norton es necesario calcular la fuente de intensidad

$$I_e = \mathcal{E}_e / R_e = 166 / 0.7 = 237 \text{ mA}.$$

Según el Esquema 4.13, el equivalente Norton es el de la Figura 4.27(b). La fuente de intensidad suministra corriente en el sentido de menor a mayor potencial, esto es de A a B , de ahí el sentido de la corriente I_e .

4.13 En la red de la Figura 4.28, las resistencias están en $k\Omega$, siendo despreciables las resistencias internas de los demás elementos. Determinar la diferencia de potencial ($V_A - V_B$) entre A y B , tanto cuando el interruptor está abierto como cuando está cerrado.

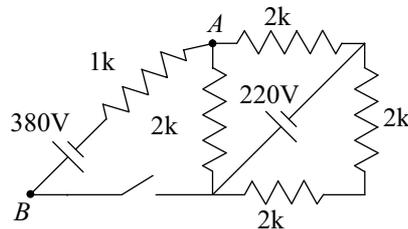


Figura 4.28. Esquema del problema 4.13.

Resolución

Cuando el interruptor está abierto, por la rama que contienen al generador de 380 V no circula ninguna corriente. Aplicando la ley de Ohm (4.37) a dicha rama, resulta

$$V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I \Rightarrow V_A - V_B + 380 = 0 ,$$

introduciéndose la f.e.m. como positiva, dado que al ir de A a B se pasa en primer lugar por el polo negativo del generador. Despejando se obtiene

$$V_A - V_B = -380 \text{ V} .$$

Cuando el interruptor está cerrado pasa corriente por todas las ramas de la red, aunque para calcular la diferencia de potencial basta con conocer la intensidad que recorre la rama del generador de 380 V . La red puede simplificarse si se observa la asociación de resistencias de la Figura 4.29(a). Dos de las resistencias de $2 \text{ k}\Omega$ están en serie, por lo que pueden sumarse las mismas, quedando las resistencias de la Figura 4.29(b) que es una asociación en triángulo. Convirtiendo esta asociación en su equivalente en estrella se simplifica la red, la cual queda definitivamente como en la Figura 4.29(c):

$$a = \frac{2 \times 2}{2 + 2 + 4} = 0,5 \quad b = \frac{2 \times 4}{2 + 2 + 4} = 1 \quad c = \frac{2 \times 2}{2 + 2 + 4} = 1 .$$

La red resultante consta de dos nudos (1 y 2) y de tres ramas. Para éstas se han asignado arbitrariamente sentidos a la corriente, indicados en la Figura 4.29(c). Aplicando la primera ley de Kirchhoff a uno de los nudos, por ejemplo al 1 ,

$$I_1 = I_2 + I_3 . \quad (4.51)$$

Hay tres incógnitas, por lo que es necesario definir dos mallas independientes y aplicar en ellas la segunda ley de Kirchhoff. En la Figura 4.29(c) se pueden definir las mallas $2AB12$ y $1d21$ que se recorren en el sentido indicado. En ellas se han empleado todas las ramas de la red, por lo que el problema queda correctamente planteado. Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 380 &= 1,5I_1 + I_2 . \\ \text{(II)} \quad -220 &= I_3 - I_2 . \end{aligned} \quad (4.52)$$

La f.e.m. de 380 V es positiva al pasar primero por el polo negativo en el sentido de recorrido indicado para la malla (I), mientras que la f.e.m. de 220 V es negativa, por pasar primero por el polo positivo según el recorrido de la malla (II). En la malla (I) ambas corrientes coinciden con el sentido de recorrido (\mathbf{j} y $d\mathbf{l}$ en el mismo sentido), de ahí que sean positivas las intensidades, mientras que en la malla (II) la corriente de intensidad I_2 está en contra del sentido de recorrido (\mathbf{j} y $d\mathbf{l}$ con sentidos contrarios), de ahí su signo negativo.

Despejando I_2 de la Ecuación de nudos (4.51) e introduciendo en las Ecuaciones de malla (4.52) resulta

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 380 &= 2,5I_1 - I_3 . \\ \text{(II)} \quad -220 &= -I_1 + 2I_3 . \end{aligned}$$

Despejando I_1 se obtiene,

$$540 = 4I_1 \Rightarrow I_1 = 135 \text{ mA} ,$$

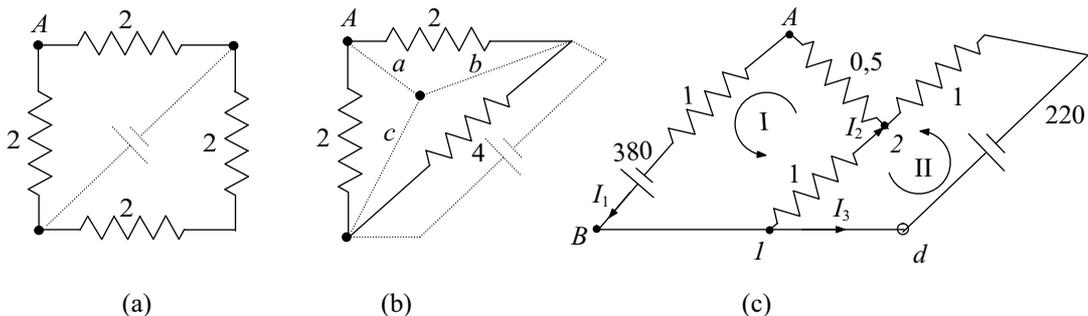


Figura 4.29. Simplificación del circuito y esquema para aplicar las leyes de Kirchhoff.

en la que se observa que si se introducen los valores de las resistencias en $k\Omega$, las intensidades resultantes vienen expresadas en mA.

Aplicando la ley de Ohm (4.37) al tramo AB se obtiene la diferencia de potencial pedida,

$$V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I \Rightarrow V_A - V_B + 380V = 1k\Omega \times 135mA \Rightarrow \boxed{V_A - V_B = -245 V .}$$

4.14 El generador G alimenta a un motor M y a un conjunto de tres resistencias R iguales, según la red de la Figura 4.30. Las entradas al motor y a las resistencias están protegidas por sendos interruptores. Calcular: a) la diferencia de potencial entre los extremos de cada interruptor cuando ambos están abiertos; b) la potencia extraída de la red por el motor en las diferentes combinaciones que pueden adoptar los interruptores A y B . Datos: Generador G : f.e.m.=380 V, $r_g = 1 \Omega$. Motor M : f.e.m.=220 V, $r_m = 1 \Omega$. Resistencias: $R = 30 \Omega$.

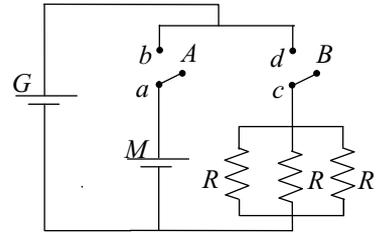


Figura 4.30. Esquema del problema 4.14.

Resolución

a) El conjunto de las tres resistencias están montadas en paralelo, por lo que puede sustituirse por su resistencia equivalente, según la siguiente relación:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \Rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{3}{R} \Rightarrow R_e = 10 \Omega .$$

Cuando ambos interruptores están abiertos no circula corriente por ninguna rama, puesto que no existe ningún circuito cerrado de conductores, y no habrá d.d.p. entre los extremos de las resistencias. Aplicar la ley de Ohm [Expresión (4.37)] entre b y a , siguiendo el camino que contiene al generador, conduce a

$$V_b - V_a + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I \Rightarrow V_b - V_a - 380 + 220 = 0 .$$

La f.e.m. del generador se ha introducido con signo negativo porque al realizar la circulación se pasa primero por el polo positivo, ocurriendo lo contrario en el paso por el motor. Debe observarse que la circulación entre a y b se hace siguiendo una línea continua: no podría hacerse por el camino del interruptor B pues se desconoce la d.d.p. entre los extremos del mismo. Despejando resulta,

$$\boxed{V_b - V_a = 160 V .}$$

Aplicando la ley de Ohm [Expresión (4.37)] entre d y c , siguiendo el camino continuo que pasa por el generador se obtiene

$$V_d - V_c + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I \Rightarrow V_d - V_c - 380 = 0 ,$$

introduciéndose la f.e.m. del generador con signo negativo por el mismo motivo anterior. Despejando

$$\boxed{V_d - V_c = 380 V .}$$

b) Cuando el interruptor A está abierto no circula ninguna corriente por el motor y por tanto éste no extrae ninguna potencia de la red.

En el caso de que el interruptor A esté cerrado y B esté abierto, hay sólo una corriente I recorriendo tanto el motor como el generador y en el sentido de la Figura 4.31 (saliendo por el polo positivo del generador). Aplicando la ley de Ohm [Expresión (4.35)], siguiendo el sentido de la corriente, al único circuito cerrado de la figura se tiene

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow 380 - 220 = 2I \Rightarrow I = 80 \text{ A} ,$$

pues en el sentido indicado se pasa en primer lugar por el polo negativo en el generador (signo positivo) y primero por el positivo en el motor (signo negativo). El valor de $\sum_i R_i$ es la suma de las resistencias internas de generador y motor. Aplicando la Expresión (4.34) de la potencia consumida por un motor de un circuito, se obtiene

$$P = \mathcal{E}_m I + r_m I^2 = 220 \times 80 + 1 \times 80^2 \Rightarrow \boxed{P = 24000 \text{ W} .}$$

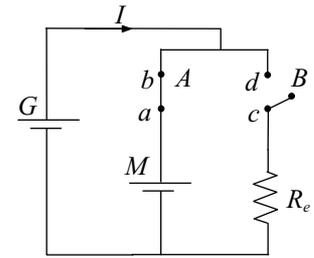


Figura 4.31. Esquema con el interruptor B abierto.

Cuando ambos interruptores están cerrados, la red es la de la Figura 4.32, en el que se han asignado arbitrariamente sentidos a las corrientes en las tres ramas existentes. Para calcular la potencia consumida por el motor es necesario conocer únicamente la corriente I_2 que pasa por él. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a uno de los dos nudos de la figura (por ejemplo al 1),

$$I_1 = I_2 + I_3 . \tag{4.53}$$

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff a las dos mallas de la figura en el sentido indicado en las mismas, resulta

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 380 - 220 &= I_1 + I_2 . \\ \text{(II)} \quad 220 &= 10I_3 - I_2 . \end{aligned}$$

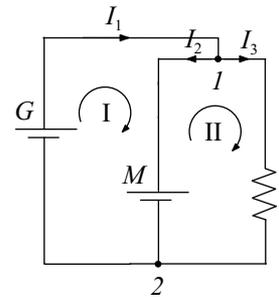


Figura 4.32. Esquema con ambos interruptores cerrados.

En la malla (I) la f.e.m. del motor es negativa al pasar en primer lugar por el polo positivo. La única intensidad negativa es la I_2 en la malla (II), por ser la corriente contraria al sentido de circulación. Reemplazando la Ecuación de nudos (4.53) en las ecuaciones anteriores

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad 160 &= 2I_2 + I_3 . \\ \text{(II)} \quad 220 &= 10I_3 - I_2 . \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_2 = \frac{1380}{21} = 65,7 \text{ A} .$$

La potencia extraída por el motor de la red, según la Expresión (4.34), será

$$P = \mathcal{E}_m I_2 + r_m I_2^2 = 220 \times 65,7 + 1 \times 65,7^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P = 18775 \text{ W} .}$$

4.15 En la red de la Figura 4.33, se conoce que $V_A - V_B = 120 \text{ V}$. a) Razonar cuál es el sentido de la corriente en las diferentes ramas de la red. b) Razonar si el dispositivo de f.e.m. \mathcal{E}_2 funciona como generador o como motor. c) Calcular el valor de \mathcal{E}_2 . d) Calcular el equivalente Thevenin y el equivalente Norton entre A y C .

Resolución

a) De la ley de Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, se sabe que la corriente tiene el sentido de \mathbf{E} , y por tanto va de mayor a menor potencial, en los conductores óhmicos. Por tanto las corrientes de intensidades I_1 e I_2 (Figura 4.34) tienen el sentido de A hacia B .

Aplicando la ley de nudos en A , dado que I_1 e I_2 salen del nudo, la única posibilidad de que la suma algebraica sea nula es que la corriente de intensidad I_3 entre en el nudo.

b) \mathcal{E}_2 es un generador dado que la corriente sale por su borne positivo.

c) Para determinar la f.e.m. \mathcal{E}_2 es necesario calcular la corriente que pasa por el dispositivo. Para simplificar la red, se puede observar que las resistencias superiores de 2 y $4 \text{ k}\Omega$ están en paralelo, con lo que puede sustituirse por su equivalente

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow R_e = \frac{4}{3} \text{ k}\Omega .$$

La red resultante es la de la Figura 4.35, con una única malla por la que circula una corriente I_3 . Puesto que se conoce la diferencia de potencial entre A y B puede determinarse la corriente I_3 aplicando la ley de Ohm (4.15) a los extremos de la resistencia R_e ,

$$V_A - V_B = 120 = \frac{4}{3} I_3 \Rightarrow I_3 = 90 \text{ mA} .$$

Como las resistencias están en $\text{k}\Omega$ las intensidades se obtienen en mA . Conocida la corriente I_3 puede determinarse la f.e.m. \mathcal{E}_2 aplicando la ley de Ohm (4.35) al circuito, que en el sentido de la corriente resulta

$$\mathcal{E}_2 - 220 = \left(2 + \frac{4}{3} \right) 90 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_2 = 520 \text{ V} .}$$

d) Para calcular los equivalentes Thevenin y Norton entre A y C es necesario determinar la diferencia de potencial y la resistencia equivalente entre dichos puntos. Aplicando la ley de Ohm (4.37) entre A y C resulta

$$V_A - V_C + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_3 \Rightarrow (V_A - V_C) + 220 = -1 \times 90 \Rightarrow V_A - V_C = -310 \text{ V} .$$

La f.e.m. de 220 V se introduce con signo positivo porque al circular de A a C se pasa en primer lugar por el borne negativo, mientras que la intensidad se introduce con signo negativo al ser $d\mathbf{l}$ en el recorrido de A a C de sentido contrario a \mathbf{j} . La f.e.m. del equivalente Thevenin es, por tanto, $\mathcal{E}_e = 310 \text{ V}$.

La red pasiva entre A y C es la de la Figura 4.36(a). Los puntos A y C deben permanecer inalterables (la resistencia externa que aparece en la definición de red activa equivalente estaría

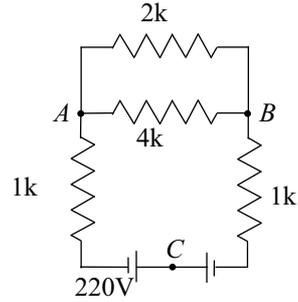


Figura 4.33. Esquema del problema 4.15.

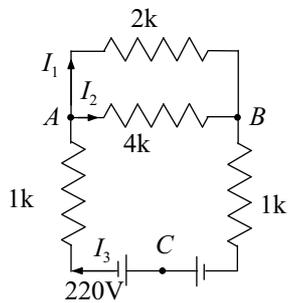


Figura 4.34. Sentidos de las corrientes.

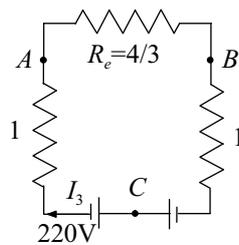


Figura 4.35. Circuito simplificado.

entre dichos puntos). Las resistencias de $4/3$ y $1\text{ k}\Omega$ están en serie, sumándose sus valores [Figura 4.36(b)]. Resolviendo la asociación en paralelo resultante, se obtiene la resistencia equivalente:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \Rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{3}{7} + \frac{1}{1} \Rightarrow R_e = 0,7\text{ k}\Omega.$$

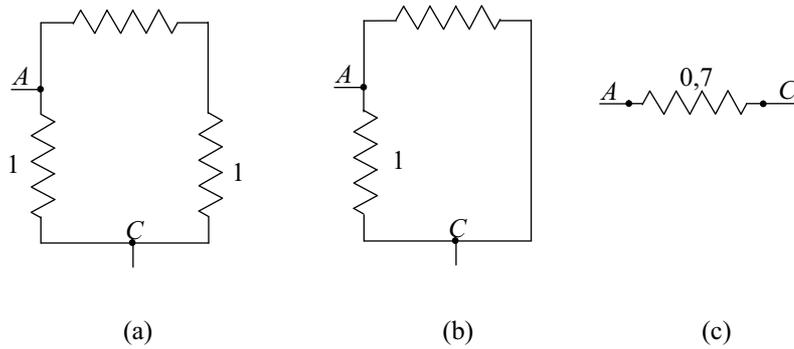


Figura 4.36. Resistencia equivalente de la red pasiva.

Teniendo en cuenta el esquema de la Figura 4.12, el equivalente Thevenin es el de la Figura 4.37(a). Obsérvese que el polo negativo está en el lado del punto A dado que es el de menor potencial ($V_A - V_C$ es negativo).

Para el equivalente Norton es necesario calcular la fuente de intensidad

$$I_e = \mathcal{E}_e / R_e = 310 / 0,7 = 443\text{ mA}.$$

Siguiendo el esquema de la Figura 4.13, el equivalente Norton es el de la Figura 4.37(b). La fuente de intensidad suministra corriente en el sentido de menor a mayor potencial, esto es de A a C, de ahí el sentido de la corriente I_e .

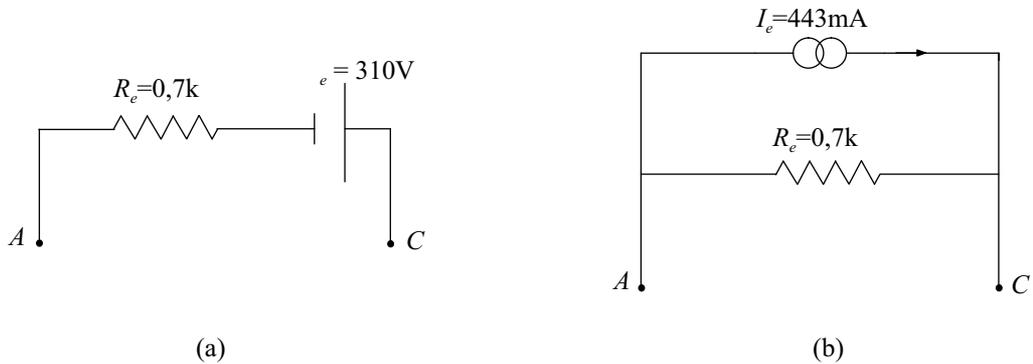


Figura 4.37. (a) Equivalente Thevenin. (b) Equivalente Norton.

4.16 En la red de la Figura 4.38, determine: a) La potencia suministrada por los generadores a la red, cuando el interruptor I está abierto. b) La diferencia de potencial entre los puntos A y B , cuando el interruptor I está cerrado.

Resolución

a) Lo primero que se observa en la red es que se puede simplificar la asociación central de resistencias. Cada resistencia de valor r está en serie con la de valor $r/2$ situada a continuación, con lo que sumando sus valores dan lugar a dos resistencias en paralelo de valor $3r/2$. Resolviendo la asociación en paralelo resulta

$$\frac{1}{R_e} = \frac{2}{3r} + \frac{2}{3r} = \frac{4}{3r} \Rightarrow R_e = 3r/4,$$

quedando la red de la Figura 4.39.

Con el interruptor abierto, sólo pasa una corriente I por el circuito constituido por el generador G_1 de la rama superior y la resistencia $3r/4$. Aplicando la ley de Ohm [Expresión (4.35)] a dicho circuito, en el sentido marcado por la corriente,

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow \mathcal{E} = \left(r + \frac{3r}{4} \right) I = \frac{7r}{4} I \Rightarrow I = \frac{4\mathcal{E}}{7r}.$$

El único generador que aporta potencia al circuito es el generador G_1 y su valor es, según la Expresión (4.29),

$$P_1 = (\mathcal{E} - rI)I = \left(\mathcal{E} - r \frac{4\mathcal{E}}{7r} \right) \frac{4\mathcal{E}}{7r} = \frac{12}{49} \frac{\mathcal{E}^2}{r}.$$

$$P_1 = \frac{12}{49} \frac{\mathcal{E}^2}{r}, \quad P_2 = P_3 = 0.$$

b) Con el interruptor cerrado, la red a resolver mediante las leyes de Kirchhoff es el de la Figura 4.40, con dos nudos A y C y tres ramas. Para su análisis no se considera la rama CB porque por ella no pasa ninguna corriente, al ser una rama aislada que no forma parte de ningún circuito. Se tiene una ecuación de nudos y se necesitan definir dos mallas independientes para resolver el problema. Se asignan sentidos arbitrarios a las corrientes de las ramas y al recorrido de las mallas, tal como se indica en la Figura 4.40.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a uno cualquiera de los dos nudos, resulta

$$I_1 + I_3 = I_2. \tag{4.54}$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a las dos mallas

$$(I) \quad \mathcal{E} = rI_2 + \frac{3r}{4}I_3.$$

$$(II) \quad \mathcal{E} = 2rI_1 - \frac{3r}{4}I_3,$$

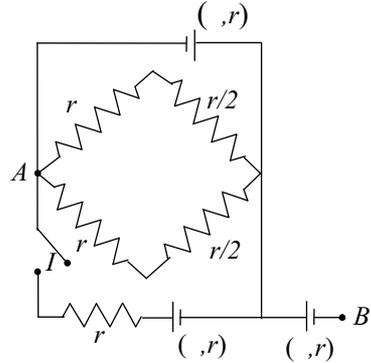


Figura 4.38. Esquema del problema 4.16.

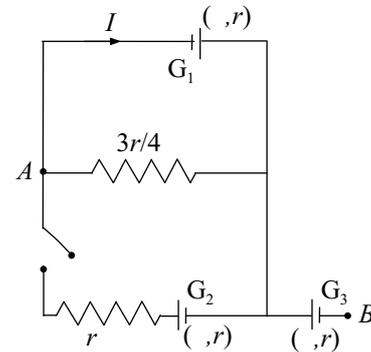


Figura 4.39. Circuito simplificado.

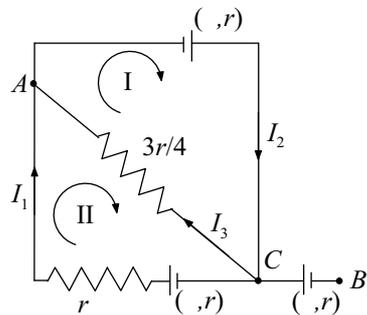


Figura 4.40. Esquema para aplicar las leyes de Kirchhoff.

en la cual sólo la corriente de intensidad I_3 se encuentra en sentido contrario al recorrido, en la malla (II), introduciéndose con signo negativo. Los dos generadores son recorridos entrando por el polo negativo, de ahí que las f.e.m. se introduzcan con signo positivo.

Sustituyendo la Ecuación de nudos (4.54) en estas dos ecuaciones y resolviendo, resulta

$$I_1 = \frac{10 \mathcal{E}}{17 r}, \quad I_2 = \frac{14 \mathcal{E}}{17 r}, \quad I_3 = \frac{4 \mathcal{E}}{17 r}.$$

Para calcular la diferencia de potencial entre A y B se aplica la ley de Ohm (4.37) a las ramas AC y CB , observando que en el tramo AB la corriente es contraria al sentido de recorrido (signo negativo) y que en CB no pasa corriente y el generador se recorre entrando por el polo positivo, debiéndose introducir su f.e.m. con signo negativo:

$$V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I \Rightarrow V_A - V_B - \mathcal{E} = -\frac{3r}{4} I_3 + r \times 0 = -\frac{3r}{4} \frac{4 \mathcal{E}}{17 r} = -\frac{3}{17} \mathcal{E}.$$

Como puede observarse la ley de Ohm puede aplicarse directamente, aunque haya varias ramas, sin más que sustituir por las intensidades que recorren cada resistencia (I_3 y 0 en este caso). Despejando resulta que

$$V_A - V_B = \frac{14}{17} \mathcal{E}.$$

- 4.17** Un montaje simple de un potenciómetro se muestra en la Figura 4.41. La resistencia R_0 se construye con un hilo AB homogéneo, de resistividad ρ_0 , sección S y longitud AB . El generador P es un acumulador de plomo. Puesto el interruptor en la posición a para permitir el paso de la corriente por la pila patrón \mathcal{E}_S se ajusta el reostato R para que la corriente por el galvanómetro G sea nula. Se pasa el interruptor a la posición b y se mueve al cursor C sobre AB hasta que la corriente por G sea nula. Calcular la fuerza electromotriz \mathcal{E} desconocida del generador.

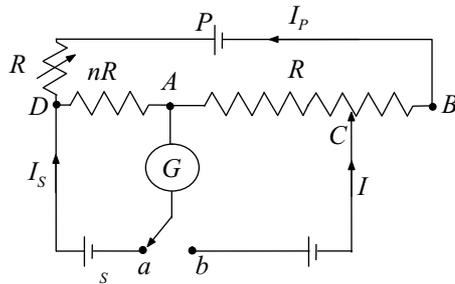


Figura 4.41. Montaje simple de un potenciómetro.

Resolución

El valor de la resistencia R_0 se obtiene directamente de la expresión de la resistencia de un conductor filiforme de sección constante [Expresión (4.17)],

$$R_0 = \rho_0 \frac{AB}{S}. \tag{4.55}$$

Con el interruptor en a , se ajusta R para que por el galvanómetro no pase corriente, con lo que $I_S = 0$. Aplicando la ley de Ohm (4.35) a la malla $aDAa$ resulta

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow \mathcal{E}_S = nR_0 I_P = V_D - V_A \Rightarrow I_P = \frac{\mathcal{E}_S}{nR_0}, \tag{4.56}$$

dado que por la rama DA pasaría la suma de las corrientes I_P e I_S , pero esta última es nula.

Con el interruptor en b , se ajusta el cursor de la resistencia R_0 para que no pase corriente por el galvanómetro, con lo que ahora $I = 0$. Al aplicar la ley de Ohm a la malla $ACbA$, es necesario conocer la fracción de la resistencia R_0 que interviene en el cálculo. Aplicando la Expresión (4.17) de la resistencia de un hilo y teniendo en cuenta el valor de R_0 de la Ecuación (4.55), se obtiene

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{AC}{S} = R_0 \frac{AC}{AB} .$$

Empleando ahora la ley de Ohm, teniendo en cuenta que sólo pasa corriente por el tramo de la resistencia R_0 calculado, y que dicha corriente es $I_P - I = I_P$, por ser nula la corriente por el galvanómetro, se llega a

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow \mathcal{E} = R_0 \frac{AC}{AB} I_P = V_A - V_C .$$

El sentido de recorrido ha sido $ACbA$, en el mismo sentido que la corriente de intensidad I_P (positiva, por tanto) y entrando por el polo negativo del generador \mathcal{E} (positivo, también). Sustituyendo el valor de I_P de la Ecuación (4.56) de la malla $aDAa$ resulta

$$\mathcal{E} = \frac{AC}{AB} \frac{\mathcal{E}_S}{n} .$$

4.18 El puente de hilo es una red como la representada en la Figura 4.42. El hilo es homogéneo, de sección constante y longitud L . Se emplea para calcular una resistencia desconocida (R_2) variando el cursor sobre el hilo hasta hacer que pase una corriente nula por el galvanómetro. Siendo conocido el valor de R_1 y midiendo la longitud x sobre el hilo, determinar cuál es el valor de R_2 .

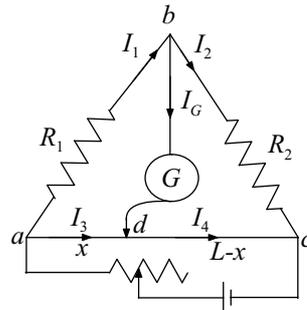


Figura 4.42. Esquema de un puente de hilo.

Resolución

Lo primero a considerar es el valor de la resistencia de los tramos de hilo de longitud x y $L - x$ en que el galvanómetro divide el hilo L . Aplicando la Expresión (4.17) de la resistencia de un hilo, se pueden obtener las dos resistencias en que queda dividido el hilo:

$$R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow R_3 = \rho \frac{x}{S}, \quad R_4 = \rho \frac{L - x}{S} .$$

Dado que se conoce el valor de la intensidad I_G por el galvanómetro, la cual hay que anular, aplicando la ley de nudos a aquellos nudos en los que interviene I_G se simplifican muchos cálculos:

$$\begin{aligned} \text{Nudo } b : \quad I_1 &= I_2 + I_G = I_2 . \\ \text{Nudo } d : \quad I_4 &= I_3 + I_G = I_3 . \end{aligned}$$

Aplicando ahora la ley de Kirchhoff a la malla $abda$, con la corriente de intensidad I_1 en el sentido del recorrido (positiva) y la I_3 en sentido contrario,

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \Rightarrow 0 = R_1 I_1 - R_3 I_3 \Rightarrow R_1 I_1 = R_3 I_3 .$$

Repetiendo el cálculo para la malla bcd , con la corriente de intensidad I_2 en el sentido del recorrido (positiva) y la I_4 en sentido contrario,

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \Rightarrow 0 = R_2 I_2 - R_4 I_4 = R_2 I_1 - R_4 I_3 \Rightarrow R_2 I_1 = R_4 I_3 ,$$

en donde se han sustituido los valores de I_2 e I_4 obtenidos de las ecuaciones de nudos. Dividiendo ambas ecuaciones resulta

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{\rho x/S}{\rho(L-x)/S} = \frac{x}{L-x} .$$

Despejando el valor de R_2 se tiene

$$R_2 = R_1 \frac{L-x}{x} .$$

Por tanto, mediante este montaje, conociendo simplemente el valor de la resistencia R_1 y midiendo la longitud de hilo en donde se coloca el cursor del puente cuando por el galvanómetro no pasa corriente, puede determinarse el valor de resistencias desconocidas.

4.19 Entre los puntos a y b hay una combinación infinita de resistencias en serie y en paralelo R_1 y R_2 (Figura 4.43). Calcular la resistencia equivalente R_e entre a y b .

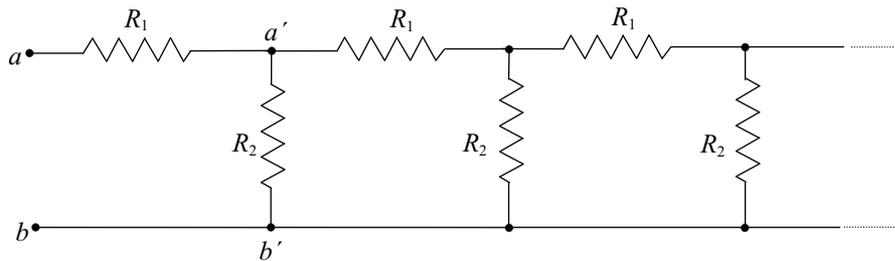


Figura 4.43. Combinación infinita de resistencias en serie y paralelo.

Resolución

Por ser infinita la red, si se corta por a' y b' la resistencia equivalente entre estos puntos seguirá siendo la misma resistencia R_e que entre a y b . Luego la red dada es equivalente a la de la Figura 4.44(a). Resolviendo la asociación en paralelo entre las resistencias R_2 y R_e se obtiene la Figura 4.44(b),

$$\frac{1}{R'_e} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R'_e = \frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e} .$$

Las resistencias R_1 y R'_e están en serie, por lo que sumando ambas resistencias se encuentra la asociación definitiva 4.44(c),

$$R_e = R_1 + R'_e = R_1 + \frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e} .$$

Despejando R_e de la ecuación se obtiene la ecuación de segundo grado en R_e

$$R_e^2 - R_1 R_e - R_1 R_2 = 0 ,$$

cuya solución es

$$R_e = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2} .$$

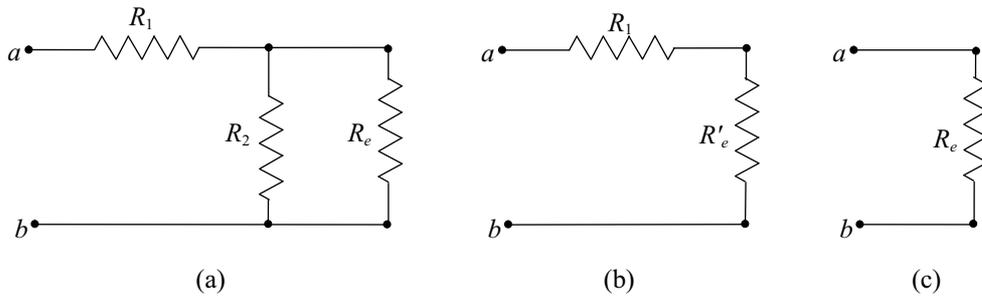


Figura 4.44. Simplificación de la combinación infinita de resistencias.

4.20 En la red de la Figura 4.45, a) calcular los equivalentes Thevenin y Norton entre A y B ; b) Si entre dichos bornes se conecta un motor de 6 V y resistencia interna de $0,5\ \Omega$, calcular la potencia consumida por dicho motor.

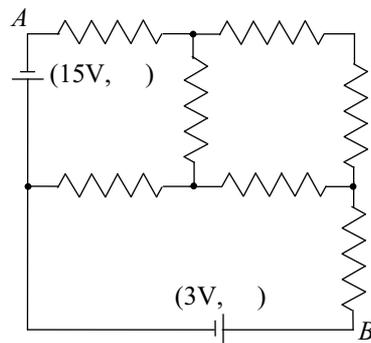


Figura 4.45. Red del problema 4.20.

Resolución

a) Para calcular los equivalentes Thevenin y Norton es necesario calcular la d.d.p. y la resistencia equivalente entre A y B . La red presenta 6 ramas y 4 nudos, aunque el cuadrado superior derecho puede simplificarse al estar constituido sólo por resistencias (como se hará al calcular la resistencia equivalente), lo que simplificaría su resolución aplicando las leyes de Kirchoff. Sin embargo se va a resolver en esta ocasión el ejercicio aplicando la regla de Maxwell (4.39), sin realizar ninguna simplificación en la red. Se definen para ello las intensidades de malla de la Figura 4.46, con los sentidos indicados y se construyen las matrices de f.e.m., resistencias e intensidades de malla, para aplicar $\mathcal{E}_i = \sum_j R_{ij}i_j$:

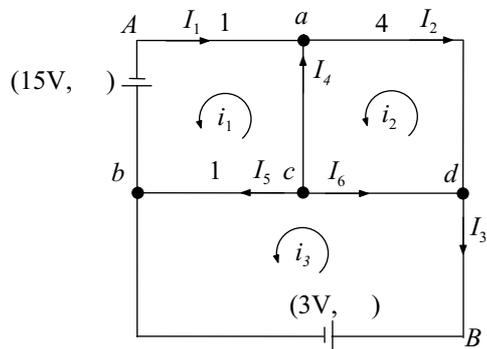


Figura 4.46. Esquema para aplicar la regla de Maxwell.

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3 + 1 + 6 & -6 & -1 \\ -6 & 6 + 6 + 2 + 4 & -6 \\ -1 & -6 & 1 + 3 + 1 + 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & -1 \\ -6 & 18 & -6 \\ -1 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

Las f.e.m. se han introducido con signo positivo, puesto que en los sentidos de recorrido indicados siempre se pasa primero por el polo negativo. Los valores de la diagonal principal de la matriz de resistencias son la suma de las resistencias de cada malla. La resistencia de 6Ω de la rama común a las mallas (i_1) y (i_2) se recorre en sentido contrario según se trate de una u otra malla, de ahí que se introduzca con signo negativo. Lo mismo ocurre para la rama de 1Ω común a las mallas (i_1) y (i_3) y a la rama de 6Ω común a las mallas (i_2) y (i_3). Es importante no olvidarse de considerar las resistencias internas de los generadores y motores. Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta

$$i_1 = 2\text{ A} , \quad i_2 = 1\text{ A} , \quad i_3 = 1\text{ A} .$$

Las intensidades reales de cada rama se obtienen combinando las intensidades de malla que pasan por cada rama. Así, por ejemplo, por la rama de intensidad I_4 pasa la intensidad de malla i_1 en el sentido de I_4 y la intensidad de malla i_2 en sentido contrario, con lo que $I_4 = i_1 - i_2$. Operando de esta manera para todas las ramas resulta

$$I_1 = -i_1 = -2\text{ A} , \quad I_2 = -i_2 = -1\text{ A} , \quad I_3 = -i_3 = -1\text{ A} .$$

$$I_4 = i_1 - i_2 = 1\text{ A} , \quad I_5 = -i_1 + i_3 = -1\text{ A} , \quad I_6 = i_2 - i_3 = 0 .$$

Los signos negativos en las intensidades indican que el sentido real del vector densidad de corriente es contrario al supuesto en el dibujo.

Para calcular la d.d.p. entre A y B , y por lo tanto la f.e.m. equivalente, no es necesario conocer todas las intensidades anteriores. Por ejemplo, puede realizarse la circulación según la línea $AadB$, necesiándose sólo I_1, I_2, I_3 . La ley de Ohm para una rama (4.37), $V_A - V_B + \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i$, se aplicará sucesivamente para cada una de las ramas del tramo AB , lo que en la práctica equivale a multiplicar cada resistencia por la intensidad que la recorre. Para realizar el cálculo se puede optar por corregir los sentidos de las corrientes o por mantener los sentidos del dibujo original y utilizar las intensidades con los signos obtenidos. Se hará de esta última manera. Así, realizando dicho cálculo, teniendo en cuenta que todas las corrientes están dibujadas en el sentido de circulación (mismo sentido de \mathbf{j} y $d\mathbf{l}$, de A a B), y que por tanto todas las intensidades son positivas, se tiene

$$V_A - V_B = I_1 + (4 + 2)I_2 + I_3 = -2 + 6(-1) - 1 = -9\text{ V} ,$$

en donde la f.e.m. equivalente es $\mathcal{E}_e = 9\text{ V}$. Puede comprobarse el resultado calculando la d.d.p. por otro camino, por ejemplo AbB , resultando

$$V_A - V_B + 15 + 3 = -3I_1 - 3I_3 = -3(-2) - 3(-1) \Rightarrow V_A - V_B = -9\text{ V} .$$

Obsérvese que en este caso las f.e.m. se introducen con signo positivo, al pasarse en primer lugar por el polo negativo de ambos dispositivos, y sin embargo las intensidades son negativas, al ser contrarios en dicho camino \mathbf{j} y $d\mathbf{l}$.

Para calcular la resistencia equivalente se sigue el esquema de la Figura 4.47. Debe recordarse que los puntos A y B no se pueden alterar, al estar calculando la resistencia equivalente entre ellos. Las resistencias de 4 y 2Ω del cuadrado superior de la Figura 4.47(a) están en serie y se suman. En la Figura 4.47(b) las tres resistencias de 6Ω están en triángulo. Simplificándose a una asociación en estrella, cada resistencia de esta asociación tiene de valor $R = \frac{6 \times 6}{6 + 6 + 6} = 2\Omega$. En la Figura 4.47(c) las resistencias de 1 y 2Ω están en serie, sumándose y dando la Figura 4.47(d), en la cual hay dos triángulos. Resolviendo el triángulo inferior, cada resistencia de la estrella resultante vale $R = \frac{3 \times 3}{3 + 3 + 3} = 1\Omega$. En la Figura 4.47(e) las resistencias de 3 y 1Ω están en serie sumándose y resultando la Figura 4.47(f), con dos resistencias de 4Ω en paralelo entre sí y ambas en serie con una resistencia de 1Ω . El resultado es

$$R_e = 1 + \frac{1}{1/4 + 1/4} = 3\Omega .$$

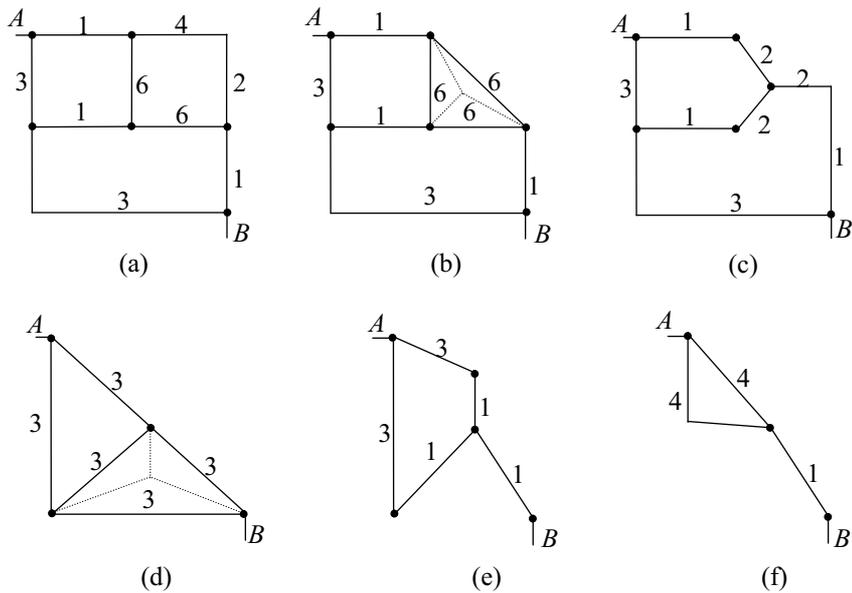


Figura 4.47. Esquema para el cálculo de la resistencia equivalente de la red pasiva.

Tomando en consideración el esquema de la Figura 4.12, el equivalente Thevenin es el de la Figura 4.48(a). Obsérvese que el polo negativo está en el lado del punto A dado que éste es el de menor potencial ($V_A - V_B$ es negativo).

Para el equivalente Norton es necesario calcular la fuente de intensidad

$$I_e = \mathcal{E}_e / R_e = 9/3 = 3 \text{ A.}$$

Según el esquema de la Figura 4.13, el equivalente Norton es el de la Figura 4.48(b). La fuente de intensidad suministra corriente en el sentido de menor a mayor potencial, esto es de A a B, de ahí el sentido de la corriente I_e .

b) Para calcular la potencia consumida por el motor, se conecta éste a los extremos A y B del equivalente Thevenin (Figura 4.49), dado que el comportamiento de éste es el mismo que el de la red completa. Aplicando la ley de Ohm [Expresión (4.35)] al circuito en el sentido de la corriente, tenemos

$$\sum_i \mathcal{E}_i = I \sum_i R_i \Rightarrow 9 - 6 = (3 + 0,5)I \Rightarrow I = 0,86 \text{ A.}$$

La potencia consumida por el motor (extraída del circuito) es, según la Expresión 4.34,

$$P = (V_B - V_A)I = (\mathcal{E} + rI)I = (6 + 0,5 \times 0,86) \times 0,86,$$

$P = 5,51 \text{ W.}$

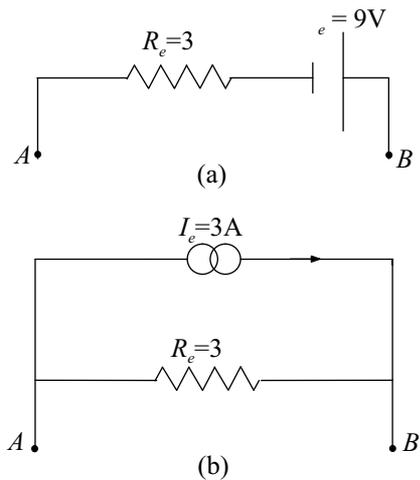


Figura 4.48. (a) Equivalente Thevenin. (b) Equivalente Norton.

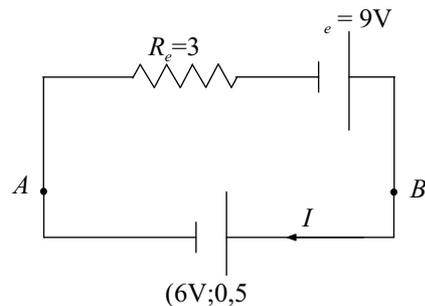


Figura 4.49. Circuito para el cálculo de la potencia consumida en el motor.

4.21 Las redes de la Figura 4.50(a) y (b) están construidas de la siguiente manera: todos los generadores tienen la misma f.e.m., $\mathcal{E} = 24\text{ V}$ y resistencia interna $r = 2\ \Omega$; las ramas que no tienen generadores están constituidas por hilos de resistencia $R = 20\ \Omega$; las ramas de los generadores tienen resistencia $R = 20\ \Omega$ en el caso del pentágono de la figura (a) y del pentágono exterior de la figura (b), y resistencia $R/2 = 10\ \Omega$ en el caso del pentágono interior de la figura (b). Determinar la corriente por cada rama y la potencia disipada por efecto Joule.

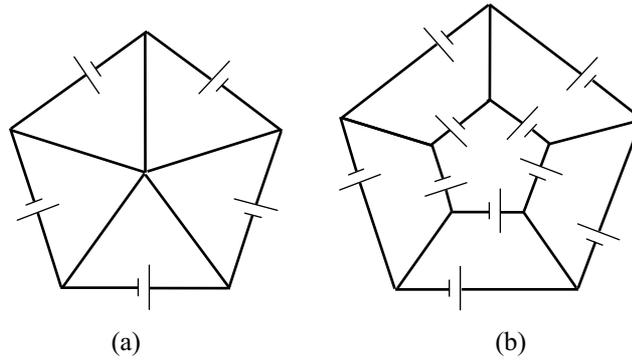


Figura 4.50. Redes de conductores del problema 4.21.

Resolución

Si se analizan tanto la Figura 4.51(a) como la Figura 4.51(b), puede observarse por la simetría de las figuras que $I_1 = I_2$, lo que ocurriría para todas las intensidades de las ramas sin generadores. De la misma simetría se deduce que $I_6 = I_7$, y en la Figura 4.51(b) que $I_{11} = I_{12}$, lo que indica que también en todas las ramas que definen el pentágono con generadores la intensidad es la misma.

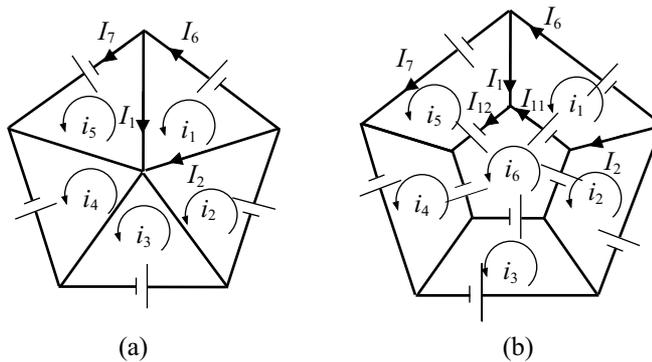


Figura 4.51. Intensidades de malla.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nudo central en la Figura 4.51(a) resulta

$$\sum_i I_i = 5I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 .$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la malla (i_1) de la Figura 4.51(a) en el sentido indicado resulta

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \Rightarrow \mathcal{E} = (R + r)I_6 + RI_1 - RI_2 \Rightarrow 24 = 22I_6 .$$

Despejando, resulta que para todas las ramas externas del pentágono

$$I = 1,09\text{ A} .$$

La potencia disipada por efecto Joule es

$$P = \sum_i R_i I_i^2 = 5(R+r)I^2 = 5 \times (20+2) \times 1,09^2 \Rightarrow \boxed{P = 131 \text{ W} ,}$$

dado que sólo hay corriente en los lados del pentágono.

Para el caso de la Figura 4.51(b), aplicando la ley de nudos a cualquiera de los nudos exteriores resulta

$$\sum_i I_i = -I_6 + I_7 + I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 0 ,$$

al ser $I_6 = I_7$ por simetría. Por tanto la corriente en las ramas sin generadores es también nula en este caso. Aplicando la ley de mallas a la malla interior (i_6) se tiene

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i R_i I_i \Rightarrow 5\mathcal{E} = 5(R/2+r)I_{11} \Rightarrow 24 = 12I_{11} \Rightarrow \boxed{I_{\text{int}} = 2 \text{ A} ,}$$

para todas las ramas del pentágono interior.

Para calcular la intensidad de las ramas exteriores, se aplica la ley de mallas a una malla como la (i_1), obteniéndose

$$\mathcal{E} - \mathcal{E} = (R+r)I_6 + RI_1 - (R/2+r)I_{11} - RI_2 \Rightarrow 0 = 22I_6 - 12I_{11} = 22I_6 - 24 \Rightarrow \boxed{I_{\text{ext}} = 1,09 \text{ A} ,}$$

para las ramas del pentágono exterior, idéntico resultado al obtenido para la red de la Figura 4.51(a). La potencia disipada por efecto Joule, dado que sólo hay corriente en los lados de los pentágonos exterior e interior, es

$$P = \sum_i R_i I_i^2 = 5(R+r)I_{\text{ext}}^2 + 5(R/2+r)I_{\text{int}}^2 = 5 \times (20+2) \times 1,09^2 + 5 \times (10+2) \times 2^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P = 371 \text{ W} .}$$

Podría resolverse el problema sin aplicar los razonamientos de simetría, mediante la regla de Maxwell, planteando las ecuaciones para las mallas independientes de la Figura 4.51, 5 para el caso de la Figura 4.51(a) y 6 para el caso de la Figura 4.51(b). Empleando las intensidades de malla de la figura, aplicando los sentidos indicados a todas las mallas, se construyen las matrices de f.e.m., resistencias e intensidades de malla, para aplicar $\mathcal{E}_i = \sum_j R_{ij} i_j$. En el caso de la Figura 4.51(a),

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 & -20 & 0 & 0 & -20 \\ -20 & 62 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 62 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 62 & -20 \\ -20 & 0 & 0 & -20 & 62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix}$$

Las f.e.m. se han introducido con signo positivo, puesto que en los sentidos de recorrido indicados siempre se pasa primero por el polo negativo. Los valores de la diagonal principal de la matriz de resistencias son la suma de las resistencias de cada malla, igual a $R+r+R+R=62\Omega$. La resistencia de la rama común a dos mallas siempre se recorre en sentido contrario según se trate de una u otra malla, de ahí que se introduzca con signo negativo ($-R=-20\Omega$). Resolviendo el sistema de ecuaciones¹² se obtiene

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 1,09 \text{ A} ,$$

que es el valor de la corriente por las ramas exteriores. Por las ramas comunes, la corriente que pasa es la resta de cada dos intensidades de malla (por ejemplo, $I_2 = i_2 - i_1$), resultando una corriente nula por todas ellas, resultado idéntico al obtenido aplicando las ideas de simetría.

¹²En los apéndices se incluye un programa para MATLAB con la resolución de los sistemas de ecuaciones.

En el caso de la Figura 4.51(b),

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & -20 & 0 & 0 & -20 & -12 \\ -20 & 74 & -20 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -20 & 74 & -20 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -20 & 74 & -20 & -12 \\ -20 & 0 & 0 & -20 & 74 & -12 \\ -12 & -12 & -12 & -12 & -12 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

Las f.e.m. se han introducido con signo positivo en la malla i_6 , puesto que en los sentidos de circulación indicados siempre se pasa primero por el polo negativo. El resto de valores en la matriz de f.e.m. son nulos, por recorrerse los generadores del pentágono exterior e interior en sentidos opuestos. Los valores de la diagonal principal de la matriz de resistencias son la suma de las resistencias de cada malla. La resistencia de la rama común a dos mallas siempre se recorre en sentido contrario según se trate de una u otra malla, de ahí que se introduzca con signo negativo. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 1,09 \text{ A}, \quad i_6 = 3,09 \text{ A}.$$

Por las ramas comunes, la corriente que pasa es la resta de cada dos intensidades de malla (por ejemplo, $I_2 = i_2 - i_1$), resultando una corriente nula por todas ellas. Por el pentágono exterior, la corriente coincide con las intensidades de malla de la 1 a la 5, esto es, $I_{\text{ext}} = 1,09 \text{ A}$. En el caso de las ramas del pentágono interior, la corriente por una cualquiera de ellas es $I_{\text{int}} = i_6 - i_j = 2 \text{ A}$, siendo i_j una cualquiera de las intensidades de mallas de la 1 a la 5. Los resultados son idénticos a los obtenidos aplicando la simetría.

4.22 Las cuatro ramas de un puente de Wheatstone y el galvanómetro G de la Figura 4.52 tienen la misma resistencia $r = 1000 \Omega$. El generador tiene una f.e.m. de 24 V y resistencia interna despreciable. Hallar la resistencia R_x de protección que debe asociarse en serie con la f.e.m. para que si, por accidente, se establece un cortocircuito entre B y C , la intensidad a través del galvanómetro no exceda de 1 mA .

Resolución

La existencia de un cortocircuito entre B y C supone que dichos puntos se ponen al mismo potencial. La causa puede ser, por ejemplo, un contacto mediante un hilo con resistencia despreciable, tal como se indica en la Figura 4.53(a).

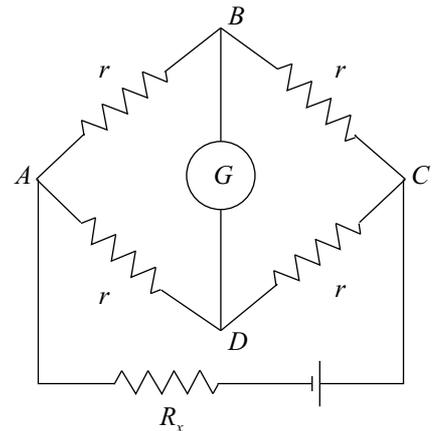


Figura 4.52. Puente de Wheatstone.

La red equivalente es la de la Figura 4.53(b): están en paralelo una resistencia r y una resistencia nula, siendo así la resistencia equivalente nula. La red se va a resolver aplicando la regla de Maxwell (4.39) a las mallas indicadas en la figura y en el sentido indicado en las mismas. Así, resulta

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x + 2000 & 1000 & 1000 \\ 1000 & 2000 & -1000 \\ 1000 & -1000 & 3000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

La f.e.m. se ha introducido con signo positivo, puesto que en el sentido de recorrido de la malla (i_1) se pasa primero por el polo negativo. Los valores de la diagonal principal de la matriz de resistencias son la suma de las resistencias de cada malla. La resistencia de 1000Ω de la rama común a las mallas (i_1) y (i_2) se recorre en el mismo sentido para ambas mallas, de ahí que se introduzca con signo positivo. Lo mismo ocurre para las mallas (i_1) y (i_3). Sin embargo para las

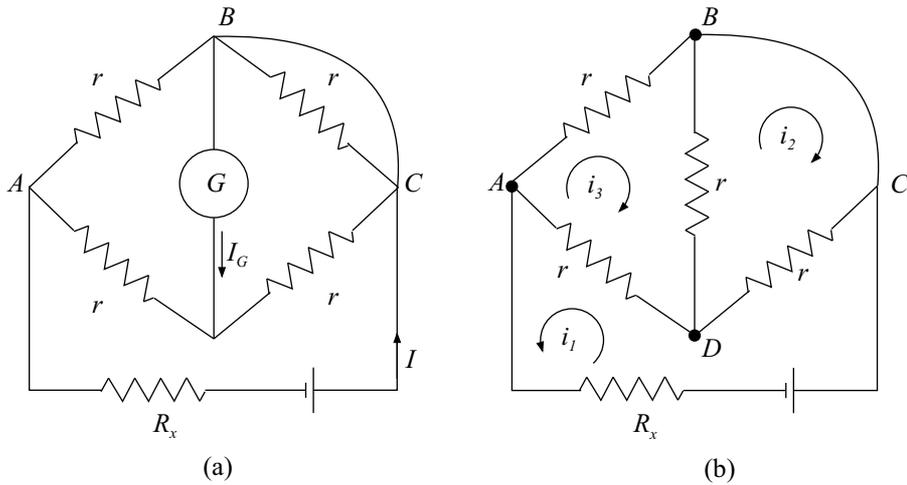


Figura 4.53. Simplificación de la red como consecuencia del cortocircuito.

mallas (i_2) y (i_3), el sentido de recorrido de la resistencia común es contrario, de ahí el signo negativo.

Las intensidades reales de cada rama se obtienen combinando las intensidades de malla que pasan por cada rama. De ahí que para la intensidad que pasa por el galvanómetro I_G , dato del problema e igual a 1 mA, se tiene

$$I_G = 1 \text{ mA} = i_3 - i_2 \Rightarrow i_3 = i_2 + 1 . \quad (4.57)$$

Introduciendo las intensidades en mA en las ecuaciones anteriores, las resistencias deben convertirse a k Ω para resolverse en unidades consistentes, resultando

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x + 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_2 + 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de las dos últimas ecuaciones y sustituyendo en la Ecuación (4.57) resulta

$$i_1 = 5 \text{ mA} , \quad i_2 = -4 \text{ mA} , \quad i_3 = -3 \text{ mA} .$$

Con la primera de las ecuaciones se obtiene

$$24 = 5(R_x + 2) - 4 - 4 + 1 \Rightarrow \boxed{R_x = 4,2 \text{ k}\Omega .}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

4.23 Se consideran tres bombillas cuyas características de voltaje y potencia son las siguientes: (1) 100 V – 75 W; (2) 220 V – 75 W; (3) 220 V – 150 W. a) Clasificar por orden creciente las resistencias de las bombillas. b) Clasificar por orden creciente las intensidades que atraviesan cada bombilla cuando se conectan al voltaje adecuado.

Solución: a) (1),(3),(2). b) (2),(3),(1).

- 4.24** Se conoce que en cualquier punto de un hilo de cobre (resistividad $1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$) de 0.6 mm de radio y 2m de longitud, el campo eléctrico es perpendicular a la sección recta del hilo y vale 0.01 V/m. Determinar: a) la densidad de corriente en cualquier punto del hilo; b) la intensidad de corriente por el hilo; c) la resistencia del hilo; d) la diferencia de potencial entre los extremos del hilo; e) la potencia disipada en el hilo.

Solución: a) 588235 Am^{-2} . b) 0,665 A. c) $0,03 \Omega$. d) 0,02 V. e) 0,013 W.

- 4.25** Determinar la resistencia del hilo de la Figura 4.54, formado por dos cables cilíndricos 1 y 2, de cobre, de la misma longitud pero diferente radio. Si entre los extremos a y b se establece una diferencia de potencial $V_a - V_b = 10 \text{ V}$, determinar la intensidad, el vector densidad de corriente y el campo eléctrico en los cables 1 y 2. Datos numéricos: $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$, $L = 2 \text{ m}$, $R = 10 \text{ mm}$.

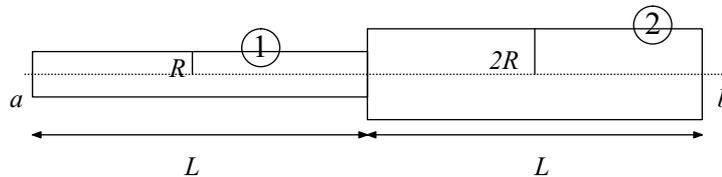


Figura 4.54. Unión de dos cables cilíndricos de cobre de distinto radio.

Solución: $R = 0,0135 \Omega$. $I_1 = I_2 = 739 \text{ A}$. $j_1 = 2,35 \times 10^8 \text{ Am}^{-2}$, $j_2 = 5,88 \times 10^7 \text{ Am}^{-2}$. $E_1 = 4 \text{ V/m}$, $E_2 = 1 \text{ V/m}$.

- 4.26** A un generador de fuerza electromotriz \mathcal{E} y resistencia interna r se conecta una pila reversible formando circuito. De las dos maneras que puede funcionar la pila reversible, ¿en cuál se disipa mayor energía por efecto Joule en el circuito?.

Solución: Funcionando como generador.

- 4.27** Con un generador ideal de f.e.m. \mathcal{E} se quiere alimentar una resistencia. ¿Cómo deberá ser ésta para que las pérdidas por efecto Joule sean pequeñas?

Solución: Lo mayor posible.

- 4.28** Dos generadores de la misma f.e.m. pero diferentes resistencias internas r_1 y r_2 ($r_1 > r_2$) y una resistencia R se conectan en serie formando circuito. Hallar la relación que deben cumplir las resistencias para que el generador 1 no suministre ni extraiga energía del circuito.

Solución: $R = r_1 - r_2$

- 4.29** ¿Cómo se montarían un conjunto de tres resistencias iguales (en serie, en paralelo, dos en paralelo con la otra en serie, dos en serie con la otra en paralelo,) para que la d.d.p. entre los bornes del generador real que les alimenta sea lo menor posible?

Solución: Las tres en paralelo.

- 4.30** En la red de la Figura 4.55, el valor de las resistencias está expresado en Ω y todas las pilas tienen una f.e.m. de 10 V y una resistencia interna de 1Ω . a) Calcular los equivalentes Thevenin y Norton entre los bornes A y B . b) Si entre dichos bornes se conecta una resistencia de 2Ω , calcular la potencia disipada por efecto Joule en dicha resistencia.

Solución: a) $\mathcal{E}_e = 8,08 \text{ V}$, $R_e = 0,9 \Omega$, $I_e = 8,98 \text{ A}$. b) 15,53 W.

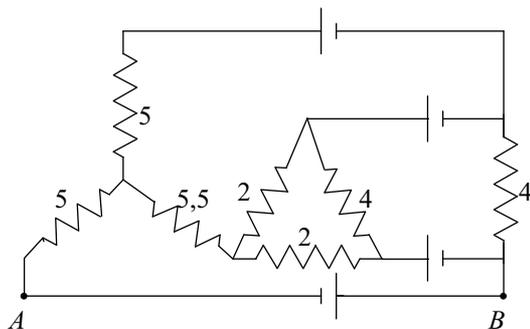


Figura 4.55. Red del problema 4.30.

- 4.31** Los dos dispositivos de la Figura 4.56 de f.e.m. 60 V y 55 V y resistencias internas $0,5 \Omega$, alimentan un motor de f.c.e.m. 20 V y resistencia interna $0,5 \Omega$ a través de una línea de resistencia R . Determinar:
- Con el interruptor abierto, la diferencia de potencial entre los puntos a y b .
 - Con el interruptor cerrado, la resistencia R de la línea y las pérdidas por efecto Joule en la misma, cuando el motor absorbe de la red una potencia de 682 W.

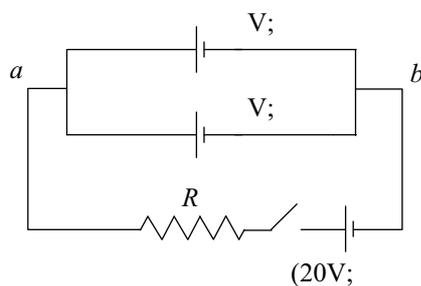


Figura 4.56. Red del problema 4.31.

- 4.32** En la red de la Figura 4.57 se pide: a) ¿Qué valor debe tener R_x para que no pase corriente por la resistencia R ? b) En el caso anterior, ¿qué corriente pasa por la resistencia de 4Ω ? c) En el mismo caso, comparar la caída de tensión entre G y C con la f.e.m. en la rama inferior

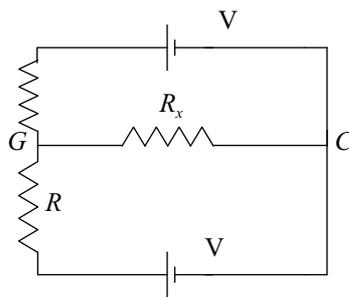


Figura 4.57. Red del problema 4.32.

- 4.33** En la red de la Figura 4.58, 1, 2 y 3 son dispositivos de f.e.m. 12, 6 y 9 voltios, respectivamente, y resistencias internas de 0.5 ohmios. Se pide, calcular: a) Cuando el interruptor I está abierto, la d.d.p. entre A y B . b) Cuando el interruptor I está cerrado, 1) d.d.p. entre A y B ; 2) balance energético de cada dispositivo.

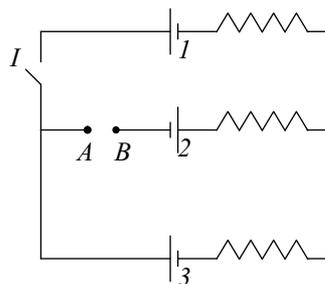


Figura 4.58. Red del problema 4.33.

Solución: a) 57,5 V. b) $0,95 \Omega$, 462 W.

Solución: a) 1Ω . b) 2 A. c) Son iguales.

Solución: a) 15 V. b) 1) 16,8 V. 2) $P_1 = 8,72 \text{ W}$, $P_2 = 0$, $P_3 = 7,03 \text{ W}$.

MAGNETOSTÁTICA

Como ya se vio cuando se estudió el campo electrostático, existían unas ecuaciones diferenciales, a través de las cuales era posible determinar el campo eléctrico \mathbf{E} en cualquier punto del espacio para fenómenos estacionarios. Además, éstas nos permitían conocer cuáles eran las fuentes del campo eléctrico. Del mismo modo que entonces, estamos ahora interesados en averiguar qué leyes generales rigen el comportamiento del campo magnético independiente del tiempo. El estudio de este caso particular de campo es la finalidad de la magnetostática, la cual tiene por objeto el estudio del campo magnético creado por corrientes estacionarias.

5.1. ECUACIONES PUNTUALES DE LA MAGNETOSTÁTICA

Las ecuaciones diferenciales básicas para el campo magnético estacionario son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.2)$$

La primera ecuación indica que un posible origen del campo magnético¹ es la corriente eléctrica, es decir, las cargas eléctricas en movimiento generan un campo magnético. La segunda, al ser igual a cero, significa que ningún punto del espacio es fuente o sumidero, por lo que no pueden existir cargas magnéticas (monopolos). En definitiva: el campo magnético posee fuentes vectoriales (densidad de corriente) pero no tiene fuentes escalares (densidad de carga magnética). Si existieran cargas magnéticas de forma similar a las cargas eléctricas, la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B}$ tendría que ser distinta de cero, de una forma semejante a la ley de Gauss para el campo eléctrico². La no existencia de carga magnética hace que las líneas de \mathbf{B} tengan las siguientes características: 1) Al no tener \mathbf{B} divergencia, dichas líneas de campo magnético tienen que ser cerradas. 2) Otra posibilidad teórica compatible con lo anterior es que nazcan y mueran en el infinito, en cuyo caso tampoco tienen principio ni fin. 3) Las líneas de \mathbf{B} llenan una superficie densamente, no pudiendo establecer origen o final.

¹Es habitual en los textos denominar al campo \mathbf{B} inducción magnética. Nosotros le llamaremos, simplemente, campo magnético \mathbf{B} , con el fin de no equivocar al lector con el fenómeno de la inducción electromagnética (Capítulo 7).

²En realidad, si existe una teoría sobre los monopolos magnéticos, si bien, hasta la fecha, no han sido detectados experimentalmente

La unidad de medida del campo magnético \mathbf{B} en el S.I. es el Tesla, y se simboliza con la letra T. Con el fin de aportar alguna idea de cuán grande o pequeña es esta unidad veamos un par de ejemplos.

Si se recuerda, el campo magnético terrestre no es uniforme en todos los puntos de la Tierra, sin embargo, el orden de magnitud puede estimarse alrededor de 10^{-4}T , y el generado por las bobinas que usualmente se utilizan en las prácticas de laboratorio está en torno a 10^{-3}T , para una intensidad de 0,3 a 0,5 amperios. Esto quiere decir que, el tesla es una unidad grande respecto de algunos campos que estamos acostumbrados a manejar³. Por esta razón, en muchas ocasiones (sobre todo en los laboratorios) se emplea una unidad más pequeña que el Tesla, ésta es el gauss. La equivalencia entre ambas es: $1 \text{ Gauss} = 10^{-4}\text{T}$

Además de las relaciones anteriores, debe verificarse la ley de la conservación de la carga vista en el Capítulo 2, pero al tratarse de corrientes estacionarias la ecuación diferencial se simplifica del siguiente modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.3)$$

5.2. FORMA INTEGRAL DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones del apartado anterior tenían un carácter puntual, esto es, daban información del campo \mathbf{B} en cada punto del espacio. Sin embargo, dichas ecuaciones pueden ser representadas en forma integral, lo cual, en determinadas ocasiones, resulta útil para abordar problemas.

La representación integral de la Ecuación (5.1) se conoce como ley de Ampère, la cual establece que *la circulación del campo magnético \mathbf{B} a lo largo de una trayectoria cerrada Γ , sólo depende de la intensidad neta que atraviesa la superficie abierta S cuya frontera es ∂S* (Figura 5.1), o sea,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r})d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I. \quad (5.4)$$

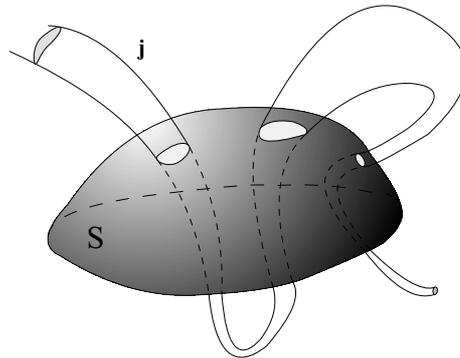


Figura 5.1. La circulación sólo depende de la intensidad neta.

El teorema de Ampère es importante porque, en determinadas ocasiones, permite calcular algunas de las componentes del campo magnético conocida la densidad de corriente. Teóricamente esta ley es cierta siempre que se verifiquen las hipótesis establecidas por el teorema de Stokes (Capítulo 1, Ecuación 1.23), sin embargo, desde un punto de vista práctico, sólo es útil cuando el sistema objeto de estudio posee simetrías, ya que para un sistema de corrientes de geometría compleja no es sencillo despejar el campo \mathbf{B} de esta última ecuación.

³La obtención de grandes campos magnéticos es una de las cuestiones principales en algunas ramas de la ciencia y la tecnología. Baste citar como ejemplo, los campos requeridos para el análisis mediante resonancia magnética nuclear, o los existentes en los reactores de fusión nuclear experimentales que existen por todo el mundo como el JET o el ITER (véase J.A. Tagle, "Plasmas limpios", *Investigación y Ciencia*. Marzo (1993), p.4-10).

Para aplicar correctamente la ley de Ampère es necesario tener en cuenta algunos detalles. Así, reescribiendo de otra forma las expresiones anteriores, se tiene:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 I, \quad (5.5)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal unitario en cada punto de la superficie. En esta igualdad se observa que, la elección de un sentido para recorrer la curva Γ determina la orientación de la superficie S y *viceversa*. En resumen: Γ está directamente relacionada con S , lo cual tiene influencia, a su vez, en el signo de la intensidad, ya que en función de como sea la orientación, así será \mathbf{n} y, en consecuencia, el signo del producto escalar $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$.

Con el fin de no equivocarse al aplicar las anteriores integrales, pueden seguirse las siguientes pautas:

(a) *Planteamiento del problema.* 1) Estúdiense las simetrías del problema. Si no existen simetrías en el contexto de la pregunta concreta del ejercicio, no utilice la ley de Ampère. En tal caso proceden otros métodos que se verán mas adelante. 2) Si hay simetrías, eljase una curva sencilla. La forma de elegir trayectoria depende de cada problema en particular, pero como idea general puede decirse que la curva debe tener algunas de las simetrías encontradas en el sistema, ya que son estas simetrías las que van a permitir despejar alguna de las componentes del campo \mathbf{B} en función de la intensidad I . 3) Escójase una superficie fácil y suave. La superficie más cómoda, siempre que lo permitan las condiciones del problema, es una superficie plana. Recuerdese que la frontera de la superficie es la curva Γ , por lo que dicha superficie es *siempre abierta* (contrariamente a lo que ocurre en el teorema de Gauss) 4) Determinése el sentido de avance de $d\mathbf{l}$ (antihorario u horario) y en función de esta elección, asígnese la orientación correcta a S (vector \mathbf{n} hacia fuera o hacia dentro, respectivamente-regla del sacacorchos).

(b) *Resolución matemática.* Con los pasos anteriores se logra plantear un problema que tenga simetrías, pero queda todavía el cálculo de las integrales que aparecen en ambos miembros. 1) Tómease un sistema de referencia coherente con las simetrías del sistema. Esto es fácil de saber, ya que la curva elegida para realizar la integral de línea posee esta misma simetría. 2) Téngase precaución con la integral del segundo miembro. La integral doble se extiende, en principio, a la superficie S elegida, sin embargo, la superficie real sobre la que se integra corresponde a la intersección entre S y el volumen correspondiente a la densidad de corriente V_j , ya que el producto escalar $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ es cero donde S o j sean nulas (Figura 5.2). En consecuencia, se puede escribir:

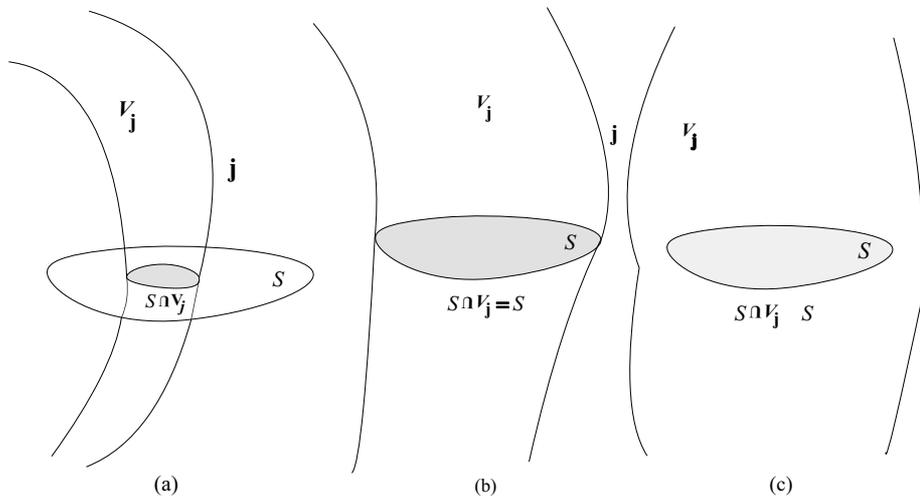


Figura 5.2. (a) La superficie de intersección es menor que S . (b) $S \cap V_j = S$. (c) La superficie de intersección también es S aunque la corriente sobrepasa dicha superficie.

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S \cap V_j} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = I. \quad (5.6)$$

Ya se verá en los problemas como hay ocasiones en las que la mencionada intersección coincide con toda la superficie S , es decir, $S \cap V_j = S$.

En relación a la Ecuación (5.2), su forma integral es lo que se conoce como ley o teorema del flujo, cuyo enunciado es: *El flujo del campo magnético \mathbf{B} a través de una superficie cerrada es nulo.*

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.7)$$

en donde ∂V denota la frontera de V , o sea, la superficie S .

5.3. EL POTENCIAL VECTOR

Como ya se estudió en el Capítulo 2, el estar en condiciones electrostáticas implicaba que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, por lo que, en principio, podía encontrarse una función potencial $V(x, y, z)$ tal que $\mathbf{E} = -\nabla V$. La importancia de ello está en que, para calcular el campo eléctrico de una distribución de carga arbitraria no es necesario emplear la expresión integral (2.17), sino que éste puede hallarse a partir de dicha función potencial. Esto tenía la ventaja de ser más sencillo y rápido, ya que al ser $V(x, y, z)$ una función escalar sólo hay que realizar una integración. Surge ahora la pregunta, si existe una función a partir de la cual sea posible obtener el campo \mathbf{B} .

Para contestar a esta pregunta basta examinar la Ecuación (5.2). Si se recuerdan algunas de las propiedades del álgebra de operadores diferenciales vistas en el Capítulo 1, el gradiente de un rotacional siempre es nulo. Por esta razón, al ser la divergencia de \mathbf{B} siempre cero, puede expresarse el campo magnético como el rotacional de alguna función vectorial, esto es,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (5.8)$$

A este nuevo campo vectorial se le denomina *potencial vector* $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ⁴. Este potencial tiene algunas diferencias y similitudes con aquél establecido para el campo eléctrico. Así, V es una función escalar mientras que $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es vectorial y, generalmente, más complicado; en cambio, el potencial vector también adolece de cierta indeterminación como en el potencial eléctrico. Si se recuerda (Cap. 1, Sec. 1.4.), si V era una función potencial también lo era $V' = V + c$, para c constante; ello indicaba que ambos potenciales proporcionaban el mismo campo eléctrico. De una forma parecida puede analizarse lo que le ocurre al potencial vector. En efecto, por las propiedades del operador ∇ se sabe que el si φ es una función escalar se verifica [Ec. (1.34)] que $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$. Ello conlleva que si en vez de \mathbf{A} en la 5.8 introducimos un campo \mathbf{A}' , tal que \mathbf{A}' y \mathbf{A} se relacionan del siguiente modo,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi, \quad (5.9)$$

se verifica que:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.10)$$

con lo que tanto \mathbf{A} como \mathbf{A}' reproducen el mismo campo \mathbf{B} . En definitiva: para un cierto \mathbf{B} dado, existen infinitos campos \mathbf{A} ⁵. Además, el potencial vector satisface la ecuación

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (5.11)$$

⁴Existe también el denominado *potencial escalar magnético*, pero nosotros no hablaremos de él.

⁵Este hecho puede llevar a pensar que \mathbf{A} es tan sólo un artificio matemático que sirve para calcular el campo magnético, carente, por lo tanto, de cualquier significado físico. Esto, sin embargo, no es lo que muestra la experiencia, ya que las partículas son capaces de detectar el potencial vector \mathbf{A} en una región del espacio donde no existe \mathbf{B} (ver efecto Aharonov-Bohm, problema 15) Por esta razón debe pensarse en \mathbf{A} como una auténtica realidad física.

lo cual es una consecuencia de hacer $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Por otra parte, dada la indeterminación de \mathbf{A} , φ debe verificar la ecuación:

$$\Delta\varphi = 0,$$

es decir, vale cualquier función escalar que cumpla la ecuación de Laplace.

La ecuación diferencial obtenida para \mathbf{A} tiene una estructura similar, para cada una de sus componentes, a la ecuación de Poisson para el campo electrostático (2.31). De ello se deduce que la solución debe ser formalmente la misma, por lo que se puede escribir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}_v(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{Wb m}^{-1} \quad (5.12)$$

en donde \mathbf{j}_v representa la densidad volumétrica de corriente en V' . En el caso de que la corriente se extendiera por una superficie, la ecuación que se encuentra es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{j}_s(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{Wb m}^{-1}) \quad (5.13)$$

siendo \mathbf{j}_s la densidad de corriente superficial en S' . Por último, cuando se trata de sistemas unidimensionales, teniendo en cuenta que $\mathbf{j}_v dV' = \mathbf{j}_v \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{l}' = Id\mathbf{l}'$, se obtiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{Wb m}^{-1}) \quad (5.14)$$

donde Γ' es la línea donde se extiende la corriente. Obsérvese que el dominio de integración de todas las expresiones anteriores para el potencial vector, se extiende sobre los respectivos elementos de corriente, es decir, las variables de integración dV' , dS' y $d\mathbf{l}'$, recorren los elementos de corriente (llevan prima ').

5.4. LEY DE BIOT Y SAVART

Del mismo modo que en apartado anterior se obtuvo una forma general de calcular el potencial vector, en esta sección estamos interesados en encontrar una expresión a partir de la cual sea posible hallar directamente el campo magnético \mathbf{B} creado por una distribución de corriente arbitraria, sin pasar primeramente por el \mathbf{A} . Así, calculando el rotacional de (5.12), se obtiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}_v(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (5.15)$$

A esta expresión se le conoce con el nombre de Ley de Biot y Savart.

Al igual que en el apartado anterior, puede ocurrir que la distribución de corriente se halle localizada en una región del espacio bidimensional o unidimensional; en tal caso, la forma encontrada para el campo magnético se modifica. Concretamente, para una variedad bidimensional se tiene:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{j}_s(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (5.16)$$

y para una de una dimensión:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{Id\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.17)$$

5.5. FUERZAS SOBRE CORRIENTES

Imagínese una región Ω de \mathbb{R}^3 en donde existe un campo magnético \mathbf{B} . Si en dicha región se halla una densidad de corriente \mathbf{j}_v extendida sobre un volumen V' , tal que $V' \subseteq \Omega$, utilizando la fuerza de Lorentz (véase capítulo 9) se encuentra que la fuerza que ejerce el \mathbf{B} sobre la corriente viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{j}_v(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV'. \quad (5.18)$$

En el caso de que la densidad de corriente se ubique sobre una región unidimensional, la expresión que se emplea es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I \int_{\Gamma'} d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.19)$$

Si el campo es homogéneo la fuerza queda del siguiente modo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I \left[\int_{\Gamma'} d\mathbf{l}' \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (5.20)$$

De esta última ecuación se deduce que, la fuerza sobre un hilo que forma un circuito simple por el que circula una corriente I es siempre cero, ya que $\oint_{\Gamma'} d\mathbf{l}' = 0$.

Supongamos ahora dos circuitos Γ_1 y Γ_2 por los que circula una corriente I_1 e I_2 , respectivamente. La intensidad 1 crea un campo magnético \mathbf{B}_1 , el cual actúa sobre la corriente 2 según se ha visto en la Ecuación (5.19) y, en consecuencia, habrá una fuerza, la cual se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_{1-2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \oint_{\Gamma_1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}'])}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.21)$$

donde \mathbf{r}' representa el vector que une el origen de coordenadas elegido con un punto del circuito 1 (fuente). Una expresión similar puede obtenerse si se desea conocer la fuerza ejercida por el circuito 2 sobre el 1, cambiando adecuadamente los subíndices que aparecen en la Ecuación (5.21).

5.6. MOMENTO SOBRE UN CIRCUITO

Cuando se estudia una distribución de corriente que se extiende por un volumen V' , el momento magnético viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_v(\mathbf{r}') dV'. \quad (\text{Am}^{-2}) \quad (5.22)$$

En el caso de que la corriente circule por un circuito, se define el momento magnético de esa distribución de corriente como el vector que tiene por módulo el producto de la intensidad por la superficie de dicho circuito, de dirección perpendicular a la superficie S y sentido el dado por la regla del sacacorchos según el sentido de la corriente, esto es:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = I\mathbf{S} = IS\mathbf{n}. \quad (\text{Am}^{-2}) \quad (5.23)$$

Obsérvese como \mathbf{S} es un vector que tiene por componentes las áreas de las proyecciones de la curva Γ' sobre los planos OX , OY y OZ , respectivamente.

Asimismo, si se sitúa un circuito de momento \mathbf{m} en presencia de un *campo magnético uniforme* \mathbf{B} , el momento de la fuerza \mathbf{N} que se ejerce sobre la corriente es:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (5.24)$$

5.7. EL DIPOLO MAGNÉTICO

El campo magnético creado en un punto del espacio por un circuito de forma arbitraria es, en general, muy complejo. Sin embargo, cuando se calcula el campo \mathbf{B} producido por un circuito cualquiera de momento magnético \mathbf{m} , en una zona muy alejada del mismo⁶, se observa que dicho campo es independiente de la geometría de éste; ello quiere decir que todos los circuitos que tienen el mismo \mathbf{m} producen el mismo campo magnético en un punto muy alejado, independientemente de la forma del elemento de corriente.

La expresión para el potencial vector de un dipolo es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.25)$$

y para el campo \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + 3 \cdot \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (5.26)$$

En ocasiones es necesario estudiar el comportamiento mecánico de un dipolo en presencia de un campo magnético externo \mathbf{B}_e ; en tal caso se recurre al concepto de energía potencial del dipolo, la cual se define del siguiente modo:

$$E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e = -mB_e \cos\theta, \quad (5.27)$$

en donde θ es el ángulo formado por ambos vectores. Según esta expresión, los dipolos magnéticos tienden a orientarse de manera que el momento magnético y el campo externo tengan la misma dirección y sentido, haciendo así que el flujo de \mathbf{B}_e a través del circuito sea máximo (un resultado análogo se puede obtener utilizando la Ecuación 5.24).

PROBLEMAS RESUELTOS

- 5.1** Calcular el campo magnético creado por un hilo recto muy largo por el que circula una densidad de corriente homogénea \mathbf{j} , en un punto cualquiera del espacio.

Resolución

Este ejercicio puede realizarse de diferentes maneras, sin embargo vamos a resolverlo aplicando la ley de Ampère que acabamos de explicar. Siguiendo las pautas mencionadas en la teoría, vamos a estudiar las simetrías. Para ello, supongamos que el hilo se extiende a lo largo del eje OZ . Al haber una corriente existirá un campo magnético en alguna región del espacio, por lo que si tomamos un punto genérico P de coordenadas (x, y, z) podrá asignársele, en principio, un campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ con sus tres componentes distintas de cero (Figura 5.3). Como la corriente se ubica a lo largo del eje OZ , elijamos ahora otro punto P' que tenga la misma proyección sobre el plano OXY , pero cuya componente sobre OZ difiera del P en una cantidad z_0 , esto es, $P'(x, y, z + z_0)$ (Figura 5.4). Si se estudia ahora el

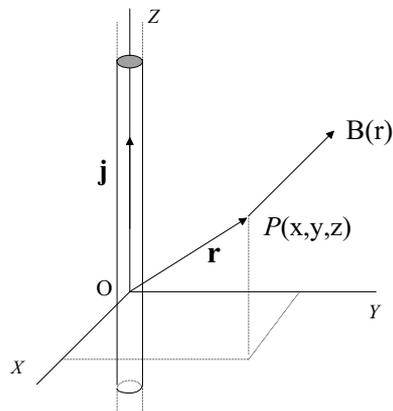


Figura 5.3. Hilo muy largo por el que circula una corriente \mathbf{j} .

⁶En rigor, el concepto de *muy alejado* así expresado, no tiene sentido si no es por comparación con una referencia. Por esta razón, cuando decimos que un punto está muy lejos debe entenderse que la distancia del sistema objeto de estudio (circuito en nuestro caso) al punto, es mucho mayor que las dimensiones lineales de dicho sistema de corriente.

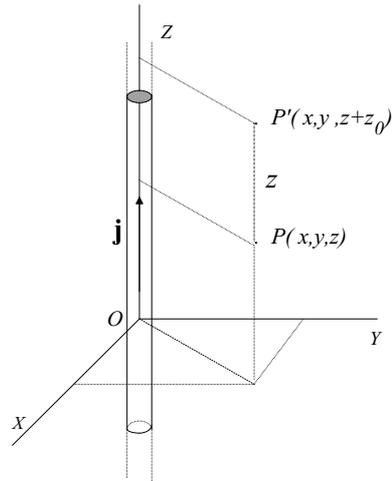


Figura 5.4. Puntos P y P' de proyección idéntica sobre el plano OXY pero distantes h respecto de la coordenada z .

$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en P' se observa que, sea cual sea el valor de éste, debe ser el mismo que el existente en P , ya que al circular una corriente muy larga no podemos apreciar en ella ninguna diferencia vista desde ambos puntos. En definitiva: $\mathbf{B}(P) = \mathbf{B}(P')$, de lo cual se infiere que el sistema es invariante frente a una translación paralela al eje OZ . Veamos si hay todavía otras simetrías.

Imaginemos ahora un plano paralelo al OXY y situemos un punto cualquiera $P(x, y, z)$ sobre el mismo (Figura 5.5). Si se rota dicho punto un ángulo ξ en torno al eje OZ , esto es, $R_z(\xi)$, se obtiene otro P^* de coordenadas (x^*, y^*, z^*) . Tal punto se encuentra a la misma distancia que P del hilo, pero tiene proyecciones diferentes sobre los ejes, sin embargo, ambos son equivalentes geoméricamente al no poder observar diferencia alguna. Esto quiere decir que el sistema es invariante frente a una rotación respecto del eje OZ , lo cual tiene consecuencias directas sobre las propiedades del campo magnético. Así, la simetría de rotación implica que, el valor de \mathbf{B} en P debe ser el mismo que en P^* para un sistema de coordenadas cilíndricas, esto es, las componentes del campo sobre $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$ deben ser idénticas (la introducción de las coordenadas cilíndricas en esta etapa del razonamiento se justifica habida cuenta de la simetría de revolución).

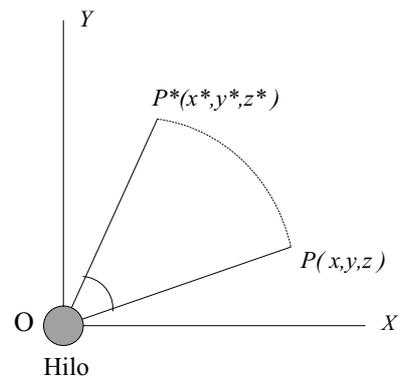


Figura 5.5. El punto P^* se obtiene mediante una rotación de ángulo ξ de P , en torno al eje OZ .

Conocidas las invarianzas, deben escogerse curvas a partir de las cuales obtengamos información de las componentes. Según se ha comentado en la Sección 5.2, la curva elegida está relacionada con las simetrías encontradas. En nuestro caso, parece lógico que tomemos una curva circular de radio ρ cuyo centro coincide con el hilo y, sobre ésta, una superficie simple (Figura 5.6). La superficie más sencilla es un plano, por lo que situaremos una sección circular de éste sobre Γ . Con el fin de aplicar correctamente el teorema de Ampère, escogemos un elemento $d\mathbf{l}$ en sentido antihorario, con lo que la superficie queda orientada con su normal hacia arriba, es decir, en la dirección del eje OZ y de sentido positivo. La elección de $d\mathbf{l}$ es arbitraria, afectando directamente a la orientación de la superficie pero no al resultado final del valor del campo.

En lo referente al cálculo, vamos a elegir coordenadas cilíndricas, ya que son las más adecuadas para este problema. Así, con todo ello, y sabiendo que la densidad de corriente es de la forma

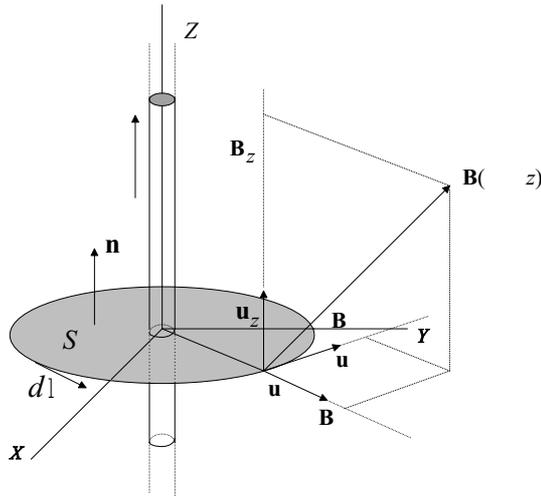


Figura 5.6. El campo magnético \mathbf{B} tiene, en general, tres componentes sobre el sistema $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$.

$\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$, aplicando la relación 5.5 se tiene:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (0, 0, j) \cdot d\mathbf{S}.$$

Teniendo en cuenta que $d\mathbf{l}$ es tangente a la curva Γ podemos escribir $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$. Además, $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS$, que introducido en la integral queda:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (0, dl, 0) = \mu_0 \int_S (0, 0, j) \cdot (0, 0, 1)dS.$$

Realizando los productos escalares que intervienen en los integrandos, se obtiene:

$$\oint_{\partial S} B_\phi dl = \mu_0 \int_S j dS.$$

Llegado a este punto, conviene analizar este resultado. Si investigamos la primera integral, vemos que, una vez hecho el producto escalar, B_ϕ es una magnitud constante, es decir, el valor de la componente tangencial del campo magnético es el mismo para cualquier punto sobre la curva elegida, por lo que puede situarse fuera del símbolo integral. Lo mismo ocurre en el miembro de la derecha al ser la densidad de corriente idéntica para todos los puntos del hilo. Con todo ello, y teniendo en cuenta que la longitud de la curva es L , se tiene:

$$\int_0^L B_\phi dl = \mu_0 \int_S j dS \Rightarrow B_\phi \int_0^L dl = \mu_0 j \int_S dS.$$

El cálculo de B_ϕ a partir de esta última expresión es sencillo, si bien, hay que comprender el significado de la segunda integral. Así, $\int_S j dS$ representa, en este caso, la intensidad total I que circula por el conductor, recalando que, como se ha explicado anteriormente, aunque la integral se extiende a la superficie S encerrada por la curva Γ , lo que interviene realmente es la superficie de intersección que se forma entre la densidad de corriente j_v y S , es decir, $S \cap V_j$. En este caso, al ser j_v nula fuera de esta intersección sobre S , hace que la superficie real de integración sea la correspondiente a la sección del hilo $S' = S \cap V_j$ ($S' \subset S$), o sea:

$$B_\phi L = \mu_0 j S' \Rightarrow B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I,$$

obteniendo como resultado:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

Como I es positivo, \mathbf{B}_ϕ también lo es, lo cual significa que la componente tangencial del campo \mathbf{B} es positiva según el sistema de coordenadas elegido, por lo que podemos escribir:

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi. \quad (5.28)$$

Mediante el procedimiento seguido se ha obtenido sólo información de la componente tangencial. Esto no significa que las demás componentes sean nulas; sencillamente quiere decir, que con la curva elegida se obtiene información exclusivamente de una de las proyecciones de \mathbf{B} . Para calcular el valor de las otras componentes es necesario utilizar otras curvas de integración. En efecto, consideremos una curva en forma de rectángulo como se muestra en la Figura 5.7. Dicho rectángulo es coplanario con el hilo, siendo dos de sus lados paralelos al mismo, pero situados a distancias diferentes. Si aplicamos nuevamente el teorema de Ampère sobre la esta curva γ , y sobre la superficie Σ , encontramos que:

$$\oint_{\partial\Sigma} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_\Sigma (0, 0, j) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.29)$$

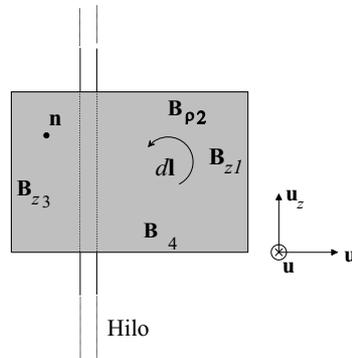


Figura 5.7. Curva rectangular. En los tramos 1 y 3 aparece sólo la componente B_z , una vez hecho el producto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. De forma similar, sobre las curvas γ_2 y γ_4 tenemos información de B_ρ , exclusivamente. Obsérvese como el vector unitario \mathbf{u}_ϕ apunta hacia dentro del plano de la figura.

Si nos fijamos, la integral de la derecha puede dividirse en cuatro tramos diferentes correspondientes a los cuatro lados que componen el rectángulo. De este modo, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, y la expresión anterior toma la siguiente forma:

$$\oint_\gamma (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{\gamma_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_{\gamma_3} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l}_3 + \int_{\gamma_4} \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l}_4,$$

en donde se ha elegido un sentido de recorrido antihorario para $d\mathbf{l}$, representando $d\mathbf{l}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), el elemento diferencial del tramo i . Además, al no conocer el valor del campo magnético (salvo \mathbf{B}_ϕ), suponemos para él una magnitud distinta en cada trozo de la curva, es decir, \mathbf{B}_i , con $i = 1, 2, 3, 4$. Introduciendo esto y el valor de $d\mathbf{l}_i$ correspondiente en cada una de las integrales, esto es, $d\mathbf{l}_1 = dz\mathbf{u}_z = (0, 0, dz)$, $d\mathbf{l}_2 = d\rho\mathbf{u}_\rho = (d\rho, 0, 0)$, $d\mathbf{l}_3 = dz\mathbf{u}_z = (0, 0, dz)$ y $d\mathbf{l}_4 = d\rho\mathbf{u}_\rho = (d\rho, 0, 0)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_1^2 (B_{\rho 1}, B_{\phi 1}, B_{z 1}) \cdot (0, 0, dz) + \int_2^3 (B_{\rho 2}, B_{\phi 2}, B_{z 2}) \cdot (d\rho, 0, 0) + \int_3^4 (B_{\rho 3}, B_{\phi 3}, B_{z 3}) \cdot (0, 0, dz) + \\ & + \int_4^1 (B_{\rho 4}, B_{\phi 4}, B_{z 4}) \cdot (d\rho, 0, 0) = \int_1^2 B_{z 1} dz + \int_2^3 B_{\rho 2} d\rho + \int_3^4 B_{z 3} dz + \int_4^1 B_{\rho 4} d\rho. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Si se analizan las integrales anteriores se observa que, al haber simetría de translación, no hay diferencia entre el campo existente a lo largo de la línea (2-3) y el que hay en los puntos homólogos (4-1), o sea, $B_{\rho 2} = B_{\rho 4}$, lo cual trae como consecuencia que,

$$\int_2^3 B_{\rho 2} d\rho = - \int_4^1 B_{\rho 4} d\rho,$$

en cualquier circunstancia, esto es, aunque $B_\rho = B_\rho(\rho)$, ya que en la primera integral el $d\mathbf{l}_2$ en (2-3) va en *sentido inverso* al $d\mathbf{l}_4$ en (4-1). Introduciendo esto en la Ecuación (5.30), y sabiendo que $d\mathbf{S} = -dS\mathbf{u}_\phi = (0, -1, 0)dS$, se tiene:

$$\int_1^2 B_{z1} dz + \int_3^4 B_{z3} dz = \mu_0 \int_\Sigma (0, 0, j) \cdot (0, -1, 0) dS = 0.$$

Por la misma anteriormente citada simetría de translación, no podemos distinguir entre puntos cualesquiera situados sobre la misma γ_1 y tampoco si se eligen en la misma γ_3 , lo cual quiere decir que, con independencia del valor de B_{z1} en γ_1 , éste será el mismo a lo largo de esta línea. Asimismo, sea cual fuere la magnitud de B_{z3} a lo largo de γ_3 , tiene que ser la misma para todos sus puntos. Por todo ello, puede sacarse fuera del símbolo integral B_{z1} y B_{z3} , al ser magnitudes constantes y, en principio, diferentes, es decir:

$$B_{z1} \int_1^2 dz + B_{z3} \int_3^4 dz = 0 \Rightarrow B_{z1}L - B_{z3}L = 0 \Rightarrow B_{z1} = B_{z3},$$

apareciendo el signo negativo al ser recorridas γ_1 y γ_3 en sentidos opuestos, y siendo L la longitud total de los tramos correspondientes. De este resultado se observa que, al ser la componente z del campo idéntica para puntos cuya distancia al eje OZ es diferente (véase Figura 5.8), dicha componente debe tomar el mismo valor para cualquier punto del espacio y, en consecuencia, no puede depender de las coordenadas. De ello se deduce que $B_{z1} = B_{z3} = C$, siendo C una constante indeterminada. Este resultado, sin embargo, presenta cierta ambigüedad, ya que muestra que \mathbf{B}_z es constante para cualquier punto pero no dice cuál es su valor. Con el fin de averiguar la constante C vamos a imaginar que repetimos todos los cálculos del ejercicio, pero no sobre la curva original Γ , sino sobre otra curva Γ^* , similar a Γ en forma, pero de tramos (2-3) y (4-1) más largos. Si se hace esto se observa que el resultado que se obtiene para \mathbf{B}_z es idéntico al anterior, no pudiendo establecer la magnitud de C . Repitamos ahora este proceso para curvas rectangulares como las anteriores en donde se han ido haciendo cada vez mayores las longitudes de γ_2 y γ_4 . En tal caso, como no se tiene ninguna restricción, puede elegirse una curva tal que las longitudes de (2-3) y (4-1) sean tan grandes como se quiera, hasta el punto de hacerlas infinitamente grandes (Figura 5.9).

Si ahora se vuelve a realizar el análisis mediante la ley de Ampère se encuentra el mismo

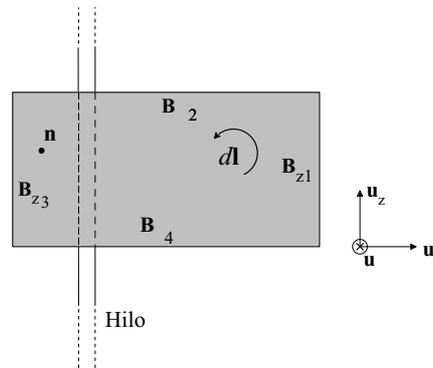


Figura 5.8. Curva rectangular de lados más grandes.

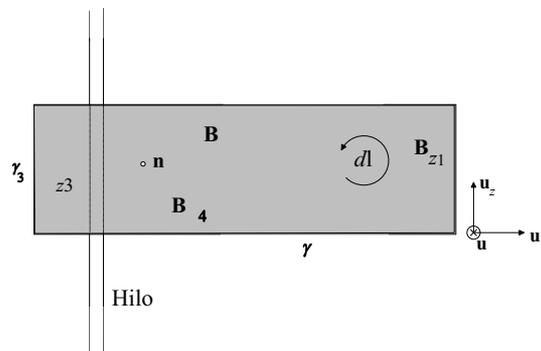


Figura 5.9. Curva rectangular de lados muy grandes.

resultado, con la particularidad de que sí sabemos para este caso la magnitud del campo. Así, se sabe que una propiedad general del campo magnético es que debe ser una función que decrece para valores muy alejados de la fuente, esto es, de la corriente. Por esta razón, teóricamente, el campo debe tender a cero en el infinito. Haciendo uso de esto llegamos a la conclusión que, C tiene que ser nula. En efecto, al ser todas las curvas elegidas igualmente buenas para la resolución del \mathbf{B}_z , y al haber obtenido para todas ellas que el campo toma el mismo valor constante, podemos elegir como referencia la que se extiende hasta el infinito, encontrando como única posibilidad, por la propiedad antes citada, que el campo sobre esta curva debe ser nulo, por lo que $C = 0$. En definitiva: al haber encontrado que la constante es cero, y al ser ésta la misma para cualquiera de las curvas empleadas para realizar la integración, se deduce que $\mathbf{B}_z = 0$ para todo punto del espacio.

Al igual que se vio cuando se encontró el \mathbf{B}_ϕ , el que en este último resultado no aparezca información de la única componente que falta, esto es la radial, no significa que su valor sea nulo. Lo que debe interpretarse es que, con la curva de integración elegida para aplicar el teorema de Ampère, no se puede saber la magnitud de \mathbf{B}_ρ (y tampoco \mathbf{B}_ϕ , ya calculada con otra curva). Para hallar la parte radial del campo, recurriremos al teorema del flujo. En este sentido, necesitamos una superficie cerrada que obedezca a la alguna de las simetrías encontradas. Dado que, como vimos, existía simetría de rotación, parece razonable tomar una superficie en forma de cilindro de altura arbitraria (Figura 5.10), por ejemplo h , cuyo eje de revolución coincide con el eje del mismo. Llamando S_1 , S_2 y S_L a las superficies que forma dicho cilindro, y aplicando el mencionado teorema, se obtiene:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_L} \mathbf{B}_L \cdot d\mathbf{S}_L = 0,$$

donde S_L representa la superficie lateral. Sabiendo que, $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS_1$, $d\mathbf{S}_2 = dS_2 \mathbf{u}_z = (0, 0, -1)dS_2$ y $d\mathbf{S}_L = dS_L \mathbf{u}_\rho = (1, 0, 0)dS_L$, se tiene:

$$\int_{S_1} (B_{\rho_1}, B_{\phi_1}, B_{z_1}) \cdot (0, 0, 1)dS_1 + \int_{S_2} (B_{\rho_2}, B_{\phi_2}, B_{z_2}) \cdot (0, 0, -1)dS_2 \\ + \int_{S_L} (B_{\rho_L}, B_{\phi_L}, B_{z_L}) \cdot (1, 0, 0)dS_L = 0.$$

Al haber simetría de translación, el campo que exista en un punto cualquiera $P_1(\rho, \phi, z)$ sobre la superficie S_1 , que no esté sobre el borde de ésta tiene que ser el mismo que el haya en la superficie S_2 en otro punto trasladado de P_1 una cantidad h , esto es, $P_2(\rho, \phi, z - h)$. Por esta razón el campo en ambos puntos debe ser el mismo. No ocurre lo mismo con \mathbf{B}_L , ya que al estar en la superficie lateral, no tiene por qué ser idéntico a los anteriores. Con la idea de no complicar la notación, podemos poner $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_L = \mathbf{B}$ y $dS_1 = dS_2$, en cuyo caso se encuentra:

$$\int_{S_1} B_{z_1} dS_1 - \int_{S_1} B_{z_1} dS_1 + \int_{S_L} B_\rho dS_L = 0 \Rightarrow B_\rho \int_{S_L} dS_L = 0 \Rightarrow B_\rho S_L = 0 \Rightarrow B_\rho = 0,$$

es decir,

$$\mathbf{B}_\rho = 0.$$

Como conclusión de todo el desarrollo hecho para cada una de las componentes de \mathbf{B} , puede decirse que el campo magnético creado por un hilo muy largo por el que circula una corriente \mathbf{j} , sólo posee componente tangencial, siendo su expresión:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\phi.$$

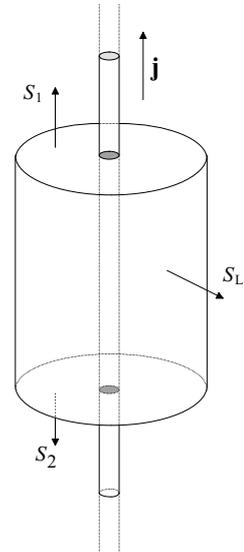


Figura 5.10. Superficie cerrada utilizada para aplicar el teorema del flujo.

5.2 Calcular el campo magnético de un solenoide toroidal de N espiras por el que circula una intensidad de corriente I .

Resolución

Un solenoide toroidal es un arrollamiento en forma de hélice de un conductor, cuya forma externa global es similar a la de un anillo (véase Figura 5.11). Antes de afrontar el cálculo del campo



Figura 5.11. (a) Solenoide toroidal. (b) Arrollamiento de N espiras independientes.

vamos a hacer una aproximación, la cual va a servir para simplificar el problema. Ésta consiste en suponer que el paso de la hélice que constituye el arrollamiento es muy pequeño, lo cual implica que podemos considerar dicho arrollamiento equivalente a un conjunto de N espiras independientes, muy apretadas (Figura 5.11). Además, como se mostró en el problema anterior, es conveniente estudiar las simetrías, ya que a través de ellas, puede obtenerse información de las componentes del campo. En este sentido no hay simetría de translación a lo largo del eje de revolución; para comprobarlo basta tomar un punto $P(x, y, z)$ y otro $P'(x, y, z + z_0)$ distinto, pudiendo ver como sí existe diferencia. Tomemos ahora un punto $Q(x, y, z)$ y rotémoslo un ángulo ϕ en torno al eje OZ ; en tal caso no apreciamos diferencia del sistema visto desde ambos puntos, llegando, por lo tanto, a la conclusión de que sí existe simetría de revolución. Por esta razón, puede ser adecuado, en principio, la utilización de la ley de Ampère para encontrar el campo magnético.

Para aplicar la ley de Ampère, seguiremos las pautas expuestas en el resumen teórico. Así, teniendo en cuenta que hay simetría de rotación, elegimos coordenadas cilíndricas para el desarrollo. Por otra parte, dada la geometría del toroide se van a distinguir las tres partes de que consta: (a) Dentro del solenoide, (b) fuera en su parte interior ($\rho < R_1$) y, (c) fuera para ($\rho > R_2$) (R_1 y R_2 son los radios interior y exterior del toro).

(a) Región interior, $R_1 < \rho < R_2$. Para estudiar esta zona elegimos una curva circular de radio ρ centrada en el origen de coordenadas. Además, tomando un elemento $d\mathbf{l}$ en sentido horario $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$, con lo cual la normal a la superficie S queda en la dirección del eje OZ pero de sentido negativo (entrante), esto es, $d\mathbf{S}_1 = -dS\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)dS$. Por último, necesitamos saber la expresión de la intensidad. Ésta se obtiene como dato del enunciado. Así, si nos fijamos en la Figura 5.12, se ve que la densidad de corriente va por la parte delantera desde la zona externa del toro a la parte interna, siendo, por lo tanto, entrante en la superficie, por lo que sus componentes serán $(0, 0, -j)$.

Teniendo claros todos estos datos, la ley de Ampère toma la siguiente forma:

$$\oint_{\partial S_1} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (0, dl, 0) = \mu_0 \int_{S_1} (0, 0, -j) \cdot (0, 0, -1)dS \Rightarrow \int_0^{2\pi} B_\phi dl = \int_{S_1} j dS.$$

Llegado a este punto es conveniente hacer hincapié en lo ya mencionado en la introducción teórica para el cómputo de las integrales. En relación al primer miembro de la anterior igualdad, se puede

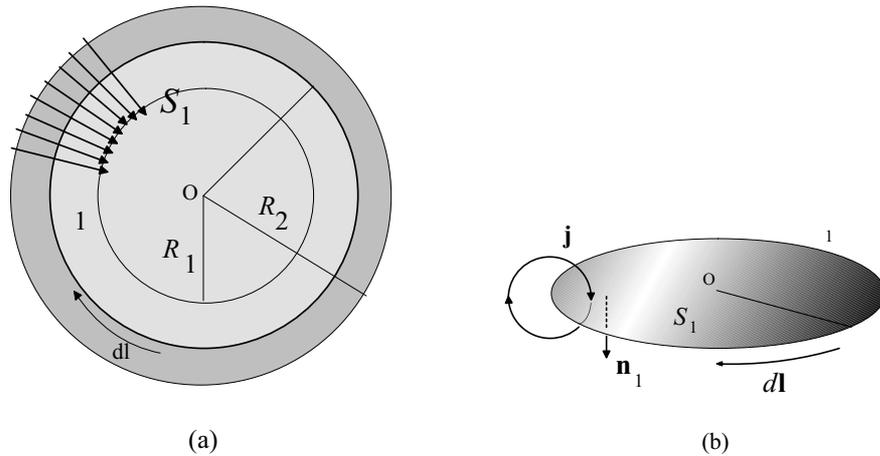


Figura 5.12. (a) Solenoide toroidal de N espiras. (b) Curva Γ_1 de radio ρ ($R_1 < \rho < R_2$). Obsérvese como \mathbf{j} y \mathbf{n}_1 tienen la misma dirección y sentido sobre la superficie S_1 .

sacar B_ϕ del integrando, ya que al haber simetría de rotación, la componente tangencial del campo debe ser la misma para todos los puntos de la curva Γ_1 , según el referencial $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$. Para el segundo miembro, el dominio de integración para obtener la intensidad es, en principio, la superficie S_1 , sin embargo, el integrando es nulo salvo en las intersecciones de S_1 con cada una de las espiras⁷, luego la intensidad de corriente a través de la superficie S_1 , $\int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$, es NI . Considerando esto, y poniendo el elemento diferencial de longitud dl en coordenadas polares, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = \int_{S_1 \cap V_j} \mathbf{j} dS = NI \Rightarrow B_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = NI \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = NI \Rightarrow B_\phi = \frac{NI}{2\pi \rho},$$

o sea,

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{NI}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\phi.$$

(b) $\rho < R_1$. En este caso se sigue el mismo procedimiento que en el apartado anterior. Para ello, elegimos otra curva Γ_2 , también circular, pero ahora de radio $\rho < R_1$ como se puede ver en la Figura 5.13. De este modo, al ser nula la densidad de corriente en la superficie S_2 , la integral correspondiente es nula, por lo que al aplicar la ley de Ampère encontramos:

$$\int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = 0 \Rightarrow B_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = 0 \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = 0 \Rightarrow B_\phi = 0,$$

y vectorialmente,

$$\mathbf{B}_\phi = 0.$$

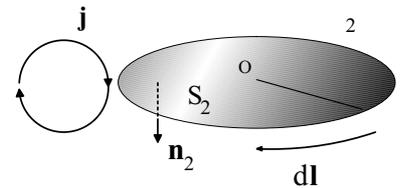


Figura 5.13. La densidad de corriente no corta en ningún punto la superficie S_2 .

(c) $\rho > R_2$. Tomemos ahora la curva Γ_3 de radio ρ como se muestra en la Figura 5.14. Si aplicamos el teorema de Ampère se encuentra que, la integral del campo magnético es idéntica en su forma a lo descrito en (a) y (b), cosa que no ocurre al calcular la intensidad. En efecto, si nos fijamos en la densidad de corriente \mathbf{j} se observa que, en un principio, entra en la superficie con la misma dirección y sentido que la normal, pero inmediatamente cruza S_3 en sentido inverso a \mathbf{n}_3 , por lo que la corriente neta que pasa por dicha superficie es cero. Con todo ello, se tiene:

⁷Según lo visto en el apartado 5.2, en este caso $S_1 \cap V_j$, siendo V_j el volumen por donde se extiende la densidad de corriente \mathbf{j} , es la sección del hilo empleado en el arrollamiento.

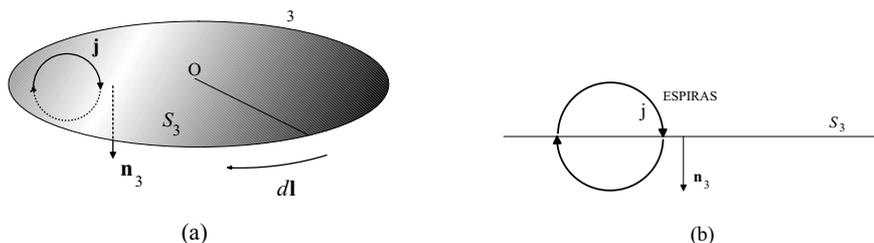


Figura 5.14. (a) Curva y superficie para $\rho > R_2$. (b) Vista de perfil. Obsérvese \mathbf{j} atraviesa la superficie S_3 una vez hacia abajo y otra hacia arriba, resultando una intensidad neta nula.

$$\int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = NI - NI \Rightarrow B_\phi = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}_\phi = 0.}$$

En definitiva puede decirse que, un solenoide toroidal por el que circula una corriente I por cada una las espiras que lo forman, posee campo magnético \mathbf{B}_ϕ sólo en su interior, siendo el valor de éste en cualquier punto exterior al mismo nulo. Queda por investigar el valor de las otras componentes, es decir, \mathbf{B}_ρ y \mathbf{B}_z . Si consideramos de forma estricta la hipótesis realizada al comenzar el ejercicio, esto es, que el arrollamiento consta de N espiras independientes, es sencillo demostrar que las componentes radial y sobre el eje OZ son nulas; sin embargo, si no se desprecia el paso de hélice de dicho arrollamiento, utilizando el teorema de Ampère de una forma similar a como lo hemos hecho aquí, se demuestra que \mathbf{B}_ρ y \mathbf{B}_z no son simultáneamente nulas en cualquier punto (véase Wangsness, *Campos electromagnéticos*, Ed. Limusa (1988), p. 304)), aunque, de esta forma, no se puede calcular su valor exacto. Para ello habría que aplicar directamente la ley de Biot y Savart.

Observación: Aunque la superficie S_i ($i = 1, 2, 3$) de integración no sea uno de los planos de simetría del anillo, la demostración es correcta (véase Figura 5.15).

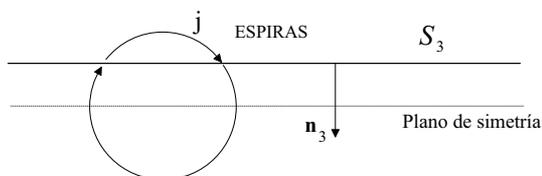


Figura 5.15. En esta figura se ha tomado la superficie S_3 , aunque habría valido cualquiera de las anteriores. Obsérvese como la superficie no pasa por un plano de simetría del toroide, sin embargo esto no influye en el cálculo.

5.3 Por una espira circular de radio a circula una intensidad de corriente I . Calcular el campo magnético \mathbf{B} en un punto arbitrario de su eje de revolución (Figura 5.16).

Resolución

Al igual que en ejercicios anteriores, para enfocar correctamente el problema, es necesario elegir un sistema de referencia adecuado. En este caso, se toma el plano OXY coincidente con la espira y el eje OZ sobre el eje de revolución de la espira.

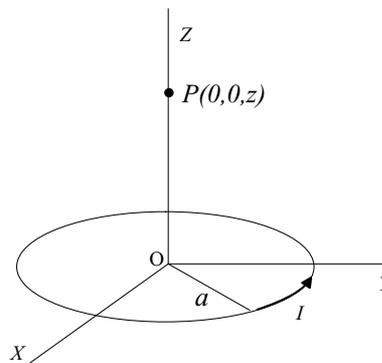


Figura 5.16. Espira circular de radio a .

Para el cálculo directo del campo magnético utilizando la ley de Biot y Savart deben identificarse, primeramente, todas las variables que intervienen en la integral, para de esta manera poder plantear correctamente el problema. Siguiendo este procedimiento puede verse que, $\mathbf{r} = (0, 0, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ y $d\mathbf{l}' = (dx', dy', 0)$. De este modo

$$d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = zdy'\mathbf{u}_x - zdx'\mathbf{u}_y + (xdy' - y'dx')\mathbf{u}_z, \quad (5.31)$$

por lo que la expresión de Biot y Savart queda del siguiente modo:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{zdy'\mathbf{u}_x - zdx'\mathbf{u}_y + (xdy' - y'dx')\mathbf{u}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \right\}, \quad (5.32)$$

descomponiendo la integral en los tres sumandos que contiene se llega a

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{zdy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x - \oint_{\Gamma} \frac{zdx'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y + \oint_{\Gamma} \frac{(xdy' - y'dx')}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \right\}. \quad (5.33)$$

Las tres integrales que ahora aparecen pueden calcularse directamente, sin embargo, dada la simetría del problema, se cambia a coordenadas polares para que las operaciones se simplifiquen. Haciendo $x' = a \cos \phi'$ e $y' = a \sin \phi'$ la expresión anterior se convierte en

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{-za \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_x - \int_0^{2\pi} \frac{za \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_y + \int_0^{2\pi} \frac{a^2(\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi') d\phi'}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \right\}. \quad (5.34)$$

Si se tiene ahora en cuenta que elegido un punto arbitrario sobre el eje OZ , ésta coordenada permanece fija, el denominador de cada sumando de la expresión anterior es una magnitud constante, por lo que puede sacarse fuera del símbolo integral, resultando la igualdad,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{-za}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x - \right. \\ & - \frac{za}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y + \\ & \left. + \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{u}_z \right\}. \end{aligned}$$

Si se observa que en las dos primeras integrales se anulan, ya que aparecen funciones seno y coseno, la ecuación fina a que se llega es:

$$\mathbf{B} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{u}_z \right\} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z. \quad (5.35)$$

Con todo ello, la expresión final para el campo magnético creado por una espira en su eje de revolución resulta

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z. \quad (5.36)$$

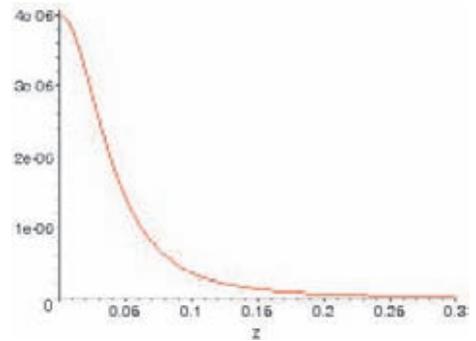


Figura 5.17. Campo magnético en función de la distancia z , para una espira típica de laboratorio de $a = 5$ cm, por la que circula una intensidad de 0,5 A. Obsérvese como el campo decrece rápidamente a medida que el punto P se aleja de O .

- 5.4** Una espira circular está recorrida por una corriente I conocida. Se quiere obtener en un punto de su eje y a una distancia z dada del plano de dicha espira, un campo \mathbf{B} de módulo máximo. 1º) Calcular el radio de la espira y el \mathbf{B} alcanzado. 2º) Aplicarlo al caso $I = 20$ A y $z = 3$ m.

Resolución

1º) Para responder a lo que se pide es necesario conocer el campo magnético $\mathbf{B}(z)$ creado por una espira circular en un punto de su eje de revolución. Esto ha sido calculado anteriormente, por lo que nos limitaremos a utilizar la expresión encontrada, sin demostrar nuevamente.

Supóngase, por comodidad, que la espira se halla situada de manera que su eje de revolución coincide con uno de los ejes coordenados, pongamos, OZ . En tal caso, el campo tiene el aspecto siguiente:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \quad (5.37)$$

Para averiguar cuál es el radio que maximiza el campo magnético, basta calcular las dos primeras derivadas de \mathbf{B} respecto de a , esto es:

$$B' = \frac{dB}{da} = \frac{d}{da} \left[\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left[\frac{2a(a^2 + z^2)^{3/2} - 3(a^2 + z^2)^{1/2} a^3}{(a^2 + z^2)^3} \right] = 0$$

Despejando a de la ecuación anterior se encuentran las siguientes soluciones: $a = 0$, $a^2 = -z^2$ y $a = \sqrt{2}z$. De todas ellas la única que tiene significado físico la última, pero hay que verificar si realmente es un valor que proporciona un máximo. Para ello, derivamos respecto de a la función $B'(z)$ en el punto $a = \sqrt{2}z$, obteniéndose que $B''(z) < 0$, verificando, por lo tanto, la condición de máximo. La magnitud de B para este valor de a es:

$$\mathbf{B}(\sqrt{2}z) = \frac{\mu_0 I}{(3)^{3/2} z} \mathbf{u}_z .$$

2º) En el caso en el que la intensidad y coordenada z sean las que se dicen en el apartado segundo, se encuentran los siguientes valores para el radio y campo:

$$a = 4,2 \text{ m} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = 4,8 \times 10^{-6} \text{ T} . \quad (5.38)$$

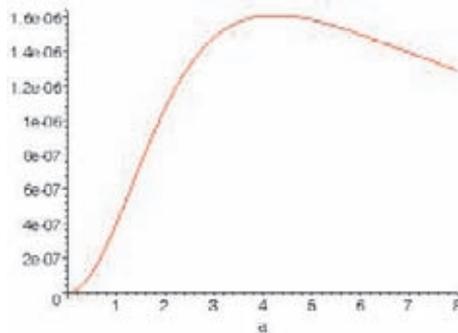


Figura 5.18. Gráfica en la que se representa el campo magnético creado por una espira circular por la que circula una corriente $I = 0$ A, para $z = 3$ m, en función del radio de la misma. El máximo campo, para esa intensidad y distancia se obtiene cuando $a = 4,2$ m.

- 5.5** Por un solenoide recto de longitud L y radio a (Figura 5.19), con n espiras por unidad de longitud, circula una corriente I . Calcular \mathbf{B} en un punto $P(0, 0, z)$ de su eje de revolución.

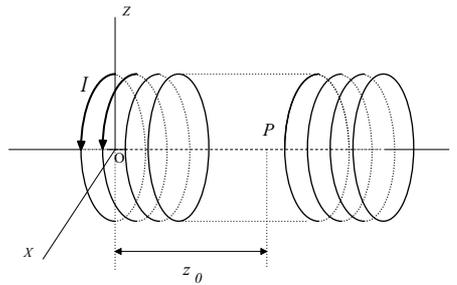


Figura 5.19. Solenoide recto de longitud L .

Resolución

Para resolver este ejercicio supondremos que el arrollamiento es suficientemente apretado como para considerar al solenoide equivalente a un conjunto de espiras planas independientes. Esto, como se va a ver, es una simplificación que ahorra un cálculo laborioso.

Para afrontar el problema pueden emplearse diversos métodos. En primer lugar podemos intentar utilizar la ley de Ampère, para lo cual es necesario estudiar las simetrías. Si se hace esto, se observa que existe simetría de rotación en torno al eje OZ , pero el sistema no es invariante frente a una translación, lo cual es una consecuencia de la finitud de la bobina. En estas condiciones podríamos elegir una curva que tenga características similares a aquella encontrada; ello correspondería a una circunferencia cuyo centro está por el eje de revolución del sistema, y es perpendicular al mismo, y cuyo radio dependería de si queremos investigar puntos interiores (curva Γ_1) o exteriores (curva Γ_2) a la bobina (véase Figura 5.20). Sin embargo, de esta forma podemos sólo obtener información de la componente tangencial a la curva circular, no siendo posible conocer el campo a lo largo del eje OZ , que es lo que se pide. Por esta razón, no parece adecuado emplear este procedimiento para hallar el campo magnético en $P(0, 0, z)$. Otra posibilidad es emplear la ley de Biot y Savart directamente, teniendo en cuenta la hipótesis hecha inicialmente para el arrollamiento. En tal caso, la idea consiste en plantearse, primeramente, cuál es el campo creado por un conjunto de espiras muy pequeño y, sabido esto, sumar las contribuciones de todas las espiras que componen el solenoide. Para llevar a cabo el cálculo, no es necesario volver a tomar todos los elementos que aparecen en la integral (\mathbf{r} , \mathbf{r}' y $d\mathbf{l}'$); por el contrario, considerando la expresión del campo creado por una sola espira circular de radio a , es posible hallar el \mathbf{B} del carrete. En efecto, partiendo del sistema de referencia de la Figura 5.21, el campo magnético creado en el punto $P(0, 0, z)$ por dN espiras situadas a una distancia z del origen de coordenadas, será proporcional a esta cantidad, es decir,

$$d\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 dN I a^2}{2 [a^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \mathbf{u}_z.$$

en donde, en el denominador aparece $(z_0 - z)$ y no z_0 , ya que hemos elegido unas espiras genéricas, cuya distancia al origen O es z . El problema que se encuentra en la anterior expresión es que, en el miembro de la derecha aparece más de una incógnita; concretamente, aparece z y dN , lo cual implica que no podemos integrar para saber el campo total debido a todas las espiras. Sabemos que, en general, n es el número de espiras por unidad de longitud, esto es $n = N/l$. En

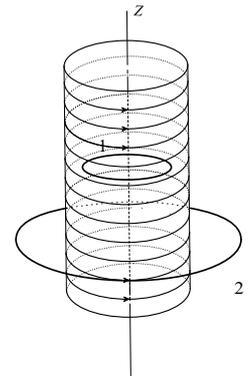


Figura 5.20. Curvas circulares Γ_1 y Γ_2 .

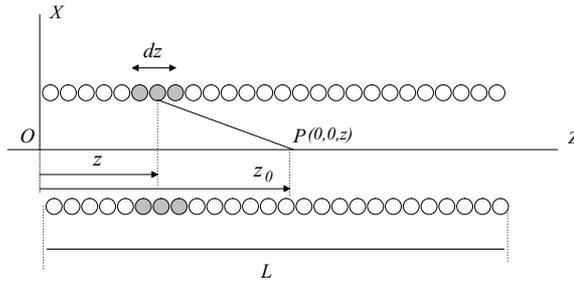


Figura 5.21. Sección del solenoide. Obsérvese como el conjunto de espiras dN se encuentra desplazado una distancia z , en relación al origen O ; matemáticamente, este desplazamiento hacia la derecha, respecto del sistema de referencia, se tiene en cuenta introduciendo $(z_0 - z)$ en el denominador de dB , en vez de z_0 .

nuestro caso, la expresión que se emplea no es exactamente esta, por no ser del todo útil, ya que hemos planteado el ejercicio, primeramente, para averiguar el campo magnético B creado por un conjunto diferencial de espiras. Por esta razón debemos escribir n de otra forma, respetando, en todo caso, la definición original. Para ello, basta conocer sobre qué longitud se extienden el número dN espiras elegido. Al estar el solenoide situado de tal forma que su eje de revolución coincide con el eje OZ , dichas espiras abarcan una longitud dz , por lo que n vendrá dado de la manera siguiente:

$$n = \frac{dN}{dz} . \tag{5.39}$$

Este resultado es importante porque permite relacionar dN con dz , con lo cual conseguimos que en dB sólo haya una variable independiente. Para verlo, despejamos dN en función de dz mediante la relación⁸,

$$dN = \left(\frac{dN}{dz} \right) dz = ndz .$$

Introduciendo este valor en dB , se encuentra:

$$dB(P) = \frac{\mu_0 I a^2 n dz}{2 [a^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} .$$

Una vez que se tiene el campo diferencial registrado en el punto P producido por dN espiras circulares, el campo total se obtiene sumando la contribución de todos los elementos que forman la bobina,

$$\begin{aligned} B(P) &= \int_0^L \frac{\mu_0 I a^2 n dz}{2 [a^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2 n}{2} \int_0^L \frac{dz}{[a^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a^2 n}{2} \left[\frac{-(z_0 - z)}{a^2 [a^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}} \right]_0^L = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{-(z_0 - L)}{a^2 [a^2 + (z_0 - L)^2]^{1/2}} - \frac{-z_0}{[a^2 + z_0^2]^{1/2}} \right] . \end{aligned}$$

Este es el campo \mathbf{B} producido por el solenoide en un punto cualquiera de su eje de revolución, siendo el sentido del mismo el que corresponda según el signo de la intensidad. La expresión obtenida no es manejable, pero puede escribirse de un modo más sencillo si se considera la geometría del carrete. Así, si se analizan las fracciones que aparecen en la Ecuación (5.40), se encuentra que, cada una de ellas se corresponde con el coseno del ángulo que forma la semirecta que une un extremo de la bobina con el punto P , y el eje OZ , esto es (Figura 5.22),

$$\frac{-(z_0 - L)}{a^2 [a^2 + (z_0 - L)^2]^{1/2}} = \cos \alpha_2, \quad \frac{z_0}{[a^2 + z_0^2]^{1/2}} = \cos \alpha_1 .$$

⁸Obsérvese como dN no se obtiene directamente de la Ecuación (5.39) pasando dz al primer miembro. Esto no es posible, ya que *no es correcto multiplicar y dividir por diferenciales*; por esta razón hemos hallado dN a través de la definición de diferencial de la función N .

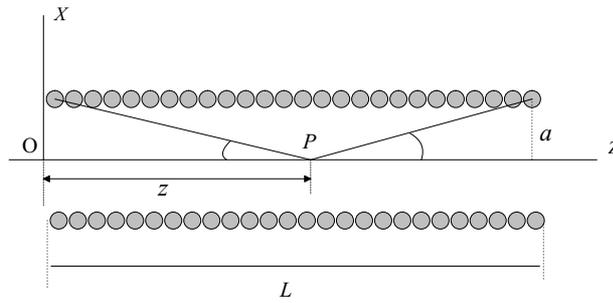


Figura 5.22. Ángulos formados entre el punto P y los extremos de la bobina.

Con todo ello, la expresión final para el campo magnético es la siguiente:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \mathbf{u}_z . \quad (5.40)$$

Como caso particular se puede hallar el campo creado en un punto del eje de revolución de un solenoide muy largo (Figura 5.23). Para ello, basta ver que cuando los extremos del solenoide se alejan progresivamente, los ángulos α_1 y α_2 se aproximan a cero en el límite. De este modo, substituyendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, se obtiene:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I n}{2} (1 + 1) \mathbf{u}_z = \mu_0 I n \mathbf{u}_z . \quad (5.41)$$

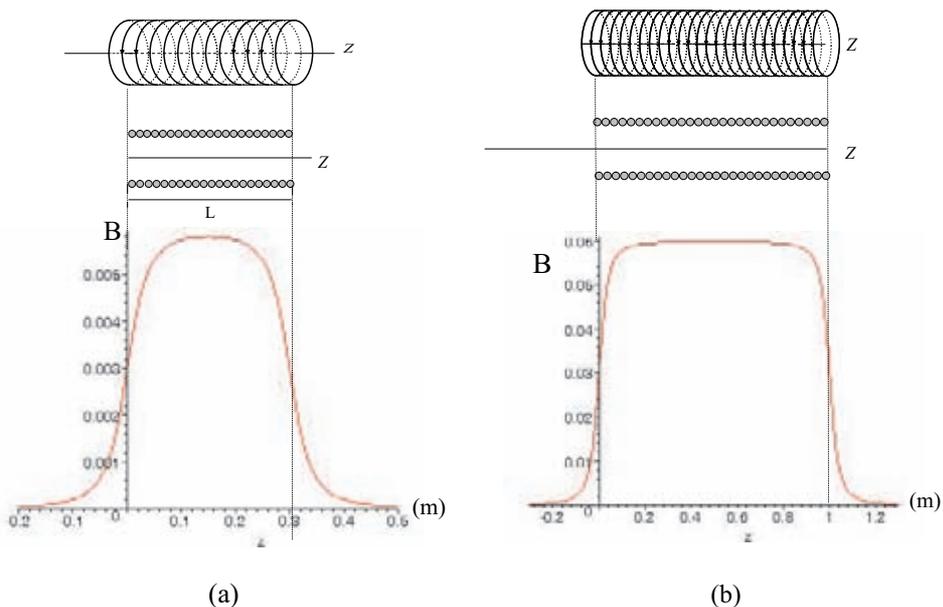


Figura 5.23. (a) Campo magnético en el eje de la bobina de longitud $L = 30$ cm en función de z , para $n = 10000$, $a = 4$ cm y una intensidad $0,5$ A. Se observa como el B varía poco sólo en un entorno pequeño del centro geométrico. (b) Campo para un carrete de iguales características pero de longitud 1 m. Aquí, el campo permanece aproximadamente uniforme en la mayor parte de su interior, decreciendo bruscamente a partir de los extremos. Ello indica que, en el límite si L se hace muy grande, la gráfica tendería a ser una recta paralela al eje OZ , es decir, el B sería homogéneo [Ecuación (5.41)].

Observación: Los ángulos α_1 y α_2 que aparecen en la expresión final se toman respecto del eje OZ , tal y como se muestra en la Figura 5.22.

5.6 Calcular el potencial vector creado por una espira circular de radio a , cuyo centro se halla en el origen de coordenadas y es coplanaria con el plano OXY , en el punto P de coordenadas $(0, 0, z)$, cuando por ella circula una intensidad I .

Resolución

Primer método

Para esta geometría se tiene: $\mathbf{r} = (0, 0, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ y el vector infinitesimal de espira es $d\mathbf{l}' = (dx', dy', 0)$. Introduciendo estos datos en la Ecuación (5.14), se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{dx'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{u}_x + \oint_{\Gamma} \frac{dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{u}_y \right\}.$$

Haciendo el cambio a coordenadas polares, esto es, $x' = a \cos \phi'$ e $y' = a \sin \phi'$, se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \phi' d\phi'}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{u}_x + \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \phi' d\phi'}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{u}_y \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{-a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y \right\} = 0. \end{aligned}$$

Segundo método

Existe otra forma mas sencilla de calcular el potencial vector. Para verlo, analicemos la Ecuación (5.14) en nuestro caso. Así, substituyendo los datos del problema se observa que el denominador $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + z^2)^{1/2}$ es constante, ya que z es fija. Ello implica que podemos sacar fuera del símbolo integral esta magnitud, obteniendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\mathbf{l}'}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(a^2 + z^2)^{1/2}} \oint_{\Gamma} d\mathbf{l}'.$$

La integral quiere decir que debemos sumar los vectores $d\mathbf{l}'$ a lo largo de la circunferencia de radio a , que representa la espira, de lo cual se infiere que \mathbf{A} es nulo, ya que dichos vectores $d\mathbf{l}'$ forman un polígono cerrado ⁹.

Observaciones: En el primer método empleado podría haberse comenzado de otra manera. Así, si se tiene en cuenta que existe simetría de revolución en torno al eje OZ y que en el numerador de la expresión integral aparece $d\mathbf{l}'$, podría haberse introducido la expresión de éste directamente en coordenadas polares, quedando la integral inicial para el potencial vector del siguiente modo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{ad\phi' \mathbf{u}_{\phi}}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right\}. \tag{5.42}$$

Esta forma de proceder es más rápida que ϕ' la mostrada en un principio, si bien tiene el inconveniente de poder inducirnos a error con más facilidad, ya que al aparecer en el integrando el cociente entre $d\phi'$ y $(a^2 + z^2)^{1/2}$, se llega a la igualdad

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 a I}{4\pi(a^2 + z^2)^{1/2}} \oint_{\Gamma} d\phi' \mathbf{u}_{\phi}, \tag{5.43}$$

cuya integral indefinida puede creerse igual a $\phi' \mathbf{u}_{\phi}$. Esto es evidentemente *falso*, pues $\mathbf{u}_{\phi} = \mathbf{u}_{\phi}(\phi)$, por lo que para resolver la integral anterior hay que poner el valor del vector unitario \mathbf{u}_{ϕ} en función del ángulo ϕ' , esto es, $\mathbf{u}_{\phi}(\phi) = -\sin \phi' \mathbf{u}_x + \cos \phi' \mathbf{u}_y$.

⁹No debe confundirse la integral $\oint_{\Gamma} d\mathbf{l}'$ con $\oint_{\Gamma} dl'$. Esta segunda expresión representa una suma de magnitudes dl' *escalares* y, por lo tanto, será distinta de cero (longitud de la curva Γ)

5.7 Calcular el campo magnético creado por un conductor rectilíneo finito de longitud L por el que circula una intensidad de corriente I , en un punto genérico del espacio.

Resolución

Antes de comenzar a hallar lo que se pide es necesario hacer una aclaración para no inducir a error. Si se analiza críticamente el enunciado se verá como, en rigor, lo que se pretende calcular no tiene sentido, ya que al estar el conductor abierto no puede circular una corriente estacionaria por él y, en consecuencia, no habrá campo magnético (obsérvese como la integral de Biot y Savart se extiende sobre una línea cerrada). Para que todo ello tenga fundamento, hay que aclarar el problema. Así, lo que realmente debería decirse cuando se trata de calcular el campo magnético de un elemento finito abierto, como el hilo del problema (Figura 5.24), es lo siguiente: Dado un circuito como el de la Figura 5.25 (u otro cualquiera), hállese en un punto genérico $P(x, y, z)$, la contribución al campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ debida al trozo de longitud L . Desde un punto de vista formal lo único que se hace es tomar una parte de la curva total cuando se aplica la ley de Biot y Savart, o sea

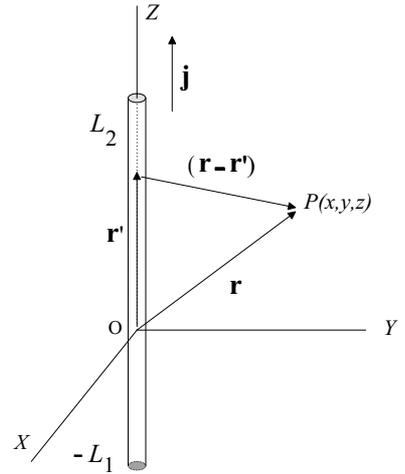


Figura 5.24. Hilo finito de longitud $L = L_1 + L_2$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{resto del circuito}} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}}.$$

De las dos partes que aparecen, sólo operamos aquélla que interesa, que en nuestro caso es la que corresponde a lo que en el problema se denomina hilo finito, esto es,

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}}$$

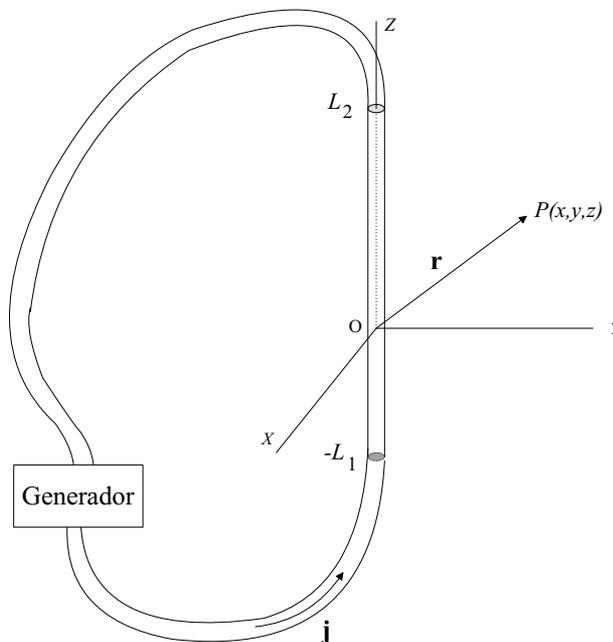


Figura 5.25. Circuito completo. Obsérvese como sólo nos interesa el trozo que va desde $-L_1$ a L_2 .

De esta manera desaparece la dificultad lógica en un principio planteada pudiendo resolver el problema. Esta forma de proceder es extensible a cualquier otro caso de similar.

Pasando ya al caso que nos interesa, los valores que aparecen dentro de la integral son los siguientes: $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$ y $d\mathbf{l}' = (0, 0, dz')$, por lo que $d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -ydz' \mathbf{u}_x + xdz' \mathbf{u}_y$ quedando la expresión para el campo \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{-ydz' \mathbf{u}_x + xdz' \mathbf{u}_y}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}},$$

el cual, puede ser descompuesto en dos partes,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ -y \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \mathbf{u}_x + x \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \mathbf{u}_y \right\} \\ &= (-y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y) \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= (-y \mathbf{u}_x + x \mathbf{u}_y) \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-(z - z')}{(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2}. \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar esta última expresión, se puede hacer un cambio a coordenadas polares para x y y , es decir, $x = \rho \cos \phi$ y $y = \rho \sin \phi$, donde ρ representa la distancia del punto $P(x, y, z)$ al eje OZ^{10} . Considerando todo lo dicho se llega a

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-(z - z')}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \right]_{-L_1}^{L_2} (-\rho \sin \phi \mathbf{u}_x + \rho \cos \phi \mathbf{u}_y) = \left[\frac{-(z - L_2)}{\rho \sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} - \frac{-(z + L_1)}{\rho \sqrt{\rho^2 + (z + L_1)^2}} \right] \mathbf{u}_\phi.$$

Esté resultado puede expresarse de una manera más sencilla y operativa, si se tiene en cuenta el significado de cada uno de los términos que aparece en el numerador y denominador. Así, observando la Figura 5.26, prestando atención a los signos de las diferencias en las fracciones se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \mathbf{u}_\phi. \tag{5.44}$$

siendo α_1 y α_2 los ángulos que forma el radio ρ con las semirectas que unen dicho punto $P(x, y, z)$ a los extremos inferior y superior del hilo, respectivamente. La importancia del resultado hallado está en la utilidad que tiene cuando se pretende calcular el campo debido a corrientes mas complejas, ya que en algunas ocasiones, dicho campo magnético se puede calcular como la superposición del generado por los diversos elementos del sistema en cuestión, dentro del cual hay hilos rectilíneos.

Como caso particular sencillo puede encontrarse el campo magnético creado por un hilo muy largo por el que circula una corriente I . Para ello, basta hacer en la última ecuación $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/2$, obteniéndose,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (2 \sin \alpha) \mathbf{u}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\phi. \tag{5.45}$$

Aclaración: Debe prestarse atención a la identificación de ρ en cada problema. Geométricamente puede obtenerse a través de una perpendicular a una línea imaginaria que pasa por el hilo y que contiene al punto $P(x, y, z)$. En el caso de este ejercicio, la línea imaginaria coincide con el eje OZ , debido a la ubicación elegida para el elemento de corriente en el sistema de referencia $OXYZ$.

¹⁰Esto no es realmente un cambio de variable, ya que la variable de integración es z' y ésta no se ha modificado (obsérvese que x e y no llevan ', y por ende, tampoco ϕ).

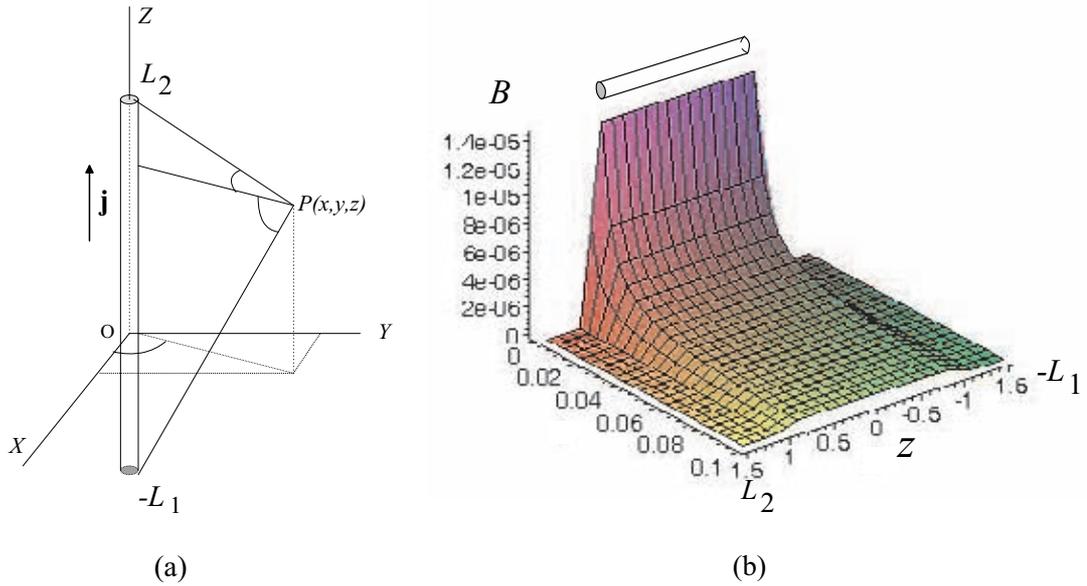


Figura 5.26. (a) α_1 y α_2 se miden respecto de ρ , siendo ρ la perpendicular a una línea que pasa por el hilo. (b) Gráfica del campo $B = B(\rho, z)$ para un hilo de $L = 2$ m. A medida que nos alejamos del hilo se observa un decaimiento rápido ($\sim 1/\rho$), el cual es muy acusado cuando, además, la coordenada z no está sobre el hilo.

5.8 Calcular el campo \mathbf{B} en el centro P del arco de circunferencia de la Figura 5.27. Datos: $R=2$ cm, $I=20$ A.

Resolución

Este caso es un ejemplo claro en el que se puede entender mejor la utilidad del problema anterior. Así, si se observa con detalle la Figura 5.28, podrá verse como el campo magnético en el punto P se puede entender como la superposición de los campos debidos a un cuarto de circunferencia y a dos hilos semiinfinitos. De este modo, no es necesario hallar el \mathbf{B} volviendo a integrar para todas las partes, sino que se puede emplear el resultado del ejercicio anterior.

Procediendo de esta manera, es posible expresar el campo magnético en P como la suma de tres partes,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_{h_1} + \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_{h_2} \tag{5.46}$$

en donde \mathbf{B}_{h_1} , \mathbf{B}_{h_2} y \mathbf{B}_c representan los campos los hilos y del arco de circunferencia, respectivamente.

Para proceder al cálculo se elige un sistema de referencia sencillo, de manera que se puedan aplicar fácilmente las ecuaciones que han sido halladas ya en otros ejercicios. Con esta idea, se toma un sistema $OXYZ$ cuyo origen pasa por el punto P y en el que el circuito es coplanario con OXY , siendo los ejes OX y OY paralelos a los hilos (no coincidentes—ver Figura 5.28). Una vez ubicados los ele-

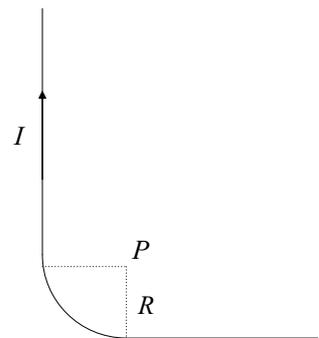


Figura 5.27. Sistema.

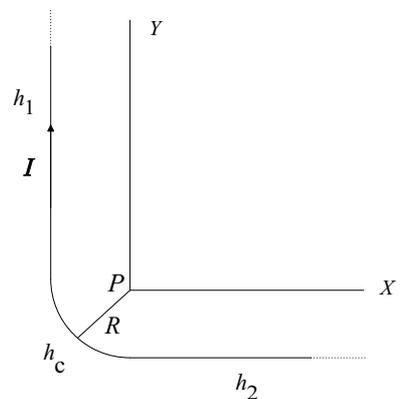


Figura 5.28. El sistema puede considerarse como suma de dos hilos semiinfinitos y de un sector de circunferencia.

mentos de corriente en el sistema antedicho, se pueden escribir las expresiones particulares para cada uno de ellos.

El campo magnético creado por los conductores rectilíneos en cualquier punto del plano OXY viene dado por:

$$\mathbf{B}_{h_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi|x+R|} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \mathbf{u}_z \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}_{h_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi|y+R|} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \mathbf{u}_z, \quad (5.48)$$

en donde debe tenerse en cuenta el signo de la intensidad. Obsérvese que como consecuencia de las características del sistema de referencia elegido, en vez de \mathbf{u}_ϕ aparece \mathbf{u}_z y, además, al estar los hilos desplazados hacia abajo y la izquierda respecto de los ejes OX y OY , se necesita incluir en el denominador este desplazamiento (Recuérdese que en la expresión obtenida para el caso del hilo finito, se supuso dicho hilo coincidente con el eje OZ , cosa que no ocurre en el problema que nos ocupa).

Aclaradas las ecuaciones para los hilos, queda por identificar los valores concretos de las variables que aparecen. Así, si se tiene en cuenta que ambos conductores son muy grandes, se encuentra fácilmente que: $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$ y $x = 0$ para el primer hilo (paralelo al eje OX) y, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ e $y = 0$ para el segundo (paralelo al eje OY). Como consecuencia de todo ello se obtiene:

$$\mathbf{B}_{h_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin \pi/2 + 0) \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{u}_z, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{B}_{h_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (0 + \sin \pi/2) \mathbf{u}_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{u}_z. \quad (5.50)$$

Lo único que queda por calcular es la contribución debida al arco de circunferencia de radio R . Para ello, se puede utilizar el planteamiento ya visto para el caso del campo creado por una espira circular, con la precaución de variar los límites de integración. Tomando la expresión de partida de la corriente circular, se tiene:

$$\mathbf{B}_c = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} d\phi' \mathbf{u}_z \right] = \left[-\frac{\mu_0 I R^2}{8(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z \right]_{z=0} = -\frac{\mu_0 I}{8R} \mathbf{u}_z. \quad (5.51)$$

Aplicando el principio de superposición se encuentra que,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{u}_z - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{u}_z - \frac{\mu_0 I}{8R} \mathbf{u}_z = 3,6 \times 10^{-4} \text{ T}. \quad (5.52)$$

Observación: El cálculo del campo creado en el punto P por los dos hilos del problema, podría haber sido realizado sin necesidad de expresar el desplazamiento de los mismos respecto de los ejes coordenados OX y OY . Se habría podido hallar a través de la misma expresión utilizada en el ejercicio, identificando directamente el valor de ρ respecto de cada hilo. Esto quedará más claro cuando utilicemos este enfoque en otros problemas.

5.9 Calcular el \mathbf{B} creado en P por la espira de la Figura 5.29, de lado L y corriente I . Particularícese para $L = 4 \text{ cm}$, e $I = 8 \text{ A}$.

Resolución

La forma más sencilla de resolver éste ejercicio no es mediante integración de la ley de Biot y Savart desde el principio; por el contrario, dado que el circuito tiene una geometría cuadrada, puede considerarse como formado por cuatro hilos finitos de longitud L unidos por sus extremos y, en consecuencia, es posible aplicar directamente la expresión para la corriente rectilínea, particularizada para cada segmento.

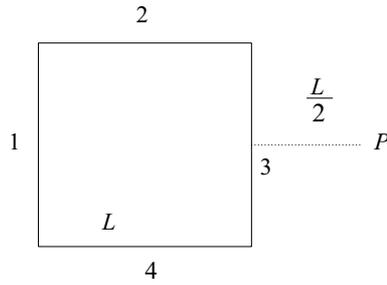


Figura 5.29. Espira cuadrada de lado L .

Con el fin de obtener la contribución en el punto P de cada parte de la espira, numeraremos los lados del cuadrado (véase Figura 5.29). Para poder calcular el campo es necesario conocer el valor de las funciones circulares que aparecen en la Ecuación (5.44), en cada tramo del sistema. Tomando cada elemento por separado, se tiene:

$$(1) \quad \text{sen } \alpha_1 = \text{sen } \alpha_2 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (3L/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \rho = \frac{3L}{2}$$

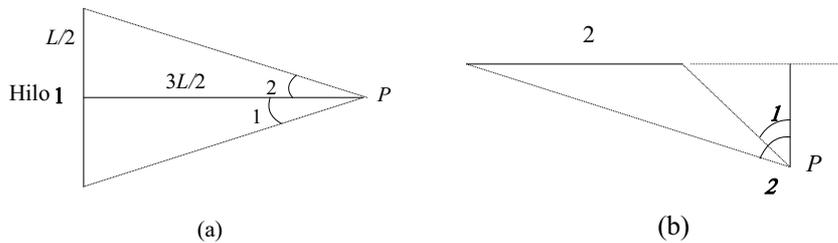


Figura 5.30. (a) Hilo 1. (b) Hilo 2. Obsérvese como α_1 es negativo y ρ es perpendicular a la prolongación del mismo.

$$(2) \quad \text{sen } \alpha_1 = -\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (L/2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \text{sen } \alpha_2 = \frac{3L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (3L/2)^2}}, \quad \rho = \frac{L}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$(3) \quad \text{sen } \alpha_1 = \text{sen } \alpha_2 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (L/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \rho = \frac{L}{2}$$

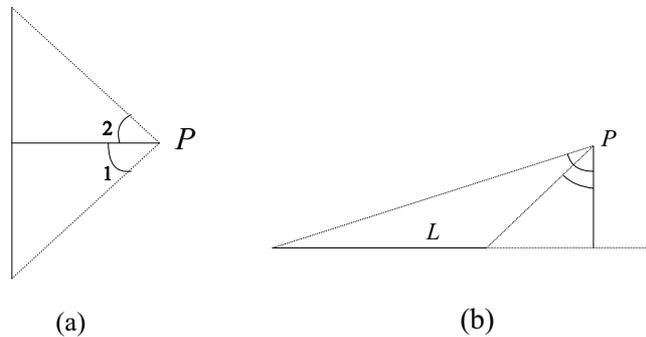


Figura 5.31. (a) Hilo 3. Este caso es similar al 1, pero para un ρ diferente. (b) Hilo 4. Similar al 2.

$$(4) \quad \text{sen } \alpha_1 = -\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (L/2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \text{sen } \alpha_2 = \frac{3L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + (3L/2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \rho = \frac{L}{2}$$

Una vez que se hallan los valores del seno de los dos ángulos que intervienen, se puede calcular el campo producido por cada uno de los hilos. Haciendo uso de la expresión de la corriente finita, se tiene:

$$(1) \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{3L}{2}} 2 \left[\frac{1}{\sqrt{10}} \right] \mathbf{u}_z,$$

$$(2) \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{L}{2}} \left[\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \right] \mathbf{u}_z,$$

$$(3) \quad \mathbf{B}_3(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{L}{2}} \left[2 \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \mathbf{u}_z,$$

$$(4) \quad \mathbf{B}_4(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{L}{2}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \right] \mathbf{u}_z.$$

Obsérvese como la aportación al campo magnético del tramo 3 tiene, al igual que los demás hilos, la dirección del eje OZ pero su sentido es negativo, es decir, apuntando hacia el papel. Con todo ello, el campo resultante en el punto P es:

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left[\frac{4}{3\sqrt{10}} - \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{10}} \right] \mathbf{u}_z. \quad (5.53)$$

Introduciendo los valores numéricos que se dan en el enunciado se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{B}(P) = -2,8 \times 10^{-5} \mathbf{u}_z \text{ T}.} \quad (5.54)$$

5.10 Calcular el campo magnético \mathbf{B} de una corriente por un alambre recto muy largo a partir del cálculo del potencial vector.

Resolución

La idea de este problema consiste en obtener el potencial vector, y a través de éste, el campo \mathbf{B} mediante la relación $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Para el cálculo de \mathbf{A} pueden utilizarse los valores de \mathbf{r} , \mathbf{r}' y $d\mathbf{l}'$ del problema 5,8, ya que la geometría es la misma (véase Figura 5.24). Introduciendo estos datos en la integral del potencial vector, se obtiene para un alambre de longitud $L = L_1 + L_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}} \mathbf{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[(z' - z) + \sqrt{\rho^2 + (z' - z)^2} \right] \Big|_{-L_1}^{L_2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln \left[(L_2 - z) + \sqrt{\rho^2 + (L_2 - z)^2} \right] - \ln \left[(-L_1 - z) + \sqrt{\rho^2 + (L_1 + z)^2} \right] \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\left[(L_2 - z) + \sqrt{\rho^2 + (L_2 - z)^2} \right]}{\left[(-L_1 - z) + \sqrt{\rho^2 + (L_1 + z)^2} \right]}. \end{aligned}$$

El resultado hallado corresponde al hilo finito. Para calcular el campo magnético de una corriente muy larga, la primera idea que surge es hacer muy grande L_1 y L_2 , y a posteriori, calcular el \mathbf{B} a partir del rotacional. Este enfoque, que en principio es correcto, plantea en el presente caso un problema serio, ya que si calculamos el valor de \mathbf{A} en un punto arbitrario para L_1 y L_2 muy grandes se obtiene:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{(z + L_1) + \sqrt{\rho^2 + (z + L_1)^2}}{(z - L_2) + \sqrt{\rho^2 + (z - L_2)^2}} \right] = \infty. \quad (5.55)$$

Este resultado podría hacernos pensar que al no poder proceder de la forma antedicha, ya que en estas condiciones no es posible el cálculo del rotacional, no existe campo magnético. Esto es evidentemente falso y contrasta con el resultado obtenido en el ejercicio anterior, en el cual se ha visto como el campo \mathbf{B} de un elemento de corriente muy grande no es cero. El que potencial vector \mathbf{A} salga infinito no es una contradicción de la teoría electromagnética, sino, por el contrario, algo posible en algunos casos, fruto de las condiciones en las que se plantea la teoría. Así, una de las hipótesis básicas, que junto con otros elementos permiten llegar a las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, es la de que la distribución de corrientes se encuentra confinada en una región finita del espacio. En nuestro caso, al considerar un hilo grande (teóricamente infinito), violamos esta condición, por lo que no podemos asegurar la convergencia del potencial vector. Por todo ello podemos pensar que mediante esta forma de operar no es posible calcular el campo magnético. Sin embargo, esto no es cierto, si se procede con cierto detalle. En efecto.

Considérese nuevamente la expresión de \mathbf{A} obtenida para el hilo finito. El leve matiz de cara al cálculo consiste en evaluar primeramente $\nabla \times \mathbf{A}$ para el hilo de longitud L , obteniendo así el campo \mathbf{B} para este caso y, calculado éste, pasaremos al límite haciendo muy grande las dimensiones del hilo. Utilizando la expresión para el potencial vector en coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{u}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (L_2 - z)^2}}}{(L_2 - z) + \sqrt{\rho^2 + (L_2 - z)^2}} - \frac{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z + L_1)^2}}}{(-z - L_1) + \sqrt{\rho^2 + (z + L_1)^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{L_1 + z}{\sqrt{\rho^2 + (L_1 + z)^2}} + \frac{L_2 - z}{\sqrt{\rho^2 + (L_2 - z)^2}} \right] \mathbf{u}_\phi \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \mathbf{u}_\phi}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Como puede verse, el resultado encontrado coincide con el obtenido anteriormente para el hilo finito. Si ahora se hacen las longitudes L_1 y L_2 muy grandes, se halla nuevamente la expresión para la corriente muy larga, desapareciendo la dificultad encontrada al calcular el potencial vector.

Observaciones:

- (1) De forma general puede decirse que, en el caso de tener que calcular el campo magnético de corrientes que se extienden por regiones muy grandes (infinitas) a partir del potencial vector, es recomendable proceder de la manera mostrada en este ejercicio, a fin de evitar problemas derivados de la falta de convergencia del potencial vector.
- (2) El paso de la expresión derivada en la Ecuación 5.56 a la forma final en la que aparecen los senos, conlleva mucho cálculo y no es en modo alguno evidente. Si se desea conocer la demostración puede consultarse el libro, **Marshal, Dubroff y Skitek**, "Electromagnetismo", Prentice-Hall Hispanoamericana (1997), p.207.

5.11 Dadas las espiras circulares de la Figura 5.32, iguales y con la misma intensidad I , calcular: 1) \mathbf{B} en el punto P situado en el eje de las espiras a la distancia z del centro de la espira izquierda. 2) Comprobar, mediante un desarrollo en serie, que los valores de \mathbf{B} en los puntos del eje, próximos al punto de $z = R/2$, son casi constantes.

Resolución

1) La resolución de este ejercicio puede hacerse aplicando la expresión (5.36). Para ello, suponemos la primera espira coincidente con el plano $z = 0$, y cuyo centro se sitúa sobre el origen de

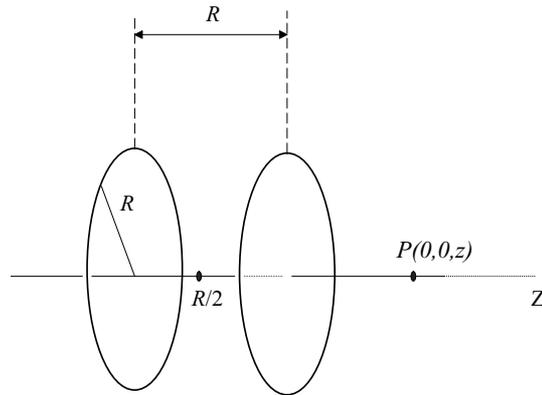


Figura 5.32. Sistema formado por una espira cuadrada y otra circular.

coordenadas del sistema $OXYZ$; asimismo, la segunda se halla en un plano paralelo al anterior a una distancia R , como se indica en la Figura 5.32. En estas condiciones, el campo magnético creado por el primer circuito es:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z .$$

Respecto de la otra espira, al estar separada de la anterior, hay que escribir su expresión referida al origen del sistema elegido, esto es,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (R - z)^2]^{3/2}} \mathbf{u}_z ,$$

en donde la aparición de $(R - z)$ proviene de haber desplazado la función 5.36 a $z = R$.

Con todo ello, el campo resultante en un punto del eje OZ viene dado por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_T &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{u}_z + \frac{\mu_0 I R^2}{2[R^2 + (R - z)^2]^{3/2}} \mathbf{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(R - z)^2 + R^2]^{3/2}} \right] \mathbf{u}_z , \end{aligned}$$

2) Para ver como es el campo B en las proximidades del punto $z = R/2$ desarrollamos $B(z)$ en serie de Taylor alrededor de $z = R/2$, esto es,

$$\begin{aligned} B(z) &= B(R/2) + (z - R/2) \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{z=R/2} + \frac{(z - R/2)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right)_{z=R/2} + \dots \\ \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)_{z=R/2} &= 0; \quad \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right)_{z=R/2} = 0; \quad \left(\frac{\partial^3 B}{\partial z^3} \right)_{z=R/2} = 0 \\ B(z) &= B(R/2) + \frac{(z - R/2)^4}{24} \left(\frac{\partial^4 B}{\partial z^4} \right)_{z=R/2} + \dots \end{aligned}$$

Si calculamos la cuarta derivada y despreciamos términos de orden superior, $B(z)$ puede expresarse del siguiente modo

$$B(z) = B(R/2) \left[1 - 1, 1 \left(\frac{z - R/2}{R} \right)^4 \right] .$$

Esto significa que para una región tal que $|z - R/2| < R/10$, el campo B se desvía del valor $B(R/2)$ menos que una parte y media en diez mil, lo cual implica que el campo magnético permanece aproximadamente constante en un entorno del punto $z = R/2$ (Figura 5.33).

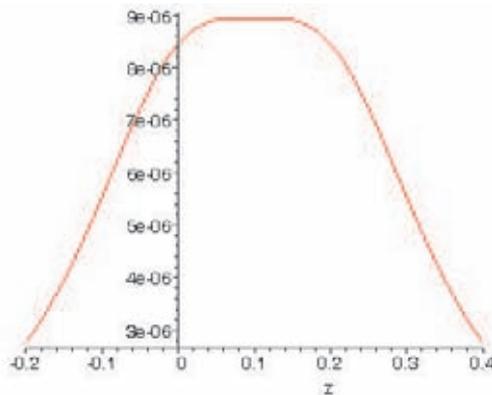


Figura 5.33. En esta gráfica se representa el campo magnético de un carrete de Helmholtz de radio $R = 0,2$ m, por el que circula una intensidad de 1 A, en función la distancia z . Obsérvese como alrededor de $R/2$ (0,1 m) el campo es aproximadamente homogéneo.

Observación: Una disposición similar a esta pero formada por N espiras en cada parte se denomina *carretes de Helmholtz*, y suele ser utilizada con frecuencia en los laboratorios de electromagnetismo, con la diferencia de que, en vez de dos espiras son dos bobinas, de manera que se consiga un mayor campo magnético en $z = R/2$.

- 5.12** El sistema de la Figura 5.34 consta de dos semicircunferencias de radios R_1 y R_2 unidas por sus extremos mediante dos hilos de longitud L . Calcular: 1°) El potencial vector \mathbf{A} en el punto O. 2°) El campo \mathbf{B} en ese mismo punto. Aplicar al caso de $I = 2\text{A}$ y $R_2 = 2R_1 = 24\text{cm}$.

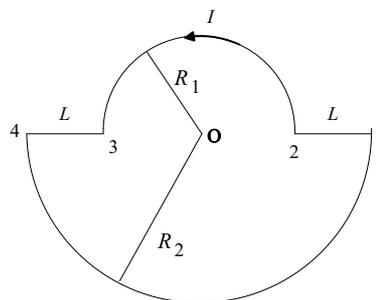


Figura 5.34. Sistema formado por una espira cuadrada y otra circular.

Resolución

1°) a) *Primer método*

Después de lo visto hasta ahora en otros ejercicios, el presente problema puede contemplarse de dos formas diferentes. Se puede comenzar teniendo en cuenta las expresiones de \mathbf{B} y \mathbf{A} para el hilo finito y para la espira, o puede hacerse el cálculo directamente mediante la aplicación de las integrales correspondientes al potencial vector y campo magnético, respectivamente.

Tomando la expresión para el campo \mathbf{A} se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

en donde Γ representa la curva de la figura. Aplicando la integral anterior al camino indicado por dicha curva, se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_1^2 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_2^3 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_3^4 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_4^1 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]. \quad (5.57)$$

Analizando cada uno de los términos de la expresión anterior puede verse como los valores de \mathbf{r} , \mathbf{r}' y $d\mathbf{l}'$ dependen de cada parte del recorrido 1-2-3-4-1, por lo que cada una de las anteriores integrales deberá realizarse separadamente. Veamos para cada parte de la curva los valores de cada una de las partes del integrando.

- Tramo (1-2): $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ $d\mathbf{l}' = dx' \mathbf{u}_x$
- Tramo (2-3): $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ $d\mathbf{l}' = dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y$
- Tramo (3-4): $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (-x', 0, 0)$ $d\mathbf{l}' = dx \mathbf{u}_x$
- Tramo (4-1): $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ $d\mathbf{l}' = dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_1^2 \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_2^3 \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int_3^4 \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_4^1 \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right].$$

Llegado a este punto, resulta útil poner los valores inicial y final de los límites de integración para cada una de las integrales anteriores. Cuando se hace esto, se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_{R_2}^{R_1} \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_2^3 \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + \int_{-R_1}^{-R_2} \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_4^1 \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right].$$

Si se observan los términos correspondientes a los caminos (2-3) y (4-1), se ve que al ser dos arcos de circunferencia es más cómodo hacer un cambio de variable a coordenadas polares que integrar directamente en la forma actual. Por esta razón, si se substituye $x' = R_1 \cos \phi'$ e $y' = R_1 \sin \phi'$ y sus diferenciales por $dx' = -R_1 \sin \phi' d\phi'$ e $dy' = R_1 \cos \phi' d\phi'$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_{R_2}^{R_1} \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_0^{\pi} \frac{-R_1 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + R_1 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y}{|R_1|} \right. \\ &+ \left. \int_{-R_1}^{-R_2} \frac{dx'}{|x'|} \mathbf{u}_x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-R_2 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + R_2 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y}{|R_2|} \right]. \end{aligned}$$

expresión fácilmente integrable, sin embargo, conviene hacer una aclaración sin no se quiere cometer error.

Si nos fijamos en los términos correspondientes a los hilos finitos que aparecen conectando los arcos se verá que en los denominadores de las integrales correspondientes a éstos aparece $|x'|$, que no, en principio, x' (recuérdese que $+\sqrt{x'^2} = |x'|$ y no x'), lo cual es una complicación, ya que la integral de $\frac{1}{|x'|}$ es diferente de $\frac{1}{x'}$. Para que quede claro, véase cómo se define la función que nos ocupa,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x'} & x' \in (0, \infty], \\ \frac{-1}{x'} & x' \in [-\infty, 0). \end{cases}$$

lo cual hace que el tercer término se pueda expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_{R_2}^{R_1} \frac{d\mathbf{x}'}{x'} \mathbf{u}_x + \int_0^\pi \frac{-R_1 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + R_1 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y}{|R_1|} + \int_{-R_1}^{-R_2} \frac{-d\mathbf{x}'}{x'} \mathbf{u}_x \right. \\
 &+ \left. \int_\pi^{2\pi} \frac{-R_2 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + R_2 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_y}{|R_2|} \right] \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ [\ln x']_{R_2}^{R_1} \mathbf{u}_x + [\cos \phi' \mathbf{u}_x + \sin \phi' \mathbf{u}_y]_0^\pi - [\ln x']_{-R_1}^{-R_2} \mathbf{u}_x + [\cos \phi' \mathbf{u}_x + \sin \phi' \mathbf{u}_y]_\pi^{2\pi} \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln \frac{R_1}{R_2} \mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_x - \ln \frac{R_2}{R_1} \mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_x \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} \mathbf{u}_x + \ln \frac{R_1}{R_2} \mathbf{u}_x \right] \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2} \mathbf{u}_x}.
 \end{aligned}$$

b) *Segundo método.*

Partiendo del mismo planteamiento anterior, existe otra manera más sencilla de resolver dos de las integrales que aparecen. Analizando la segunda y cuarta integrales se observa que, el denominador $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ corresponde a los radios R_1 y R_2 , de ambas semicircunferencias, respectivamente. Al ser dichos radios constantes, pueden salir del integrando, obteniendo, en tal caso:

$$\int_2^3 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R_1} \int_2^3 d\mathbf{l}',$$

y, para la segunda,

$$\int_4^1 \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R_1} \int_2^3 d\mathbf{l}'.$$

es decir, nuestro problema se reduce a sumar todos los vectores $d\mathbf{l}'$ a lo largo de los dos arcos de circunferencia. Para ello no es necesario hacer ninguna integral; basta darse cuenta que, geoméricamente, la resultante de todos los $d\mathbf{l}'$ es un vector paralelo al diámetro de cada una de las semicircunferencias (véase Figura 5.35). Teniendo esto en cuenta, las expresiones anteriores dan como resultado:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_1} \int_2^3 d\mathbf{l}' &= \frac{-2R_1}{R_1} \mathbf{u}_x = -2\mathbf{u}_x, \\
 \frac{1}{R_2} \int_2^3 d\mathbf{l}' &= \frac{2R_2}{R_2} \mathbf{u}_x = 2\mathbf{u}_x,
 \end{aligned}$$

valores coincidentes con los encontrados mediante el otro método.

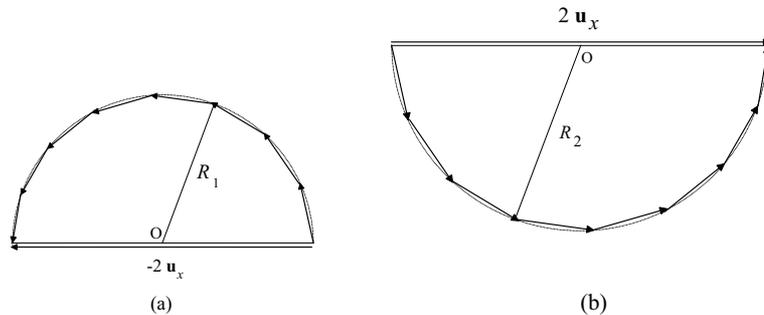


Figura 5.35. (a) Arco de circunferencia de radio R_1 . Obsérvese como la suma de los vectores diferenciales $d\mathbf{l}'$, es el vector $-2R_1 \mathbf{u}_x$. (b) Semicircunferencia de radio R_2 . En este caso la suma da $2R_2 \mathbf{u}_x$.

2º) El campo magnético, al igual que en el caso anterior, puede calcularse a través de la ley de Biot y Savart o directamente con las ecuaciones halladas para el conductor finito y la espira.

Por el primer método aparecen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int_1^2 \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} + \int_2^3 \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} + \int_3^4 \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} + \int_4^1 \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

Considerando los valores de \mathbf{r} , \mathbf{r}' y $d\mathbf{l}'$ obtenidos en el apartado anterior, así como el planteamiento de la espira circular, se tiene para \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[0 + \frac{R_1^2}{(R_1^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\phi' \mathbf{u}_z + 0 + \frac{R_2^2}{(R_2^2)^{3/2}} \int_\pi^{2\pi} d\phi' \mathbf{u}_z \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4R_1} \mathbf{u}_z + \frac{\mu_0 I}{4R_2} \mathbf{u}_z \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{u}_z .} \end{aligned}$$

Obsérvese como los términos correspondientes a los hilos han desaparecido, ya que al tener $d\mathbf{l}'$ y $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ la misma dirección para ellos, el producto vectorial es nulo.

Si se enfoca el problema directamente haciendo uso de la expresión para el hilo finito, se obtiene, en nuestro caso, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

3º) Para los datos que se dan en el problema los valores de $\mathbf{A}(0)$ y $\mathbf{B}(0)$, son:

$$\boxed{\mathbf{A} = -2,8 \times 10^{-7} \mathbf{u}_x \text{ Tm} .}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = 7,8 \times 10^{-6} \mathbf{u}_z \text{ T} .}$$

5.13 Los dos planos conductores de la Figura 5.36, paralelos y distantes en D , conducen corrientes antiparalelas e iguales de valor $\mathbf{j}_1 = j\mathbf{u}_z \text{ Am}^{-1}$ y $\mathbf{j}_2 = -j\mathbf{u}_z \text{ Am}^{-1}$, respectivamente. Calcular \mathbf{A} y posteriormente \mathbf{B} , en el espacio comprendido entre ellas.

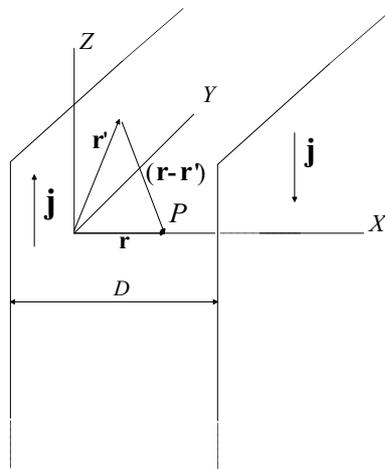


Figura 5.36. Planos paralelos separados una distancia D .

Resolución

Como puede verse por el enunciado, este problema consta de dos elementos diferentes (corrientes), por lo que para su resolución, en principio, calcularemos separadamente los campos $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ creados por cada uno de ellos y, posteriormente, aplicaremos el principio de superposición en un punto genérico entre las corrientes; obtenido esto se puede hallar el campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ a partir del rotacional del potencial vector.

Desde el punto de vista matemático lo primero que se puede suponer es que se tiene una hoja cuadrada de lado L y, una vez calculado el potencial vector para esta lámina finita se estudia el comportamiento de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ cuando se hacen tender a infinito los lados. Partiendo de esta idea, y tomando como punto intermedio entre ambos uno que se halla sobre el eje OY , se tiene para el plano $y = 0$: $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, $\mathbf{r}' = (x', 0, z')$, $dS' = dy'dz'$ y $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$. Con estos datos el potencial toma la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{j' dS'}{\sqrt{x'^2 + y^2 + z'^2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{j dy' dz'}{\sqrt{x'^2 + y^2 + z'^2}} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \iint_S \frac{dy' dz'}{\sqrt{x'^2 + y^2 + z'^2}} \mathbf{u}_z.$$

La resolución de la integral doble anterior en coordenadas cartesianas es laboriosa, sin embargo, si se tiene en cuenta que el plano es muy grande y que, por lo tanto, vamos a hacer tender a infinito z e y , es posible simplificar el cálculo. En efecto, imaginemos que se tiene un disco de radio finito por el que circula la misma corriente que se da en el enunciado. Si se halla el valor de \mathbf{A} para esta geometría y se hace muy grande el radio del círculo, debe encontrarse el mismo resultado, con la ventaja de que operando de ésta última forma la integración es más sencilla.

Siguiendo este procedimiento, dada la simetría del planteamiento, tomando $x' = \rho' \cos \phi'$ e $z' = \rho' \sin \phi'$, y sabiendo que el jacobiano de la transformación es $J(\rho', \phi') = \rho'$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 j}{4\pi} \iint_S \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + y^2}} |J(\rho', \phi')| d\rho' d\phi' \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \int_S \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + y^2}} \rho' d\rho' d\phi' \mathbf{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 j}{4\pi} \int_0^R \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + y^2}} d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} 2\pi \int_0^R \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + y^2}} d\rho' \mathbf{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 j}{4\pi} 2\pi \left[\sqrt{\rho'^2 + y^2} \right]_0^R \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 j}{2} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - |y| \right] \mathbf{u}_z. \end{aligned}$$

El resultado obtenido corresponde al de una corriente en la dirección del eje OZ que se extiende sobre una lámina circular. Como se ha explicado al principio de la resolución, esta forma de ver el problema era simplemente una manera de hacer más cómoda la integración, ya que lo que se pide no es lo hallado. Para responder a la pregunta original debemos hacer el radio del disco tan grande como se quiera, de forma que ocupe toda la región correspondiente al plano OXZ . Haciendo, por tanto, el radio muy grande, se tiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} = \frac{\mu_0 j}{2} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - |y| \right] \rightarrow \infty - |y| = \infty.$$

Este resultado era de esperar, ya que, como se comentó en el ejercicio del hilo infinito, no se puede asegurar la finitud del potencial vector de corrientes que se extienden por regiones muy grandes. En este sentido, referente al campo \mathbf{A}_1 podría pensarse que no tiene sentido su cálculo para una corriente de las características del problema, teniendo sólo respuesta para el campo magnético, calculando primeramente el rotacional del potencial vector del hilo finito, pasando a posteriori al límite para un radio grande (como se hizo para el \mathbf{B} del hilo). Sin embargo, al tratarse en realidad de dos corrientes, existe una posibilidad de trabajar de otra forma para encontrar un resultado satisfactorio.

Si analizamos las simetrías del problema observaremos que, al ser dos corrientes que se extienden por regiones paralelas pero en sentidos contrarios, van a producir, en un punto genérico entre ambas, potenciales \mathbf{A} de distinto signo. En nuestro caso significa que si se ha obtenido un

campo vectorial \mathbf{A}_1 en el punto P de sentido positivo (hacia arriba), la corriente que dista D de la anterior producirá un campo \mathbf{A}_2 , en general diferente en magnitud que \mathbf{A}_1 (ya que las distancias de cada una de las corrientes al punto P no tienen por qué ser iguales), pero de sentido negativo (hacia abajo). Este razonamiento tiene importancia de cara a entender lo que se intentará hacer a continuación. Así, si se tiene en cuenta que el paso final consiste en hacer tender a infinito el radio del círculo elegido para cada una de las corrientes, intuitivamente se ve que se va a encontrar una diferencia de valores infinitos para el potencial resultante, lo cual, desde el punto de vista matemático es una indeterminación, no pudiendo ya decir con seguridad que el resultado no tiene sentido. En resumen: existe la posibilidad de que al resolver la mencionada indeterminación obtengamos un valor finito. Con el fin de comprobar este argumento, calculemos el potencial vector de la otra corriente.

Aquí, la única diferencia inicial es la localización de la corriente y el valor de la misma, lo cual se traduce en que el vector $\mathbf{r}' = (x', D, z')$ es diferente y también \mathbf{j}_2 . Introduciendo todos los valores en la expresión de potencial, y procediendo como se ha hecho con anterioridad, se encuentra:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0 j}{4\pi} 2\pi \int_0^R \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + (y-D)^2}} d\rho' \mathbf{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 j}{4\pi} 2\pi \left[\sqrt{\rho'^2 + (y-D)^2} \right]_0^R \mathbf{u}_z \\ &= -\frac{\mu_0 j}{2} \left[\sqrt{R^2 + (y-D)^2} - |y-D| \right] \mathbf{u}_z,\end{aligned}$$

resultado coherente con la argumentación discutida. Si se calcula el límite se obtiene:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} = -\frac{\mu_0 j}{2} \left[\sqrt{R^2 + (y-D)^2} - |y-D| \right] \mathbf{u}_z \rightarrow -\infty - |y-D| = -\infty.$$

Considerando estos valores para ambos potenciales, el paso siguiente consiste en aplicar la fórmula de \mathbf{A} al conjunto de ambas láminas antes de pasar al límite, es decir, sumar las integrales correspondientes a los discos *finitos* iniciales y, posteriormente, hacer muy grande el radio R , o sea,

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{A}(P) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{A}_1(P) + \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{A}_2(P) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 j'}{2} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - \sqrt{R^2 + (y-D)^2} - |y| + |y-D| \right] \mathbf{u}_z \\ &\rightarrow \infty - \infty - |y| + |y-D| = \infty - \infty.\end{aligned}$$

Este cálculo da la indeterminación que habíamos intuido. Para evitar este problema vamos examinar con detenimiento los términos infinitos, dado que $|y|$ e $|y-D|$ son valores finitos al no depender de R . Tomando nuevamente el límite sobre estos términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}&\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 j}{2} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - \sqrt{R^2 + (y-D)^2} \right] \mathbf{u}_z = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 j}{2} \left[\frac{(\sqrt{R^2 + y^2} - \sqrt{R^2 + (y-D)^2})(\sqrt{R^2 + y^2} + \sqrt{R^2 + (y-D)^2})}{\sqrt{R^2 + y^2} + \sqrt{R^2 + (y-D)^2}} \right] \mathbf{u}_z \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 j}{2} \left[\frac{R^2 + y^2 - R^2 - (y-D)^2}{\sqrt{R^2 + y^2} + \sqrt{R^2 + (y-D)^2}} \right] \mathbf{u}_z \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 j}{2} \left[\frac{-D^2 + 2Dy}{\sqrt{R^2 + y^2} + \sqrt{R^2 + (y-D)^2}} \right] \mathbf{u}_z \rightarrow 0.\end{aligned}$$

De esta forma se ha eliminado la indeterminación, pudiendo sin problema calcular el valor del potencial vector cuando las corrientes se extienden hasta el infinito. Para ello, retomemos la

expresión original de $\mathbf{A}(P)$ cuando se aplicó el principio de superposición para los dos discos finitos y hagamos tender otra vez el radio muy grande, esto es:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 j'}{2} (0 - |y| + |y - D|) \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 j'}{2} (-|y| + |y - D|) \mathbf{u}_z,$$

encontrando la expresión para \mathbf{A} . No obstante, es posible escribir este último resultado de otra manera más sencilla de manipular, sobre todo cuando se tienen que hallar derivadas (como es nuestro caso con el \mathbf{B}). Si se tiene en cuenta que y toma un valor entre el plano $y=0$ e $y=D$, se obtiene que $y < D$, por lo que $(y - D) < 0$, pero como lo que aparece es $|y - D|$ que es siempre positivo, $|y - D| = (D - y)$, pudiendo expresar el potencial vector como sigue:

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 j'}{2} [-y + D - y] \mathbf{u}_z \Rightarrow \mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0 j'}{2} [D - 2y] \mathbf{u}_z.$$

A partir de se esta función resulta sencilla la obtención del campo magnético utilizando el rotacional,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 j \mathbf{u}_y.$$

- 5.14** El efecto cuántico Aharonov-Bohm consiste en una variación de fase de la función de onda, originada por el potencial vector \mathbf{A} , de valor $\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, donde la integral debe calcularse a lo largo del camino seguido por la carga Q desde el punto 1 al punto 2. En la Figura 5.37 se ha situado en 1 un cañón lanzador de cargas, una pantalla P provista de los orificios O y O' , un solenoide recto infinito de sección circular S y un campo \mathbf{B} dirigido hacia el observador y un detector en el punto 2. Se consideran las dos trayectorias dibujadas recorridas por las cargas, y llamadas en la figura a y b . Calcular el valor de la expresión $\Delta_b\varphi - \Delta_a\varphi$.

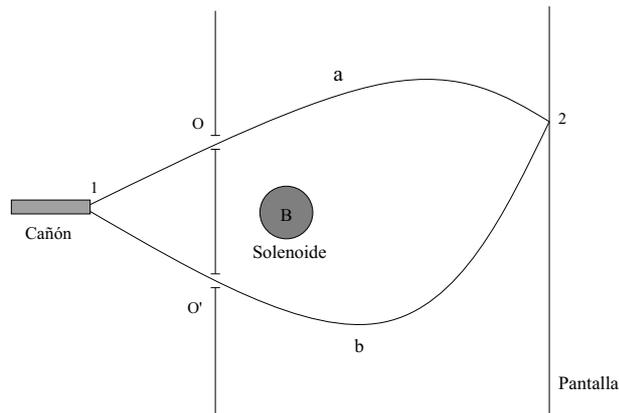


Figura 5.37. Dispositivo para comprobar el efecto Aharonov-Bohm.

Resolución

Este ejercicio, parcialmente, tiene que ver con la mecánica cuántica; por esta razón conviene aclarar algunas cuestiones básicas referentes a esa materia.

Desde el punto de vista cuántico el concepto de fuerza no es muy utilizado, mientras que los conceptos de energía y cantidad de movimiento tienen una importancia relevante. Además, en vez de trayectoria de las partículas se emplea la amplitud de probabilidad, la cual varía en el espacio y el tiempo. Dichas amplitudes dependen de las longitudes de onda, las cuales tienen que ver con las cantidades de movimiento, y también de las frecuencias, estando relacionadas con

las energías. Son, en definitiva, la cantidad de movimiento y la energía, quienes determinan las fases de las funciones de onda. Partiendo de esto, podemos entender en qué consiste el efecto Aharonov-Bohm (véase, por ejemplo, **Y.Imry y R.A.Webb**, "Interferencias cuánticas y efecto Aharonov-Bohm", Investigación y Ciencia. Abril (1989), p. 28 – 35).

Imaginemos un sistema como el de la Figura 5.37. Una fuente de electrones envía partículas hacia las rendijas O y O' . A una distancia L de las mismas se coloca una pantalla en donde tenemos un detector que va registrando la intensidad. La cantidad de electrones que llegan es proporcional a la probabilidad de que un solo electrón que salga de la fuente pueda llegar a esa región de la pantalla. La probabilidad es debida a la interferencia de sus amplitudes, interferencia que depende de la diferencia de las fases de cada una de dichas amplitudes $\delta = \phi_1 - \phi_2$ (The Feynman Lectures of Physics, Vol.II, cap.15, p.11).

En el sentido de lo anteriormente dicho, tenemos interés en enunciar ahora la ley de la mecánica cuántica que reemplaza la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (Capítulo 9), es decir, queremos saber la ley que determina el comportamiento de las partículas cuánticas en un campo electromagnético clásico. La ley es la siguiente: La fase correspondiente a una amplitud a lo largo de cualquier trayectoria C es afectada por la presencia de un campo magnético en una cantidad igual a:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

es decir, si hay un campo \mathbf{B} en alguna parte, la fase de la amplitud de probabilidad se ve incrementada en la integral anterior. En el caso de un campo eléctrico, el incremento de la fase viene dado por:

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{\hbar} \int_C V dt.$$

Estas ecuaciones valen tanto para campos estáticos como campos dinámicos, reemplazando así a la fuerza de Lorentz (Capítulo 9).

Supongamos ahora que en el experimento de la doble rendija existe un campo magnético; veamos cual es la fase de llegada de las dos ondas de probabilidad, cuya trayectoria pasa a través de las dos rendijas. Para la trayectoria a tendremos:

$$\Delta_a\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

y para el camino b :

$$\Delta_b\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

por lo que diferencia de fase es:

$$\Delta_b\varphi - \Delta_a\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_{1(b)}^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \frac{q}{\hbar} \int_{1(a)}^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

siendo (b) y (a) los subíndices que denotan las trayectorias a través de las cuales se realizan las integrales. Aplicando ahora la propiedad de las integrales definidas $\int_1^2 f(x)dx = -\int_2^1 f(x)dx$, se tiene:

$$\Delta_b\varphi - \Delta_a\varphi = \frac{q}{\hbar} \int_{1(b)}^2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \frac{q}{\hbar} \int_{2(a)}^1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

en donde Γ es la trayectoria está formada por las curvas a y b unidas en 1 y 2. De este modo, se ha llegado a una expresión en la que aparece la integral curvilínea del potencial vector, pudiendo ser transformada a una integral doble mediante el teorema de Stokes, de la siguiente forma:

$$\Delta_b\varphi - \Delta_a\varphi = \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esta transformación es la contraria de la que hemos hecho normalmente. La razón de ello está en que, ahora queremos relacionar la variación de la fase con el campo magnético \mathbf{B} , lo cual es posible a través del rotacional del potencial vector. Utilizando la expresión $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, se tiene:

$$\Delta_b \varphi - \Delta_a \varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{sol}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

siendo S_{sol} la superficie correspondiente a una sección del solenoide, dado que fuera de él no hay campo \mathbf{B} . Desde un punto de vista físico, este resultado significa que el diagrama de interferencia que se observa en la pantalla, debido a la difracción del haz incidente de electrones por las dos rendijas, se verá alterado como consecuencia de la variación de la fase provocada por la existencia de un campo magnético. Esta modificación de la fase provoca un desplazamiento del patrón de difracción, respecto del que se obtiene en ausencia de campo, si bien conservando el contraste de las franjas (véase Figura 5.38). Conceptualmente, el efecto Aharonov-Bohm es importante en

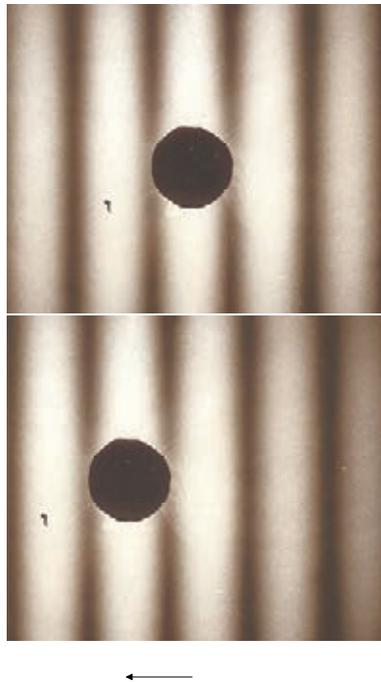


Figura 5.38. (a) Patrón de difracción antes de aplicar campo magnético. (b) Patrón de difracción en presencia de un campo \mathbf{A} . Obsérvese el desplazamiento del patrón (tómese como referencia el punto central-flecha).

electromagnetismo por lo siguiente. Si se analiza paso a paso lo que se ha hecho, se observa que, fuera de la bobina el único campo que existe es el \mathbf{A} (Figura 5.39). Por esta razón, es éste el campo que interactúa sobre los electrones modificando así la fase de la función de onda de los mismos, de lo cual se infiere, que lo que cuánticamente ven los electrones no es el campo magnético \mathbf{B} , sino el potencial vector. Por este hecho, desde una perspectiva no clásica, el campo \mathbf{A} es una entidad física real, debiendo desechar la idea que dicho potencial es simplemente un mecanismo formal, a partir del cual es más sencillo calcular el \mathbf{B} .

Para terminar, es pertinente aclarar que las demostraciones dadas para explicar el efecto Aharonov-Bohm se enmarcan dentro de una teoría semiclásica, ya que utiliza el concepto de función de onda para hablar de la probabilidad de que un electrón llegue a un punto de la pantalla, pero considera a \mathbf{A} y \mathbf{B} como campos clásicos. Una descripción completamente cuántica de dicho efecto, ha sido realizada recientemente en 1999; en ella se tiene en cuenta, no sólo las

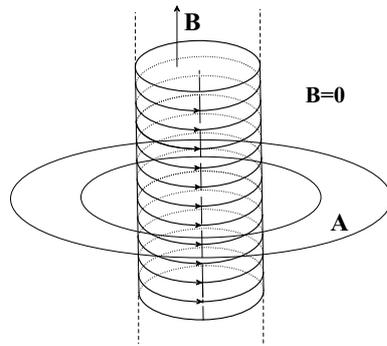


Figura 5.39. Solenoide muy largo. Obsérvese como fuera de él no hay campo \mathbf{B} .

partículas, sino también a los campos como entes cuánticos [Véase **E. Santos and I. Gonzalo**, “Microscopic theory of the Aharonov-Bohm effect”. *Europhys. Lett.*, 45(4), pp. 418-423 (1999)].

- 5.15** El futuro reactor de fusión nuclear ITER puede asimilarse a un solenoide toroidal cuya sección es la de la Figura 5.40. El solenoide será de $N = 3840$ espiras superconductoras por las que circulará una intensidad de $I' = 35 \times 10^3$ A. Por el interior del toro circularán deuterones, produciendo una corriente homogénea de intensidad $I = 25 \times 10^6$ A. Calcular la fuerza magnética por unidad de volumen sobre los deuterones que circulan por la parte más externa del toro. Supóngase que el fluido de deuterones no es magnetizable.

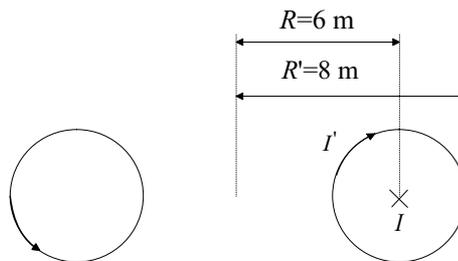


Figura 5.40. Sección del solenoide toroidal.

Resolución

Para hallar la fuerza por unidad de volumen que se ejerce sobre los deuterones, se debe utilizar la Ecuación (5.18), en su forma diferencial, esto es:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Para aplicar esta igualdad, es necesario entender bien los campos que se hallan involucrados, de lo contrario el ejercicio podría resolverse incorrectamente. Así, tendremos un campo magnético debido a la corriente I' que circula por el solenoide. Dicho campo puede encontrarse haciendo uso del teorema de Ampère, tal y como se vio en el Problema 5.2; sin embargo, no es el único campo \mathbf{B} que existe dentro del solenoide. En efecto, si analizamos con detenimiento todos los datos que se aportan en el ejercicio, se observa que, al circular por dentro del toroide una corriente I , también habrá otro campo debido a ésta, pudiendo contribuir, en principio, a la fuerza total que se ejerce sobre las cargas en movimiento. Con el fin de no confundirnos hablaremos de dos campos diferentes: $\mathbf{B}(I')$ debido al toro y $\mathbf{B}(I)$ producido por la propia corriente.

El correspondiente al solenoide, ya se vio al principio del capítulo, tiene por valor en el sistema de coordenadas cilíndricas habitual:

$$\mathbf{B}(I') = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R'} \mathbf{u}_\phi,$$

siendo R' la distancia entre el punto más extremo dentro del toroide y el eje de revolución del mismo.

En el caso de $\mathbf{B}(I)$, se obtiene fácilmente haciendo uso del teorema de Ampère. Consideremos una curva circular Γ (∂S) de radio $r < (R' - R)$, centrada en la sección recta derecha \tilde{S} del solenoide (véase Figura 5.41). Para facilitar el cálculo, imagínese que nos aislamos mentalmente del toroide y nos centramos exclusivamente en la citada sección. Si con este planteamiento intentamos aplicar la ley de Ampère vemos que, con las coordenadas utilizadas para $\mathbf{B}(I')$, el cálculo se complica, ya que $d\mathbf{l}$ tendrá componentes no nulas sobre \mathbf{u}_ρ y \mathbf{u}_z . Esta dificultad se resuelve fácilmente si tomamos un segundo sistema de coordenadas con origen en \tilde{O} , centro de \tilde{S} . Como al final del ejercicio obtendremos un campo resultante referido a este segundo sistema de referencia, para no confundirnos llamaremos a los vectores unitarios del sistema nuevo $\tilde{\mathbf{u}}_\rho$, $\tilde{\mathbf{u}}_\phi$ y $\tilde{\mathbf{u}}_z$.

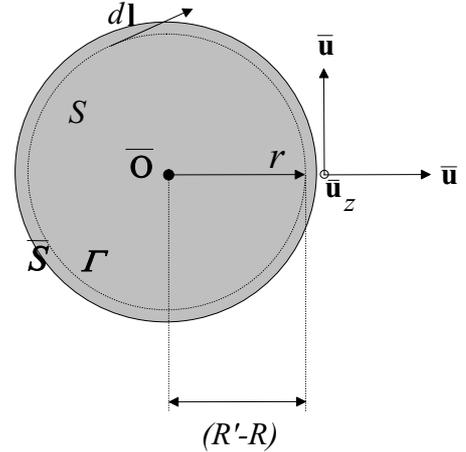


Figura 5.41. Sección de la parte derecha del toro. El nuevo sistema de coordenadas se toma respecto de \tilde{O} .

Con todas las consideraciones realizadas puede escribirse: $\mathbf{j}(I) = -j\tilde{\mathbf{u}}_z = (0, 0, -j)$, y $(\tilde{\mathbf{B}}_\rho, \tilde{\mathbf{B}}_\phi, \tilde{\mathbf{B}}_z)$. Tomando $d\tilde{\mathbf{l}} = -d\tilde{l}\tilde{\mathbf{u}}_\phi$ en sentido horario, $d\tilde{\mathbf{S}} = -dS\tilde{\mathbf{u}}_z$, que introducido junto con los anteriores datos en la Ecuación (5.5), queda:

$$\oint_{\partial\tilde{S}} (\tilde{B}_\rho, \tilde{B}_\phi, \tilde{B}_z) \cdot d\tilde{\mathbf{l}} = \mu_0 \int_{\tilde{S}} (0, 0, -j) \cdot d\tilde{\mathbf{S}} \Rightarrow \oint_{\partial\tilde{S}} -\tilde{B}_\phi d\tilde{l} = \mu_0 \int_{\tilde{S}} j d\tilde{S}.$$

Suponiendo que la corriente en el anillo es *localmente* asimilable a la de un hilo muy largo, se deduce que,

$$\begin{aligned} -\int_0^L \tilde{B}_\phi d\tilde{l} &= \mu_0 \int_{\tilde{S}} j d\tilde{S} \Rightarrow -\tilde{B}_\phi \int_0^L d\tilde{l} = \mu_0 j \int_{\tilde{S}} d\tilde{S} \Rightarrow \\ -\tilde{B}_\phi L &= \mu_0 j \tilde{S} = \mu_0 I \Rightarrow \tilde{B}_\phi 2\pi(R' - R) = \mu_0 j \pi(R' - R)^2 \Rightarrow \tilde{B}_\phi = -\frac{\mu_0 j (R' - R)}{2}, \end{aligned}$$

es decir, la componente \tilde{B}_ϕ tiene proyección negativa sobre el vector unitario $\tilde{\mathbf{u}}_\phi$, por lo que dicho campo tangencial irá en sentido antihorario. Como el dato que se da de la corriente es I y no \mathbf{j} , debemos introducir de alguna manera la intensidad I en la expresión obtenida. Para ello, basta darse cuenta de cómo se relacionan \mathbf{j} e I en la sección estudiada. Así, como \mathbf{j} es homogénea e I conocida, se verifica que,

$$\int_{\tilde{S}} \mathbf{j} \cdot d\tilde{\mathbf{S}} = I,$$

en donde $\tilde{S} = \pi[(R' - R)/2]^2$, representa la superficie total de la sección circular del solenoide. Operando la última ecuación, resulta,

$$j\tilde{S} = I \Rightarrow j\pi(R' - R)^2 = I \Rightarrow j = \frac{I}{\pi(R' - R)^2}.$$

Introduciendo este resultado en \tilde{B}_ϕ , se encuentra:

$$\tilde{B}_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R' - R)},$$

y vectorialmente, según nuestro sistema de referencia,

$$\tilde{\mathbf{B}}_\phi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R' - R)} \tilde{\mathbf{u}}_\phi.$$

Con todo ello, podemos decir que, el campo magnético total en un punto cercano a la parte más externa del toroide, referido al sistema \tilde{O} , $\{\tilde{\mathbf{u}}_\rho, \tilde{\mathbf{u}}_\phi, \tilde{\mathbf{u}}_z\}$, viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(I') + \mathbf{B}(I) = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi R'} \tilde{\mathbf{u}}_z - \frac{\mu_0 I}{2\pi(R' - R)} \tilde{\mathbf{u}}_\phi,$$

en donde, como puede observarse, se ha substituido \mathbf{u}_ϕ que aparecía en la expresión original de $\mathbf{B}(I')$, por $\tilde{\mathbf{u}}_z$ del nuevo sistema. El signo menos se debe a que $\mathbf{u}_\phi = -\tilde{\mathbf{u}}_z$.

Con este resultado puede obtenerse la fuerza por unidad de volumen sobre el plasma. Para ello, basta introducir este resultado en

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times [\mathbf{B}_z(I') + \mathbf{B}_\phi(I)] = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_\phi(I).$$

El campo magnético creado por la corriente I' del toro no aparece en la anterior expresión. La razón de ello es que $\mathbf{B}_z(I')$ es paralelo a la corriente de deuterones y, en consecuencia, no ejerce ninguna fuerza sobre los mismos ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}_z(I') = \mathbf{0}$). En resumen, la fuerza por unidad de volumen sobre las partículas cargadas de la parte más alejada del toro, es la siguiente:

$$\left| \frac{d\mathbf{F}}{dV} \right| = jB_\phi(I) \approx \frac{I}{\pi(R' - R)^2} \mu_0 \frac{I}{2\pi(R' - R)} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2(R' - R)^3} = 5 \times 10^6 \text{ Nm}^{-3}.$$

5.16 En referencia a la Figura 5.42, calcular la fuerza que ejerce el campo magnético creado por una densidad de corriente homogénea y estacionaria $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$ de geometría cilíndrica y radio R , sobre una longitud h de sí misma.

Resolución

En primer lugar hay que calcular el campo magnético creado por la corriente en la región $0 \leq \rho \leq R$. Para ello emplearemos el teorema de Ampère, esto es,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 I.$$

Como puede observarse, la corriente posee simetría de traslación y de rotación, por lo que una curva adecuada Γ (Figura 5.43) para calcular el \mathbf{B}_ϕ puede ser una circunferencia de radio $\rho < R$ y la superficie S , la correspondiente al círculo cuya frontera ∂S es Γ (ver ejemplo del hilo infinito). Con todo ello y utilizando coordenadas polares, se obtiene:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (0, 0, j) \cdot d\mathbf{S}.$$

Teniendo en cuenta que $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$ y $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS$, se tiene:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (0, dl, 0) = \mu_0 \int_S (0, 0, j) \cdot (0, 0, 1)dS$$

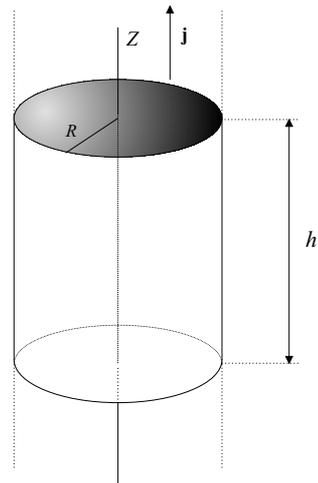


Figura 5.42. Corriente de simetría cilíndrica.

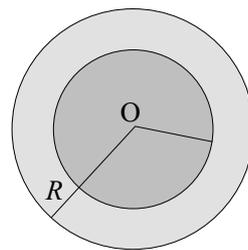


Figura 5.43. Curva Γ de radio $\rho \leq R$.

y haciendo los productos escalares que aparecen,

$$\int_0^L B_\phi dl = \mu_0 \int_S (0, 0, j) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 j \int_S dS,$$

siendo L la longitud total de la curva. Al ser B_ϕ dentro de la integral ya un escalar, toma el mismo valor para cualquier punto de la curva elegida Γ (o frontera ∂S), ya que existe simetría de revolución, por lo que puede salir fuera del integrando, obteniendo como resultado:

$$B_\phi \int_0^L dl = \mu_0 j \int_S dS,$$

y, realizando el cálculo,

$$B_\phi L = \mu_0 j S \Rightarrow B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 j \pi \rho^2,$$

o sea,

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 j \rho}{2} \mathbf{u}_\phi.$$

Conociendo el valor del campo magnético, puede encontrarse el valor de la fuerza que ejerce dicho campo sobre la corriente empleando la Ecuación (5.18). Realizando el producto vectorial y cambiando a coordenadas cilíndricas, dada la simetría, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{V'} \mathbf{j}_v \times \mathbf{B} dV' = \int_{V'} -\frac{\mu_0 j^2 \rho'}{2} \mathbf{u}_\rho dV' \\ &= -\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{\mu_0 j^2 \rho'}{2} |J(\rho', \phi')| d\rho' d\phi' dz' \mathbf{u}_\rho = -\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{\mu_0 j^2 \rho'}{2} \rho' d\rho' d\phi' dz' \mathbf{u}_\rho. \end{aligned}$$

Llegado a este punto hay que tener cuidado de no errar al manipular \mathbf{u}_ρ . Como ya se explicó anteriormente, \mathbf{u}_ρ depende de ϕ y lo mismo ocurre para \mathbf{u}_ϕ , es decir $\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\rho(\phi)$. Substituyendo el valor de éste en la última expresión, encontramos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{\mu_0 j^2 \rho'}{2} \rho' d\rho d\phi' dz' (\cos \phi' \mathbf{u}_x + \sin \phi' \mathbf{u}_y) \\ &= -\frac{\mu_0 j^2}{2} \left[\int_0^R \rho'^2 d\rho' \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' \int_0^h dz' \mathbf{u}_x + \int_0^R \rho'^2 d\rho' \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' \int_0^h dz' \mathbf{u}_y \right] = 0. \end{aligned}$$

Obsérvese que en la expresión $(\mu_0 j \rho / 2) \mathbf{u}_\phi$, se ha substituido ρ por ρ' para hacer el cálculo, ya que la integración se realiza sobre el volumen correspondiente a la corriente y, según la nomenclatura elegida, los puntos fuente llevan prima (').

Otra manera más sencilla de hacer esta segunda parte del problema es la siguiente. Calculemos, primeramente, cuál es el diferencial de fuerza que ejerce el campo magnético sobre un elemento diferencial de volumen. Para ello, basta escribir la ecuación original que da lugar a (5.18), es decir:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{r})}{dV'} = \mathbf{j}_v(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 j^2 \rho}{2} \mathbf{u}_\rho.$$

Este resultado muestra que la fuerza que actúa por unidad de volumen depende de la distancia al eje ρ y es de sentido negativo en la dirección radial (hacia el eje). Considérese un elemento de la corriente dV'_1 ubicado en un punto arbitrario $P_1(\rho', \phi', z')$ (Figura 5.44); dicho elemento dista ρ del eje OZ y está sometido a una fuerza dirigida hacia el centro de valor $(\mu_0 j^2 \rho) / 2$. Si tomamos ahora otro volumen similar dV'_2 , opuesto diametralmente, se observa que la fuerza que actúa sobre él es idéntica a la que existe en P_1 pero de sentido contrario (también apunta hacia el centro), por lo que la resultante ambas fuerzas se anulará. De este modo, repitiendo el razonamiento para cada elemento dV' de la corriente y su homólogo a la misma distancia respecto de OZ y rotado un ángulo de π radianes, se llega a la conclusión de que la resultante de las fuerzas sobre la corriente debida al campo \mathbf{B} es cero.

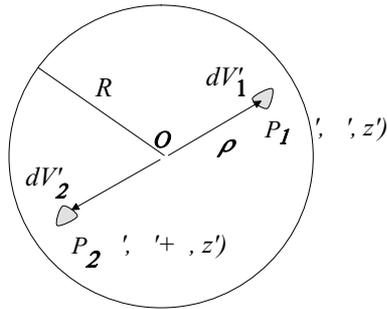


Figura 5.44. Para cada elemento dV'_1 existe otro idéntico dV'_2 , simétrico respecto del centro O .

5.17 Calcular el momento magnético de una espira circular de radio a por la que circula una intensidad de corriente I .

Resolución

Tomando la espira coplanaria con el plano OXY y su centro coincidente con el origen del sistema de referencia $OXYZ$, se tiene: $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ y $d\mathbf{l}' = (dx', dy', 0)$, por lo que $(\mathbf{r}' \times d\mathbf{l}') = (x'dy' - y'dx')\mathbf{u}_z$, que introduciéndolo en (5.23), da

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}' = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma'} (x'dy' - y'dx')\mathbf{u}_z. \tag{5.58}$$

Teniendo en cuenta que el circuito tiene simetría circular, resulta conveniente utilizar coordenadas polares. Haciendo, por lo tanto, $x' = a \cos \phi'$ e $y' = a \sin \phi'$, se tiene:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\phi' \mathbf{u}_z = I\pi a^2 \mathbf{u}_z .$$

Esta expresión podría haberse obtenido directamente de la Ecuación (5.23).

5.18 El sistema de la Figura 5.45 consta de una espira cuadrada de lado L coplanaria con el plano OXZ y de un hilo muy largo situado en el plano OXY a una distancia D de dicha espira. Obtener, razonadamente: a) La fuerza sobre cada hilo que forma la espira y la resultante. b) El momento mecánico resultante respecto del punto O . c) El efecto mecánico sobre la espira.

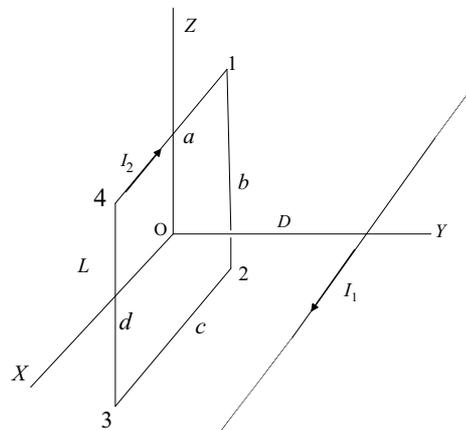


Figura 5.45. Sistema formado por una espira rectangular y un hilo infinito.

Resolución

Para resolver este ejercicio, podemos suponer que la espira cuadrada está formada por cuatro hilos finitos de longitud L . Siguiendo este esquema, se tiene:

Sobre a

Recordando el problema 5.1, el campo magnético creado por un hilo muy largo por el que circula una intensidad I , viene dado por:

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi \equiv \mathbf{B}.$$

Para aplicar la Ecuación (5.20) necesitamos partir de un sistema de referencia. En nuestro caso, tomaremos el habitual $OXYZ$. Para tal sistema, los vectores que intervienen en la expresión de la fuerza en el tramo a son los siguientes: $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, B_y, B_z) = (0, -B \sen \phi, -B \cos \phi)$, $d\mathbf{l} = (dx, 0, 0)$, $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = (-B_z dx \mathbf{u}_y + B_y dx \mathbf{u}_z)$. Como puede observarse, el campo \mathbf{B} tiene dos componentes cuando se expresa en $OXYZ$, según la disposición entre el hilo y la espira (Figura 5.46). De este modo, la fuerza en esta parte, poniendo los límites de integración según el sentido de la corriente, será

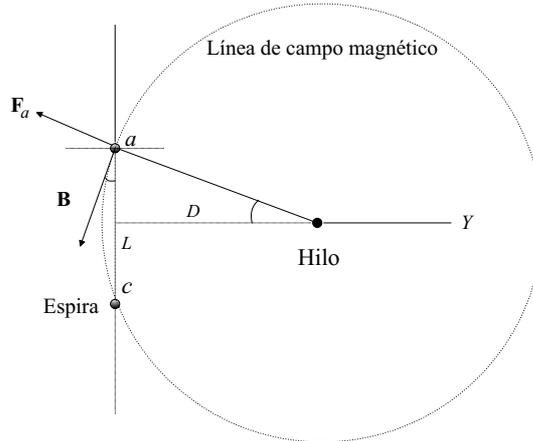


Figura 5.46. Sección de la espira e hilo infinito (hilos a y c). El campo magnético tangencial B_ϕ tiene dos componentes cuando se proyecta sobre el sistema de referencia $OXYZ$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_a &= I_2 \int_a d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I_2 \int_{L/2}^{-L/2} (-B_z dx \mathbf{u}_y + B_y dx \mathbf{u}_z) \\
 &= -I_2 \int_{L/2}^{-L/2} B_z dx \mathbf{u}_y + I_2 \int_{L/2}^{-L/2} B_y dx \mathbf{u}_z \\
 &= -I_2 \int_{L/2}^{-L/2} (-B \cos \phi) dx \mathbf{u}_y + I_2 \int_{L/2}^{-L/2} (-B \sen \phi) dx \mathbf{u}_z \\
 &= I_2 B \cos \phi \int_{L/2}^{-L/2} dx \mathbf{u}_y - I_2 B \sen \phi \int_{L/2}^{-L/2} dx \mathbf{u}_z \\
 &= I_2 B \cos \phi \left(\frac{-L}{2} - \frac{L}{2} \right) \mathbf{u}_y - I_2 B \sen \phi \left(\frac{-L}{2} - \frac{L}{2} \right) \mathbf{u}_z \\
 &= I_2 B L (-\cos \phi \mathbf{u}_y + \sen \phi \mathbf{u}_z) = I_2 B L \mathbf{u}_\rho,
 \end{aligned}$$

es decir, la fuerza sobre este elemento es repulsiva y de dirección la correspondiente a \mathbf{u}_ρ . Para no equivocarnos llamaremos a este vector unitario en la dirección radial $\mathbf{u}_\rho(a)$, ya que puede ser que tengamos vectores de este estilo al calcular la fuerza en otras partes del circuito, pero cuya dirección sea diferente (como en el hilo c). De esta manera la fórmula para la fuerza anterior encontrada toma el aspecto (Figura 5.46):

$$\mathbf{F}_a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\rho(a),$$

en donde $\rho = \sqrt{D^2 + (L/2)^2}$.

Sobre b.

Para hacer este cálculo debe tenerse en cuenta que ρ en la expresión de \mathbf{B} no es constante sobre esta parte de la espira, por lo que es necesario poner su valor en función de las variables que

intervienen en el problema. Además, al recorrer este hilo el campo magnético varía, no sólo en módulo, sino también en dirección (Figura 5.47). Así, desde 1 hasta la mitad del hilo el campo tiene por componentes $\mathbf{B} = (0, -B \sin \phi, -B \cos \phi)$, y desde este último punto hasta el final en 2 toma el valor $\mathbf{B} = (0, B \sin \phi, -B \cos \phi)$. Con todo ello y sabiendo que $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$ ¹¹ y que $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -B_y dz \mathbf{u}_x = B \sin \phi dz \mathbf{u}_x$ para la mitad superior del hilo, se tiene:

$$\mathbf{F}_b = I_2 \int_b d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I_2 \int_{L/2}^0 B \sin \phi dz \mathbf{u}_x = I_2 \int_{L/2}^0 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \sin \phi dz \mathbf{u}_x.$$

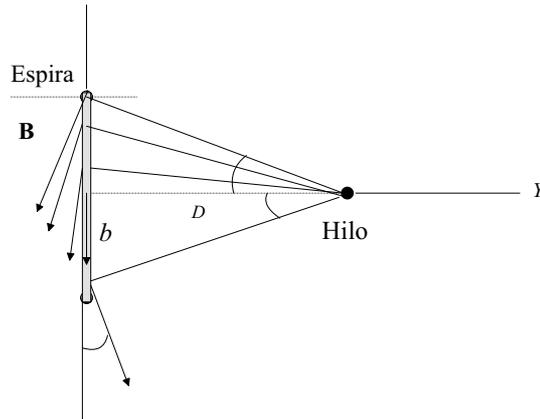


Figura 5.47. Perfil de la espira correspondiente al lado b . Nótese como a medida que vamos del punto 1 al 2 el campo magnético B_ϕ forma un ángulo distinto con el eje OZ , siendo, además, ρ variable.

Utilizando trigonometría se encuentra que $\rho = \sqrt{D^2 + z^2}$, que introducido en \mathbf{F}_b da:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b(L/2 \rightarrow 0) &= I_2 \int_{L/2}^0 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \sqrt{D^2 + z^2}} \sin \phi dz \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{L/2}^0 \frac{dz}{\sqrt{D^2 + z^2}} \frac{z}{\sqrt{D^2 + z^2}} \mathbf{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{L/2}^0 \frac{z dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} [\ln(D^2 + z^2)]_{L/2}^0 \mathbf{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} [\ln D^2 - \ln(D^2 + (L/2)^2)] \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{D^2}{(D^2 + (L/2)^2)} \mathbf{u}_x \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{(D^2 + (L/2)^2)}{D^2} \mathbf{u}_x. \end{aligned}$$

Hecho esto, hemos determinado sólo la fuerza sobre la mitad del elemento b . Queda por calcular la contribución del trozo que va desde 0 a $-L/2$. Para ello volvemos a aplicar la misma definición, pero a diferencia del caso anterior, introduciendo las componentes del campo \mathbf{B} para este tramo y los nuevos límites, o sea, $\mathbf{B} = (0, B \sin \phi, -B \cos \phi)$, $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -B_y dz \mathbf{u}_x = -B \sin \phi dz \mathbf{u}_x$ y $0 < z < -L/2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b(0 \rightarrow -L/2) &= -I_2 \int_0^{-L/2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \sqrt{D^2 + z^2}} \sin \phi dz \mathbf{u}_x = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-L/2} \frac{dz}{\sqrt{D^2 + z^2}} \frac{(-z)}{\sqrt{D^2 + z^2}} \mathbf{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-L/2} \frac{z dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} [\ln(D^2 + z^2)]_0^{-L/2} \mathbf{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} [\ln(D^2 + (L/2)^2) - \ln D^2] \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{D^2}{(D^2 + (L/2)^2)} \mathbf{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{(D^2 + (L/2)^2)}{D^2} \mathbf{u}_x. \end{aligned}$$

¹¹ Obsérvese como se ha escrito $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$ y no $(0, 0, -dz)$, aunque la corriente recorra el hilo en el sentido negativo del eje OZ ; esta información va ya implícita en los límites de integración (en nuestro caso de $L/2$ a $-L/2$).

Como puede observarse, en este caso hemos substituido $\sin \phi$ por $(-z)/\sqrt{D^2 + z^2}$. De este modo, la fuerza total sobre todo el hilo finito b es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_b &= \mathbf{F}_b(L/2 \mapsto 0) + \mathbf{F}_b(0 \rightarrow -L/2) \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{(D^2 + (L/2)^2)}{D^2} \mathbf{u}_x + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln \frac{(D^2 + (L/2)^2)}{D^2} \mathbf{u}_x = 0.\end{aligned}$$

Sobre c.

Sobre este elemento del circuito (Figura 5.48), el campo magnético, así como $d\mathbf{l}$ y el producto vectorial que interviene en la integral de la fuerza, vienen dados por: $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, B_y, B_z) = (0, B \sin \phi, -B \cos \phi)$, $d\mathbf{l} = (dx, 0, 0)$ y $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = (-B_z dx \mathbf{u}_y + B_y dx \mathbf{u}_z)$. Introduciendo todo ello en la ecuación correspondiente de \mathbf{F}_c , se encuentra:

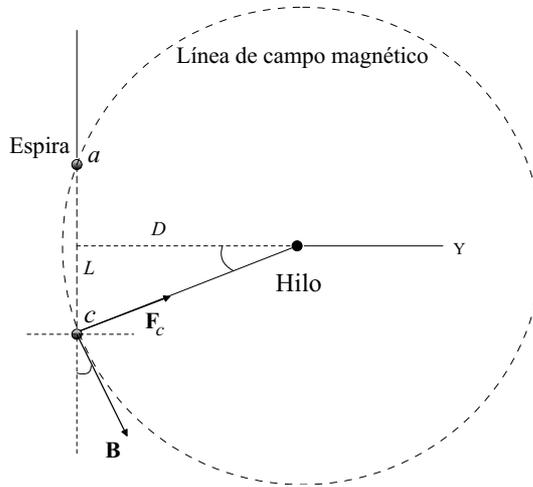


Figura 5.48. Hilo c . El campo magnético sobre este elemento tiene por componentes $B \sin \phi$ sobre el eje OY y $-B \cos \phi$ sobre OZ . A diferencia del caso anterior ρ es constante como para el trozo a .

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_c &= I_2 \int_a d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I_2 \int_{-L/2}^{L/2} (-B_z dx \mathbf{u}_y + B_y dx \mathbf{u}_z) \\ &= -I_2 \int_{-L/2}^{L/2} B_z dx \mathbf{u}_y + I_2 \int_{-L/2}^{L/2} B_y dx \mathbf{u}_z \\ &= -I_2 \int_{-L/2}^{L/2} (-B \cos \phi) dx \mathbf{u}_y + I_2 \int_{-L/2}^{L/2} (B \sin \phi) dx \mathbf{u}_z \\ &= I_2 B \cos \phi \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathbf{u}_y + I_2 B \sin \phi \int_{-L/2}^{L/2} dx \mathbf{u}_z \\ &= I_2 B \cos \phi \left(\frac{L}{2} - \frac{-L}{2} \right) \mathbf{u}_y + I_2 B \sin \phi \left(\frac{L}{2} - \frac{-L}{2} \right) \mathbf{u}_z \\ &= I_2 B L (\cos \phi \mathbf{u}_y + \sin \phi \mathbf{u}_z) = -I_2 B L \mathbf{u}_\rho,\end{aligned}$$

que, del mismo modo que lo hecho con la parte a , escribiremos:

$$\mathbf{F}_c = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\rho(c).$$

Nótese como la fuerza está dirigida según la línea perpendicular al hilo infinito que crea el campo \mathbf{B} y al hilo finito c (ó a , en el otro caso) de la espira cuadrada, es decir, en dirección radial. Obsérvese

como, en el presente caso, al ser la componente de \mathbf{F}_c sobre el eje OY positiva $[I_2BL(\cos \phi)]$ y también la componente en OZ , hace que la fuerza entre este elemento del circuito y el hilo largo de fuera sea atractiva, como corresponde a corrientes en el mismo sentido, razón por la cual hemos puesto un signo menos en la expresión final donde aparece $\mathbf{u}_\rho(c)$ (véase Figura 5.48).

Sobre d .

El desarrollo para esta parte del sistema es idéntico al realizado en b , con la única diferencia que, la integración se hace desde la parte inferior, esto es, $-L/2$ hasta 0 y, posteriormente, de 0 a $L/2$, debido al sentido de avance elegido para el elemento $d\mathbf{l}$ (coincidente con la corriente, Figura 5.49). Por esta razón, no es necesario repetir los cálculos, ya que, el resultado debe ser el mismo que en el apartado b . Por ello, se tiene:

$$\mathbf{F}_d = 0.$$

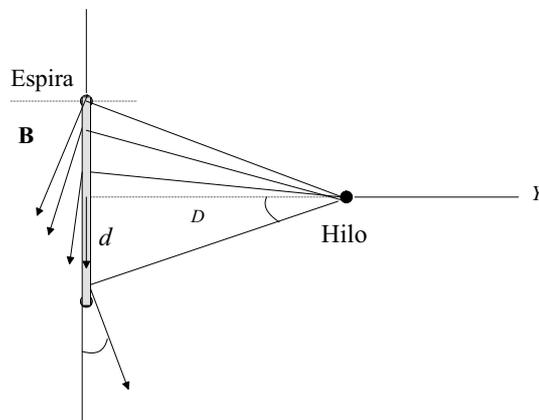


Figura 5.49. Hilo d . En este caso tenemos una situación similar a la vista para el hilo finito b .

Una vez obtenida la fuerza sobre cada elemento del circuito, el cálculo de la resultante de las fuerzas exteriores sobre el cuadro es inmediato (Figura 5.50):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_d = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\rho(a) - \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\rho(c).$$

Con el fin de poder restar fácilmente este resultado en donde se tiene $\mathbf{u}_\rho(a)$ y $\mathbf{u}_\rho(c)$, que no

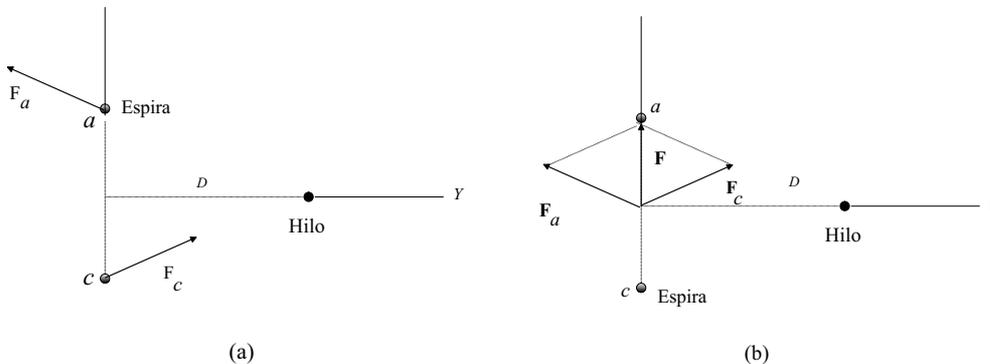


Figura 5.50. (a) Fuerza sobre el hilo a y c . Obsérvese como en ambos casos las fuerzas tienen la dirección del vector unitario \mathbf{u}_ρ . (b) Resultante de todas las fuerzas sobre la espira.

tienen la misma dirección, vamos a substituir sus respectivas expresiones en función del ángulo ϕ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\rho} (-\cos\phi\mathbf{u}_y + \sin\phi\mathbf{u}_z) + \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi\rho} (\cos\phi\mathbf{u}_y + \sin\phi\mathbf{u}_z) \\ &= \frac{2\mu_0 I_1 I_2 L \sin\phi}{2\pi\rho} \mathbf{u}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L \sin\phi}{\pi\sqrt{D^2 + (L/2)^2}} \mathbf{u}_z \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2}{2\pi(D^2 + (L/2)^2)} \mathbf{u}_z}.\end{aligned}$$

(b) Para calcular el momento de la fuerza respecto de O emplearemos la expresión $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, para cada hilo que compone el circuito, y después calcularemos el momento resultante.

Momento sobre a.

Las fuerzas sobre cada elemento de a forman un sistema de fuerzas distribuidas paralelas, equivalente (para calcular momentos respecto de O) a su resultante aplicada en el centro del hilo a ($\mathbf{M}_a = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_a$). Como ya conocemos la fuerza ejercida sobre este conductor, sólo es necesario saber el valor de \mathbf{r} para poder hacer el cálculo. En nuestro caso $\mathbf{r} = (0, 0, L/2)$, y la fuerza $(0, -\cos\phi, \sin\phi)\mu_0 I_1 I_2 L / (2\pi\sqrt{D^2 + (L/2)^2})$, con lo que \mathbf{M}_a queda:

$$\mathbf{M}_a = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2 \cos\phi}{4\pi\sqrt{D^2 + (L/2)^2}} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2 D}{4\pi(D^2 + (L/2)^2)} \mathbf{u}_x.$$

Momento sobre b.

En este caso, al ser la fuerza que se ejerce sobre cada punto del hilo b diferente, no se puede hallar el momento como $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$; por el contrario, es necesario sumar todas las contribuciones elementales $d\mathbf{M}$ que se ejercen sobre el elemento de corriente. Teniendo esto en cuenta, la expresión que proporciona el momento sobre este conductor es la siguiente:

$$\mathbf{M}_b = \int_b \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \int_b \mathbf{r} \times (I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (5.59)$$

Del mismo modo a como hemos hecho para las fuerzas, el campo magnético cambia el signo de su proyección sobre el eje OY al pasar de la parte superior a la inferior en el hilo b (Figura 5.47), razón por la cual, vamos a dividir el desarrollo en el intervalo $L/2 < z < 0$, y en $0 < z < -L/2$.

• $L/2 < z < 0$. Tomando la expresión del vector $\mathbf{B} = (0, -B \sin\phi, -B \cos\phi)$, y sabiendo¹² que $\mathbf{r} = (-L/2, 0, z)$ y $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_b(L/2 \rightarrow 0) &= \int_{L/2}^0 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} z \sin\phi dz \mathbf{u}_y = \int_{L/2}^0 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} z \frac{z}{\sqrt{D^2 + z^2}} dz \mathbf{u}_y \\ &= \int_{L/2}^0 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sqrt{D^2 + z^2}} \frac{z^2}{\sqrt{D^2 + z^2}} dz \mathbf{u}_y \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{L/2}^0 \frac{z^2}{(D^2 + z^2)} dz \mathbf{u}_y \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[-\frac{L}{2} + D \arctan\left(\frac{L}{2D}\right) \right] \mathbf{u}_y.\end{aligned}$$

• $0 < z < -L/2$. Para esta parte del sistema $\mathbf{B} = (0, B \sin\phi, -B \cos\phi)$, que introducido en

¹²En este caso ocurre lo mismo que lo visto anteriormente para el vector $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$. Se parte de un vector genérico, y el sentido en el que avanza la variable independiente (z en este caso) queda reflejado según dónde se comienza (límite inferior) y se acaba la integración (límite superior).

(5.59), da:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_b(0 \rightarrow -L/2) &= - \int_0^{-L/2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} z \operatorname{sen} \phi dz \mathbf{u}_y = - \int_0^{-L/2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\rho} z \frac{-z}{\sqrt{D^2 + z^2}} dz \mathbf{u}_y \\
 &= \int_0^{-L/2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\sqrt{D^2 + z^2}} \frac{z^2}{\sqrt{D^2 + z^2}} dz \mathbf{u}_y \\
 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-L/2} \frac{z^2}{(D^2 + z^2)} dz \mathbf{u}_y \\
 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[-\frac{L}{2} + D \arctan \left(\frac{L}{2D} \right) \right] \mathbf{u}_y .
 \end{aligned}$$

En esta parte del hilo el $\operatorname{sen} \phi$ se ha substituido por $-z/\sqrt{D^2 + z^2}$. Con todo ello, se encuentra:

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b(L/2 \rightarrow 0) + \mathbf{M}_b(0 \rightarrow -L/2) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[-L + 2D \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{L}{2D} \right) \right] .$$

Si se analizan las dos integrales planteadas para cada una de las partes del hilo b , se observa que, el momento \mathbf{M}_b respecto del origen O , habría podido ser expresado, directamente, como

$$\mathbf{M}_b = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{L/2}^0 \frac{z^2 dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_y + \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-L/2} \frac{z^2 dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{L/2}^{-L/2} \frac{z^2 dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_y .$$

Momento sobre c.

Para el conductor c , $\mathbf{r} = (0, 0, -L/2)$ y $\mathbf{F}_c = (0, \cos \phi, \operatorname{sen} \phi) \mu_0 I_1 I_2 L / (2\pi \sqrt{D^2 + (L/2)^2})$, obteniendo para el momento:

$$\mathbf{M}_c = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2 \cos \phi}{4\pi \sqrt{D^2 + (L/2)^2}} \mathbf{u}_x .$$

Momento sobre d.

En este apartado se procede de manera similar a lo visto para el hilo b , con la diferencia de que ahora, $\mathbf{r} = (L/2, 0, z)$, y el sentido de avance es de $-L/2$ a $L/2$. Introduciendo estos datos en (5.59), se deduce que:

$$\mathbf{M}_d = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z^2 dz}{(D^2 + z^2)} \mathbf{u}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[L - 2D \arctan \left(\frac{L}{2D} \right) \right] \mathbf{u}_y .$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, el momento resultante respecto de O es:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_c = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L^2 \cos \phi}{2\pi \sqrt{D^2 + (L/2)^2}} \mathbf{u}_x .$$

(c) Al ser la sumatoria de fuerzas distinta de cero ($\sum_i^n \mathbf{F}_i \neq \mathbf{0}$), y también la suma de momentos también no nula ($\sum_i^n \mathbf{M}_i \neq \mathbf{0}$), el centro de gravedad del sistema tendrá, inicialmente, una aceleración a lo largo del eje OZ , y una aceleración angular α , en torno al eje OY .

Observaciones

1) En el apartado a es posible emplear también coordenadas cilíndricas desde el principio, es decir, tomando como referencia un sistema $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$ de manera que el conductor muy largo coincida en este nuevo sistema con el eje OZ , $\mathbf{B}_\phi = (\mu_0 I_1) / (2\pi\rho) \mathbf{u}_\phi$ y $d\mathbf{l} = (0, 0, dz)$.

2) El cálculo del momento sobre los elementos a y c , puede hacerse también empleando la expresión (5.59). Para ello, se procede como se ha hecho sobre los hilos b y d (Nótese que, mediante este procedimiento, $\mathbf{r} = (x, 0, L/2)$ en el sector a , y $\mathbf{r} = (x, 0, -L/2)$ en c).

5.19 Una espira circular de radio a es coplanaria con el plano OXY , encontrándose su centro en el origen de coordenadas O . Si dicha espira es recorrida por una intensidad de corriente I , calcular el campo magnético creado en un punto $P(0, 0, z)$ del eje OZ , a partir del potencial vector \mathbf{A} .

Resolución

La realización de este problema puede parecer fácil, ya que al haber encontrado anteriormente el potencial vector de una espira circular, el cálculo da la impresión de ser inmediato. En efecto, del mismo modo a como se procedió en el caso del campo \mathbf{B} para el hilo muy largo a partir del \mathbf{A} , podemos intentar resolver el problema empleando la relación:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Para ello, lo primero que se nos ocurre es coger la expresión del \mathbf{A} en un punto del eje, encontrada ya en el ejercicio 5.6, y aplicar directamente la fórmula. Si se procede de este modo se obtiene:

$$\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times 0 = 0,$$

es decir, el campo magnético creado por una espira circular de radio a , en un punto cualquiera del eje OZ es cero.

Naturalmente, este resultado es contradictorio, ya que, como se dedujo con anterioridad, el \mathbf{B} de una espira, al menos en su eje, era *distinto* de cero. En este contexto sólo caben dos posibilidades:

- 1^a) El citado campo magnético se obtuvo erróneamente, por lo que cabe concluir que el nuevo valor encontrado es correcto; ello conllevaría que tendríamos que rehacer todo el análisis que se realizó en su momento.
- 2^a) El cálculo del campo se llevó acabo correctamente, y lo que convendría revisar es el último resultado que se ha hallado a partir del potencial vector.

De estas dos hipótesis parece lógico que sea más probable la segunda, sobre todo si se tiene en cuenta que, el campo magnético creado por una tal espira en su eje, se ha medido infinidad de veces en el laboratorio para diferentes intensidades y tamaños, y se ha aplicado profusamente en máquinas eléctricas. Veamos donde hemos razonado mal.

La aplicación de la ecuación $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, requiere tener cierto cuidado; de lo contrario, es probable llegar a expresiones equivocadas para los campos. Si observamos esta relación, nos damos cuenta que para poder encontrar el campo magnético en un punto P cualquiera debido a una corriente, tenemos que hacer ciertas derivadas parciales sobre el campo \mathbf{A} . Esto, desde un punto de vista matemático, requiere conocer la función que se va a derivar en P donde se va a calcular la derivada y, además, es necesario saber el valor de dicha función en los *alrededores del punto*. Dicho de otro modo; una derivada nos da una idea de cómo *varía una función en el entorno del punto* objeto de estudio, por lo que, para calcular esta variación, debe conocerse el comportamiento de dicha función en las proximidades de P .

Por todo ello, vamos a calcular el potencial vector en un punto arbitrario de coordenadas (x, y, z) . Tomando como $\mathbf{r}'(x', y', 0)$, e introduciéndolo en (5.14), se encuentra:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_{\Gamma} \frac{dx' \mathbf{u}_x + dy' \mathbf{u}_y}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2}} \right\}.$$

Haciendo un cambio de variable a coordenadas polares $x' = \rho \cos \phi'$ e $y' = \rho \sin \phi'$ en la anterior integral, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin \phi' \mathbf{u}_x + a \cos \phi' \mathbf{u}_y) a d\phi'}{[(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2]^{1/2}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi'}{[(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2]^{1/2}} \mathbf{u}_\phi. \end{aligned}$$

Con el fin de llegar a una fórmula simplificada, desarrollamos el denominador

$$\begin{aligned} & [(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2] = \\ & = x^2 + a^2 \cos^2 \phi' - 2xa \cos \phi' + y^2 + a^2 \sin^2 \phi' - 2ya \sin \phi' + z^2 \\ & = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 \cos^2 \phi' + a^2 \sin^2 \phi' - 2xa \cos \phi' - 2ya \sin \phi'. \end{aligned}$$

Para emplear una notación más cómoda, podemos expresar las coordenadas cartesianas x e y en coordenadas polares, esto es, $x = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$. Del mismo modo a como se explicó en el ejercicio del campo magnético creado por un hilo muy largo, la anterior expresión de $x = x(\phi)$ e $y = y(\phi)$ no debe considerarse como un cambio de variable; tan sólo proporciona una forma de localizar el punto en el espacio (obsérvese que no lleva prima ', como el cambio realizado anteriormente para x' e y').

Teniendo en cuenta lo anterior, y que $x^2 + y^2 = \rho^2$, la suma de dentro de la raíz cuadrada queda:

$$\begin{aligned} & \rho^2 + z^2 + a^2 \cos^2 \phi' + a^2 \sin^2 \phi' - 2\rho \cos \phi a \cos \phi' - 2\rho \sin \phi a \sin \phi' = \\ & = \rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho a (\cos \phi \cos \phi' - \sin \phi \sin \phi'). \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en el integrando, obtenemos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\phi = \int_0^{2\pi} \frac{ad\phi'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho a (\cos \phi \cos \phi' - \sin \phi \sin \phi')]^{1/2}} \mathbf{u}_\phi.$$

Teniendo en cuenta que \mathbf{A} tiene sólo su componente \mathbf{A}_ϕ no nula, la expresión del rotacional del potencial vector (1.48) se convierte en:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}(\rho, \phi, z) = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \mathbf{u}_z, \tag{5.60}$$

en donde aparecen sólo las derivadas respecto de z y ρ . Por esta razón, al no aparecer ϕ en estas operaciones puede asignársele el valor 0, facilitando así los cálculos, esto es,

$$\mathbf{A}_\phi = \int_0^{2\pi} \frac{ad\phi'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho a \cos \phi']^{1/2}} \mathbf{u}_\phi.$$

Obtenida la expresión, hay que resolver la anterior integral teniendo en cuenta que $\mathbf{u}_\phi = \mathbf{u}_\phi(\phi')$. Para ello, separamos en dos partes el resultado obtenido para \mathbf{A} , tal y como hemos comenzado el planteamiento del problema,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \phi' d\phi'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho \cos \phi']^{1/2}} \mathbf{u}_x + \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \phi' d\phi'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho \cos \phi']^{1/2}} \mathbf{u}_y \right\}.$$

Resolviendo de forma directa la primera integral se ve que se anula. La segunda, en principio, no podemos asegurar que se haga cero, ya que la integración no es inmediata, por lo que, por el momento, escribiremos:

$$A_\phi(r, \phi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \phi' d\phi'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho a \cos \phi']^{1/2}} \right\}.$$

Para calcular esta integral hacemos el cambio de variable: $\phi' = \pi - 2\zeta'$. Ello influye en el elemento diferencial, que se convierte en $d\phi' = -2d\zeta'$, y en los límites de integración que se transforman del siguiente modo:

$$\phi' = 0 \Rightarrow \zeta' = \pi/2,$$

y cuando

$$\phi' = 2\pi \Rightarrow \zeta' = -\pi/2.$$

Introduciendo todo ello en $A_\phi(r, \phi)$, se tiene:

$$\begin{aligned} A_\phi(r, \phi) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{a \cos(\pi - 2\zeta')(-2d\zeta')}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho \cos(\pi - 2\zeta')]^{1/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cos(\pi - 2\zeta')(-2d\zeta')}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho \cos(\pi - 2\zeta')]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cos(\pi - 2\zeta')2d\zeta'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2\rho \cos(\pi - 2\zeta')]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Por otra parte $\cos(\pi - 2\zeta') = \cos \pi \cos 2\zeta' + \sin \pi \sin 2\zeta' = -\cos 2\zeta'$; además, $\sin^2 \zeta' = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\zeta')$, con lo que $-\cos 2\zeta' = (2 \sin^2 \zeta' - 1)$, obteniendo la siguiente expresión:

$$A_\phi(r, \phi) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)2d\zeta'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho(2 \sin^2 \zeta' - 1)]^{1/2}}.$$

La anterior expresión puede transformarse de manera que se obtenga una integral de tipo elíptico. Con este fin, vamos a desarrollar la expresión que aparece en el radicando del denominador del anterior integrando:

$$\begin{aligned} [\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho(2 \sin^2 \zeta' - 1)] &= \rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho - 4a\rho \sin^2 \zeta' \\ &= r^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho \left[1 - \frac{4a\rho \sin^2 \zeta'}{r^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho} \right] \\ &= r^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho (1 - k^2 \sin^2 \zeta'), \end{aligned}$$

en donde

$$k^2 = \frac{4a\rho}{\rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho} = \frac{4a\rho}{(\rho + a)^2 + z^2}.$$

Con este resultado, la integral que estudiamos toma la forma:

$$\begin{aligned} A_\phi(r, \phi) &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)2d\zeta'}{[\rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho(1 - k^2 \sin^2 \zeta')]^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 + 2a\rho}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{k}{\sqrt{4a\rho}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}} \\ &= 2 \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{k}{\sqrt{4a\rho}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}}, \end{aligned}$$

habiendo modificado el intervalo de integración de $(-\pi/2, \pi/2)$ a $(0, \pi/2)$, al ser el integrando una función par, por lo cual se ha multiplicado por 2 la expresión integral. Continuando con la simplificación, se tiene:

$$\begin{aligned} A_\phi(r, \phi) &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \zeta' - 1)d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}} \\ &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \zeta' d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}} - \int_0^{\pi/2} \frac{d\zeta'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \zeta'}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I k}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[\frac{2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) - K(k) \right], \end{aligned}$$

siendo $K(k)^{13}$ y $E(k)^{14}$ las integrales elípticas de primera y segunda especie, respectivamente. Reescribiendo lo anterior en forma vectorial, queda

$$\mathbf{A}_\phi(r, \phi) = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[K(k) \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) - E(k) \right] \mathbf{u}_\phi.$$

Para calcular el campo magnético basta aplicar la relación $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas. En nuestro caso, al tener el potencial vector sólo componente tangencial, podemos tomar la expresión 5.60. La dificultad que se tiene al intentar aplicar esta relación a la función $\mathbf{A}_\phi(r, \phi)$, está en que no es sencillo calcular las derivadas ∂_ρ y ∂_z , ya que el potencial vector lo hemos puesto en función del parámetro k , el cual depende de ρ y de z , esto es, $k(\rho, z)$. Con el fin de facilitar dicho cálculo se pueden emplear las siguientes fórmulas:

$$\frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} \left[\frac{E(k)}{(1-k^2)} - K(k) \right], \quad \frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)].$$

Con todo ello, obtenemos:

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi \rho} \frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{\rho^2 + z^2 + a^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (5.61)$$

$$B_\phi = 0,$$

$$B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) = \frac{1}{\rho} \left[A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (5.62)$$

que son las componentes del campo magnético en un punto arbitrario del espacio.

A modo de ejemplo, vamos a calcular el campo magnético en un punto P cualquiera del eje OZ , a partir de la expresión general obtenida para \mathbf{B} . Para ello, se identifican, primeramente, las coordenadas de P , y después se introducen en cada una de las componentes del campo.

En nuestro caso las coordenadas son $(0, 0, z)$, por lo que $\rho = 0$ y $k = 0$. Al particularizar para estos valores numéricos, vemos que $K(0) = \pi/2$ y $E(0) = \pi/2$, obteniendo el siguiente resultado:

$$[B_\rho(\rho, z)]_{\rho \rightarrow 0} = 0,$$

y para la componente en z ,

$$\begin{aligned} [B_z(\rho, z)]_{\rho \rightarrow 0} &\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2} \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{4} \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \left(\frac{2a^2}{a^2 + z^2} \right) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

encontrando el mismo valor que el hallado en el ejercicio de la espira circular.

5.20 Por una espira circular de radio a circula una corriente I . Dicha espira se encuentra en una región donde existe un campo magnético uniforme y estacionario. Determinar en los dos casos siguientes la fuerza y momento resultantes que actúan sobre la espira. (a) El campo magnético B_1 es perpendicular al plano de la espira [Fig. 5.51(a)]. (b) El campo magnético B_2 está en el plano de la espira [Fig. 5.51(b)].

¹³ $K(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} + \dots \right]$

¹⁴ $E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{9}{64} k^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 - \dots \right]$

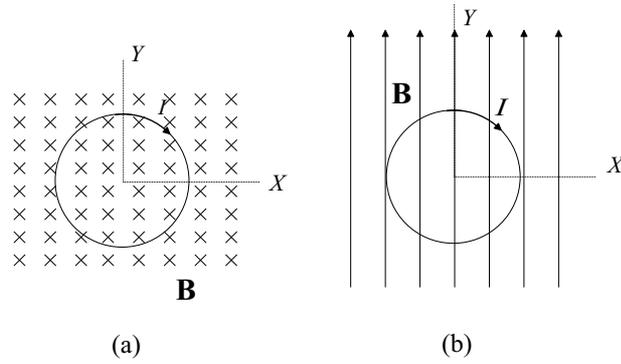


Figura 5.51. (a) Campo magnético perpendicular al plano de la espira. (b) Campo \mathbf{B} paralelo a uno de sus diámetros.

Resolución

(a) Para calcular la fuerza emplearemos la definición (5.20). En este primer caso, tomando un sistema de referencia cartesiano en el que el eje OZ apunta hacia fuera del plano del papel, el campo \mathbf{B}_1 viene dado por $(0, 0, -B)$. A su vez, en general, $d\mathbf{l}' = (dx', dy', 0)$, con lo que $d\mathbf{l}' \times \mathbf{B}_1 = -Bdy'\mathbf{u}_x + Bdx'\mathbf{u}_y$. Introduciendo estos datos en la Ecuación (5.20), encontramos:

$$\mathbf{F} = I \int_{\Gamma'} d\mathbf{l}' \times \mathbf{B} = I \int_{\Gamma'} -Bdy'\mathbf{u}_x + Bdx'\mathbf{u}_y = -IB \int_{\Gamma'} dy'\mathbf{u}_x + BI \int_{\Gamma'} dx'\mathbf{u}_y,$$

en donde el campo magnético B aparece fuera de las integrales por ser homogéneo. Teniendo en cuenta que el sistema tiene simetría de revolución en torno a un eje perpendicular al plano de la espira, que pasa por su centro, puede hacerse un cambio de variable a coordenadas polares, es decir, $x' = a \cos \phi'$ e $y' = a \sin \phi'$. Además, considerando un $d\mathbf{l}'$ en el mismo sentido que la densidad de corriente, esto es, en sentido horario, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -IB \int_{2\pi}^0 a \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + BI \int_{2\pi}^0 (-a \sin \phi') d\phi' \mathbf{u}_y \\ &= -IBa \int_{2\pi}^0 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_x - BIa \int_{2\pi}^0 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_y \\ &= -IBa \left\{ \int_{2\pi}^0 \cos \phi' d\phi' \mathbf{u}_x + \int_{2\pi}^0 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_y \right\} = 0. \end{aligned}$$

Obsérvese lo ya dicho en otros ejercicios en relación al sentido del $d\mathbf{l}'$, y es que el sentido del recorrido se introduce en los límites de integración, razón por la cual integramos de 2π a 0 , y no a la inversa.

Para hallar el momento sobre la espira basta utilizar la expresión $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Para ello, es necesario calcular, primeramente, el valor del momento magnético \mathbf{m} . Aplicando la definición dada en 5.23, se tiene:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = -IS\mathbf{u}_z = IS(0, 0, -1) = \pi a^2 I(0, 0, -1).$$

Introduciendo este resultado en (5.24), se encuentra:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = (0, 0, -IS) \times (0, 0, -B) = 0.$$

(b) En este segundo caso el procedimiento es similar al del anterior apartado, pero para las nuevas condiciones. Así, tomando el campo magnético $\mathbf{B}_2 = (0, B, 0)$ y el $d\mathbf{l}'$ habitual, se obtiene:

$$\mathbf{F} = I \int_{\Gamma'} -Bdx'\mathbf{u}_z = -BI \int_{2\pi}^0 (-a \sin \phi') d\phi' \mathbf{u}_z = BIa \int_{2\pi}^0 \sin \phi' d\phi' \mathbf{u}_z = 0.$$

Para el momento de la fuerza \mathbf{N} , con el citado campo \mathbf{B}_2 , se obtiene:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = (0, 0, -IS) \times (0, B, 0) = ISB\mathbf{u}_z = \pi a^2 IB\mathbf{u}_x.$$

El valor obtenido para \mathbf{N} muestra que el momento tiene la dirección y sentido del unitario \mathbf{u}_x , lo cual quiere decir que la espira tenderá, en un principio, a girar en torno al eje OX en sentido antihorario (de izquierda a derecha).

5.21 Por un solenoide como el de la Figura 5.52, muy largo, de radio $R = 10$ cm, $n = 1000$ espiras por unidad de longitud, y cuyo eje de revolución coincide con el eje OY , circula una corriente $I_1 = 1$ A. En el interior de éste, se sitúa una bobina finita de radio $r_2 = 5$ cm y $N_2 = 100$ espiras muy finas y apretadas, formando su eje un ángulo α con OY y coplanario con OYZ , por la cual pasa una intensidad de $I_2 = 0,5$ A. Calcular: a) El momento de la fuerza sobre la bobina finita. b) La energía potencial. c) El flujo del campo magnético \mathbf{B}_1 a través del solenoide finito para la posición de equilibrio estable.

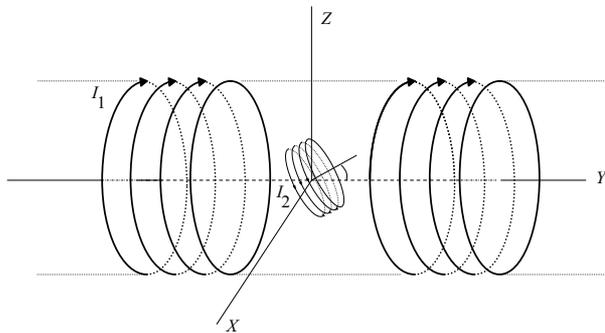


Figura 5.52. Solenoide muy largo con un conjunto de espiras muy apretadas en su interior.

Resolución

a) Como ya se explicó en teoría, el momento mecánico se define como $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. De este modo, para poder aplicar la anterior expresión es necesario conocer, primeramente, el valor \mathbf{m} . En nuestro caso, al formar el eje de revolución de la bobina finita un ángulo α respecto del eje OY , el vector normal al plano de una de sus espiras viene dado por $\mathbf{n} = (0, \cos \alpha, \text{sen } \alpha)$. Utilizando este vector, el momento magnético del circuito toma la forma:

$$\mathbf{m} = \mathbf{IS} = IS\mathbf{n} = N_2 I_2 S (0, \cos \alpha, \text{sen } \alpha).$$

Obtenida esta magnitud, hay que calcular el valor del campo magnético que actúa sobre las espiras. Como ya sabemos, el campo \mathbf{B} creado por el solenoide infinito en su interior, según el sistema de referencia de la figura, es el siguiente:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 n I_1 \mathbf{u}_y,$$

es decir, es un campo uniforme. Introduciendo este dato en la expresión de \mathbf{N} , se tiene:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = N_2 I_2 S (0, \cos \alpha, \text{sen } \alpha) \times (0, -\mu_0 n I_1, 0) \Rightarrow$$

$$\mathbf{N} = N_2 I_2 S \mu_0 n I_1 \text{sen } \alpha \mathbf{u}_x = 4,9 \times 10^{-4} \text{sen } \alpha \mathbf{u}_x \text{ ATm}^2.$$

b) La energía potencial se obtiene directamente mediante la siguiente expresión:

$$E_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -N_2 I_2 S (0, \cos \alpha, \text{sen } \alpha) \cdot (0, -\mu_0 n I_1, 0) \Rightarrow$$

$$E_p = \mu_0 n N_2 I_1 I_2 S \cos \alpha = 4,9 \times 10^{-4} \cos \alpha \text{ J} .$$

c) La posición de equilibrio estable se corresponde con un mínimo de energía potencial (Figura 5.53). Así, si examinamos el resultado del apartado anterior comprobamos que la energía es mínima cuando $\cos \alpha = -1$, es decir, para $\alpha = \pi$. Por esta razón, si tenemos además en cuenta que el momento de la fuerza sobre la bobina es un vector axial que tiene la dirección y sentido de \mathbf{u}_x , quiere decir que el conjunto de espiras apretadas sufrirá una rotación de sentido horario en torno al eje OX (que pasa por su centro), hasta situarse paralelamente al plano de las espiras del solenoide, o lo que es lo mismo, con la normal al plano de cada una de las espiras que forman la bobina, en la misma dirección y sentido que el campo magnético \mathbf{B} creado por dicho solenoide ($-\mathbf{u}_y$) (la normal se ha elegido teniendo en cuenta el sentido de la corriente). En estas condiciones, el flujo a través de la bobina se obtiene calculando el flujo de \mathbf{B}_1 sobre una de sus espiras, multiplicándolo por el número total de éstas, o sea, N_2 ,

$$\phi = N_2 \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = N_2 \int_{S_2} (-\mu_0 n I_1) \mathbf{u}_y \cdot dS_2 (-\mathbf{u}_y) = N_2 \int_{S_2} \mu_0 n I_1 dS_2 = \mu_0 n I_1 N_2 S_2 \Rightarrow$$

$$\phi = \mu_0 n I_1 N_2 \pi r_2^2 = 9,8 \times 10^{-4} \text{ Wb} .$$

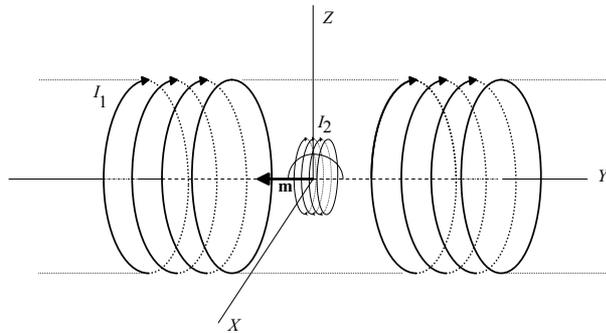


Figura 5.53. Posición de energía mínima para la bobina de N_2 espiras.

5.22 Un campo magnético tiene simetría de rotación. Encontrar una expresión sencilla para calcular la componente \mathbf{B}_ρ del campo magnético, en un punto próximo a su eje de revolución, supuesto conocido el campo \mathbf{B}_z sobre dicho eje.

Resolución

Dado que existe simetría de rotación elegimos coordenadas cilíndricas, viniendo el campo magnético B expresado por $\mathbf{B} = (B_\rho, B_\phi, B_z)$. Como se ha visto en otros ejercicios precedentes, la existencia de simetrías en un sistema puede hacer viable la aplicación de teoremas como el de Ampère o el del flujo. En nuestro caso emplearemos la ley del flujo, ya que dicha ley proporciona información de la componente radial en sistemas con simetría de translación y rotación (p. ej. hilo infinito).

Para hallar lo que se pide, consideremos una superficie en forma de cilindro de radio ρ muy pequeño y altura Δz (Figura 5.54), cuyo eje de revolución coincide con el eje de simetría del campo. Supongamos, por comodidad, que dicho eje coincide con un eje OZ . A partir del teorema del flujo (Sección 5.2), se obtiene:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_S (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

en donde S denota la superficie cilíndrica cerrada. Con el fin de desarrollar la anterior integral, se descompone la superficie en tres partes: (a) Base superior S_1 , $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)dS$. (b) Base inferior S_2 , $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}_2 = (0, 0, -1)dS$. (c) Superficie lateral S_L , $d\mathbf{S}_L = dS\mathbf{n}_L = dS\mathbf{u}_\rho = (1, 0, 0)dS$. Considerado esto, se tiene:

$$\begin{aligned} \int \int_S (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_1} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (0, 0, 1)dS \\ &+ \int_{S_2} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (0, 0, -1)dS \\ &+ \int_{S_L} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot (1, 0, 0)dS = 0. \end{aligned}$$

Haciendo los productos escalares que aparecen en cada sumando,

$$\int_{S_1} B_z dS - \int_{S_2} B_z dS + \int_{S_L} B_\rho dS = 0.$$

A diferencia de otros ejercicios donde había simetría de translación, en el presente caso la componente B_z de la primera integral y B_z en la segunda no tienen por qué ser iguales, ya que $B_z = B_z(\rho, z)$. Teniendo en cuenta que que la superficie S_1 se encuentra a una altura Δz de S_2 , se puede escribir,

$$\int_{S_1} B_z(\rho, z + \Delta z)dS - \int_{S_2} B_z(\rho, z)dS + \int_{S_L} B_\rho(\rho, z)dS = 0.$$

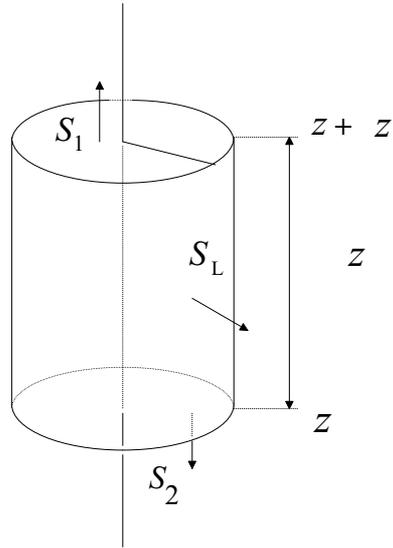


Figura 5.54. Superficie cilíndrica cerrada.

Al ser las áreas dS_1 y dS_2 en módulo iguales, se pueden reagrupar los dos primeros términos, esto es,

$$\int_{S_2} [B_z(\rho, z + \Delta z) - B_z(\rho, z)] dS + \int_{S_L} B_\rho(\rho, z)dS = 0.$$

Al ser la distancia Δz entre las dos bases del cilindro muy pequeña, $B_z(\rho, z + \Delta z)$ puede desarrollarse en serie de Taylor en torno a z , o sea,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \left[B_z(\rho, z) + \frac{\partial B_z(\rho, z)}{\partial z} \Delta z + \dots - B_z(\rho, z) \right] dS + \int_{S_L} B_\rho(\rho, z)dS &\approx \\ \int_{S_2} \frac{\partial B_z(\rho, z)}{\partial z} \Delta z \rho d\rho d\phi + \int_{S_L} B_\rho(\rho, z) \rho d\phi dz &= 0. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Analicemos ahora la igualdad obtenida. En el primer término aparece $\partial B_z(\rho, z)/\partial z$ que, en general, es una función $f(\rho, z)$. Ello hace que al aparecer en la integral ρ y ϕ como variables independientes, necesitemos conocer la forma de dicha función para poder llevar a cabo el cálculo.

Además, al ser la superficie S_2 infinitamente pequeña puede suponerse que $B_z(\rho, z)$ no varía a penas con ρ sobre dicha superficie, por lo que aproximarse respecto de su valor en $\rho = 0$, esto es,

$$B_z(\rho, z) = B_z(0, z) + \left(\frac{\partial B_z(0, z)}{\partial \rho} \right) \Delta \rho.$$

De este modo, la derivada que aparece en la Ecuación (5.63), queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z(\rho, z)}{\partial z} \Delta z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(B_z(0, z) + \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial \rho} \Delta \rho \right) \Delta z \\ &= \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 B_z(0, z)}{\partial z \partial \rho} \Delta \rho \Delta z \approx \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \Delta z, \end{aligned}$$

ya que el término en el que aparece el producto de $\Delta\rho\Delta z$ puede despreciarse por ser un infinitésimo de orden superior. Introduciendo este resultado en la integral, obtenemos:

$$\int_{S_2} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \Delta z \rho d\rho d\phi + \int_{S_L} B_\rho(\rho, z) \rho d\phi dz = 0.$$

Analicemos ahora cada uno de los sumandos. En el primero $\partial B_z(0, z)/\partial z$ se puede sacar del integrando, ya que al evaluarse en $\rho = 0$ depende sólo de z , no siendo esta variable ninguna de las de integración (ρ o ϕ). Por otra parte, $B_\rho(\rho, z)$ en el segundo término se integra sobre S_L . Ello hace que ρ permanezca constante sobre esta superficie, de lo cual se infiere que $B_\rho(\rho, z)$ es, en realidad, una función sólo de z en esa integral. Por esta razón, al ser z una de las variables de integración necesitamos conocer la forma de $B_\rho(\rho, z)$ para hacer el cálculo. Sin embargo, si tenemos en cuenta que la altura del cilindro es muy pequeña, podemos suponer que la componente radial del campo prácticamente no varía a lo largo de Δz , lo cual implica que B_ρ puede situarse fuera del símbolo integral. Considerando todo lo dicho, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \Delta z \int_{S_2} \rho d\rho d\phi + B_\rho(\rho, z) \rho \int_{S_L} d\phi dz &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \Delta z \pi \rho^2 + B_\rho(\rho, z) 2\pi \rho \Delta z &= 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z(0, z)}{\partial z} \rho + 2B_\rho(\rho, z) = 0, \end{aligned}$$

y despejando B_ρ ,

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z(\rho, z)}{\partial z}. \quad (5.64)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 5.23** Imagínese un solenoide muy largo de n espiras por unidad de longitud, por el que circula una intensidad I , situado con su eje de revolución coincidente con el eje OZ . Suponiendo el modelo de espiras apretadas, calcular utilizando la ley de Ampère: (a) El campo \mathbf{B} creado en cualquier punto interior del mismo. (b) El campo magnético producido en un punto exterior.

Solución:

(a) $\mu_0 n I \mathbf{u}_z$. (b) $\mathbf{0}$

- 5.24** Determinar el campo \mathbf{B} producido por un plano infinito que coincide con el YZ , en cualquier punto del espacio, si la densidad de corriente superficial es \mathbf{j}_s y tiene la dirección de OY .

Solución: $B = B_z = (\mu_0 j_s)/2$ T.

- 5.25** Por un solenoide ideal infinitamente largo de radio a y con un número de vueltas por unidad de longitud igual a n circula una corriente I . a) Razonar cuál es la dirección del potencial vector \mathbf{A} en un punto genérico y de qué variables depende su módulo. b) Evaluar el potencial vector dentro y fuera del solenoide y representar gráficamente el resultado obtenido.

- 5.26** Por una espira cuadrada de lado $L = 10$ cm circula una corriente de $\sqrt{200}$ A. Calcular el campo magnético en su centro.

Solución: 16×10^{-5} T.

5.27 El sistema de la Figura 5.55 consta de una espira cuadrada de lado $2L$ y de una semiespira circular, unidas por los puntos a y b de la figura. Calcular el campo \mathbf{B} en el origen de coordenadas.

Solución:

$$\mathbf{B}_T = \frac{\mu_0 I}{4L} \mathbf{u}_x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{\mu_0 I}{\pi L} \mathbf{u}_z$$

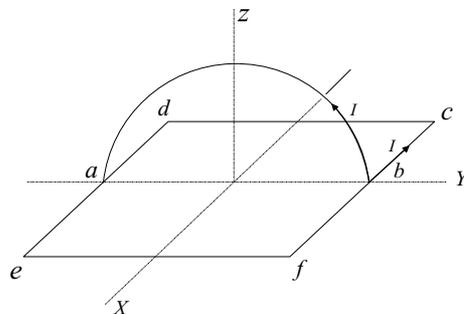


Figura 5.55. Espira cuadrada y espira semicircular.

5.28 El sistema de la Figura 5.56 consta de una espira cuadrada de lado $l = 2\text{ m}$, centrada en el origen de coordenadas, y una espira circular de radio $a = 1\text{ m}$, paralela al plano que contiene a la anterior, cuyo centro se encuentra en el punto $(0, 0, 3)\text{ m}$. Ambas están recorridas por intensidades I_1 e I_2 , respectivamente. Se pide: a) El campo \mathbf{B} resultante en el punto P de coordenadas $(0, 0, 2)\text{ m}$ en función de I_1 e I_2 . b) La relación entre ambas intensidades para que el campo \mathbf{B} sea nulo.

Solución: (a) $\mathbf{B} = (0,17I_1 + 0,05I_2)\mu_0\mathbf{u}_z$; (b) $I_1 \approx -0,3I_2$.

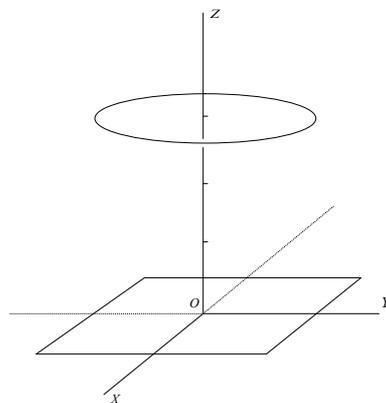


Figura 5.56. Espira cuadrada y espira circular.

5.29 El sistema de la Figura 5.57 muestra una espira formada por dos segmentos y dos arcos de circunferencia de radios $R_1 = 5\text{ cm}$ y $R_2 = 8\text{ cm}$. La intensidad que circula es $I = 1,5\text{ A}$. Se pide: a) Calcular el campo \mathbf{B} resultante en el punto O . b) Calcular el potencial vector \mathbf{A} en el punto O . Si posteriormente se supone que además existe un hilo conductor muy largo, situado en O y de dirección OZ , por el que circula una corriente según $+oz$, siendo la intensidad $I_1 = 1\text{ A}$, se pide: c) Determinar la fuerza que actúa en cada elemento de la espira dibujada $ab - bc - cd - da$ debido a la presencia del hilo.

Solución: (a) $1,8 \times 10^{-6}\text{ T}$. (b) $7,0 \times 10^{-8}(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)\text{ Tm}$. (c) $ab: 1,4 \times 10^{-7}\mathbf{u}_z\text{ N}$; $cd: -1,4 \times 10^{-7}\mathbf{u}_z\text{ N}$; $bc, da: 0\text{ N}$.

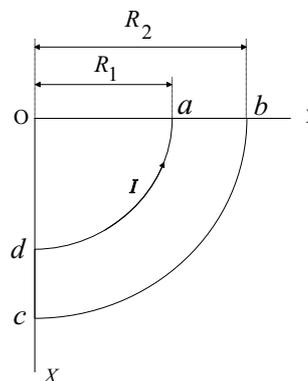


Figura 5.57. Espira formada por dos segmentos y dos arcos de circunferencia.

5.30 Utilizando la expresión (5.64), calcular el campo magnético creado por una espira circular de radio a por la que circula una intensidad I , en un punto P cercano a su eje de revolución. Compárese el resultado encontrado a partir la relación (5.61), considerando los primeros términos del desarrollo en serie para $K(k)$ y $E(k)$.

- 5.31** El circuito de la Figura 5.58 puede considerarse formado por dos cuadrados de lados $L = 2$ m. Calcular el campo \mathbf{B} en el centro del cuadrado de la izquierda.

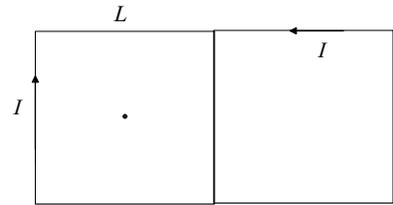


Figura 5.58. Circuito constituido por dos cuadrados.

Solución: $6,38 \times 10^{-7}$ T.

- 5.32** Se dispone de un imán¹⁵ cilíndrico cuyo eje coincide con el OZ , como se muestra en la Figura 5.59. El imán permanece en una posición fija, su campo \mathbf{B} posee simetría de revolución alrededor de OZ siendo su componente tangencial nula. Por una espira circular de radio b , situada en un plano perpendicular al eje OZ y con centro en dicho eje, circula una corriente cuya intensidad es I , tal como se indica en la figura. Si en los puntos de la espira el módulo del campo magnético debido al imán es B_e y el ángulo que forma con el eje OZ es α , determinar la fuerza que actúa sobre la espira debida a dicho campo (módulo, dirección y sentido).

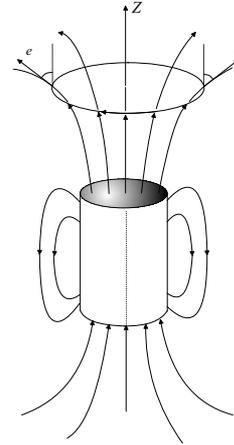


Figura 5.59. Imán cilíndrico.

Solución: $\mathbf{F} = -IB \cos \alpha 2\pi b \mathbf{u}_z$.

- 5.33** Por un solenoide semiinfinito de n espiras por unidad de longitud, de radio R , y cuyo eje de revolución coincide con el eje OY , circula una corriente I_1 (Fig. 5.60). Una espira de radio $r \ll R$ se sitúa con su centro sobre el mismo eje paralelamente al plano de las espiras de la bobina a una distancia d ($d \gg R$) alejada (no infinita) de ésta. Obtenga, razonadamente: a) El campo B creado por el solenoide en el centro de la espira. b) El flujo del campo magnético creado por la bobina a través de la espira. c) El efecto mecánico que se provocará en la espira, frente a una pequeña rotación de ésta alrededor de un eje que pasa por su diámetro, si por ella circula una corriente I_2 como se muestra en la figura. Dato: $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots$, para $|x| < 1$.

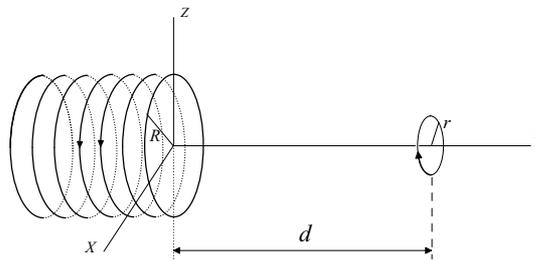


Figura 5.60. Solenoide semiinfinito.

Solución: a) $\mu_0 n I_1 R^2 / (4d^2) \mathbf{u}_y$, b) $\mu_0 n I_1 R^2 \pi r^2 / (4d^2)$.

¹⁵La magnetización del imán, no tiene relevancia alguna de cara a los cálculos que se piden. Los conceptos referentes a el magnetismo de la materia se expondrán en el capítulo siguiente.

MAGNETISMO DE LA MATERIA

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento de la materia en presencia de campos magnéticos. Dar una explicación exhaustiva del magnetismo de las sustancias requiere la utilización de la física cuántica, lo cual está fuera del alcance de este libro. Por esta razón, utilizando la física clásica nos limitaremos a dar una explicación cualitativa y conceptualmente sencilla que, aunque poco rigurosa, nos permita hacernos una idea aproximada del fenómeno de la magnetización.

6.1. MAGNETIZACIÓN DE LA MATERIA

La idea básica parte de la propia constitución de la materia a nivel microscópico. Así, los gases, líquidos y sólidos se hallan constituidos por átomos, los cuales desde un punto de vista clásico están formados un núcleo formado por protones cargados positivamente y neutrones; además, alrededor de este núcleo se encuentran cargas eléctricas negativas, denominadas electrones, en órbitas cerradas definidas. Si, por otra parte suponemos que el número de electrones y protones es el mismo, obtenemos un modelo de átomo eléctricamente neutro. De este modo, la materia puede entenderse como formada por circuitos del orden de las dimensiones atómicas por los que circula una determinada corriente, produciendo, por lo tanto, un campo magnético. Teniendo en cuenta que dichos circuitos son muy pequeños comparados con la distancia a la cual se percibe el campo, puede asimilarse el comportamiento de cada uno de ellos al de un dipolo (visto en el Capítulo 5). En definitiva: desde el punto de vista magnético la materia es equivalente a un conjunto muy elevado de dipolos magnéticos. Esta será para nosotros la hipótesis básica que nos permitirá avanzar en el concepto clásico de magnetismo.

A partir de aquí, se define el campo vectorial magnetización \mathbf{M} , como el momento dipolar magnético por unidad de volumen,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} \equiv \frac{d\mathbf{m}}{dV}, \quad (6.1)$$

siendo $\Delta \mathbf{m}$ el momento dipolar de un elemento de volumen ΔV . La magnetización se mide en Am^{-1} .

6.2. CORRIENTES DE MAGNETIZACIÓN

Partiendo de la hipótesis realizada referente a la constitución de la materia, parece lógico que si sumamos todas las contribuciones de los dipolos que la componen habrá veces que encontremos un campo magnético no nulo en determinado punto del espacio. En tal caso, es de interés saber cuál es este campo. Para ello, bastaría calcular el potencial vector en un punto P debido a toda la substancia y , a partir de éste el campo magnético \mathbf{B} . Con este fin, tomando la Ecuación (5.25) para el \mathbf{A} de un dipolo y sumando para todos los que componen el material, se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right\}. \quad (6.2)$$

Si comparamos esta expresión con las dadas para el potencial vector en el Capítulo 5 se aprecia como en lugar de $\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ y $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$ aparecen las densidades de corriente volumétrica y superficial \mathbf{j}_v y \mathbf{j}_s , respectivamente. Por esta razón se puede hacer un *símil* diciendo que el \mathbf{A} encontrado sería *equivalente* al que crearía una corriente volumétrica de valor:

$$\mathbf{j}_m = \nabla' \times \mathbf{M}, \quad (6.3)$$

y a una corriente superficial,

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad (6.4)$$

donde \mathbf{n} representa el vector normal exterior a dicha superficie. A estas corrientes se les denomina, **densidad de corriente de magnetización volumétrica y densidad de corriente de magnetización superficial**, respectivamente. De este modo podemos reescribir la expresión del potencial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \frac{\mathbf{j}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_{S'} \frac{\mathbf{j}_{ms}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right\}. \quad (6.5)$$

En definitiva, lo que muestra este resultado es que, el efecto provocado por un material magnetizado es el mismo que el que producirían estas corrientes. Por esta razón, las substancias se pueden suponer compuestas por un conjunto de corrientes \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} .

Encontrado el valor del potencial el campo magnético \mathbf{B} viene dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\mathbf{j}_m \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV + \oint_S \frac{\mathbf{j}_{ms} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS \right\}.$$

Por último hay que dejar claro que \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} , *no son corrientes de conducción*¹ como las estudiadas en el Capítulo 5, sino *ligadas* a la materia.

6.3. EL CAMPO MAGNÉTICO \mathbf{H}

Como acabamos de ver, la materia magnetizada puede crear un campo magnético, el cual puede explicarse a través de las corrientes \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} ; por otro lado, las cargas eléctricas en movimiento o libres constituyen lo que se denomina corrientes de conducción. Como consecuencia de ello la Ecuación (5.1) puede escribirse como,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m). \quad (6.6)$$

¹La corriente \mathbf{j}_c es realmente la única que aparecía en los problemas del tema anterior, sin embargo escribíamos \mathbf{j} en vez de \mathbf{j}_c ; la razón de ello es doble. Por una parte, al no haber estudiado todavía la magnetización, no procedía hacer distinción alguna, pudiendo incluso haber confundido al lector. Por otra, quizá más importante, es que en el teorema de Ampère entonces estudiado, sí debe figurar \mathbf{j} , ya que esta ley para \mathbf{B} se refiere a *todas las corrientes* que pueda haber (véase el apartado 6.4), por lo que de haber escrito \mathbf{j}_c podría habernos hecho pensar que el campo magnético \mathbf{B} sólo puede ser producido por corrientes de conducción, lo cual evidentemente es falso.

Nótese como en la Expresión (6.6) no se ha incluido \mathbf{j}_{ms} , que también es una de las densidades definidas como consecuencia de la existencia del campo \mathbf{M} . La razón de ello es que, la ecuación diferencial en derivadas parciales (5.1) está definida sobre una región abierta del espacio, estando la información referente a la superficie y a sus corrientes fijada en las condiciones de contorno, no teniendo que aparecer, por lo tanto, en dicha ecuación.

Introduciendo la Ecuación (6.3) en (6.6), y operando, encontramos:

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right] = \mathbf{j}_c. \quad (6.7)$$

A esta magnitud que aparece entre corchetes se le denomina campo magnético \mathbf{H} , esto es,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (6.8)$$

Las unidades de \mathbf{H} en el sistema internacional son las mismas que las de \mathbf{M} , o sea, Am^{-1} .

Una vez definida esta magnitud, la expresión diferencial independiente del tiempo queda como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c. \quad (6.9)$$

La Ecuación (6.9) establece que una corriente de *conducción* crea un campo magnético \mathbf{H} , o lo que es lo mismo: la corriente \mathbf{j}_c es *una posible* fuente de campo \mathbf{H} . Es importante notar que no estamos excluyendo otras fuentes para este campo; así, despejando \mathbf{B} de 6.8, e introduciéndolo en 5.2, se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (6.10)$$

de lo cual se deduce que, aquellos puntos del espacio en donde exista una divergencia de \mathbf{M} distinta de cero, habrá una divergencia de \mathbf{H} no nula y, en consecuencia, nacimiento o muerte (dependiendo del signo) de líneas de campo H .

Además, existiría una tercera fuente de campo \mathbf{H} , cual es, la variación del desplazamiento eléctrico \mathbf{D} con el tiempo, si bien, al no estudiar todavía campos variables, esta posibilidad no nos afecta en el presente tema (*véase* Capítulo 10).

6.4. LEY DE AMPÈRE PARA EL CAMPO \mathbf{H}

El teorema de Ampère es la expresión integral de la Ecuación (6.9) y establece que: *La circulación del campo magnético \mathbf{H} a lo largo de una trayectoria cerrada Γ , sólo depende de la intensidad neta debida a la corriente de conducción que atraviesa cualquier superficie abierta S cuya frontera es Γ , es decir,*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c, \quad (6.11)$$

denotando con I_c la intensidad correspondiente a las *corrientes de conducción*. En forma alternativa, la Ecuación 6.11 se puede escribir del siguiente modo:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_c \cdot \mathbf{n} dS = I_c. \quad (6.12)$$

Obsérvese como en la Ecuación (6.12) sólo aparecen las corrientes de conducción, mientras que en la Expresión (5.5) se incluyen *todas las corrientes*, esto es, las de conducción \mathbf{j}_c (corriente libre) y las de magnetización \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} (corriente ligada). La razón se encuentra, básicamente, en que al pasar de la Ecuación puntual (6.6) a la forma integral desaparecen las condiciones de contorno (superficie del material), teniendo que introducir la información referente a la frontera en dicha integral².

²Al incluir en la integral todas las corrientes debe tenerse cuidado, ya que no todas ellas se pueden sumar. Si analizamos las densidades que intervienen observamos que \mathbf{j}_c y \mathbf{j}_m se miden en Am^{-2} , pero las unidades de

6.5. TIPOS DE MAGNETISMO

Podemos decir que, básicamente, existen dos tipos de magnetismo: el magnetismo débil y el magnetismo fuerte o intenso. Al primero corresponden el diamagnetismo y paramagnetismo, y al segundo el ferromagnetismo. Las características fundamentales de todos ellos se manifiestan por la relación existente entre el vector magnetización y el campo magnético H o, equivalentemente, por la dependencia funcional de B frente a H . En este sentido, es posible caracterizar a los materiales magnéticos mediante la relación $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$. En general, $\mathbf{M} = \chi_m(\mathbf{H})\mathbf{H}$, en donde χ_m es la *susceptibilidad magnética*, que puede ser una función de H . Por ello, $\mathbf{B} = \mu_0[1 + \chi_m(\mathbf{H})]\mathbf{H} = \mu_0\mu_r(\mathbf{H})\mathbf{H} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}$, siendo μ la *permeabilidad magnética* del material y μ_r la *permeabilidad magnética relativa*. Teniendo esto en cuenta, podemos hacer la siguiente clasificación básica:

(a) Materiales diamagnéticos. En ellos $\chi_m(\mathbf{H})$ es constante, pequeña y negativa, por lo que μ_r es algo menor de 1. Las relaciones $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ son lineales.

(b) Materiales paramagnéticos. $\chi_m(\mathbf{H}) > 0$ y constante, y $\mu_r > 1$; también las funciones $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ son lineales.

(c) Materiales ferromagnéticos. Aquí la relación $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ no es lineal (Figura 6.1), siendo, por lo tanto, χ_m y μ_r funciones del campo H . En estas sustancias la relación $B = B(H)$ y $M = M(H)$ se denominan, ciclo de histéresis en el plano $B - H$ y en el plano $M - H$, respectivamente. Con el fin de saber en qué parte del ciclo nos encontramos, denominaremos

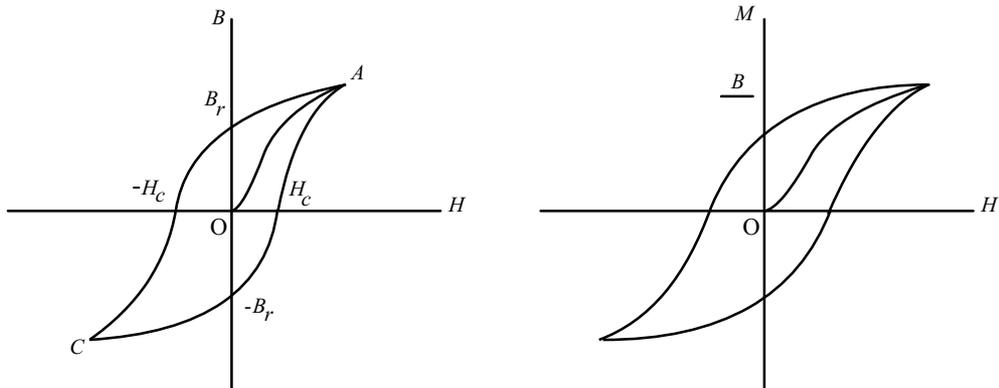


Figura 6.1. Ciclo de histéresis $B = B(H)$. B_r representa el campo magnético remanente y el H_c el campo magnético H coercitivo.

al tramo OA *curva de primera imanación*, y a los recorridos AC y CA , *curvas de segunda y tercera imanación*, respectivamente. El diagrama $M - H$ puede obtenerse a partir del ciclo $B - H$ utilizando la relación general $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})$.

6.6. CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Un circuito magnético es, en general, un sistema formado por materiales magnéticos, frecuentemente en presencia de corrientes eléctricas, aunque no necesariamente (por ejemplo, el imán permanente). El circuito más representativo es, quizá, el denominado electroimán, representado

\mathbf{j}_{ms} son Am^{-1} , por lo que no podemos expresar la densidad total como $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_{ms}$. Sin embargo, no hay dificultad si escribimos $\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$. La razón de ello estriba en que, al extenderse \mathbf{j}_{ms} por una superficie, el producto (intersección) $\mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$ es una región unidimensional, lo cual implica que el dominio de integración, para $\int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$, no es una superficie sino una curva (véanse los Problemas 6.8 y 6.9). De este modo $d\mathbf{S}$ se comporta como si fuera un elemento de longitud dl , haciendo que las dimensiones de este integrando sean amperios, exactamente igual que las de $(\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_m) \cdot d\mathbf{S}$.

en la Figura 6.2(a). Éste está formado por dos partes, una correspondiente al material, a la que llamaremos *hierro*, y otra vacía nombrada *entrehierro*³. Además, se tiene uno o varios arrollamientos de espiras por las cuales se hace circular una intensidad. Con todo ello, la cuestión fundamental es la determinación de los campo H , M y B , en todas las partes del hierro y entrehierro.

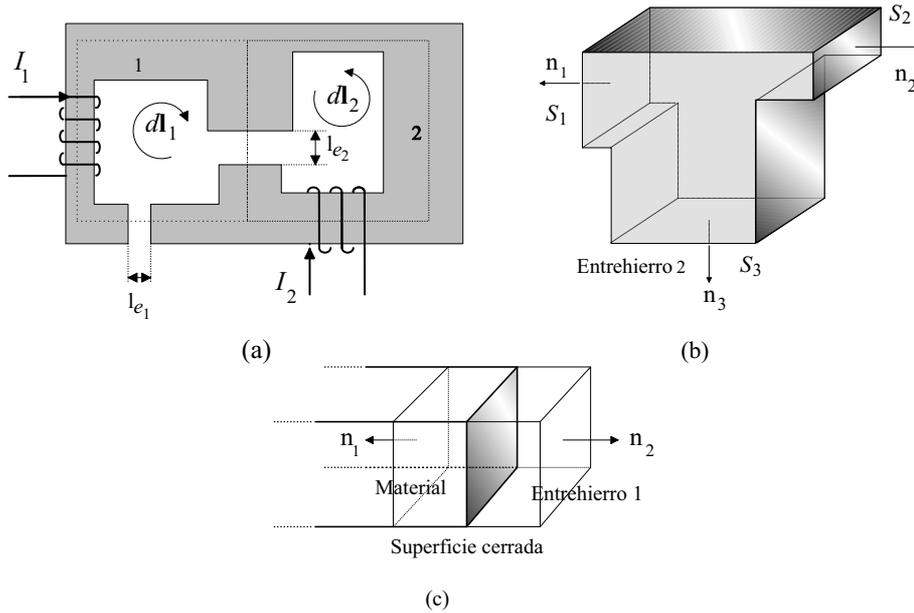


Figura 6.2. (a) Electroimán. (b) Superficie cerrada que relaciona tres partes diferentes del hierro. Las superficies que no hemos marcado no intervienen en el cálculo del flujo, ya que se supone que el campo H es paralelo a las superficies externas del material. (c) Superficie cerrada en forma de cubo que contiene, parte del hierro y parte del entrehierro.

Para resolver un circuito magnético se pueden seguir los siguientes pasos:

1) Aplicación de la ley de Ampère para el campo H . Para ello es necesario elegir una curva. Como el problema se resuelve de forma aproximada, se toma una *línea media* que incluya todos los elementos que forman parte del sistema (materiales que intervienen y entrehierro si lo hubiere). Para sistemas de varias mallas, se eligen tantas curvas para aplicar la ley como sean necesarias. Además, hay que fijar un sentido para el recorrido en que se calcula la circulación. Esto es importante, ya que en función de como se haga, así será la orientación de la superficie, lo cual afecta directamente al signo de la intensidad [Figura 6.2(a)].

2) Flujo de B . Con este fin, se toma una superficie cerrada de geometría sencilla en donde haya un cambio de material o en un mismo material si existe variación de la sección del mismo; también se utiliza en zonas donde el material se bifurca (nudos). Con ello se pretende obtener ecuaciones donde se relacionan los campos magnéticos B en las distintas partes del sistema. Salvo que se diga lo contrario se suele considerar que no existe flujo disperso [Figura 6.2(b) y (c)].

3) Ecuaciones materiales. Se plantean las ecuaciones que relacionan el campo B y el H , para los distintos materiales que componen el sistema.

Planteado esto, la forma de operar depende de cada problema concreto; no obstante, dado el interés práctico, con frecuencia se quiere conocer el campo B en el entrehierro. Para ello, una forma de proceder puede ser la siguiente:

(a) De las ecuaciones (3) despejar el H en función de B para el entrehierro y para los *materiales*

³En realidad, un electroimán puede estar constituido por más de un material; nosotros partimos de este esquema por sencillez, siendo extensible la forma de proceder a un caso más complejo.

lineales que intervengan, e introducirlo en la ecuación (1). De esta manera se obtiene una nueva ecuación en la que aparece el H_h (del hierro) y los campos B_e del entrehierro y demás materiales B_i (si los hay).

(b) Despejar B_e y B_i en función de B_h mediante lo obtenido en 2.

(c) Substituir este resultado (b) en (a). Con ello se llega a una ecuación en la que se relaciona B_h del material con H_h del material, esto es $B_h = B_h(H_h)$. A esta ecuación se le denomina *recta de funcionamiento* (véase Figura 6.3).

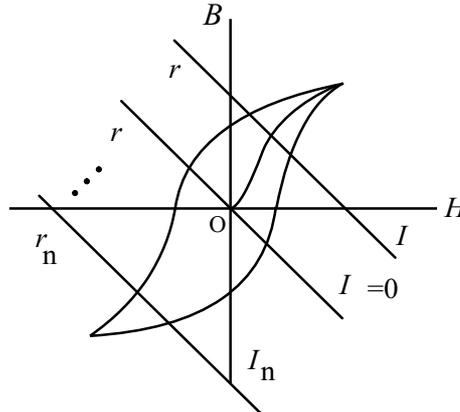


Figura 6.3. La recta de funcionamiento corta, en principio, en tres puntos diferentes al ciclo de histéresis. El punto de todos ellos que se utiliza para los cálculos, denominado *punto de funcionamiento*, depende de la parte del ciclo donde el sistema realmente se encuentra. Asimismo, para un sistema concreto, tenemos una recta de funcionamiento para cada intensidad, siendo dichas rectas, por lo tanto, paralelas entre sí (misma pendiente), pero de distinta ordenada en el origen.

(d) Una vez hallada la recta de funcionamiento, el punto exacto (H, B) donde nos encontramos para determinado valor de la intensidad, se encuentra a partir del sistema de ecuaciones formado por la recta antedicha y la ecuación que relaciona B_h con H_h del material. En el caso de un material diamagnético o paramagnético, $B = B(H)$ es una relación lineal; en el caso de un ferromagnético la relación viene dada por el ciclo de histéresis de cuerpo. En definitiva, lo que se hace es calcular la intersección entre la recta y la ecuación material correspondiente.

(e) Conocido el valor de H_h y B_h , a partir de de la relación de flujos (2), se calcula el campo en el entrehierro.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 6.1** Una barra cilíndrica muy larga de radio R , cuyo eje de revolución coincide con el eje OZ , tiene una magnetización homogénea dada por $\mathbf{M} = M \mathbf{u}_z$. Calcular las corrientes de magnetización volumétrica y superficial.

Resolución

Al ser una barra cilíndrica muy larga y tener una magnetización uniforme en la dirección del eje OZ , el sistema posee simetría de translación y de rotación. Por esta razón es conveniente, que no imprescindible, utilizar coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . De este modo, se tiene:

$$\mathbf{j}_m = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') = \nabla' \times (0, 0, M) = 0. \quad (6.13)$$

Este resultado es lógico, ya que al tener la magnetización el mismo valor en todos los puntos interiores a la barra, las derivadas parciales respecto de z se anulan.

Con respecto a la densidad de corriente de magnetización volumétrica, debemos aplicar la relación,

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}, \quad (6.14)$$

en donde, como se puede observar, aparece el vector normal a la superficie. Al ser una barra larga podemos considerar que las bases de la misma están muy lejos, por lo que sólo tendremos en cuenta la superficie lateral. Por otra parte, por las características geométricas de la misma, la normal cambia de dirección a medida que variamos el ángulo ϕ ; sin embargo, en las coordenadas elegidas la expresión de \mathbf{n} es sencilla, ya que tiene la dirección y sentido del vector \mathbf{u}_ρ , esto es, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\rho = (1, 0, 0)$. Introduciendo este dato en la Ecuación (6.14), se tiene:

$$\mathbf{j}_{ms} = (0, 0, M) \times (1, 0, 0) = (0, M, 0) = M\mathbf{u}_\phi,$$

lo cual quiere decir que tenemos una densidad superficial homogénea, es decir, es la misma en todos los puntos de la superficie de la barra.

6.2 Resolver la misma cuestión del problema anterior suponiendo ahora que la barra tiene una longitud finita L .

Resolución

Para solucionar este ejercicio debe seguirse el mismo procedimiento que en el caso anterior. La única diferencia es que, al ser un cilindro finito, las bases de la barra no están muy alejadas y hay que tenerlas en cuenta (véase Figura 6.4). De este modo, todo lo referente a las corrientes de magnetización volumétrica el resultado es el mismo, ya que la barra está homogéneamente magnetizada. Respecto de la densidad superficial debemos hacer tres cálculos diferentes:

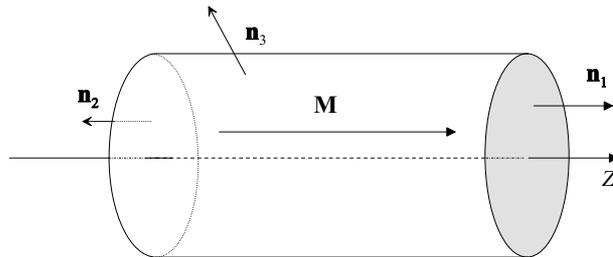


Figura 6.4. Barra homogéneamente magnetizada.

Superficie 1

Según se aprecia en la figura, la superficie 1 se corresponde con la base de la derecha, por lo que su vector normal asociado es el $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$. Aplicando la Ecuación (6.14), se tiene:

$$\mathbf{j}_{ms1} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}_1 = (0, 0, M) \times (0, 0, 1) = 0.$$

Superficie 2

Este caso se refiere a la superficie de la izquierda, cuya normal es $\mathbf{n}_2 = (0, 0, -1)$. Introduciendo esto otra vez en la Ecuación 6.14, encontramos:

$$\mathbf{j}_{ms2} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}_2 = (0, 0, M) \times (0, 0, -1) = 0.$$

Superficie 3

La densidad de corriente de la superficie lateral ya fue estudiada en el ejercicio anterior, donde se halló:

$$\mathbf{j}_{ms3} = (0, 0, M) \times (1, 0, 0) = (0, M, 0) = M\mathbf{u}_\phi.$$

Si analizamos con detenimiento los resultados precedentes llegamos a la conclusión de que, la barra finita posee sólo corrientes de magnetización superficial en la superficie S_3 . Esto geoméricamente se puede representar como se muestra en la Figura 6.5, lo cual recuerda a un conjunto de espiras arrolladas *en el vacío* por las que circula una intensidad I . Por ello diremos que un cilindro de longitud L magnetizado uniformemente en la dirección de su eje es *equivalente* a un solenoide finito de la misma longitud. Así, el campo magnético \mathbf{B} creado por ambos es el mismo. Esto no debe interpretarse como que una barra y una bobina son lo mismo; en modo alguno. Lo que equiparamos son los *efectos* producidos respecto de \mathbf{B} , que no los dos sistemas.

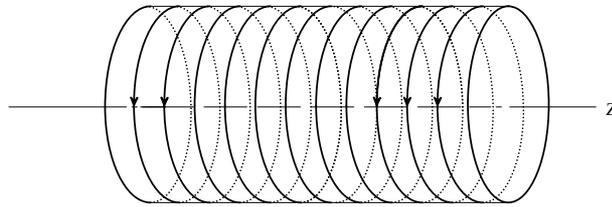


Figura 6.5. Solenoide equivalente.

Para poder calcular este campo, necesitamos una función en la que intervenga la magnetización M , ya que es el único dato que tenemos del cilindro, desde el punto de vista magnético. Con este fin, tomamos la ecuación obtenida en el capítulo anterior para el solenoide finito, esto es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \mathbf{u}_z.$$

Si analizamos esta expresión vemos que el producto nI tiene dimensiones de A/m. Por otra parte sabemos que j_{ms} representa una densidad de corriente superficial, igual a la carga por unidad de tiempo y por unidad de longitud (situada sobre la superficie) perpendicular al movimiento de las cargas. De esto se infiere para nuestro caso que $|\mathbf{j}_{ms}| = M = nI$ (obsérvese como M y nI se miden en A/m). En definitiva, si construimos una bobina de longitud L y radio R tal que nI coincida con la magnetización uniforme del cilindro de las mismas dimensiones, no podremos distinguir entre los campos \mathbf{B} creados por ambos sistemas. Es en este sentido es en el que se habla de *solenoide equivalente*.

Aclaración: Obsérvese que la igualdad de los campos se refiere *únicamente* al campo magnético \mathbf{B} .

- 6.3** Una barra cilíndrico-circular, de longitud $\ell = 0,2$ m y radio $r = 0,03$ m, tiene una imantación homogénea $M = 15000$ A/m en la dirección de su eje. Calcular los campos B y H sobre el eje, en el centro y en el extremo. Hacer las representaciones gráficas de B , M y H en función de su distancia al centro. Dibujar cualitativamente las líneas de campo de \mathbf{B} , \mathbf{M} y \mathbf{H} .

Resolución

Magnéticamente, la barra es equivalente a un solenoide cuya densidad de corriente por unidad de longitud coincide con la densidad superficial de corriente de magnetización j_{ms} de la barra:

$$j = nI \text{ (solenoide)} \Leftrightarrow j_{ms} = M \text{ (barra)}.$$

Aplicando la fórmula para el campo magnético creado por un solenoide recto en un punto cualquiera de su eje

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

En el centro:

$$B = \frac{\mu_0 M}{2} 2 \cos \left[\arctg \left(\frac{r}{\ell/2} \right) \right] = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 15000}{2} 2 \cos \left[\arctg \left(\frac{0,03}{0,2/2} \right) \right] = 0,018 \text{ T}.$$

En el extremo:

$$B = \frac{\mu_0 M}{2} \cos \left[\arctg \left(\frac{r}{\ell} \right) \right] = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 15000}{2} \cos \left[\arctg \left(\frac{0,03}{0,2} \right) \right] = 0,0093 \text{ T}.$$

Para hallar el campo magnético H aplicamos la definición $\mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B} - \mathbf{M}$.

En el centro:

$$H = \frac{0,018}{4\pi \times 10^{-7}} - 15000 \text{ A/m} = -6,3 \times 10^2 \text{ A/m}.$$

El signo negativo indica que en el centro \mathbf{H} y \mathbf{B} tienen sentidos opuestos. En el extremo, H es discontinuo; en el interior de la barra, pero infinitamente cerca del extremo, el campo no es igual que inmediatamente en el exterior.

Dentro (en el extremo):

$$H = \frac{0,0093}{4\pi \times 10^{-7}} - 15000 \text{ A/m} = -76 \times 10^2 \text{ A/m}.$$

La magnetización es M , dato del problema.

Fuera (justo donde termina la barra):

$$H = \frac{0,0093}{4\pi \times 10^{-7}} \text{ A/m} = 74 \times 10^2 \text{ A/m}.$$

En este caso la magnetización es nula, ya que estamos en el vacío. Este resultado puede entenderse bien, según lo explicado en teoría. Así, según la Ecuación (6.10), se tiene:

- Superficie S_1 .

En esta parte nacen líneas de \mathbf{M} [Figura 6.6b(2)], luego $\nabla \cdot \mathbf{M} > 0$ y por la Ecuación (6.10) se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{H} < 0$, lo cual implica que, en los puntos pertenecientes a esta superficie de la barra deben morir líneas de \mathbf{H} [Figura 6.6b(3)].

- Superficie S_2 .

Aquí mueren líneas de \mathbf{M} [Figura 6.6b(2)], o sea, $\nabla \cdot \mathbf{M} < 0$, por lo que $\nabla \cdot \mathbf{H} > 0$. Esto significa que, sobre la superficie S_2 deben nacer líneas de \mathbf{H} [Figura 6.6b(3)].

Si analizamos las gráficas cualitativas de los campos obtenidos dentro y fuera del cilindro, encontramos una cuestión interesante. Así, se observa que el campo magnético lo forman líneas cerradas continuas en todo el espacio, sin embargo, el campo H se comporta de diferente manera en el material que en el vacío. Debido a la discontinuidad existente en los extremos de la barra, H va, por el exterior, del polo norte del material al polo sur; por el interior de la misma, las líneas nacen también en el norte y mueren en el sur (contrariamente a lo que ocurre con B), lo cual

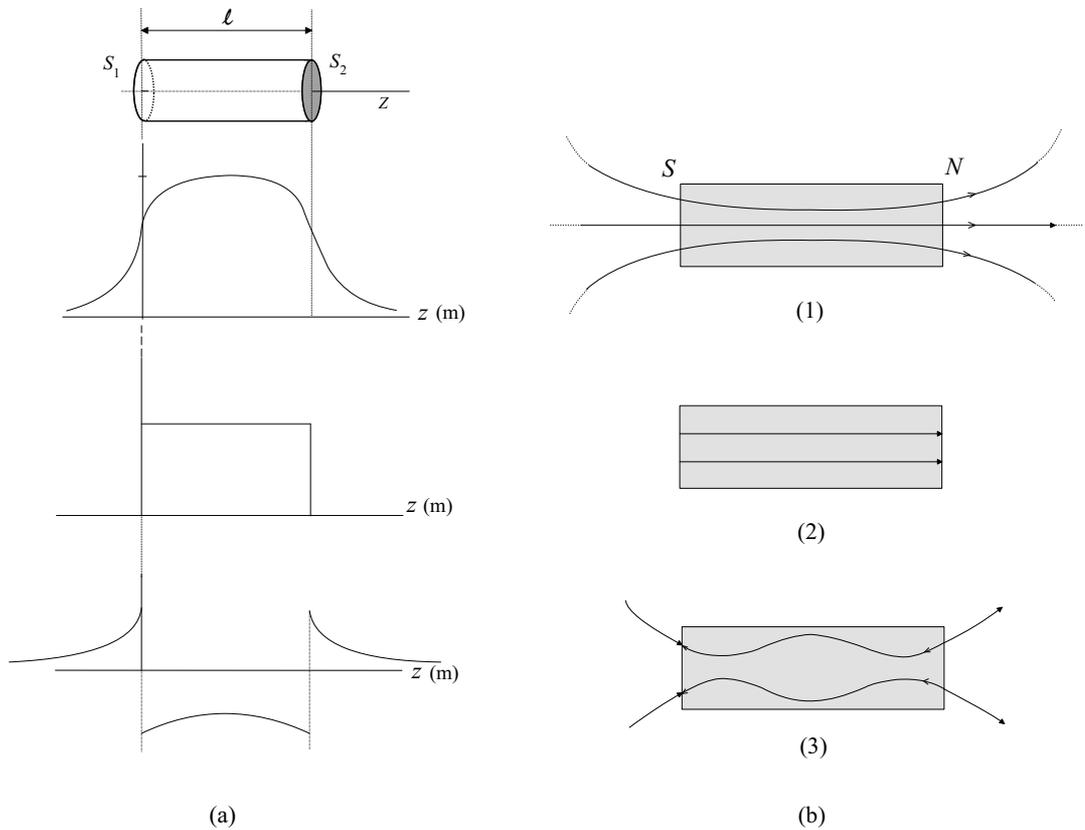


Figura 6.6. (a) En esta gráfica se representan los campos, B , M y H en función de la distancia z . (b) Forma cualitativa de B , M y H . Obsérvese la discontinuidad de H en las superficies laterales de la barra.

significa que, dentro del material va a existir un campo H en dirección opuesta a la magnetización. A este campo se le denomina *campo H_d desmagnetizante*, ya que tiende a disminuir el vector magnetización. Dicho campo es proporcional a la magnetización y se puede expresar como,

$$H_d = N_d M, \tag{6.15}$$

en donde N_d es el *factor desmagnetizante*. Este coeficiente depende de la geometría del cuerpo magnetizado objeto de estudio, y su cálculo es laborioso⁴.

6.4 Un solenoide recto y muy largo tiene 20 espiras por mm y circula por ellas una corriente de intensidad 3 A. Calcular los campos magnéticos B y H en su interior. Repetir el cálculo si el solenoide se llena con un material magnéticamente lineal e isótropo de susceptibilidad 20.

Resolución

Sin material en el interior del solenoide, el campo es:

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^4 \times 3 = 0,0754 \text{ T ,}$$

⁴Este factor desmagnetizante sólo se puede hallar de forma exacta en el caso de un elipsoide. Para ver información del cálculo y tablas para diferentes dimensiones de elipsoides pueden consultarse los artículos:
 -J.A.Osborn, "Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid", *Phys.Rev.* **67**, (1945), pp. 351-357.
 -E.C.Stoner, "The Demagnetizing Factors of Ellipsoids", *Phil.Mag.* [7] **36**, (1945), pp. 803-821.

y para el campo H ,

$$H = \frac{B}{\mu_0} = nI = 6 \times 10^4 \text{ A/m} .$$

Cuando se introduce un material dentro del solenoide no se puede obtener directamente el campo B , ya que éste depende de H y de M ; en este caso se calcula primero H y, a posteriori, el campo B a través de la Ecuación (6.8). No obstante, mediante este procedimiento, puede existir todavía una dificultad. En efecto, si se introduce un material dentro del solenoide muy largo, el campo magnético H tendrá su origen en las corrientes de conducción que circulan por el carrete, así como en los puntos de la substancia en donde $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$. Por esta razón, en el mejor de los casos, aun suponiendo que el la substancia introducida se magnetizase homogéneamente, vamos a tener en los extremos del material una divergencia de M distinta de cero, dando como consecuencia un campo H_d desmagnetizante (Véase problema anterior), no haciendo evidente el cálculo del campo H real existente dentro del cuerpo. Sin embargo, en el caso que nos ocupa, se interpreta que la bobina muy larga se llena *completamente* con una barra paramagnética, pudiendo despreciar, por tanto, dicho campo desmagnetizante⁵. Teniendo esto en cuenta, H será producido sólo por la corriente de conducción, pudiendo escribir:

$$H = 6 \times 10^4 \text{ A/m} .$$

Obtenido el H , el campo magnético B es inmediato,

$$B = \mu_0(1 + \chi_m)H = 1,58 \text{ T} .$$

6.5 Un conductor cilíndrico de radio R , paramagnético de μ_r conocido, transporta una corriente homogénea I_c . Calcular la relación entre las distancias ρ_e de un punto exterior al cilindro (su eje) y la ρ_i de la correspondiente a un punto interior, sabiendo que en ambos puntos el \mathbf{B} es idéntico.

Resolución

Tal y como se han enfocado otros problemas, se deben analizar, primeramente, las simetrías del sistema. Llevando esto a cabo se observa que, éstas son las mismas que las encontradas en ejercicio del hilo muy largo del capítulo 5 (Problema 5.1), por lo que no las mostraremos otra vez y las daremos por conocidas.

Eligiendo el sistema de referencia habitual para sistemas con simetría cilíndrica, y tomando $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$, y la orientación de la superficie paralela a \mathbf{j} , se tiene para un $\rho > R$ de una curva circular Γ :

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H}(0, dl, 0) = \oint_{\partial S} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow H_\phi 2\pi\rho = I_c .$$

Obsérvese como aparece la intensidad total I_c dato del problema, dado que, como ya se explicó en el tema anterior, el integrando \mathbf{j} es nulo salvo en la sección del conductor, luego,

$$\mathbf{H}_{\phi e} = \frac{I_c}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi,$$

en donde el índice e denota un punto exterior de la corriente.

⁵El factor desmagnetizante para un elipsoide de semiejes a, b , y c , tal que $a = b \neq c$, en la dirección c , viene dado por la siguiente función: $N_c = \frac{4\pi}{(r^2-1)} \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \ln(r + \sqrt{r^2-1}) - 1$, en donde $r = \frac{c}{a}$. En el caso de una barra esbelta, esto es, de longitud mucho mayor que el diámetro, $r \gg 1$, pudiendo hacerse la aproximación $N_c \approx 0$ (véase, por ejemplo, B.D.Cullity, *Introduction to magnetic materials*, Addison-Wesley (1972), p.56.).

Para un punto en el interior del conductor a una distancia $\rho = \rho_i < R$ de su eje de revolución OZ , la intensidad que aparece en el teorema de Ampère para el campo \mathbf{H} no es la que hemos utilizado antes para $\rho > R$. En efecto, tomando otra circunferencia Γ_i para el mencionado radio ρ_i y una superficie S_i orientada según un $d\mathbf{l}$ de sentido antihorario, tenemos:

$$\oint_{\partial S_i} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = H_\phi \rho_i \int_0^{2\pi} d\phi = j_c \int_{S_i} dS_i$$

$$\Rightarrow 2\pi \rho_i H_\phi = j_c S_i \Rightarrow 2\pi \rho_i H_\phi = j_c \pi \rho_i^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c \rho_i}{2},$$

que en forma vectorial, es:

$$\mathbf{H}_{\phi i} = \frac{j_c \rho_i}{2} \mathbf{u}_\phi.$$

Para expresar este resultado en función de I_c , basta tener en cuenta que, empleando la definición de intensidad, particularizado a la intensidad de corriente a través de la sección recta del conductor S_c , se obtiene:

$$I_c = \int_{S_c} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_c} j_c dS = j_c \pi R^2 \Rightarrow j_c = \frac{I_c}{S_i} = \frac{I_c}{\pi R^2}.$$

Introduciendo este resultado en la función obtenida para el campo exterior,

$$\mathbf{H}_{\phi e} = \frac{I_c \rho_i}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi.$$

Hallados los campos magnéticos \mathbf{H} para el exterior e interior del conductor, pueden calcularse los campos \mathbf{B} correspondientes mediante la relación general $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, obteniendo:

$$\mathbf{B}_e = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}(e) = \mu_0 \frac{I_c}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\phi,$$

donde no aparece μ_r , ya que este campo se refiere a un punto donde no hay materia ($\mu_r = 1$), y

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_i = \mu_0 \mu_r \frac{I_c \rho_i}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi,$$

pudiendo escribir ya \mathbf{B} y no \mathbf{B}_ϕ , ya que, como se demostró cuando se estudió el hilo infinito (y otros sistemas), las componentes radial y en z del campo son nulas.

Para encontrar la relación entre las distancias ρ_i y ρ que se dice en el enunciado, sólo hay que tener en cuenta que, al ser los campos \mathbf{B} iguales, las expresiones anteriores deben ser idénticas, por lo que igualando ambas, se encuentra:

$$\mu_0 \frac{I_c}{2\pi \rho} = \mu_0 \mu_r \frac{I_c \rho_i}{2\pi R^2} \Rightarrow \rho_i \rho = \frac{R^2}{\mu_r}.$$

- 6.6** Por una región cilíndrica de radio $R_1=5$ cm se extiende una densidad de corriente $\mathbf{j} = 1000 \rho^2 \mathbf{u}_z$. Simultáneamente, por otra región similar en forma a la anterior pero de radio $R_2=3$ cm, circula una intensidad de 1 A. La corriente asociada está distribuida homogéneamente y tiene la dirección del eje OZ sentido positivo. Si los ejes de revolución de ambas regiones son paralelos a OZ y se encuentran a una distancia $d(OO')=6$ cm, tal como muestra la Figura 6.7, calcular: a) El campo magnético H_ϕ en el punto $P_1(4,0,0)$ cm. b) El campo magnético B_ϕ en el punto $P_2(7,0,0)$ cm. c) El campo $H_t = H_\phi(x)$ en el intervalo de intersección de ambas corrientes sobre el eje OX . Representar cualitativamente el resultado obtenido.

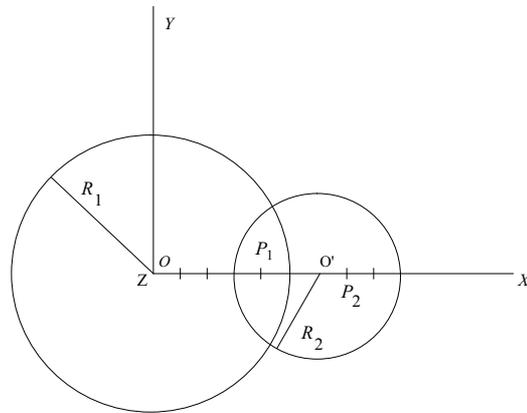


Figura 6.7. Corrientes cilíndricas.

Resolución

a) Para realizar este ejercicio vamos a investigar si existe algún tipo de simetría.

Elijamos un punto arbitrario P de coordenadas (x, y, z) [Figura 6.8(a)], dentro o fuera de las corrientes; en tal caso observamos que, sea cual fuere el campo $\mathbf{H}_\phi(P)$, debe ser el mismo que en otro punto P' de coordenadas $(x, y, z + z_0)$, siendo z_0 una cantidad arbitraria (P' tiene la misma proyección sobre el plano OXY que P , pero de diferente coordenada en z). Ello es debido a que no se puede apreciar en el sistema de corrientes diferencia alguna entre secciones paralelas al plano OXY , ya que dichas corrientes se extienden por una región muy grande del espacio. Todo esto significa que dicho sistema posee simetría de translación, esto es, $\mathbf{H}_\phi(x, y, z) = \mathbf{H}_\phi(x, y, z + z_0)$. Esta conclusión es general para este ejercicio, por lo que se puede particularizar para el punto P_1 que nos piden. Con el fin de ver si existe simetría de rotación, tomemos ahora otro punto

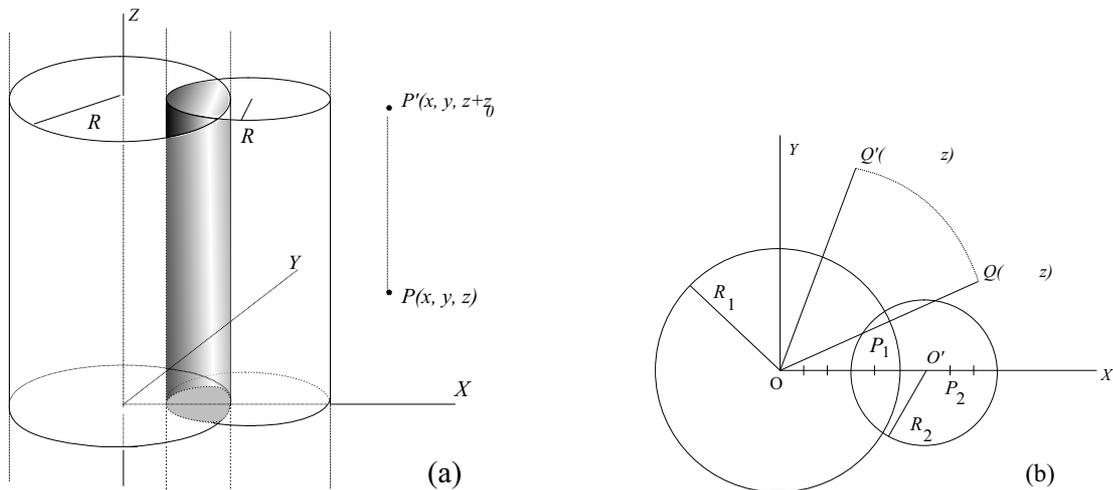


Figura 6.8. (a) Corrientes cilíndricas en tres dimensiones. Los puntos P y P' son equivalentes al no poder apreciar diferencia entre ambos. Obsérvese como el punto P_1 pertenece a la zona sombreada (intersección). (b) El punto Q' se obtiene como una rotación de ángulo θ de Q ; el sistema de corrientes no posee simetría de rotación.

cualquiera Q [Figura 6.8(b)], cuyas coordenadas cilíndricas son (ρ, ϕ, z) . Si provocamos sobre dicho punto una rotación de ángulo θ en torno al eje OZ , es decir, $R_z(\theta)Q$, se obtiene otro punto $Q'(\rho, \phi + \theta, z)$, en donde el campo \mathbf{H}_ϕ será, en general, diferente. La razón de ello es que, al estar

las corrientes descentradas, si se puede apreciar diferencia entre los puntos Q y Q' , no existiendo, por lo tanto, simetría de rotación.

Después del análisis anterior realizado, puede pensarse que para la resolución no se debe emplear el teorema de Ampère para el campo \mathbf{H} visto en este capítulo (y en el anterior para el \mathbf{B}), ya que el problema no goza de las propiedades de simetría necesarias para aplicar dicho teorema, sin embargo, vamos a mostrar que esto no es así. En efecto, si analizamos con mas detalle lo que se pide vemos que, el campo total generado por las corrientes es en un punto puede encontrarse aplicando el principio de superposición. Físicamente significa que, el efecto de dichas corrientes es equivalente a calcular primero el campo creado por la primera y posteriormente obtener el debido a la segunda. En este sentido, el enfoque del ejercicio puede ser algo diferente de como se ha supuesto en un principio. Así, si consideramos los campos de las corrientes como independientes y después los sumamos, podemos también examinar el sistema por separado. Ello se traduce en que pueden volverse a estudiar las simetrías, pero a diferencia de lo hecho anteriormente, ahora de cada corriente por separado.

Si tomamos la primera distribución de corriente que se extiende por un diámetro de 5 cm, y repetimos el razonamiento dado con anterioridad cuando estudiamos las simetrías, observamos que ahora, además de la mencionada simetría de translación, si existe simetría de revolución en torno al eje OZ , ya que tenemos una sola geometría cilíndrica, por lo que podremos emplear la ley de Ampère para el campo \mathbf{H} .

Ciñéndonos ya en el punto P_1 , elegimos una curva circular Γ_1 de radio $\rho < R_1$ centrada en el origen de coordenadas O (Figura 6.9).

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = I_c.$$

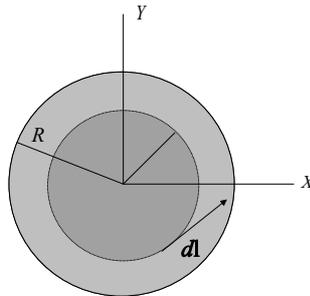


Figura 6.9. Curva Γ_1 de radio $\rho < R_1$.

Tomemos $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\phi, H_z)$ y $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$. Si recorremos la curva Γ_1 (∂S_1) en sentido antihorario, la normal que orienta la superficie cuya delimitación es Γ_1 es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_z$ y $d\mathbf{S}_1 = dS_1\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS_1$. Sabiendo, además, que $\mathbf{j} = 1000\rho^2\mathbf{u}_z = (0, 0, 1000\rho^2)$, se tiene:

$$\oint_{\partial S_1} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_{S_1} (0, 0, 1000\rho^2)(0, 0, 1)dS_1 \Rightarrow \oint_{\partial S_1} H_\phi dl = \int_{S_1} 1000\rho^2 dS_1.$$

La integral del primer miembro es sencilla, ya que por las simetrías mencionadas H_ϕ es una magnitud constante para un ρ prefijado, pudiendo situarse fuera del símbolo integral, esto es:

$$\oint_{\Gamma_1} H_\phi dl = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi 2\pi\rho,$$

en donde se ha puesto el elemento dl en coordenadas polares, o sea, $dl = \rho d\phi$. Por otra parte, el segundo miembro no puede resolverse de una forma tan simple, ya que \mathbf{j} es una función de ρ ; en este caso debemos integrar,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} 1000\rho^2 dS_1 &= \int \int_{S_1} 1000\rho^2 |J(\rho, \phi)| d\rho d\phi = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} 1000\rho^2 \rho d\rho d\phi \\ &= \int_0^\rho 1000\rho^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_0^\rho 1000\rho^2 \rho d\rho = 2000\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^\rho = 2000\pi \frac{\rho^4}{4}. \end{aligned}$$

Igualando ambos resultados, se encuentra:

$$H_\phi 2\pi\rho = 2000\pi \frac{\rho^4}{4} \Rightarrow H_\phi = 250\rho^3.$$

Con el fin de no equivocar esta expresión con otras que podamos obtener posteriormente denotaremos a este campo con el índice 1, que introducido en el resultado anterior, puesto en forma vectorial, queda:

$$\mathbf{H}_\phi(1) = 250\rho^3 \mathbf{u}_\phi(1).$$

En relación a la segunda corriente, se tienen las mismas simetrías que hemos visto en la primera, si bien los razonamientos deben hacerse trasladando el sistema de referencia al punto O' (Figura 6.10); en tal caso sí podemos asegurar que las componentes del campo \mathbf{H} en un punto $C(\rho, \phi, z)$ son las mismas que en otro punto $D(\rho, \phi + \zeta, z)$ y, por ende, también será idéntica la componente \mathbf{H}_ϕ . Esto quiere decir que este subsistema es invariante frente a una rotación de ángulo ζ respecto del nuevo eje $O'Z$ trasladado. Por todo ello, se puede emplear el teorema de Ampère como se hizo antes. Consideraremos ahora una nueva curva circular Γ_2 de radio $\rho < R_2$, y un elemento

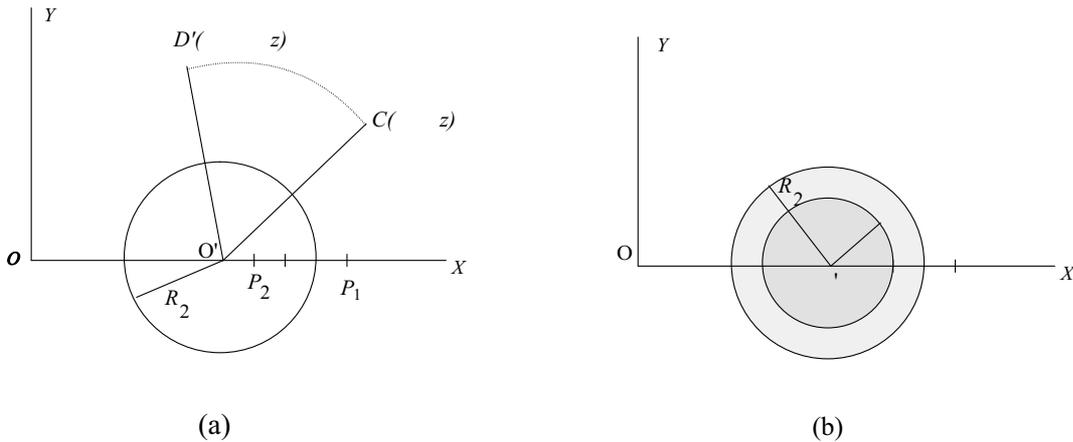


Figura 6.10. (a) Corriente cilíndrica. En los puntos C y D la componente tangencial del campo H es la misma. (b) Curva Γ_2 de radio $\rho < R_2$.

diferencial de longitud como en el caso anterior, esto es, $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$. Realizando la circulación en sentido antihorario, S_2 queda orientada con su normal hacia fuera del plano de la figura, con lo que $d\mathbf{S}_2 = dS_2\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS_2$, obteniendo:

$$\oint_{\partial S_2} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_{S_2} (0, 0, j)(0, 0, 1)dS_2 \Rightarrow \oint_{\partial S_2} H_\phi dl = \int_{S_2} j_c dS_2.$$

Por las mismas razones expuestas para la anterior corriente, H_ϕ y ρ pueden salir del símbolo integral. Por otra parte, al ser I homogénea la densidad de corriente de conducción j_c debe tomar el mismo valor para todos los puntos de esta región S_2 (dato del ejercicio), pudiendo entonces escribir:

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = j_c \int_{S_2} dS_2 \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c S_2 \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c \pi \rho^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c \rho}{2},$$

que puesto en forma vectorial respecto de O' es:

$$\mathbf{H}_\phi(2) = \frac{j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi(2).$$

siendo el índice 2 el empleado para este caso (como se hizo para el primero).

Este valor encontrado para el campo no está expresado correctamente, ya que el dato que se da en el problema para esta corriente de conducción es I_c y no j_c . Por esta razón se debe encontrar la relación entre j_c e I de manera que \mathbf{H}_ϕ que en función de I_c .

Para hallar esta relación basta utilizar la definición general de I_c :

$$\int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = I_c.$$

En nuestro caso I_c corresponde a toda la sección de la presente corriente, es decir a $S = \pi R_2^2$, siendo R_2^2 el radio máximo por donde se extiende. Introduciendo este dato en la definición anterior:

$$\int_S (0, 0, j_c)(0, 0, 1) dS = I_c \Rightarrow \int_S j_c dS = I_c.$$

Como se ha comentado con anterioridad j_c es una magnitud homogénea y, en consecuencia, puede salir de la integral,

$$j_c \int_S dS = I_c \Rightarrow j_c S = I_c \Rightarrow j_c \pi R_2^2 = I_c \Rightarrow j_c = \frac{I_c}{\pi R_2^2}.$$

Introduciendo este valor de j_c en H_ϕ , se encuentra:

$$\mathbf{H}_\phi(2) = \frac{I_c \rho}{2\pi R_2^2} \mathbf{u}_\phi(2).$$

Hallado el campo \mathbf{H}_ϕ producido por ambas corrientes para cualquier punto interior a las mismas, hay que particularizar para P_1 de coordenadas (4, 0, 0) cm. Para ello se puede emplear dos procedimientos distintos.

Una primera posibilidad, más difícil, es referir los campos obtenidos al sistema de referencia inicial $OXYZ$, para un punto genérico de la intersección de las dos corrientes (Figura 6.8); en tal caso, no hay dificultad para la primera corriente, ya que es su sistema inicial, pero sí lo hay para la segunda. Para resolver esto, desplazaremos la solución de esta corriente al origen O , obteniendo como resultado:

$$\mathbf{H}_\phi = 250(x^2 + y^2)^{3/2} \mathbf{u}_\phi(1) + \frac{I_c \sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{2\pi R_2^2} \mathbf{u}_\phi(2).$$

Una vez obtenida la expresión general para cualquier punto perteneciente a la zona de *intersección* (véase la Figura 6.8) concretaremos para el punto que se pide. Así, al estar dicho punto sobre el eje OX $y = 0$, verificándose, además, que $\phi = 0$ para la primera corriente y $\phi = \pi$ para la segunda, por lo que $\mathbf{u}_\phi(1) = -\sin(\phi)\mathbf{u}_x + \cos(\phi)\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y$ y $\mathbf{u}_\phi(2) = -\mathbf{u}_y$. Con todo ello, el resultado final para $x = 0,04$ m queda:

$$\mathbf{H}_\phi = \left[250x^3 - \frac{I_c|x-d|}{2\pi R_2^2} \right] \mathbf{u}_y = -3,5\mathbf{u}_y \text{ Am}^{-1}. \quad (6.16)$$

Otra forma alternativa de llegar al mismo resultado consiste en sumar directamente los campos producidos por las corrientes, teniendo en cuenta las distancias respecto de sus respectivos orígenes y los sentidos correctos para el punto en cuestión. En nuestro caso, se tiene:

$$\mathbf{H}_\phi = (250x^3 - \frac{I_c a}{2\pi R_2^2}) \mathbf{u}_\phi = -3,5\mathbf{u}_\phi \text{ Am}^{-1},$$

en donde $a = |x - d| = 0,02 \text{ m}$ es la distancia $O'P_1$.

b) Para este segundo apartado, se pueden emplear los razonamientos hechos anteriormente para las simetrías y la elección de curvas y superficies, por lo que pasaremos directamente a realizar los cálculos. Tomando, primeramente, la corriente de radio R_1 , se observa que el campo creado en el punto P_2 no se puede hallar como caso particular del campo encontrado, para esta misma corriente, en el apartado anterior, ya que ahora P_2 se encuentra fuera de la misma. Este hecho, como vamos a demostrar, modifica el resultado final.

Consideremos ahora una curva Γ_1 (Figura 6.11), de las mismas características que en la pregunta anterior, pero de radio $\rho > R_1$; aplicando la ley de Ampère exactamente igual a como se ha hecho en anteriormente, se encuentra:

$$\oint_{\partial S_1} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_{S_1} (0, 0, 1000\rho^2)(0, 0, 1)dS_1 \Rightarrow$$

$$\oint_{\partial S_1} H_\phi dl = \int_{S_1} 1000\rho^2 dS_1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = \int_0^\rho 1000\rho^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi.$$

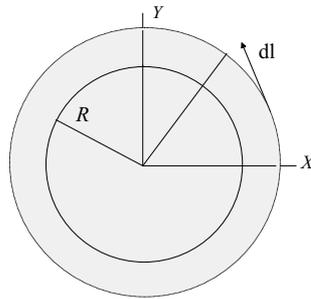


Figura 6.11. Curva $\Gamma_1 > R_1$.

Para calcular esta última integral conviene tener cuidado, pues, como se dijo en el tema anterior, los límites que intervienen en el cálculo de la intensidad $\int_{S_1} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = I_c$ corresponden a la intersección entre la superficie matemática S_1 elegida y el volumen correspondiente a la densidad de corriente V_{j_c} . En nuestro caso, esto quiere decir que, los límites de integración no se extienden hasta el radio ρ de S_1 , ya que la corriente sólo existe hasta $R_1 < \rho$, sino que dicha integración debe hacerse sobre la superficie πR_1^2 donde se encuentra \mathbf{j}_c , esto es:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = \int_0^{R_1} 1000\rho^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow H_\phi 2\pi \rho = 2000\pi \frac{R_1^4}{4}.$$

Despejando el campo tangencial de esta última relación, y poniendo en forma vectorial, se obtiene:

$$\mathbf{H}_\phi(1) = 250 \frac{R_1^4}{\rho} \mathbf{u}_\phi(1).$$

Obsérvese como al hacer la circulación $\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H}$ aparece ρ y no R_1 , ya que la integral depende del campo \mathbf{H} , el cual puede existir fuera de donde hay corriente.

En relación con el campo producido por la otra corriente, como el punto P_2 se halla dentro de la misma, se puede emplear el resultado encontrado en el apartado anterior, el cual se obtuvo para $\rho < R_2$. De este modo, se tiene:

$$\mathbf{H}_\phi(2) = \frac{I_c \rho}{2\pi R_2^2} \mathbf{u}_\phi(2).$$

Del mismo modo a como se hizo en a), puede escribirse la expresión total, respecto de O , para el campo creado en un punto arbitrario dentro de la superficie $S_2 = \pi R_2^2$ excluyendo la intersección de ambas corrientes:

$$\mathbf{H}_\phi = 250 \frac{R_1^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{u}_\phi(1) + \frac{I_c \sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{2\pi R_2^2} \mathbf{u}_\phi(2).$$

Para el punto $P_2(7, 0, 0)$ cm, $\mathbf{u}_\phi(1) = \mathbf{u}_y$ y $\mathbf{u}_\phi(2) = \mathbf{u}_y$; además $y = 0$, que introducido en la última expresión,

$$\mathbf{H}_\phi = \left[250 \frac{R_1^4}{|x|} + \frac{I_c a}{2\pi R_2^2} \right] \mathbf{u}_y = 1,8 \text{ Am}^{-1},$$

siendo $a = |x - d| = 0,01$ m. Nótese como en vez de \mathbf{u}_y puede ponerse \mathbf{u}_ϕ , ya que en este punto coinciden.

Este resultado puede obtenerse, de igual modo, calculando y sumando los campos desde sus respectivos orígenes, como se hizo en el apartado anterior.

La componente tangencial del campo magnético \mathbf{B} , puede obtenerse a partir de la Ecuación (6.8). En nuestro caso, suponemos que las corrientes de electrones que circulan por las regiones cilíndricas no son magnetizables, de lo cual se infiere que podemos substituir $\mu_r \approx 1$. Teniendo esto es consideración, el campo B_ϕ viene dado por:

$$\mathbf{B}_\phi = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_\phi \approx \mu_0 \mathbf{H}_\phi = 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

c) El intervalo de intersección sobre el eje OX corresponde a los valores $0,03 < x < 0,05$. Utilizando la Ecuación (6.16), se tiene:

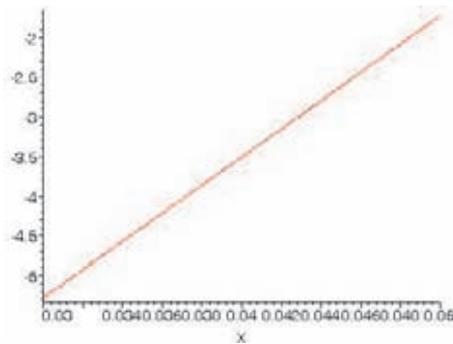


Figura 6.12. Gráfica del campo $H_\phi(x)$.

- 6.7** La Figura 6.13 representa un anillo magnético de sección rectangular cuyos lados son L y $(R_3 - R_1)$. Desde R_1 hasta R_2 el material es lineal de permeabilidad relativa μ_{r1} . Desde R_2 hasta R_3 , lineal de permeabilidad μ_{r2} . Sobre el anillo se bobinan N espiras por las que circula una intensidad I . Calcular el flujo magnético del circuito.

Resolución

Para calcular lo que se pide es necesario conocer el campo \mathbf{B} , lo cual no es inmediato debido a que el arrollamiento de N espiras no se hace en vacío, sino sobre un anillo compuesto de dos materiales magnéticos. Por esta razón, obtendremos, primeramente, el campo magnético \mathbf{H} y, a posteriori, hallaremos \mathbf{B} a través de la Ecuación (6.8).

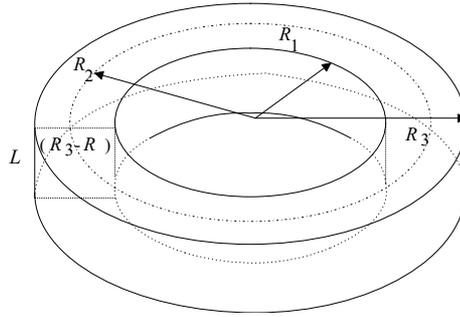


Figura 6.13. Anillo de sección cuadrada.

Para ello, aplicamos la ley de Ampère (6.11) a lo largo de una circunferencia de radio ρ , interior a dicho anillo. Eligiendo un sistema de coordenadas cilíndricas, dado que el aro posee simetría de revolución en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de su base, podemos escribir: $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\phi, H_z)$ y $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$. Introduciendo todo ello en la Ecuación (6.11), se encuentra:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c \Rightarrow \oint_{\Gamma} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = NI \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = NI \Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\phi dl = NI,$$

en donde se ha escrito I y no I_c , como al principio, para no complicar la notación. Se entiende que aquí I es la corriente de conducción. Al ser H_ϕ la misma para cualquier punto de la curva elegida, habida cuenta de la simetría de rotación, puede sacarse del signo integral, esto es:

$$H_\phi \int_0^{2\pi} dl = NI \Rightarrow H_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi \Rightarrow H_\phi \rho \phi \Big|_0^{2\pi} = NI \Rightarrow 2\pi \rho H_\phi = NI,$$

con lo cual, el campo magnético H_ϕ viene dado por:

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi,$$

siendo ρ la distancia del eje de revolución del anillo al punto dentro del mismo donde queremos saber el campo.

Para hallar el flujo de \mathbf{B} a través de una sección del anillo, basta emplear la expresión, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. El problema de cara a aplicar esta igualdad estriba en que, para encontrar el \mathbf{B} se necesita saber, además, el valor de \mathbf{M} . En nuestro caso dicho problema se resuelve fácilmente, ya que se da como dato la permeabilidad relativa de los materiales que componen el anillo y, por lo tanto, información de χ_m . De todo lo dicho, se encuentra para el primer medio:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_1) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_{m1}\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_{m1})\mathbf{H} = \mu_0\mu_{r1}\mathbf{H},$$

y para el segundo:

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_2) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_{m2}\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_{m2})\mathbf{H} = \mu_0\mu_{r2}\mathbf{H}.$$

Con estos datos, el flujo se calcula a través de la igualdad:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Con el fin de simplificar los cálculos, tomamos la normal a la superficie coincidente con la dirección de \mathbf{B} . En estas condiciones, $\mathbf{B} = (0, B_\phi, 0)$ y $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_\phi = (0, 1, 0)dS$, siendo $dS = \rho dz$ un elemento de área sobre la sección del anillo. Con todo ello, el flujo queda:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S (0, B_\phi, 0)(0, 1, 0)dS = \int_S B_\phi dS = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L \frac{NI\mu_{r1}}{2\pi\rho} d\rho dz + \int_{R_2}^{R_3} \int_0^L \frac{NI\mu_{r2}}{2\pi\rho} d\rho dz \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{NI\mu_{r1}}{2\pi\rho} d\rho \int_0^L dz + \int_{R_2}^{R_3} \frac{NI\mu_{r2}}{2\pi\rho} d\rho \int_0^L dz = \int_{R_1}^{R_2} \frac{NI\mu_{r1}}{2\pi\rho} d\rho L + \int_{R_2}^{R_3} \frac{NI\mu_{r2}}{2\pi\rho} d\rho L \\ &= \frac{NIL}{2\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} \mu_{r1} \frac{d\rho}{\rho} + \int_{R_2}^{R_3} \mu_{r2} \frac{d\rho}{\rho} \right) = \frac{NIL}{2\pi} \left(\mu_{r1} \ln \rho \Big|_{R_1}^{R_2} + \mu_{r2} \ln \rho \Big|_{R_2}^{R_3} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{NIL}{2\pi} \left(\mu_{r1} \ln \frac{R_2}{R_1} + \mu_{r2} \ln \frac{R_3}{R_2} \right) \text{ Wb .}$$

- 6.8** Un tubo cilíndrico muy largo de un material lineal de susceptibilidad magnética χ_m tiene un radio interior a y un radio exterior b . La Figura 6.14 muestra una sección del conjunto. Si en el eje del tubo hay un hilo recto muy largo recorrido por una corriente I , se pide:
- Evaluar la magnetización del material del tubo determinando su magnetización en un punto interior distante ρ del centro.
 - Determinar razonadamente las corrientes superficiales y volumétricas de magnetización en el tubo.
 - Evaluar el valor resultante del campo B_ϕ en un punto cuya ρ es exterior al tubo ($\rho > b$).

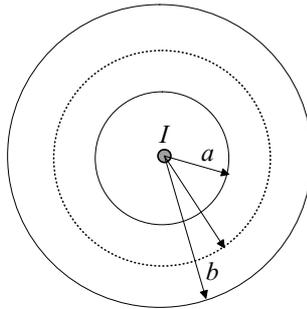


Figura 6.14. Conductor cilíndrico de radio R_1 concéntrico con un solenoide de radio R_2 .

Resolución

a) Para obtener la magnetización en el tubo es necesario conocer el valor \mathbf{H} , el cual puede obtenerse mediante la ley de Ampère para este campo. Teniendo en consideración que nuestro sistema objeto de estudio tiene simetría de revolución en torno a un eje coincidente con el hilo, escogemos una curva circular de radio $\rho < b$ para realizar la circulación, y una superficie abierta S plana. Utilizando coordenadas cilíndricas en las variables independientes y en las componentes del campo, podemos escribir, $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\phi, H_z)$ y $d\mathbf{l} = dl\mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$. Si recorremos la curva Γ (∂S) en sentido antihorario, la normal que orienta la superficie cuya delimitación es Γ es $\mathbf{n} = \mathbf{u}_z$ y $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS$. Con todo ello, se tiene:

$$\oint_{\partial S} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_S (0, 0, j)(0, 0, 1)dS \Rightarrow \oint_{\partial S} H_\phi dl = \int_S j_c dS,$$

en donde hemos denotado con j_c la densidad de corriente de conducción que circula por el hilo

muy fino. Desarrollando la igualdad anterior,

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = \int_S j_c dS \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = I_c \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = I_c \Rightarrow H_\phi = \frac{I_c}{2\pi\rho},$$

que en forma vectorial⁶,

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

Teniendo en cuenta que la magnetización viene dada por $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, introduciendo el resultado anterior en esta expresión, obtenemos:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m I_c}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

b) Para calcular las densidades de corriente de magnetización aplicamos directamente la definición.

Densidad de corriente de magnetización volumétrica \mathbf{j}_m .

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\phi) \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\chi_m I_c}{2\pi\rho} + \rho \left(-\frac{\chi_m I_c}{2\pi\rho^2} \right) \right] = 0.$$

Densidad de corriente de magnetización superficial \mathbf{j}_{ms} .

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$$

Como tenemos dos superficies distintas hay que realizar el cálculo para cada una de ellas (una superficie interior del cilindro hueco y otra referente a la parte exterior). Así, consideremos, en un principio, la correspondiente al radio más externo. En tal caso, la normal a la superficie lateral en las coordenadas cilíndricas elegidas es $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, que junto con $\mathbf{M} = (0, M_\phi, 0) = (0, \frac{\chi_m I_c}{2\pi\rho}, 0)$, nos da:

$$\mathbf{j}_{ms1} = -M_\phi \mathbf{u}_z = -\frac{\chi_m I_c}{2\pi b} \mathbf{u}_z.$$

Para el caso de la superficie interior de radio a , se procede del mismo modo, con la diferencia que en este caso la normal viene dada por: $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$. Con todo, se tiene [véase Figura 6.15(a)]:

$$\mathbf{j}_{ms2} = M_\phi \mathbf{u}_z = \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} \mathbf{u}_z.$$

c) Para encontrar el \mathbf{B}_ϕ empleamos el teorema de Ampère referido al campo \mathbf{B} estudiado en el Capítulo 5, según el cual,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

en donde la integral de la derecha se calcula sobre *todas las densidades de corriente*, esto es, la de conducción y las de magnetización [recuérdese que esto no ocurría cuando se utilizaba la forma diferencial, Ecuación (5.1)].

Tomando una curva Γ de radio $\rho > b$ y una superficie plana S orientada con su normal en la dirección del eje OZ positivo [Figura 6.15(b)], se tiene:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S} \right\}.$$

Como \mathbf{j}_m es nula y $\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{j}_{ms1} + \mathbf{j}_{ms2}$, podemos escribir,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms1} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms2} \cdot d\mathbf{S} \right\},$$

⁶Aunque en el enunciado se habla de intensidad I , nosotros ponemos I_c , ya que la corriente que circula por el hilo es de conducción.

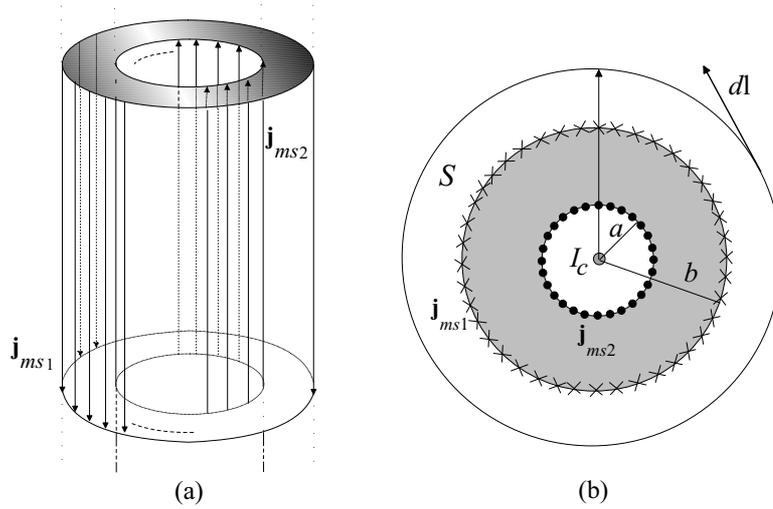


Figura 6.15. (a) Densidades de corriente de magnetización superficial correspondientes a la superficie exterior e interior del cilindro hueco, respectivamente (no aparece el hilo). (b) Sección transversal del sistema. Las aspas se refieren a las densidades de corriente de magnetización superficial entrantes en el dibujo (\mathbf{j}_{ms1}), y los puntos a las salientes (\mathbf{j}_{ms2}).

que, desarrollado queda,

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) &= \mu_0 \left\{ \int_S (0, 0, j_c)(0, 0, 1) dS + \right. \\
 &+ \int_S (0, 0, -\frac{\chi_m I_c}{2\pi b})(0, 0, 1) dS + \int_S (0, 0, \frac{\chi_m I_c}{2\pi a})(0, 0, 1) dS \left. \right\} \\
 &= \mu_0 \left\{ \int_S j_c dS - \int_S \frac{\chi_m I_c}{2\pi b} dS + \int_S \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} dS \right\}.
 \end{aligned}$$

Como hemos explicado en otras ocasiones, la región de integración no tiene por qué coincidir con la superficie S elegida para aplicar el teorema de Ampère. Lo que realmente interviene es la variedad correspondiente a la intersección entre el volumen por donde se extiende la densidad de corriente, y la superficie S (véase la Figura 5.2). Esto hace que la primera integración, referente a la corriente de conducción, se extienda sobre un área que corresponde a la sección perpendicular del hilo, dando como resultado, por lo tanto, I_c . En el caso de las densidades de magnetización el cálculo puede llevarse a cabo de diferentes formas.

En un principio, vamos a intentar dar solución sencilla dejando a un lado el rigor matemático. En este sentido, si analizamos las expresiones donde aparecen \mathbf{j}_{ms1} y \mathbf{j}_{ms2} se observa que, la intersección entre éstas corrientes y S no son realmente superficies, sino *curvas* (Figura 6.16), ya que las densidades de magnetización se extienden por las superficies exterior e interior del cilindro hueco (y no por un volumen). En efecto, la mencionada intersección es, exactamente, un círculo de radio b , para la primera, y otro de radio a para la segunda. Esto representa una dificultad, ya que no es evidente hacer el cálculo de una integral de superficie sobre un dominio *unidimensional*. Sin embargo, de forma intuitiva parece lógico que, al ser el integrando cero en todo punto salvo en los citados círculos, el elemento de área dS efectivo sea equivalente a un elemento de longitud. De este modo se puede escribir,

$$\int_0^{2\pi} B_\phi dl = B_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \mu_0 \left\{ I_c + -\frac{\chi_m I_c}{2\pi b} \int_S dS + \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} \int_S dS \right\},$$

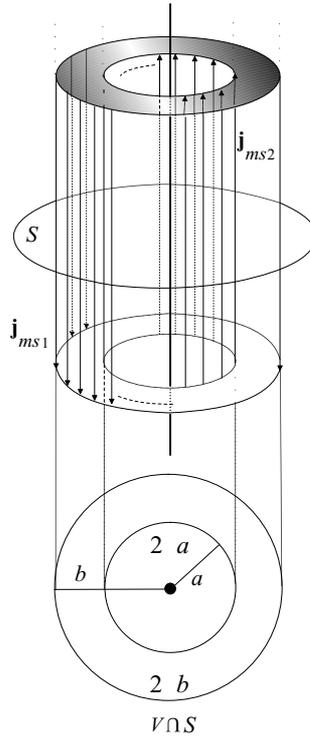


Figura 6.16. La región de integración corresponde a la intersección entre el volumen por donde se extienden las densidades de corriente y la superficie S elegida ($V \cap S$). Obsérvese como, en este caso, el dominio es la superficie de una sección transversal del hilo (para \mathbf{j}_c -punto negro del dibujo), y dos círculos de radios b y a , referentes a \mathbf{j}_{ms2} y \mathbf{j}_{ms1} , respectivamente.

y sabiendo que, por lo antedicho, $\int_S dS$ representa una longitud, se tiene:

$$2\pi\rho B_\phi = \mu_0 \left\{ I_c + -\frac{\chi_m I_c}{2\pi b} 2\pi b + \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} \right\} = \mu_0 I_c,$$

o sea,

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{B} = \frac{I_c}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

A este cálculo realizado se le pueden poner objeciones. En realidad, la forma correcta de llevar a cabo la determinación de integrales como las anteriores, tiene su fundamento en la teoría de distribuciones⁷. Así, desde este punto de vista, las densidades de magnetización superficial pueden expresarse del siguiente modo:

$$\mathbf{j}_{ms1} = j_{ms1} \delta(\rho - b) \mathbf{u}_z \text{ y } \mathbf{j}_{ms2} = j_{ms2} \delta(\rho - a) \mathbf{u}_z,$$

siendo $\delta(\rho - b)$ y $\delta(\rho - a)$, la distribución delta de Dirac. Introduciendo las corrientes en las integrales de antes, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_S j_{ms1} \delta(\rho - b) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z + \int_S j_{ms2} \delta(\rho - a) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z = - \int_0^\infty \frac{\chi_m I_c}{2\pi b} \delta(\rho - b) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi + \\ & + \int_0^\infty \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} \delta(\rho - a) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{\chi_m I_c}{2\pi b} 2\pi b + \frac{\chi_m I_c}{2\pi a} 2\pi a = 0, \end{aligned}$$

⁷ Véase, por ejemplo, Guelfand et Chilov, "Les Distributions", Tome I. Dunod (1972).

resultado idéntico al encontrado mediante el otro procedimiento⁸.

- 6.9** Un cilindro recto muy largo está magnetizado de forma que el vector magnetización tiene la dirección tangencial asociada al cilindro [Figura 6.17(a)]. El radio del cilindro es R , su eje coincide con el eje OZ y el vector magnetización se puede expresar como: $\mathbf{M} = M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right) \mathbf{u}_\phi$, donde M_0 es una constante y ρ es la distancia de un punto al eje. Se pide:
- Las corrientes de magnetización.
 - Calcular B_ϕ y H_ϕ para los puntos interiores y exteriores al cilindro.

Resolución

a) La corriente de magnetización volumétrica viene dada por:

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\phi) \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \right) \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(M_0 \left(\frac{\rho^2}{R} \right) \right) \mathbf{u}_z = \frac{2M_0}{R} \mathbf{u}_z.$$

Respecto de la densidad de magnetización superficial, emplearemos directamente su definición, esto es:

$$\mathbf{j}_{ms} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}.$$

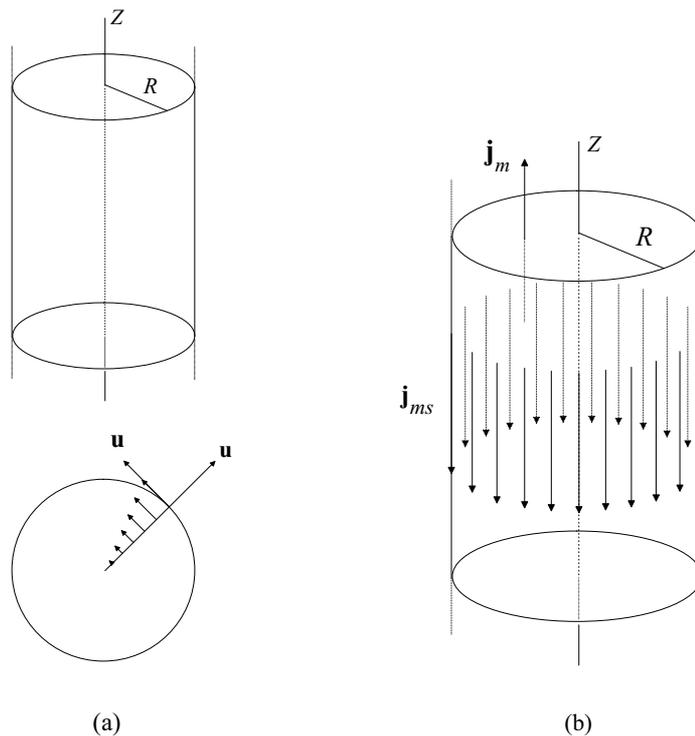


Figura 6.17. (a) Cilindro largo de magnetización $\mathbf{M} = M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right) \mathbf{u}_\phi$. Obsérvese como la magnetización aumenta a medida que nos acercamos a la supeficie. (b) Corrientes de magnetización volumétrica y superficial.

Con el fin de facilitar los cálculos, haremos el producto vectorial anterior utilizando coordenadas cónicas, o sea, $\mathbf{M} = (0, M_\phi, 0) = (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right), 0) = M_0$ (se evalúa en $\rho = R$) y $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, encontrando que [Figura 6.17(b)]:

$$\mathbf{j}_{ms} = -M_0 \mathbf{u}_z.$$

⁸Para comprender mejor esta última forma de operar, véase el final del problema siguiente.

b) Para $\rho < R$

(1) **Primer método**

Para determinar \mathbf{B} a partir de las corrientes utilizamos el teorema 5.5,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

Para poder realizar este cálculo debemos identificar claramente el valor de \mathbf{j} . Como se explicó en la teoría, en la forma integral deben incluirse tanto las corrientes de conducción como las de magnetización. En el presente caso, al estar en un punto interior del cilindro, y no tener corrientes de conducción, sólo va a influir la densidad de corriente de magnetización volumétrica, pudiendo, por lo tanto, escribir:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

Del mismo modo que se analizó en otros problemas donde aparecían corrientes con simetría de translación y rotación (hilo largo, corriente cilíndrica, etc.), para aplicar el teorema de Ampère escogíamos una trayectoria $\Gamma(\partial S)$ circular de radio $\rho < R$ centrada en el eje de revolución de la corriente. Operando del mismo modo como se hizo entonces, pero ahora para $\mathbf{j}_m = \frac{2M_0}{R} \mathbf{u}_z = (0, 0, \frac{2M_0}{R})$, y tomando un elemento $d\mathbf{l}$ en sentido antihorario, se tiene:

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S (0, 0, j_m) d\mathbf{S} \Rightarrow$$

$$\oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) = \mu_0 \int_S (0, 0, j_m)(0, 0, dS) = \int_0^{2\pi} B_\phi dl = \mu_0 \int_S \frac{2M_0}{R} dS.$$

Por la mencionada simetría de revolución, la componente tangencial del campo, en el sistema $\{\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z\}$, debe ser la misma en cualesquiera de los puntos de la curva elegida, por lo cual podemos situar B_ϕ fuera de la integral, obteniendo:

$$B_\phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \mu_0 \frac{2M_0}{R} \int_S dS \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = \frac{2\mu_0 M_0 S}{R} \Rightarrow 2\pi \rho B_\phi = \frac{2\mu_0 M_0 \pi \rho^2}{R} \Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 M_0 \rho}{R},$$

que puesto en forma vectorial,

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{R} \rho \mathbf{u}_\phi.$$

Conocido el campo \mathbf{B} , el cálculo de \mathbf{H} es inmediato. En efecto, empleando la relación fundamental $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, obtenemos:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mu_0 M_0}{R \mu_0} \rho \mathbf{u}_\phi - M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right) \mathbf{u}_\phi = 0.$$

(2) **Segundo método. Determinación de B a partir de M.**

Para desarrollar este apartado de otra forma, tomamos nuevamente la ley de Ampère, pero en vez de expresarla en función de la corriente, lo hacemos en función de la magnetización, es decir:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Aplicando el teorema de Stokes, se encuentra:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

En esta última expresión se relaciona el campo B directamente con la magnetización \mathbf{M} , lo cual es en también útil en nuestro caso, ya que conocemos su valor.

Introduciendo $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\phi = M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) \mathbf{u}_\phi$ en la anterior igualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \int_S (0, M_\phi, 0) \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) = \mu_0 \oint_{\Gamma} (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right), 0)(0, dl, 0) \Rightarrow \\ \oint_{\Gamma} B_\phi dl &= \mu_0 \oint_{\Gamma} M_0 \left(\frac{\rho}{R} \right) dl \Rightarrow \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi = \mu_0 \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \rho}{R} \rho d\phi \Rightarrow \\ B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \frac{M_0 \rho^2}{R} \int_0^{2\pi} d\phi \Rightarrow \\ B_\phi 2\pi \rho &= 2\pi \mu_0 \frac{M_0 \rho^2}{R} \Rightarrow B_\phi = \mu_0 \frac{M_0 \rho}{R}, \end{aligned}$$

obteniendo, por lo tanto, el mismo resultado que por el primer método, esto es

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 M_0}{R} \rho \mathbf{u}_\phi.$$

El campo \mathbf{H} no lo repetimos porque es idéntico a lo hecho en el primer caso.

Para $\rho > R$

(1) Primer método, empleando la densidad de corriente.

Para este caso se procede del mismo modo que lo expuesto hasta ahora, aunque hay que hacer algunas consideraciones. Así, si aplicamos ahora el teorema de Ampère se observa que, al ser el punto exterior al cilindro, influyen las corrientes de magnetización volumétrica y superficial, cosa que no ocurría en el anterior apartado. Ello hace que la integral tome el siguiente aspecto:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \mu_0 I.$$

Teniendo en cuenta los valores de \mathbf{j}_m y \mathbf{j}_{ms} hallados al principio, introduciéndolos en la anterior integral, encontramos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z) \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \left\{ \int_S (0, 0, j_m) \cdot d\mathbf{S} + \int_S (0, 0, j_{ms}) \cdot d\mathbf{S} \right\} \Rightarrow \\ \oint_{\partial S} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) &= \mu_0 \left\{ \int_S (0, 0, j_m)(0, 0, dS) + \int_S (0, 0, j_{ms})(0, 0, dS) \right\} \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi &= \mu_0 \left\{ \int_S \frac{2M_0}{R} dS + \int_S (-M_0) dS \right\}. \end{aligned}$$

Obtenida esta expresión sólo queda calcular las integrales. Al intentar esto nos encontramos con una pequeña dificultad comentada ya en el ejercicio anterior, cual es la referente a $\int_S (-M_0) dS$. Así, aunque el dominio de integración se corresponde, en principio, con la superficie circular S de radio $\rho > R$, la densidad de magnetización \mathbf{j}_{ms} sólo existe por la superficie del cilindro [véase Figura 6.17(b)], por lo que el producto $\mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$ del integrando será distinto de cero allí donde existan, simultáneamente, la densidad \mathbf{j}_{ms} y $d\mathbf{S}$. En definitiva, esto no es más que lo que se ha explicado en el Capítulo 5 en relación al teorema de Ampère. Se aclaró entonces que, la superficie real sobre la que se integra en el cálculo de la intensidad, corresponde a la *intersección* entre el volumen por donde circula la \mathbf{j} y la superficie S elegida. En nuestro caso, si se interseca la superficie cilíndrica (donde existe \mathbf{j}_{ms}), con la superficie matemática $S = \pi \rho^2$, se obtiene un círculo de radio R y longitud $\ell = 2\pi R$ (véase la Figura 6.16 del problema anterior). La razón, por tanto, de que la citada intersección no sea una superficie (como es lo habitual) está en que

\mathbf{j}_{ms} se extiende por una superficie y no por un volumen (como ocurre con \mathbf{j}_m). Tomando esto en consideración, podemos escribir:

$$\begin{aligned} B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} \int_S dS - M_0 \int_S dS \right\} \Rightarrow \\ B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} S - M_0 \ell \right\} = \mu_0 \left\{ \frac{2M_0}{R} \pi R^2 - M_0 2\pi R \right\} \Rightarrow \\ 2\pi \rho B_\phi &= \mu_0 \{ M_0 2\pi R - M_0 2\pi R \} = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\mathbf{B}_\phi = 0.$$

Obsérvese cómo en el caso de la integral de la densidad \mathbf{j}_m , la superficie que interviene πR^2 es también el resultado de la intersección entre el volumen donde se encuentra (cilindro muy largo) con la superficie circular $S = \pi \rho^2$ cuyo contorno Γ pasa por el punto donde se pide calculemos el campo.

Respecto del campo \mathbf{H} , sabiendo que en un punto externo al cilindro la magnetización es nula (vacío), se tiene:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = 0 - 0 = 0.$$

(2) Segundo método, a partir de la magnetización.

El resultado obtenido para los campos puede hallarse de otra manera. Para verlo, reescribamos la ley de Ampère en función de la magnetización,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S} \right\} = \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} + \int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Se trata ahora de aplicar el teorema de Stokes para transformar primera integral del segundo miembro a una integral curvilínea. Esto es inmediato, pero debe entenderse bien la forma de situar la región donde se hace cada integral, lo cual, en este caso, es fácil de equivocar. Para analizar esto, vamos a aclarar cada paso.

Téngase presente, que la región donde tiene que hallarse el campo está fuera del cilindro magnetizado, esto es, en un punto que dista ρ del eje de simetría del cilindro ($\rho > R$). Por esta razón, elegiremos una curva Γ en forma de círculo de radio ρ , y una superficie plana $S = \pi \rho^2$. De este modo, tenemos la geometría básica para aplicar el teorema de Ampère, aunque existen algunos problemas. En efecto, si nos fijamos en el primer miembro, no hay duda de que $\int_0^{2\pi} B_\phi dl$ se determina sobre la curva Γ que se ha escogido. Pero, al convertir $\int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S}$ en una integral curvilínea podemos entender que se extiende a lo largo de la misma curva circular antedicha, ya que es la curva original utilizada para aplicar el teorema, sin embargo esta idea es errónea. La razón de ello se encuentra en que, ésta integral de camino es el resultado de aplicar el teorema de Stokes sobre $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_m$, por lo cual, la trayectoria Γ sobre la que se hace éste cálculo es la relacionada con la frontera de la superficie S real que interviene en $\int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$ y que, como ya sabemos, viene dada por la intersección entre el volumen V_j por donde circula la corriente que corresponda (\mathbf{j}_c , \mathbf{j}_m o \mathbf{j}_{ms}) y la superficie original empleada para la ley de Ampère, esto es, $S_R = V_{j_m} \cap S = \pi R^2$; fuera de esta intersección el producto $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$ es cero, ya sea porque \mathbf{j}_m lo es (como este el presente caso) o porque lo es $d\mathbf{S}$.

En relación con $\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ ocurre parcialmente lo mismo. Así, si tenemos en cuenta la región donde se extiende \mathbf{j}_{ms} veremos que no es la superficie S , sino tan solo por una superficie cilíndrica de radio R , por lo que $(\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ será cero, salvo en la intersección de S con la superficie donde se halla \mathbf{j}_{ms} , es decir, $V_{j_{ms}} \cap S = S_\ell = \ell = 2\pi R$ (longitud de la circunferencia). Obsérvese que, en este caso, dicha intersección S_ℓ es una longitud y no una superficie.

Teniendo todo ello en cuenta, se encuentra la siguiente expresión:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_R} (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_\ell} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S},$$

y empleando el teorema de Stokes,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left\{ \oint_{\Gamma_R} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_\ell} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S} \right\},$$

siendo Γ_R la curva que delimita la superficie S_R . Nótese como, en este caso, $S_\ell = \partial S_R$. Escribiendo ahora las componentes de los campos que intervienen, se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (B_\rho, B_\phi, B_z)(0, dl, 0) &= \mu_0 \left\{ \oint_{\Gamma_R} (0, M_0 \left(\frac{\rho}{R}\right), 0)(0, dl, 0) + \int_{S_\ell} (0, 0, -M_0), (0, 0, dS) \right\} \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} B_\phi dl &= \mu_0 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \rho}{R} dl - \int_{S_\ell} M_0 dS \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la curva Γ_R tiene de radio R , al hacer el cambio a coordenadas polares el elemento diferencial se convierte en $dl = R d\phi$. Asimismo, la magnetización $M_\phi = \left(\frac{M_0 \rho}{R}\right)$ que aparece en el integrando debe particularizarse para $\rho = R$. Con todo ello, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_\phi \rho d\phi &= \mu_0 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{M_0 R}{R} R d\phi - \int_{S_\ell} M_0 dS \right\} \Rightarrow \\ B_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi &= \mu_0 \left\{ M_0 R \int_0^{2\pi} d\phi - M_0 \int_{S_\ell} dS \right\} \Rightarrow \\ 2\pi \rho B_\phi &= \mu_0 \{ 2\pi R M_0 - M_0 2\pi R \} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual $\mathbf{B}_\phi = 0$, obteniendo el mismo resultado que el encontrado por el primer método.

Respecto del campo \mathbf{H}_ϕ , el procedimiento es idéntico a lo visto anteriormente.

En relación al cálculo donde aparece la corriente de magnetización superficial, el procedimiento seguido es sencillo e intuitivo, pero matemáticamente zafio. Como se explicó en otro problema anterior de características similares, la resolución de la integral $\int_S \mathbf{j}_{ms} \cdot d\mathbf{S}$, puede llevarse a cabo directamente a través de la teoría de distribuciones.

Con este fin, tomemos nuevamente la relación anterior en función de la magnetización,

$$\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-M_0) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z.$$

Aquí partimos de la expresión original en donde aparece S y no S_ℓ , ya que mediante esta otra posibilidad de operar no necesitamos dar argumentos geométricos para llegar al resultado. Por otra parte, sabemos que la corriente $(-M_0)\mathbf{u}_z$ está definida sólo sobre el círculo $x^2 + y^2 = R^2$, por lo que puede expresarse mediante la distribución delta de Dirac del siguiente modo:

$$\mathbf{j}_{ms} = -M_0 \delta(\rho - R) \mathbf{u}_z$$

Introduciendo esto en la integral,

$$\int_S (-M_0) \delta(\rho - R) \mathbf{u}_z dS \mathbf{u}_z = - \int_S M_0 \delta(\rho - R) dS$$

y haciendo ahora un cambio de variable a coordenadas polares, dada la simetría de rotación del sistema, se tiene:

$$- \int_0^\rho M_0 \delta(\rho - R) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi$$

La parte radial de esta integral va de cero hasta el radio ρ de la superficie elegida para aplicar la ley de Ampère, aunque sabemos que salvo en $\rho = R$, \mathbf{j}_{ms} es nula. Por esta razón, puede ponerse cualquier otro valor mayor que ρ como límite superior, ya que sigue siendo cierto que el integrando es nulo excepto en el círculo de radio⁹ R . Por todo ello, puede escribirse lo siguiente:

$$-\int_0^{\infty} M_0 \delta(\rho - R) \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = -M_0 R \int_0^{2\pi} d\phi = -2\pi R M_0,$$

que, como puede observarse, es el mismo resultado que el obtenido anteriormente.

Observación: Si se repasa ahora lo hecho para el caso $\rho < R$, se podrá notar como no había tanta complicación a la hora de identificar las curva y superficie que intervenía en $\int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$. La razón es, que al pedirnos el campo B_ϕ en un punto interior al cilindro ($\rho < R$), la intersección del volumen de la corriente \mathbf{j}_m con la superficie circular $S = \pi\rho^2$ es ésta misma área, es decir, $V_{j_m} \cap S = S = \pi\rho^2$. De este modo, al aplicar el teorema de Stokes sobre $\int_S (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{S}$ aparece como curva de integración la misma que el caso de $\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.

- 6.10** Para fabricar un imán permanente se monta el dispositivo de la Figura 6.18. Se hace pasar una corriente hasta saturación y luego se corta dicha corriente. El material 2 es lineal de $\mu_{r2} = 2800$ y el material 1 tiene un ciclo de histéresis de saturación que cuando se representa en los ejes $x = 10^4 \mu_0 H_l$ e $y = B_1$ es, en el segundo cuadrante, una circunferencia centrada en el origen de radio 1 T. Calcular B en el entrehierro.

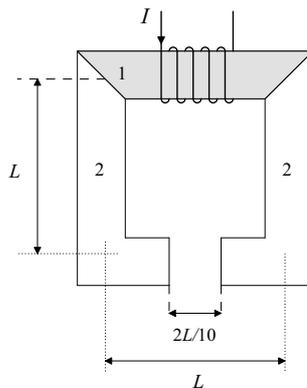


Figura 6.18. Electroimán formado por dos materiales diferentes.

Resolución

Para plantear este ejercicio seguiremos las pautas básicas explicadas en el resumen teórico del capítulo.

1) Para aplicar la ley de Ampère referida al campo \mathbf{H} , se debe elegir una curva adecuada. Teniendo en cuenta que se trata de calcular el campo B medio en el entrehierro, o dicho de otro modo, de obtener un valor aproximado para este campo, la trayectoria Γ que utilizamos es una curva cuadrada a lo largo del electroimán, cuyos lados son paralelos a los lados de las caras del electroimán (Figura 6.19), y que pasan por los puntos del núcleo equidistantes de las superficies planas que lo forman. Además, para aplicar la integral de Ampère $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c$, debemos tomar un sentido para el campo \mathbf{H} y para $d\mathbf{l}$. Esto, como se comentó, es arbitrario, pudiendo elegirse cualquiera. Nosotros, para mayor comodidad, supondremos \mathbf{H} y el $d\mathbf{l}$ tienen el mismo sentido, de forma que el producto escalar que aparece dentro de la integral sea positivo. Haciendo la circulación en sentido horario, obtenemos:

⁹Este paso es fundamental, ya que la distribución δ se define utilizando un dominio infinito; de lo contrario, no es posible aplicar correctamente la teoría. Concretamente, $\int_0^\lambda \delta(\rho - R) f(\rho) d\rho \neq f(R)$, si λ no es infinito.

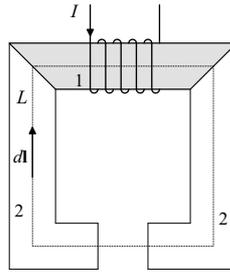


Figura 6.19. Curva Γ elegida para aplicar el teorema de Ampère.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c \Rightarrow H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_e l_e = NI_c \Rightarrow H_1 L + H_2 \left(3L - \frac{2L}{10} \right) + H_e \frac{2L}{10} = NI_c, \quad (6.17)$$

en donde se ha supuesto que H_1 permanece constante en el material 1, sobre la línea elegida, y lo mismo para H_2 y H_e , en el material 2 y entrehierro, respectivamente.

2) Lo siguiente que vamos a utilizar es la ley del flujo, según la cual,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Esta relación, como ya se sabe, permite relacionar los campos magnéticos B en diferentes partes del electroimán, para lo cual es necesario identificar las regiones diferentes de que se compone el mismo. En nuestro caso existen tres partes perfectamente diferenciadas en el sistema: (a) El material 1, (b) el material 2 y, (c) el vacío en el entrehierro. Ello hace que, en principio, haya que suponer tres campos magnéticos distintos en el sistema, correspondientes a cada una de las partes antedichas. Para aplicar correctamente la relación de flujos, elegimos primero una superficie cerrada sencilla que abarque parte del elemento 1 y parte del material 2. Una tal superficie es, por ejemplo, la que coincide con la geometría del núcleo en una de las esquinas [Figura 6.20(a)]. Suponiendo que las líneas de campo B son cerradas y paralelas a las caras del electroimán, y que *no hay flujo disperso*, se tiene:

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0 \Rightarrow \int_{S_1} B_1 dS_1 - \int_{S_2} B_2 dS_2 = 0.$$

Suponemos que el campo magnético B medio en la sección, dentro del material 1, es homogéneo,

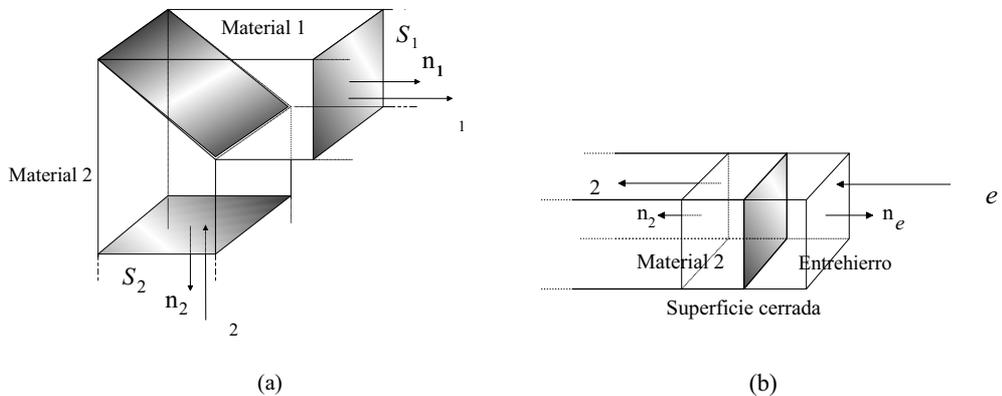


Figura 6.20. (a) Superficie cerrada que engloba al material 1 y 2. (b) Superficie para relacionar los campos en el material 2 y en el entrehierro.

y lo mismo ocurre respecto de B_2 para la parte 2, por lo cual, ambos campos pueden salir del símbolo de integración, obteniendo:

$$B_1 S_1 = B_2 S_2 \Rightarrow B_1 = B_2,$$

ya que las secciones son iguales en ambos materiales.

Con la misma filosofía anterior, vamos a relacionar los campos B_2 y B_e . Para ello, se necesita coger otra superficie cerrada diferente. En este caso tomamos una superficie en forma de cubo que abarca parte del material 2 y parte del entrehierro [Figura 6.20(b)]. Procediendo del mismo modo se encuentra que:

$$B_2 = B_e,$$

de lo cual se deduce que $B_1 = B_2 = B_e$.

De este modo ya tenemos otra ecuación, que junto con el resultado encontrado en (1), podría parecer suficiente información para resolver el ejercicio. No es así ya que no poseemos un número de ecuaciones mínimo para poder despejar el campo B_e .

3) Las ecuaciones materiales del sistema son tres, una para cada parte componente del electroimán. Para el material ferromagnético, el ciclo de histéresis correspondiente; para el material lineal $B_1 = \mu_0 \mu_{r2} H_1$, y en el caso del entrehierro $B_e = \mu_0 H_e$.

Ahora, se debe obtener la recta de funcionamiento. Para ello, tomamos la Ecuación (6.17) e intentamos relacionarla con las ecuaciones materiales pertinentes, de manera que en ella aparezcan sólo campos B y H correspondientes al material ferromagnético. La razón de ello está en que, al ser la relación $B = B(H)$ no lineal para estos materiales, no es fácil introducir dicha relación en la expresión (6.17). Téngase en cuenta que, en numerosas ocasiones, no se conoce la función analítica entre B y H para el ferromagnético, teniendo como dato la gráfica del ciclo de histéresis directamente. Es evidente, en tal caso, que no es posible despejar el campo B en función de H e introducirlo en la igualdad que se obtiene empleando la ley de Ampère para \mathbf{H} . La única posibilidad, si se desea proceder de este modo, consiste en hacer un ajuste para cada parte del ciclo, mediante métodos como, mínimos cuadrados, o diferentes tipos de interpolación. Sin embargo, dicho procedimiento no está exento de dificultades, ya que, como es fácil imaginar, un ajuste preciso del ciclo supone obtener funciones polinómicas de grado superior a dos, generalmente, así como cocientes de funciones polinómicas (dependiendo de qué parte del ciclo se trate), lo cual conlleva una gran complejidad y, en ocasiones, imposibilidad de despejar el B del hierro (por ejemplo, con polinomios de grado superior a cuatro). Por todo ello, es más sencillo manipular los campos H que aparecen en la Ecuación (6.17), referentes al medio lineal (2) y el entrehierro (vacío o aire).

Con todo lo antedicho, vamos a substituir las ecuaciones materiales correspondientes a las partes 1 y del vacío,

$$B_2 = \mu_0 \mu_{r2} H_2 \quad \text{y} \quad B_e = \mu_0 H_e,$$

en la Ecuación (6.17), esto es,

$$H_1 L + \frac{B_2}{\mu_0 \mu_{r2}} \left(3L - \frac{2L}{10} \right) + \frac{B_e}{\mu_0} \frac{2L}{10} = NI_c.$$

Obtenida esta igualdad, da la impresión que se ha hecho un cambio de campos H a B , sin aparente utilidad, ya que seguimos teniendo una ecuación y tres incógnitas (los tres campos que aparecen H_1, B_2 y B_e), sin embargo, la situación es diferente, si se analiza con detalle. Así, al haber introducido los campos B del material lineal y entrehierro, podemos hallar una ecuación donde sólo aparezcan incógnitas del ferromagnético. En efecto, si tomamos el resultado encontrado en el (2), sabemos que los tres campos magnéticos B son iguales en las distintas partes del sistema sobre la línea Γ . Introduciendo esto en la última ecuación, y teniendo en cuenta que la substancia ferromagnética se lleva a saturación, disminuyendo, posteriormente, la intensidad hasta que ésta

se hace nula¹⁰, se tiene:

$$H_1 L + \frac{B_1}{\mu_0 \mu_{r2}} \left(3L - \frac{2L}{10} \right) + \frac{B_1}{\mu_0} \frac{2L}{10} = 0,$$

quedando, por lo tanto, una relación en donde sólo aparecen campos que se refieren al elemento 1. No obstante, no es posible, todavía, resolver la cuestión fundamental del problema, esto es, el valor de B_e , pues lo que se ha encontrado es una ecuación con dos incógnitas. Para poder averiguar el valor de H_1 y B_1 , necesitamos otra relación más. Esta ecuación es la correspondiente al ciclo de histéresis (dato). En este caso, sí sabemos la expresión analítica para la parte del ciclo que nos interesa, la cual corresponde a un arco de circunferencia para el segundo cuadrante. De este modo, la función buscada es:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

que traducido a los campos, toma el aspecto siguiente:

$$10^8 \mu_0^2 H_1^2 + B_1^2 = 1.$$

Con este último dato, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, pudiendo resolver el sistema sin dificultad (Figura 6.21). La solución es, en definitiva, la intersección entre el ciclo de histéresis y la recta de funcionamiento, es decir:

$$\begin{aligned} H_1 L + \frac{B_1}{2800 \mu_0} \left(3L - \frac{2L}{10} \right) + \frac{B_1}{\mu_0} \frac{2L}{10} &= 0 \\ 10^8 \mu_0^2 H_1^2 + B_1^2 &= 1. \end{aligned}$$

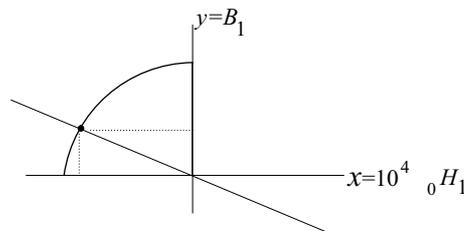


Figura 6.21. Intersección entre el ciclo de histéresis y la recta de funcionamiento para $I = 0$. En realidad el punto de intersección está muy cercano al eje OY ($H \approx -79,6 \text{ A/m}$).

Despejando H_1 de la primera ecuación del sistema anterior, e introduciéndolo en la segunda, obtenemos:

$$(10^8 \times 0,2^2 + 1)B_1 = 1 \Rightarrow B_1 = 4,9 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

Este es el campo B_1 , es decir, el referente al material ferromagnético, y no el del entrehierro que es lo que se pide. Si embargo, como ya se ha demostrado el segundo apartado, los campos B son idénticos en las tres partes que componen el electroimán, por lo que concluimos que el campo en el entrehierro toma el mismo valor, esto es:

$$B_e = 4,9 \times 10^{-4} \text{ T}.$$

¹⁰Obsérvese como al ser nula la fuerza magnetomotriz, la recta de funcionamiento pasa por el origen de coordenadas (véase Figura 6.3)

- 6.11** El electroimán de la Figura 6.22 está formado por un material ferromagnético de longitud media l_h y un entrehierro de longitud l_e . El número de vueltas del devanado es 10000. Se hace pasar una corriente suficiente para saturar el material y, seguidamente, se disminuye lentamente la intensidad. El ciclo de histéresis puede ajustarse a la ecuación

$$3,9 \times 10^{-7} H^2 + 1,56 B^2 - 7,8 \times 10^{-4} HB = 1,$$

viniendo expresados H y B en unidades del sistema internacional. Se pide:

- El valor de la intensidad si se quiere conseguir en el entrehierro un campo magnético idéntico al remanente.
- El valor de los vectores B y H en el entrehierro si se sigue disminuyendo la intensidad hasta que ésta se anule.
- Calcular el vector M en el hierro, en las condiciones del apartado anterior.

Datos: $l_h = 0,5 \text{ m}$; $l_e = 1 \text{ cm}$

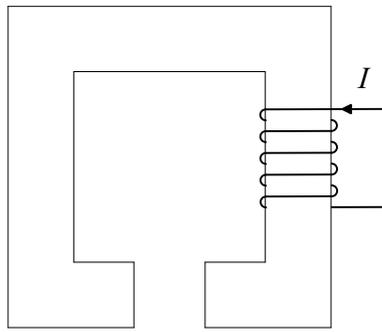


Figura 6.22. Electroimán.

Resolución

a) Lo primero que debe calcularse es el valor del campo magnético remanente. Para ello, se da como dato que el campo magnético en el entrehierro es el mismo que el remanente del material, por lo cual se verifica que, $B_h = B_r \Rightarrow H_h = 0$, que introducido en la ecuación analítica del ciclo de histéresis, proporciona el campo B que se desea obtener en el hierro y, en nuestro caso, también en el entrehierro: $H = 0$ y $3,9 \times 10^{-7} H^2 + 1,56 B^2 - 7,8 \times 10^{-4} HB = 1 \Rightarrow 1,56 B^2 = 1 \Rightarrow B = \pm 0,8 \text{ T}$. De estos dos valores del campo sólo es aceptable 0,8, ya que al haber llevado a saturación el material, si se disminuye la intensidad, el ciclo se recorre por la segunda curva de imanación, lo cual implica que el campo remanente al que se refiere el enunciado es el positivo. Una vez conocido el campo, planteamos la ley de Ampère para el campo H [Figura 6.23(a)], con el fin de relacionar los campos en el material y el entrehierro con la intensidad, esto es:

$$H_h l_h + H_e l_e = NI.$$

Por otra parte, tomando, como se ha mostrado en el problema precedente, una superficie cerrada que englobe parte del ferromagnético y parte del entrehierro, se deduce que $B_h = B_e$, es decir, los campos magnéticos en el material y entrehierro son iguales (las secciones son las mismas y no hay flujo disperso).

Por último, las ecuaciones materiales que intervienen son, por una parte $B_e = \mu_0 H_e$ y el ciclo de histéresis correspondiente al núcleo.

Con todo ello, la recta de funcionamiento que se obtiene es la siguiente:

$$H_h l_h + \frac{B_e}{\mu_0} l_e = NI,$$

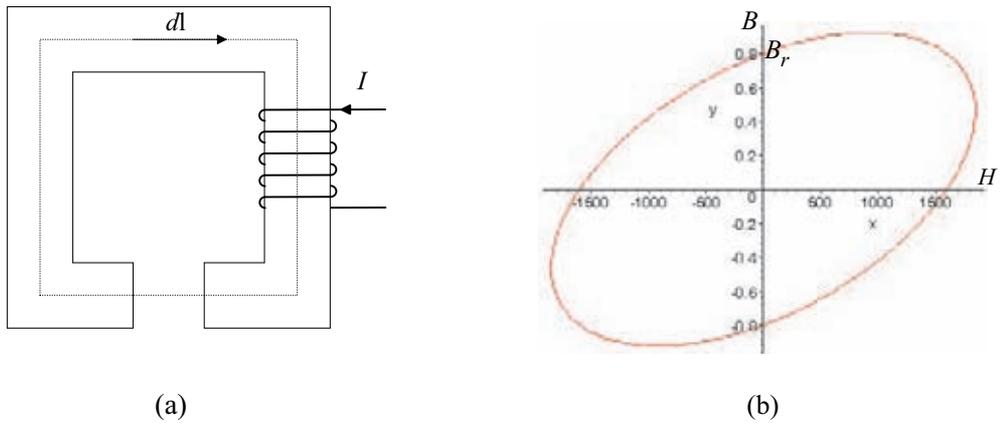


Figura 6.23. (a) Electroimán. Curva Γ , superficie S . El vector $d\mathbf{l}$ se ha elegido de forma que la intensidad tenga signo positivo. (b) Ciclo de histéresis.

y teniendo en cuenta, como hemos visto, que los campos son iguales, se encuentra

$$H_h l_h + \frac{B_h}{\mu_0} l_e = NI, \tag{6.18}$$

relación que posee únicamente campos que se refieren al material. Para averiguar la intensidad para la cual se alcanza el campo B_r en el entrehierro, basta substituir los valores (H, B) del punto del ciclo de histéresis donde nos encontramos [Figura 6.23(b)], o sea, $(0, B_r) = (0; 0,8)$. Substituyendo estos datos en la Ecuación (6.18), se tiene

$$I = \frac{B_h l_e}{\mu_0 N} = 0,63 \text{ A} .$$

b) Cuando se reduce la intensidad hasta que la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) se hace nula, se encuentra una recta de funcionamiento como la siguiente (Figura 6.24):

$$H_h l_h + \frac{B_h}{\mu_0} l_e = NI = 0 \Rightarrow B_h = -\frac{\mu_0 l_h}{l_e} H_h,$$

la cual no tiene ordenada en el origen. Para poder calcular B_e y H_e , hay que obtener, primeramente, el campo en el material, o sea B_h , ya que, conocido éste, se encuentra fácilmente el B_e (ley del

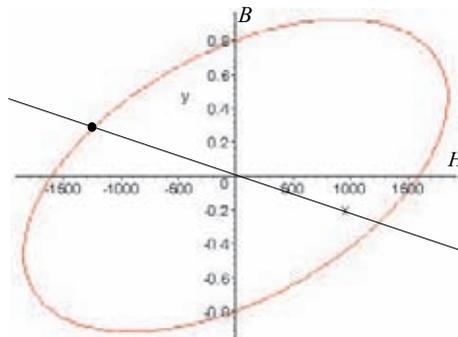


Figura 6.24. El punto de funcionamiento es el correspondiente a la intersección entre el ciclo de histéresis y la recta de funcionamiento. Obsérvese como dicha recta pasa por el origen de coordenadas.

flujo) y, a partir del mismo el H_e mediante $B_e = \mu_0 H_e$. Con esto, la cuestión fundamental es, por lo tanto, el campo B en el material, lo cual es posible empleando la recta de funcionamiento y la ecuación material del ferromagnético, esto es, el ciclo de histéresis. Introduciendo $B_h = -\frac{\mu_0 l_h}{l_e} H_h$ en la ecuación analítica de dicho ciclo (intersección), se tiene:

$$3,9 \times 10^{-7} H_h^2 + 1,56 \left(\frac{\mu_0 l_h}{l_e} H_h \right)^2 + 7,8 \times 10^{-4} \left(\frac{\mu_0 l_h}{l_e} H_h \right) H_h = 1 \Rightarrow$$

$$(H_h)^2 \left[3,9 \times 10^{-7} + 1,56 \left(\frac{\mu_0 l_h}{l_e} \right)^2 + 7,8 \times 10^{-4} \left(\frac{\mu_0 l_h}{l_e} \right) \right] = 1,$$

y haciendo uso de los valores numéricos,

$$H_h = \mp 1591,2 \text{ Am}^{-1}$$

De estos dos valores, sólo uno es el que corresponde a las especificaciones del problema. Así, el campo correcto es $H_h = -1591,2 \text{ Am}^{-1}$, ya que al haber saturado previamente el ferromagnético, y después haber disminuido la intensidad hasta hacerse nula, el punto de funcionamiento tiene que encontrarse en el segundo cuadrante y no en el cuarto, como correspondería a $H_h = 1591,2 \text{ Am}^{-1}$ (para $I = 0$). Obtenido esto, el B_h es inmediato considerando la recta de funcionamiento, esto es:

$$B_h = -\frac{\mu_0 l_h}{l_e} H_h = 0,09 \text{ T}.$$

Para encontrar el campo B en el entrehierro utilizamos el resultado hallado anteriormente por medio de la ley del flujo,

$$B_h = B_e = 0,09 \text{ T},$$

y, con la ecuación $B_e = \mu_0 H_e$,

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = 71619,7 \text{ A/m}.$$

c) La magnetización se halla mediante la ecuación fundamental:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \Rightarrow \mathbf{M} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \right) = 76438,8 \text{ A/m}.$$

Si dibujamos en el electroimán los campos que existen cuando suprimimos la corriente, se obtiene una situación como la mostrada en la Figura 6.25. Como puede observarse, el campo \mathbf{B} lo forman líneas cerradas, y \mathbf{M} sólo existe dentro del hierro, dado que en el entrehierro no hay materia magnetizable. El caso del campo magnético \mathbf{H} es algo distinto; éste tiene un sentido dentro del material y otro diferente en el entrehierro. Como ya se explicó en los Ejercicios 2.3 y 2.4, ello es debido a la discontinuidad del vector \mathbf{M} , lo cual hace que $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$ en las superficies donde acaba el material, provocando el nacimiento o muerte de líneas de \mathbf{H} según sea el signo de la divergencia. El campo \mathbf{H}_h que aparece dentro del material es el *campo desmagnetizante* del que se habló, y tiene sentido opuesto al del campo magnético \mathbf{B} . Obsérvese como en ausencia de intensidad por el devanado se tiene un campo magnético en el entrehierro, constituyendo así el núcleo un *imán permanente*.

Observación: El ciclo de histéresis de este problema tiene una forma que difiere de la habitual, sin embargo, sí hay materiales que poseen estas características. Concretamente, algunos aceros se comportan de este modo frente a una excitación H .

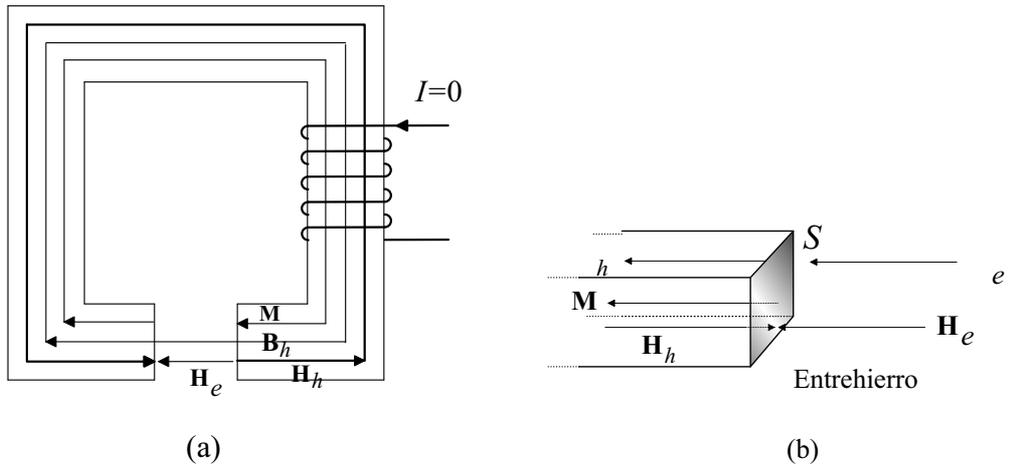


Figura 6.25. (a) Esquema de los campos B , M y H , dentro y fuera del material. Se ha dibujado una línea sólo para cada uno de ellos con el fin de simplificar. (b) Aquí se representan los campos anteriores en la zona izquierda donde aparece el hierro y el entrehierro. Obsérvese como en la sección S (sombreada), $\nabla \cdot \mathbf{M} > 0$, de lo cual se infiere que $\nabla \cdot \mathbf{H} < 0$, muriendo, por tanto, líneas de \mathbf{H} (en la superficie derecha del entrehierro la situación de estos campos es la contraria).

6.12 Se dispone de un toroide circular de radio medio R_m . Dicho toroide está compuesto de un material magnético *lineal*, cuya permeabilidad relativa es μ_r , y un entrehierro de longitud e . Se han devanado en el material N espiras por las que circula una intensidad I . Si posteriormente se duplica la longitud del entrehierro sin variar el número de espiras, a) determinar el nuevo valor de la intensidad para mantener el mismo valor del campo B en el entrehierro. b) Indicar los puntos en los que $\nabla \cdot \vec{H}$ y $\nabla \times \vec{H}$ son distintos de cero. Si se corta la corriente, c) determinar el valor de B en el entrehierro.

Resolución

a) Plantearemos, primeramente, el procedimiento general ya explicado y, posteriormente, lo particularizaremos para los dos toroides de distinto entrehierro.

Toroide 1: Entrehierro e

- (1) $H_h l_h + H_e l_e = NI$.
- (2) $\Phi_h = \Phi_e \Rightarrow B_h = B_e$.
- (3) $B_h = \mu_0 \mu_r H_h$; $B_e = \mu_0 H_e$.

Sustituyendo H_e por $\frac{B_e}{\mu_0}$ en (1), se tiene

$$H_h(L - e) + H_e l_e = NI \Rightarrow H_h(L - e) + \frac{B_e e}{\mu_0} = NI,$$

y haciendo uso de la igualdad de flujos (2), podemos reemplazar B_e por B_h ,

$$H_h(L - e) + \frac{B_h e}{\mu_0} = NI \Rightarrow B_h = \frac{\mu_0 NI}{e} - \frac{\mu_0(L - e)}{e} H_h, \tag{6.19}$$

obteniendo así la recta de funcionamiento r (véase Figura 6.26). Hasta aquí la forma de operar es idéntica a la vista en otros ejercicios referentes a circuitos magnéticos, si bien, en el caso que nos ocupa, existe una diferencia. Esta se debe a que, al estar formado el toroide por una substancia *lineal*, la ecuación material es la recta $B_h = \mu_0 \mu_r H_h$, por lo que la intersección entre la recta de funcionamiento y dicha ecuación es inmediata y sencilla, cosa que no ocurriría cuando el núcleo exhibía histéresis. Por todo ello, para hallar el punto de funcionamiento basta introducir en la

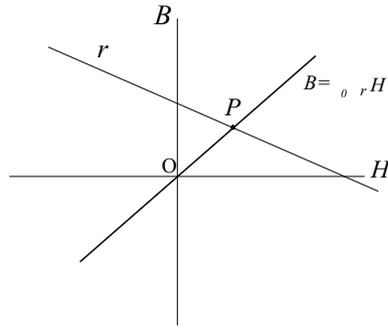


Figura 6.26. El punto P corresponde a la intersección entre la recta de funcionamiento y la ecuación del material que forma el toro.

Ecuación (6.19) el valor de H_h de la ecuación (3) para el material, y despejar B_h

$$\frac{B_h(L - e)}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_h e}{\mu_0} = NI \Rightarrow B_h = \frac{\mu_0 NI}{\left(\frac{L - e}{\mu_r} + e\right)}. \tag{6.20}$$

Esta expresión proporciona el campo magnético B en la substancia cuando el entrehierro es e .

Toroide: Entrehierro 2e

Denotando con primas ($'$) los nuevos campos y longitudes, y procediendo de forma análoga al caso anterior, se encuentra:

$$H'_h l'_h + H'_e l'_e = NI' \Rightarrow H'_h(L - 2e) + H'_e 2e = NI' \Rightarrow H'_h(L - 2e) + \frac{B'_e 2e}{\mu_0} = NI' \Rightarrow$$

$$\frac{B'_h(L - 2e)}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B'_h 2e}{\mu_0} = NI' \Rightarrow B'_h = \frac{\mu_0 NI'}{\left(\frac{L - 2e}{\mu_r} + 2e\right)},$$

siendo B'_h el campo magnético en el material cuando se duplica el entrehierro.

Por la ley del flujo (2) hemos obtenido que $B_h = B_e$ y, del mismo modo $B'_h = B'_e$, para el segundo caso. Al tener el mismo valor del campo en el entrehierro para ambas situaciones quiere decir que, $B_h = B'_h$. Igualando, por lo tanto, los campos B_h encontrados, se tiene:

$$\frac{\mu_0 NI}{\left(\frac{L - e}{\mu_r} + e\right)} = \frac{\mu_0 NI'}{\left(\frac{L - 2e}{\mu_r} + 2e\right)} \Rightarrow I' = \frac{(L - 2e) + 2e\mu_r}{(L - e) + e\mu_r} I,$$

siendo L la longitud media del toroide. Introduciendo su valor en la expresión anterior, obtenemos:

$$I' = \frac{(2\pi R_m - 2e) + 2e\mu_r}{(2\pi R_m - e) + e\mu_r} I.$$

b) Tal y como se estudió en la teoría [apartado 6.3, Ecuación (6.10)] y en el problema 6.3, $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$ allí donde $\nabla \cdot \mathbf{M} \neq 0$. Al suponer la magnetización del toroide homogénea, los puntos en donde se aprecia una variación de la magnetización \mathbf{M} son los correspondientes al principio y final del hierro, esto es, donde comienza y termina el entrehierro (se pasa de tener $\mathbf{M} \neq 0$ a $\mathbf{M} = 0$).

En lo referente a $\nabla \times \mathbf{H}$, será distinto de cero en los lugares donde exista densidad de corriente de conducción, según la Ecuación (6.9). Ello se cumple sólo en las N espiras que forman el devanado, y por las que circula una intensidad de corriente libre I .

(c) Cuando se anula la intensidad, para el caso de tener un entrehierro e , se procede del mismo modo que lo hecho hasta ahora, pero se introduce $I = 0$, obteniendo

$$H_h(L - e) + H_e l_e = NI \Rightarrow \frac{B_h(L - e)}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_h e}{\mu_0} = NI \Rightarrow$$

$$B_h \left(\frac{(L - e)}{\mu_0 \mu_r} + \frac{e}{\mu_0} \right) = 0 \Rightarrow B_h = 0.$$

Este resultado es lógico teniendo en cuenta que el material del núcleo es paramagnético y, por lo tanto, lineal. En efecto, si analizamos recta de funcionamiento observa que, de forma genérica, tiene una ordenada en el origen dada por $\frac{\mu_0 NI}{e}$ y una pendiente negativa $-\frac{\mu_0(L - e)}{e}$. Para obtener el punto de funcionamiento necesitamos calcular la intersección de dicha recta con la ecuación material que relaciona B_h con H_h del material, esto es $B_h = \mu_0 \mu_r H_h$ (otra recta que pasa por el origen). En nuestro caso $I = 0$, lo cual hace que $B_h = -\frac{\mu_0(L - e)}{e}$, o sea, una recta que pasa por el origen de coordenadas del sistema OHB , por lo que su intersección con la antedicha ecuación del paramagnético $B_h = B_h(H_h)$ da como solución el punto $(0, 0)$.

- 6.13** El sistema de la Figura 6.27 consta de un conductor cilíndrico muy largo con permeabilidad relativa μ_r y radio R_1 y de un solenoide recto también muy largo concéntrico con él. El radio del solenoide es R_2 y su número de espiras por unidad de longitud n . Por el conductor circula una densidad de corriente homogénea $\mathbf{j} = j\mathbf{u}_z$ y por el solenoide una intensidad I . En estas condiciones, calcular:
- El campo \mathbf{B} en las regiones 1, 2 y 3 de la figura.
 - Un dibujo de cada componente del campo \mathbf{B} en función de su distancia al eje z .
- Datos numéricos: $\mu_r=30$; $R_1=1$ cm; $R_2=3$ cm; $n=1000$ m⁻¹; $j=4000$ Am⁻²; $I=1$ A.

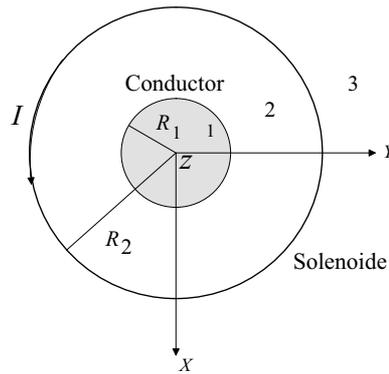


Figura 6.27. Conductor cilíndrico de radio R_1 concéntrico con un solenoide de radio R_2 .

Resolución

a) Para resolver este ejercicio, distinguiremos, desde el principio, las tres regiones en las que se pide el campo magnético.

Región 1 ($0 < \rho < R_1$)

Con la idea de utilizar el teorema de Ampère para el cálculo del campo \mathbf{H} de la corriente cilíndrica, tomemos $\mathbf{H} = (H_\rho, H_\phi, H_z)$ y $d\mathbf{l} = dl \mathbf{u}_\phi = (0, dl, 0)$, sobre una curva circular de radio ρ centrada en el origen de coordenadas. Si recorremos la curva Γ_1 (∂S_1) en sentido antihorario, la normal que orienta la superficie cuya delimitación es Γ_1 es $\mathbf{n}_1 = \mathbf{u}_z$ y $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{u}_z = (0, 0, 1)dS_1$. Substituyendo todos estos valores en la Ecuación (6.11), se tiene:

$$\oint_{\partial S_1} (H_\rho, H_\phi, H_z)(0, dl, 0) = \int_{S_1} (0, 0, j)(0, 0, 1)dS_1 \Rightarrow \oint_{\partial S_1} H_\phi dl = \int_{S_1} j_c dS_1.$$

Debido a la simetría de rotación del sistema en torno al eje OZ , la componente H_ϕ debe ser la misma en cualquier punto de la curva elegida, por lo que podemos sacarla del integrando, encontrando que,

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = j_c \int_{S_1} dS_1 \Rightarrow 2\pi \rho H_\phi = j_c S_1 \Rightarrow 2\pi \rho H_\phi = j_c \pi \rho^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c \rho}{2},$$

o sea,

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi,$$

y al ser el conductor un material magnéticamente lineal de permeabilidad relativa μ_r , el campo B viene dado por

$$\mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 \mu_r j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi.$$

Para el solenoide muy largo, en esta región, empleando la Ecuación (5.41), se encuentra,

$$\mathbf{B}_s = \mu_0 \mu_r n I \mathbf{u}_z.$$

Con todo ello, el campo resultante es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu_r j_c \rho}{2} \mathbf{u}_\phi + \mu_0 \mu_r n I \mathbf{u}_z,$$

y con los datos numéricos del ejercicio, da

$$\mathbf{B} = 7,5 \times 10^{-2} \rho \mathbf{u}_\phi + 3,7 \times 10^{-2} \mathbf{u}_z .$$

Región 2 ($R_1 < \rho < R_2$)

Considerando ahora una curva Γ_2 similar a la del apartado anterior, pero de radio $\rho < R_2$, y procediendo de igual modo, se tiene [Figura 6.28(a)]:

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{S_2} j_c dS_2 = j_c \int_{S_c} dS,$$

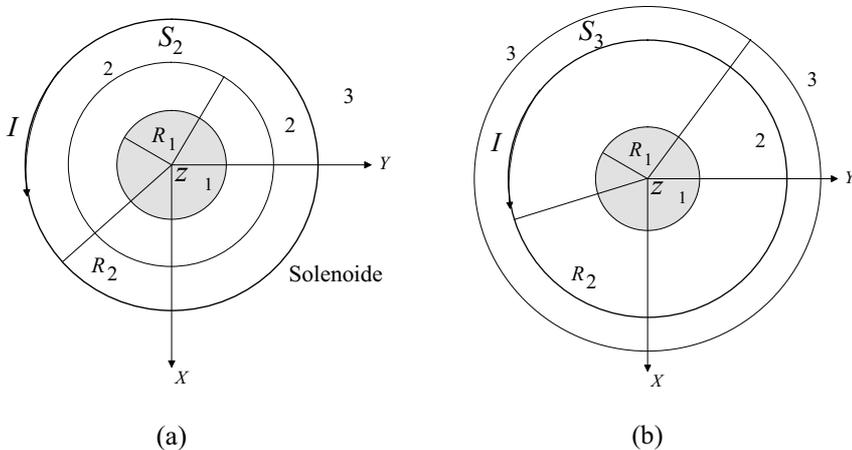


Figura 6.28. (a) Curva circular Γ_2 de radio $\rho < R_2$. (b) Curva Γ_3 de radio $\rho > R_2$. Obsérvese en ambos casos como $\int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_c} \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S}$, en donde $S_c = \pi R_1^2$ es la superficie que representa una sección del conductor, ya que \mathbf{j}_c es nula fuera de S_c .

en donde S_c representa la superficie de la sección del conductor de radio R_1 . Como puede observarse, la superficie efectiva que aparece en la integral referente a la intensidad no es la superficie S_2 considerada originalmente, sino, como ya se ha visto en otras ocasiones, la que corresponde a la intersección de dicha superficie S_2 con el volumen V_j de la corriente, o sea, $S_c = \pi R_1^2$. Despejando H_ϕ de la relación anterior, encontramos

$$2\pi\rho H_\phi = j_c S_c \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c \pi R_1^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho}.$$

Escribiendo este valor en forma vectorial, y empleando la relación $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, obtenemos para el conductor

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi \Rightarrow \mathbf{B}_\phi = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

El campo H_s creado por el solenoide es idéntico al encontrado en el caso anterior, esto es, $H_s = nI\mathbf{u}_z$, viniendo el campo magnético B dado por: $\mathbf{B}_s = \mu_0 nI\mathbf{u}_z$, y el campo resultante en esta región,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi + \mu_0 nI\mathbf{u}_z.$$

Introduciendo ahora los datos del ejercicio, tenemos:

$$\mathbf{B} = \frac{2,5 \times 10^{-7}}{\rho} \mathbf{u}_\phi + 1,2 \times 10^{-3} \mathbf{u}_z.$$

Región 3 ($\rho > R_2$)

Consideremos, primeramente, el campo creado por el conductor cilíndrico. Para ello, se emplea la ley de Ampère para H exactamente igual que se ha hecho para ($R_1 < \rho < R_2$), con la única diferencia que, en este caso, la superficie S_3 corresponde al radio $\rho > R_2$ [curva Γ_3 , Figura 6.28(b)],

$$H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = \int_{S_2} j_c dS_2 = j_c \int_{S_c} dS_c \Rightarrow$$

$$2\pi\rho H_\phi = j_c S_c \Rightarrow 2\pi\rho H_\phi = j_c \pi R_1^2 \Rightarrow H_\phi = \frac{j_c R_1^2}{2\rho},$$

en donde con S_c hemos vuelto a denotar la sección del conductor. Obsérvese cómo, formalmente, la expresión hallada es idéntica a la del caso anterior.

Respecto del solenoide, no es necesario realizar ningún cálculo, pues, como se sabe del tema anterior (Problema Propuesto 5.23), el campo magnético creado por una bobina de longitud muy grande, en su exterior, es cero. Por todo ello, concluimos que el campo total en esta tercera región es:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_c R_1^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi,$$

y numéricamente,

$$\mathbf{B} = \frac{2,5 \times 10^{-7}}{\rho} \mathbf{u}_\phi.$$

b) Las gráficas correspondientes a cada componente del campo \mathbf{B} , son las de la Figura 6.29.

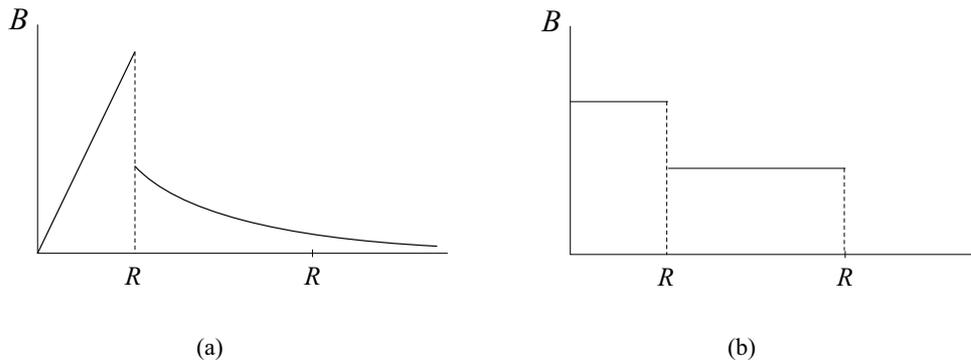


Figura 6.29. (a) Gráfica $B_\phi = B_\phi(\rho)$. (b) Representación de $B_z = B_z(\rho)$.

6.14 El sistema de la Figura 6.30 está formado por un núcleo ferromagnético virgen, de sección constante, con un entrehierro de 1 cm y dos arrollamientos de $N_1=10000$ y $N_2 = 5000$ espiras, respectivamente. El ciclo de histéresis del material se muestra en el dibujo, pudiendo ajustarse la curva de primera imanación a la función $B = 6,9 \times 10^{-9} H^2$. Si por el primer devanado circula una intensidad $I_1 = 2$ A, calcular:

- La intensidad I_2 y el sentido de la corriente que debe circular por el arrollamiento de N_2 espiras para saturar el material.
- El campo H en el material y en el entrehierro cuando una vez saturado el material la f.m.m. se hace nula.

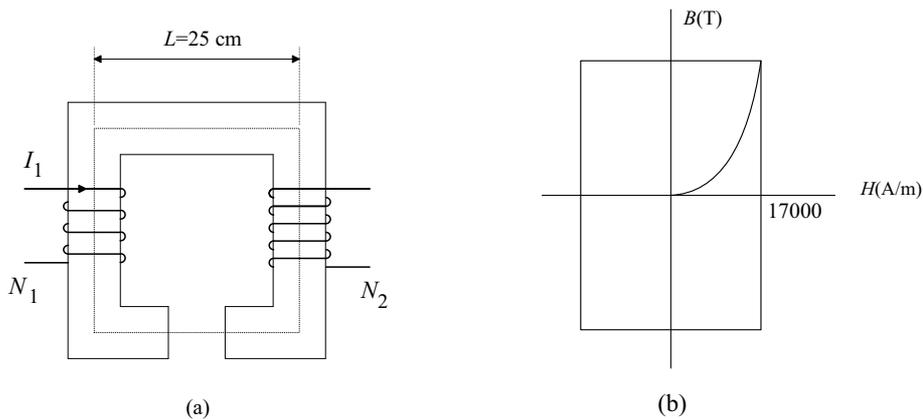


Figura 6.30. Electroimán formado por un núcleo ferromagnético y dos carretes.

Resolución

a) Considerando la ley de Ampère, la relación para los flujos y las ecuaciones materiales, como hemos estado haciendo en problemas anteriores, se puede escribir:

1) $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c \Rightarrow H_h l_h + H_e l_e = N_1 I_1 + N_2 I_2$. Aquí se ha elegido la curva media mostrada en la Figura 6.30, y un elemento $d\mathbf{l}$ en el sentido de las agujas del reloj. De este modo, la normal a la superficie es entrante según el dibujo. Además, para determinar la f.m.m. se ha asignado un sentido arbitrario (hacia dentro de la superficie) a la densidad de corriente \mathbf{j}_2 que circula por el devanado de N_2 espiras, ya que no se da, en principio, información sobre ella. Esto no es un problema debido a que, si no se ha elegido la \mathbf{j}_2 correctamente, el resultado final para la intensidad I_2 aparecerá con el signo contrario al supuesto.

$$2) \Phi_h = \Phi_e$$

3) Para el entrehierro $B_e = \mu_0 H_e$, y para el núcleo ferromagnético la relación $B = \mu(H)H$ viene dada por el ciclo de histéresis, cuya gráfica se da en el enunciado.

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, la recta de funcionamiento viene dada por

$$H_h l_h + \frac{B_e}{\mu_0} l_e = N_1 I_1 + N_2 I_2 \Rightarrow H_h l_h + \frac{B_h}{\mu_0} l_e = N_1 I_1 + N_2 I_2.$$

El punto de saturación del material ferromagnético se encuentra en la esquina superior derecha. Los valores de H y B en dicho punto se pueden obtener a partir de la curva de primera imanación. Así, en saturación $H_h = 17000 \text{ Am}^{-1}$, según puede verse en la gráfica, por lo que el campo magnético B_h toma el valor, $B_h = 6,9 \times 10^{-9} H_h^2 = 6,9 \times 10^{-9} (17000)^2 = 2 \text{ T}$. De este modo, conocido el B_h sabemos exactamente el punto (H, B) del ciclo en el que nos encontramos. Para hallar la intensidad basta llevar estos valores a la recta de funcionamiento, dado que este punto del ciclo debe cumplir también la ecuación de dicha recta. Por todo ello, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} H_h l_h + \frac{B_h}{\mu_0} l_e &= N_1 I_1 + N_2 I_2 \\ B_h &= 2. \end{aligned}$$

Introduciendo los datos del ejercicio, se obtiene:

$$I_2 = 2,5 \text{ A} .$$

Este resultado indica, al haber dado una intensidad positiva, que el sentido que se ha elegido al principio del problema para la intensidad es el correcto, esto es, una densidad de corriente entrante en el dibujo. De haber tomado el sentido inverso (saliente), habríamos encontrado una $I_2 = -2,5 \text{ A}$, de lo cual se concluiría que el sentido verdadero para la \mathbf{j} sería el opuesto, obteniendo, del mismo modo, que la corriente entra en la superficie. Esto muestra que, físicamente, el sistema evoluciona de forma única (en nuestro caso la intensidad), pudiendo variar sólo el resultado numérico (signo de I_2), el cual debe interpretarse siempre en función de las hipótesis realizadas en el problema (sentido elegido para \mathbf{j}_2).

b) Cuando la intensidad se hace nula, y no se varían las condiciones del ejercicio, la recta de funcionamiento tiene una ordenada en el origen igual a cero, manteniendo su pendiente por lo que el sistema ya no está en el punto $(H, B) = (17000, 2)$ del apartado anterior. Para calcular el campo H_h , debemos ver, por lo tanto, en qué parte del ciclo de histéresis se encuentra el sistema. Para ello debe tenerse en cuenta la historia del material, lo cual es posible analizando a qué campos ha sido sometido el mismo. En este sentido, el núcleo ha sido llevado previamente a saturación, por lo que, al disminuir la magnitud de la intensidad, manteniendo su signo, hasta hacerla cero, debemos haber continuado por la segunda curva de imanación (según lo hemos denominado en la introducción teórica). Ello implica que, para ver cuál es el H y B , en esta situación, hay resolver el sistema formado por la recta de funcionamiento (con $I = 0$) y el ciclo de histéresis. El problema que surge cuando se quiere hacer esto es que, como puede observarse, la segunda curva del ciclo está formada por dos semirrectas perpendiculares, por lo que tendremos que resolver dos sistemas de ecuaciones diferentes (cada uno con una de estas dos rectas), ya que no sabemos a cuál de las dos intersecta la recta de funcionamiento (véase Figura 6.31). Tomemos primero, por ejemplo, la recta paralela al eje OB . En tal caso, las ecuaciones que se obtienen son las siguientes:

$$\begin{aligned} H_h l_h + \frac{B_h}{\mu_0} l_e &= 0 \\ H_h &= -17000 , \end{aligned}$$

cuya solución es: $H_h = -17000 \text{ Am}^{-1}$ y $B_h = 2,1 \text{ T}$. Evidentemente, este resultado no es válido, ya que el punto obtenido está fuera del ciclo, no cumpliendo su ecuación. La otra posibilidad que

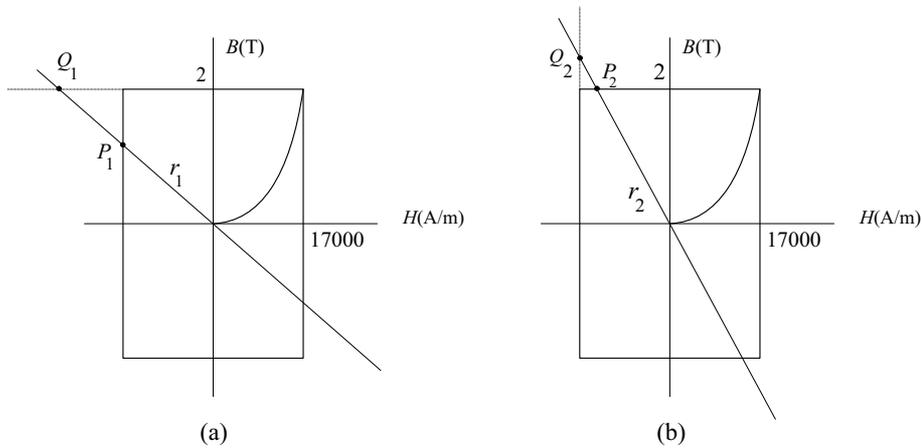


Figura 6.31. Al calcular la intersección de la recta de funcionamiento con el ciclo de histéresis, pueden darse dos situaciones diferentes: (a) Que la recta sea r_1 . En tal caso, ésta corta a la recta $H_h = -17000$ en punto P_1 , al cual le correspondería un valor del campo B_h dentro del ciclo. Si en este caso se hiciera la intersección con la recta $B_h = 2$, la solución sería el punto Q_1 , quedando fuera de la gráfica. (b) Que la recta de funcionamiento sea r_2 . Si ello sucede, los puntos de intersección con las rectas que forman el ciclo serían P_2 y Q_2 ; al quedar Q_2 fuera del rectángulo, el punto de funcionamiento sería el P_2 , teniendo que calcular, por lo tanto, la solución del sistema formado por r_2 y $B_h = 2$.

tenemos es hallar la intersección entre la recta de funcionamiento y una recta paralela al eje OH , esto es:

$$\begin{aligned} H_h l_h + \frac{B_h l_e}{\mu_0} &= 0 \\ B_h &= 2, \end{aligned}$$

dando como resultado: $H_h = -16076 \text{ Am}^{-1}$ y $B_h = 2\text{T}$, que sí pertenecen al ciclo del material, siendo, en consecuencia, la solución buscada.

Una vez calculado H dentro del material, el campo para el entrehierro se obtiene empleando la relación encontrada para los campos $B_H = B_e$, a partir de la ley del flujo, y la ecuación $B_e = \mu_0 H_e$ para el vacío, esto es:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{B_h}{\mu_0} = \frac{2}{4\pi \times 10^{-7}} = 1591549 \text{ Am}^{-1} .$$

6.15 Se tienen dos electroimanes formados de dos partes diferentes (Figura 6.32). La primera, y más grande, es ferromagnética de sección S e igual en ambos; la segunda corresponde al entrehierro. El material del entrehierro del primer núcleo posee una sección S_a y una permeabilidad relativa μ_{ra} y el entrehierro del segundo una sección S_b , siendo desconocido el valor de su permeabilidad. Deducir, razonadamente, el valor de μ_{rb} del material del entrehierro del segundo electroimán para que el campo magnético B en el ferromagnético sea el mismo en ambos casos.

Resolución

En este problema debemos plantear las ecuaciones para las dos disposiciones diferentes del entrehierro, con el mismo material ferromagnético. De este modo, considerando el electroimán con el material a , y denotando con el subíndice h a la parte del hierro, se tiene:

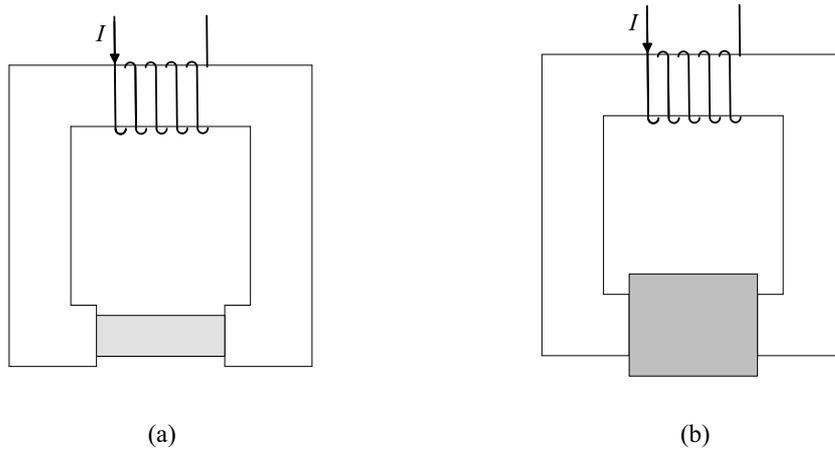


Figura 6.32. (a) Electroimán con material en el entrehierro de sección S_a . (b) Electroimán con otro elemento en el entrehierro de sección S_b .

1)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c \Rightarrow H_h l_h + H_a l_a = NI,$$

habiendo hecho la circulación en sentido horario sobre una curva media de geometría cuadrada, y en donde se ha identificado la corriente de conducción I_c con I , dato del problema.

2) Escogiendo una superficie cerrada que abarque una parte del ferromagnético y otra del paramagnético (véase, por ejemplo, el Problema 6.9-Figura 6.20), se encuentra:

$$\begin{aligned} \Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 &\Rightarrow \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_a} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{S}_a = 0 \Rightarrow \\ \int_{S_a} B_a dS_a - \int_{S_b} B_b dS_b = 0 &\Rightarrow B_h S - B_a S_a \Rightarrow B_h S = B_a S_a. \end{aligned}$$

Se observa como los campos no son iguales, lo cual es debido a que la relación entre ellos depende del cociente de sus superficies S_a y S .

3) Las ecuaciones materiales en este caso se corresponden con el ciclo de histéresis, para el ferromagnético, y de la expresión lineal $B_a = \mu_0 \mu_{ra} H_a$ para el otro elemento.

Con todo ello, tomando, primeramente, H_a de esta última relación, e introduciéndola en paso (1), se obtiene:

$$H_h l_h + \frac{B_a}{\mu_0 \mu_{ra}} l_a = NI,$$

y teniendo en cuenta la relación entre los campos magnéticos de ambos materiales,

$$H_h l_h + \frac{B_h S}{\mu_0 \mu_{ra} S_a} l_a = NI,$$

y despejando ahora $B_h = B_h(H_h)$,

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu_{ra} S_a NI}{l_a S} - \frac{\mu_0 \mu_{ra} S_a l_h}{l_a S} H_h.$$

Esta expresión se corresponde, como ya sabemos, con la recta de funcionamiento, que junto con la curva de histéresis nos proporciona el punto (H, B) del ciclo en donde se halla el material ferromagnético, para una I dada.

Respecto del segundo diseño, colocando otro material lineal distinto en el entrehierro, se procede exactamente igual a como se ha hecho hasta ahora, por lo que se omitirán las explicaciones en los tres pasos que hemos dado, pasando directamente a las ecuaciones. Denotando a este nuevo elemento con el subíndice b , se tiene:

$$H_h l_h + \frac{B_b}{\mu_0 \mu_{rb}} l_b = NI.$$

Llegado aquí, se introduce en B_b su relación con B_h mediante $B_b = \frac{B_h S}{S_b}$. Formalmente, como puede verse, esta expresión es idéntica a la introducida en el caso del material paramagnético a , sin embargo numéricamente es diferente, ya que las superficies S_a y S_b son distintas. Haciendo uso de esto, encontramos:

$$H_h l_h + \frac{B_h S}{\mu_0 \mu_{rb} S_b} l_b = NI,$$

o sea,

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu_{rb} S_b NI}{l_b S} - \frac{\mu_0 \mu_{rb} S_b l_h}{l_b S} H_h,$$

que representa la recta de funcionamiento para el segundo montaje.

Para averiguar cuál es el valor de μ_{rb} , debemos entender el significado físico de los resultados obtenidos. En este sentido, si se analizan las funciones $B_h = B_h(H_h)$ halladas para ambos casos se observa que son diferentes. Esto es una novedad frente a lo visto hasta el momento en anteriores ejercicios. Así, un electroimán posee una recta de funcionamiento característica para una intensidad dada. Esto significa que, para un sistema, dicha recta depende de las propiedades del entrehierro (μ_e, l_e, S_e) y de la sección del hierro S_h y su longitud media l_h . De este modo, variando la intensidad modificamos la ordenada en el origen, pero la pendiente continúa siendo la misma, ya que ésta no depende de I . En definitiva: variando la intensidad que pasa por el devanado conseguimos una familia de rectas paralelas, cada una de las cuales corta en diferentes puntos a la curva que relaciona $B = B(H)$ del material del núcleo (en muchas ocasiones ferromagnético). Esto contrasta, claramente, con nuestro resultado, según el cual aparecen dos rectas, en principio. La razón de ello está en que, en realidad, tenemos dos sistemas diferentes: uno con un material a en el entrehierro y otro con un elemento b , diferente. Ello hace, como es lógico, que las rectas sean diferentes, ya que éstas dependen de las características físicas de los materiales (es decir, no sólo son distintas sus respectivas ordenadas en el origen).

Entendido esto podemos contestar a la pregunta original. En efecto, al dar como condición que el campo B en el hierro debe ser igual en ambos casos, *para cualquier valor de la intensidad I* idéntica para cada uno de ellos, nos están diciendo que el punto (H, B) del ciclo de histéresis en el que nos encontramos tiene que ser el mismo en ambos electroimanes. De ello se infiere que, el punto de intersección de la recta de funcionamiento con la curva del ferromagnético es idéntico, lo cual sólo es posible si ambas rectas poseen la misma ordenada en el origen y la misma pendiente. Igualando, por lo tanto, la ordenada y pendiente de ambas, obtenemos:

$$\frac{\mu_0 \mu_{ra} S_a NI}{l_a S} = \frac{\mu_0 \mu_{rb} S_b NI}{l_b S}.$$

Teniendo en cuenta que las longitudes l_a y l_b son iguales (entrehierro), encontramos:

$$\mu_{ra} S_a = \mu_{rb} S_b \Rightarrow \boxed{\mu_{rb} = \frac{\mu_{ra} S_a}{S_b}}.$$

Operando igual con las pendientes:

$$-\frac{\mu_0 \mu_{ra} S_a l_h}{l_a S} = -\frac{\mu_0 \mu_{rb} S_b l_h}{l_b S} \Rightarrow \mu_{rb} = \frac{\mu_{ra} S_a}{S_b},$$

dando el mismo resultado.

Observación: El razonamiento seguido es correcto porque se dice que el campo B_h tiene que ser idéntico, para todo valor de I . Sin embargo, de ser sólo para una intensidad concreta, el razonamiento dado no sería la única posibilidad. Para entender esto, basta dibujar dos rectas de diferentes ordenadas en el origen y distintas pendientes, o sea no paralelas, pero que se cruzan en un mismo punto del ciclo de histéresis; un tal caso proporciona el mismo campo B_h .

6.16 En la Figura 6.33 se representa un electroimán formado por dos materiales paramagnéticos distintos de longitudes L y l , respectivamente, de un entrehierro l_e y de un arrollamiento de N espiras. La permeabilidad relativa del primero es $\mu_L = 1000$ y la del segundo es μ_l desconocida. Si por las espiras se hace circular una intensidad de 1 A, calcular:

- El valor de μ_l para conseguir en el entrehierro un campo $H=10000$ A/m.
- La magnetización en las distintas zonas del electroimán.

Datos: $L=40$ cm; $l=4$ cm; $l_e=2$ cm; $N=500$.

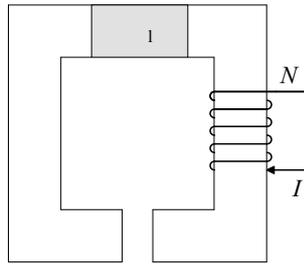


Figura 6.33. Electroimán compuesto por dos materiales paramagnéticos diferentes.

Resolución

a) Al igual como se ha hecho en anteriores problemas de estas características, planteamos el ejercicio en tres etapas:

1) La ley de Ampère para \mathbf{H} . Haciendo las mismas aproximaciones que se expusieron en la introducción teórica, y recorriendo la curva Γ en sentido antihorario, obtenemos:

$$H_L L + H_l l + H_e l_e = NI,$$

en donde hemos identificado con L la longitud total del primer material que compone el electroimán (el más grande).

2) Flujo. $\Phi_l = \Phi_L \Rightarrow B_l S_l = B_L S_L \Rightarrow B_l = B_L$. Por otra parte, tomando una superficie cerrada en forma de cubo que abarque el material L y el entrehierro, se tiene: $\Phi_L = \Phi_e \Rightarrow B_L S_L = B_e S_e \Rightarrow B_L = B_e$, ya que las secciones son iguales y no hay dispersión de flujo.

3) Ecuaciones materiales. En este caso tenemos tres, correspondientes a las diferentes partes que componen el electroimán. Para los materiales paramagnéticos se cumple: $B_L = \mu_0 \mu_L H_L$ y $B_l = \mu_0 \mu_l H_l$, y para el entrehierro $B_e = \mu_0 H_e$.

Partiendo de la relación encontrada en la etapa (1), si se substituyen las ecuaciones materiales de cada elemento del sistema, se obtiene:

$$\frac{B_L L}{\mu_0 \mu_L} + \frac{B_L l}{\mu_0 \mu_l} + \frac{B_L l_e}{\mu_0} = NI \Rightarrow \frac{B_L}{\mu_0} \left[\frac{L}{\mu_L} + \frac{l}{\mu_l} + l_e \right] = NI. \quad (6.21)$$

Como puede observarse, en la ecuación hallada aparecen dos incógnitas, B_L y μ_L , no pudiendo responder a la pregunta inicial. Sin embargo, al dar como dato el campo en el entrehierro, puede

calcularse el valor de B_L a partir de la igualdad de flujos (2). En efecto, introduciendo $H_e = 17000$ en la ecuación del entrehierro (3), encontramos

$$B_L = B_e = \mu_0 H_e = 17000 \mu_0 = 0,012 \text{ T.}$$

Llevando ahora este campo a la Ecuación (6.21), tenemos

$$\mu_l = \frac{l}{\left[\frac{\mu_0 NI}{B_L} - l_e - \frac{L}{\mu_L} \right]} = 1,35 .$$

b) La magnetización se calcula mediante la relación $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1)H$, siendo μ_r la permeabilidad relativa.

Material de $\mu = \mu_0 \mu_L$.

$$M_L = \chi_{mL} H_L$$

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_L} = \frac{10000 \mu_0}{1000 \mu_0} = 10 \text{ Am}^{-1} ,$$

y utilizando la primera expresión:

$$M_L = (\mu_L - 1)H_L = (1000 - 1)10 = 9990 \text{ Am}^{-1} .$$

Material de $\mu = \mu_0 \mu_l$.

$$H_L = \frac{B_l}{\mu_l} = \frac{10000 \mu_0}{1,35 \mu_0} = 7407 \text{ Am}^{-1} ,$$

que introducido en la primera expresión:

$$M_L = (\mu_L - 1)H_L = (1,35 - 1)7407 = 2593 \text{ Am}^{-1} .$$

Entrehierro. En esta parte, al no haber materia, no existe magnetización, por lo que

$$M = 0 .$$

Observación: En el apartado (a) hemos substituido directamente los H de cada parte del electroimán por sus campos B correspondientes. Esto no ha sido lo realizado en problemas anteriores referentes a circuitos magnéticos. La razón de ello es que, en este ejercicio todos los materiales que intervienen son paramagnéticos y, por lo tanto, lineales. De este modo, en este caso, sí es posible despejar H en función de B de una forma sencilla, cosa que no ocurría cuando el material es ferromagnético, ya que, como se explicó en el Problema 6.9, al ser éstas sustancias no lineales normalmente no se puede despejar H en función de B para introducirlo en la ecuación que resulta de aplicar el teorema de Ampère.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 6.17** En un cubo de arista $L = 0,05\text{m}$ de un material imantado, apoyado en los ejes coordenados, la magnetización vale $\mathbf{M} = ay^2\mathbf{u}_x + by\mathbf{u}_y$, siendo $a = 3\text{A/m}^3$, $b = 2\text{A/m}^2$. Calcular la densidad de corriente de magnetización en el centro del cubo y en la cara $y = 0,05\text{ m}$.

Solución: En el centro $\mathbf{j}_m = -0,15\mathbf{u}_z \text{ A/m}^2$. En la superficie $\mathbf{j}_{ms} = -0,0075\mathbf{u}_y \text{ A/m}$.

- 6.18** Un cilindro muy largo de radio R transporta una corriente de intensidad I , distribuida homogéneamente. La permeabilidad magnética varía con la distancia al eje en la forma $\mu = \mu_0 \left(a - \frac{r}{R}\right)$. Obtener \mathbf{H} y \mathbf{M} en los puntos del material del cilindro.

Solución: $\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi$; $\mathbf{M} = \left(a - \frac{r}{R} - 1\right) \frac{I}{2\pi R^2} \mathbf{u}_\phi$.

- 6.19** Considérese la siguiente configuración de conductores, denominada *cable coaxial*, donde ρ es la distancia al eje del sistema:

Región 1 ($\rho < a$):

Un conductor cilíndrico infinitamente largo, de radio a , no magnético. Distribuida uniformemente a través de su sección recta circular una intensidad de corriente I .

Región 2 ($a < \rho < b$):

Una capa de material no conductor rodeando al conductor de radio a . Dicho material, magnéticamente isotrópico, homogéneo y lineal, tiene permeabilidad magnética $\mu = \mu_r \mu_0$.

Región 3 ($\rho > b$):

El vacío, separado de la capa no conductora por un conductor coaxial, de radio b y grosor despreciable, por el que circula una intensidad de corriente $-I$ distribuida uniformemente en su superficie.

Calcular los campos \mathbf{H} , \mathbf{B} y \mathbf{M} en todo punto del espacio y representar sus valores en función de la distancia al eje del sistema.

Solución: ($0 < \rho < a$) $H = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$, $B = \frac{I\rho\mu_0}{2\pi a^2}$, $M = 0$; ($a < \rho < b$) $H = \frac{I}{2\pi\rho}$, $B = \frac{I\mu_0\mu_r}{2\pi\rho}$, $M = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi\rho}$; ($\rho > b$) $H = 0$, $B = 0$, $M = 0$.

- 6.20** Un material es de conductividad eléctrica despreciable. Se fabrica con el material un cilindro de radio R y longitud $L > R$. Por el eje del cilindro se hace pasar un cable conductor de radio R' y muy largo que transporta corriente. La relación entre B y H del conductor del material es $B = CH^3$. 1) Calcular el flujo de \mathbf{B} a través del cuadrado con un lado en el conductor y otro sobre la generatriz. 2) Aplicarlo al caso $C = 0,024$ unidades del S.I., $R = 30$ cm, $R' = 2,0$ cm e $I = 5,5$ A.

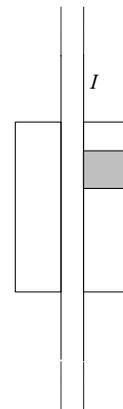


Figura 6.34. Cilindro atravesado por un hilo conductor muy largo.

Solución: 1) $5,6$ Wb; 2) $\frac{CI^3(R - R')}{16\pi^3} \left(\frac{-1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} \right)$

- 6.21** El circuito magnético de la Figura 6.35 consta de un hilo conductor diamagnético de radio R y permeabilidad $\mu_r \approx 1$ y un cilindro hueco concéntrico con él formado por dos materiales diferentes. El primero de ellos es paramagnético de permeabilidad relativa $\mu_{ra} = 10$ y el otro ferromagnético cuyo ciclo de saturación es el de la figura. Por el hilo se hace circular una corriente suficiente para saturar el sector ferromagnético y, posteriormente, se reduce hasta alcanzar un valor de 2 A. Dicha corriente está homogéneamente distribuida en el conductor. Calcular: a) Los campos H_ϕ y B_ϕ en las regiones 1 y 2 en función de ρ . b) Los campos H_ϕ y B_ϕ en la línea media de cada uno de los sectores a y b .

El conductor y el cilindro son muy largos. Despreciar el flujo disperso.

Datos: $R = 1 \text{ cm}$, $R_1 = 2 \text{ cm}$, $R_2 = 4 \text{ cm}$.

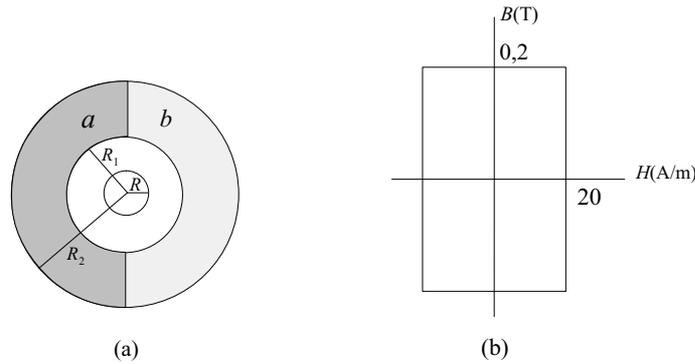


Figura 6.35. Hilo diamagnético y cilindro hueco. (b) Ciclo de histéresis.

Solución: a) ($0 < \rho < R$), $H_\phi = 3183,1\rho$, $B_\phi = 0,004\rho$; ($R < \rho < R_1$), $H_\phi = \frac{0,32}{\rho}$, $B_\phi = \frac{4 \times 10^{-7}}{\rho}$. b) $H_\phi = -20 \text{ Am}^{-1}$, $B_\phi = 5,2 \times 10^{-3} \text{ T}$.

6.22 Un imán permanente tiene la forma de un toroide de diámetro medio 20 cm y una magnetización igual a 10^6 A/m . Existe un entrehierro muy pequeño de longitud 1 mm. Determinar: a) El campo B en el entrehierro. b) El campo H en el material. c) Dibujar las líneas de B , M y H en el material y en el entrehierro.

Solución: a) 1,25T; b) $-5281,6 \text{ Am}^{-1}$.

6.23 El electroimán de la Figura 6.36 se construyó con un material cuyo $H = KB^2$. La sección es circular, de valor constante S_1 en toda la longitud l_1 y se estrecha hasta $S_1/2$ en las piezas polares de longitudes l_2 . No hay flujo disperso. Los valores de las distintas cantidades en el S.I. son: $l_1 = 0,60$, $l_2 = 0,10$; $K = 10000$ y $NI = 1000$. Calcular el B_1 en la pieza larga del material.

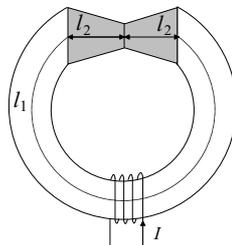


Figura 6.36. Toroide de sección variable.

Solución: 0.26 T.

6.24 Un anillo de longitud media L y sección constante está formado por dos materiales ferromagnéticos cada uno de longitud media $L/2$. El material a tiene un ciclo de histéresis que, partiendo de la saturación, es asimilable a una recta que pasa por los puntos A y A': $H_a = 0 \text{ A/m}$, $B_a = 1 \text{ T}$ y $H_{a'} = -200 \text{ A/m}$, $B_{a'} = 0 \text{ T}$. La recta análoga del material b es paralela a la anterior y pasa por $H_b = -0,5 \text{ A/m}$, $B_b = 0 \text{ T}$. Se bobina un conductor sobre el anillo y se hace pasar por él una

corriente suficiente para saturar ambos materiales y a continuación se anula. Calcular H y B en dichos materiales.

Solución: $H_a = -99,7$ A/m, $H_b = -99,7$ A/m; $B_a = B_b = 0,5$ T.

6.25 En el circuito magnético de la Figura 6.37, en la pieza superior, que es de un material magnético lineal de μ_r , existe un arrollamiento que es de 1000 vueltas. Las dimensiones de dicha pieza son las siguientes: $a = 2$ cm, $b = 8$ cm, $c = 1$ cm, y el espesor de la pieza es de 2 cm. La pieza inferior es de fundición gris, la longitud media de las líneas de campo en esta pieza es de 10 cm y la sección de 2 cm². La separación de cada entrehierro es de 3 mm. Se pide, determinar la intensidad que debe circular por el arrollamiento para obtener en el entrehierro un campo \mathbf{B} de 0,5T. No se considera flujo disperso.

Datos para la fundición gris:

B(T)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
H(A/m)	450	750	1000	1250	1600

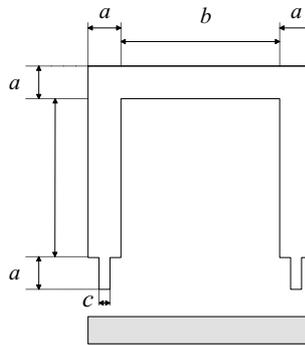


Figura 6.37. Circuito magnético.

Solución: 2,6 A

6.26 En el dispositivo dibujado las secciones rectas son todas S salvo en la columna de la derecha donde $S' = 2S$. La intensidad es $I = 20$ A y el número de vueltas en cada devanado $N = 500$. Las longitudes son $a = 0,5$ m. El material se imana de manera que $\mathbf{B} = 100\mu_0\mathbf{H}$. Calcular el vector \mathbf{B} en la columna de sección S' . Se supone que no existe flujo disperso.

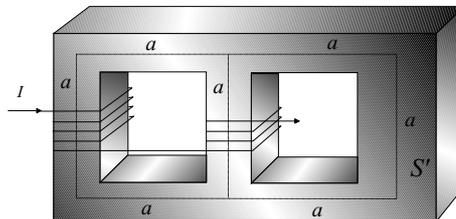


Figura 6.38. Electroimán.

Solución: 0,39T.

6.27 Una determinada industria quiere fabricar un dispositivo de sección circular en cada tramo, como el que se indica en la Figura 6.39, con el fin de conseguir un campo magnético en el entrehierro $H_e = 2000$ A/m, cuando se hace circular una corriente de $I = 1$ A por cada espira. Por razones técnicas no

pueden emplearse más de 203 metros de cable en la zona donde va arrollado. Calcular cuál debe ser el valor de la μ_r del material paramagnético que se elija.

Datos: Longitudes medias, $L = 1$ m, $l = 0,45$ m, radio de la sección $r = 5$ cm. Supóngase que no hay dispersión de flujo.

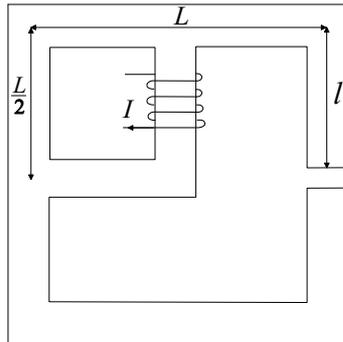


Figura 6.39. Dispositivo industrial.

Solución: 52.

- 6.28** Se construye un electroimán de longitud del hierro 3,0 m y de entrehierro 1cm, con 1000 espiras. Para el material empleado se verifica, en primera imanación, $B = K \operatorname{sen}(H/C)$, donde $K = 1,2$ T y $C = 2800$ A/m. Se desea alcanzar un campo de 0,6 T en el entrehierro. Calcular la intensidad de corriente que debe circular por la bobina. Despréciase la dispersión de flujo.

Solución: 9,2A.

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Uno de los grandes avances de la teoría electromagnética fue el descubrimiento de que podía inducirse corriente en una espira conductora cuando varía el flujo de \mathbf{B} a través del área limitada por ella. Faraday (1831) observó que se inducían corrientes en un circuito: 1) cuando éste se movía en presencia de un imán permanente, 2) si dicho circuito se mantenía en reposo pero se movía el imán, o 3) si manteniendo el circuito en reposo se sitúa próximo a otro por el que circula una corriente que varía con el tiempo. Los resultados experimentales de Faraday muestran que circula corriente en el circuito si se mueve en presencia de un campo magnético, o bien, si existe un campo magnético que varía con el tiempo. En todos estos casos se produce un cambio del flujo que atraviesa la superficie limitada por el circuito, originando una fuerza electromotriz (f.e.m.) distinta de cero y, consecuentemente, una corriente eléctrica.

En este capítulo se estudia el fenómeno de inducción electromagnética relacionado con la aparición de f.e.m. debida a un campo magnético. La tecnología eléctrica actual se basa en gran medida en los descubrimientos de Faraday. El principio de funcionamiento del generador eléctrico, del transformador, del freno eléctrico, del tren de levitación magnética, y de otros muchos dispositivos, tiene su origen en la ley de inducción electromagnética.

7.1. FUERZA ELECTROMOTRIZ

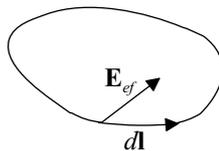


Figura 7.1. Esquema de la línea cerrada Γ , el sentido de circulación $d\mathbf{l}$ y el campo \mathbf{E}_{ef} .

Consideremos una línea cerrada Γ (no necesariamente formada por conductores), uno de cuyos elementos es $d\mathbf{l}$. Sea \mathbf{E}_{ef} el campo eléctrico efectivo en dicho elemento, igual a la fuerza total, por unidad de carga eléctrica, que se aplica sobre una carga. Se define la f.e.m. \mathcal{E} en dicha línea por

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l}, \quad (7.1)$$

que representa la energía que la fuerza resultante aplica sobre la unidad de carga que describe una vez la línea cerrada. La dimensión de la f.e.m. es la misma que la de la d.d.p. y se medirá, por tanto, en voltios.

Si el campo \mathbf{E}_{ef} se expresa como la suma del campo electrostático \mathbf{E}_s , cuyo rotacional es nulo, y de otros campos no electrostáticos \mathbf{E}_{ns} , la Ecuación (7.1) se puede escribir como

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.2)$$

Por tanto, para que haya f.e.m. en una línea debe existir campo \mathbf{E}_{ns} .

El resultado anterior es coherente con el concepto introducido en el Capítulo 4 de la f.e.m. de un generador. En este capítulo se vio que como el campo \mathbf{E}_{ns} existe únicamente en el interior del generador, la f.e.m. a lo largo de una línea cerrada que incluya dicho componente quedará reducida a la circulación de \mathbf{E}_{ns} en el generador.

Según la ley de Lorentz la fuerza por unidad de carga es $\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Cuando el conductor se mueve es el segundo término el que contribuye a la aparición de f.e.m.. Por otra parte, si hay un campo magnético no estacionario existe un campo \mathbf{E} inducido según la ley de Faraday que contribuirá a la f.e.m. Aunque el origen es diferente, la f.e.m. en ambos casos puede expresarse en función de la variación de flujo.

De acuerdo con las causas asociadas a la presencia de una f.e.m. se estudian los casos siguientes.

7.1.1. Fuerza electromotriz inducida en un circuito estacionario por un campo magnético variable con el tiempo

Una de las leyes de Maxwell, la ley de Faraday, establece que en todo punto del espacio donde hay un campo electromagnético se verifica la ecuación

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

La ecuación anterior implica que el campo eléctrico \mathbf{E} en una región donde el campo magnético varía con el tiempo no es conservativo y por tanto no es un campo electrostático.

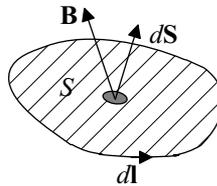


Figura 7.2. Esquema de la línea y los sentidos utilizados para $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$.

La Figura 7.2 muestra una línea cerrada Γ , inmóvil en el espacio, en presencia de un campo \mathbf{B} variable en t , que puede ser producido por un imán en movimiento o por una corriente variable. Dicha línea puede ser ficticia o un circuito físico. Como la línea está en reposo, la fuerza de Lorentz sobre las posibles cargas eléctricas situadas a lo largo de Γ será debida al campo eléctrico \mathbf{E} inducido por la variación temporal de \mathbf{B} . A partir de la Ecuación (7.3) y el teorema de Stokes (1.23), se obtiene que la f.e.m. en la línea cerrada es

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.4)$$

donde los sentidos de $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ están relacionados por la regla de la mano derecha (Figura 7.2).

La ecuación anterior establece que la f.e.m. en una línea cerrada es igual a menos la variación respecto del tiempo del flujo de \mathbf{B} a través de una superficie limitada por la línea. Dicha variación es debida a la presencia de *campos magnéticos no estacionarios*.

El signo menos indica que la f.e.m. inducida hará que circule una corriente en un circuito conductor cerrado, con dirección tal que el campo creado por ella se oponga a la variación de flujo a través del circuito (*ley de Lenz*).

7.1.2. Fuerza electromotriz inducida en un circuito móvil en un campo magnético estacionario

Supongamos ahora que un circuito material se mueve o deforma en presencia de un campo magnético estacionario. Este campo puede ser producido por un imán permanente o una corriente estacionaria. Si un punto del circuito se mueve con velocidad \mathbf{v} y el campo en dicho punto es \mathbf{B} , el campo eléctrico efectivo no electrostático en dicho punto es

$$\mathbf{E}_{ns} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (7.5)$$

En un circuito abierto, de extremos a y b , la f.e.m. se determina a lo largo de una línea cerrada Γ que va de a a b por el circuito y que continúa de b a a por el exterior. Como sólo hay movimiento en el circuito, únicamente contribuirá a la aparición de f.e.m. la porción de línea asociada al circuito, es decir,

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.6)$$

Si el circuito material en movimiento es cerrado, la f.e.m. a lo largo de la línea cerrada Γ coincidente con el circuito será

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.7)$$

Se puede demostrar que la expresión anterior también puede escribirse en función de la variación de flujo, obteniendo que

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.8)$$

donde la variación de flujo a través del área limitada por el circuito se debe en este caso únicamente a su *movimiento*. El sentido de $d\mathbf{l}$ determina el de $d\mathbf{S}$, tal como se vio en el apartado anterior y en la Sección 5.2.

En este caso de f.e.m. debida al movimiento se aplica igualmente la ley de Lenz.

La Expresión (7.6) para circuitos abiertos también puede escribirse en función de la variación de flujo [Ecuación (7.8)]. En este caso, la línea cerrada Γ incluye la porción de circuito y otro tramo externo de forma que en la variación de flujo se evalúe el barrido por dicho circuito en su movimiento.

7.1.3. Caso general

Cuando \mathbf{B} cambia con el tiempo y el circuito está en movimiento, la f.e.m. total inducida es igual a la suma de las asociadas a cada causa, es decir,

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7.9)$$

El primer término está relacionado con el movimiento y el segundo con la variación de \mathbf{B} respecto del tiempo. Ambos términos pueden expresarse en función de la variación de flujo: debido al movimiento del circuito considerando el campo estacionario, o a la variación temporal de \mathbf{B} manteniendo el circuito fijo. Por tanto, la f.e.m. total podrá expresarse como

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{\text{movimiento}} + \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{\text{cambio con } t} \quad (7.10)$$

Así, en general, la f.e.m. viene dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (7.11)$$

que representa la **ley de Faraday**.

7.2. AUTOINDUCCIÓN E INDUCCIÓN MUTUA

7.2.1. Coeficiente de autoinducción

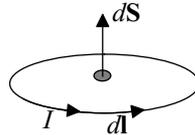


Figura 7.3. Esquema del circuito y los sentidos utilizados para $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{S}$ y para el cálculo de I .

Sea un circuito estacionario por el que circula una corriente I (Figura 7.3). El circuito estará atravesado por el flujo Φ debido a su propia corriente. Una variación de corriente origina una variación de flujo y, por tanto, una f.e.m. inducida. La f.e.m. obtenida según el sentido de $d\mathbf{l}$, coincidente con el utilizado en el cálculo de I , es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (7.12)$$

donde $L = d\Phi/dI$ es el **coeficiente de autoinducción** que depende de la geometría del circuito y del medio. L se mide en henrios (H) y tal como se define es siempre positivo.

La f.e.m. debida al fenómeno de autoinducción tiende a oponerse al cambio de corriente, de acuerdo con la ley de Lenz, y debe sumarse a otras fuerzas electromotrices presentes.

7.2.2. Coeficiente de inducción mutua

La f.e.m. inducida en un circuito debido a las variaciones de intensidad en otro se expresan por medio del **coeficiente de inducción mutua** M .

Sean dos circuitos como los de la Figura 7.4. El flujo total en el circuito 2, Φ_2 , será la suma del flujo Φ_{21} debido al campo \mathbf{B}_{21} asociado a I_1 y Φ_{22} debido a su propia corriente I_2 . La f.e.m. en el circuito 2, \mathcal{E}_2 , es

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial I_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial I_2} \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.13)$$

donde se observa que el resultado depende de las variaciones de intensidad en ambos circuitos. El coeficiente de autoinducción del circuito 2 es $L_2 = \partial\Phi_{22}/\partial I_2$. Se define el coeficiente de inducción mutua de los circuitos 1 y 2 como

$$M_{21} = \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial I_1}, \quad (7.14)$$

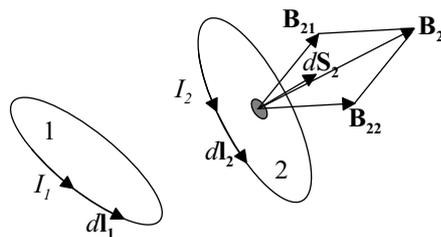


Figura 7.4. Esquema de dos circuitos acoplados.

cuya unidad de medida será igualmente el H. Dicho coeficiente puede expresarse en función de la geometría de ambos circuitos por

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}, \quad (7.15)$$

donde R es la distancia de un punto de la espira 1 a otro de la 2. Se verifica que $M_{21} = M_{12} = M$. Es útil tomar el valor del coeficiente de inducción mutua como positivo y poner delante signo positivo o negativo en función de si la disposición relativa de corrientes da lugar a que el flujo mutuo aumente o disminuya el debido a su propia corriente. En general, para la disposición de la Figura 7.4 se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \pm M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \\ \mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

7.3. ENERGÍA Y FUERZAS

7.3.1. Energía magnética

La creación de una configuración de corrientes y sus campos asociados puede llevarse a cabo de forma que las corrientes y los campos varían desde cero hasta los valores que tengan en el instante considerado. En este proceso se inducen fuerzas electromotrices que se oponen al cambio de corriente, lo que ocasiona un consumo de energía. El trabajo requerido para establecer el sistema de corrientes quedará almacenado en el circuito como **energía magnética**.

Inicialmente se considera un circuito sin resistencia eléctrica por el que circula una corriente I . Un pequeño cambio de flujo $d\Phi$, en un tiempo dt , origina una f.e.m. inducida \mathcal{E}_i , por lo que una fuente deberá efectuar un trabajo contra ella. En dt la carga que circula por el circuito es $dq = Idt$ y el trabajo realizado por una fuente externa vendrá dado por

$$dW = -\mathcal{E}_i Idt = I d\Phi. \quad (7.17)$$

En el caso de un conjunto de circuitos rígidos, estacionarios que están situados en un medio lineal, no hay pérdidas por histéresis y el trabajo realizado por la fuente es igual a la energía magnética del sistema. De la Ecuación (7.17), se puede deducir que la energía magnética U_m viene dada por

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i, \quad (7.18)$$

donde I_i es la corriente final y Φ_i el flujo total a través de cada circuito. La expresión anterior puede escribirse también en función de los coeficientes de inducción y las corrientes del siguiente

modo

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M_{jk} I_j I_k, \quad (7.19)$$

donde M_{jk} representa el coeficiente de inducción mutua entre el circuito j y k , o bien el coeficiente de autoinducción, cuando los subíndices coinciden. En el caso de dos circuitos se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2, \quad (7.20)$$

donde el signo positivo se utilizará si los campos debidos a I_1 e I_2 en los circuitos correspondientes se refuerzan y negativo si dichos campos se oponen. Para un solo circuito,

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2, \quad (7.21)$$

que representa la energía almacenada en una bobina. Esta expresión puede utilizarse para el cálculo de coeficientes de autoinducción.

En el caso de corrientes distribuidas en un volumen resulta conveniente otra formulación alternativa, ya que en estos casos el concepto de flujo no está claramente definido. Para una corriente distribuida en un medio lineal, la energía magnética puede expresarse en función de las corrientes como

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dV, \quad (7.22)$$

donde \mathbf{A} es el potencial vector debido a la densidad de corriente y V incluye todas las regiones donde \mathbf{j} no es cero.

La energía magnética del sistema de corrientes también se puede evaluar en función de los campos asociados. Esta descripción del fenómeno aporta un modelo de cómo la energía se almacena en el propio medio donde existe un campo magnético. Para medios magnéticos lineales se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (7.23)$$

donde V es el volumen total ocupado por el campo. La energía magnética por unidad de volumen u_m para un medio lineal es

$$u_m = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}. \quad (7.24)$$

Las expresiones anteriores son válidas para sistemas lineales y no pueden utilizarse de forma general para sistemas que contengan materiales no lineales como los ferromagnéticos. Cuando estos materiales están presentes, parte de la energía aportada por una fuente externa para establecer los campos se pierde irreversiblemente por histéresis. En este caso, la Ecuación (7.17) sigue siendo válida pero no las siguientes. El trabajo realizado por las fuentes externas para establecer un campo magnético puede expresarse en función de los campos como

$$W = \int_V \left(\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV, \quad (7.25)$$

que es un resultado general.

Si este resultado se utiliza para calcular la energía que es preciso aportar al recorrer un ciclo de histéresis de un material ferromagnético, se obtiene un trabajo por unidad de volumen igual a

$$\frac{dW}{dV} = \oint_{\text{ciclo}} H dB, \quad (7.26)$$

que es el área limitada por la curva de histéresis y representa una pérdida irreversible de energía.

7.3.2. Fuerzas entre circuitos

Todos los circuitos por los que circulan corrientes experimentan fuerzas magnéticas cuando se sitúan en un campo magnético. La ley de Ampère dada por la Ecuación (5.21) permite determinar la fuerza entre dos circuitos por los que circulan corrientes; pero en ciertos casos requiere el cálculo de integrales curvilíneas complicadas. Una expresión alternativa para evaluar dicha fuerza se obtiene a partir de las variaciones de energía. El resultado también puede expresarse en función de los coeficientes de inducción mutua que pueden medirse con relativa facilidad.

Dados dos circuitos por los que circulan corrientes, existirán fuerzas de origen magnético entre ellos. Para mantenerlos en equilibrio es necesario aplicar una fuerza mecánica externa igual y opuesta a la magnética. Supongamos que uno de los circuitos sufre una traslación rígida lenta bajo la influencia de las fuerzas magnéticas que actúan sobre él mientras el otro permanece fijo. Aplicando el principio de conservación de la energía se obtiene, despreciando el efecto Joule, que el trabajo realizado por las fuentes externas es igual a la variación de la energía magnética del sistema más el trabajo mecánico desarrollado.

Una forma de calcular este trabajo es realizando el desplazamiento de forma que las corrientes permanezcan constantes. En este caso las fuentes deberán realizar trabajo contra las f.e.m. inducidas debidas al cambio de flujo asociado al movimiento del circuito. Para sistemas lineales, se deduce que el trabajo efectuado por la fuente es doble del incremento de energía magnética del sistema, siendo dicho incremento igual al trabajo mecánico realizado. Finalmente, se llega a que la fuerza magnética sobre el circuito que sufre el desplazamiento rígido puede expresarse como el gradiente de la energía magnética, es decir

$$\mathbf{F}_m = (\nabla U_m)_I, \quad (7.27)$$

cuya componente en x será $F_{mx} = (\partial U_m / \partial x)_I$. El subíndice I indica que las derivadas se calculan manteniendo la intensidad constante. Una fuerza igual y de sentido contrario actuará sobre el otro circuito. La tendencia de esta fuerza es orientar al circuito en la posición de flujo máximo.

Expresando U_m en función de los coeficientes de autoinducción e inducción mutua, como en la traslación todos los puntos sufren el mismo desplazamiento sólo variará M , resultando que \mathbf{F}_m también puede calcularse como

$$\mathbf{F}_m = I_1 I_2 \nabla M, \quad (7.28)$$

donde I_1 e I_2 son las corrientes de los circuitos. Igualmente, la componente en x es $F_{mx} = I_1 I_2 (\partial M / \partial x)$. A partir de esta expresión puede obtenerse la ley de Ampère para la fuerza magnética.

Otra forma de llevar a cabo el desplazamiento es variando adecuadamente las corrientes de forma que el flujo se mantiene constante. El resultado final es el mismo, aunque varía la expresión utilizada para calcular la fuerza. En este caso la fuente no realiza trabajo y el realizado por la fuerza es igual a menos la variación de energía magnética. Se obtiene que la fuerza viene dada por

$$\mathbf{F}_m = -(\nabla U_m)_\Phi. \quad (7.29)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 7.1** Una espira circular de radio $R=10$ cm, centrada en el origen de coordenadas, está situada en el plano XY . Existe un campo $\mathbf{B} = C \rho \cos(\omega t) \mathbf{u}_z$, donde $C=1$ T/m, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\omega = 100 \pi$ rad s^{-1} . Determinar la f.e.m. inducida en la espira.

Resolución

En este caso que la espira está en reposo la única causa de aparición de f.e.m. es la presencia de un campo \mathbf{B} no estacionario. Para el cálculo de la f.e.m. se aplica la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -(d\Phi/dt)$.

Primero se calculará el flujo a través del área limitada por el circuito. El sentido de circulación $d\mathbf{l}$ a lo largo de la espira utilizado en el cálculo de la f.e.m. es el marcado en la Figura 7.5, por lo tanto, aplicando la regla de la mano derecha, el $d\mathbf{S}$ a utilizar para determinar el flujo es $d\mathbf{S} = dS \mathbf{u}_z = \rho d\rho d\phi \mathbf{u}_z$. En el cálculo del flujo debe tenerse en cuenta que las variables de integración son espaciales, las funciones temporales pueden sacarse fuera de la integral.

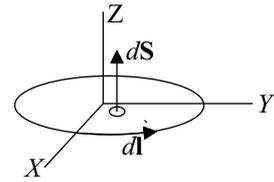


Figura 7.5. Esquema de la espira, sentido de circulación y elemento de área.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint (\rho \cos(\omega t) \mathbf{u}_z) \cdot (\rho d\rho d\phi \mathbf{u}_z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \cos(\omega t) \rho d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho \cos(\omega t) \rho d\rho = (2\pi) \left(\cos(\omega t) \int_0^R \rho^2 d\rho \right) = 2\pi \cos(\omega t) \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^R \\ &= 2\pi \cos(\omega t) \frac{R^3}{3} = 2\pi \cos(\omega t) \frac{0,10^3}{3} = 6,67 \times 10^{-4} \pi \cos(100\pi t) \text{ Wb.} \end{aligned}$$

En un instante t , la f.e.m. a lo largo de la espira siguiendo el sentido $d\mathbf{l}$ viene dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d[6,67 \times 10^{-4} \pi \cos(100\pi t)]}{dt} = (6,67 \times 10^{-4} \pi \times 100\pi) \text{ sen}(100\pi t) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = 0,66 \text{ sen}(100\pi t) \text{ V .}$$

7.2 Un disco de radio R , paralelo al plano XY , gira alrededor de su eje con velocidad angular $\omega = \omega \mathbf{u}_z$. Existe un campo magnético uniforme y estacionario $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$. Determinar la f.e.m. a lo largo de una línea cerrada que incluya un radio del disco.



Figura 7.6. (a) Esquema del disco, su eje y el campo \mathbf{B} . (b) Camino de circulación y los vectores $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{E}_{ns} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Resolución

Al moverse las cargas del material del disco tangencialmente, están sometidas a una fuerza por unidad de carga $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, radial y hacia fuera [Figura 7.6(a)]. Por tanto, a una distancia ρ del centro del disco el campo no electrostático es

$$\mathbf{E}_{ns} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\omega \rho \mathbf{u}_\phi) \times (B \mathbf{u}_z) = \omega \rho B \mathbf{u}_\rho.$$

La f.e.m. a lo largo de la línea cerrada $oabo$ de la figura 7.6(b), que va de oa por el radio del disco, de ab por el exterior y de bo por el eje, es

$$\mathcal{E} = \oint_{oabo} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{oabo} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{oabo} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{oa} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} ,$$

donde sólo contribuye a la aparición de f.e.m. el tramo oa del disco. Por tanto, la f.e.m. siguiendo el sentido indicado es igual a

$$\mathcal{E} = \int_{oa} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{oa} (\omega \rho B \mathbf{u}_\rho) \cdot (d\rho \mathbf{u}_\rho) = \int_0^R \omega B \rho d\rho = \omega B \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^R \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\omega B R^2}{2}}$$

El dispositivo descrito es un generador eléctrico conocido como disco de Faraday. Si el material del disco es conductor y entre los terminales de conexión, a y b , se conecta una resistencia circulará una corriente eléctrica.

- 7.3** 1) Una barra conductora ideal de longitud L se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$ en una región del espacio donde hay un campo magnético uniforme y estacionario, $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$, tal como muestra la Figura 7.7(a). Determinar la f.e.m. en la barra y la d.d.p. entre terminales. 2) Si la barra se desliza sobre unas guías paralelas horizontales y entre los extremos de las guías existe una resistencia R , calcular la intensidad I en la resistencia, indicando el sentido de la corriente. Se supone que las guías y la barra tienen resistencia despreciable. 3) Calcular para el caso anterior la fuerza mecánica que hay que aplicar para que la barra se mueva con velocidad constante \mathbf{v} . Demostrar que la potencia mecánica aportada coincide con la potencia consumida en la resistencia.

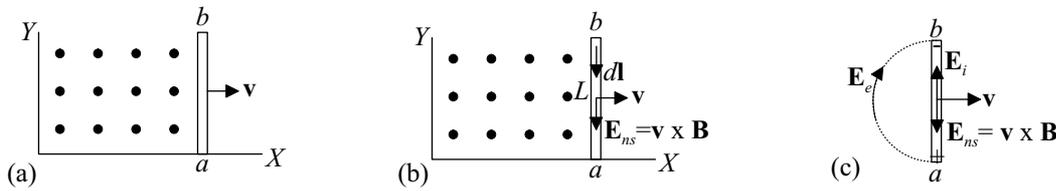


Figura 7.7. (a) Barra conductora en movimiento en presencia de un campo \mathbf{B} y esquema de ejes utilizado. (b) Campo $\mathbf{E}_{ns} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ y sentido de circulación. (c) Campo debido a la acumulación de cargas en los extremos.

Resolución

1) La barra conductora se mueve en presencia de un campo estacionario, la aparición de f.e.m. es debida al movimiento de la barra en presencia de un campo \mathbf{B} . El campo eléctrico efectivo no electrostático en un punto de la barra es $\mathbf{E}_{ns} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ [Figura 7.7(b)].

Se calcula la f.e.m. a lo largo de un camino cerrado que incluya la barra. Los extremos de la barra se han denominado a y b . Dicho camino va de b a a a lo largo de la barra y de a a b por el exterior. La f.e.m. siguiendo $d\mathbf{l}$ es igual a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_{bab} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{bab} \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \int_{bab} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ba(\text{barra})} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{b(\text{barra})}^a (v \mathbf{u}_x \times B \mathbf{u}_z) \cdot (dy \mathbf{u}_y) = \int_{b(\text{barra})}^a (-vB \mathbf{u}_y) \cdot (dy \mathbf{u}_y) = \int_L^0 (-vB) dy \Rightarrow \\ &\quad \boxed{\mathcal{E} = vBL,} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que en ese caso $d\mathbf{l} = dy \mathbf{u}_y$, ya que la barra es paralela al eje Y . Además, el campo \mathbf{B} es uniforme.

Los electrones libres de la barra conductora, sometidos a $\mathbf{E}_{ns} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ se desplazan a lo largo de la barra y se acumulan en el extremo b . Como consecuencia, el otro extremo, a , quedará cargado positivamente. Entre a y b existirá un gradiente de potencial, es decir, un campo eléctrico debido a las cargas acumuladas que va de a a b por la barra, campo \mathbf{E}_i , y de a a b por el exterior, campo \mathbf{E}_e , como muestra la Figura 7.7(c). Finalmente, los campos obtenidos son:

- En el interior de la barra, $\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}_{ns} + \mathbf{E}_i = 0$, ya que es un conductor ideal.
- En el exterior, $\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}_e$, debido a la acumulación de cargas. Se puede suponer que dicho campo es cuasielectrostático, es decir, $\mathbf{E}_e = -\nabla V$.

La integral de \mathbf{E}_{ef} a lo largo de una línea cerrada es la f.e.m. Dicha integral también se puede escribir como suma de dos términos, uno asociado al tramo de la barra y otro al tramo externo. Sustituyendo el valor del campo efectivo resultante en cada tramo y operando se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_{bab} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = vBL = \int_{ba(\text{barra})} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} + \int_{ab(\text{exterior})} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 + \int_{ab(\text{exterior})} (-\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b -dV = V_a - V_b \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = V}. \end{aligned}$$

que demuestra que el valor de la f.e.m. \mathcal{E} coincide con la d.d.p. entre terminales V .

Otra forma de calcular la d.d.p. es a partir del campo electrostático asociado a la concentración de cargas, cuyo valor en el exterior es \mathbf{E}_e y en el interior de la barra \mathbf{E}_i , siendo $\mathbf{E}_i = -\mathbf{E}_{ns}$. A partir de estos valores, la d.d.p. es

$$V_a - V_b = - \int_{b(\text{exterior})}^a \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = - \int_{b(\text{barra})}^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_{b(\text{barra})}^a \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \int_{b(\text{barra})}^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E},$$

obteniendo igualmente que $V = V_a - V_b = \mathcal{E}$.

2) Se calcula primero la f.e.m. a lo largo de la línea cerrada formada por la barra, tramo ba , las guías y la resistencia, tramo ab . La f.e.m. obtenida siguiendo el sentido de circulación $d\mathbf{l}$ marcado en la Figura 7.8 será idéntica a la obtenida anteriormente ya que todos los pasos de la demostración son iguales y del circuito señalado sólo se mueve la barra.

Igualmente, si se aplica la regla del flujo al circuito cerrado anterior, se obtiene el mismo valor, tal como se demuestra a continuación.

Para el sentido de circulación utilizado, se tiene $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{u}_z$. En un instante t , el flujo vale

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (B \mathbf{u}_z) \cdot (-dS \mathbf{u}_z) = - \int_S B dS = -B \int_S dS = -BS = -BLx = -BLvt,$$

donde se ha tenido en cuenta que \mathbf{B} es uniforme, que en el instante inicial la barra está sobre R , luego la posición de la barra en el instante t es $x = vt$ y que el área del circuito rectangular es $S = Lx$. La f.e.m. vendrá dada por

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(-BLvt)}{dt} = BLv.$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito siguiendo el sentido $d\mathbf{l}$ y suponiendo que la corriente tiene también dicho sentido, se obtiene

$$\mathcal{E} = BLv = RI.$$

La resistencia de la barra y la de las guías se consideran despreciables. Finalmente, se obtiene para la intensidad

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBL}{R}}.$$

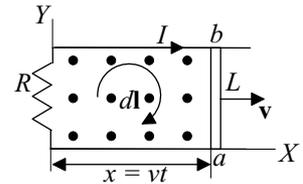


Figura 7.8. Circuito cerrado formado por la barra, las guías y la resistencia.

Como el signo de I es positivo, la corriente inducida tendrá el mismo sentido que el supuesto en el cálculo, es decir el de $d\mathbf{l}$ (sentido horario). Dicho sentido para la corriente coincide con el de $\mathbf{E}_{ns} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Si se cambia el sentido de circulación $d\mathbf{l}$ (sentido antihorario), también lo hará el signo de \mathcal{E} . La intensidad inducida I tendrá signo negativo, lo que implica que la corriente será contraria y su sentido será horario, coincidente con lo obtenido previamente.

El resultado anterior está de acuerdo con la ley de Lenz. En efecto, al moverse la barra la corriente inducida I dará lugar a un campo con sentido contrario a \mathbf{B} y se opondrá a la variación de flujo a través del circuito.

3) Sobre la barra actúa una fuerza magnética $\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}$, donde \mathbf{B} es uniforme y \mathbf{L} tiene la dirección de la corriente y módulo la longitud de la barra. Se obtiene que

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B} = I (-L \mathbf{u}_y) \times (B \mathbf{u}_z) = -ILB \mathbf{u}_x.$$

En consecuencia, se deberá aplicar una fuerza mecánica \mathbf{F}_{mec} con igual módulo, dirección, pero distinto sentido, que anule la fuerza magnética, para que la barra se mueva con velocidad constante, tal como se muestra en la Figura 7.9.

La energía mecánica aportada en un desplazamiento dx vale

$$dW = F_{mec} dx = ILB dx,$$

y la potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = ILBv.$$

La potencia consumida en la resistencia será igual a

$$P = RI^2 = vBLI = \mathcal{E}I,$$

siendo ambos resultados coincidentes.

En régimen permanente, la potencia mecánica suministrada al circuito se transforma en potencia calorífica que da la resistencia al medio ambiente.

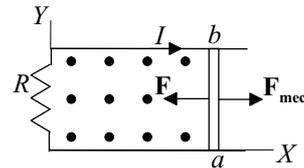


Figura 7.9. Esquema de las fuerzas sobre la barra.

7.4 Se dispone de una espira rectangular, de lados L_1 y L_2 , inicialmente en el plano XZ , con su centro coincidente con el origen de coordenadas, y con sus lados paralelos a los ejes. En la región del espacio donde está la espira existe un campo uniforme y estacionario del tipo $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_y$. Dicha espira gira con una $\omega = \omega \mathbf{u}_x$ de forma que el eje de giro pasa por su centro. Determinar la f.e.m. inducida en la espira y la d.d.p. entre terminales.

Resolución

La causa de aparición de la f.e.m. es el movimiento de la espira en presencia de \mathbf{B} . La f.e.m. vendrá determinada por

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Primero se resuelve el ejercicio aplicando la regla del flujo y posteriormente calculando la circulación del campo. En el cálculo de la f.e.m. el sentido de circulación seguido es el indicado en la Figura 7.10(a), el vector superficie asociado también se ha indicado en dicha figura.

La Figura 7.10 muestra la espira en en instante t , el flujo será igual a

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS \cos(\omega t) = B \cos(\omega t) \int_S dS = BS \cos(\omega t) = BL_1 L_2 \cos(\omega t),$$

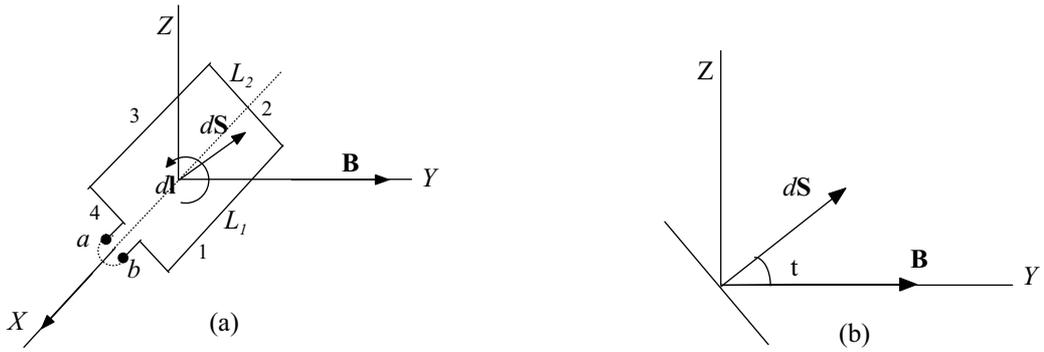


Figura 7.10. (a) Esquema de la espira que gira con ω en presencia de un campo \mathbf{B} . (b) Sección en el plano YZ .

pues $d\mathbf{S} = dS[\cos(\omega t) \mathbf{u}_y + \sin(\omega t) \mathbf{u}_z]$, como muestra la Figura 7.10(b), $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_y$ y $S = L_1 L_2$. Finalmente, la f.e.m. viene dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin(\omega t) .$$

Para relacionar la f.e.m. y la d.d.p. se sigue el mismo razonamiento que en el Ejercicio 7.3 para la barra conductora. Se supone que el conductor de la espira es ideal, de forma que el campo \mathbf{E}_{ef} en el interior del conductor es cero. Debido al campo $\mathbf{E}_{ns} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ se origina una acumulación de cargas en los terminales a y b , cuyo campo asociado \mathbf{E}_i (en el interior) equilibra al campo \mathbf{E}_{ns} , resultando $\mathbf{E}_{ef} = 0$ en la espira conductora. En el exterior existirá un campo debido a la acumulación de cargas, $\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}_e = -\nabla V$. Expresando la circulación de \mathbf{E}_{ef} en la línea cerrada como suma de dos términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_{bab} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ba \text{ (espira)}} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} + \int_{ab \text{ (exterior)}} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 + \int_{ab \text{ (exterior)}} (-\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b -dV = V_a - V_b \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = V} . \end{aligned}$$

Esta d.d.p. es debida a la acumulación de cargas en los extremos.

Si se repite el cálculo de la f.e.m., determinando $\mathcal{E} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$, siguiendo el camino de ba (espira) y ab (exterior), el resultado es el mismo, como se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_{bab} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \int_{bab} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ba \text{ (espira)}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{(\text{lado1})} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{(\text{lado3})} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned}$$

ya que la integral $\int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo de los lados 2 y 4 es cero, pues en dichos lados $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (paralelo a X) es perpendicular a $d\mathbf{l}$.

Para los otros lados:

- En el lado 1: $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB \sin(\omega t)(-\mathbf{u}_x) = -(\omega L_2/2)B \sin(\omega t)\mathbf{u}_x$ y $d\mathbf{l} = dx \mathbf{u}_x$.
- En el lado 3: $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = vB \sin(\omega t)\mathbf{u}_x = (\omega L_2/2)B \sin(\omega t)\mathbf{u}_x$ y $d\mathbf{l} = dx \mathbf{u}_x$.

Sustituyendo estos valores en la integral que determina \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{(\text{lado1})} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{(\text{lado3})} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{L_1/2}^{-L_1/2} -vB \operatorname{sen}(\omega t) dx + \int_{-L_1/2}^{L_1/2} vB \operatorname{sen}(\omega t) dx \\ &= 2vB \operatorname{sen}(\omega t)L_1 = 2\omega \frac{L_2}{2} B \operatorname{sen}(\omega t)L_1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = B\omega S \operatorname{sen}(\omega t)}. \end{aligned}$$

El dispositivo descrito en este ejercicio, que proporciona una d.d.p. alterna entre sus terminales, muestra el principio de funcionamiento del generador de corriente alterna o alternador.

7.5 Repetir el problema anterior si $\mathbf{B} = B_0 \operatorname{sen}(\omega_c t) \mathbf{u}_y$. Particularizar el resultado si $\omega = \omega_c$.

Resolución

En este caso la aparición de la f.e.m. es debida al movimiento de la espira y a que \mathbf{B} es no estacionario. Corresponde a un caso general donde se aplica la regla del flujo. Para el instante t de la Figura 7.10(a) del ejercicio anterior se tiene

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_0 \operatorname{sen}(\omega_c t) dS \cos(\omega t) = B_0 \operatorname{sen}(\omega_c t) \cos(\omega t) \int_S dS = B_0 S \operatorname{sen}(\omega_c t) \cos(\omega t),$$

donde $S = L_1 L_2$.

La f.e.m. se calcula según la ley de Faraday:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 S \omega_c \cos(\omega_c t) \cos(\omega t) + B_0 S \omega \operatorname{sen}(\omega_c t) \operatorname{sen}(\omega t)}.$$

El primer término representa la variación de flujo debido a que \mathbf{B} es no estacionario y el segundo al movimiento de la espira en presencia de \mathbf{B} .

Si $\omega = \omega_c$:

$$\boxed{\mathcal{E} = B_0 S \omega [-\cos^2(\omega t) + \operatorname{sen}^2(\omega t)] = -B_0 S \omega \cos(2\omega t)},$$

cuya frecuencia es doble que la de giro.

7.6 Por un solenoide ideal infinitamente largo circula una corriente $I = I_0 \cos(\omega t)$ (Figura 7.11). El número de espiras por unidad de longitud es n y su radio R . Calcular el campo eléctrico inducido en el interior y exterior al solenoide.

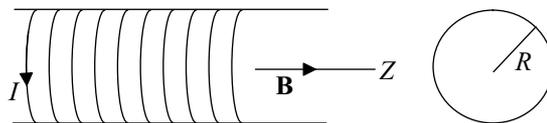


Figura 7.11. Esquema del solenoide y de su sección.

Resolución

Como $I = I_0 \cos(\omega t)$ el campo asociado no es estacionario por lo que habrá un campo \mathbf{E} inducido debido a la ley de Faraday.

Si se supone que la corriente varía lentamente, el campo $\mathbf{B} = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_z$ es uniforme y confinado al interior del solenoide. El campo inducido \mathbf{E} para puntos interiores y exteriores al solenoide se calcula en los apartados siguientes.

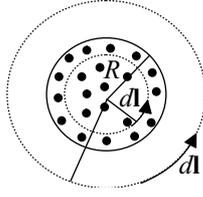


Figura 7.12. Esquema de una sección del solenoide y los caminos de circulación.

- Para puntos interiores ($\rho < R$):

Se determina la f.e.m. a lo largo de una circunferencia de radio ρ , situada en un plano perpendicular al eje del solenoide, tal como se muestra en la Figura 7.12, es decir $d\mathbf{l} = dl \mathbf{u}_\phi$. El $d\mathbf{S}$ asociado a un elemento de área del círculo limitado por la circunferencia es $d\mathbf{S} = dS \mathbf{u}_z$. La f.e.m. viene determinada por

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde el flujo será igual a

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S [\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_z] \cdot (dS \mathbf{u}_z) = \int_S \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) dS \\ &= \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \int_S dS = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) S = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi \rho^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la expresión de la f.e.m., se llega a

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d[\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi \rho^2]}{dt} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \pi \rho^2.$$

Por simetría la magnitud de \mathbf{E} es constante en los puntos de la circunferencia y tangente a ella. En los puntos interiores se obtiene:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint E_\phi dl = E_\phi \oint dl = E_\phi 2\pi \rho = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \pi \rho^2 \Rightarrow$$

$$E_\phi = \frac{\mu_0 n I_0 \omega \rho}{2} \sin(\omega t),$$

que muestra que en campo E_ϕ inducido aumenta proporcionalmente con la distancia.

- Para puntos exteriores ($\rho > R$):

Igualmente, siguiendo el $d\mathbf{l}$ de la Figura 7.12, el flujo será

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S [\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \mathbf{u}_z] \cdot (dS \mathbf{u}_z) = \int_S \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) dS \\ &= \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \int_S dS = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi R^2, \end{aligned}$$

ya que en el exterior del solenoide el campo es nulo.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el punto anterior se obtiene el campo inducido en el exterior, tal como se muestra a continuación,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d[\mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \pi R^2]}{dt},$$

$$\oint E_\phi dl = E_\phi \oint dl = E_\phi 2\pi\rho = \mu_0 n I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) \pi R^2 \Rightarrow$$

$$E_\phi = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2\rho} \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde se observa que en los puntos exteriores el campo inducido disminuye inversamente proporcional a la distancia.

7.7 Una espira circular de radio pequeño ($r=0,01$ m) está fija en el espacio. Una gran espira de radio $R=3$ m está situada en un plano paralelo a la primera, es coaxial con ella y se le acerca con una velocidad $v=50$ m/s. Calcular la f.e.m. inducida en la espira pequeña, si por la grande circula una corriente de $I=20$ A, cuando: 1) la distancia entre los planos de las espiras sea de 4 m. 2) la distancia sea nula.

Resolución

- Campo producido por la espira grande en su eje:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

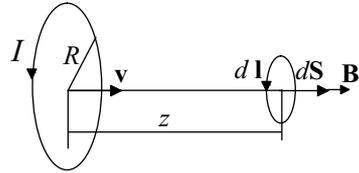


Figura 7.13. Esquema de las espiras, sentido de circulación y campo.

donde z es la distancia entre los centros de las espiras y la dirección es axial.

- Flujo a través de la espira pequeña:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = BS = B \pi r^2,$$

por ser el radio pequeño se ha supuesto que \mathbf{B} es uniforme e igual al del centro. Para el sentido de circulación $d\mathbf{l}$ seguido, $d\mathbf{S}$ es paralelo a \mathbf{B} .

- La f.e.m. en la espira pequeña tiene su origen en el campo no estacionario debido al movimiento de la espira grande. Se calcula \mathcal{E} evaluando la variación de flujo debido a dicho movimiento. La f.e.m. según el sentido $d\mathbf{l}$ es igual

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 \frac{IR^2}{2} \frac{(3/2)(R^2 + z^2)^{1/2} 2z (dz/dt)}{(R^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{3\pi r^2 \mu_0 IR^2 z (dz/dt)}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

donde $dz/dt = -v$.

- Si la separación entre las espiras es $z=4$ m, se obtiene

$$\mathcal{E} = \frac{3 \times 3,14 \times 0,01^2 \times 4 \times 3,14 \times 10^{-7} \times 20 \times 3^2 \times 4 \times (-50)}{2(3^2 + 4^2)^{5/2}} = -0,68 \times 10^{-8} \text{ V.}$$

- Si $z=0$, $\mathcal{E}=0$.

- 7.8** La Figura 7.14 muestra dos conductores rectilíneos de longitud infinita que no tienen contacto eléctrico entre sí. Por el conductor vertical circula una corriente continua de intensidad I_1 . Por el conductor horizontal circula una corriente alterna $I_2 = I_0 \text{sen}(\omega t)$. Se sitúa cada eje coordenado sobre un conductor. Un alambre en forma de espira cuadrada con sus lados paralelos a los ejes, de longitud L y resistencia óhmica R , se traslada sobre el plano XOY paralelamente al eje OX con velocidad constante v . Calcular la intensidad inducida en la espira en función del tiempo, si en $t = 0$ es $x = 0$. Se desprecia el efecto de autoinducción de la espira.

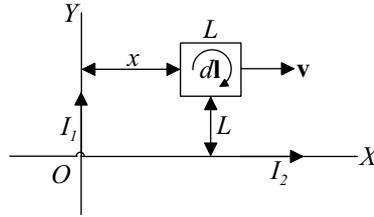


Figura 7.14. Esquema de los hilos, la espira, sentido de circulación utilizado y ejes coordenados.

Resolución

En este caso la aparición de la f.e.m. es debida tanto al movimiento como a que el campo magnético es no estacionario. Para determinar la f.e.m. se aplica la ley de Faraday: $\mathcal{E} = -(d\Phi/dt)$. El sentido de circulación es el marcado en la Figura 7.14, por tanto, $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{u}_z$. Primero se determina Φ en un instante t correspondiente a la posición de la figura, donde $x = vt$, después se calcula su variación con el tiempo para evaluar \mathcal{E} . Finalmente, se obtiene la intensidad inducida.

- Flujo a través de la espira debido a la corriente I_1 :

El campo debido a I_1 vale $\mathbf{B}_1 = (\mu_0 I_1)/(2\pi x)(-\mathbf{u}_z)$ y $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{u}_z = -L dx \mathbf{u}_z$.

El flujo elemental será

$$d\Phi_1 = \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} L dx,$$

y el total a través de la superficie de la espira

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_x^{x+L} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} L dx = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \int_x^{x+L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln(x)|_x^{x+L} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln \frac{(x+L)}{x} = \frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln \frac{(vt+L)}{vt}. \end{aligned}$$

- Flujo a través de la espira debido a I_2 :

El campo debido a I_2 vale $\mathbf{B}_2 = (\mu_0 I_2)/(2\pi y)(\mathbf{u}_z)$ y $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{u}_z = -L dy \mathbf{u}_z$.

Los valores del flujo elemental y total serán:

$$d\Phi_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi y} L dy,$$

$$\Phi_2 = -\frac{\mu_0 I_2 L}{2\pi} \int_L^{L+L} \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I_2 L}{2\pi} \ln \frac{L+L}{L} = -\frac{\mu_0 I_0 \text{sen}(\omega t) L}{2\pi} \ln(2).$$

- La f.e.m. resultante vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I_1 L}{2\pi} \ln \frac{(vt+L)}{vt} \right] - \frac{d}{dt} \left[-\frac{\mu_0 I_0 \operatorname{sen}(\omega t) L}{2\pi} \ln(2) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{L^2}{(vt+L)t} + \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \ln(2) \omega \cos(\omega t) \\ &= \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left[\frac{I_1 L}{(vt+L)t} + I_0 \ln(2) \omega \cos(\omega t) \right]. \end{aligned}$$

- La corriente inducida es igual

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 L}{2\pi R} \left[\frac{I_1 L}{(vt+L)t} + I_0 \ln(2) \omega \cos(\omega t) \right].$$

7.9 Una barra conductora ideal de longitud L se halla sujeta en el punto O formando un ángulo θ fijo con el eje OZ . Se hace rotar a dicha barra con una velocidad angular ω constante en torno a un eje que pasa por OZ en presencia de un campo magnético homogéneo y estacionario $\mathbf{B} = (0, 0, -B)$, tal como se muestra en la Figura 7.15(a). Determinar: 1) El valor de la f.e.m. inducida en la barra. 2) Suponiendo que el ángulo θ se pueda variar, ¿para qué valor de dicho ángulo la f.e.m. inducida es máxima?

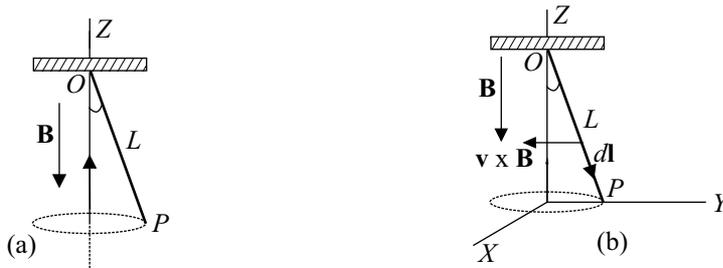


Figura 7.15. (a) Esquema de la barra, el campo y ω . (b) Esquema indicando el sentido de circulación, el campo \mathbf{E}_{ns} y los ejes.

Resolución

1) La f.e.m. es debida al movimiento de la barra en presencia de B estacionario. Si se sigue un camino cerrado OP (según la barra) y PO (por el exterior), se obtiene

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{OPO} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{OP} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l},$$

donde la integral queda limitada al camino OP a lo largo de la barra.

Para el sistema de ejes marcado en la Figura 7.15(b):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega \mathbf{u}_z) \times (y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z) = -\omega y \mathbf{u}_x.$$

En el sistema de referencia considerado se tiene que $\mathbf{B} = -B \mathbf{u}_z$ y como la barra está en el plano YZ , en general $d\mathbf{l} = (dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z)$. El sentido de circulación seguido en el cálculo de \mathcal{E} se tendrá en cuenta en los límites de la integral. La f.e.m. viene determinada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{OP} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{OP} [(-\omega y \mathbf{u}_x) \times (-B \mathbf{u}_z)] \cdot d\mathbf{l} = \int_{OP} (-\omega y B \mathbf{u}_y) \cdot (dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) \\ &= \int_{y=0}^{y=L \operatorname{sen} \theta} -B\omega y \, dy = \left. \frac{-B\omega y^2}{2} \right|_0^{L \operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{B\omega L^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2}} \end{aligned}$$

2) \mathcal{E} será máximo para $\theta = \pi/2$.

7.10 El circuito cuadrado de lado $L=5$ cm de la Figura 7.16 tiene una resistencia de $0,005 \, \Omega$ y se mueve en el plano de la figura con una velocidad de $0,02$ m/s en la dirección del eje X . En la región del espacio que atraviesa el circuito existen campos magnéticos de valores $1 \, \mathbf{u}_z$ T, 0 T y $-1 \, \mathbf{u}_z$ T sucesivamente en regiones cuyos Δx son 10 cm, tal como se indica en la figura. Se pide: 1) Intensidad que circula por el circuito en función de su posición, tomando como referencia la coordenada x del lado BD . Indicar el sentido asociado a la corriente resultante. 2) Representar gráficamente la intensidad calculada en función de la posición.

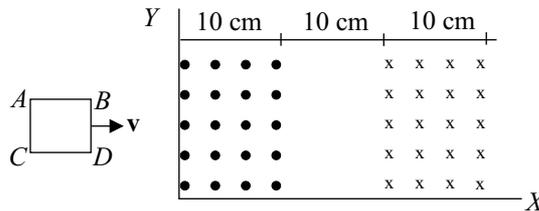


Figura 7.16. Esquema del campo y la espira en movimiento.

Resolución

1) La f.e.m. es debida al movimiento. Se puede determinar a partir de $\mathcal{E} = -(d\Phi/dt)$. En la resolución del ejercicio se utiliza la ley del flujo y se desprecia la autoinducción.

Primero se calcula el flujo $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ para las distintas posiciones del cuadrado, denominadas a, b, c, d, e, f y g en la Figura 7.17. A continuación, la f.e.m. $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ y, finalmente, $I = \mathcal{E}/R$. El sentido de circulación $d\mathbf{l}$ es antihorario, siendo $d\mathbf{S} = dS \mathbf{u}_z$.

- Para la zona a), $0 < x < 0,5$ cm, se obtiene:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (B \mathbf{u}_z) \cdot (dS \mathbf{u}_z) = \int_S B \, dS = BLx,$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BLv,$$

y la intensidad de corriente calculada en sentido antihorario es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-BLv}{R} = \frac{-1 \times 0,05 \times 0,02}{0,005} = -0,2 \text{ A},$$

es decir la densidad de corriente tendrá sentido horario. Como debido al movimiento el flujo aumenta, la corriente inducida crea un campo opuesto, de forma que se opone al aumento de flujo, de acuerdo con la ley de Lenz.

- Para la zona b), $0,5 \text{ cm} < x < 10$ cm, el resultado obtenido es

$$\Phi = \text{cte} \Rightarrow \mathcal{E} = 0 \Rightarrow I = 0.$$

- En c), $10\text{ cm} < x < 15\text{ cm}$, se llega a

$$\Phi = BL[0,10 - (x - L)] \Rightarrow \mathcal{E} = BLv \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R} = 0,2\text{ A},$$

que es positiva, el sentido de la corriente es antihorario como el utilizado en el cálculo. En el movimiento, el flujo disminuye y la corriente inducida crea un campo con el mismo sentido que el original, oponiéndose a dicha disminución.

- En d), $15\text{ cm} < x < 20\text{ cm}$, se obtiene $\Phi = \text{cte} \Rightarrow \mathcal{E} = 0 \Rightarrow I = 0$.
- En la zona e), $20\text{ cm} < x < 25\text{ cm}$, $\mathbf{B} = -B \mathbf{u}_z$ y siguiendo el mismo razonamiento los valores obtenidos son:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-B \mathbf{u}_z) \cdot (dS \mathbf{u}_z) = -BS = -BL(x - 0,20),$$

$$\mathcal{E} = BLv \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0,2\text{ A}.$$

- En f), $25\text{ cm} < x < 30\text{ cm}$, el flujo es constante, consecuentemente

$$\Phi = \text{cte} \Rightarrow \mathcal{E} = 0 \Rightarrow I = 0.$$

- Finalmente, para g), $30\text{ cm} < x < 35\text{ cm}$, los valores correspondientes son

$$\Phi = -BL(0,30 - (x - L)) \Rightarrow \mathcal{E} = -BLv \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -0,2\text{ A}.$$

2) En la Figura 7.17 se muestran los valores de I en función de la posición.

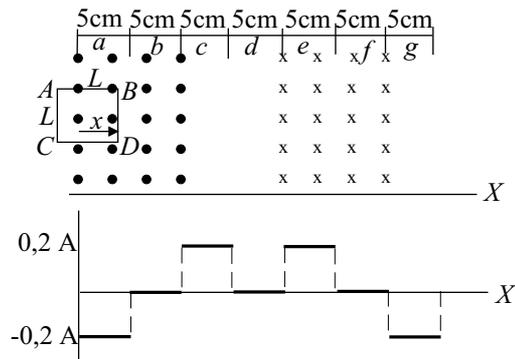


Figura 7.17. Corriente inducida en función de la posición de la espira en movimiento.

7.11 El circuito de la Figura 7.18, formado por una semicircunferencia y su diámetro de valor $D = 40\text{ cm}$, y resistencia eléctrica $R = 10\ \Omega$, empieza a girar, con $\omega = 50\text{ rad s}^{-1}$, en el sentido indicado, alrededor de un eje normal al plano del dibujo y que pasa por el centro de la circunferencia. Hay un campo \mathbf{B} constante, de módulo 1 T , dirigido hacia el observador y limitado al semiespacio superior de la figura. Calcular la intensidad que circula en función del tiempo y representarla gráficamente. Se desprecia la autoinducción.

Resolución

La causa de la aparición de la f.e.m. es el movimiento en presencia de \mathbf{B} . La f.e.m. se puede calcular como $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = -(d\Phi/dt)$.

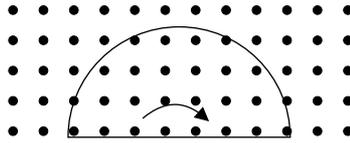


Figura 7.18. Esquema de la espira en la posición inicial.

El movimiento es periódico, siendo $T = 2\pi/\omega$. Si $0 < t < (T/2) = \pi/\omega$ el flujo disminuye, pero para $\pi/\omega < t < T = 2\pi/\omega$ el flujo aumenta. Se estudiarán dos posiciones correspondientes a dichos intervalos de tiempo.

- Para $0 < t < T/2 = \pi/\omega$, Figura 7.19:

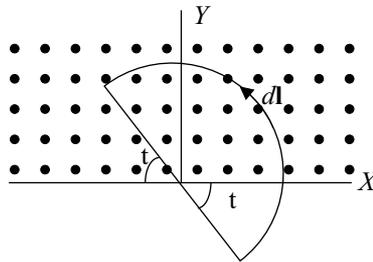


Figura 7.19. Posición de la espira para $0 < t < \pi/\omega$.

Siguiendo el sentido de circulación marcado, antihorario, $d\mathbf{S} = dS \mathbf{u}_z$, y para el sistema de ejes indicado, $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$. El flujo vendrá dado por

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = B \int_S dS = BS' = B \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{1}{8} D^2 \omega t \right),$$

donde S' es el área de la porción de la espira donde hay campo, coincidente con el área del semicírculo menos el área del sector circular inferior de ángulo ωt .

La f.e.m. será

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{BD^2\omega}{8}.$$

Finalmente, la corriente viene dado por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BD^2\omega}{8R} = \frac{1 \times 0,40^2 \times 50}{8 \times 10} = 0,1 \text{ A}.$$

El sentido de la corriente inducida coincide con el de circulación (antihorario) y creará un campo que se opone a la disminución del flujo.

- Para $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$, Figura 7.20, y para el sentido de circulación marcado, $d\mathbf{S} = dS \mathbf{u}_z$, el flujo, la f.e.m. e I serán:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS = B \int_S dS = BS' = B \left[\frac{1}{8} D^2 (\omega t - \pi) \right],$$

donde S' es el área limitado por la espira donde hay campo, es decir el sector de ángulo $(\omega t - \pi)$. La f.e.m. y la intensidad son iguales a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BD^2\omega}{8},$$

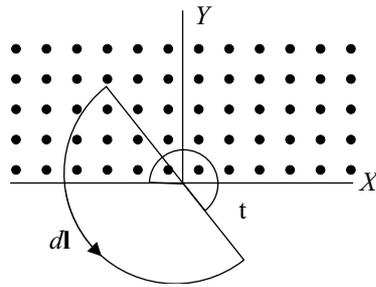


Figura 7.20. Posición de la espira para $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BD^2\omega}{8R} = -\frac{1 \times 0,40^2 \times 50}{8 \times 10} = -0,1 \text{ A.}$$

El sentido de la corriente inducida es contrario al de circulación, tendrá sentido horario y creará un campo que se opone al aumento del flujo.

La intensidad inducida en función del tiempo es la representada en la Figura 7.21.

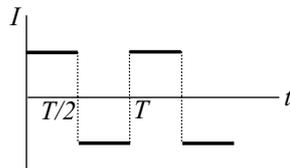


Figura 7.21. Corriente inducida en la espira en función del tiempo.

7.12 En la Figura 7.22 se representa un circuito fabricado con un hilo de cobre de resistencia por unidad de longitud β ($\beta = R/l$), que consta de una circunferencia de radio r y un diámetro. Dicho sistema gira alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura con una velocidad angular constante $\omega = \omega \mathbf{u}_z$, en presencia de un campo magnético uniforme y estacionario $\mathbf{B} = -B\mathbf{u}_z$ que sólo existe en la mitad derecha, esto es, para $x > 0$. El conjunto comienza a girar partiendo de la posición en que el diámetro cd coincide con la línea vertical ab . Para un instante arbitrario t tal que $0 < t < \pi/\omega$, se pide: 1) Calcular las corrientes inducidas en cada rama del circuito. Tómense en el cálculo de las intensidades los sentidos indicados en la figura. 2) Calcular la diferencia de potencial $V_a - V_b$.

Nota: Se desprecia la autoinducción.

Datos: $B = 10^{-3} \text{ T}$; $f = 10 \text{ Hz}$; $r = 50 \text{ cm}$; $\beta = 5 \times 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m}$.

Resolución

1) Es un circuito formado por dos nudos, c y d , tres ramas (cd , dac y dbc) y dos mallas ($cdac$ y $cdbc$). Se aplican las leyes de Kirchhoff al circuito de la Figura 7.22, es decir,

$$\begin{aligned} \sum I &= 0 && \text{(para los nudos) ,} \\ \sum \mathcal{E}_i &= \sum R_i I_i && \text{(para las mallas independientes).} \end{aligned}$$

- Primero se calculará la f.e.m. \mathcal{E}_1 a lo largo del camino $cdbc$. Para este sentido de circulación $d\mathbf{S} = dS(-\mathbf{u}_z)$. $\mathbf{B} = -B(\mathbf{u}_z)$ es uniforme, estacionario, y está confinado a la región señalada. Hay que calcular el flujo a través del semicírculo definido por $cdbc$ pero sólo contribuirá la superficie S' donde hay campo (área del sector $cobc$). En el instante t , la posición del circuito,

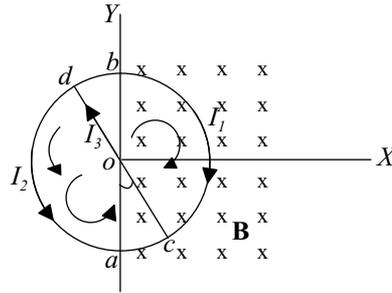


Figura 7.22. Esquema de la espira en un instante t indicando los sentidos para el cálculo de las intensidades y los de circulación.

definida por θ , es $\theta = \omega t = 2\pi ft$. La f.e.m. es igual a

$$\mathcal{E}_1 = \oint_{cdbc} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_1}{dt},$$

donde

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} (-B \mathbf{u}_z) \cdot (-dS \mathbf{u}_z) = BS' = B \left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \theta \right) = B \left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \omega t \right),$$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{1}{2} \omega B r^2.$$

- Igualmente a lo largo del camino $cdac$, para el sentido de circulación marcado, $d\mathbf{S} = dS(\mathbf{u}_z)$, y en el cálculo del flujo sólo contribuirá la superficie S' donde hay campo (área $coac$). La f.e.m. \mathcal{E}_2 será igual

$$\mathcal{E}_2 = \oint_{cdac} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_2}{dt},$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (-B \mathbf{u}_z) \cdot (dS \mathbf{u}_z) = -BS' = -B \left(\frac{1}{2} r^2 \theta \right) = -B \left(\frac{1}{2} r^2 \omega t \right),$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{2} \omega B r^2.$$

Aunque se han calculado \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , resulta interesante realizar un análisis detallado del campo no electrostático. En los tramos bd , da y od es $\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_{ns} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. En el conductor bca la velocidad de las cargas es tangencial y $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es radial hacia o , luego $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$. Por tanto, la única contribución a la f.e.m. proviene de co y en el instante t de la Figura 7.22 es tanto para la malla 1 como para la 2:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^0 -\omega \rho B d\rho = \frac{1}{2} \omega B r^2.$$

Al aplicar las leyes de Kirchhoff se tiene

- En el nudo d :

$$I_3 = I_1 + I_2$$

- En la malla $cdbc$:

$$\mathcal{E}_1 = R_{cd} I_3 + R_{dbc} I_1,$$

donde $R_{cd} = 2r\beta$ y $R_{dbc} = \pi r\beta$.

- En la malla $cdac$:

$$\mathcal{E}_2 = R_{cd}I_3 + R_{dac}I_2,$$

donde $R_{dac} = \pi r\beta$.

- El sistema de ecuaciones obtenido será:

$$\left. \begin{aligned} I_3 &= I_1 + I_2 \\ \frac{1}{2}\omega Br^2 &= 2r\beta I_3 + \pi r\beta I_1 \\ \frac{1}{2}\omega Br^2 &= 2r\beta I_3 + \pi r\beta I_2 \end{aligned} \right\}$$

- Cuya solución viene dada por:

$$I_1 = I_2 = \frac{Br^2\omega}{8r\beta + 2\pi r\beta} \quad ; \quad I_3 = 2I_1 = \frac{Br^2\omega}{4r\beta + \pi r\beta}.$$

- Para los datos numéricos dados:

$$I_1 = I_2 = \frac{10^{-3} \times 0,5^2 \times (2 \times \pi \times 10)}{8 \times 0,50 \times 5 \times 10^{-3} + 2 \times \pi \times 0,50 \times 5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{I_1 = I_2 = 0,43 \text{ A} ,}$$

$$\boxed{I_3 = 2I_1 = 0,86 \text{ A} .}$$

2) Las resistencias de los tramos ad y db son $R_{ad} = (\pi r - r\omega t)\beta$ y $R_{db} = r\omega t\beta$, respectivamente. Por aplicación de la ley de Ohm se llega al resultado :

$$V_a - V_b = (V_a - V_d) + (V_d - V_b) = -R_{ad}I_2 + R_{db}I_1 = -(\pi r - r\omega t)\beta I_2 + r\omega t\beta I_1.$$

Sustituyendo los datos numéricos:

$$V_a - V_b = -\pi \times 0,50 \times 5 \times 10^{-3} \times 0,43 + 2 \times 0,50 \times (2 \times \pi \times 10) \times t \times 5 \times 10^{-3} \times 0,43 \Rightarrow$$

$$\boxed{V_a - V_b = -3,37 \times 10^{-3} + 0,135t \text{ V} .}$$

7.13 La Figura 7.23 muestra un núcleo toroidal de permeabilidad relativa μ_r y sección rectangular, donde se han devanado dos arrollamientos, 1 y 2, de terminales b y c y d y e , respectivamente. El primero tiene N_1 espiras y el segundo N_2 , ambas homogéneamente distribuidas a lo largo de la longitud del núcleo. Calcular: 1) El coeficiente de autoinducción de la bobina 1 y el de la bobina 2. 2) El coeficiente de inducción mutua. No hay flujo disperso.

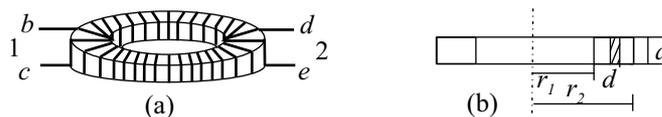


Figura 7.23. (a) Núcleo toroidal con dos devanados 1 y 2. (b) Sección del núcleo.

Resolución

1) El coeficiente de autoinducción de la bobina 1 es $L_1 = d\Phi_{11}/dI_1$, donde Φ_{11} es el flujo a través de dicha bobina del campo \mathbf{B}_1 asociado a su propia corriente I_1 .

- Primero se calcula \mathbf{H}_1 a partir de la ley de Ampère, para lo que se determinará su circulación a lo largo de una circunferencia Γ de radio ρ interior al solenoide. Como el material es lineal, $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$. Los valores obtenidos para dichos campos son:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = N_1 I_1 \Rightarrow H_1 = \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1}{2\pi\rho},$$

la dirección de ambos es tangencial.

- El flujo total a través de todas las espiras del solenoide 1 es $\Phi_{11} = N_1\Phi_1$, donde Φ_1 es el flujo a través de una sola espira. El área elemental de una espira puede expresarse como $dS_1 = ad\rho$, véase Figura 7.23(b), el vector superficie asociado tiene una dirección perpendicular al plano de la figura, igual que el campo. El flujo elemental y total a través de una espira serán:

$$d\Phi_1 = \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = B_1 ad\rho = \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1}{2\pi\rho} ad\rho,$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1 a}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

- Finalmente, el flujo total Φ_{11} y el coeficiente de autoinducción L_1 vendrán determinados por las expresiones:

$$\Phi_{11} = N_1\Phi_1 = \frac{\mu_0\mu_r N_1^2 I_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

$$L_1 = \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} = \frac{\mu_0\mu_r N_1^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Se observa que el coeficiente de autoinducción depende de la geometría del circuito y las características del medio.

El solenoide 2 está devanado en el mismo núcleo y sólo varía el número de espiras, en este caso N_2 . Si en dicho solenoide la intensidad es I_2 y se calcula $L_2 = d\Phi_{22}/dI_2$, siguiendo el mismo razonamiento se obtiene

$$L_2 = \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} = \frac{\mu_0\mu_r N_2^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

El resultado obtenido muestra que $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2$.

2) Para calcular el coeficiente de inducción mutua M , se determina el flujo a través del solenoide 2, Φ_{21} , debido al campo asociado a I_1 , siendo $M = d\Phi_{21}/dI_1$. Como la geometría de 2 es igual que la de 1, el flujo a través de una espira de 2 debida al campo de 1 coincidirá con Φ_1 . El flujo total se calculará multiplicando por el número de vueltas N_2 . Teniendo en cuenta estas consideraciones se llega a

$$\Phi_{21} = N_2 \frac{\mu_0\mu_r N_1 I_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow M = \frac{\mu_0\mu_r N_1 N_2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

El coeficiente de inducción mutua se puede expresar como $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

- 7.14** Calcular el coeficiente de inducción mutua entre una espira conductora cuadrada de lado a y un hilo recto muy largo, tal como se muestra en la Figura 7.24. Dos lados son paralelos al hilo y la distancia del lado más próximo a dicho hilo es b .

Resolución

La forma más sencilla de resolver el ejercicio es suponer que por el hilo largo, denominado circuito 1 y que se cierra mediante conductores situados a gran distancia, circula una corriente I_1 y posteriormente calcular el flujo Φ_{21} del campo asociado a I_1 a través de la espira (circuito 2). El coeficiente de inducción mutua será $M = d\Phi_{21}/dI_1$.

El campo B_1 debido a la corriente del hilo es $B_1 = \mu_0 I_1 / 2\pi\rho$, siendo la dirección tangencial.

El flujo a través de la espira vale

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} B_1 dS_2 = \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} a d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

El coeficiente de inducción mutua es igual a

$$M = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

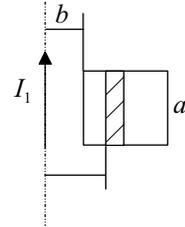


Figura 7.24. Espira e hilo.

7.15 Un núcleo paramagnético, de $\chi_m = 0,5$, de forma toroidal, de revolución en torno al eje vertical ee' , con una sección recta en forma de triángulo equilátero, de altura a , tal como se muestra en la Figura 7.25(a). Sobre el núcleo está arrollada una bobina de N espiras triangulares apretadas. 1) Calcular el coeficiente de autoinducción. 2) Aplicarlo al caso en que $a=20$ cm, y el número de espiras $N=3000$.

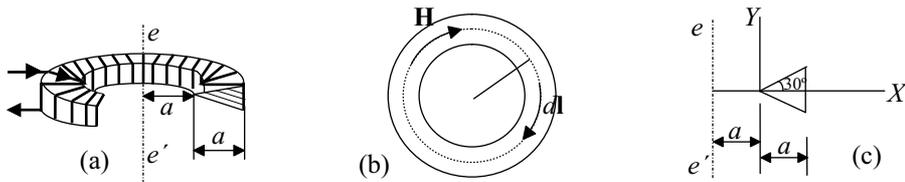


Figura 7.25. (a) Núcleo con sección triangular. (b) Planta del conjunto y circunferencia utilizada en el cálculo del campo \mathbf{H} . (c) Sección y ejes utilizados.

Resolución

1) El coeficiente de autoinducción viene dado por $L = d\Phi/dI$, donde Φ es el flujo debido al campo B que crea una corriente I circulando por las espiras del solenoide. Como existe un medio material en el interior se determinará primero H .

- La determinación de H se realiza a partir de la ley de Ampère $\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$. La curva de integración es una circunferencia de radio ρ interior al núcleo, como muestra la Figura 7.25(b). Como hay simetría de revolución, se obtiene

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H2\pi\rho = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi\rho},$$

cuya dirección es tangencial y sólo depende de ρ .

- Conocido H , al ser el material lineal, es inmediata la determinación de B , que viene dado por

$$B = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu_0(1 + \chi_m)\frac{NI}{2\pi\rho}.$$

- El flujo Φ_1 a través de una espira del solenoide es $\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B dS$, ya que en una sección $d\mathbf{S}$ es paralelo al campo. El flujo en una sección se puede expresar como

$$\Phi_1 = \int_S B dS = \int_S \mu_0(1 + \chi_m) \frac{NI}{2\pi\rho} dS.$$

- El flujo total Φ a través de todas las espiras del solenoide es $\Phi = N\Phi_1$. Para el sistema de ejes señalados en la Figura 7.25(c), $dS = dx dy$. La recta superior del triángulo es $y = x \operatorname{tg} 30^\circ$, la inferior $y = -x \operatorname{tg} 30^\circ$ y $\rho = a + x$. Los límites de x varían entre 0 y a . Sustituyendo estos valores en Φ_1 , se obtiene que el flujo total es

$$\begin{aligned} \Phi &= N\Phi_1 = N \int_S \mu_0(1 + \chi_m) \frac{NI}{2\pi\rho} dS = \int_0^a \int_{-x \operatorname{tg} 30^\circ}^{x \operatorname{tg} 30^\circ} \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{2\pi(a+x)} dy dx \\ &= \int_0^a \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{2\pi(a+x)} \left[\int_{-x \operatorname{tg} 30^\circ}^{x \operatorname{tg} 30^\circ} dy \right] dx = \int_0^a \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{2\pi(a+x)} [2x \operatorname{tg} 30^\circ] dx \\ &= \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{\pi} \operatorname{tg} 30^\circ \int_0^a \frac{x}{a+x} dx = \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{\pi} \operatorname{tg} 30^\circ \int_0^a \left(1 - \frac{a}{a+x} \right) dx \\ &= \mu_0(1 + \chi_m) \frac{N^2 I}{\pi} \operatorname{tg} 30^\circ (x|_0^a - a \ln(a+x)|_0^a) \\ &= \frac{\mu_0(1 + \chi_m) N^2 I \operatorname{tg} 30^\circ a (1 - \ln 2)}{\pi}. \end{aligned}$$

- El coeficiente de autoinducción será

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) N^2 \operatorname{tg} 30^\circ a (1 - \ln 2)}{\pi}.$$

2) Para los datos numéricos

$$L = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times (1 + 0,5) \times 3000^2 \times \operatorname{tg} 30^\circ \times 0,20 \times (1 - \ln 2)}{\pi} \Rightarrow L = 0,19 \text{ H}.$$

7.16 Un material ferromagnético en forma de toro, de longitud $10/\pi$ metros, tiene un entrehierro de $1 \mu\text{m}$. Se arrolla una serie de espiras a su alrededor y se lleva el material virgen a saturación. Las características de su ciclo de histéresis son las siguientes: entre A y C existe la relación $B^2 = kH - b$ y entre D y C $3B^2 = kH + b$; $k=1$ y $b=1$ en el S.I. y análogamente la parte inferior del ciclo, tal como se muestra en la Figura 7.26. 1) Calcular el módulo del campo magnético B en el entrehierro al anular la intensidad de corriente. 2) Se hace circular por el devanado una corriente alterna capaz de saturar el material en cada ciclo. Se pide determinar el número de ciclos necesarios para que el material aumente su temperatura en 400°C , suponiendo que el núcleo está térmicamente aislado. La densidad del material ferromagnético es 8 kg/dm^3 y su calor específico $c = 1 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

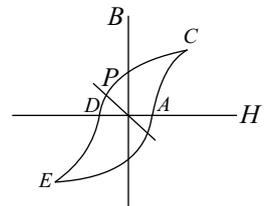


Figura 7.26. Ciclo de histéresis y recta (B , H) obtenida aplicando la ley de Ampère.

Resolución

1) Sean los campos: B , H y B_e , H_e en el material ferromagnético y en el entrehierro, respectivamente. La longitud de la línea media en el material es $\ell = 10/\pi \text{ m}$ y la del entrehierro $e = 10^{-6} \text{ m}$. Se supone que no hay flujo disperso $B = B_e$.

Si se aplica la Ley de Ampère a la línea cerrada a lo largo del camino medio en el material y en el entrehierro se obtiene

$$H\ell + H_e e = 0,$$

donde se ha tenido en cuenta que $I = 0$ una vez saturado el material. Por otra parte, $B = B_e = \mu_0 H_e$. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se llega a que $B = -(\mu_0 \ell / e)H$. Si se dibuja esta recta junto con el ciclo se obtiene como intersección el punto P de la Figura 7.26. El otro punto de intersección con el ciclo no es válido, ya que como previamente se ha saturado el material el primer punto alcanzado es el P .

Para determinar el campo B en P es necesario calcular matemáticamente la intersección de la curva CD con la citada recta.

$$\left. \begin{aligned} 3B^2 &= H + 1 \\ B &= -\frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times (10/\pi)H}{10^{-6}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3B^2 + 0,25B - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0,54 \text{ T} .}$$

2) La intersección de las curvas AC y CD se produce en $H_C = 2 \text{ Am}^{-1}$ y $B_C = 1 \text{ T}$. En un ciclo la energía perdida por unidad de volumen es: $w_1 = \oint HdB$ (Ecuación 7.26), que representa el área encerrada por el ciclo de histéresis. En este caso, para las curvas dadas en la figura y teniendo en cuenta que el area superior es igual a la inferior, se obtiene

$$\begin{aligned} w_1 &= 2 \left[\int_A^C HdB + \int_C^D HdB \right] = 2 \left[\int_0^1 (B^2 + 1)dB + \int_1^0 (3B^2 - 1)dB \right] \\ &= 2 \left(\frac{B^3}{3} + B \right) \Big|_0^1 + 2 \left(\frac{3B^3}{3} - B \right) \Big|_0^1 = 2 \left[\frac{1}{3} + 1 + 1 - 1 \right] = \frac{8}{3} \text{ J/m}^3 \text{ ciclo.} \end{aligned}$$

Se ha tenido en cuenta que el valor de B en los puntos A y D es cero y en C vale 1 T .

En n ciclos, la energía interna U adquirida por el material ferromagnético es igual a $U = nw_1V$, donde V es el volumen del material. Esta energía se puede expresar como $U = mc\Delta T$, siendo m la masa del material ferromagnético, c su calor específico a volumen constante y ΔT el incremento de temperatura. Igualando ambas cantidades se obtiene: $mc\Delta T = nw_1V$. Si se tiene en cuenta que la densidad es igual a m/V , el número de ciclos, para un $\Delta T = 400 \text{ }^\circ\text{C}$, es igual a

$$\boxed{n = \frac{m c \Delta T}{V w_1} = \frac{8 \times 10^3 \times 1 \times 400}{(8/3)} = 1,2 \times 10^6 .}$$

7.17 Determinar el coeficiente de autoinducción de un solenoide recto muy largo de radio $R=2 \text{ cm}$, longitud $\ell=80 \text{ cm}$ y número de espiras $N=1000$ uniformemente distribuidas. Comparar el resultado con el obtenido utilizando en el cálculo las expresiones de la energía.

Resolución

- Primero se determinará $L = d\Phi/dI$. Es conocido que el campo debido a una corriente I circulando por un solenoide muy largo es, salvo en las proximidades de sus extremos, uniforme y está confinado al interior del solenoide. Si se supone que el eje Z es el del solenoide y que $n = N/\ell$ es el número de espiras por unidad de longitud, se obtiene: $\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{u}_z$. El flujo a través de una espira es $\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BS = \mu_0 n I \pi R^2$, ya que \mathbf{B} es uniforme y paralelo a $d\mathbf{S}$ y $S = \pi R^2$. El flujo total $\Phi = N\Phi_1 = N\mu_0 n I \pi R^2$. Por tanto, el valor obtenido para el coeficiente de autoinducción L es

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = N\mu_0 n \pi R^2 \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 n^2 \pi R^2 \ell .}$$

Para los datos numéricos $N = 1000$, $R=0,02 \text{ m}$, $\ell=0,8 \text{ m}$, se obtiene $n=1000/0,8=1250 \text{ m}^{-1}$. L es igual a

$$L = 4 \times \pi \times 10^{-7} \times 1250^2 \times \pi \times 0,02^2 \times 0,80 = 1,97 \text{ mH.}$$

- Otra forma de resolver el ejercicio es calcular la energía magnética en función de la corriente y el potencial vector \mathbf{A} , e igualar el resultado a $(1/2)LI^2$. En este caso la corriente en las espiras del solenoide es equivalente a una densidad de corriente superficial $\mathbf{j}_s = nI \mathbf{u}_\phi$, distribuida sobre la superficie del solenoide. El potencial vector debido a la corriente del solenoide (véase Ejercicio 10.21) es igual a

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2\rho} \mathbf{u}_\phi \quad (\text{puntos exteriores}) \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I \rho}{2} \mathbf{u}_\phi \quad (\text{puntos interiores}).$$

En la superficie del solenoide, $\rho = R$ y $\mathbf{A} = \mu_0 n I R / 2 \mathbf{u}_\phi$. Si la Expresión 7.22 se particulariza para una distribución superficial de corriente, siendo el elemento de superficie el correspondiente a la superficie cilíndrica del solenoide, del tipo $dS = R d\phi dz$, se obtiene

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{j}_s \cdot \mathbf{A}) dS = \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} nI \frac{\mu_0 n I R}{2} R d\phi dz = \frac{1}{4} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \int_0^\ell \int_0^{2\pi} d\phi dz \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \pi \ell. \end{aligned}$$

Igualando este resultado a $U_m = (1/2)LI^2$, se llega

$$\frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \pi \ell = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow L = \mu_0 n^2 R^2 \pi \ell,$$

que coincide con el anterior.

- También se puede resolver el ejercicio determinando la energía asociada al espacio donde hay campo magnético. Como se vio en el Apartado 7.3.1, para medios lineales

$$U_m = \int_V u_m dV, \quad \text{donde} \quad u_m = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow U_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV.$$

En este caso $B = \mu_0 n I$. Sólo hay campo apreciable en el interior del solenoide. Se obtiene que

$$\begin{aligned} U_m &= \int_V \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 \int_V dV = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 \pi R^2 \ell \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 R^2 \pi \ell, \end{aligned}$$

que igualado a $U_m = (1/2)LI^2$ conduce al resultado $L = \mu_0 n^2 R^2 \pi \ell$.

- 7.18** Calcular el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de una línea coaxial (Figura 7.27). Dicha línea está formada por un cilindro conductor no imantable muy largo de radio $r_1=2$ mm por el que circula una corriente I uniformemente distribuida y una superficie conductora cilíndrica de radio $r_2=6$ mm, con una corriente de retorno de sentido opuesto a la anterior.

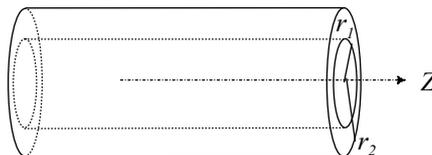


Figura 7.27. Esquema de la línea coaxial.

Resolución

Se supone que se puede despreciar el efecto de bordes. Teniendo en cuenta que hay simetría cilíndrica, los campos se pueden determinar fácilmente a partir de la ley de Ampère. Aplicando dicha ley a una circunferencia coaxial de radio ρ se obtiene:

- Si $0 \leq \rho \leq r_1$:

$$H_\phi 2\pi\rho = \frac{\pi\rho^2}{\pi r_1^2} I \Rightarrow H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi r_1^2} \Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi r_1^2}.$$

- Para $r_1 \leq \rho \leq r_2$:

$$H_\phi 2\pi\rho = I \Rightarrow H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

- Para $\rho \geq r_2$, la corriente encerrada es cero y $B_\phi = 0$.

Si se considera una longitud de sistema ℓ , la energía magnética por unidad de volumen u_m (Ecuación 7.24) y la total U_m asociada a cada porción, vienen determinadas por los siguientes valores. Un elemento de volumen es $dV = \rho d\rho d\phi dz$.

- Para $0 \leq \rho \leq r_1$ (porción interna):

$$u_{m1} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 r_1^4} \quad \text{y} \quad U_{m1} = \int_{V_1} u_{m1} dV,$$

$$U_{m1} = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 r_1^4} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r_1^4} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{r_1} \rho^3 d\rho \right] d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{16\pi}.$$

- Para $r_1 \leq \rho \leq r_2$ (porción “externa” situada entre ambos conductores):

$$u_{m2} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2},$$

$$U_{m2} = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 \rho^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\rho}{\rho} \right] d\phi dz = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ell \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

- Para $\rho > r_2$ no hay campo y, consecuentemente, tampoco energía asociada.

La energía total $U_m = U_{m1} + U_{m2}$ también es igual $(1/2)LI^2$, es decir

$$\frac{\mu_0 I^2 \ell}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ell \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{1}{2} LI^2.$$

La autoinducción de la línea para la longitud ℓ y la autoinducción por unidad de longitud son:

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}.$$

El primer sumando representa la contribución del conductor interno y es independiente de su radio, se suele denominar autoinducción “interna”. Este término es normalmente pequeño respecto al otro y no existiría si el conductor fuera hueco. El cálculo del coeficiente de autoinducción asociado a un sistema con corriente distribuida en un volumen, tal como es el conductor de radio r_1 , resulta conveniente realizarlo a partir de la energía del campo asociada. El segundo término es debido al flujo entre ambos conductores, por lo que es conocido como autoinducción “externa” y es el término más importante.

Para los datos numéricos:

$$\frac{L}{\ell} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7}}{8 \times \pi} + \frac{4 \times \pi \times 10^{-7}}{2 \times \pi} \ln(3) = 0,05 \times 10^{-6} + 0,22 \times 10^{-6} = 0,27 \mu\text{H/m}.$$

7.19 La Figura 7.28(a) muestra dos líneas bifilares, cada una está compuesta por dos hilos conductores largos paralelos por los que circulan corrientes iguales de sentido contrario. Dichas líneas están situadas en planos paralelos y sus características geométricas están indicadas en la figura. Los sentidos de las corrientes también están dibujados en los cuatro hilos. Estimar el coeficiente de inducción mutua por unidad de longitud.



Figura 7.28. (a) Sección representando dos líneas bifilares. (b) Campo producido por la línea inferior en el punto medio de la superior.

Resolución

Se supone que el radio de los cilindros conductores es pequeño frente a a .

- Primero se determinará el campo debido a una corriente I en los conductores de la línea inferior en el punto medio de la superior, véase Figura 7.28(b). Como el módulo del campo debido a cada hilo es el mismo, las componentes horizontales se anulan y el campo resultante es vertical y de valor

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha, \text{ donde } \cos \alpha = \frac{a}{2r} \text{ y } r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2} = 2,06a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi \times 2 \times 2,06^2 \times a} .$$

- Para una longitud ℓ y si se toma para el campo el valor en el punto medio de la línea superior, el flujo a través del rectángulo superior se puede estimar como

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 I}{\pi \times 2 \times 2,06^2 \times a} a\ell = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi \times 2 \times 2,06^2} .$$

- El coeficiente de inducción mutua por unidad de longitud será:

$$\frac{M}{\ell} = \frac{(d\Phi/dI)}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi \times 2 \times 2,06^2} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7}}{\pi \times 2 \times 2,06^2} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{\ell} = 47 \text{ nH/m} .}$$

7.20 Dos solenoides 1 y 2, largos, iguales, de longitudes $\ell=0,5$ m, con un número de vueltas $N=1000$, uniformemente distribuidas, sección cuadrada de lado $a=4$ cm, están acoplados como se indica en la Figura 7.29, donde x representa la distancia entre los lados de los solenoides. Determinar a partir del cálculo de la energía L_1 , L_2 y M .

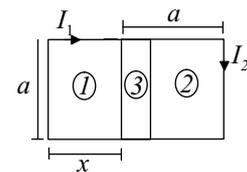


Figura 7.29. Sección del conjunto de los dos solenoides.

Resolución

Se supone que los solenoides son suficientemente largos como para despreciar el efecto de bordes. Es conocido que el campo de un solenoide ideal por el que circula una corriente I es uniforme,

está confinado al interior del solenoide y tiene la dirección de su eje, es decir $B = \mu_0 n I$, donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. La energía magnética por unidad de volumen debida a uno de los solenoides viene dada por

$$u_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 n I)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2\ell^2},$$

que es constante.

Se supone que el conjunto se divide en tres regiones como muestra la Figura 7.29: (1) la región no compartida del solenoide de la izquierda, cuyo volumen es $V_1 = ax\ell$, (2) la equivalente para el solenoide de la derecha de volumen $V_2 = ax\ell$ y (3) la común, de volumen $V_3 = a(a-x)\ell$. Además, se supone que por el solenoide de la izquierda circula I_1 y por el de la derecha I_2 . Los resultados obtenidos para la energía son:

- Región (1):

$$B_1 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I_1,$$

$$U_{m1} = \int_{V_1} u_{m1} dV = u_{m1} V_1 = \frac{\mu_0 N^2 I_1^2}{2\ell^2} (ax\ell) = \frac{\mu_0 N^2 I_1^2 ax}{2\ell}.$$

- Región (2):

$$B_2 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I_2,$$

$$U_{m2} = \int_{V_2} u_{m2} dV = u_{m2} V_2 = \frac{\mu_0 N^2 I_2^2}{2\ell^2} (ax\ell) = \frac{\mu_0 N^2 I_2^2 ax}{2\ell}.$$

- Región (3):

$$B_3 = \mu_0 \frac{N}{\ell} (I_1 + I_2),$$

$$U_{m3} = \int_{V_3} u_{m3} dV = u_{m3} V_3 = \frac{\mu_0 N^2}{2\ell^2} (I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2) a(a-x)\ell.$$

Como la energía del sistema según la Expresión 7.20 es $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = (1/2)L_1 I_1^2 + (1/2)L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 N^2 I_1^2 ax}{2\ell} + \frac{\mu_0 N^2 I_2^2 ax}{2\ell} + \frac{\mu_0 N^2}{2\ell^2} (I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2) a(a-x)\ell &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\ell} I_1^2 + \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\ell} I_2^2 + \frac{\mu_0 N^2 a(a-x)}{\ell} I_1 I_2 &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2. \end{aligned}$$

Identificando términos:

$$L_1 = L_2 = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{\ell} = \frac{4 \times \pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times 0,04^2}{0,5} = 4 \text{ mH.}$$

$$M = \frac{\mu_0 N^2 a(a-x)}{\ell} = 0,1(0,04-x) \text{ H.}$$

7.21 Dos solenoides muy largos son coaxiales y tienen aproximadamente el mismo radio $R=2$ cm. Uno de ellos, (1), tiene $N_1=1000$ vueltas y una longitud $\ell_1=50$ cm y el otro, (2), $N_2=1000$ vueltas y longitud $\ell_2=40$ cm. Las espiras están uniformemente distribuidas. El solenoide (1) se introduce dentro del otro una longitud x (Figura 7.30). Si las corrientes que circulan son $I_1=2$ A y $I_2=1,5$ A, con igual sentido, calcular la fuerza entre ambos solenoides. Puede despreciarse el efecto de bordes.

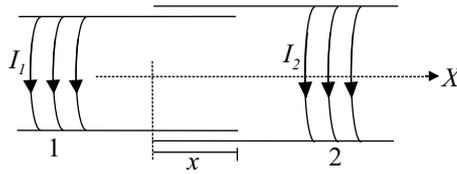


Figura 7.30. Esquema del conjunto de los dos solenoides, uno dentro del otro una longitud x .

Resolución

El campo debido a la corriente I_2 es

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{\ell_2} I_2 \mathbf{u}_x,$$

que se supone confinado al interior del solenoide.

El solenoide (1) se introduce dentro de (2) una longitud x grande. Para evaluar la fuerza en (1) se puede utilizar la Ecuación (7.28) que expresa la fuerza en función del coeficiente de inducción mutua. M se puede calcular determinando el efecto de la corriente I_2 en la zona interior del solenoide (1).

El flujo en una espira del solenoide (1) en dicha zona, debido al campo de la corriente I_2 , es

$$\Phi_{(12)_1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_{12} \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{S_1} B_{12} dS_1 = B_{12} S_1 = \mu_0 \frac{N_2}{\ell_2} I_2 \pi R^2,$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_2$, y que para el sentido de la corriente I_1 , $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{u}_x$.

El número de espiras de (1) en la zona común es $(N_1/\ell_1)x$ y el flujo total

$$\Phi_{12} = \left(\frac{N_1}{\ell_1} x \right) (\Phi_{12})_1 = \frac{N_1}{\ell_1} x \mu_0 \frac{N_2}{\ell_2} I_2 \pi R^2.$$

El coeficiente de inducción mutua valdrá

$$M = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{N_1}{\ell_1} x \mu_0 \frac{N_2}{\ell_2} \pi R^2.$$

La única componente no nula asociada a la fuerza que actúa sobre (1) será

$$\begin{aligned} F_{mx} &= I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} = I_1 I_2 \mu_0 \frac{N_1}{\ell_1} \frac{N_2}{\ell_2} \pi R^2 \\ &= 2 \times 1,5 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \times \frac{10^3}{0,5} \times \frac{10^3}{0,4} \times \pi \times (0,02)^2 \Rightarrow \boxed{F_{mx} = 0,024 \text{ N}}, \end{aligned}$$

que resulta ser axial y positiva por lo que ambos solenoides se atraen, resultado coincidente con el conocido de que corrientes del mismo sentido se atraen. Si las corrientes tuvieran distinto sentido, por ejemplo I_2 con distinto sentido del marcado en la figura, el campo B_2 sería contrario y el flujo sería negativo. En consecuencia, también lo sería M , resultando una fuerza de igual módulo pero de distinto sentido, es decir la fuerza sería de repulsión.

Se podría obtener también la fuerza calculando la energía magnética y derivando respecto de x mediante la Expresión (7.27).

7.22 La Figura 7.31 muestra un electroimán cuyos polos tienen una sección de área S . Determinar la fuerza ejercida sobre la pieza inferior situada a una distancia x de los polos.

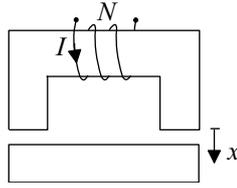


Figura 7.31. Esquema del electroimán.

Resolución

Para evaluar la fuerza se puede utilizar la Expresión 7.29 que determina la fuerza a partir de las variaciones de energía manteniendo el flujo constante.

Para una corriente I en el devanado del electroimán y conocidas las características geométricas y magnéticas del conjunto, aplicando la ley de Ampère se obtendrá un campo B en los entrehierros. El flujo valdrá $\Phi = BS$ que, si no hay dispersión, será el mismo a través de cualquier sección del circuito. Sea la energía magnética de la parte del sistema correspondiente a los entrehierros U_m , que puede expresarse como

$$U_m = \int_{V_{\text{hierro}}} u_m dV = \int_{V_{\text{hierro}}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B^2}{2\mu_0} V_{\text{hierro}} = \frac{B^2}{2\mu_0} (2Sx) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} x,$$

donde se ha tenido en cuenta que $u_m = B^2/(2\mu_0)$ es constante, que no hay dispersión de flujo, que el volumen de cada entrehierro es Sx y que el $\Phi = BS$.

Aplicando $\mathbf{F}_m = -(\nabla U_m)_\Phi$, y teniendo en cuenta la expresión anterior U_m (el resto de la energía del sistema no variará en un desplazamiento δx de la pieza si Φ es constante), la única componente para la fuerza será

$$F_{mx} = - \left(\frac{\partial U_m}{\partial x} \right)_\Phi = - \frac{\Phi^2}{\mu_0 S},$$

que depende del valor de Φ para la distancia x de la pieza y de S . Dado el sentido del eje X considerado, como la fuerza tiene sentido negativo, deberá dibujarse hacia arriba, se trata pues de una fuerza de atracción.

La fuerza aumenta con el flujo y será máxima cuando $x = 0$ ya que entonces el flujo es máximo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 7.23** Un solenoide recto, tiene 15 espiras y una sección de $0,5 \text{ cm}^2$. Su resistencia es de 3Ω . Se cortocircuitan sus bornes. Sometido dicho solenoide a un campo \mathbf{B} paralelo a su eje y de módulo $B = 5 + 10t^2$, se pide qué carga eléctrica pasa por el solenoide en 2 segundos, contados a partir del instante $t=0$.

Solución: 10^{-2} C .

- 7.24** Una espira cuadrada de lado l se sitúa en el plano XY , en la posición de la Figura 7.32. Si se la somete al campo $\mathbf{B} = (B_0 + ax)\mathbf{u}_z$, hallar: 1) el flujo. 2) la f.e.m. al desplazarse a partir de esta posición con una velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{u}_x$.

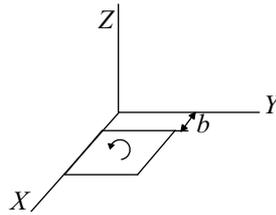


Figura 7.32. Posición de la espira y ejes.

Solución: 1) $\Phi = B_0 l^2 + (a/2)l^2(2b + l)$. 2) $\mathcal{E} = -al^2 v_0$.

- 7.25** Un campo magnético \mathbf{B} está definido en un espacio cilíndrico de eje O y radio R , con su dirección paralela al eje y módulo $B = n\rho$ (siendo ρ la distancia a O). Una varilla OA (Figura 7.33) gira en el campo con velocidad angular constante ω paralela al eje. Hallar la integral $\int_O^A \mathbf{E}_{ns} \cdot d\mathbf{l}$ en la varilla.

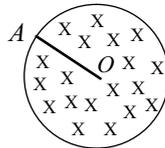


Figura 7.33. Esquema del campo y varilla.

Solución: $n\omega R^3/3$.

- 7.26** Un circuito está formado por dos conductores paralelos largos, cuya distancia entre ellos es D , cerrándose el circuito por sus extremos muy lejanos y circulando una corriente de intensidad I . Un segundo circuito cuadrado de lado $L < D$ y resistencia eléctrica R se mueve entre los dos conductores con velocidad \mathbf{v} y manteniéndose coplanario con ellos. Dos de los lados del cuadrado son paralelos a los conductores largos y la dirección de \mathbf{v} es perpendicular a dichos conductores. Despréciase la autoinducción del cuadrado. Calcular: 1) El flujo magnético a través del cuadrado cuando la distancia de su centro al conductor largo de la izquierda es x' . 2) La intensidad de corriente I_c que circula por el cuadrado en el instante en que está equidistante de los conductores largos.

Solución: 1) $\Phi = (\mu_0 I L / 2\pi) \ln \left\{ \frac{(x' + L/2)/(x' - L/2)}{(D - x' + L/2)/(D - x' - L/2)} \right\}$.
 2) $I_c = 0$.

- 7.27** El disco conductor de la Figura 7.34, de radio $r=0,1$ m, gira con velocidad $\omega=600$ r.p.m. (revoluciones por minuto) movido por un mecanismo no dibujado. El campo \mathbf{B} es homogéneo, de $0,1$ T y forma un ángulo de 30° con OS y de 60° con el eje. Calcular la potencia calorífica disipada en la resistencia de $R = 2 \Omega$. El resto del circuito no tiene resistencia.

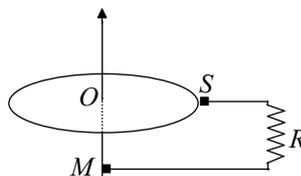


Figura 7.34. Esquema incluyendo el disco y campo.

Solución: $1,2 \times 10^{-4}$ W.

7.28 Una espira de lados ℓ_1 y ℓ_2 , situada en el plano YZ , se mueve, partiendo su vértice a del origen de coordenadas, con una velocidad constante $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_y$, tal como se muestra en la Figura 7.35. Estudiar en estas condiciones los casos siguientes: 1) Existe en todo el espacio un campo del tipo $\mathbf{B} = B_0 \cos(ky) \mathbf{u}_x$, donde B_0 y k son constantes. Calcular en este caso la f.e.m. inducida en la espira en función del tiempo. Indicar el sentido de la corriente inducida en la espira en el instante $t = 1 \mu\text{s}$. 2) Si el campo es $\mathbf{B} = B_0 \cos(ky) \sin(\omega t) \mathbf{u}_x$, donde ω es también constante, calcular la f.e.m. inducida en la espira en función del tiempo.

Datos numéricos: $\ell_1=5 \text{ cm}$, $\ell_2=10 \text{ cm}$, $v = 0,5 \text{ m/s}$, $B_0 = 1 \text{ T}$, $k = 40 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 50 \text{ rad s}^{-1}$.

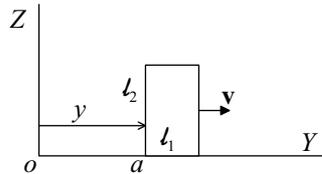


Figura 7.35. Espira en movimiento y ejes.

Solución: 1) $\mathcal{E} = 0,05[\cos(20t) - \cos(20t + 2)] \text{ V}$. Antihorario. 2) $\mathcal{E} = -0,125 \cos(50t)[\sin(20t + 2) - \sin(20t)] - 0,05 \sin(50t)[\cos(20t + 2) - \cos(20t)] \text{ V}$.

7.29 El sistema de la Figura 7.36 consta de tres hilos conductores coplanarios de resistividad: $\rho = 1,72 \times 10^{-6} \Omega \text{ m}$ y sección $S=3 \text{ mm}^2$, dos de los cuales están rígidamente unidos formando un ángulo $\theta = 60^\circ$. El tercer conductor se desplaza sobre ambos, formando ángulos iguales con ellos, a una velocidad $\mathbf{v} = 2 \mathbf{u}_x \text{ ms}^{-1}$, partiendo de un punto que dista $x_0=10 \text{ cm}$ del origen de coordenadas. Si el conjunto se encuentra en presencia de un campo magnético homogéneo $\mathbf{B} = 0,5 \mathbf{u}_z \text{ T}$, calcular: 1) La f.e.m. inducida en el circuito al cabo de 1 s. 2) La intensidad de corriente inducida.

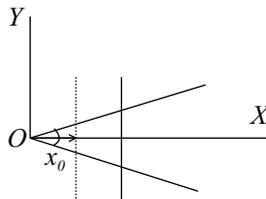


Figura 7.36. Esquema de los hilos y los ejes coordenados.

Solución: $\mathcal{E}=2,42 \text{ V}$. b) $I=0,58 \text{ A}$.

7.30 La Figura 7.37 muestra un hilo muy largo situado en el plano de una espira rectangular de lados a y b y resistencia R . El hilo es paralelo a uno de los lados de la espira siendo la distancia entre ambos d . Si por el hilo circula una intensidad que varía con el tiempo t , $I = I_0 e^{-kt}$, determinar: 1) La intensidad en función del tiempo que circula por la espira I_{esp} , suponiendo que la espira está en reposo en la posición de la figura. Indicar el sentido de la corriente asociada. Calcular el tiempo para el cual el valor de la intensidad es el 50% del valor inicial. 2) La intensidad que circula por la espira en el instante $t = 4 \text{ s}$, si partiendo de la posición de la figura, la espira empieza a moverse con una velocidad $v=4 \text{ ms}^{-1}$, perpendicularmente al hilo y alejándose de él.

Datos: $a=5 \text{ cm}$, $b=15 \text{ cm}$, $d=4 \text{ cm}$, $k = \frac{1}{4} \text{ s}^{-1}$, $R=10 \text{ m}\Omega$, $I_0 = 8 \text{ A}$.
Nota: Se desprecia la autoinducción.

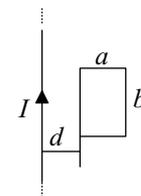


Figura 7.37. Conjunto formado por el hilo muy largo y la espira.

Solución: 1) $4,86 \times 10^{-6} e^{-t/4} \text{ A}$. Sentido horario. $t=2,77 \text{ s}$. 2) $1,371 \times 10^{-8} \text{ A}$.

- 7.31** Una barra conductora, de longitud L y peso mg , tiene su extremo O articulado y el otro extremo desliza sin rozamiento sobre un semicírculo conductor de centro O y situado en un plano vertical (Figura 7.38). El punto O se conecta al semicírculo mediante una resistencia R . Hay un campo B externo y constante perpendicular al plano del semicírculo y entrante. El ángulo que forma la barra con la vertical descendente desde O se denomina θ . Obtener la ecuación diferencial en θ del movimiento de la barra. La barra y el semicírculo tienen resistencia óhmica despreciable.

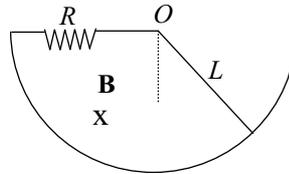


Figura 7.38. Esquema formado por la barra, resistencia y arco de circunferencia.

Solución:

$$\frac{mL}{3} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B^2 L^3}{4R} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mg}{2} \sin \theta = 0.$$

- 7.32** Calcular el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de la línea bifilar de la Figura 7.39.

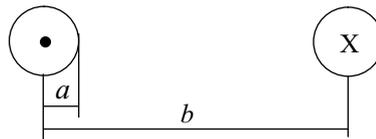


Figura 7.39. Línea bifilar.

Solución: $(\mu_0/4\pi) + (\mu_0/\pi) \ln[(b-a)/a]$.

- 7.33** Dos líneas de transmisión, 1 y 2, están en el mismo plano, tal como se muestra en la Figura 7.40. Si $c = 5a$ y $b = 0,20a$. Estimar el coeficiente e inducción mutua por unidad de longitud

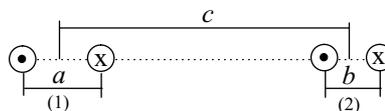


Figura 7.40. Líneas de transmisión.

Solución: 1,62 nH/m.

- 7.34** Un solenoide de longitud $2l$ y de radio R se coloca coaxialmente con una espira de radio r pequeño. El centro del solenoide dista $d = l$ del plano de la espira. Por el primero circula una corriente de intensidad $I_1(t) = I_{01} \sin(\omega t)$ y por la segunda una intensidad $I_2 = I_{02} \cos(\omega t)$, ambas con igual sentido. Si la f.e.m. de la espira se hace nula por primera vez al cabo de 0,0025 s, calcular el coeficiente de inducción mutua M y el coeficiente de autoinducción de la espira.

Datos: $l=1$ m; $R=10$ cm; $r=1$ cm, $I_{01} = 1$ A; $I_{02} = 2$ A; $\omega = 100\pi$ rad s^{-1} . Número de espiras $N=4000$.

Solución: $M = (8 \times \pi^2 \times 10^{-8})/(\sqrt{4 + 10^{-2}})$ H; $L = (4 \times (\pi)^2 \times 10^{-8})/(\sqrt{4 + 10^{-2}})$ H.

7.35 Dada una línea bifilar, como la del Ejercicio 7.32, siendo $b \gg a$, determinar la energía por unidad de longitud de línea u_l para demostrar que la fuerza que actúa sobre los conductores por unidad de longitud es $F = (\mu_0 I^2)/(2\pi b)$. ¿Cuál es el sentido?

Solución: $u_l = [\mu_0/8\pi + (\mu_0/2\pi) \ln(b/a)] I^2$. Tiende a aumentar la separación, es repulsiva.

7.36 La pieza en herradura del electroimán de la Figura 7.41 está fija mientras que la pieza inferior es móvil y está unida a un muelle, siendo S la sección de ambas, y el cociente entre su longitud y su permeabilidad magnética es despreciable. Se desprecia el peso y el flujo disperso. El número de espiras es N . El muelle ejerce una fuerza de tracción $k(x_0 - x)$. En equilibrio, si la intensidad de corriente es nula, la longitud x de cada entrehierro es x_0 , mientras que si la intensidad vale I , dicha longitud se reduce a $x_0/2$. Calcular: 1) La constante k del muelle. 2) La diferencia entre los valores del coeficiente de autoinducción en las posiciones segunda y primera. Supóngase que $\mu \gg \mu_0$.

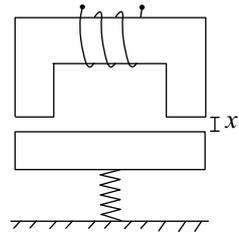


Figura 7.41. Electroimán.

Solución: 1) $k = 2N^2 I^2 \mu_0 S / x_0^3$. 2) $L_1 - L_0 = \mu_0 N^2 S / (2x_0)$.

CORRIENTES VARIABLES CON EL TIEMPO

8

En este capítulo se estudian circuitos eléctricos básicos en los que las diferencias de potencial aplicadas y las corrientes asociadas varían lentamente con el tiempo. En estas condiciones no es preciso aplicar de forma rigurosa las ecuaciones de Maxwell, sino que puede realizarse una resolución simplificada. Los resultados obtenidos son suficientemente exactos para muchas aplicaciones. La primera parte del capítulo se dedica al estudio del régimen transitorio y la segunda a la corriente alterna.

8.1. CORRIENTES LENTAMENTE VARIABLES EN ELEMENTOS LINEALES

Las corrientes se pueden considerar *lentamente variables*, si la potencia radiada por el circuito es pequeña. Esta condición se cumple si la dimensión mayor del circuito, ℓ , es mucho menor que la longitud de onda λ asociada a la radiación, es decir $\ell \ll \lambda \ll c/f$, donde c es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío y f la frecuencia excitadora. Para el caso de las líneas de transmisión de la energía eléctrica, donde $f=50$ Hz, la teoría simplificada se podría aplicar a un circuito con unas dimensiones de hasta $\simeq 600$ km. Sin embargo, para una frecuencia de 10^{10} Hz (microondas), un circuito no debería ser mayor de 3 mm.

Los elementos de los circuitos analizados son lineales, es decir la corriente y la d.d.p. son proporcionales entre sí. Ejemplos son la resistencia, el solenoide o bobina y el condensador. En todos ellos, la aplicación de una d.d.p. ocasiona una corriente, o bien, una corriente da lugar a una d.d.p. entre terminales. Estos componentes se denominan pasivos debido a que responden ante una excitación externa. Por otra parte, los generadores que producen f.e.m. son la fuente de corriente y d.d.p. y se denominan elementos activos.

Conectando los diferentes componentes se diseñan los circuitos eléctricos. Cuando los elementos que intervienen son lineales, la respuesta de un circuito, aunque sea complejo, también será lineal. En la aproximación de corrientes lentamente variables, las **leyes de Kirchhoff** empleadas en el Capítulo 4 son también válidas para los valores instantáneos de las corrientes y las d.d.p. Una de las idealizaciones de la teoría de circuitos es que no hay acumulación de carga en los nudos de un circuito, así como, en los conductores entre componentes. Además, debe verificarse el principio de conservación de la carga, por lo que la suma de las corrientes que confluyen en un

nudo debe ser cero, es decir

$$\sum I_i = 0 \quad (\text{nudos}) \quad 1^{\text{ra}} \text{ ley de Kirchhoff.} \quad (8.1)$$

Si las corrientes que van hacia el nudo se toman como negativas, las que salen se considerarán positivas.

Otra simplificación consiste en suponer que es despreciable el campo magnético en el exterior de los componentes del circuito. Por tanto, la circulación del campo eléctrico a lo largo de una línea externa y cerrada es cero. Tomando una línea cerrada externa, cuyos tramos van entre los terminales de cada componente, se obtiene

$$\sum V_i = 0 \quad (\text{línea cerrada o malla}) \quad 2^{\text{da}} \text{ ley de Kirchhoff,} \quad (8.2)$$

donde V_i representa la d.d.p. entre los terminales de cada componente a lo largo de la línea. Para el esquema de la Figura 8.1, siguiendo el sentido de circulación $d\mathbf{l}$, se tiene

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_a) = 0.$$

Cuando un conjunto de elementos pasivos se conecta a un generador circula corriente. Independientemente de si el generador es de DC o AC la respuesta inicial del sistema no es periódica. La respuesta inicial, no estacionaria, corresponde al régimen transitorio. Si las d.d.p. son armónicas, tras el régimen transitorio se alcanza el estacionario, en el que las corrientes también son armónicas.

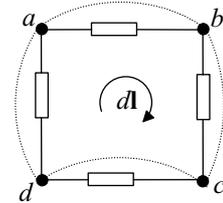


Figura 8.1. Componentes y línea externa utilizada al aplicar la segunda ley de Kirchhoff.

8.2. COMPONENTES BÁSICOS

8.2.1. Resistencia ideal

Como se vio en el Capítulo 4, este elemento se representa tal como se muestra en la Figura 8.2. En una resistencia ideal se verifica la ley de Ohm, es decir en el material $\mathbf{E}_{ef} = \rho \mathbf{j}$. La d.d.p. entre terminales de la resistencia es proporcional a la corriente:

$$V_R \equiv V_a - V_b = RI, \quad (8.3)$$

donde a es el terminal por donde entra la corriente y b por donde sale.

Una resistencia es un elemento puramente disipativo, la potencia consumida puede expresarse como

$$P_R = V_R I = RI^2. \quad (8.4)$$

8.2.2. Condensador ideal

Como se vio en el Capítulo 3, un condensador está formado por un par de armaduras aisladas desde las cuales se llevan dos hilos conductores hasta los terminales apropiados. El esquema equivalente es el mostrado en la Figura 8.3. Las armaduras y los hilos se suponen conductores perfectos. Toda la carga se supone concentrada en las armaduras, la carga en cada armadura es igual y de distinto signo, es decir $Q_a = -Q_b$. El campo eléctrico se considera uniforme y confinado entre las armaduras y no hay campo magnético apreciable en



Figura 8.2. Esquema de una resistencia.

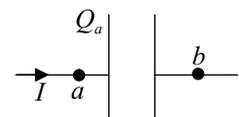


Figura 8.3. Esquema de un condensador.

las proximidades del condensador. De la definición de capacidad C [Ecuación (3.25)], la d.d.p. entre las armaduras está dada por

$$V_C \equiv V_a - V_b = \frac{Q_a}{C} = \frac{\int I dt}{C}, \quad (8.5)$$

donde a es el terminal por donde entra la corriente y b por donde sale.

Un condensador en el proceso de carga absorbe energía y cuando se descarga la cede. En un instante t , en el que la d.d.p. es V_C y la carga de a , Q_a , la energía almacenada viene dada por la Ecuación (3.27), es decir,

$$U_C = \frac{1}{2}CV_C^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_a^2}{C}. \quad (8.6)$$

8.2.3. Autoinducción ideal

Básicamente una autoinducción es un devanado de hilo conductor formando un solenoide o bobina (esquema de la Figura 8.4). Los terminales de conexión se llevan a cierta distancia de forma que el campo magnético está confinado preferentemente en el interior de la bobina. El hilo se supone conductor perfecto, es decir \mathbf{E}_{ef} en el interior debe ser cero, ya que si no los campos más pequeños producirían corrientes infinitas. Con estas aproximaciones, se llega a que en una autoinducción ideal la d.d.p. entre el terminal por donde entra la corriente y aquél por donde sale es

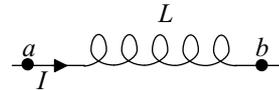


Figura 8.4. Esquema de una bobina.

$$V_L \equiv V_a - V_b = L\frac{dI}{dt}, \quad (8.7)$$

donde L es el coeficiente de autoinducción.

La f.e.m. de autoinducción (Capítulo 7) se opone a las variaciones de corriente. Cuando la corriente aumenta, la autoinducción absorbe energía y cuando disminuye la cede. En un instante t en que la intensidad es I , la energía almacenada en la autoinducción (al pasar la corriente de 0 al valor final I) es

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2. \quad (8.8)$$

8.2.4. Inducción mutua ideal

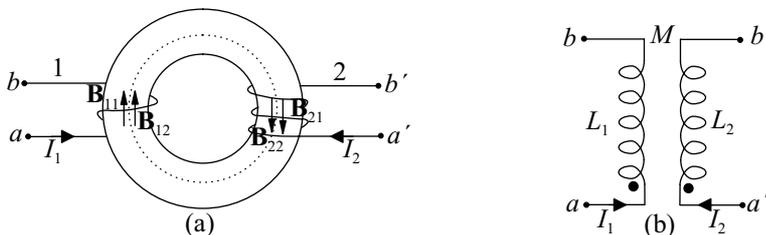


Figura 8.5. (a) Dos bobinas acopladas. (b) Esquema equivalente.

La Figura 8.5(a) muestra dos bobinas 1 y 2 acopladas magnéticamente. El campo magnético que produce la corriente I_1 enlaza las dos bobinas y su valor en los devanados 1 y 2 se denomina \mathbf{B}_{11} y \mathbf{B}_{21} . El mismo fenómeno ocurre para I_2 ; los campos correspondientes son \mathbf{B}_{12} y \mathbf{B}_{22} . La primera bobina tiene una autoinducción L_1 , la segunda L_2 y M es el coeficiente de inducción mutua. Sean las intensidades I_1 y I_2 crecientes con el tiempo. La I_1 inducirá en la bobina 1 una f.e.m. tal que

originará una d.d.p. entre a y b de valor LdI_1/dt . La I_2 originará en la bobina 1 una d.d.p. de valor MdI_2/dt , con el mismo signo que el término anterior. Luego, la d.d.p. obtenida es

$$V_a - V_b = L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}. \quad (8.9)$$

Si la flecha referida a I_1 es de sentido contrario, al primer término debe anteponerse el signo menos. Si la flecha asociada a I_2 tiene sentido contrario, es el segundo término el que cambia de signo.

El conjunto de la Figura 8.5(a) se representa esquemáticamente en la Figura 8.5(b), donde se ha dibujado un punto en uno de los extremos de cada bobina, de forma que los flujos se suman cuando las dos flechas correspondientes a la corriente se dirijan a los terminales con punto (o bien salgan de ellos). Para determinar el signo del término de tensión asociado a la inducción mutua, se puede aplicar la siguiente regla:

- si las dos corrientes entran (o salen) de las bobinas por los terminales con punto, el signo del término de la M coincide con el de la autoinducción.
- si una corriente entra por el terminal con punto y la otra sale, el signo del término de la inducción mutua será opuesto al de la autoinducción.

Al aplicar esta regla el coeficiente M se considera positivo y se pone el signo según el criterio anterior.

8.2.5. Generador ideal

Como se comentó en el Capítulo 4, en el caso de un generador ideal, la d.d.p. entre terminales es igual a la f.e.m. del generador. Si la resistencia de los hilos no es despreciable se añade una resistencia en serie.

Para un generador de corriente continua ideal, Figura 8.6(a), la d.d.p. es constante y de valor

$$V_b - V_a = \mathcal{E}. \quad (8.10)$$

En el caso de un generador de corriente alterna ideal, Figura 8.6(b), si en un instante t la f.e.m. según el sentido marcado es $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t + \phi_{\mathcal{E}})$, se obtiene

$$V_b - V_a = \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t + \phi_{\mathcal{E}}). \quad (8.11)$$



Figura 8.6. (a) Generador de corriente continua. (b) Generador de corriente alterna.

8.3. RÉGIMEN TRANSITORIO

El régimen transitorio corresponde a los instantes iniciales de conexión (o desconexión) de un circuito a una d.d.p. En los ejercicios resueltos se estudian diferentes casos de régimen transitorio. Como un ejemplo, se incluye aquí el estudio del comportamiento de un circuito RLC cuando se conecta a una d.d.p. alterna.

Sea I la corriente que circula una vez cerrado el interruptor del circuito de la Figura 8.7. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff ($\sum V_i = 0$) siguiendo el sentido dI , se tiene

$$(V_b - V_c) + (V_c - V_d) + (V_d - V_a) + (V_a - V_b) = 0 \Rightarrow$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q_d}{C} - \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = 0, \quad (8.12)$$

que si se deriva respecto del tiempo y teniendo en cuenta que $I = dQ_d/dt$, se obtiene

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t). \quad (8.13)$$

La solución general de esta ecuación tiene dos términos: uno correspondiente a la solución de la ecuación homogénea (cuando el segundo término es cero), y el otro a la particular de la completa, que será armónico como la excitación y de la misma frecuencia, del tipo $I_{op} \sin(\omega t - \delta)$. El primer término representa la respuesta transitoria y el segundo la estacionaria.

La respuesta transitoria será la solución de la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (8.14)$$

La ecuación característica asociada y sus soluciones r_1 y r_2 vienen dadas por:

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow r = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (8.15)$$

En función de los valores de R , L y C se tienen los siguientes casos:

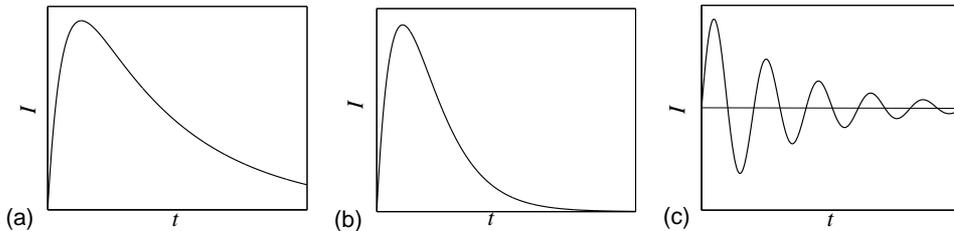


Figura 8.8. Solución de la Ecuación diferencial 8.14: (a) caso 1, (b) caso 2, (c) caso3.

- Casol: dos raíces reales y distintas.

Cuando $R > 2\sqrt{L/C}$ (resistencias grandes). Los valores de las raíces r_1 y r_2 son reales negativas. En este caso I es la suma de dos exponenciales decrecientes y la corriente tenderá a cero sin oscilaciones. La solución es

$$I = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (8.16)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración cuyos valores dependen de las condiciones iniciales.

- Caso 2: raíces reales e iguales.

En este caso, $(R/2L)^2 = 1/LC$, y las raíces son $r = r_1 = r_2 = -R/2L$. La solución también es amortiguada del tipo

$$I = e^{rt} (C_1 + C_2 t). \quad (8.17)$$

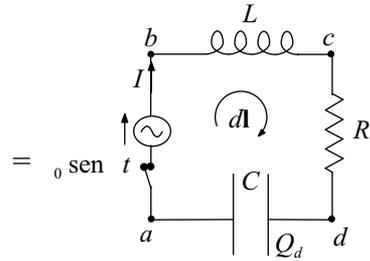


Figura 8.7. Circuito RLC

- Caso 3: dos raíces complejas conjugadas.

En este caso, $R < 2\sqrt{L/C}$, que corresponde a resistencias pequeñas. La solución es del tipo

$$I = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \operatorname{sen} \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t + \beta \right], \quad (8.18)$$

donde A y β son las constantes de integración. La respuesta es una corriente oscilatoria amortiguada con frecuencia $\omega = [1/(LC) - (R/2L)^2]^{1/2}$; la rapidez del amortiguamiento depende del valor $R/2L$.

La solución completa de la ecuación del circuito es la suma de la solución transitoria anterior más la permanente o estacionaria. Las constantes de integración se determinan a partir de las condiciones iniciales. La corriente transitoria se anula al cabo de un tiempo y sólo persiste la solución permanente. Esta solución se puede calcular fácilmente cuando los generadores son de corriente alterna aplicando el método simbólico basado en la utilización de números complejos, que es el objetivo del siguiente apartado.

8.4. CORRIENTE ALTERNA EN RÉGIMEN PERMANENTE

En este apartado se estudian circuitos excitados por f.e.m. o d.d.p. sinusoidales. Se supone que desde que se aplica la excitación ha transcurrido tiempo suficiente para poder despreciar los transitorios. Cuando un circuito es alimentado por una fuente sinusoidal la respuesta permanente o estacionaria también es sinusoidal. Así, cuando la salida de un generador es sinusoidal, lo es también la corriente en una bobina, en un condensador, o en una resistencia. La intensidad tiene la misma frecuencia que la de la f.e.m. excitadora pero generalmente no está en fase. Las soluciones buscadas para la intensidad son del tipo

$$I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_I), \quad (8.19)$$

donde I_0 es la amplitud, ω la frecuencia angular, igual a la de excitación ($\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia), y ϕ_I la fase inicial. La función se repite periódicamente, siendo el valor del periodo $T = 2\pi/\omega$. La raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de I se denomina intensidad eficaz I_e y es igual a $I_e = I_0/\sqrt{2}$. Los amperímetros de corriente alterna miden el valor eficaz.

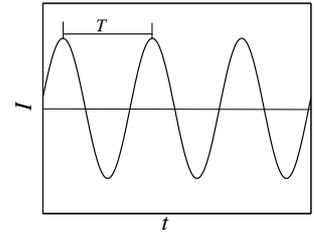


Figura 8.9. Representación de la intensidad en función del tiempo.

8.4.1. Magnitudes complejas

a) Intensidad

Cuando se pretende resolver circuitos de corriente alterna es muy útil el uso del método simbólico basado en la utilización de magnitudes complejas.

Si a la intensidad $I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_I)$, se le asocia un número complejo que tiene módulo igual a la amplitud I_0 y argumento igual a la fase ($\omega t + \phi_I$), su representación en el plano complejo es un vector giratorio o fasor [Figura 8.10(a)]. La parte imaginaria del número complejo coincide con la corriente verdadera, es decir

$$I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_I) = \operatorname{Im} \left\{ I_0 e^{i(\omega t + \phi_I)} \right\}. \quad (8.20)$$

El complejo asociado a la intensidad puede expresarse como

$$I_0 e^{i\phi_I} e^{i\omega t} = \bar{I} e^{i\omega t}; \quad \bar{I} \equiv I_0 e^{i\phi_I}, \quad (8.21)$$

donde \bar{I} se denomina intensidad compleja y su representación es la de la Figura 8.10(b).

De las relaciones anteriores se deduce que bastará determinar el valor de \bar{I} para conocer la intensidad instantánea I , sin más que multiplicar \bar{I} por $e^{i\omega t}$ y proyectar sobre el eje imaginario.

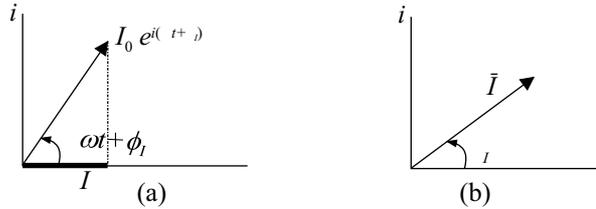


Figura 8.10. (a) Representación en el plano complejo del fasor asociado a la intensidad. (b) Representación en dicho plano de la intensidad compleja.

b) Diferencia de potencial

Igualmente, supondremos que la d.d.p. entre los terminales de los elementos es del tipo

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi_V) = \text{Im} \{ \bar{V} e^{i\omega t} \}, \quad (8.22)$$

donde la d.d.p. compleja puede expresarse como

$$\bar{V} \equiv V_0 e^{i\phi_V}. \quad (8.23)$$

La raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de V corresponde al valor eficaz igual a $V_e = V_0/\sqrt{2}$.

c) Impedancia

Sea \bar{V} la d.d.p. compleja e \bar{I} la intensidad compleja de un componente de un circuito. Se demuestra a continuación que en los elementos lineales ambas cantidades son proporcionales y el coeficiente de proporcionalidad se denomina impedancia \bar{Z} , cuyo valor, módulo $|\bar{Z}|$ y argumento δ , son iguales a

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_0 e^{i\phi_V}}{I_0 e^{i\phi_I}} = \frac{V_0}{I_0} e^{i(\phi_V - \phi_I)} = Z_0 e^{i\delta}, \quad (8.24)$$

$$|\bar{Z}| = Z_0 = \frac{V_0}{I_0} \quad \Omega; \quad \delta = \phi_V - \phi_I.$$

8.4.2. Impedancia de los componentes básicos

a) Impedancia de una autoinducción ideal

En una autoinducción por la que circula una intensidad instantánea $I = I_0 \sin(\omega t + \phi_I)$, la d.d.p. viene dada por

$$V_L = V_a - V_b = L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \sin(\omega t + \phi_I + \pi/2). \quad (8.25)$$

Utilizando la notación compleja, la intensidad, d.d.p. e impedancia serán

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} &= I_0 e^{i\phi_I} \\ \bar{V}_L &= L\omega I_0 e^{i(\phi_I + \pi/2)} \end{aligned} \right\} \bar{Z}_L = \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}} = L\omega e^{i\frac{\pi}{2}} = iL\omega. \quad (8.26)$$

Por tanto, el módulo y argumento de la impedancia son iguales a

$$|\bar{Z}_L| = Z_L = L\omega, \quad \delta = \frac{\pi}{2} = \phi_V - \phi_I. \quad (8.27)$$

Se observa que la impedancia aumenta con la frecuencia excitadora y la d.d.p. está adelantada $\pi/2$ respecto a la corriente.

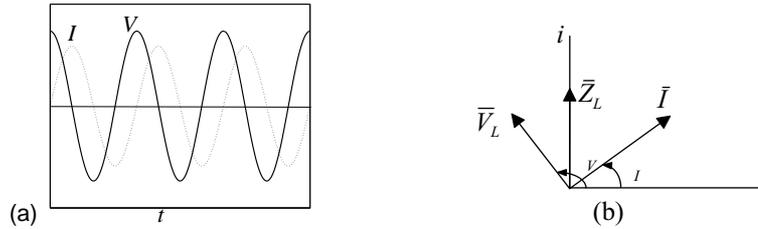


Figura 8.11. Diferencia de potencial y corriente en una bobina, (a) en función del tiempo, (b) esquema de los complejos asociados.

b) Impedancia de un condensador ideal

Sea $I = I_0 \text{sen}(\omega t + \phi_I)$ la intensidad instantánea en los hilos conectados al condensador. En este caso la d.d.p. entre terminales será

$$V_C = V_a - V_b = \frac{\int I dt}{C} = \frac{I_0}{C\omega} \text{sen}(\omega t + \phi_I - \pi/2). \quad (8.28)$$

La intensidad, d.d.p., e impedancia pueden expresarse como

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} &= I_0 e^{i\phi_I} \\ \bar{V}_C &= \frac{I_0}{C\omega} e^{i(\phi_I - \pi/2)} \end{aligned} \right\} \bar{Z}_C = \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}} = \frac{1}{C\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{-i}{C\omega}. \quad (8.29)$$

El módulo de la impedancia del condensador y su argumento vienen dados por

$$|\bar{Z}_C| = Z_C = \frac{1}{C\omega}; \quad \delta = -\frac{\pi}{2} = \phi_V - \phi_I. \quad (8.30)$$

Se deduce que el módulo varía inversamente proporcional a la frecuencia excitadora y la d.d.p. está retrasada $\pi/2$ respecto a la corriente.

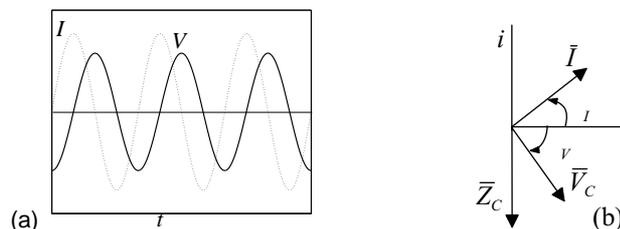


Figura 8.12. Diferencia de potencial y corriente en una condensador, (a) en función del tiempo, (b) esquema de los complejos asociados.

c) Impedancia de una resistencia

En una resistencia donde $I = I_0 \text{sen}(\omega t + \phi_I)$, la d.d.p. será

$$V_R = V_a - V_b = RI = RI_0 \text{sen}(\omega t + \phi_I). \quad (8.31)$$

Los valores complejos asociados pueden expresarse como

$$\bar{V}_R = R I_0 e^{i\phi_I}, \quad \bar{Z}_R = \frac{\bar{V}_R}{\bar{I}} = R e^{i0} = R, \quad (8.32)$$

que muestran que en una resistencia la d.d.p. está en fase con la corriente y la impedancia es independiente de la frecuencia excitadora.

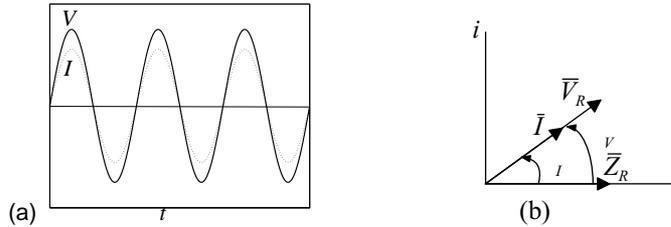


Figura 8.13. Diferencia de potencial y corriente en una resistencia, (a) en función del tiempo, (b) esquema de los complejos asociados.

En general en un circuito la impedancia será igual a $\bar{Z} = \bar{V}/\bar{I}$. Cuando se expresa en forma cartesiana, la parte real es la resistencia R y la parte imaginaria la reactancia X ,

$$\bar{Z} = R + i X. \quad (8.33)$$

El signo de la parte imaginaria X puede ser positivo o negativo; cuando es positivo se denomina reactancia inductiva y cuando es negativo reactancia capacitiva.

8.4.3. Impedancias equivalentes

a) Impedancias en serie

Igual que en los circuitos de corriente continua, en un circuito con varias impedancias en serie como el de la Figura 8.14(a), se puede demostrar que la impedancia equivalente es la suma de las impedancias

$$\bar{Z}_{eq} = \sum \bar{Z}_i. \quad (8.34)$$

b) Impedancias en paralelo

Dado un conjunto de impedancias en paralelo, tal como el mostrado en la Figura 8.14(b), la impedancia equivalente es

$$\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum \frac{1}{\bar{Z}_i}. \quad (8.35)$$

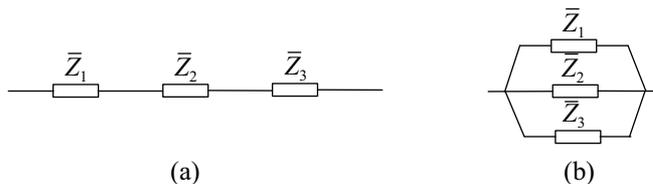


Figura 8.14. (a) Impedancias en serie. (b) Impedancias en paralelo

8.4.4. Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff se aplican también a los circuitos formados por impedancias y alternadores, pero empleando las cantidades complejas \bar{I} , \bar{Z} , y \bar{V} . Las leyes en este caso se expresan:

$$\begin{aligned} \text{Nudos:} & \quad \sum \bar{I}_i = 0 \\ \text{Mallas:} & \quad \sum \bar{V}_i = 0 \quad (\sum \bar{\mathcal{E}}_i = \sum \bar{Z}_i \bar{I}_i). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Los pasos a seguir son los mismos que en las redes de corriente continua. Primero se determinan los nudos, las ramas y las mallas independientes. A cada rama se le asigna un valor y un sentido para la corriente y se opera como si fuera real. Igualmente se asigna un sentido de circulación en cada malla independiente. Se aplica la primera ley a los nudos, el número de ecuaciones independientes es igual al número de nudos menos uno. Después, se aplica la segunda ley a las mallas independientes y se resuelve el sistema de ecuaciones. Una intensidad que resulte positiva indica que la densidad de corriente coincide con la flecha asociada. Si resulta negativo, el sentido es opuesto.

Para cada generador con f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \phi_{\mathcal{E}})$ hay que expresar el valor complejo asociado $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\phi_{\mathcal{E}}}$, determinado por su módulo $|\bar{\mathcal{E}}| = \mathcal{E}_0$ y argumento $\phi_{\mathcal{E}}$. Si el generador no es ideal y tiene impedancia interna, hay que sumarla a la impedancia de la rama correspondiente. Si los generadores tienen frecuencia diferente, hay que resolver un problema diferente por cada frecuencia y sumar los resultados parciales.

8.4.5. Potencia

La potencia instantánea suministrada a una impedancia de un circuito es:

$$p = V I = V_0 \sin(\omega t + \phi_V) I_0 \sin(\omega t + \phi_I). \quad (8.37)$$

La potencia media en un periodo viene determinada por

$$P = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \delta = V_e I_e \cos \delta, \quad (8.38)$$

donde V_e e I_e son los valores eficaces de la d.d.p. e intensidad. El término $\cos \delta$ ($\delta = \phi_V - \phi_I$) se denomina *factor de potencia*. La proyección de I_e sobre V_e se denomina corriente activa, por ser la que contribuye a la potencia, mientras a la componente $I_e \sin \delta$ se denomina reactiva por no contribuir a la potencia. La potencia P se conoce como potencia activa y la unidad de medida es el vatio W.

Si la impedancia es una resistencia, $\delta = 0$, $P = V_e I_e$, igual a la expresión equivalente en corriente continua. Si la impedancia es una reactancia $\delta = \pm\pi/2$, $P=0$, ya que en la mitad del ciclo los elementos correspondientes consumen energía y en el otro medio lo ceden.

El producto $V_e I_e$ se denomina potencia aparente S , $S = V_e I_e$. La unidad de S es el voltio-amperio (VA).

8.4.6. Resonancia

Sea una rama formada por el circuito *RLC* serie de la Figura 8.15, con una impedancia $\bar{Z} = R + i[L\omega - 1/(C\omega)]$. La d.d.p. entre sus terminales es $\bar{V} = V_0 e^{i\phi_V}$ y la intensidad en la rama es $\bar{I} = \bar{V}/\bar{Z}$, cuyo módulo y argumento vienen dados por

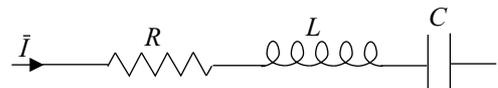


Figura 8.15. Rama serie *RLC*.

$$I_0 = \frac{|\bar{V}|}{|Z|} = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}, \quad (8.39)$$

$$\delta = \phi_V - \phi_I = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (8.40)$$

Para valores fijos de V_0 , R , L y C , resulta que I_0 y δ dependen de ω , tal como muestra la Figura 8.16. Cuando

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8.41)$$

I_0 es máxima y δ nula. En este caso se dice que el circuito serie estudiado está en resonancia. El pico y el cambio de fase en la resonancia son más marcados a medida que la resistencia es más pequeña. En el caso hipotético de que $R=0$, la impedancia se anula, $I_0 = \infty$, y se producirá un cambio brusco de fase en la frecuencia de resonancia.

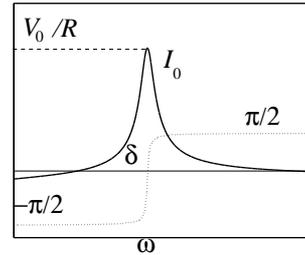


Figura 8.16. Intensidad y fase en función del frecuencia.

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 Determinar la corriente que circula por el circuito RL de la Figura 8.17 una vez cerrado el interruptor.

Resolución

Sea I el valor de la intensidad en un instante t después de cerrar el interruptor i . El sentido utilizado para el cálculo de I es el mostrado en la figura. En dicho instante las diferencias de potencial entre terminales de cada componente son: $V_b - V_c = RI$ en la resistencia, $V_c - V_a = L(dI/dt)$ en la bobina y $V_b - V_a = \mathcal{E}$ en el generador. La suma de las diferencias de potencial a lo largo de un lazo completo es cero. Si se sigue el sentido de circulación dI , se obtiene

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 \Rightarrow -\mathcal{E} + RI + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden de coeficientes constantes, que se puede resolver por separación de variables.

Reordenando la ecuación e integrando se llega a

$$L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - RI \Rightarrow \frac{dI}{\mathcal{E} - RI} = \frac{dt}{L} \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln(\mathcal{E} - RI) = \frac{t}{L} + \text{cte.}$$

En el circuito hay una bobina que se opone a las variaciones de corriente. En el instante justo antes de cerrar el interruptor $I = 0$. Por tanto, justo después de cerrar el interruptor la corriente debe ser cero. Introduciendo en la ecuación anterior la condición de que en $t = 0$, $I = 0$, se obtiene $\text{cte} = -(1/R) \ln \mathcal{E}$.

Teniendo en cuenta este dato y reordenando, resulta

$$\ln(\mathcal{E} - RI) = -\frac{R}{L}t + \ln \mathcal{E} \Rightarrow \ln \frac{\mathcal{E} - RI}{\mathcal{E}} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \frac{\mathcal{E} - RI}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

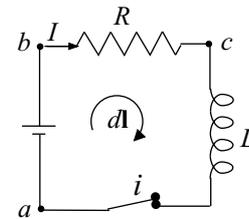


Figura 8.17. Circuito RL .

Finalmente, operando se obtiene para la intensidad el siguiente valor

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right],$$

cuya representación es la de la Figura 8.18(a).

Se observa que debido a la f.e.m. autoinducida, la corriente no alcanza inmediatamente su valor final \mathcal{E}/R sino que aumenta a un ritmo que depende de L y R . La corriente crece rápidamente al principio, después aumenta más lentamente y se aproxima asintóticamente al valor final $I = \mathcal{E}/R$. Para un tiempo $\tau = L/R$ la corriente toma el 63,2% del valor final y para 5τ se ha alcanzado el régimen permanente ya que la corriente es 99,3% del valor final.

Las d.d.p. entre terminales de la bobina V_L y en la resistencia V_R son respectivamente:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t} \quad ; \quad V_R = RI = \mathcal{E} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right],$$

que muestran que en la bobina la d.d.p. tiende asintóticamente a cero y en la resistencia a \mathcal{E} , tal como se observa en la Figura 8.18(b).

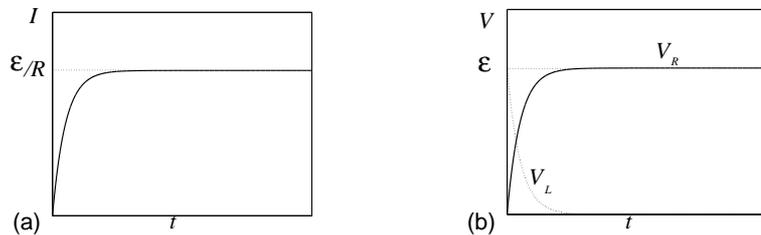


Figura 8.18. (a) Intensidad en función del tiempo para el circuito de la Figura 8.17. (b) Diferencia de potencial entre terminales de la bobina y de la resistencia.

8.2 La figura adjunta muestra un circuito donde un conmutador c conecta la rama superior a la batería en $t = 0$, cuando ha transcurrido un tiempo $t_1 = 4L/R$ el conmutador conecta dicha rama a la resistencia, cuando transcurre nuevamente este intervalo de tiempo la conexión es a la batería, repitiendo el proceso periódicamente. Determinar la intensidad y representarla en función del tiempo. Datos: $R = 25 \Omega$, $\mathcal{E} = 50 \text{ V}$, $L = 0,1 \text{ H}$.

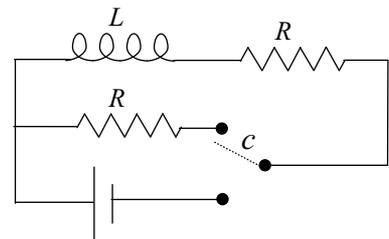


Figura 8.19. Esquema del Problema 8.2.

Resolución

En función de la conexión realizada se obtienen las siguientes soluciones:

- La primera conexión coincide con la mostrada en la Figura 8.17 del Problema 8.1. En dicho problema se ha obtenido un valor para la intensidad igual a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{50}{25} \left(1 - e^{-\frac{25}{0,1} t} \right) = 2 \left(1 - e^{-250t} \right) \text{ A.}$$

Para un tiempo $t_1 = 4L/R = 4 \times 0,1/25 = 0,016 \text{ s}$ se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-4} \right) \approx \frac{\mathcal{E}}{R} 0,98 \approx \frac{\mathcal{E}}{R} = 2 \text{ A,}$$

que será el valor inicial correspondiente a la intensidad cuando se cambia el conmutador.

- La segunda conexión es la mostrada en la Figura 8.20. Siguiendo el sentido de circulación marcado, la ecuación diferencial asociada a la intensidad en un instante t será

$$L \frac{dI}{dt} + 2RI = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{2R}{L} dt \Rightarrow I = K' e^{-\frac{2R}{L}t},$$

donde K' es una constante que se determina teniendo en cuenta que en $t = t_1 = 4L/R = 0,016$ s la intensidad I es aproximadamente \mathcal{E}/R , es decir,

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = K' e^{-\frac{2R}{L}t_1} \Rightarrow K' = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{2R}{L}t_1}.$$

Sustituyendo el valor de K' en I se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{2R}{L}t_1} e^{-\frac{2R}{L}t} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-2\frac{R}{L}(t-t_1)} = 2 e^{-500(t-0,016)} \text{ A} .$$

El valor de la intensidad para un tiempo $t = 2t_1 = 0.032$ s es igual a $I = (\mathcal{E}/R) e^{-8} \approx (\mathcal{E}/R) 0,0003 \approx 0,0007 \text{ A} \approx 0$.

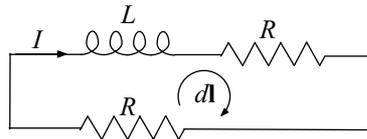


Figura 8.20. Esquema de conexión a la resistencia.

La representación gráfica de la intensidad será una función periódica como la mostrada en la Figura 8.21¹ que se repite para intervalos de tiempo iguales a $2t_1$. En el intervalo entre 0 y t_1 , el valor de la intensidad coincide con el obtenido en la primera conexión, mientras que entre t_1 y $2t_1$ corresponde al de la segunda.

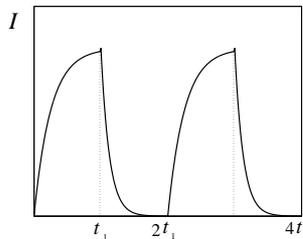


Figura 8.21. Intensidad en función del tiempo.

8.3 Analizar el circuito serie RC de la Figura 8.22 cuando se cierra el interruptor. Se supone que el condensador inicialmente está descargado.

Resolución

En un instante t después de cerrar el interruptor si Q es la carga de la armadura unida al terminal b , y en el cálculo de I se toma el sentido marcado, se verifica que $I = dQ/dt$. Las diferencias de potencial instantáneas son

$$V_a - V_b = RI, \quad V_b - V_c = \frac{Q}{C} = \frac{\int I dt}{C}.$$

¹En los apéndices pueden encontrarse programas para MATLAB con los dibujos de las curvas de los problemas.

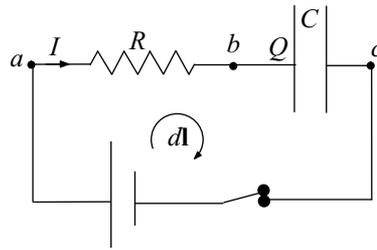


Figura 8.22. Esquema correspondiente al Ejercicio 8.3.

Como $\sum V_i = 0$, para un camino cerrado siguiendo el sentido $d\mathbf{l}$, se obtiene

$$(V_c - V_a) + (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = 0 \Rightarrow -\mathcal{E} + RI + \frac{\int I dt}{C} = 0,$$

que también puede expresarse como

$$-\mathcal{E} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Si se resuelve el problema para Q , partiendo de la última ecuación resulta

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{dQ}{\mathcal{E}C - Q} = \frac{dt}{RC}.$$

Integrando se llega a

$$-\ln(\mathcal{E}C - Q) = \frac{t}{RC} + \text{cte}.$$

Como inicialmente el condensador está descargado, en $t = 0$, $Q = 0$, por tanto la constante es igual a

$$\text{cte} = -\ln(\mathcal{E}C).$$

Incluyendo este resultado y reordenando, se tiene

$$-\ln(\mathcal{E}C - Q) = \frac{t}{RC} - \ln(\mathcal{E}C) \Rightarrow \ln \frac{\mathcal{E}C - Q}{\mathcal{E}C} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}C - Q}{\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Operando en la ecuación anterior se obtiene que la carga del condensador viene dada por la expresión

$$Q = \mathcal{E}C \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right],$$

que muestra el proceso de carga del condensador hasta el valor final $\mathcal{E}C$. La corriente será la derivada de Q , es decir

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Las diferencias de potencial entre terminales del condensador y resistencia valen

$$V_R = RI = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad V_C = \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right].$$

Si se analizan las representaciones de los valores anteriores, Figura 8.23, se observa que al estar el condensador inicialmente descargado la d.d.p. inicial en el condensador es nula. En la resistencia hay una d.d.p. inicial igual a \mathcal{E} , que origina inicialmente una corriente $I = \mathcal{E}/R$. Al cargarse el condensador, la d.d.p. entre sus terminales aumenta y en la resistencia disminuye, disminuyendo a su vez la corriente. Cuando ha transcurrido un tiempo $\tau = RC$ la corriente ha disminuido a $1/e$ (36,8%) del valor inicial, y la carga ha adquirido 63,2% del valor final. Al cabo de un tiempo aproximado $3\tau = 3RC$, el condensador se ha cargado con una carga $0,95C\mathcal{E}$ y la d.d.p. en la resistencia y la corriente son casi nulas.

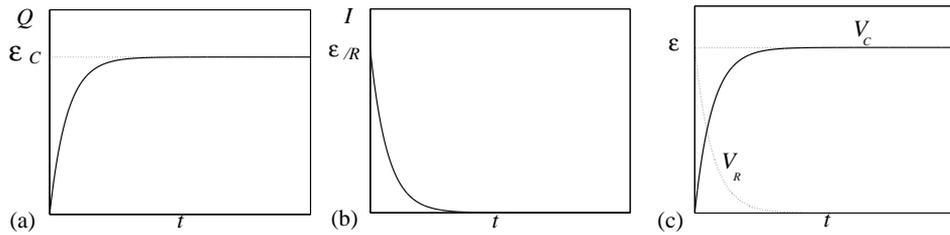


Figura 8.23. (a) Carga en el condensador. (b) Intensidad. (c) Diferencias de potencial en la resistencia y en el condensador.

8.4 Cuando el circuito anterior (Figura 8.22) ha adquirido la condición final, se cortocircuita la rama superior adquiriendo la forma de la Figura 8.24. Determinar la carga del condensador y la intensidad.

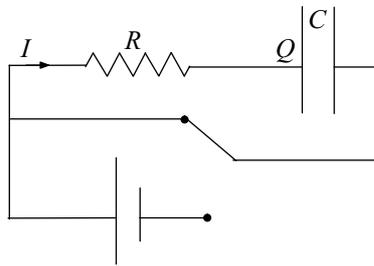


Figura 8.24. Esquema del Ejercicio 8.4.

Resolución

Sean I y Q la intensidad y la carga en un instante t . La ecuación diferencial que gobierna el proceso es

$$RI + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Reordenando e integrando se obtiene

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + \text{cte.}$$

La condición inicial para Q coincidirá con el valor final obtenido en el problema anterior, que es $Q_0 = \mathcal{E}C$. En consecuencia, la constante es $\text{cte} = \ln Q_0 = \ln(\mathcal{E}C)$. Por tanto la carga del condensador viene dada por

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + \ln(\mathcal{E}C) \Rightarrow \boxed{Q = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}} .}$$

Finalmente, la intensidad obtenida vale

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} .}$$

Se observa que el condensador se descarga a través de la resistencia y la carga disminuye exponencialmente hasta anularse. La energía almacenada en el condensador se disipa finalmente en la resistencia por efecto Joule.

8.5 Estudiar el comportamiento de un circuito compuesto por una bobina L y un condensador C , Figura 8.25(a). Se supone que el condensador se ha cargado previamente con una carga Q_0 . Determinar en función del tiempo la intensidad en el circuito, la carga en el condensador y la d.d.p. en la bobina para: $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 50 \mu\text{F}$, $Q_0 = 500 \mu\text{C}$.

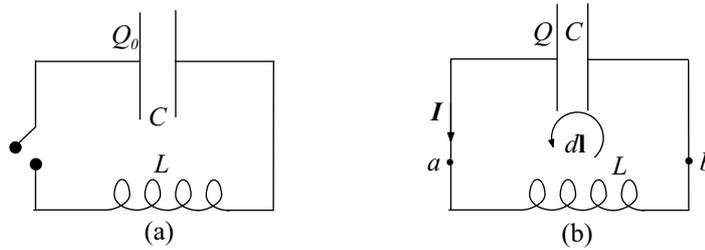


Figura 8.25. (a) Esquema inicial del circuito LC . (b) Esquema en un instante t después de cerrar el interruptor.

Resolución

Se estudia un circuito ideal LC por lo que se desprecia el efecto de la resistencia de los hilos. Cuando se cierra el interruptor el condensador empezará a descargarse. En un instante t , se supone que la corriente en el circuito es I y la carga en la armadura a del condensador es $Q_a = Q$, tal como se indica en la Figura 8.25(b). En este caso se tiene $I = -dQ/dt$.

Se aplica la 2ª ley de Kirchoff a la malla siguiendo el sentido $d\mathbf{l}$, la suma de las d.d.p. a lo largo de la malla debe ser cero, es decir,

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_a) = 0 \Rightarrow L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow -L \frac{d^2Q}{dt^2} - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{CL} = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$Q = K \cos\left(\frac{1}{\sqrt{CL}} t + \varphi_0\right) = K \cos(\omega t + \varphi_0),$$

donde K y φ_0 son dos constantes de integración y $\omega = 1/\sqrt{CL}$.

La intensidad en el circuito viene dada por

$$I = -\frac{dQ}{dt} = K\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Para determinar las constantes se tienen en cuenta las condiciones iniciales: debido a la presencia de la bobina la corriente, al cerrar el interruptor, debe mantener el valor cero inicial y la carga del condensador es $Q_a = Q = Q_0$. Introduciendo estos valores para $t = 0$ en las ecuaciones anteriores para I y Q , se obtienen las constantes:

$$\left. \begin{aligned} I = 0 &\Rightarrow K\omega \sin \varphi_0 = 0 \\ Q = Q_0 &\Rightarrow K \cos \varphi_0 = Q_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ y } K = Q_0.$$

Finalmente, como $\omega = 1/\sqrt{LC} = 447 \text{ rad s}^{-1}$, los valores instantáneos para Q , I , y V_L vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q_0 \cos(\omega t) = 500 \times 10^{-6} \cos(447t) \text{ C} \\ I &= (Q_0\omega) \sin(\omega t) = 0,2 \sin(447t) \text{ A} \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = \left(\frac{Q_0}{C}\right) \cos(\omega t) = 10 \cos(447t) \text{ V} \end{aligned} \right\}$$

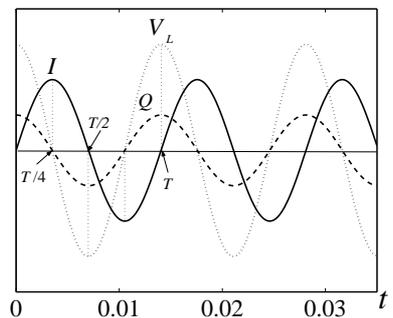


Figura 8.26. Intensidad, diferencia de potencial en la bobina y carga del condensador en función del tiempo.

Tanto Q , como I , como V_L , se repiten periódicamente, siendo el periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/447 = 0,014 \text{ s}$ tal como se muestra en la Figura 8.26.

Al cerrar el interruptor, el condensador empieza a descargarse a través de la bobina y la corriente aumenta. En el intervalo $0 < t < T/4$, el condensador se descarga, la f.e.m. de autoinducción se opone al aumento de corriente y absorbe energía. En $t = T/4$, el condensador se ha

descargado completamente; la d.d.p. entre sus terminales es cero. En dicho instante la corriente es máxima así como el campo magnético en la bobina y, consecuentemente, la energía almacenada. Entre $T/4 < t < T/2$, la corriente disminuye pero la f.e.m. de autoinducción mantiene el sentido de la corriente. En este proceso la energía en la bobina disminuye a medida que se almacena en el condensador. En $t = T/2$ se anula la corriente a la vez que el campo y la energía en la bobina. El condensador se habrá cargado, siendo las cargas de las armaduras contrarias a las iniciales. A continuación, el proceso se repetirá en sentido inverso. Como no hay pérdidas de energía las cargas del condensador se moverán en los dos sentidos indefinidamente. Todo este proceso se muestra esquemáticamente en la Figura 8.27.

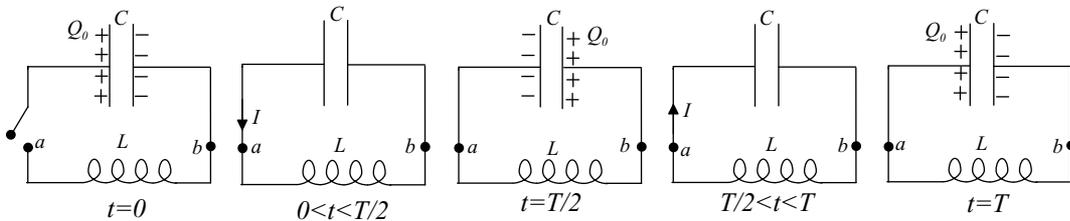


Figura 8.27. Esquema del estado del circuito LC en diferentes instantes.

La energía electromagnética del circuito LC puede expresarse como la suma de la energía almacenada en el condensador más la de la bobina

$$U = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}L(Q_0\omega)^2 \sin^2 \omega t.$$

Sustituyendo el valor $\omega = 1/\sqrt{LC}$ se obtiene que la energía electromagnética U permanece constante e igual a la energía inicial del condensador $U_{C0} = Q_0^2/(2C) = 0,0025 \text{ J}$, aunque se transfiere periódicamente a la bobina.

- 8.6 Dado el sistema de circuitos acoplados de la Figura 8.28, estudiar soluciones para las intensidades del tipo $I_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$ e $I_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$, determinando los valores posibles de ω .

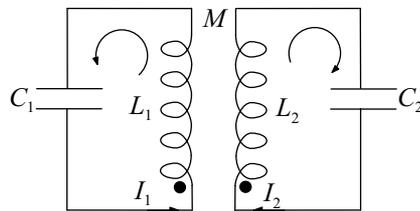


Figura 8.28. Esquema de las bobinas acopladas.

Resolución

Para los sentidos de circulación indicados en la Figura 8.28, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones integro-diferenciales, donde el signo del término de la inducción mutua es positivo ya que en ambos casos las corrientes entran por el punto. El segundo sistema de obtiene derivando el primero con objeto de tener un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt &= 0 \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + M \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{C_1} &= 0 \\ L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + M \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C_2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo en el sistema anterior los valores de $I_1 = A_1 \text{sen}(\omega t + \varphi)$, $d^2 I_1 / dt^2 = -A_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi)$, $I_2 = A_2 \text{sen}(\omega t + \varphi)$ y $d^2 I_2 / dt^2 = -A_2 \omega^2 \text{sen}(\omega t + \varphi)$ se llega a

$$\left. \begin{aligned} -L_1 A_1 \omega^2 - M A_2 \omega^2 + A_1 / C_1 &= 0 \\ -L_2 A_2 \omega^2 - M A_1 \omega^2 + A_2 / C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A_1(-L_1 \omega^2 + 1/C_1) + A_2(-M \omega^2) &= 0 \\ A_1(-M \omega^2) + A_2(-L_2 \omega^2 + 1/C_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Para obtener una solución distinta de la trivial el determinante del sistema de ecuaciones anterior debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} -L_1 \omega^2 + 1/C_1 & -M \omega^2 \\ -M \omega^2 & -L_2 \omega^2 + 1/C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante se obtiene la ecuación

$$\omega^4(L_1 L_2 - M^2) + \omega^2 \left(-\frac{L_2}{C_1} - \frac{L_1}{C_2} \right) + \frac{1}{C_1 C_2} = 0.$$

La solución de la ecuación anterior en ω viene dada por

$$\omega^2 = \frac{L_2/C_1 + L_1/C_2 \pm \sqrt{(-L_2/C_1 - L_1/C_2)^2 - 4[(L_1 L_2 - M^2)/(C_1 C_2)]}}{2(L_1 L_2 - M^2)},$$

que proporciona las dos frecuencias posibles, ω_1^2 y ω_2^2 , una para el signo positivo y otra para el negativo de la raíz del numerador. Dichos valores corresponden a las frecuencias propias de oscilación del sistema.

8.7 Determinar la intensidad I en el circuito de la figura cuando se cierra el interruptor. Representar la intensidad en función del tiempo para los siguientes datos numéricos: $\mathcal{E}_0 = 40 \text{ V}$, $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$, $R = 2 \Omega$, $L = 60 \text{ mH}$.

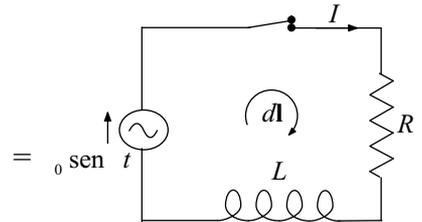


Figura 8.29. Circuito del Problema 8.7.

Resolución

En un instante t después de cerrar el interruptor, sean I y \mathcal{E} la intensidad y f.e.m. respectivamente, calculadas en los sentidos indicados en el esquema.

La ley de Kirchhoff, $\sum V_i = 0$, aplicada a la malla da

$$-\mathcal{E}_0 \text{sen } \omega t + RI + L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \text{sen } \omega t.$$

La solución general se puede expresar como

$$I = I_1 + I_2,$$

donde

- I_1 (término transitorio) es la solución de la homogénea $L(dI/dt) + RI = 0$, igual a $I = K e^{-\frac{R}{L}t}$.
- I_2 es la solución particular de la completa (término estacionario) que será del tipo $I_2 = A \text{sen}(\omega t + \varphi)$. Introduciendo este valor en la ecuación diferencial se obtiene

$$RI + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \text{sen } \omega t \Rightarrow RA \text{sen}(\omega t + \varphi) + LA \omega \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \text{sen } \omega t.$$

Desarrollando las expresiones trigonométricas de la ecuación anterior y operando se llega a

$$\operatorname{sen}(\omega t)[RA \cos \varphi - LA\omega \operatorname{sen} \varphi] + \operatorname{cos}(\omega t)[RA \operatorname{sen} \varphi + LA\omega \operatorname{cos} \varphi] = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Identificando los términos a ambos lados de la igualdad, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones a partir del cual se determinan los valores de A y φ :

$$\left. \begin{aligned} RA \cos \varphi - LA\omega \operatorname{sen} \varphi &= \mathcal{E}_0 \\ RA \operatorname{sen} \varphi + LA\omega \operatorname{cos} \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}; \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R}.$$

La solución general será la suma de los dos

$$I = I_1 + I_2 = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen} \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R} \right),$$

donde K se calcula a partir de la condición para $t = 0, I = 0$, obteniéndose

$$K = \frac{\mathcal{E}_0 L \omega}{R^2 + L^2 \omega^2} = 3,24 \text{ A.}$$

Con los datos numéricos del enunciado:

- $I_1 = K e^{-\frac{R}{L}t} = K e^{-\frac{2}{0,060}t} = 3,24 e^{-33t} \text{ A.}$
- $I_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen} \left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{L\omega}{R} \right) = \frac{40}{\sqrt{2^2 + 0,060^2 \times 200^2}} \operatorname{sen} \left(200t - \operatorname{arctg} \frac{0,060 \times 200}{2} \right) = 3,29 \operatorname{sen}(200t - 0,45\pi) \text{ A.}$

La solución general viene dada por:

$$I = 3,24 e^{-33t} + 3,29 \operatorname{sen}(200t - 0,45\pi) \text{ A,}$$

cuya representación gráfica es la mostrada en la Figura 8.30. Para un tiempo aproximado $t = 0,09 \text{ s}$ el término transitorio se anula prácticamente y sólo queda el permanente o estacionario que es una corriente sinusoidal con $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$.

El término estacionario I_2 se podría determinar aplicando el método simbólico. En este caso la impedancia es igual a $\bar{Z} = R + i L\omega$, cuyo módulo es $|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$ y su argumento δ viene dado por $\operatorname{tg} \delta = L\omega/R$. La intensidad será igual a

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i0}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} e^{i\delta}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} e^{-i\delta}.$$

Multiplicando este valor por $e^{i\omega t}$ y determinando la parte imaginaria del complejo resultante, se obtiene la expresión temporal de la intensidad estacionaria, que coincidirá con el valor I_2 calculado anteriormente.

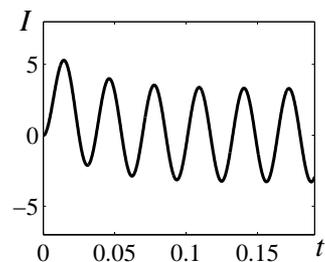


Figura 8.30. Intensidad resultante en función del tiempo.

8.8 En el esquema de la Figura 8.31 la d.d.p. entre terminales del generador es $V_0 = 20 \text{ V}$, el valor de la autoinducción $L=5 \text{ mH}$, la capacidad del condensador $C=1 \mu\text{F}$, la resistencia $R=50 \Omega$. 1) Si se cierra el interruptor, determinar la intensidad en la rama central. 2) Si una vez alcanzado el régimen permanente se desconecta el interruptor, determinar la d.d.p. entre terminales del condensador y representar gráficamente el resultado obtenido.

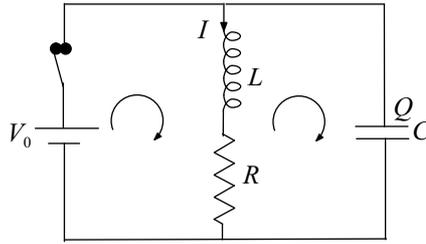


Figura 8.31. Esquema del circuito del Problema 8.8.

Resolución

1) La d.d.p. entre terminales de la rama central coincide con la de terminales del generador, luego en dicha rama

$$V_0 = L \frac{dI}{dt} + RI \Rightarrow \frac{dI}{V_0 - RI} = \frac{dt}{L} \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln [V_0 - RI] = \frac{t}{L} + \text{cte.}$$

La solución anterior también puede expresarse como $V_0 - RI = K e^{-Rt/L}$, donde K es una constante a determinar. Como, debido a la presencia de la bobina, para $t = 0$, $I = 0$, se obtiene para la constante $K = V_0$. Sustituyendo este valor de K , se llega finalmente a

$$I = \frac{V_0}{R} \left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right] = \frac{20}{50} \left[1 - e^{-50t/0,005} \right] = 0,4 \left[1 - e^{-10000t} \right] \text{ A.}$$

En régimen permanente, $I = V_0/R = 0,4 \text{ A}$.

La d.d.p. entre terminales del condensador es también $V_0 = 20 \text{ V}$ y, por ello, su carga valdrá $Q = V_0 C = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$.

2) Si se abre el interruptor se tiene el circuito RLC serie de la Figura 8.32. La carga inicial del condensador es $Q_0 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$. Siguiendo el sentido de circulación marcado, se llega a la siguiente ecuación que una vez derivada proporciona la ecuación diferencial que gobierna el proceso:

$$(V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 \Rightarrow \\ L \frac{dI}{dt} + RI - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial se estudió en el Epígrafe 8.3 correspondiente al régimen transitorio. En este caso $R = 50 < 2\sqrt{L/C} = 141,4$, la solución es del tipo estudiado en el caso 3:

$$I = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left[\sqrt{1/(LC) - (R/2L)^2} t + \beta \right] = Ae^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \beta),$$

donde

$$\omega = \sqrt{1/(LC) - (R/2L)^2} = \sqrt{1/(5 \times 10^{-3} \times 10^{-6}) - [50/(2 \times 5 \times 10^{-3})]^2} = 13228 \text{ rad s}^{-1}.$$

Si se toma el origen de tiempos cuando se desconecta el interruptor, la condición inicial para la intensidad es $I|_{t=0} = 0,4 \text{ A}$. En $t = 0$ la carga del condensador es $Q_0 = 20 \times 10^{-6} \text{ C}$. Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff al circuito de la Figura 8.32 y particularizando el resultado para los valores correspondientes al instante inicial, se obtiene

$$L \frac{dI}{dt} \Big|_{t=0} + RI|_{t=0} - \frac{Q_0}{C} = 0 \Rightarrow 0,005 \frac{dI}{dt} \Big|_{t=0} + 50 \times 0,4 - \frac{20 \times 10^{-6}}{10^{-6}} = 0 \Rightarrow L \frac{dI}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

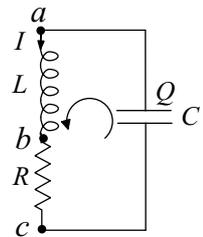


Figura 8.32. Esquema del circuito después de abrir el interruptor.

Por tanto, las condiciones a aplicar en $t = 0$ para determinar las constantes de integración son: $I|_{t=0} = 0,4 \text{ A}$ y $dI/dt|_{t=0} = 0$.

- De la segunda condición:

$$\frac{dI}{dt} = \left(-\frac{R}{2L}A\right) e^{-\frac{R}{2L}t} \text{sen}(\omega t + \beta) + A\omega e^{-\frac{R}{2L}t} \text{cos}(\omega t + \beta) \Rightarrow$$

$$-\frac{R}{2L}A \text{sen}(\beta) + A\omega \text{cos}(\beta) = 0 \Rightarrow \text{tg}\beta = \omega 2L/R = 2,64 \Rightarrow \beta = 0,38\pi.$$

- De la primera:

$$I = A \text{sen}\beta \Rightarrow 0,4 = A \text{sen}(0,38\pi) \Rightarrow A = 0,428.$$

La solución general para la intensidad será:

$$I = 0,428 e^{-\frac{50}{2 \times 0,005}t} \text{sen}(13228 t + 0,38\pi)$$

$$= 0,428 e^{-5000t} \text{sen}(13228 t + 0,38\pi) \text{ A.}$$

La d.d.p. entre terminales del condensador valdrá:

$$V_C = L \frac{dI}{dt} + RI$$

$$= 10,7 e^{-5000t} \text{sen}(13228 t + 0,38\pi) +$$

$$+ 28,3 e^{-5000t} \text{cos}(13228 t + 0,38\pi) \text{ V,}$$

cuya representación es la de la Figura 8.33.

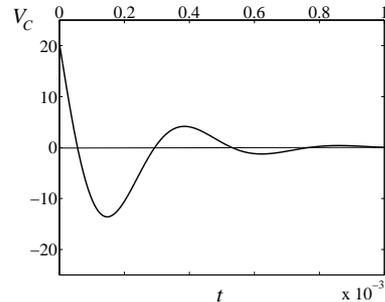


Figura 8.33. Diferencia de potencial entre terminales del condensador.

8.9 Escribir el sistema de ecuaciones para los valores instantáneos en el circuito con bobinas acopladas de la figura.

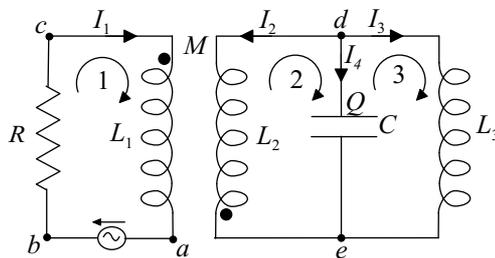


Figura 8.34. Circuito del Problema 8.9.

Resolución

Aplicando las leyes de Kirchhoff se obtienen cuatro ecuaciones independientes, una correspondiente a los nudos y tres a las mallas. En el esquema adjunto se indican los valores y sentidos supuestos para las corrientes en cada rama, así como los sentidos de circulación seguidos en las tres mallas independientes. En el instante considerado la carga de la armadura del condensador unida a d es Q . La primera ley se aplica al nudo d donde la suma de las intensidades debe ser cero. Se han identificado los terminales de cada componente para facilitar la escritura de la segunda ley

en cada malla. La aplicación de las leyes de Kirchhoff conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} I_2 + I_3 + I_4 = 0 \text{ (nudo d)} \\ (V_a - V_b) + (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 \text{ (malla 1)} \\ (V_e - V_d) + (V_d - V_e) = 0 \text{ (malla 2)} \\ (V_d - V_e) + (V_e - V_d) = 0 \text{ (malla 3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ -\mathcal{E}_1 + RI_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = 0 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \end{array} \right\}$$

En la segunda y tercera ecuación primero se ha puesto el signo al término de la autoinducción y después al de la inducción mutua. Como I_1 entra por el punto e I_2 sale, el signo adjudicado al término de la M en la segunda ecuación es negativo, opuesto al término de la autoinducción. El mismo razonamiento se aplica a la tercera ecuación.

Poniendo la carga del condensador en función de las intensidades se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ -\mathcal{E}_1 + RI_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = 0 \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + \frac{\int I_4 dt}{C} = 0 \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} - \frac{\int I_4 dt}{C} = 0 \end{array} \right\}$$

CORRIENTE ALTERNA

- 8.10** Por la rama de la Figura 8.35 circula una corriente $I = 10 \sin 200t$ A. Los valores de las magnitudes son: $R_1 = 3 \Omega$, $L_1 = 0,01$ H, $R_2 = 1 \Omega$, $C = 10^{-3}$ F y $L_2 = 0,005$ H. Se pide: a) Calcular la tensión entre los terminales de cada elemento. b) Calcular gráficamente la d.d.p. entre los extremos de la rama.

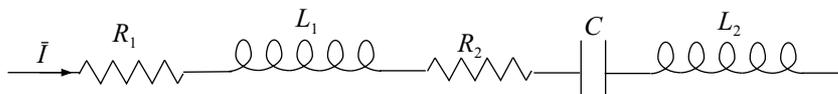


Figura 8.35. Rama del Ejercicio 8.10.

Resolución

Como los componentes están en serie, la intensidad es la misma en todos ellos y la d.d.p. entre los terminales de la rama será la suma de las d.d.p. en los terminales de cada componente.

Primero se determina la intensidad compleja \bar{I} asociada al valor instantáneo $I = 10 \sin(200t)$ A, con $\omega = 200$ rad s⁻¹, cuyo complejo asociado es

$$\bar{I} = I_0 e^{i\phi_I} = 10 e^{i0} = 10 \text{ A.}$$

En cada componente la d.d.p. entre terminales será:

- Resistencia 1

$$\bar{V}_{R_1} = \bar{Z}_{R_1} \bar{I} = R_1 I_0 e^{i\phi_I} = 3 \times 10 = 30 \text{ V.}$$

- Bobina 1

$$\begin{aligned} \bar{V}_{L_1} &= \bar{Z}_{L_1} \bar{I} = L_1 \omega e^{i\frac{\pi}{2}} I_0 e^{i\phi_I} \\ &= 0,01 \times 200 \times 10 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 20 e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ V.} \end{aligned}$$

- Resistencia 2

$$\bar{V}_{R_2} = \bar{Z}_{R_2} \bar{I} = R_2 I_0 e^{i\phi_I} = 1 \times 10 = 10 \text{ V.}$$

- Condensador

$$\begin{aligned} \bar{V}_C &= \bar{Z}_C \bar{I} = \frac{1}{C\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} I_0 e^{i\phi_I} \\ &= \frac{1}{10^{-3} \times 200} \times 10 \times e^{-i\frac{\pi}{2}} = 50 e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ V.} \end{aligned}$$

- Bobina 2

$$\begin{aligned} \bar{V}_{L_2} &= \bar{Z}_{L_2} \bar{I} = L_2 \omega e^{i\frac{\pi}{2}} I_0 e^{i\phi_I} \\ &= 0,005 \times 200 \times 10 \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 10 e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ V.} \end{aligned}$$

Conocidas las d.d.p. entre terminales de cada componente, se dibuja en el plano complejo el diagrama que represente $\bar{V} = \sum \bar{V}_i$, tal como muestra la Figura 8.36. A partir del diagrama se mide el módulo de $|\bar{V}|$ y el desfase $\delta = \phi_V - \phi_I$. Los resultados obtenidos son:

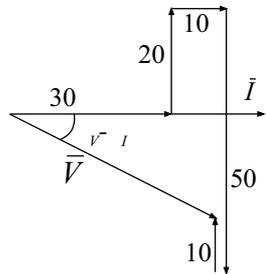


Figura 8.36. Representación en el plano complejo de las d.d.p.

$$\begin{aligned} |\bar{V}| &= \sqrt{(30+10)^2 + (50-20-10)^2} = 44,7 \text{ V,} \\ \delta &= -\arctg \frac{50-20-10}{30+10} = -26,57^\circ. \end{aligned}$$

8.11 Determinar la intensidad instantánea que circula por cada rama en el circuito de la Figura 8.37(a). Datos: $\mathcal{E}_0 = 100 \text{ V}$, $\omega = 2\pi \times 50 = 314,16 \text{ rad s}^{-1}$, $R = 100 \Omega$, $L = 0,4 \text{ H}$, $C = 20 \mu\text{F}$.

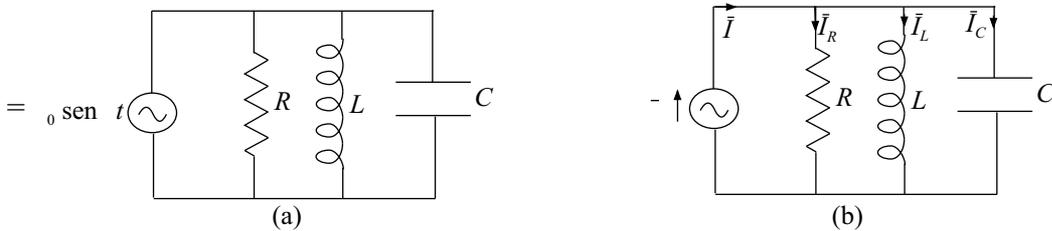


Figura 8.37. (a) Esquema del Problema 8.11. (b) Intensidades en cada rama del circuito.

Resolución

Primero se calcula la intensidad compleja \bar{I} , el resultado obtenido se multiplica por $e^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia excitadora asociada al generador. Finalmente, el valor instantáneo de la intensidad será $I = \text{Im} \{ \bar{I} e^{i\omega t} \}$.

Las ramas R , L , y C , están en paralelo con el generador de la figura, sus impedancias valen $\bar{Z}_R = R$, $\bar{Z}_L = i L\omega$ y $\bar{Z}_C = -i/C\omega$. La f.e.m. compleja asociada al generador viene dada por: $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i0}$. Teniendo en cuenta estos valores, las intensidades en cada rama, según la Figura 8.37(b), pueden expresarse como:

- En R :

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{Z}_R} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i0}}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A} \Rightarrow I_R = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \text{sen}(\omega t) = 1 \text{ sen}(100\pi t) \text{ A.}$$

- En L :

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{iL\omega} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i0}}{L\omega e^{i\pi/2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega} e^{-i\pi/2} = \frac{100}{0,4 \times 314,16} e^{-i\pi/2} = 0,79 e^{-i\pi/2} \text{ A.}$$

$$I_L = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,79 \operatorname{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A.}$$

- En C :

$$\begin{aligned} \bar{I}_C &= \frac{\bar{\mathcal{E}}}{-i/C\omega} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i0}}{(1/C\omega)e^{-i\pi/2}} = \mathcal{E}_0 C\omega e^{i\pi/2} \\ &= 100 \times 20 \times 10^{-6} \times 314,16 e^{i\pi/2} = 0,63 e^{i\pi/2} \text{ A.} \end{aligned}$$

$$I_C = \mathcal{E}_0 C\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,63 \operatorname{sen}\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ A.}$$

En la rama del generador la intensidad \bar{I} que circula es la suma de la anteriores, es decir:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + \left(\mathcal{E}_0 C\omega - \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\right) i = 1 - 0,16 i \text{ A,}$$

cuyo módulo, argumento y valor temporal vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} |\bar{I}| = I_0 &= \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2 + \left(\mathcal{E}_0 C\omega - \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{1^2 + 0,16^2} = 1,01 \text{ A} \\ \phi_I &= \operatorname{arctg} \frac{C\omega - 1/\omega L}{1/R} = \operatorname{arctg} \left(\frac{-0,16}{1}\right) = -9^\circ \quad (-0,05\pi \text{ rad}) \end{aligned} \right\}$$

El valor instantáneo de la intensidad será

$$I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_I) = 1,01 \operatorname{sen}(100\pi t - 0,05\pi) \text{ A.}$$

- 8.12** Un circuito como el que se encuentra en la figura consta de una impedancia $\bar{Z}' = R' + iX'$ en serie con la resistencia variable R . Obtener el valor de la resistencia R para el cual la potencia disipada en R sea máxima.

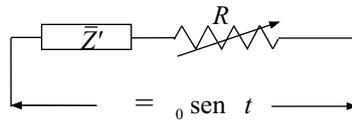


Figura 8.38. Esquema del Problema 8.12.

Resolución

La potencia en la resistencia R es $P = V_e I_e = RI_e^2$, siendo $I_e = I_0/\sqrt{2}$. La impedancia y la intensidad en la rama dibujada vienen dadas por:

$$\bar{Z} = (R + R') + iX' = \sqrt{(R + R')^2 + (X')^2} e^{i\delta} \quad ; \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{X'}{R + R'}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R + R')^2 + (X')^2} e^{i\delta}} \quad ; \quad |\bar{I}| = I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(R + R')^2 + (X')^2}}$$

donde el complejo asociado a $\mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t)$ es $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i0} = \mathcal{E}_0$. Sustituyendo estos valores en la expresión de la potencia, se obtiene

$$P = RI_e^2 = \frac{RI_0^2}{2} = \frac{R\mathcal{E}_0^2}{2[(R+R')^2 + (X')^2]}.$$

Para que la potencia disipada en R sea máxima se debe verificar la condición de que la derivada de P respecto de R sea 0, es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \Rightarrow R^2 + 2RR' + (R')^2 + (X')^2 - 2R^2 - 2RR' = 0 \Rightarrow R = \sqrt{(R')^2 + (X')^2} = |\bar{Z}'|,$$

que muestra que el valor de R debe ser igual a la impedancia en serie con ella.

8.13 En el circuito de corriente alterna de la Figura 8.39(a) hallar la capacidad del condensador que acoplado en paralelo con R hace que la intensidad del circuito esté en fase con la tensión. La frecuencia es de 50 Hz y $X_L = R/2$.

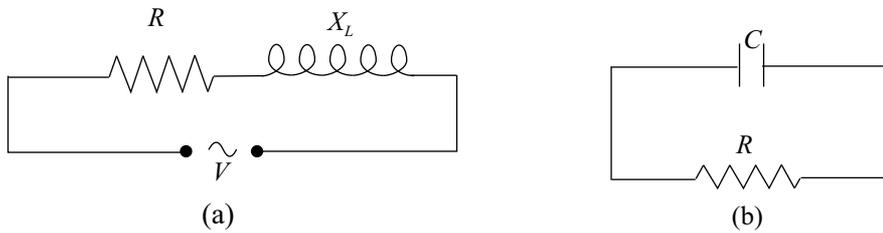


Figura 8.39. (a) Esquema del Problema 8.13. (b) Condensador en paralelo con la resistencia.

Resolución

- Impedancia equivalente \bar{Z}_1 del conjunto resistencia-condensador en paralelo [Figura 8.39(b)]:

$$\frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(-i/C\omega)} = \frac{1}{R} + iC\omega \Rightarrow \bar{Z}_1 = \frac{R}{1 + iRC\omega} = \frac{R - iR^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2}.$$

- Impedancia equivalente del conjunto serie formado por la impedancia \bar{Z}_1 calculada y la $\bar{Z}_2 = iX_L = iR/2$ [Figura 8.39(a)]:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \left(\frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} \right) + i \left(\frac{R}{2} - \frac{R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} \right).$$

Si \bar{V} está en fase con \bar{I} se verifica que $\delta = \phi_V - \phi_I = 0$, es decir

$$\delta = 0 \Rightarrow \text{tg } \delta = 0 \Rightarrow \text{Im} \{ \bar{Z} \} = 0 \Rightarrow \frac{R}{2} - \frac{R^2C\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} = 0.$$

Operando en la última ecuación y reordenando los términos en C , se obtiene

$$C^2(R^2\omega^2) - C(2R\omega) + 1 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{R\omega} = \frac{1}{R \times 2\pi \times 50} = \frac{1}{100\pi R} \text{ F}.$$

8.14 La Figura 8.40 representa un circuito de corriente alterna conectado a un generador cuya d.d.p entre terminales es $V_0 \text{sen } \omega t$ y de impedancia interna despreciable. Se pide: 1) Determinar la amplitud V_{0AB} correspondiente a la d.d.p. entre los puntos de conexión A y B . 2) Si se varía la frecuencia del generador, representar gráficamente, de forma esquemática, la relación de amplitudes V_{0AB}/V_0 en función de ω .

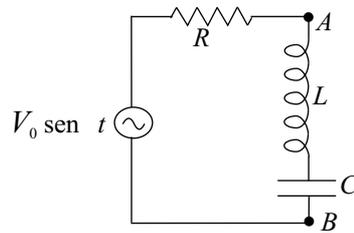


Figura 8.40. Esquema del problema 8.14.

Resolución

1) La impedancia equivalente y la intensidad que circula en el circuito serie son:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z} &= R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \\ \bar{V} &= V_0 e^{i0} = V_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{V_0}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}.$$

La impedancia entre A y B es $\bar{Z}_{AB} = i [L\omega - 1/(C\omega)]$ y la d.d.p.:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{Z}_{AB} \bar{I} = i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \times \frac{V_0}{R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \frac{V_0 (L\omega - 1/C\omega) e^{i\pi/2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} e^{i\delta}},$$

donde $\delta = \arctg[(L\omega - 1/C\omega)/R]$. El módulo se puede expresar como

$$|\bar{V}_{AB}| = V_{0AB} = \left| \frac{V_0 (L\omega - 1/C\omega)}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} \right|.$$

2)

$$\frac{V_{0AB}}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{R^2 / (L\omega - 1/C\omega)^2 + 1}}.$$

Por tanto:

- Para frecuencias bajas, la impedancia del condensador $|\bar{Z}_C| = 1/(C\omega)$ es muy grande y la intensidad en la rama pequeña, $V_{0AB}/V_0 \rightarrow 1$.
- Para frecuencias altas, la impedancia en la autoinducción es grande y la intensidad pequeña, $V_{0AB}/V_0 \rightarrow 1$.
- Para la frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (frecuencia de resonancia), $V_{0AB}/V_0 \rightarrow 0$. En este caso la impedancia del circuito $\bar{Z} = R$ y la impedancia del tramo AB es $\bar{Z}_{AB} = 0$. La d.d.p. del conjunto está en fase con la corriente y la intensidad es máxima.

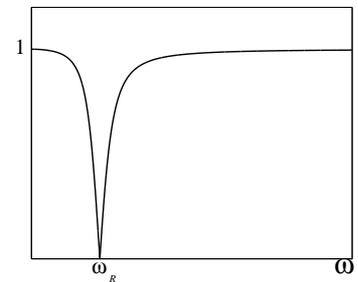


Figura 8.41. V_{0AB}/V_0 en función de la frecuencia.

- 8.15** La d.d.p. entre los puntos *a* y *d* del circuito de la Figura 8.42 es $V_0 = 100 \text{ V}$ y $\omega = 1000 \text{ rad s}^{-1}$. Se sabe que $R = 2 \Omega$, $L = 0,001 \text{ H}$ y $C = 500 \mu\text{F}$. Calcular: 1) La impedancia entre *b* y *d* y 2) entre *a* y *d*. 3) La intensidad por la bobina. 4) La tensión entre *b* y *d*. 5) Las intensidades por la resistencia y por el condensador.

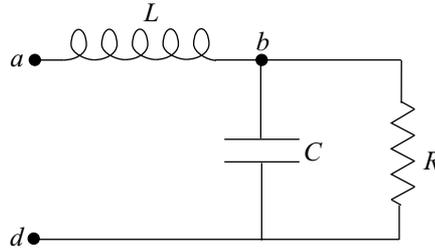


Figura 8.42. Circuito del Problema 8.15.

Resolución

Las impedancias de los componentes del circuito son:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_R &= R = 2 \Omega. \\ \bar{Z}_L &= iL\omega = i 0,001 \times 10^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \Omega. \\ \bar{Z}_C &= \frac{-i}{C\omega} = \frac{-i}{0,5 \times 10^{-3} \times 10^3} = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} \Omega. \end{aligned}$$

1) Entre *b* y *d* la impedancia de la resistencia y la del condensador están en paralelo, por lo que la impedancia equivalente \bar{Z}_{bd} es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{Z}_{bd}} &= \frac{1}{\bar{Z}_R} + \frac{1}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{Z}_C + \bar{Z}_R}{\bar{Z}_C \bar{Z}_R}, \\ \bar{Z}_{bd} &= \frac{\bar{Z}_C \bar{Z}_R}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_R} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}} \times 2}{2e^{-i\frac{\pi}{2}} + 2} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1} \Omega \\ &= \frac{2 e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} \Rightarrow \boxed{\bar{Z}_{bd} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Omega.} \end{aligned}$$

2) Para obtener la impedancia equivalente \bar{Z}_{ad} se tiene en cuenta que la bobina está en serie con la rama de impedancia \bar{Z}_{bd} , es decir,

$$\boxed{\bar{Z}_{ad} = \bar{Z}_L + \bar{Z}_{bd} = e^{i\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 \Omega.}$$

3) La ley de Ohm entre los terminales *ad* será $\bar{I} = \bar{V}_{ad}/\bar{Z}_{ad}$, donde $\bar{V}_{ad} = V_0 e^{i\phi_V}$. La intensidad en la bobina es igual a

$$\boxed{\bar{I} = \frac{\bar{V}_{ad}}{\bar{Z}_{ad}} = \frac{100e^{i\phi_V}}{1} = 100 e^{i\phi_V} \text{ A.}}$$

La amplitud de la intensidad que atraviesa la bobina es $I_0 = 100 \text{ A}$ y su fase inicial

$$\phi_I = \phi_V \Rightarrow \delta = 0.$$

4) La ley de Ohm entre los terminales *b* y *d* es igual a $\bar{V}_{bd} = \bar{Z}_{bd}\bar{I}_{bd}$. Como \bar{I}_{bd} es igual a la intensidad en la bobina se tiene

$$\boxed{\bar{V}_{bd} = \bar{Z}_{bd}\bar{I}_{bd} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 100 e^{i\phi_V} = 100\sqrt{2} e^{i(\phi_V - \frac{\pi}{4})} \text{ V.}}$$

5) La d.d.p. entre terminales de la resistencia y del condensador es \bar{V}_{bd} . Aplicando la ley de Ohm a las ramas de ambos componentes:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{I}_R &= \frac{\bar{V}_{bd}}{\bar{Z}_R} = \frac{100\sqrt{2} e^{i(\phi_V - \frac{\pi}{4})}}{2} = 50\sqrt{2} e^{i(\phi_V - \frac{\pi}{4})} \text{ A.} \\ \bar{I}_C &= \frac{\bar{V}_{bd}}{\bar{Z}_C} = \frac{100\sqrt{2} e^{i(\phi_V - \frac{\pi}{4})}}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}} = 50\sqrt{2} e^{i(\phi_V + \frac{\pi}{4})} \text{ A.} \end{aligned}}$$

- 8.16** El circuito de la Figura 8.43(a) se conecta a un generador ideal de f.e.m. eficaz 200 V e impedancia interna despreciable. Calcular la intensidad eficaz que suministra el generador y potencia calorífica disipada en el circuito.
 Datos: $R=20\ \Omega$, $C=10^{-3}\ \text{F}$, $L=0.1\ \text{H}$, $\omega=200\ \text{rad s}^{-1}$.

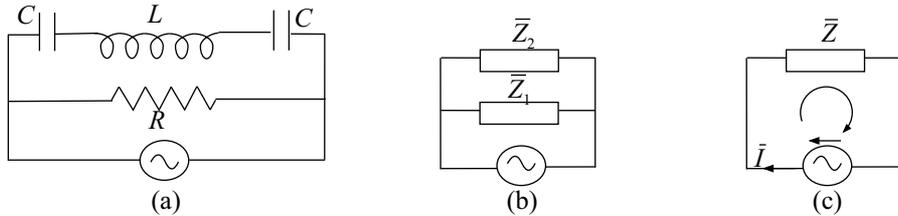


Figura 8.43. (a) Esquema del Problema 8.16. (b) Esquema incluyendo las impedancias de las ramas. (c) Esquema equivalente del conjunto.

Resolución

- Impedancias equivalentes de cada rama [Figura 8.43(b)] y la del conjunto en paralelo [Figura 8.43(c)]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_1 &= R \\ \bar{Z}_2 &= i(L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C\omega}) = i(L\omega - \frac{2}{C\omega}) \end{aligned} \right\} \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{R} - \frac{i}{L\omega - 2/(C\omega)}$$

- Intensidad suministrada por el generador

$$\bar{I} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\bar{Z}} = \bar{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{R} - \frac{i}{L\omega - 2/(C\omega)} \right) = \bar{\mathcal{E}} \left(\frac{1}{20} - \frac{i}{0,1 \times 200 - 2/(10^{-3} \times 200)} \right) = \bar{\mathcal{E}} \left(\frac{1-2i}{20} \right)$$

- El valor eficaz I_e y la diferencia de fase vienen dadas por

$$\left. \begin{aligned} I_e &= \mathcal{E}_e \times \left| \frac{1-2i}{20} \right| = 200 \frac{\sqrt{1+2^2}}{20} = 22,4\ \text{A} \\ \phi_I - \phi_{\mathcal{E}} &= \text{arctg}(-2) = -63^\circ \Rightarrow \cos \delta = 0,45 \end{aligned} \right\}$$

- La potencia disipada en el circuito es igual a la potencia activa cedida por el generador

$$P = V_e I_e \cos \delta = 200 \times 22,4 \times 0,45 = 2016\ \text{W},$$

donde se ha tenido en cuenta que la d.d.p. del conjunto coincide con la f.e.m. del generador. Dicha potencia es igual a la potencia disipada en la resistencia.

- 8.17** En la red de la Figura 8.44(a) $V_g=220\ \text{V}$ es la tensión (eficaz) del generador, con impedancia interna despreciable y frecuencia determinada por $\omega=314\ \text{rad s}^{-1}$. Son conocidos $R=28\ \Omega$ y $C=22\ \mu\text{F}$. El valor de la autoinducción es $L=1/\omega^2 C$. Hallar: 1) Las intensidades en las ramas 1,2,3 indicando los respectivos desfases respecto a la la tensión en el generador. 2) Las potencias disipadas en las ramas citadas.

Resolución

- 1) Las impedancias en cada rama vienen dadas por:

- Rama 1: $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_C = -\frac{i}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

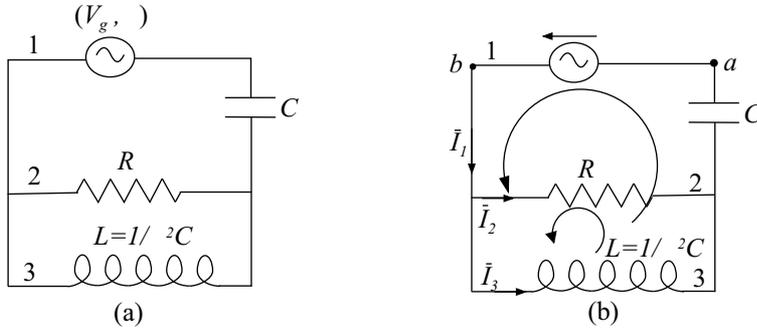


Figura 8.44. (a) Esquema del Problema 8.17. (b) Diagrama mostrando los sentidos utilizados en el cálculo de las intensidades y los de circulación en las mallas.

- Rama 2: $\bar{Z}_2 = \bar{Z}_R = R$.
- Rama 3: $\bar{Z}_3 = \bar{Z}_L = i L\omega = i \frac{1}{\omega^2 C}\omega = \frac{i}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{i\frac{\pi}{2}}$.

El circuito estudiado tiene dos nudos, tres ramas y dos mallas independientes, véase la Figura 8.44(b). Al aplicar las leyes de Kirchhoff se tienen tres ecuaciones: una para los nudos y dos para las mallas. Las mallas consideradas son la formada por las ramas 1 y 3 y la correspondiente a las ramas 2 y 3. Los sentidos para el cálculo de las intensidades en cada rama y los de circulación seguidos al aplicar la segunda ley de Kirchhoff son los indicados en la figura. En el generador se considera que el sentido asociado a la f.e.m. es el indicado, es decir $V_b - V_a = V_g$. Los valores complejos correspondientes valen $\bar{V}_{b-a} = \bar{V}_g = V_g e^{i\phi_g}$ ($\bar{V}_{a-b} = -\bar{V}_g$), donde ϕ_g es desconocido. Las ecuaciones obtenidas al aplicar las leyes de Kirchhoff son:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 &= 0 \\ \bar{Z}_1 \bar{I}_1 - \bar{V}_g + \bar{Z}_3 \bar{I}_3 &= 0 \\ -\bar{Z}_2 \bar{I}_2 + \bar{Z}_3 \bar{I}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Como las relaciones entre los valores eficaces y las amplitudes son $I_e = I_0/\sqrt{2}$ y $V_e = V_0/\sqrt{2}$ y las ecuaciones obtenidas por aplicación de las leyes de Kirchhoff son lineales, podemos considerar que las tres ecuaciones del circuito están escritas para los valores eficaces.

Como solución del sistema de ecuaciones anterior se obtienen \bar{I}_3 , \bar{I}_2 , e \bar{I}_1 en función de \bar{V}_g y las impedancias de los componentes. Para ello, en la 3ª ecuación se despeja $\bar{I}_2 = (\bar{Z}_3/\bar{Z}_2)\bar{I}_3$, se sustituye este valor en la 1ª ecuación obteniendo $\bar{I}_1 = (\bar{Z}_3/\bar{Z}_2 + 1)\bar{I}_3$ y, finalmente, este valor sustituido en la 2ª da $\bar{V}_g = \bar{Z}_3 \bar{I}_3 + \bar{Z}_1(\bar{Z}_3/\bar{Z}_2 + 1)\bar{I}_3$, a partir del cual se obtiene \bar{I}_3 .

Por tanto, los valores de las intensidades en cada rama son:

- Para \bar{I}_3

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1(\bar{Z}_3/\bar{Z}_2) + \bar{Z}_1} = \frac{\bar{V}_g}{(i/C\omega) + (-i/C\omega)[(i/C\omega)/R] + (-i/C\omega)} \\ &= RC^2\omega^2\bar{V}_g = RC^2\omega^2 V_g e^{i\phi_g}. \end{aligned}$$

El módulo de $|\bar{I}_3| = RC^2\omega^2 V_g = 28 \times (22 \times 10^{-6})^2 \times (314)^2 \times 220 = 0,29$ A y su argumento $\phi_{I3} = \phi_g$. Su diferencia de fase respecto la tensión del generador será $\phi_{I3} - \phi_g = 0$.

- Para \bar{I}_2 , se obtiene

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2} \bar{I}_3 = \frac{(i/C\omega)}{R} RC^2\omega^2\bar{V}_g = iC\omega V_g e^{i\phi_g} = C\omega V_g e^{i(\phi_g + \pi/2)}.$$

El módulo de $|\bar{I}_2| = C\omega V_g = (22 \times 10^{-6}) \times 314 \times 220 = 1,52 \text{ A}$ y su argumento $\phi_{I_2} = \phi_g + \pi/2$. La diferencia de fase respecto la tensión del generador es $\phi_{I_2} - \phi_g = \pi/2$.

▪ Para \bar{I}_1

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= \left(\frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2} + 1 \right) \bar{I}_3 = \left(\frac{i/C\omega}{R} + 1 \right) RC^2\omega^2 \bar{V}_g = (i + RC\omega)C\omega \bar{V}_g \\ &= C\omega \sqrt{(RC\omega)^2 + 1} e^{i \arctg(\frac{1}{RC\omega})} V_g e^{i\phi_g}.\end{aligned}$$

El módulo de \bar{I}_1 es:

$$\begin{aligned}|\bar{I}_1| &= V_g C\omega \sqrt{(RC\omega)^2 + 1} \\ &= 220 \times (22 \times 10^{-6}) \times 314 \sqrt{[28 \times (22 \times 10^{-6}) \times 314]^2 + 1} = 1,54 \text{ A},\end{aligned}$$

y su argumento $\phi_{I_1} = \arctg(1/RC\omega) + \phi_g$. La diferencia de fase respecto la tensión del generador es $\phi_{I_1} - \phi_g = \arctg(1/RC\omega) = \arctg[1/(28 \times 22 \times 10^{-6} \times 314)] = 79^\circ$.

2) Sólo se disipa potencia en la rama 2. En las otras hay un condensador ideal y una bobina ideal, en ambos la potencia disipada en un periodo es cero. La potencia cedida por el generador es igual a la potencia disipada en la resistencia:

$$P = R|\bar{I}_2|^2 = R(C\omega V_g)^2 = 28 \times 1,52^2 = 64,7 \text{ W}.$$

8.18 El circuito de la Figura 8.45(a) se emplea para que pase una corriente alterna por la resistencia R . 1) Calcular la intensidad (eficaz) en la resistencia. 2) Aplicación a los casos límite en que $\omega \rightarrow \infty$ y $\omega \rightarrow 0$ y sacar consecuencias.

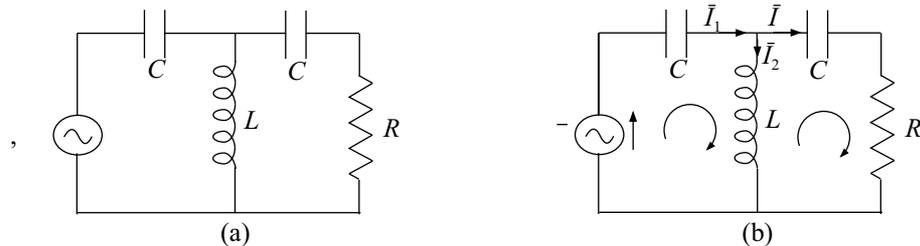


Figura 8.45. (a) Esquema del Problema 8.18. (b) Diagrama mostrando el sentido relativo para las intensidades y el de circulación en cada malla.

Resolución

1) Es un circuito formado por dos nudos, tres ramas, y dos mallas independientes. De acuerdo con los sentidos de circulación marcados en la Figura 8.45(b), al aplicar las leyes de Kirchhoff se obtiene:

$$\left. \begin{aligned}\bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I} &= 0 \\ -\bar{\mathcal{E}} + \left(\frac{-i}{C\omega} \right) \bar{I}_1 + (iL\omega) \bar{I}_2 &= 0 \\ -(iL\omega) \bar{I}_2 + \left(\frac{-i}{C\omega} \right) \bar{I} + R\bar{I} &= 0\end{aligned} \right\}$$

- Sustituyendo el valor \bar{I}_1 de la primera ecuación en la segunda: $\bar{\mathcal{E}} = [iL\omega - i/(C\omega)] \bar{I}_2 + [-i/(C\omega)] \bar{I}$.
- De la tercera ecuación se obtiene: $\bar{I}_2 = [((-i/C\omega) + R)/(iL\omega)] \bar{I}$.

- Sustituyendo el valor de \bar{I}_2 anterior en la ecuación previa se obtiene \bar{I} en la resistencia

$$\bar{\mathcal{E}} = \left[\left(R - \frac{R}{LC\omega^2} \right) + i \left(-\frac{2}{C\omega} + \frac{1}{LC^2\omega^3} \right) \right] \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\left(R - \frac{R}{LC\omega^2} \right) + i \left(-\frac{2}{C\omega} + \frac{1}{LC^2\omega^3} \right)},$$

cuyo módulo coincide con el valor eficaz, pues se supone que el dato de \mathcal{E} es valor eficaz. Por tanto, la intensidad eficaz en la resistencia viene determinada por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\left(R - \frac{R}{LC\omega^2} \right)^2 + \left(-\frac{2}{C\omega} + \frac{1}{LC^2\omega^3} \right)^2}} = \frac{\mathcal{E}LC^2\omega^3}{\sqrt{R^2L^2C^4\omega^6 - 2R^2LC^3\omega^4 + 4L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2 - 4LC\omega^2 + 1}}.$$

2)

- Si $\omega \rightarrow \infty$, dividiendo numerador y denominador por ω^3 se llega a

$$I = \frac{\mathcal{E}LC^2}{\sqrt{R^2L^2C^4 - 2R^2LC^3/\omega^2 + \dots}} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

- Si $\omega \rightarrow 0$ $I = 0$.

La intensidad en la resistencia varía con la frecuencia de excitación del generador. Debido a la presencia de los condensadores, cuya impedancia disminuye con la frecuencia, para frecuencias altas la d.d.p. entre terminales de la resistencia tiende a la del generador. Para corriente continua, $\omega = 0$, la impedancia del condensador sería teóricamente infinita, la de la bobina cero y por la resistencia no circularía corriente. Si la f.e.m. del generador no fuera armónica, aplicando la teoría de Fourier a dicha f.e.m. se podría descomponer en una suma de armónicos. Las componentes de baja frecuencia no llegarían a la resistencia y los de alta sí. Por esta razón, un circuito de este tipo se denomina filtro de paso alto porque sólo las componentes de alta frecuencia llegan a la resistencia, ya que las corrientes de baja frecuencia atraviesan difícilmente los condensadores y pasan fácilmente por la bobina.

8.19 Se dispone de una red de impedancias desde CD hacia la derecha como se indica en la Figura 8.46 y en número infinito. Los valores de las impedancias en la figura son $\bar{Z}_s = i$ y $\bar{Z}_p = -i$. Al añadir dos nuevas impedancias a la izquierda de CD , se obtiene, por haber infinitas impedancias, la misma impedancia desde AB que en el caso anterior desde CD . Se pide calcular el valor de la impedancia y el de la potencia consumida al aplicar la tensión (eficaz) de 1 V entre AB .

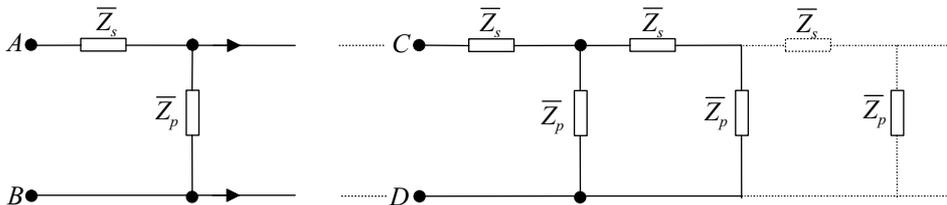


Figura 8.46. Red infinita de impedancias.

Resolución

La impedancia equivalente \bar{Z}_{AB} desde AB es la misma que desde CD , \bar{Z}_{CD} , ya que como hay infinitas impedancias si se añaden dos más con la misma disposición el resultado no variará significativamente.

La impedancia equivalente entre AB se calcula teniendo en cuenta que la impedancia $\bar{Z}_p = -i$ está en paralelo con \bar{Z}_{CD} , estando este conjunto en serie con $\bar{Z}_s = i$, es decir,

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_s + \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_p} + \frac{1}{\bar{Z}_{CD}}} \Rightarrow \bar{Z}_{AB} = i + \frac{1}{\frac{1}{-i} + \frac{1}{\bar{Z}_{CD}}}$$

Se verifica que

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{CD} \Rightarrow \bar{Z}_{CD} = i + \frac{1}{\frac{1}{-i} + \frac{1}{\bar{Z}_{CD}}} = \frac{1}{\bar{Z}_{CD} - i}$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$(\bar{Z}_{CD})^2 - \bar{Z}_{CD} i - 1 = 0 \Rightarrow \bar{Z}_{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

cuyo módulo es $|\bar{Z}_{CD}| = Z_{CD} = 1 \Omega$ y argumento $\delta = \arctg = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = 30^\circ$.

Si la tensión (eficaz) vale $V_e = 1 \text{ V}$, la intensidad vale $I_e = V_e/Z_{CD} = 1 \text{ A}$, la potencia vendrá dada por

$$P = V_e I_e \cos \delta = 1 \times 1 \times \cos 30^\circ = 0,87 \text{ W},$$

y como no hay resistencias disipadoras, la potencia se debe propagar por la línea.

8.20

La Figura 8.47(a) muestra dos altavoces A y B que se consideran como resistencias puras de valor R cada uno. Son conocidas V_e (eficaz), C y R pero no L . Calcular la potencia eléctrica disipada en cada altavoz, en función de la frecuencia ω , sabiendo que, a una frecuencia crítica conocida ω_c , los dos dan la misma potencia. Dibujar las gráficas de potencias. Aplicarlo para el caso: $R = 8 \Omega$, $V_e = 12 \text{ V}$, $C = 0,05 \mu\text{F}$ y $\omega_c = 3162 \text{ rad s}^{-1}$ ($f_c = 503,5 \text{ Hz}$).

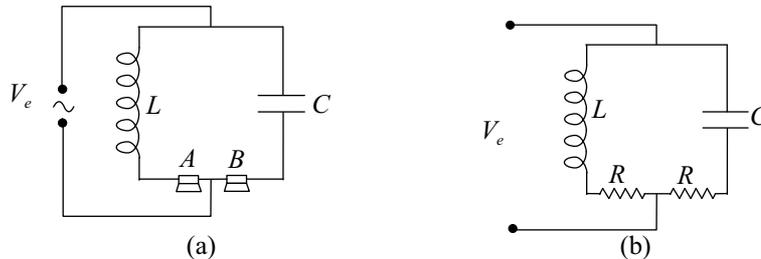


Figura 8.47. (a) Esquema del Problema 8.20 incluyendo los altavoces A y B . (b) Igual que el esquema (a) sustituyendo los altavoces por la resistencia equivalente.

Resolución

Se ha dibujado el esquema equivalente del conjunto, Figura 8.47(b), donde los altavoces se han sustituido por su resistencia. La impedancia equivalente de la rama donde está el altavoz A es $\bar{Z}_A = R + iL\omega$ y la correspondiente a B , $\bar{Z}_B = R - i/(C\omega)$. Como la intensidad eficaz es $I_e = V_e/|\bar{Z}|$, la potencia puede expresarse como $P = V_e I_e \cos \delta = (V_e^2/|\bar{Z}|) \cos \delta$.

Determinación de las potencias:

- En la rama A : $|\bar{Z}_A| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$, $\cos \delta_A = R/\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$, y la potencia viene dada por

$$P_A = \frac{V_e^2}{|\bar{Z}_A|} \frac{R}{|\bar{Z}_A|} = \frac{V_e^2 R}{R^2 + L^2 \omega^2},$$

que es igual a la potencia disipada en la resistencia.

- En la B: $|\bar{Z}_B| = \sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}$ y $\cos \delta_B = R/\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}$. Con estos valores la potencia será

$$P_B = \frac{V_e^2}{|\bar{Z}_B|} \frac{R}{|\bar{Z}_B|} = \frac{V_e^2 R}{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

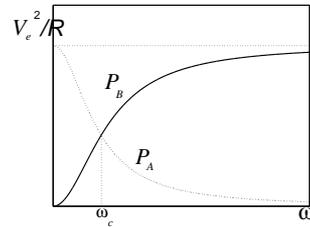
El valor de la frecuencia crítica ω_c se obtiene igualando ambas potencias:

$$\frac{V_e^2 R}{R^2 + L^2 \omega_c^2} = \frac{V_e^2 R}{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega_c^2}} \Rightarrow L^2 \omega_c^2 = \frac{1}{C^2 \omega_c^2} \Rightarrow L = \frac{1}{C \omega_c^2} = \frac{1}{(0,05 \times 10^{-6}) \times 3162^2} = 2 \text{ H.}$$

Sustituyendo el valor de L se tiene para las potencias:

- $P_A = \frac{V_e^2 R}{R^2 + \frac{\omega^2}{C^2 \omega_c^4}} = \frac{12^2 \times 8}{8^2 + 4\omega^2} = \frac{1152}{64 + 4\omega^2} \text{ W.}$

- $P_B = \frac{V_e^2 R}{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} = \frac{12^2 \times 8}{8^2 + \frac{1}{(0,05 \times 10^{-6})^2 \omega^2}} = \frac{1152}{64 + \frac{4 \times 10^{14}}{\omega^2}} \text{ W.}$



La representación gráfica de P_A y P_B en función de ω se muestra en la Figura 8.48. El altavoz A, con la autoinducción en serie, proporciona máxima potencia para las frecuencias bajas, que corresponden a los sonidos graves. Mientras el B, con el condensador en serie, proporciona máxima potencia para las altas y será al altavoz de agudos.

Figura 8.48. Representación de la potencia en los altavoces en función de la frecuencia.

8.21 La Figura 8.49(a) muestra un circuito con dos bobinas acopladas. Las características del circuito son: $\mathcal{E} = 20 \text{ sen}(2 \times \pi \times 50 t) \text{ V}$, $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$, $L_1 = 0,016 \text{ H}$, $L_2 = 0,031 \text{ H}$, y $M = 0,020 \text{ H}$. Determinar los valores de la intensidad (eficaz) en cada malla.

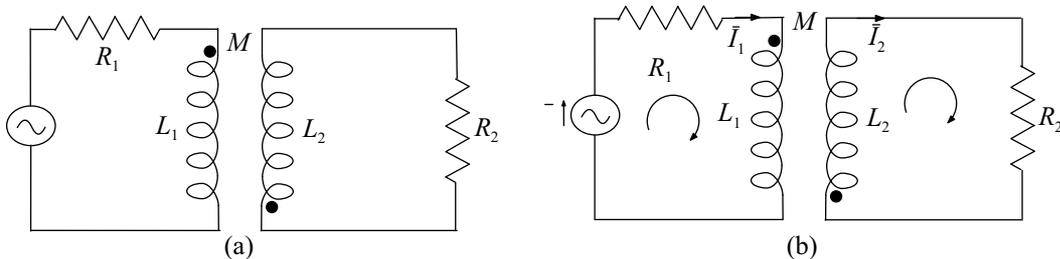


Figura 8.49. (a) Bobinas acopladas de Problema 8.21. (b) Sentidos de circulación seguidos y sentidos para el cálculo de las intensidades.

Resolución

Es un circuito formado por dos mallas independientes. Los sentidos para las corrientes y los de circulación son los indicados en el esquema de la Figura 8.49(b). Al aplicar la 2ª ley de Kirchhoff el signo del término de la M es el mismo que el de la L ya que en ambos casos las corrientes entran por el punto. Las ecuaciones obtenidas son:

$$\left. \begin{aligned} -\bar{\mathcal{E}} + R_1 \bar{I}_1 + (iL_1 \omega) \bar{I}_1 + (iM\omega) \bar{I}_2 &= 0 \\ (iL_2 \omega) \bar{I}_2 + (iM\omega) \bar{I}_1 + R_2 \bar{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{R_2 + iL_2 \omega}{(R_1 + iL_1 \omega)(R_2 + iL_2 \omega) + M^2 \omega^2} \bar{\mathcal{E}} \\ \bar{I}_2 &= \frac{-iM\omega}{(R_1 + iL_1 \omega)(R_2 + iL_2 \omega) + M^2 \omega^2} \bar{\mathcal{E}} \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo los valores numéricos y teniendo en cuenta que $\omega = 2 \times \pi \times 50 = 314,16 \text{ rad s}^{-1}$ y $\mathcal{E}_0 = 20 \text{ V}$, los valores de los módulos vienen dados por:

$$|\bar{I}_1| = \frac{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}}{\sqrt{(R_1R_2 - L_1L_2\omega^2 + M^2\omega^2)^2 + (L_1\omega R_2 + L_2\omega R_1)^2}} \mathcal{E}_0 = 3,06 \text{ A.}$$

$$|\bar{I}_2| = \frac{M\omega}{\sqrt{(R_1R_2 - L_1L_2\omega^2 + M^2\omega^2)^2 + (L_1\omega R_2 + L_2\omega R_1)^2}} \mathcal{E}_0 = 1,52 \text{ A.}$$

Luego las intensidades (eficaces) son $I_1 = 2,16 \text{ A}$ e $I_2 = 1,07 \text{ A}$.

8.22 Un cierto generador de corriente alterna es equivalente a un generador ideal en serie con una bobina de autoinducción L_i y un condensador de capacidad C_i . Cuando se conecta el generador a una capacidad C_e y a una autoinducción en serie L_e se observa el máximo de intensidad con una $\omega = \omega_1$ [Figura 8.50(a)]. Cuando se conecta a los elementos de capacidad $2C_e$ y autoinducción L_e se observa el máximo con $\omega = \omega_2$ [Figura 8.50(b)]. Calcular C_i y L_i .

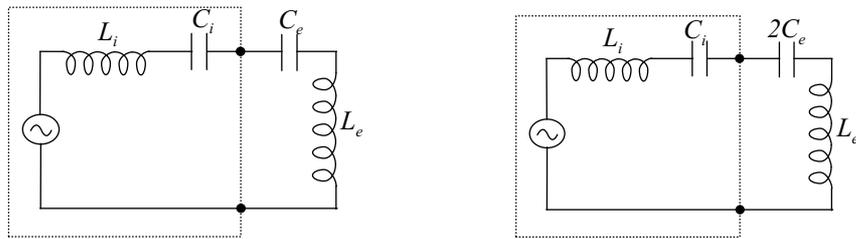


Figura 8.50. (a) Esquema de la primera conexión. (b) Esquema de la segunda conexión.

Resolución

Se pretende determinar los valores internos del generador, L_i y C_i , conectando cargas externas conocidas al conjunto y variando la frecuencia excitadora. Cuando la intensidad sea máxima la ω excitadora corresponderá a la frecuencia de resonancia, que para el esquema adjunto es $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Para la primera disposición, Figura 8.50(a), donde se ha conectado C_e y L_e , la impedancia equivalente del circuito serie de la figura es

$$\bar{Z} = iL_i\omega - \frac{i}{C_i\omega} + iL_e\omega - \frac{i}{C_e\omega} = i(L_i + L_e)\omega - \frac{i}{\omega} \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_e} \right).$$

La autoinducción equivalente L_1 y la capacidad C_1 vienen dadas por

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_i + L_e \\ \frac{1}{C_1} &= \frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} L_1 &= L_i + L_e \\ C_1 &= \frac{C_i C_e}{C_i + C_e} \end{aligned}$$

Para la intensidad máxima, $\omega_1^2 = 1/(L_1 C_1)$, que corresponde a la resonancia. En este caso

$$\omega_1^2 = \frac{1}{(L_i + L_e) \frac{C_i C_e}{C_i + C_e}}.$$

Si los componentes externos son L_e , igual al valor anterior, y la capacidad $2C_e$, según muestra la Figura 8.50(b), siguiendo el mismo procedimiento se obtiene una autoinducción equivalente igual

a la anterior $L_2 = L_1$ y una capacidad equivalente $C_2 = (C_i 2C_e)/(C_i + 2C_e)$. La frecuencia de resonancia en esta situación será

$$\omega_2^2 = \frac{1}{(L_i + L_e) \frac{C_i 2C_e}{C_i + 2C_e}}$$

El cociente de las frecuencias de resonancia correspondientes a ambas situaciones viene dado por

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = 2 \frac{C_i + C_e}{C_i + 2C_e}$$

De la ecuación anterior se deduce que la capacidad interna del generador vale

$$C_i = 2C_e \frac{(1 - \omega_1^2/\omega_2^2)}{(\omega_1^2/\omega_2^2 - 2)}$$

Sustituyendo el valor anterior en la expresión de ω_1^2 y despejando el valor interno de la autoinducción L_i , se obtiene

$$L_i = -L_e - \frac{1}{2C_e(\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

8.23 En una toma de corriente hay tres fases y el neutro. El alternador trifásico que lo alimenta es equivalente a tres alternadores de f.e.m. de amplitud $\mathcal{E}_0=110$ V e impedancia interna $\bar{Z}_i=10 \Omega$, estando el segundo retrasado en su fase 120° respecto del primero, mientras que el tercero lo está 240° . El conjunto corresponde al esquema de la Figura 8.51(a). Se conecta entre los bornes R y S una resistencia de 50Ω y otra igual entre R y T , calcular la tensión (eficaz) entre N y S .

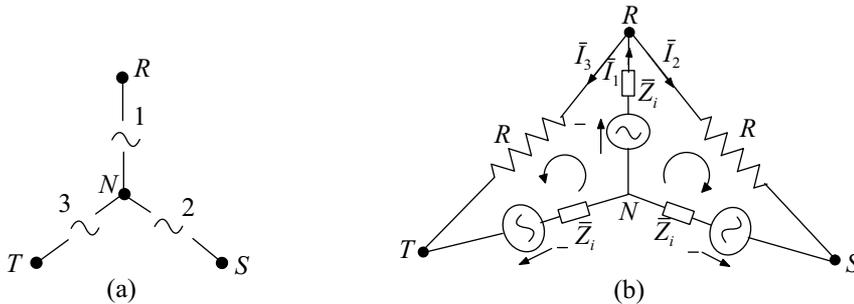


Figura 8.51. (a) Esquema inicial del Problema 8.23. (b) Esquema una vez conectadas las resistencias.

Resolución

El sentido para las corrientes es el indicado en la Figura 8.51(b), donde también se indican los sentidos de circulación utilizados en las dos mallas al aplicar la segunda ley de Kirchhoff.

Las f.e.m. complejas asociadas a los generadores son:

$$\bar{\mathcal{E}}_1 = 110 e^{i0} = 110 \text{ V} \quad ; \quad \bar{\mathcal{E}}_2 = 110 e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ V} \quad ; \quad \bar{\mathcal{E}}_3 = 110 e^{-i\frac{4\pi}{3}} \text{ V}$$

La aplicación de la primera y segunda ley de Kirchhoff conduce a las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 - \bar{I}_2 - \bar{I}_3 &= 0 \\ -\bar{\mathcal{E}}_1 + \bar{\mathcal{E}}_2 + \bar{Z}_i \bar{I}_1 + \bar{Z}_i \bar{I}_2 + R \bar{I}_2 &= 0 \\ -\bar{\mathcal{E}}_1 + \bar{\mathcal{E}}_3 + \bar{Z}_i \bar{I}_1 + \bar{Z}_i \bar{I}_3 + R \bar{I}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \\ \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 &= 10 \bar{I}_1 + 10 \bar{I}_2 + 50 \bar{I}_2 \\ \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_3 &= 10 \bar{I}_1 + 10 \bar{I}_3 + 50 \bar{I}_3 \end{aligned} \right\}$$

Para calcular la tensión eficaz entre N y S es necesario conocer \bar{I}_2 . Sustituyendo $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$ en la segunda y tercera ecuación y reordenando los términos se llega a:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_2 &= 70\bar{I}_2 + 10\bar{I}_3 \\ \bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_3 &= 10\bar{I}_2 + 70\bar{I}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{I}_2 = \frac{6\bar{\mathcal{E}}_1 - 7\bar{\mathcal{E}}_2 + \bar{\mathcal{E}}_3}{480}.$$

La d.d.p. compleja entre S y N será:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{SN} &= \bar{\mathcal{E}}_2 + \bar{Z}_i \bar{I}_2 = \bar{\mathcal{E}}_2 + 10 \left(\frac{6\bar{\mathcal{E}}_1 - 7\bar{\mathcal{E}}_2 + \bar{\mathcal{E}}_3}{480} \right) \\ &= 110 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{6 \times 110 - 7 \times 110 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 110 e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{48} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{SN} &= 110 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + 2,29 \left[6 - 7 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{4\pi}{3}} \right] = 2,29 \left[6 + 41 e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{4\pi}{3}} \right] \\ &= 2,29 \left[6 + 41 \cos(-2\pi/3) + i 41 \sin(-2\pi/3) + \cos(-4\pi/3) + i \sin(-4\pi/3) \right] \\ &= 2,29(-15 - i 34,64). \end{aligned}$$

El valor eficaz será igual a

$$\frac{|\bar{V}_{SN}|}{\sqrt{2}} = \frac{2,29\sqrt{15^2 + 34,64^2}}{\sqrt{2}} = 61,12 \text{ V}.$$

- 8.24** El circuito de la Figura 8.52 tiene dos condensadores, cada uno de capacidad $C' = 8 \times 10^{-4}$ F. La bobina se construyó a partir de dos bobinas rectas, largas, cada una de $L' = 10^{-2}$ H, poniéndolas una a continuación de la otra pero independientes. La resistencia se formó a partir de dos resistencias empalmadas, una a continuación de la otra, siendo cada una de valor $R' = 5 \Omega$. Calcular la potencia disipada.

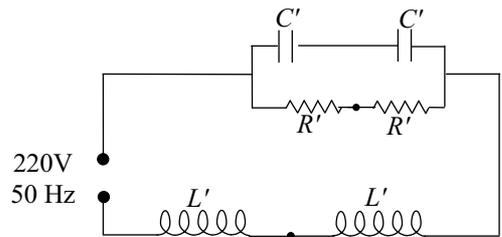


Figura 8.52. Esquema del conjunto descrito en el Problema 8.24

Resolución

La ω del generador es $\omega = 2\pi \times 50 = 314,16 \text{ rad s}^{-1}$.

- Los dos condensadores en serie son equivalentes a uno con capacidad C tal que

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = \frac{2}{C'} \Rightarrow C = \frac{C'}{2} = 4 \times 10^{-4} \text{ F},$$

cuya impedancia es

$$\bar{Z}_C = -\frac{i}{C\omega} = -\frac{i}{4 \times 10^{-4} \times 314,16} = -i 7,96 \Omega.$$

- Las dos resistencias en serie son equivalentes a $R = R' + R' = 2R'$, es decir $\bar{Z}_R = 10 \Omega$.
- Las dos autoinducciones en serie a $L = 2L'$, cuya impedancia es $\bar{Z}_L = i 2L'\omega = i 2 \times 10^{-2} \times 314,16 = i 6,28 \Omega$.

- El conjunto de los condensadores y las resistencias tiene una impedancia equivalente \bar{Z}_P :

$$\frac{1}{\bar{Z}_P} = \frac{1}{\bar{Z}_C} + \frac{1}{\bar{Z}_R} = \frac{1}{(-i/C\omega)} + \frac{1}{R} \Rightarrow \bar{Z}_P = \frac{(-i/C\omega)R}{R - (i/C\omega)} = \frac{(1/C\omega)^2 R - (i/C\omega)R^2}{R^2 + (1/C\omega)^2}$$

$$\bar{Z}_P = \frac{7,96^2 \times 10 - i 7,96 \times 10^2}{10^2 + 7,96^2} = 3,88 - i 4,87 \Omega.$$

- La impedancia \bar{Z}_P está en serie con la de la autoinducción \bar{Z}_L , la impedancia total \bar{Z}_T será

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_L + \bar{Z}_P = iL\omega + \bar{Z}_P = 3,88 + i(6,28 - 4,87) = 3,88 + i1,41 \Omega,$$

cuyo módulo y argumento son respectivamente

$$|\bar{Z}_T| = \sqrt{3,88^2 + 1,41^2} = 4,13 \Omega \quad \delta = \arctg \frac{1,41}{3,88} = 20^\circ \Rightarrow \cos \delta = 0,94.$$

- Finalmente, la potencia disipada en el conjunto se determina con la siguiente expresión

$$P = V_e I_e \cos \delta = \frac{V_e^2}{|\bar{Z}_T|} \cos \delta = \frac{220^2}{4,13} 0,94 = 11 \times 10^3 \text{ W}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 8.25** La Figura 8.53 corresponde a un circuito donde \mathcal{E} es la f.e.m. del generador, L el coeficiente de autoinducción de la bobina, R el valor de la resistencia y C la capacidad de condensador, que inicialmente está descargado. Una vez cerrados los interruptores: 1) Determinar en todo instante: a) La d.d.p. entre los terminales de la bobina. b) La d.d.p. entre terminales del condensador. 2) Determinar, en el caso b, el instante en el que la d.d.p. es la mitad de la obtenida cuando el tiempo transcurrido es grande.

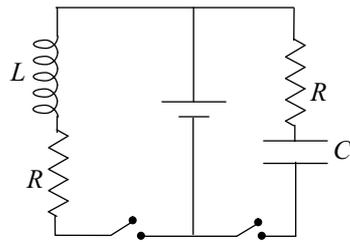


Figura 8.53. Esquema del circuito.

Solución: 1.a) $V_L = \mathcal{E}e^{-tR/L}$, 1.b) $V_C = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$ 2) $0,7RC$.

- 8.26** En el circuito de la Figura 8.54 se produce la conexión del interruptor con el terminal A en $t=0$. Posteriormente para $t=2$ ms se conmuta a la posición B . Determinar el tiempo que tarda (a partir de la segunda conexión) en anularse la d.d.p. en la resistencia.

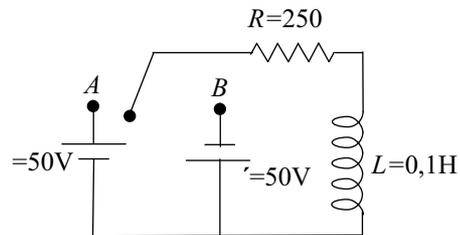


Figura 8.54. Diagrama del circuito.

Solución: 0,277 ms.

8.27 El circuito de corriente alterna de la Figura 8.55 consta de un condensador de capacidad $20 \mu\text{F}$, una autoinducción de 1 H y una resistencia de 154Ω . Calcular la potencia que disipa al ser conectado a una base de alumbrado de 130 V y 50 Hz .

Solución: 55 W .

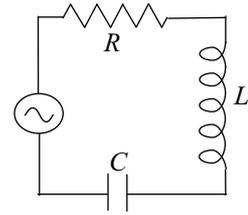


Figura 8.55. Circuito RLC conectado a una f.e.m. alterna.

8.28 Aplicar las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura, escribiendo el sistema de ecuaciones para los valores instantáneos de la corriente.

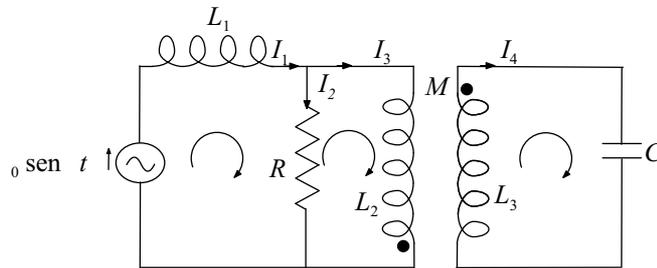


Figura 8.56. Esquema del circuito del Problema 8.28.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ -\mathcal{E}_0 \text{sen}(\omega t) + L_1 \frac{dI_1}{dt} + RI_2 &= 0 \\ L_2 \frac{dI_3}{dt} + M \frac{dI_4}{dt} - RI_2 &= 0 \\ L_3 \frac{dI_4}{dt} + M \frac{dI_3}{dt} + \int \frac{I_4 dt}{C} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

8.29 En el circuito de la figura, las características del primer alternador son $\mathcal{E}_{10} = 50 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ y $\vec{Z}_1 = 10 e^{i\frac{\pi}{2}}$; y las del segundo $\mathcal{E}_{20} = 80 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$ y $\vec{Z}_2 = 40 e^{i\frac{\pi}{2}}$; estando retrasada la fase de su f.e.m. respecto al primero en $\pi/2$. Además $R = 20 \Omega$, y $C = 10^{-2} \text{ F}$. Calcular la intensidad por el condensador.

Solución: Módulo: $1,01 \text{ A}$ y argumento: -89° .

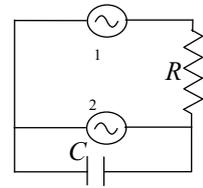


Figura 8.57. Red del Problema 8.29.

8.30 Hallar R y X en función de a y b , sabiendo que la intensidad en el circuito y la tensión V_{AB} están en fase, y que el módulo de la impedancia equivalente al acoplamiento dado es $2a$.

Solución: $R = (a^2 + b^2)/a$, $X = -(a^2 + b^2)/b$.

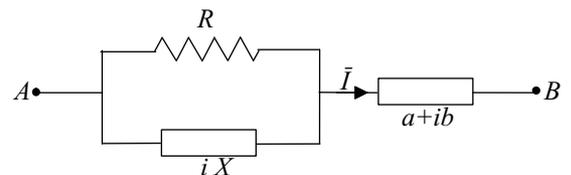


Figura 8.58. Impedancias del Problema 8.30.

8.31 En el circuito de la figura, las impedancias en Ω son las indicadas y la intensidad en Amperios es $\bar{I} = 18(1 + i)$. Hallar: 1) La diferencia de potencial \bar{V}_{AB} . 2) La potencia activa suministrada a la conexión.

Solución: 1) $-18i$ V, 2) 1944 W.

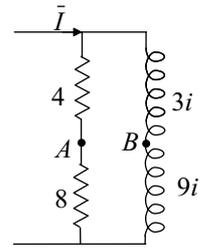


Figura 8.59. Esquema del Problema 8.31

8.32 El circuito de la Figura 8.60 es un esquema simplificado de la última parte de un equipo de música. El altavoz de graves es una resistencia R_g y el de agudos R_a . Calcular C para que las potencias suministradas por ambos altavoces sean iguales para la frecuencia de 1500 Hz.

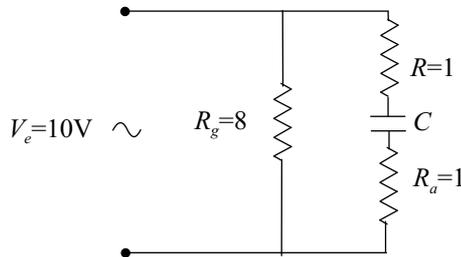


Figura 8.60. Circuito asociado al equipo.

Solución: $C = 5,3 \times 10^{-5}$ F.

8.33 Las características del circuito de la Figura 8.61 son: $R_1=3 \Omega$, $R_2=2 \Omega$, $R_3=5 \Omega$, $L_3 = 30$ mH, $L_4=15$ mH. Si la intensidad detectada en el amperímetro A es nula, determinar el coeficiente de inducción mutua entre las bobinas 3 y 5, que son las únicas acopladas.

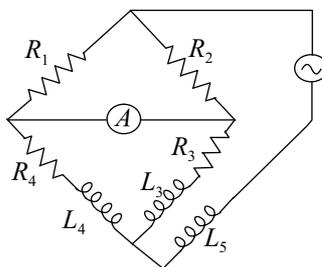


Figura 8.61. Esquema del circuito del Problema 8.33.

Solución: 0,012 H.

MOVIMIENTO DE CARGAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

9

9.1. FUERZA DE LORENTZ

La primera ecuación básica del Electromagnetismo, que da la fuerza total sobre una carga q , llamada fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (9.1)$$

es una consecuencia de las definiciones de campo eléctrico, $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$, y de campo magnético, $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, y del principio de superposición. Debe recalcarse el hecho de que \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos en el punto donde está la carga q , debidos a todo menos a la propia carga q sobre la que se ejerce la fuerza electromagnética.

9.2. CARGA EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En una región del espacio hay un campo eléctrico \mathbf{E} , pero el campo magnético es nulo. Una carga q es lanzada desde un cierto punto O con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 . Para obtener la trayectoria que va a recorrer la carga, se calcula la fuerza y a continuación la aceleración:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{F}/m = q\mathbf{E}/m. \quad (9.2)$$

El resto del cálculo es un problema de mecánica. Como en general durante el recorrido la velocidad de la carga no es perpendicular a \mathbf{E} , habrá una componente tangencial de la aceleración y la consiguiente variación del módulo de la velocidad y de la energía cinética. Un caso particular simple e importante es aquél en el cual el campo \mathbf{E} es homogéneo. Entonces la aceleración es de dirección constante, luego su componente perpendicular a \mathbf{E} es nula y por tanto la componente de la velocidad perpendicular a \mathbf{E} es constante.

9.3. CARGA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Sea una carga inmersa en un campo magnético \mathbf{B} homogéneo. En un cierto instante la velocidad es \mathbf{v} . La fuerza sobre la carga es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (9.3)$$

luego es perpendicular a \mathbf{v} y por tanto a la trayectoria. Esta fuerza origina una aceleración tangencial nula, luego el módulo de la velocidad es constante. Si situamos unos ejes coordenados con origen en el punto donde se encuentra la carga en el instante inicial, el eje OZ en la dirección de \mathbf{B} , la ecuación fundamental de la dinámica da

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= qv_y B = q \frac{dy}{dt} B, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -qv_x B = -q \frac{dx}{dt} B, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Una primera integración da

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{qB}{m} y + v_{0x}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{qB}{m} x + v_{0y}, \\ \frac{dz}{dt} &= v_{0z}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Elevando al cuadrado las dos primeras ecuaciones, sumando los resultados y recordando que el módulo de la velocidad es constante, resulta

$$x^2 + y^2 + \frac{2m}{qB} v_{0x} y - \frac{2m}{qB} v_{0y} x = 0. \quad (9.6)$$

Este resultado demuestra que la proyección de la trayectoria sobre el plano OXY es una circunferencia de radio

$$r = \frac{m}{qB} (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2}, \quad (9.7)$$

que pasa por el origen y recorrida girando alrededor de un eje paralelo al OZ en sentido negativo. El movimiento a lo largo del eje OZ lo realiza con la velocidad constante v_{0z} , luego $z = v_{0z}t$. La trayectoria es pues una hélice.

Si el campo no es homogéneo, la trayectoria es más complicada. Así, por ejemplo, sea un campo magnético \mathbf{B} con las líneas de campo como en la Figura 9.1, con simetría axial y cuyo módulo es mayor en la zona de la derecha. Si una carga positiva se mueve en su interior con una velocidad cuya componente en la dirección perpendicular al plano de la figura es \mathbf{v}_1 , la componente \mathbf{B}_1 produce una fuerza \mathbf{F}_1 axial que repele a la partícula de la zona de campo magnético intenso. Por tanto, la partícula que estaba girando alrededor del eje de simetría debido a \mathbf{B}_2 , si se estaba acercando al campo fuerte puede ser “reflejada” hacia atrás, por lo que a esta configuración de campo magnético se le llama espejo magnético.

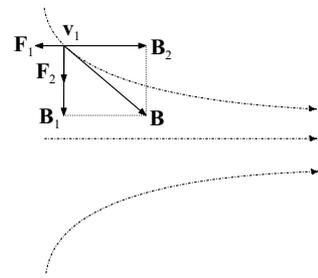


Figura 9.1. Una carga que se aproxima al campo magnético fuerte puede ser reflejada.

La fuerza del campo magnético sobre una carga en movimiento da lugar a importantes fenómenos macroscópicos. Por ejemplo (Figura 9.2), sea un hilo conductor, formado por una red de iones positivos y electrones con libertad de movimiento por la red, obligado a moverse en un campo \mathbf{B} de modo que un elemento del hilo $d\mathbf{l}$ lo hace con una velocidad \mathbf{v} . Aunque la carga neta del elemento sea nula, tendrá una carga positiva dq debida a los iones, que es forzada a moverse con \mathbf{v} , y otra $-dq$ debida a los electrones que en principio también se mueve con \mathbf{v} , pero al estar sometida a la fuerza activa

$$d\mathbf{F} = -dq\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.8)$$

y a la fuerza de ligadura $d\mathbf{F}_L$ originada por la atracción de los iones de la red que le impide salirse del hilo, adquirirá una aceleración a lo largo del hilo, y si éste forma un circuito cerrado se establecerá una corriente eléctrica. Este fenómeno ya ha sido estudiado en el Capítulo 5.

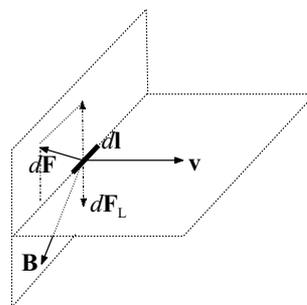


Figura 9.2. La fuerza que aplica un campo magnético sobre un alambre con corriente es debida al movimiento de sus cargas eléctricas.

9.4. CARGA EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Como otra aplicación de la fórmula de la fuerza Lorentz se va a estudiar el movimiento de una carga q en un campo electromagnético. La aceleración a que está sometida la carga es

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (9.9)$$

Para llegar a saber la forma del movimiento el presente estudio se limita a campos constantes en el tiempo (o estacionarios) y homogéneos (o independientes del punto del espacio considerado).

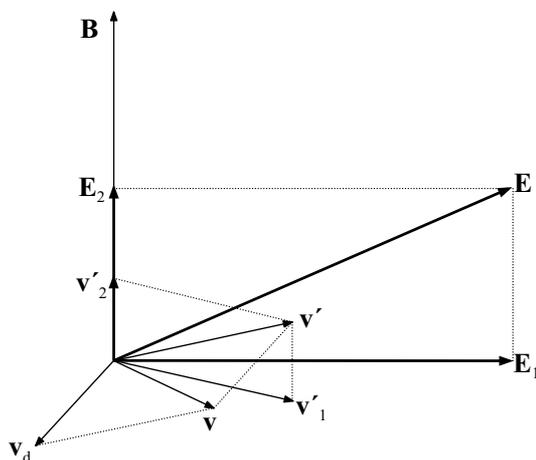


Figura 9.3. Esquema de componentes de la velocidad de una carga moviéndose en un campo electromagnético estático.

Se descompone el vector \mathbf{E} (Figura 9.3) en sus componentes \mathbf{E}_2 en la dirección del campo magnético \mathbf{B} y \mathbf{E}_1 en dirección perpendicular, de modo que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Introduzcamos la llamada velocidad de deriva $\mathbf{v}_d = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}/B^2$ (nótese que este cociente tiene dimensiones de velocidad). La diferencia $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_d$ se descompone en \mathbf{v}'_2 en la dirección de \mathbf{B} y \mathbf{v}'_1 , de modo

que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$. La aceleración de la carga será pues

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{v}'_2 \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}). \quad (9.10)$$

Como el tercer sumando es nulo y la suma del cuarto y quinto también, la aceleración se reduce a

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}_2 + \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{B}). \quad (9.11)$$

Descomponiendo la aceleración según las direcciones paralela, \mathbf{a}_2 , y perpendicular, \mathbf{a}_1 , a \mathbf{B} , respectivamente, resulta

$$\mathbf{a}_2 = \frac{q}{m}\mathbf{E}_2, \quad (9.12)$$

que origina un movimiento uniformemente acelerado en la dirección del campo \mathbf{B} , y

$$\mathbf{a}_1 = \frac{q}{m}\mathbf{v}'_1 \times \mathbf{B} \quad (9.13)$$

que, siendo \mathbf{v}'_1 y \mathbf{B} perpendiculares, producirá una trayectoria circular, normal a \mathbf{B} y de radio $r = mv'_1/(qB)$. Como \mathbf{v}_d sólo depende de \mathbf{E}_1 y de \mathbf{B} , que son de valores fijos, y no depende de la carga ni de su movimiento, resulta que \mathbf{v}_d se mantiene constante. El movimiento de la carga, es pues la superposición de tres movimientos:

1. Un movimiento circular perpendicular a \mathbf{B} .
2. Un movimiento de traslación uniforme con velocidad \mathbf{v}_d , perpendicular a \mathbf{E} y a \mathbf{B} .
3. Un movimiento uniformemente acelerado en la dirección de \mathbf{B} .

La Figura 9.4 representa una trayectoria.

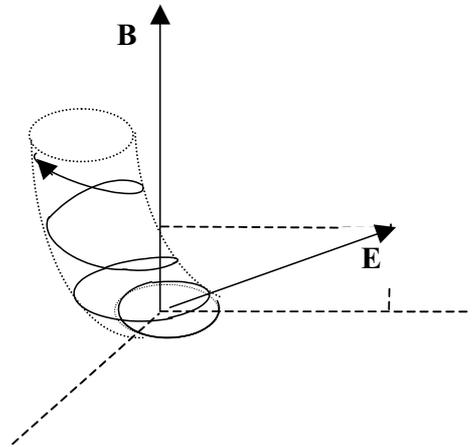


Figura 9.4. Trayectoria de una carga en el seno de un campo electromagnético.

9.5. CICLOTRÓN

Es un dispositivo para acelerar partículas cargadas mediante un campo eléctrico y un campo magnético hasta alcanzar grandes velocidades. Consta de dos cajas metálicas no ferromagnéticas, de pequeña altura, en forma de D , y enfrentadas por sus bocas (Figura 9.5).

Entre las “des” se establece una diferencia de potencial alterna que origina un campo eléctrico alterno en el espacio comprendido entre ellas. Una carga q , por ejemplo positiva, abandonada entre las “des” en reposo, al estar sometida al campo eléctrico es acelerada y entra en una de ellas con una cierta velocidad pequeña. Como en la D donde ha entrado hay un campo magnético perpendicular a su plano y no hay campo eléctrico, la carga describirá una trayectoria semicircular de radio pequeño. Después entra entre las “des” cuando éstas ya tienen la polaridad opuesta y vuelve a ser acelerada. A continuación, entra en la otra D y describe en su interior otra media vuelta de mayor radio. Así sucesivamente hasta que alcanza la periferia. Los Problemas del 9.12 al 9.15 muestran con más detalle el funcionamiento de este acelerador de partículas.

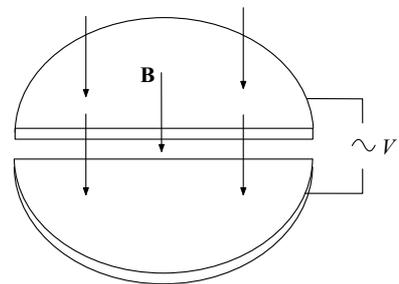


Figura 9.5. Un ciclotrón está formado por dos cajas conductoras enfrentadas a las que se les aplica una d.d.p. alterna y un campo magnético.

9.6. BETATRÓN

El betatrón es un tubo en forma de toro, vacío y sometido a un campo magnético simétrico respecto del eje del toro. El campo magnético es paralelo al eje pero su módulo varía con la distancia a dicho eje. Además el campo magnético aumenta con el tiempo. Se desea que una carga q describa una trayectoria circular de radio R aumentando el módulo de su velocidad, pero sin apartarse de su trayectoria (Figura 9.6). A través del círculo de radio R hay un flujo del campo magnético Φ que dividido por el área del círculo da un valor medio sobre el círculo $B_m = \Phi/(\pi R^2)$. El campo magnético creciente origina un flujo creciente y por tanto un campo eléctrico, que de acuerdo con la ley de Faraday aplicada a la trayectoria es

$$2\pi RE = \frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt}$$

$$\Rightarrow E = \frac{R}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad (9.14)$$

Este campo tangencial origina una aceleración tangencial

$$\frac{dv}{dt} = \frac{qR}{2m} \frac{dB_m}{dt} \quad (9.15)$$

El campo magnético en R , B_R , origina una aceleración centrípeta

$$\frac{v^2}{R} = \frac{qvB_R}{m} \Rightarrow v = \frac{qRB_R}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{qR}{m} \frac{dB_R}{dt} \quad (9.16)$$

Igualando las Ecuaciones (9.15) y la (9.16), resulta

$$\frac{dB_m}{dt} = 2 \frac{dB_R}{dt} \quad (9.17)$$

Por tanto, el campo magnético en el círculo debe crecer el doble de rápido que el campo sobre la trayectoria. Muy frecuentemente las partículas aceleradas son electrones.

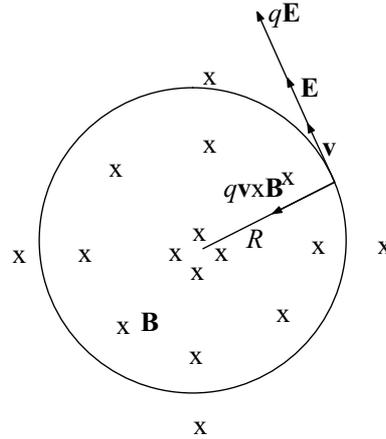


Figura 9.6. En un betatrón las cargas describen una trayectoria circular única pero el campo magnético aumenta con el tiempo.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 Una partícula de masa m y carga q es lanzada con una velocidad \mathbf{v}_0 horizontal en un campo eléctrico vertical de módulo E . Determinar la trayectoria seguida por la carga.

Resolución

La carga q , por estar inmersa en una región con campo eléctrico, está sometida a una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, luego experimentará una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$. A partir de esta aceleración se pretende calcular la velocidad y el desplazamiento. Si se sitúa el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento, el eje OZ vertical y el eje OY en la dirección de \mathbf{v}_0 (Figura 9.7), resulta para las componentes del campo, aceleración y velocidad sobre los ejes OY y OZ respectivamente,

$$E_y = 0 \Rightarrow a_y = 0 \Rightarrow v_y = v_0 \Rightarrow y = v_0 t$$

$$E_z = E \Rightarrow a_z = qE/m \Rightarrow v_z = qEt/m \Rightarrow z = qEt^2/(2m)$$

Despejando t de la penúltima ecuación y sustituyéndola en la última ecuación se obtiene la ecuación de la trayectoria, es decir, la fórmula matemática del camino que se prevé para la partícula cargada,

$$z = \frac{qEy^2}{2mv_0^2}.$$

que es una rama de parábola.

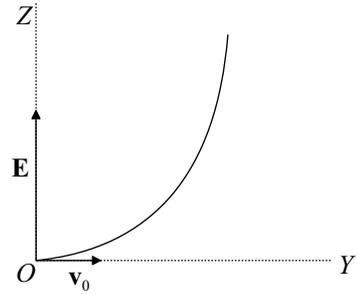


Figura 9.7. Trayectoria parabólica seguida por la carga en un campo magnético.

- 9.2** Dos placas P_1 y P_2 paralelas entre sí y paralelas al plano YOZ enfrentadas y separadas por una distancia de $d = 1$ cm, se conectan a un circuito de tal manera que aparece un campo eléctrico entre ellas dirigido de P_2 a P_1 y de módulo 10^6 V/m. La P_1 se calienta para que emita electrones cuya carga es $-e = -1,602 \times 10^{-19}$ C y su masa $m = 0,9107 \times 10^{-30}$ kg. En la P_2 se hace un orificio pequeño. El conjunto se mete en una ampolla de vacío. Calcular la velocidad de los electrones que pasan por el orificio.

Resolución

La placa metálica P_1 emite electrones al ser calentada de acuerdo con el llamado efecto termoelectrónico. Los electrones son sometidos a una fuerza por el campo eléctrico. La fuerza les imprime una aceleración acercándolos a la placa P_2 . Algunos de ellos atraviesan el orificio practicado en ella y desde allí continuará moviéndose con velocidad constante y por tanto en línea recta al no haber campos electromagnéticos ni partículas con las cuales chocar.

Al tomar el eje OX perpendicular a las placas y desde P_1 hacia P_2 , resulta para el campo eléctrico, fuerza, aceleración y velocidad, sucesivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -10^6 \mathbf{u}_x; & \mathbf{F} &= -e\mathbf{E}' \Rightarrow a_x = eE'/m = \text{constante} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{0x} = a_x t \\ d = a_x t^2 / 2 \end{array} \right\} & \Rightarrow v_{0x} = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2deE'/m} & \Rightarrow v_{0x} = 59 \times 10^6 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Como la velocidad calculada es alta, pero no llega ni a la quinta parte de la velocidad de la luz en el vacío (3×10^8 m/s), la aplicación del segundo principio de la mecánica clásica, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, es suficiente para efectuar los cálculos y no se requieren las fórmulas de la mecánica relativista.

- 9.3** Un chorro de electrones de velocidad $v_0 = 59 \times 10^6$ m/s se hace pasar entre dos armaduras, que producen un campo eléctrico homogéneo $\mathbf{E} = -E\mathbf{u}_y$, donde $E = 10^5$ V/m, que es perpendicular a la dirección inicial del chorro y limitado a $l = 5$ cm en dicha dirección (Figura 9.8). A $l' = 30$ cm de donde acaba el campo se coloca una pantalla fluorescente P con su centro en la dirección inicial del chorro. Calcular la desviación originada por el campo eléctrico.

Resolución

El lector se habrá percatado de que este problema es continuación del anterior en contenido. En efecto, los electrones que habían sido acelerados hasta la velocidad \mathbf{v}_0 no se mueven libremente por el vacío sino que lo hacen en un nuevo campo eléctrico perpendicular a la velocidad \mathbf{v}_0 . Se va a calcular en esta segunda etapa del recorrido la aceleración, la velocidad, desplazamiento y trayectoria.

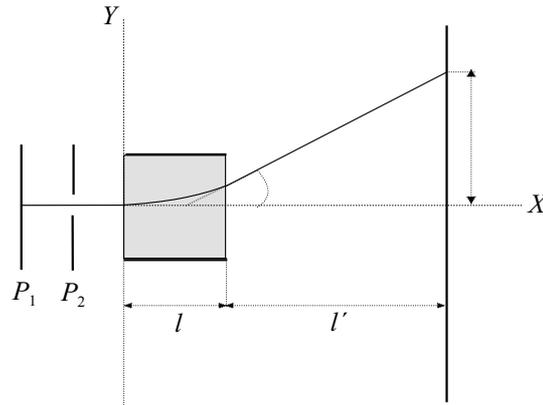


Figura 9.8. Los electrones adquieren velocidad entre P_1 y P_2 , son desviados por un campo eléctrico contenido en el plano del dibujo e inciden en una pantalla fluorescente donde se emite luz.

En la región donde hay campo eléctrico (Figura 9.8)

$$\mathbf{E} = -E\mathbf{u}_y \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} = \frac{eE\mathbf{u}_y}{m} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \Rightarrow x = v_0 t \\ v_y = \frac{eE}{m} t \Rightarrow y = \frac{eE}{2m} t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

que es la ecuación de una parábola. Esta es la ecuación de la trayectoria que describe la carga hasta que sale del campo cuando $x = l$. En ese punto es

$$y_l = \frac{eE}{2mv_0^2} l^2 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{eE}{mv_0^2} l.$$

Fuera del campo es

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{constante} \Rightarrow \text{trayectoria recta.}$$

Luego de la geometría de la figura resulta la desviación

$$\delta = y_l + l' \operatorname{tg} \varphi = \frac{eEl}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + l' \right) = 0,082 \text{ m.}$$

En este punto calculado, los electrones chocan contra la pantalla y la energía cinética que acarrearán se transforma en energía luminosa o, dicho de otro modo, los electrones excitan al material de la pantalla y éste emite fotones. Un espectador verá un punto brillante en la pantalla.

9.4 El dispositivo descrito en el problema anterior se quiere emplear como tubo de rayos catódicos (chorro de electrones) para un osciloscopio (Figura 9.8). Un observador externo al conjunto mira la pantalla situándose en el eje OX , alejado y de modo que el eje OY se dirige hacia su derecha. Se aplica entre las armaduras una tensión en forma de diente de sierra, que origina un campo eléctrico horizontal hacia la derecha del observador de valor $E_y = -E_0(bt - 1/2)$ para $T > t > 0$, de periodo $T = 1$ s, con $E_0 = 10^5$ V/m y $b = 1$ s⁻¹. Estudiar la trayectoria del punto luminoso sobre la pantalla.

Resolución

Este problema es parecido al anterior salvo que ahora el campo eléctrico aplicado tiene una proyección sobre el eje OY que es variable con el tiempo. Nótese que, por ejemplo, para $t = 0$ es E_y positivo y para $t = 1$ s E_y es negativo. Esto origina una aceleración según el eje OY negativa la mitad del periodo T y positiva la otra mitad del periodo.

Como el tiempo de vuelo entre las placas es mucho menor que T , el campo eléctrico detectado por cada electrón puede suponerse invariable en el recorrido, luego aplicando el resultado del Problema 9.3, se obtiene para la desviación

$$\delta = \frac{eEl}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + l' \right) = \frac{eE_0l}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + l' \right) \left(t - \frac{1}{2} \right) = 0,082 \left(t - \frac{1}{2} \right) \text{ m.}$$

La desviación es pues variable con el tiempo, de forma lineal. El punto brillante de la pantalla se moverá por ella dibujando una línea recta. La recta es recorrida por el punto de acuerdo con un movimiento que corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme entre los valores extremos:

Para $t = 0$ s es $\delta_{\min} = -0,041$ m.

Para $t = T = 1$ s es $\delta_{\max} = +0,041$ m,

recorrido con la velocidad $v = d\delta/dt = 0,082$ m/s hacia la derecha del espectador de la pantalla.

- 9.5** Un átomo de hidrógeno se puede considerar desde un punto de vista clásico, como un núcleo inmóvil de carga $q = e = 1,602 \times 10^{-19}$ C y un electrón de carga $-e$ y masa $m = 9,91 \times 10^{-31}$ kg que gira alrededor del núcleo, describiendo una trayectoria circular de radio $r = 5,29 \times 10^{-11}$ m. Calcular la frecuencia de giro del electrón.

Resolución

Este problema es puramente especulativo pues es sabido que la Física de los átomos no es descrita adecuadamente por la Mecánica clásica. Las leyes de los fenómenos atómicos necesitan hacer uso de la Mecánica cuántica. El concepto de trayectoria circular no tiene mucho sentido en esta interpretación de los fenómenos atómicos. No obstante vamos a efectuar un análisis clásico y aplicar el segundo postulado de la dinámica.

La fuerza sobre el electrón es atractiva y perpendicular a la trayectoria, luego la aceleración es centrípeta

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = F = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m2^2\pi^2 f^2 r \Rightarrow$$

$$f = \frac{e}{\sqrt{2^2\pi^2 m r^3 4\pi\epsilon_0}} = \frac{1,602 \times 10^{-19}}{\sqrt{4\pi^2 9,91 \times 10^{-31} \times (5,29 \times 10^{-11})^3 / (9 \times 10^9)}}$$

$$f = 6,3 \times 10^{15} \text{ Hz.}$$

Como se ha advertido, no se espera que este resultado coincida con ningún resultado experimental.

- 9.6** En una región del espacio hay un campo magnético de 0,10 T. Se lanza en su interior un protón, de carga $q = e = 1,60 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, con la velocidad de 1000 m/s y perpendicularmente al campo magnético. Se quiere analizar el movimiento del protón.

Resolución

El problema es un caso particular del estudiado en la Sección 9.3. Al no tener la velocidad inicial componente en la dirección del campo magnético, la trayectoria helicoidal degenera en una circunferencia. La fuerza que aplica el campo magnético, $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, es perpendicular a \mathbf{v} y a \mathbf{B} , luego no tiene componente a lo largo de \mathbf{B} y por tanto la aceleración tampoco la tiene.

Como la velocidad inicial es perpendicular a \mathbf{B} , continuará siéndolo conforme pasa el tiempo. La trayectoria estará contenida en un plano perpendicular a \mathbf{B} .

La trayectoria es una circunferencia recorrida con una velocidad de módulo constante. De la ecuación fundamental de la dinámica, se obtienen el radio y la frecuencia angular:

$$qvB = ma = mv^2/r = mv\omega \Rightarrow \begin{cases} r = mv/(qB) = 1,04 \times 10^{-4} \text{m}, \\ \omega = qB/m = 9,58 \times 10^6 \text{rad/s}. \end{cases}$$

9.7 El deflector horizontal de un tubo de imagen de televisión está formado por un cañón de electrones del que salen con la velocidad de $59 \times 10^6 \text{ m/s}$ (Figura 9.9). Los electrones encuentran en su camino un campo magnético de $B = 1,48 \times 10^{-3} \text{ T}$, dirección perpendicular a la velocidad inicial y limitado en una zona de $l = 50 \text{ mm}$. A $l' = 20 \text{ cm}$ de donde acaba el campo hay una pantalla fluorescente. Calcular la desviación.

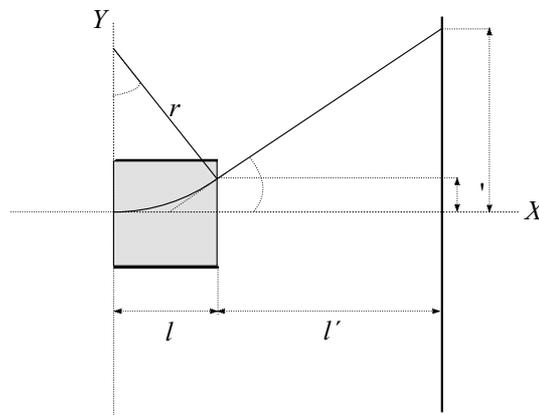


Figura 9.9. Los electrones incidentes por la izquierda son desviados por el campo magnético (perpendicular al plano del dibujo y saliente), como ocurre en los monitores de televisión de tubo de vacío.

Resolución

Este problema es continuación del 9.2 y se parece al 9.3 salvo que aquí los electrones son desviados por un campo magnético. El campo magnético ejerce una fuerza sobre la carga móvil que es perpendicular a la velocidad de la carga, o sea perpendicular a la trayectoria. Los electrones son pues desviados de su trayectoria.

Como la velocidad inicial es perpendicular al campo magnético y dicho campo es uniforme, dentro del campo magnético la trayectoria es circular, de radio

$$r = mv_0/(eB) = 0,234 \text{ m}.$$

En el límite del campo ($x = l$) es $\text{sen } \varphi = l/r = 0,22$, luego la desviación es

$$\delta' = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi).$$

Fuera del campo no se ejerce fuerza, luego la trayectoria es rectilínea y

$$\text{tg } \varphi = \frac{\delta - \delta'}{l'} \Rightarrow \boxed{\delta = \delta' + l' \text{tg } \varphi = r(1 - \cos \varphi) + l' \text{tg } \varphi = 0,051 \text{ m} .}$$

A 51 cm del centro de la pantalla aparecerá una mancha brillante.

- 9.8** En un tubo de vidrio muy largo, de radio r , relleno de deuterio, se produce una gran descarga eléctrica longitudinal permanente. El deuterio se ioniza totalmente y debido al movimiento en sentidos opuestos de los deuterones y de los electrones, circula una intensidad de corriente I . La densidad de carga neta en cada punto es nula. Si hay n átomos de deuterio por unidad de volumen y el deuterón tiene una carga eléctrica igual a la del electrón salvo el signo, calcular la fuerza sobre cada deuterón que se mueve cerca de la pared del tubo. Suponer $\mu_r = 1$ y que todas las cargas tienen el mismo módulo de su velocidad.

Resolución

Al introducir en un recipiente el isótopo del hidrógeno llamado deuterio y aumentar su temperatura hasta millones de grados, sus moléculas se disocian en átomos y luego se ionizan formando núcleos de deuterio, llamados deuterones y constituidos por un protón y un neutrón, y electrones. Tal temperatura se origina mediante una descarga eléctrica y se llama plasma a la fase de la materia resultante. Se espera que los deuterones se fusionen agrupándose uno con otro y desprendiendo grandes cantidades de energía.

En este problema se produce una corriente eléctrica a lo largo de un conductor recto muy largo con lo cual tiene mucha simetría. Además se precisa el cálculo de la fuerza sobre una carga periférica, por lo cual sólo es necesario el campo magnético en dicha región. Por esto no es necesario más que el conocimiento de la intensidad de corriente y no el detalle de la distribución de la densidad de corriente dentro del tubo. Se aplica la ley de Ampère a lo largo de una circunferencia situada sobre la pared interior del tubo y una vez calculado el campo \mathbf{B} , se determina la fuerza.

La ley de Ampère alrededor del tubo de gas y la fuerza resultante vienen dadas por:

$$H2\pi r = I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

siendo la fuerza radial y hacia el eje, y de módulo

$$F = qvB = \frac{qv\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{q\mu_0 I}{2\pi r} \frac{I}{2\pi r^2 nq} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^3 n}},$$

donde se ha tenido presente que, debido a la presencia de cargas positivas y negativas circulando, la densidad de partículas cargadas es $2n$ y la relación entre I y v es $I = jS = (2nqv)(\pi r^2)$, siendo la carga $q = e$.

Esta fuerza sobre la periferia de la descarga empuja al plasma hacia el interior del tubo para evitar que entre en contacto con las paredes que lo enfriarían y contaminarían.

- 9.9** Se utilizan electrones como carga de prueba para determinar un campo \mathbf{B} . Dicho campo puede considerarse homogéneo, estacionario, perpendicular al plano de la figura y confinado a la zona rayada, Figura 9.10. Los electrones abandonan la placa 1 con velocidad despreciable y son acelerados debido a que entre las placas hay una d.d.p. $V = V_2 - V_1$. Determinar el módulo y sentido de \mathbf{B} si el punto de impacto de los electrones sobre la pantalla (plano $x = 0$) es el $(0, a, 0)$. Se suponen conocidas la masa y la carga del electrón.

Resolución

Entre las placas hay una diferencia de potencial, luego existe un campo eléctrico en la región entre ambas. En el tránsito de los electrones desde la placa 1 hasta la placa 2 el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre las cargas por lo que los electrones son acelerados. Esto permitiría el cálculo de la velocidad que adquieren. Sin embargo se va a aplicar una ley distinta, la de conservación de la energía. Cuando una carga se desplaza de un punto en donde el potencial es V_1 a otro donde el potencial es V_2 , la disminución de su energía potencial es $q(V_1 - V_2)$. En este caso la disminución

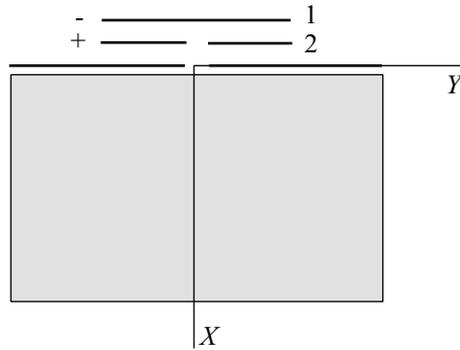


Figura 9.10. Los electrones que entran en la zona sombreada, donde hay un campo magnético perpendicular al plano del dibujo, girarán hacia un lado o hacia otro según el sentido del campo.

es $e(V_2 - V_1)$. Por otra parte el electrón pasa de tener una velocidad nula a \mathbf{v} , luego la energía cinética pasa de cero a $mv^2/2$.

Por el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Al abandonar los electrones las placas con velocidad \mathbf{v} entran en la región del campo magnético que es uniforme y perpendicular a \mathbf{v} . La trayectoria descrita hasta chocar con la pantalla es una semicircunferencia de diámetro a . El vector velocidad está contenido en el plano XOY . La aceleración está dirigida hacia el centro de curvatura, luego la fuerza

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

también lo está y por tanto \mathbf{B} es saliente del plano del dibujo. Al ser el módulo de la fuerza

$$evB = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{mv}{er} = \frac{m}{ea/2} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2Vm}{e}}.$$

Nos basta pues medir el radio de la circunferencia descrita seguida por los electrones, que es la mitad de la distancia del orificio al punto del impacto.

- 9.10** En un recipiente hay una mezcla de hidrógeno y deuterio ionizados a una cierta temperatura. Por una pequeña abertura salen los protones ($m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg) y los deuterones [$m_d = 3,34 \times 10^{-27}$ kg (Figura 9.11)]. Los que pasan por el diafragma D entran en un campo magnético de $B = 10^{-3}$ T y otro eléctrico de $E = 102$ V/m perpendiculares con objeto de seleccionar sólo las que tengan una velocidad concreta. 1) Calcular la velocidad de los iones que atraviesan el diafragma D' . 2) Los que atraviesan D' entran en una región de $B' = 10^{-2}$ T y, después de dar media vuelta en él, inciden en un punto P de una placa. Calcular la distancia del orificio del diafragma D' a P para los protones y deuterones en este separador de isótopos, llamado de Bainbridge.

Resolución

1) Se trata de predecir qué cargas atraviesan el diafragma D , siguen una trayectoria recta y pasan por el segundo diafragma manteniendo su velocidad constante. Si la velocidad \mathbf{v} no debe variar, la aceleración debe ser nula, luego la resultante de las fuerzas sobre las cargas también debe ser nula. Como se mueven por un campo electromagnético, la fuerza de Lorentz debe ser cero y por tanto los vectores \mathbf{E} y $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ serán del mismo módulo y dirección pero de sentidos opuestos.

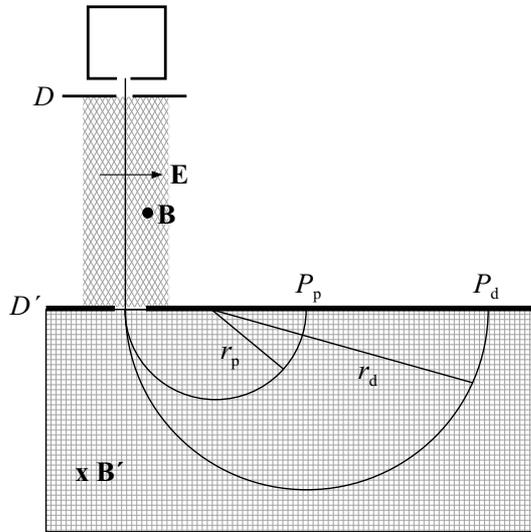


Figura 9.11. De los dos isótopos ionizados que emergen del horno, solamente los que tienen una velocidad concreta llegan a la región de campo \mathbf{B}' , donde son separados.

La condición para no desviarse es que la resultante de las fuerzas sea nula, es decir

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = vB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B} = \frac{10^2}{10^{-3}} \text{ m/s} = 10^5 \text{ m/s}.$$

2) Como \mathbf{B}' es uniforme y perpendicular a la velocidad, el movimiento resultante es circular con velocidad constante. El radio de la circunferencia descrita por los protones es

$$r_p = \frac{m_p v}{qB'} = \frac{m_p v}{eB'} = 0,105 \text{ m}.$$

El correspondiente a los deuterones es

$$r_d = \frac{m_d v}{qB'} = \frac{m_d v}{eB'} = 0,21 \text{ m}.$$

Como las partículas describen semicircunferencias antes de chocar con la placa, las distancias pedidas son:

$$x_p = 2r_p = 0,21 \text{ m}, \quad x_d = 2r_d = 0,42 \text{ m}.$$

Este dispositivo sirve pues para separar isótopos.

- 9.11** La Figura 9.12 muestra un dispositivo que está formado por un tubo en forma de cuarto de toro de radio medio r , con dos ranuras 1 y 2. En el dispositivo existe un campo \mathbf{B} homogéneo, estacionario, perpendicular al plano del papel y saliente. Por la ranura 1 se introduce en la dirección indicada un conjunto de partículas, todas de masa m y carga q , pero difieren en el módulo de la velocidad. Se pide: a) ¿Qué partículas pasan por la ranura 2? b) El tiempo que tardan las partículas desde 1 a 2. c) Si las partículas que abandonan 2 siguen sometidas al mismo campo \mathbf{B} anterior, determinar el módulo, dirección y sentido de un campo \mathbf{E} homogéneo, estacionario y exterior al tubo, de forma que el movimiento de las partículas, una vez abandonado dicho tubo, sea rectilíneo y uniforme.

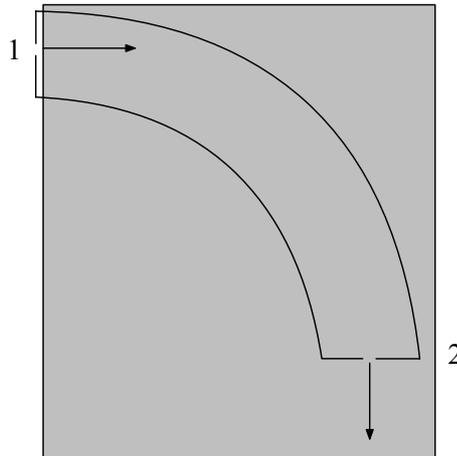


Figura 9.12. De todas las partículas cargadas que penetran en la dirección indicada, únicamente las que tienen un velocidad determinada salen por la segunda ranura.

Resolución

a) El problema es análogo al 9.6 en esta primera parte. La trayectoria será circular mientras exista sólo el campo magnético. La fuerza es perpendicular a la trayectoria y la aceleración será centrípeta. Únicamente las partículas que recorran el arco de circunferencia de radio r pasarán por la segunda ranura.

Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica se obtiene

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{qBr}{m},$$

que determina la velocidad que deben tener las partículas para pasar por la ranura.

b) Las partículas que poseen esa velocidad recorren el arco de circunferencia con una velocidad angular ω . El tiempo T que tardarían en recorrer la circunferencia completa, de ángulo 2π , es el periodo, pero sólo recorren un cuarto de él. Obtenemos pues para las diversas cantidades:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow t = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2qB},$$

puesto que la carga ha de describir un cuarto de circunferencia.

c) Si el movimiento a la salida es rectilíneo y uniforme la resultante de las fuerzas sobre ella ha de ser nula, luego la fuerza del campo eléctrico debe ser igual a la del campo magnético salvo el sentido y por tanto

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B},$$

y además el campo eléctrico debe estar dirigido de izquierda a derecha.

9.12 Un protón se abandona en reposo en el centro de un ciclotrón, cuyo campo magnético es B . La amplitud de la tensión entre las “des” es V_0 y se desea conocer la frecuencia de la tensión alterna necesaria para acelerar a la carga y la velocidad máxima que puede adquirir la carga en la primera media vuelta.

Resolución

La frecuencia de la corriente alterna debe coincidir con la de giro del protón para que haya sincronismo y al pasar el protón entre las “des” sea acelerado. Por estar inmerso en un campo

magnético uniforme, perpendicular a la velocidad, el movimiento descrito en el interior de las “des” es circular uniforme. La frecuencia de giro es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

El aumento de energía cinética en cada paso por entre las “des” es qV_0 por el principio de conservación de la energía. Al entrar en la primera D tendrá una velocidad, que como máximo valdrá

$$v_1 = \sqrt{2qV_0/m},$$

y el radio de la primera semicircunferencia

$$r_1 = \frac{mv_1}{qB} = \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}}.$$

9.13 Un ciclotrón acelera deuterones. El campo magnético $B = 1,4$ T. La carga del núcleo es $q = e = 1,60 \times 10^{-19}$ C y la masa del protón $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg. Calcular: 1) La velocidad angular de la partícula. 2) La velocidad de salida si el radio del ciclotrón es $R = 0,4$ m. 3) El potencial electrostático necesario para producir la misma velocidad.

Resolución

1) Dentro de las “des” el campo \mathbf{B} origina un movimiento circular uniforme cuya velocidad angular se obtiene, como ya se ha visto, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica

$$F = qvB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \omega r = v = \frac{qBr}{m} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}.$$

Los deuterones son los núcleos del átomo de deuterio, conteniendo un protón y un neutrón, cuya masa es aproximadamente el doble que la del protón y cuya carga es igual, salvo el signo, a la del electrón. Por tanto

$$\omega = \frac{1,60 \times 10^{-19} \times 1,4}{2 \times 1,67 \times 10^{-27}} = 6,7 \times 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

2) La velocidad en cada semicircunferencia es igual a la velocidad angular (constante) por su radio (creciente), luego la velocidad máxima corresponde al radio máximo, o sea, a la salida

$$v_{\text{salida}} = \omega R = 6,7 \times 10^7 \times 0,4 \text{ m/s} = 2,68 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Esta velocidad es menos de la décima parte de la velocidad de la luz en el vacío, luego las fórmulas utilizadas, que corresponden a la Mecánica clásica, son suficientemente precisas.

3) Este acelerador se basa en la energía que adquieren las partículas cargadas al estar sometidas a un campo electrostático. Por el principio de conservación de la energía, el trabajo que le aplica el campo eléctrico es

$$W = -\Delta E_p = qV = \Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{salida}}^2 - 0 = qV \Rightarrow$$

$$V = \frac{mv^2}{2q} = \frac{3,34 \times 10^{-27} \times (2,64 \times 10^7)^2}{2 \times 1,60 \times 10^{-19}} \Rightarrow V = 7,51 \times 10^6 \text{ V}.$$

Este resultado indica la necesidad de una gran diferencia de potencial para que en una sola etapa la velocidad sea considerablemente elevada. En el ciclotrón la partícula pasa por un salto de diferencia de potencial una vez cada media vuelta, por lo que no se necesitan amplitudes de voltaje tan elevadas.

- 9.14** Hallar el número de vueltas que una partícula de carga q y masa m dará en un ciclotrón de radio R . El campo magnético existente es \mathbf{B} y la d.d.p. alterna aplicada a las “des” es $V_0 \cos(\omega t)$. Determinar el tiempo que tardará la partícula en abandonar el ciclotrón.

Resolución

La velocidad a la salida es máxima e igual a la velocidad angular (constante) por el radio a la salida del acelerador

$$v_{\max} = \omega R = \frac{qB}{m} R \Rightarrow E_{k \max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{qBR}{m} \right)^2.$$

Esta energía es aportada por el campo eléctrico entre las “des”. Cada vez que la partícula pasa por el espacio entre ellas sufre un incremento de energía qV_0 . Cada vuelta pasa dos veces. Si recorre n vueltas, la energía cinética que adquiere es

$$E_{k \max} = 2nqV_0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{qBR}{m} \right)^2 = 2nqV_0 \Rightarrow \boxed{n = \frac{qB^2 R^2}{4mV_0}}.$$

El tiempo empleado en dar una vuelta es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \boxed{t = nT = \frac{qB^2 R^2}{4mV_0} \frac{2\pi m}{qB} = \frac{\pi BR^2}{2V_0}}.$$

- 9.15** Un ciclotrón de radio R tiene un espacio L entre sus “des” tal que $L \ll R$. Perpendicularmente a éstas existe un campo magnético B y se aplica simultáneamente a dichas “des” una diferencia de potencial alterna $V = V_0 \cos(\omega t)$, siendo ω el valor adecuado para la partícula que va a ser acelerada. Se lanza una partícula de masa m_1 . En un segundo experimento se lanza otra partícula de masa m_2 , de la misma carga que la primera y se aplica la ω adecuada. En estas condiciones, se pide: a) Si $m_2 = 2m_1$, razonar y demostrar cuál de las dos partículas da más vueltas antes de salir de las “des”. b) Razonar cuánta energía aporta el campo magnético a cada una de las dos partículas. c) Obtener el periodo de rotación de la partícula de masa m_1 cuando se halla describiendo la trayectoria circular de radio $R/2$ y compararlo con el periodo correspondiente a la trayectoria de la última vuelta en donde el radio es R .

Resolución

a) Mientras permanece en el interior de las “des” la partícula se encuentra inmersa en un campo magnético y describe media circunferencia. En primer lugar se va a estudiar la última media vuelta. Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica para una partícula cargada y como a la salida el radio de la circunferencia coincide con el del ciclotrón, se obtiene

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v_{\max} = \frac{qBr_{\max}}{m} = \frac{qBR}{m},$$

coincidente con el calculado en el problema anterior. Teniendo en cuenta que en cada vuelta sufre dos incrementos de energía, el incremento experimentado en n vueltas es $2nqV_0$. La aplicación del principio de conservación de la energía da

$$2nqV_0 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - 0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{qBR}{m} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{qB^2 R^2}{4mV_0}.$$

Al ser la segunda partícula de doble masa que la primera y el resto de los valores que intervienen en el experimento iguales, el número de vueltas que ejecuta será la mitad.

b) Como la fuerza del campo magnético es perpendicular a la trayectoria, la energía que suministra, o sea el trabajo que realiza, que es la suma de los productos escalares de la fuerza por cada uno de los desplazamientos elementales es nulo.

c) El periodo de rotación de una partícula

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

es independiente del radio de la trayectoria.

9.16 Como consecuencia de la desintegración de un fotón aparecen en un punto P de un campo magnético dos partículas cargadas con la misma velocidad perpendicular al campo. Dichas partículas tienen igual masa. La Figura 9.13 muestra la trayectoria descrita por cada partícula registrada mediante una cámara de niebla (básicamente contiene gas y vapor de agua). Razone la diferencia existente entre dichas partículas y a qué puede ser debido la disminución de radio de curvatura.

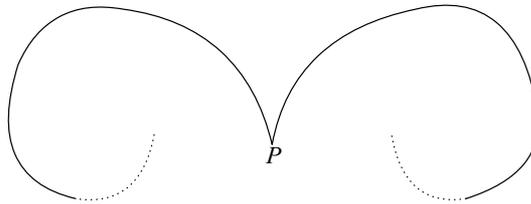


Figura 9.13. Dos partículas son creadas en el punto P de un campo magnético. Cada una describe una de las trayectorias dibujadas. Deben corresponder a dos partículas iguales salvo el signo de su carga.

Resolución

Como el centro de curvatura de la trayectoria de la izquierda en su punto de arranque P está a la izquierda, la aceleración apunta a la izquierda y por tanto la fuerza que se ejerce sobre ella es hacia la izquierda. Para la trayectoria de la derecha la fuerza es hacia la derecha. Como la fuerza en ambos casos viene dada por la fórmula

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

las cargas de ambas deben ser de signos opuestos. La disminución del radio de curvatura es debido a la disminución de la velocidad. Las partículas chocan contra las moléculas del gas y les transfieren energía cinética.

9.17 En un betatrón se aplica un campo magnético

$$B = B_0 e^{-r/k} \sin(\omega t).$$

Plantear la ecuación que determina k .

Resolución

El campo magnético tiene el eje $r = 0$ de simetría, pues no depende de las otras coordenadas cilíndricas φ y z , pero sí que depende de r . En este acelerador de partículas se pretende que éstas describan una trayectoria circular de radio R . Este radio es el único que tiene interés aquí. Para $r = R$ es

$$B_R = B_0 e^{-R/k} \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{dB_R}{dt} = B_0 e^{-R/k} \omega \cos \omega t.$$

La derivada calculada nos da la rapidez de la variación del campo magnético con el tiempo en la trayectoria circular de radio R .

El campo magnético medio, promediado sobre el círculo de radio R , es

$$B_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B_0 \sin(\omega t) e^{-r/k} 2\pi r dr = 2B_0 \frac{k}{R} \left[1 - \left(1 + \frac{R}{k} \right) e^{-R/k} \right] \sin(\omega t).$$

Derivando B_m respecto del tiempo y aplicando la Ecuación (9.17) resulta

$$1 - \left(1 + \frac{R}{k} + \frac{R^2}{k^2} \right) e^{-R/k} = 0.$$

De esta ecuación se obtiene la solución para R/k y de ahí el valor de k en función de R .

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 9.18** Una esfera conductora de radio $R = 10$ cm se carga con $q = 10^{-6}$ C. Se lanza hacia la esfera un protón de carga $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg desde un sitio muy lejano. Calcular la velocidad mínima para que el protón alcance la esfera, suponiendo que la distribución de carga en la esfera no se ve afectada por el protón.

Solución: $v = 4,2 \times 10^6$ m/s.

- 9.19** En la Figura 9.14 se muestra el principio de funcionamiento de un osciloscopio o un tubo de televisión. Consta de un *cañón de electrones* formado por un cátodo, que calentado mediante una corriente

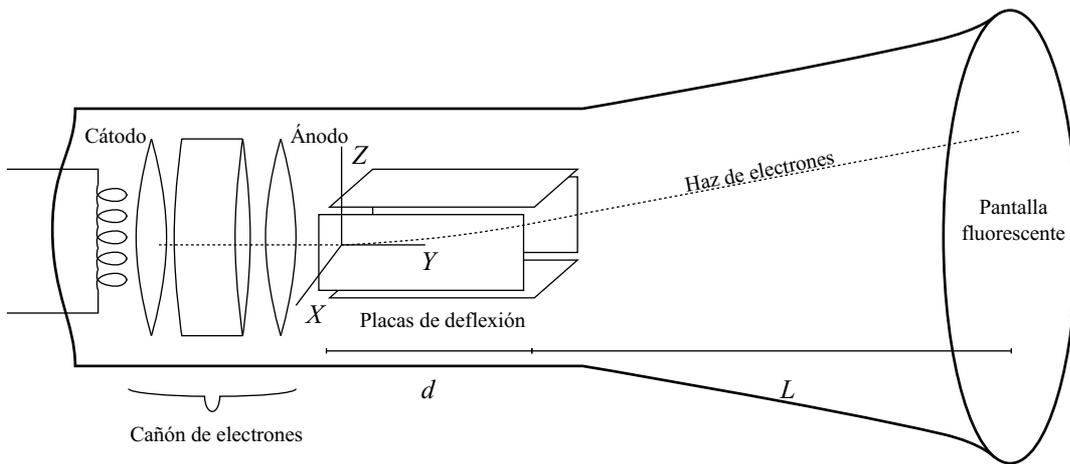


Figura 9.14. Esquema de un osciloscopio.

eléctrica, libera electrones que son acelerados por un ánodo hasta conseguir una determinada velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_y$. Los electrones salen en línea recta a través de un orificio en dirección a una pantalla, hecha de un material que emite luz visible al recibir el impacto de los electrones (*fluorescencia*). Los electrones en su recorrido atraviesan dos conjuntos de placas de longitud d colocadas en ángulo recto para lograr la deflexión horizontal y vertical de los electrones. El campo eléctrico que producen estas placas es uniforme en la región interior a las placas y viene dado por $\mathbf{E} = -E_x \mathbf{u}_x - E_z \mathbf{u}_z$. Al salir de las placas y a una distancia L se encuentra la pantalla del osciloscopio, contenida en un plano paralelo al plano XZ . Determinar la posición de la pantalla en la que incidirán los electrones, en función del campo \mathbf{E} .

Solución:
$$\mathbf{r} = \frac{eE_x}{mv_0^2} d(L + \frac{d}{2}) \mathbf{u}_x + \frac{eE_z}{mv_0^2} d(L + \frac{d}{2}) \mathbf{u}_z .$$

- 9.20** El campo eléctrico en el selector de velocidades de Bainbridge es 3000 V/m y el módulo del campo magnético del filtro de velocidades y del separador es 0,1 T. Determine: 1) La velocidad de los iones que atraviesan sin desviarse el filtro de velocidades. 2) Si la fuente produce iones de los isótopos C^{12} y C^{13} , calcular la separación de las imágenes de ambos isótopos. Tómese las masas de los isótopos como proporcionales a sus números másicos. $1 \text{ uma} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Solución: 1) $3 \times 10^4 \text{ m/s}$. 2) 6,22 mm.

- 9.21** Entre las "des" de un ciclotrón de 60 cm de radio se aplica una tensión alterna de amplitud 50 kV y de frecuencia 8 MHz. Se utiliza para acelerar deuterones y se desea determinar: 1) El campo magnético del ciclotrón. 2) Número de vueltas que da una partícula antes de salir.

Solución: 1) 1,05 T. 2) 95.

- 9.22** Un campo eléctrico tiene dirección y sentido coincidentes con el eje OZ . Su módulo es cy , siendo c una constante. Se lanza desde el origen de coordenadas una partícula de carga q y masa m con la velocidad v_0 a lo largo del eje OY . Escriba la ecuación de la trayectoria.

Solución: $x = 0, y = v_0 t, z = cq v_0 t^3 / (6m)$.

- 9.23** En una región del espacio el potencial eléctrico es conocido y vale $V = V_0 \text{sen}(kx - \pi/2)$. Una partícula de masa m y carga q se lanza desde el origen de coordenadas con la velocidad v_0 en la dirección del eje OX . Calcule el valor máximo de v_0 para que la partícula permanezca a distancia finita de su punto de lanzamiento.

Solución: $v_0 = (4qV_0/m)^{1/2}$.

- 9.24** Un campo eléctrico varía lentamente con el tiempo de modo que $E_x = E_0 \text{sen}(\omega t)$ y las otras dos componentes son nulas. Obtenga la ecuación de la trayectoria de una partícula dejada en el origen de coordenadas sin velocidad inicial.

Solución: $x = -qE_0 \text{sen}(\omega t) / (m\omega^2), y = 0, z = 0$.

LEYES DE MAXWELL

10.1. CRÍTICA DE LA LEY DE AMPÈRE

La Figura 10.1 representa un conductor recto muy largo, que forma parte de un circuito, cargando un condensador de placas circulares. En el instante t la corriente de carga tiene la intensidad I . Considérese la circunferencia de radio r , situada en un plano perpendicular al hilo. Esta circunferencia es el contorno del círculo de radio r , al que limita.

La ley de Ampère y la consideración de la simetría de revolución dan para el campo magnético en un punto de la circunferencia

$$\frac{1}{\mu_0} B 2\pi r = I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 I / (2\pi r) . \quad (10.1)$$

Si la circunferencia se hubiera considerado como contorno de la superficie en forma de vaso, la intensidad a su través sería nula, luego

$$\frac{1}{\mu_0} B 2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 . \quad (10.2)$$

Sin embargo habría un campo \mathbf{E} por la zona del fondo del vaso, que está entre las armaduras con carga eléctrica. Ambos resultados son contradictorios. De ahí se deduce que la ley de Ampère necesita ser corregida. Maxwell encontró la solución a la paradoja, sustituyendo la ley de Ampère por esta otra

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (10.3)$$

Esta ley está contrastada por las experiencias realizadas durante un siglo y medio, por lo que puede considerarse una ley básica de la Naturaleza. A veces se llama ley de Ampère-Maxwell. Indica que en un punto dado del espacio las magnitudes \mathbf{B} , \mathbf{j} y \mathbf{E} están íntimamente relacionadas. Se puede expresar diciendo “el campo magnético es creado por la corriente eléctrica y por el campo eléctrico variable con el tiempo”.

Multiplicando escalarmente los dos miembros de la Ecuación (10.3) por un elemento infinitesimal $d\mathbf{S}$ de una superficie S , integrando para toda la superficie y aplicando el teorema de la

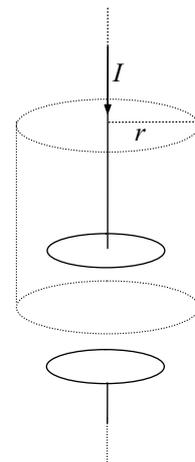


Figura 10.1. Mientras se carga el condensador hay un campo magnético en las proximidades del alambre y un campo eléctrico variable con el tiempo entre las armaduras.

circulación, resulta

$$\int_S \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} . \quad (10.4)$$

Esta ecuación relaciona la circulación del campo \mathbf{B} , a lo largo de una línea cerrada inmóvil, con la intensidad de corriente a través de la superficie cuyo contorno es dicha línea y con la rapidez con que varía el flujo del campo \mathbf{E} a través de la superficie.

Demostración.- Maxwell utilizó un razonamiento análogo al que sigue para proponer su ley. Multitud de experimentos realizados durante siglos han conducido a la evidencia de que la carga eléctrica se conserva; ésta es tal vez la ley mejor contrastada de la Naturaleza y su expresión matemática es

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (10.5)$$

De acuerdo con la primera ecuación de Maxwell es $\rho/\varepsilon_0 = \nabla \cdot \mathbf{E}$, que sustituida en la Ecuación (10.5) da

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (10.6)$$

Si en la ley de Ampère en forma puntual $1/\mu_0 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}$ se añade en el segundo miembro una magnitud vectorial electromagnética \mathbf{F} y se calcula la divergencia de ambos miembros resulta

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{F}) . \quad (10.7)$$

Como el primer miembro es idénticamente nulo, el segundo también debe serlo. La observación de la Ecuación (10.6) invita a proponer $\mathbf{F} = \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, de acuerdo con Maxwell y entonces la Ecuación (10.7) se convierte en una igualdad.

10.2. LEYES DE MAXWELL. FORMA DIFERENCIAL

Maxwell consiguió reunir en cuatro ecuaciones todas las leyes del electromagnetismo. Las leyes ya expuestas con anterioridad en varios capítulos son en su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (10.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (10.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (10.10)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (10.11)$$

En general, la aplicación conjunta de las cuatro ecuaciones es necesaria para la resolución de un problema de electromagnetismo. En los casos en que nada depende del tiempo, las derivadas parciales respecto de él son nulas, en las dos primeras sólo aparece el campo eléctrico (ecuaciones de la electrostática) y en las dos últimas sólo aparece el campo magnético (ecuaciones de la magnetostática), pudiendo estudiarse ambos fenómenos por separado.

En algunas ocasiones no son conocidas la densidad de carga sino la densidad de carga libre, ni la densidad de corriente sino la densidad de corriente de conducción. Entonces es conveniente la segunda forma de las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho_{np}}{\varepsilon_0} , \quad (10.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (10.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (10.15)$$

Si se usa esta versión de las ecuaciones de Maxwell, debe considerarse que para los materiales ordinarios el campo \mathbf{D} es función al menos de \mathbf{E} y el campo \mathbf{B} lo es al menos de \mathbf{H} .

10.3. LEYES DE MAXWELL. FORMA INTEGRAL

La forma integral de las leyes de Maxwell se expresa así:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (10.16)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (10.17)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (10.18)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (10.19)$$

o bien en función del campo \mathbf{D} en la primera ecuación y del campo \mathbf{H} en la cuarta:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{int,np}}, \quad (10.20)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (10.21)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (10.22)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \quad (10.23)$$

10.4. SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD

Sean 1 y 2 dos medios distintos, separados por la superficie S y P un punto de dicha superficie. El primero medio está caracterizado en el instante t y en un punto junto al P por los valores: densidad de carga ρ_1 , densidad superficial de carga σ_1 , campo eléctrico \mathbf{E}_1 , campo magnético \mathbf{B}_1 , densidad de corriente \mathbf{j}_1 y una densidad de corriente superficial \mathbf{j}_{s1} . El segundo medio tiene en un punto junto al P los valores respectivos ρ_2 , σ_2 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{j}_2 y \mathbf{j}_{s2} . Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a la frontera en el punto P y dirigido hacia el material 2. Las leyes de Maxwell permiten demostrar que:

1. La componente normal de \mathbf{E} es discontinua, o sea de distinto valor para el medio 1 que para el medio 2, salvo que $\sigma_1 + \sigma_2$ sea nula.
2. La componente tangencial de \mathbf{E} es continua, es decir, tiene el mismo valor a ambos lados de la frontera.
3. La componente normal de \mathbf{B} se conserva al pasar de un medio al otro.
4. La componente tangencial de \mathbf{B} no es continua debido a las corrientes superficiales. Solamente es continua si la suma de las corrientes superficiales $\mathbf{j}_{s1} + \mathbf{j}_{s2}$ es nula.

La Figura 10.2 representa esquemáticamente estos resultados junto al punto P para el campo eléctrico. La Figura 10.3 los representa para el campo magnético.

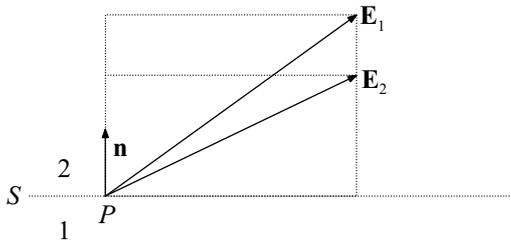


Figura 10.2. La componente tangencial del campo eléctrico es idéntica en ambos medios.

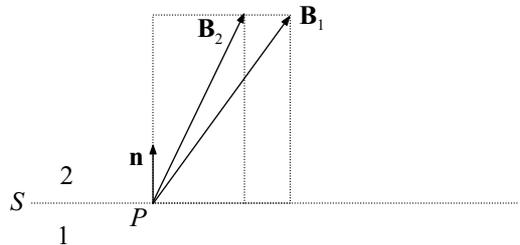


Figura 10.3. La componente normal del campo magnético es idéntica en ambos medios.

Demostración de la proposición 1.- Se dibuja una caja envolviendo al punto P, Figura 10.4, el flujo del campo eléctrico a través de la tapa superior, de área dS , es $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} dS = E_{2n} dS$, a través de la inferior es $\mathbf{E}_1 \cdot (-\mathbf{n}) dS = -E_{1n} dS$ y a través del contorno lateral es nulo si se considera que la altura tiende a cero. Al aplicar la ley (10.16) a la caja resulta

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} . \tag{10.24}$$

Si se hubiera aplicado la Ecuación (10.20), resultaría $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{1np} + \sigma_{2np}$.

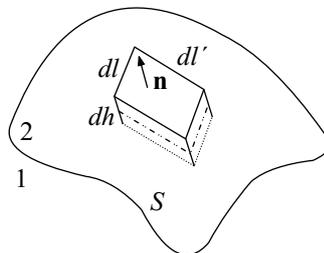


Figura 10.4. Al calcular el flujo del campo eléctrico a través de una caja que contiene a la superficie de separación de dos medios se determina la variación de su componente normal.

Demostración de la proposición 2.- La circulación por el tramo inferior, Figura 10.5, dentro del medio 1 es $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} dl$. La circulación a lo largo del rectángulo, cuando dh tiende a cero es $E_{1t} dl - E_{2t} dl$. El flujo del campo magnético a través del rectángulo es nulo pues dh tiende a cero. La Ecuación (10.17) se reduce a

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 . \tag{10.25}$$

La proposición 3ª, $B_{2n} = B_{1n}$ se demuestra de forma análoga a la efectuada con la 1ª pero con ayuda de la Ecuación (10.18). La 4ª, $B_{2t} - B_{1t} = \mu_0(j_{s2} + j_{s1})$ con la Ecuación (10.19).

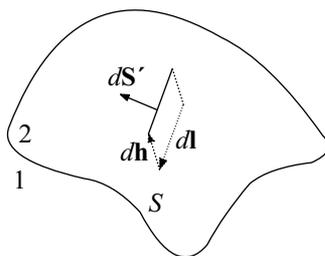


Figura 10.5. Calculando la circulación por el camino dibujado, con un tramo en un medio y otro en el otro medio, se concluye que la componente tangencial de \mathbf{E} es la misma a ambos lados.

Si el medio 1 es un conductor perfecto: $\mathbf{E}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{D}_1 = 0 \Rightarrow D_{1n} = 0 \Rightarrow D_{2n} = \sigma_{1np} + \sigma_{2np}$ y además $E_{1t} = 0 \Rightarrow E_{2t} = 0$.

10.5. POTENCIAL ESCALAR

La ley de inducción indica que el rotacional del campo eléctrico no es nulo en general. Por tanto, la circulación del campo eléctrico entre dos puntos depende del camino y no tiene sentido el concepto de diferencia de potencial. Ahora bien, recordando el concepto de potencial vector \mathbf{A} , mediante su definición,

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \quad (10.26)$$

y aplicando la ley de inducción resulta

$$0 = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (10.27)$$

luego el campo

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (10.28)$$

sí que es irrotacional. Así pues se puede definir una diferencia de potencial, a veces llamada escalar, de modo que la circulación de este campo sea independiente del camino. La definimos mediante la identidad

$$V_2 - V_1 \equiv - \int_1^2 \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l}. \quad (10.29)$$

Nótese que la diferencia de potencial electrostático es un caso particular de ésta, siendo aquella carente de sentido salvo cuando el campo magnético sea constante o varíe de una forma muy lenta con el tiempo.

10.6. ONDA ELECTROMAGNÉTICA LINEALMENTE POLARIZADA

Un campo electromagnético armónico en un material sin cargas libres, dieléctrico ($\mathbf{j}_c = 0$), y eléctrica y magnéticamente lineal está definido por

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y = E_0 \sin(kx - \omega t). \quad (10.30)$$

$$B_x = B_y = 0; \quad B_z = B_0 \sin(kx - \omega t). \quad (10.31)$$

De la Ecuación (10.30) se deduce que el campo eléctrico tiene en todos los puntos del espacio la dirección del eje OY , por eso se dice de él que está linealmente polarizado según el eje OY . La componente E_y depende sinusoidalmente tanto de la distancia x como del tiempo t . El valor máximo E_0 se llama amplitud. La Figura 10.6 representa en un cierto instante t la dependencia

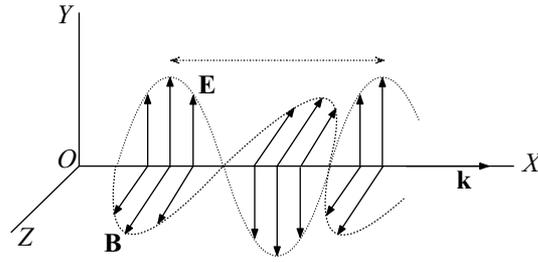


Figura 10.6. Representación de los campos eléctrico y magnético en el instante t y en una región del espacio de una onda plana, armónica y polarizada linealmente. La onda avanza hacia la derecha en el transcurso del tiempo.

del campo eléctrico con la distancia en los puntos del eje OX . Puede verse en ella que si se avanza una distancia, llamada longitud de onda, el valor del campo es el mismo. Cuando esto ocurre debe ser $[k(x + \lambda) - \omega t] - [kx - \omega t] = 2\pi$, luego $k = 2\pi/\lambda$. Si se representase el campo eléctrico en función del tiempo para un punto fijo del espacio, el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos por el mismo valor se llama periodo T , cuyo inverso es la frecuencia f , luego $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$. Como la frecuencia es única, a la onda se le llama armónica o monocromática. En el transcurso del tiempo la representación espacial se desplaza hacia la derecha de modo que un máximo, por ejemplo, avanza una distancia λ en el tiempo T , luego la velocidad de la onda es $v = \lambda/T = \omega/k$. Analizando la representación gráfica del campo magnético frente a la distancia se sacan análogas conclusiones. La onda progresa pues en el sentido determinado por el avance de un sacacorchos que gira de \mathbf{E} a \mathbf{B} . Como la única variable espacial es la x , los valores de \mathbf{E} son iguales en todos los puntos de un plano paralelo al OYZ y otro tanto le ocurre al \mathbf{B} , por lo que la onda se llama plana.

Para comprobar que la onda descrita por las Ecuaciones (10.30) y (10.31) puede existir, basta que cumpla las ecuaciones de Maxwell y las relaciones lineales $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. En efecto, verifica la primera, ya que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon 0 = 0.$$

Para comprobar que verifica la segunda, se calculan

$$\nabla \times \mathbf{E} = E_0 k \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z,$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \omega \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_z,$$

que es idéntica a la anterior sólo si

$$B_0 = kE_0/\omega = E_0/v. \quad (10.32)$$

La tercera se verifica, pues

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

En la cuarta son

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{B_0 k}{\mu} \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\varepsilon E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{u}_y,$$

idéntica a la anterior sólo si

$$B_0 = \varepsilon \mu \omega E_0 / k. \quad (10.33)$$

Se define el vector de onda \mathbf{k} como aquel vector cuyo módulo es igual al número de onda k y con dirección y sentido coincidentes con la dirección y sentido de propagación. Teniendo en cuenta la

Ecuación (10.32) y las consideraciones sobre las direcciones de los campos eléctricos y magnéticos, resulta

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} . \quad (10.34)$$

Recordando las dos relaciones anteriores (10.32) y (10.33) se obtiene

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} . \quad (10.35)$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda depende de las constantes electromagnéticas del medio. La permeabilidad magnética relativa es próxima a la unidad para la mayoría de las sustancias, pero la permitividad eléctrica depende del material y también suele variar con la frecuencia. Esta velocidad coincide con la velocidad de la luz, dando pie a la teoría electromagnética de la luz. Cuando la propagación es en el vacío, la velocidad de la onda se representa por c y vale $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. El índice de refracción se define por $n \equiv v/c = (\varepsilon_r\mu_r)^{1/2}$.

10.7. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

En la Figura 10.7 hay un plano, σ , que separa dos materiales, dieléctricos lineales, de igual permeabilidad magnética $\mu_1 = \mu_2$ y no superconductores. El medio superior tiene una permitividad eléctrica ε_1 y el inferior ε_2 . Las velocidades correspondientes a cada lado son v_1 y v_2 . Una onda electromagnética plana, polarizada linealmente incide de forma que su dirección de propagación \mathbf{k}_i forma un ángulo θ_i con la normal al plano σ . Se dibuja un plano π , llamado de incidencia, perpendicular al σ y conteniendo la dirección de propagación \mathbf{k}_i . El campo eléctrico \mathbf{E}_i de la onda incidente tiene una cierta amplitud E_0 , es perpendicular a \mathbf{k}_i y se supone paralelo al plano σ . Se espera un cierto campo \mathbf{E}_r en el segundo medio y otro \mathbf{E}'_r en el primero, que se llama reflejado, que se superpondrá al incidente. Todos los vectores dibujados deberían tener su origen en el punto P de incidencia, pero la figura resultaría confusa.

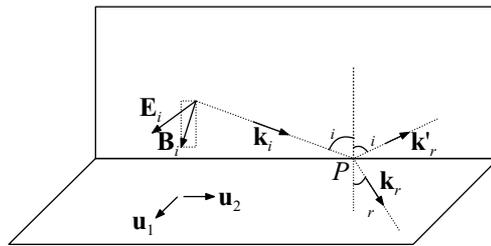


Figura 10.7. Una onda electromagnética que avanza en la dirección \mathbf{k}_i y polarizada paralelamente al plano σ se refracta en la dirección \mathbf{k}_r y se refleja en la dirección \mathbf{k}'_r .

Aplicando las condiciones de contorno a la superficie límite se obtiene que los tres vectores \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_r y \mathbf{k}'_r están en el plano de incidencia, que los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales, que se verifica la ley de la refracción $v_2 \sin \theta_i = v_1 \sin \theta_r$ y que el campo eléctrico de las ondas refractada y reflejada están también en el plano σ de incidencia. Las proyecciones del campo eléctrico según el unitario \mathbf{u}_1 tendrán amplitudes E_{0r} y E'_{0r} para el campo refractado y reflejado, respectivamente. La continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en P obliga a que

$$E_0 + E'_{0r} = E_{0r} . \quad (10.36)$$

En cuanto al campo magnético se refiere, el \mathbf{B} es perpendicular a \mathbf{k} y a \mathbf{E} en todo momento, luego sus proyecciones sobre el unitario \mathbf{u}_2 que deben ser continuas en P verifican la relación

$$-B_0 \cos \theta_i + B'_{0r} \cos \theta_i = -B_{0r} \cos \theta_r . \quad (10.37)$$

Como en la onda la amplitud del campo magnético es igual a la del campo eléctrico dividido por la velocidad de propagación, resulta

$$-E_0 \cos \theta_i + E'_{0r} \cos \theta_i = -\frac{v_1}{v_2} E_{0r} \cos \theta_r. \quad (10.38)$$

De las ecuaciones (10.36) y (10.38) se despeja el cociente de la amplitud del campo eléctrico transmitido y del incidente, llamado transmitancia de amplitudes

$$T \equiv \frac{E_{0r}}{E_0} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r}. \quad (10.39)$$

De igual manera la llamada reflectancia de amplitudes es

$$R \equiv \frac{E'_{0r}}{E_0} = \frac{\cos \theta_i - \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r}{\cos \theta_i + \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r}. \quad (10.40)$$

De forma parecida se podrían calcular estas magnitudes para una polarización perpendicular a la anterior y para una superposición de ambas.

PROBLEMAS RESUELTOS

- 10.1** A una esfera metálica de radio R , en el vacío, se le suministra la carga q . Determinar el campo \mathbf{E} a una distancia $r > R$.

Resolución

En el enunciado nada depende del tiempo, luego se trata de un problema electrostático, como los desarrollados en el Capítulo 2. Las ecuaciones de Maxwell incluyen el caso particular de la electrostática, luego podemos decir con toda propiedad que es un problema adecuado para ser resuelto con las ecuaciones de Maxwell.

Por simetría el campo eléctrico es radial. Aplicando la Ecuación (10.16) y teniendo en cuenta la simetría se obtiene

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}.$$

Para llegar a esta solución se ha aprovechado la ecuación de Maxwell en su forma integral porque la simetría radial exige que la componente radial del campo eléctrico sea la misma sobre todos los puntos de una superficie esférica con centro coincidente con el de la esfera del enunciado.

- 10.2** Igual que el ejercicio anterior salvo que la esfera está inmersa en un medio dieléctrico de $\varepsilon_r = 2$.

Resolución

Este problema es idéntico al anterior salvo que en el otro la carga eléctrica total era un dato y aquí sólo es conocida la carga de no polarización igual a q . En efecto, la esfera cargada polariza al medio circundante originando en él cargas de polarización, como se vio en el Capítulo 3.

Por eso la Ecuación (10.16) no es muy apropiada. El dato eléctrico es ahora la carga libre únicamente y la aplicación de la Ecuación (10.20) da

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{int,np}} \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{q}{8\pi \varepsilon_0 r^2}}.$$

Como era de esperar, el campo eléctrico ha sido reducido a la mitad de lo que valdría si no estuviese el dieléctrico.

10.3 En una región totalmente vacía hay un campo eléctrico $\mathbf{E} = kt\mathbf{u}_z$ y otro magnético con $B_y = B_z = 0$. La magnitud k es constante. Se desea conocer \mathbf{B} .

Resolución

Estar en el vacío implica: $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.

En este problema el campo eléctrico varía con el tiempo, por lo que no es aplicable la teoría de la electrostática. Es preciso acudir a las ecuaciones de Maxwell en las que sustituiremos los valores de las cantidades suministradas por el enunciado.

La segunda ley de Maxwell da

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & kt \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0,$$

y la tercera añade

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

De la cuarta ley se deduce que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{u}_y - \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{u}_z = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 k \mathbf{u}_z \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0. \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\epsilon_0 \mu_0 k. \end{cases}$$

Luego

$$B_x = -\epsilon_0 \mu_0 k y + k'.$$

Las ecuaciones de Maxwell han conducido al resultado de que el campo eléctrico variable con el tiempo obliga a la existencia de un campo magnético. Salvo en casos estáticos, ambos campos tienen existencia simultáneamente. El campo magnético en este problema es constante con el tiempo.

10.4 En una región del espacio ocurre que: $j_z = 0$, $E_x = E_y = 0$, $E_z = ey + e't$, $B_x = by + b't$, $B_y = B_z = 0$, donde e' y b' son constantes conocidas. Calcular ρ , e , b y \mathbf{j} .

Resolución

Solamente en casos estáticos puede existir únicamente un campo eléctrico o uno magnético. Generalmente, el campo eléctrico y el campo magnético coexisten, como facetas de la misma realidad física. Esta existencia sólo es posible si los valores de ambos son tales que verifican las ecuaciones de Maxwell. Por ello las constantes que aparecen en el enunciado no son arbitrarias. Obligaremos a que las expresiones propuestas para los campos verifiquen las cuatro ecuaciones básicas.

Ecuaciones de Maxwell:

Primera:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Segunda:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & ey + e't \end{vmatrix} = e\mathbf{u}_x + 0 + 0 = e\mathbf{u}_x \\ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -b'\mathbf{u}_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow e = -b'.$$

Tercera:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Cuarta

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} &= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ by + b't & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \frac{b}{\mu_0}\mathbf{u}_z \\ \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= j_x\mathbf{u}_x + j_y\mathbf{u}_y + 0\mathbf{u}_z + \varepsilon_0 e'\mathbf{u}_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} j_x = 0. \\ j_y = 0. \\ b = -\varepsilon_0\mu_0 e'. \end{cases}$$

Con estos resultados ya es posible la existencia de los campos propuestos. Nótese también las densidades de corriente admisibles.

10.5 En una región del espacio no hay cargas ni corrientes. El campo magnético es $\mathbf{B} = (ax - bt)\mathbf{u}_z$. El campo \mathbf{E} tiene la dirección del eje OY . 1º) Calcular \mathbf{E} . 2º) Calcular la f.e.m. a lo largo de un cuadrado de lado L , con dos de sus lados situados respectivamente sobre los semiejes OX y OY positivos.

Resolución

1º) El campo eléctrico tiene la dirección del eje OY , luego sus componentes sobre los otros dos ejes son nulas, $E_x = 0$ y $E_z = 0$. El campo magnético establecido en el enunciado no tiene componentes sobre los ejes OX y OY , o sea $B_x = 0$ y $B_y = 0$. La componente sobre el eje OZ no depende de la coordenada z , por tanto la divergencia del campo magnético es nula y se verifica la tercera ley de Maxwell. El campo electromagnético debe verificar también las otras tres leyes, en las cuales se van a sustituir todas las componentes de los campos.

Leyes de Maxwell:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\mathbf{u}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x}\mathbf{u}_z = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = b\mathbf{u}_z \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = b \end{cases} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\mathbf{u}_y \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{a}{\varepsilon_0\mu_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{E} = \left(bx - \frac{a}{\varepsilon_0\mu_0}t + k \right) \mathbf{u}_y.$$

Para obtener este resultado se ha tenido en cuenta que por ser nulas las derivadas parciales de E_y respecto de y y respecto de z , el campo no depende ni de y ni de z , o sea la única componente no nula del campo eléctrico sólo depende de la coordenada x y del tiempo. Además, al ser la derivada parcial de E_y respecto de x constante debe dar en la integración que E_y depende linealmente de x . Otro tanto acontece con su dependencia con el tiempo.

2º) Definición de f.e.m. a lo largo del cuadrado recorrido en el sentido definido por el giro del eje OX hacia el OY y aplicación del teorema de Stokes (1.23)

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{cuadrado}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S b dS \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = bL^2.}$$

En la integración sobre la superficie del cuadrado se ha sustituido el rotacional del campo eléctrico por su valor hallado, $\nabla \times \mathbf{E} = b\mathbf{u}_z$. Este integrando tiene la misma dirección y sentido que el vector elemento de área, por lo que el producto escalar de ambos es bdS .

10.6 Entre el plano coordenado $y = -1$ m y el plano $y = +1$ m hay una densidad de carga homogénea y en reposo de $\rho = 10^{-4} \text{ C/m}^3$. Demostrar que el campo eléctrico tiene la dirección del eje OY y calcular su valor en el punto $y = 0,3$ m.

Resolución

Considérese un punto interior a la distribución de carga. Al ser el fenómeno estacionario $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$ y $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, la ley de inducción da $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, es decir

$$\begin{cases} \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z = 0, \\ \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x = 0, \\ \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y = 0. \end{cases}$$

Desde cualquier punto del plano $y = \text{constante}$ no infinitamente alejado se ve la distribución de carga perderse en el horizonte, luego el campo eléctrico que produce no debe depender ni de x ni de z , o sea, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(y)$. Se dice que hay una simetría traslacional y el sistema de ecuaciones anterior se reduce a

$$\begin{cases} \partial E_z / \partial y = 0 \Rightarrow E_z = C_1. \\ \partial E_x / \partial y = 0 \Rightarrow E_x = C_2. \end{cases}$$

El plano XOY es un plano de simetría especular, luego si a un lado E_z es positivo, al otro debe ser negativo y esto sólo es posible si C_1 es nulo. Otro tanto acontece con C_2 . Así pues la única componente no nula de \mathbf{E} es la E_y . La primera ecuación de Maxwell se reduce a

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Rightarrow E_y = \frac{\rho}{\epsilon_0} y + C_3.$$

El plano XOZ es un plano de simetría, luego E_y debe conservar su valor absoluto, pero cambiar su signo al considerar un punto y su simétrico. Esto sólo es posible si $C_3 = 0$. Por tanto

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{u}_y = \frac{\rho}{\epsilon_0} y \mathbf{u}_y = 3,39 \times 10^6 \mathbf{u}_y \text{ V/m}.$$

10.7 En las mismas circunstancias que en el problema anterior, 10.6, salvo que la carga se mueve en régimen permanente con la velocidad $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{u}_z$, con $v_0 = 3000$ m/s, calcule \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Resolución

En cada punto fijo del espacio ninguna magnitud electromagnética cambia con el tiempo, luego el fenómeno es estacionario y la solución para el campo eléctrico es la encontrada en el problema anterior.

Dentro de la lámina con corriente, la densidad de corriente es igual a

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho v_0 \mathbf{u}_z.$$

Por la simetría traslacional $\mathbf{B} = \mathbf{B}(y)$, luego

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{u}_x - \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{u}_z,$$

y la ley de Ampère-Maxwell da

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{u}_x - \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{u}_z = \mu_0 \rho v_0 \mathbf{u}_z \Rightarrow \begin{cases} B_z = C_1. \\ B_x = -\mu_0 \rho v_0 y + C_2. \end{cases}$$

La componente B_z es independiente de todo, y en particular de v_0 , luego debe asignársele un valor nulo. Todavía más, se admite en Física que los campos en el infinito son nulos, por ejemplo, un imán de una máquina eléctrica produce un campo magnético nulo más allá de la galaxia más lejana. Por tanto el B_z debe ser nulo en el infinito y como es independiente de las coordenadas del punto donde se calcula, debe ser nulo en todos los puntos.

Además, la existencia de cargas entre el plano $y = -1$ m y el plano $y = 1$ m sin limitar la extensión a lo largo de los ejes OX y OZ es una idealización del problema pues carecen de sentido físico los puntos infinitamente alejados. En un sentido más realista se deberían considerar extensiones finitas L_x y L_z , en las direcciones de los ejes OX y OZ respectivamente, mucho mayores que el espesor ($1+1$) de la región cargada, y limitarse al cálculo de los campos en puntos del espacio situados a una distancia mucho menor que L_x y L_z .

Por la simetría respecto del plano XOZ es $C_2 = 0$, luego

$$B_x = -\mu_0 \rho v_0 y .$$

Por otra parte la ecuación de Maxwell y por simetría

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} \Rightarrow B_y = C_3 = 0 .$$

Por tanto

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x = -\mu_0 \rho v_0 y \mathbf{u}_x = -1,13 \times 10^{-7} \mathbf{u}_x \text{ T} .$$

- 10.8** En una región del espacio comprendida entre los planos coordenados $x = a$ y $x = -a$, hay n protones por unidad de volumen. Los protones, de carga q , se mueven con velocidad v , según la dirección del eje OY y en su sentido positivo. 1º) Calcular la componente E_x del campo eléctrico \mathbf{E} y la componente B_z del campo magnético \mathbf{B} en el punto (a, y, z) . 2º) Aplicarlo para el caso de que $n = 10^{10} \text{ m}^{-3}$, $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $a = 0,1 \text{ m}$; $v = 20 \times 10^3 \text{ m/s}$. Nota : $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$.

Resolución

Este problema es análogo al Problema 10.7 y su resolución puede llevarse a cabo de forma idéntica salvo que las cargas están situadas en una lámina de distinta orientación respecto de los ejes coordenados. No obstante, se va a efectuar el cálculo haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Esta manera de resolverlo es adecuada porque hay una elevada simetría. En efecto, el plano $x=0$ es un plano de simetría para la densidad de carga y para la densidad de corriente y también lo es el plano $z=0$.

El flujo del campo eléctrico a través del paralelepípedo dibujado en la Figura 10.8, con dos caras en los planos $x = a$ y $x = -a$, de acuerdo con la primera ley de Maxwell y debido a la simetría, es

$$\int_{\text{par.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E_x LL' = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{nqLL'2a}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E_x = \frac{nqa}{\epsilon_0} = 18 \text{ V/m} .$$

En el cálculo del flujo se ha tenido en cuenta que sólo las caras perpendiculares al eje OX contribuyen al flujo total. Por simetría, en dichas caras la componente OX tiene el mismo valor pero el sentido es contrario. El vector superficie también es contrario ya que las caras forman parte de una superficie cerrada. Por tanto, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_x dS$. Por esta razón aparece el factor 2 por la componente E_x y por el área lateral LL' .

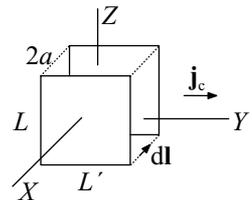


Figura 10.8. Caja empleada para el cálculo del campo eléctrico debido a una corriente de protones.

Para determinar B_z se calcula la circulación del campo magnético a lo largo del rectángulo con dos lados paralelos al eje OZ y los otros dos a OX y de longitudes L y $2a$ (situado a la derecha en la Figura 10.8). Por la tercera ley y por la simetría se obtiene

$$\oint_{\text{rec.}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -2B_z L = \mu_0 I_c = \mu_0 nqv2aL \Rightarrow \boxed{B_z = -\mu_0 nqva = -4,0 \times 10^{-12} \text{ T.}}$$

La circulación del campo magnético no es cero porque la intensidad de corriente a través del rectángulo no lo es, luego la componente B_z debe ser de signo opuesto para $x = -a$ que para $x = a$, motivo por el cual aparece el factor 2 multiplicando al campo magnético y a la longitud L .

10.9 En las regiones cilíndricas de la Figura 10.9 hay un campo magnético que, expresado en teslas, tiene la forma: $\mathbf{B} = \cos(10t)\mathbf{u}_z$ para $0 \leq \rho \leq R_1$, $\mathbf{B} = 8 \times 10^{-3}t\mathbf{u}_z$ para $R_1 < \rho \leq R_2$ y $\mathbf{B} = 0$ para $R_2 < \rho < \infty$. Calcule: a) El campo eléctrico E_t en las zonas 1, 2 y 3. b) Los instantes de tiempo en los que dicho campo se anula en la región 3, en el caso particular de que $R_1 = 1 \text{ m}$ y $R_2 = 2 \text{ m}$.

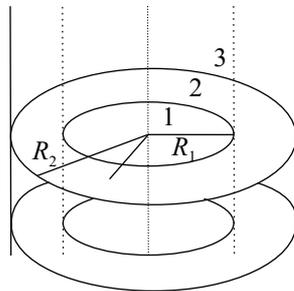


Figura 10.9. En las tres regiones 1, 2 y 3 hay un campo magnético distinto y definido y se calcula el campo eléctrico que le acompaña.

Resolución

a) Este problema tiene como características más notables: 1ª es heterogéneo por cuanto está definido de forma diferente en tres regiones del espacio, 2ª el campo magnético depende de la variable espacial ρ y t , por lo que el eje OZ es de simetría para él. Si se considera una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje OZ y centrada en este eje, resulta que el círculo que circunda tiene sus elementos de área paralelos al \mathbf{B} , siendo fácil el cálculo de su flujo. Otro tanto ocurre con las coronas circulares entre varios círculos.

La aplicación de la segunda ecuación de Maxwell

$$\oint_{ca} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} ,$$

da para circunferencias centradas en el eje de simetría:

a1) En el interior de la zona 1

$$\oint_{ca} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t 2\pi\rho ,$$

donde se ha tenido presente que, debido a la simetría, la componente tangencial E_t del campo eléctrico es constante sobre los puntos de la circunferencia de radio ρ . El flujo del campo magnético y su rapidez de variación es calculable y para el círculo definido por la circunferencia

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \cos(\omega t)\mathbf{u}_z \cdot dS\mathbf{u}_z = - \frac{\partial}{\partial t} \pi\rho^2 \cos(\omega t) = \omega\pi\rho^2 \text{sen}(\omega t) .$$

Luego al aplicar la ley se deduce

$$E_t = 5\rho \operatorname{sen}(10t).$$

a2) En la zona 2 el razonamiento es análogo, con la salvedad de que la expresión del campo magnético es distinta para el círculo interior de radio R_1 que para la corona de radio exterior ρ y radio interior R_1 . Por ello la superficie de integración se divide en el dominio del círculo de radio R_1 y el dominio de la corona resultando

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2-S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 \right] = -\frac{\partial}{\partial t} [\cos(\omega t)\pi R_1^2 + 8 \times 10^{-3}t(\pi\rho^2 - \pi R_1^2)],$$

luego

$$E_t = \frac{5R_1^2}{\rho} \operatorname{sen}(10t) - \frac{0,004}{\rho}(\rho^2 - R_1^2).$$

a3) En la zona 3 hay que descomponer la integral para el cálculo del flujo en tres partes y da

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{S_2-S_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_3-S_2} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{S}_3 \right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} [\cos(\omega t)\pi R_1^2 + 8 \times 10^{-3}t(\pi R_2^2 - \pi R_1^2)], \end{aligned}$$

y por tanto

$$E_t = \frac{5R_1^2}{\rho} \operatorname{sen}(10t) - \frac{0,004}{\rho}(R_2^2 - R_1^2).$$

b) Se anula cuando

$$5R_1^2 \operatorname{sen}(\omega t) = 0,004(R_2^2 - R_1^2) \Rightarrow t = \frac{1}{10} \arcsen(2,4 \times 10^{-3}) = 2,4 \times 10^{-4} \text{ s}; 0,31391 \text{ s}; \dots$$

10.10

La Figura 10.10 representa un cilindro hueco metálico muy largo de radio interior R_1 y exterior R_2 , por el que circula una densidad de corriente $\mathbf{j} = C\rho\mathbf{u}_z$. Además existe un campo eléctrico de la forma: $\mathbf{E} = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{u}_z$ para $0 \leq \rho \leq R_1$ y $\mathbf{E} = 0$ para $R_1 < \rho < \infty$. Calcule: a) El campo magnético B_t en las tres regiones. b) Dibuje cualitativamente la gráfica de la amplitud del campo $B_t = B_t(\rho)$.

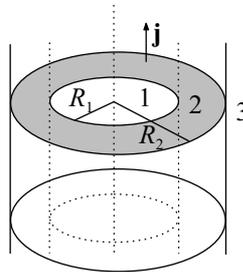


Figura 10.10. Una corriente de densidad \mathbf{j} circula por el cilindro de radio interior R_1 y exterior R_2 , coexistiendo con un campo eléctrico variable con el tiempo en el hueco. Ambos colaboran a crear un campo magnético.

Resolución

a) Este problema es parecido al Problema 10.9 en cuanto a las simetrías, ya que los campos varían con la distancia al eje OZ , pero ahora hay una densidad de corriente con simetría también axial y además un campo eléctrico variable con el tiempo. Ambos detalles nos inducen a intuir la presencia necesaria de un campo magnético. La presencia de tres regiones nítidas de propiedades diferentes obliga a la descomposición de las integrales de superficie en tres partes.

Aplicación de la cuarta ley de Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} .$$

Para cualquier circunferencia con centro en el eje de simetría es

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\mu_0} \oint_c B_t dl = \frac{1}{\mu_0} B_t 2\pi\rho .$$

a1) A través del círculo dentro de la región interior es $I = 0$ y

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} E_0 \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_z \cdot \rho d\theta d\rho \mathbf{u}_z = \varepsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t) \pi \rho^2 .$$

Sustituyendo en la ley resulta

$$B_t = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega \rho \cos(\omega t) .$$

a2) A través de un círculo cuyo contorno está dentro del metal es

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_1}^\rho \int_0^{2\pi} C \rho \mathbf{u}_z \cdot \rho d\theta d\rho \mathbf{u}_z = 2\pi C \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right) ,$$

y

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} E_0 \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_z \cdot \rho d\theta d\rho \mathbf{u}_z = \varepsilon_0 E_0 \omega \cos(\omega t) \pi R_1^2 .$$

Sustituyendo se encuentra

$$B_t = \frac{\mu_0 C \rho^2}{3} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega R_1^2 \cos(\omega t)}{2\rho} - \frac{\mu_0 C R_1^3}{3\rho} .$$

a3) De forma análoga

$$B_t = \frac{2\mu_0 C (R_2^3 - R_1^3) + 3\varepsilon_0 \mu_0 E_0 \omega R_1^2 \cos(\omega t)}{6\rho} .$$

b) Los valores máximos (amplitud) ocurren cuando $\cos(\omega t) = 1$. La gráfica aproximada es la de la Figura 10.11.

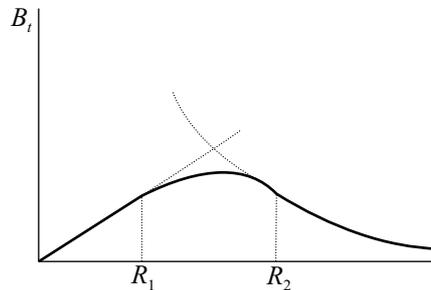


Figura 10.11. Campo magnético creado por el dispositivo de la Figura 10.10.

10.11 En una región del espacio vacío de forma cilíndrico-circular y radio 0,5 m existe un campo magnético. El campo electromagnético tiene por eje de simetría de revolución el eje OZ . El campo magnético es $\mathbf{B} = (Dt^2 + f) \mathbf{u}_z$, siendo t el tiempo, $D = 0,02 \text{ T/s}^2$ y f una función de la distancia ρ al eje. Calcular el campo eléctrico en un punto situado a $\rho = 0,2 \text{ m}$ del eje OZ , en el instante $t = 10 \text{ s}$.

Resolución

Al ser el eje OZ de simetría, las componentes radial, tangencial y longitudinal del campo eléctrico deben ser de igual valor en los puntos de una circunferencia con centro en el eje y radio ρ . La región se supone muy larga en la dirección del eje al no haber limitaciones en su tamaño, luego el flujo a través de un círculo centrado en el eje y situado en un plano perpendicular es independiente de z . Al no haber cargas, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cilíndrica cerrada por sus dos bases es cero, luego el flujo a través de su cara lateral es nulo y por tanto el campo radial es nulo.

El flujo del \mathbf{B} a través de un rectángulo con un par de lados paralelos a OZ es nulo por ser \mathbf{B} longitudinal y por tanto tangente a su superficie, luego la circulación de \mathbf{E} a lo largo de su contorno es nula. Por tanto el campo longitudinal es constante (independiente de la posición), luego se debe atribuir a la componente longitudinal de \mathbf{E} un valor nulo.

La circulación del \mathbf{E} a lo largo de una circunferencia centrada es

$$\oint_{ca} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t 2\pi\rho = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{co} \frac{\partial B}{\partial t} dS = -2Dt\pi\rho^2 \Rightarrow E_t = -Dt\rho = -0,04 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

En el cálculo del flujo se ha tenido en cuenta que el campo magnético y el elemento de área son de la misma dirección y sentido y, como la superficie de integración es fija en el espacio, se han podido permutar las operaciones de derivación y de integración. No obstante tal permutación no es imprescindible.

- 10.12** Resolver el problema anterior pero con el campo magnético $\mathbf{B} = C\rho t^2 \mathbf{u}_z$, donde $C = 0,03 \text{ T}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}^2)$.

Resolución

El problema es parecido al Problema 10.11 pero al estar mezcladas las variables ρ y t en el mismo monomio los resultados cambian. Se consideran figuras circulares en planos paralelos al XOY y centradas en el eje OZ .

Por ser \mathbf{B} de simetría cilíndrica, su flujo a través de una corona circular de radio interior ρ y anchura $d\rho$ es

$$B dS = B 2\pi\rho d\rho = 2\pi C t^2 \rho^2 d\rho \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi C t \int_0^\rho \rho^2 d\rho = -\frac{4}{3}\pi C t \rho^3.$$

Por otra parte, la circulación del campo eléctrico a lo largo de una circunferencia de radio ρ es

$$\oint_{ca} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t 2\pi\rho.$$

Luego, aplicando la segunda ley de Maxwell, Ecuación (10.17), se obtiene

$$E_t = -\frac{2}{3} C t \rho^2 = -0,008 \text{ V/m}.$$

- 10.13** Una estrella de radio inicial R , carga eléctrica total q_0 estalla como consecuencia de las reacciones nucleares que se producen en su interior. Debido a ello, un punto de la superficie exterior se mueve con velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_r$ y una aceleración $\mathbf{a} = a \mathbf{u}_r$, donde \mathbf{u}_r es el vector unitario radial y a es una constante positiva. La densidad de carga es homogénea en cada instante y el medio es de $\varepsilon_r = 1$. Se desea calcular, en el instante t y en los puntos de una superficie esférica que dista R del origen O los valores de \mathbf{E} , \mathbf{j} y \mathbf{B} .

Resolución

De acuerdo con el enunciado, una partícula que estaba inicialmente en la superficie se mueve a partir de la posición $r = R$, con una velocidad inicial v_0 , en dirección radial y con una aceleración a . Aplicando conceptos de cinemática, se obtiene que un punto de la superficie exterior está, en el instante t , a una distancia

$$r = R + v_0 t + at^2/2.$$

La densidad de carga es en ese momento, que es un instante cualquiera, es

$$\rho = \frac{q_0}{V_r} = \frac{3q_0}{4\pi r^3}.$$

La ley de Gauss aplicada a la superficie esférica de radio R da para ese instante t :

$$\int_S \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_r 4\pi R^2 = q_R = \rho V_R = q_0 \frac{R^3}{r^3} \Rightarrow \boxed{E_r = \frac{q_0 R}{4\pi \varepsilon_0 (R + v_0 t + at^2/2)^3}},$$

donde el valor del campo corresponde a los puntos de la superficie esférica de radio R .

Debido a la conservación de la carga, la intensidad a través de la superficie de radio R es igual a la disminución por unidad de tiempo de la carga contenida en su interior, luego la densidad de corriente es

$$j_{Rr} = \frac{I_R}{S_R} = -\frac{1}{S_R} \frac{dq_R}{dt} = -\frac{1}{(4\pi R^2)} \frac{d}{dt} \left[\frac{q_0 R^3}{(R + v_0 t + at^2/2)^3} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{j_{Rr} = \frac{3q_0 R}{4\pi} (v_0 + at)(R + v_0 t + at^2/2)^{-4}}.$$

El vector densidad de corriente es de dirección radial y hacia fuera, supuesto que la carga q_0 es positiva.

Para el campo magnético se deduce por simetría

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S B_r \cdot dS = 4\pi R^2 B_r = 0 \Rightarrow \boxed{B_r = 0}.$$

Igualmente, por simetría

$$\boxed{E_\theta = E_\varphi = j_\theta = j_\varphi = B_\theta = B_\varphi = 0}.$$

Puede comprobarse que el segundo miembro de la cuarta ley de Maxwell, $\mathbf{j} + \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, es nulo. Resulta que el campo magnético que la corriente eléctrica por sí sola produciría es anulado por el campo que produciría el campo eléctrico variable con el tiempo.

10.14 ¿Cuál es la frecuencia básica de la onda emitida por un repetidor de televisión si la longitud de onda en el vacío es de 0,4 m?

Resolución

La velocidad de la luz en el vacío c es una constante universal, de valor aproximado 3×10^8 m/s y la sucesión de relaciones

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{vk}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = 7,5 \times 10^8 \text{ Hz} = 750 \text{ MHz},$$

ha permitido el cálculo.

- 10.15** Demostrar que en un punto del espacio vacío no puede existir el $\mathbf{B} = B_0 \text{sen}[k(x - ct)]\mathbf{u}_z$ sólo. Probar que sí puede existir si está acompañado del $\mathbf{E} = cB_0 \text{sen}[k(x - ct)]\mathbf{u}_y$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Resolución

La derivada del \mathbf{B} propuesto respecto del tiempo no es nulo, en cambio, si \mathbf{E} es nulo su rotacional es cero, con lo cual no se verifica la ley de inducción. Si el \mathbf{B} dado está acompañado del \mathbf{E} del enunciado, para estos campos se verifica: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ se deduce directamente del valor del campo eléctrico propuesto, estando de acuerdo con la primera ley de Maxwell al no haber cargas. De las expresiones del enunciado para el campo eléctrico y para el campo se obtienen las siguientes dos igualdades:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{u}_z = kcB_0 \cos[k(x - ct)] \mathbf{u}_z, \\ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{\partial (B_z \mathbf{u}_z)}{\partial t} = kcB_0 \cos[k(x - ct)] \mathbf{u}_z, \end{aligned} \right\}$$

luego se cumple la segunda ecuación básica al ser idénticos los segundos miembros de ambas cantidades. Del valor de \mathbf{B} también se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, luego se cumple la tercera ley básica. Igualmente son calculadas las cantidades:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{u}_y = -kB_0 \cos[k(x - ct)] \mathbf{u}_y, \\ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial (E_y \mathbf{u}_y)}{\partial t} = -kB_0 \cos[k(x - ct)] \mathbf{u}_y, \end{aligned} \right\}$$

luego se cumple la cuarta ecuación básica, como se comprueba al observar la igualdad de ambos segundos miembros. Como el campo electromagnético cumple todas las ecuaciones de Maxwell, es un campo que puede existir en la Naturaleza.

- 10.16** Una onda electromagnética plana cuya expresión es: $E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$, $E_y = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi)$, $E_z = 0$ donde son datos E_0 , φ y ω , se propaga en un medio no magnético y dieléctrico de permitividad relativa ε_r conocida. 1º) Calcular la expresión del campo magnético \mathbf{B} . 2º) Dibujar la figura descrita por el extremo del vector \mathbf{E} , en el punto z , vista desde el punto $(0, 0, z')$ con $z' > z$, cuando $\varphi = \pi/2$. 3º) Idem si $\varphi = -\pi/2$.

Resolución

Teniendo en cuenta la Ecuación (10.34) entre el campo \mathbf{E} y el campo \mathbf{B} en una onda electro-magnética resulta

$$\mathbf{B} = \frac{E_0 k}{\omega} [-\cos(kz - \omega t + \varphi)] \mathbf{u}_x + \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_y .$$

Los dibujos pedidos aparecen en la Figura 10.12. En el primero se dice que la onda está polarizada a izquierdas y en el segundo a derechas. Para probarlo basta tomar un valor concreto de z , por ejemplo el sencillo $z = 0$, adjudicar a φ el primer valor $\varphi = \pi/2$ y a t el valor inicial $t = 0$. Con ello resulta $E_x = E_0$ y $E_y = 0$ y el vector campo eléctrico yace a lo largo del eje OX de la figura en el instante inicial. Cuando transcurre un tiempo pequeño, el ángulo $kz - \omega t$ es pequeño pero negativo, por lo que E_x se hace menor que E_0 . En cambio, $kz - \omega t + \pi/2$ resulta un poco menor de $\pi/2$ con lo que su coseno es pequeño en valor absoluto y positivo, luego E_y es un poco mayor que cero. Con ello el vector ha girado hacia la izquierda. Idéntico razonamiento con el valor $\varphi = -\pi/2$ demuestra un giro hacia la derecha.

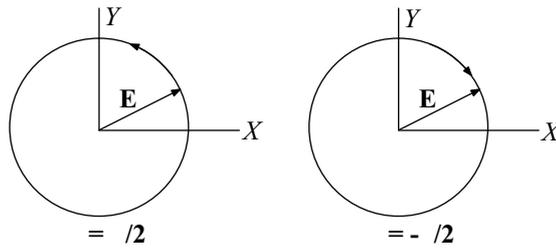


Figura 10.12. Si un observador ve una onda que se dirige hacia él girando el campo eléctrico como en la figura de la izquierda, dice que está polarizada circularmente a izquierdas. En el caso de la otra figura se dice polarizada a derechas.

10.17 Dos discos metálicos iguales, de diámetro $D = 6$ m, distan $L = 2$ mm y forman un condensador ideal. Se cargan con $q_0 = 0,001$ C y luego se conectan a una resistencia de $R = 2$ M Ω . Determinar el campo magnético en un punto del plano medio de los discos y distante $r = 1$ mm de la recta que une los centros de tales discos, al cabo de $t = 1$ s de haber conectado la resistencia.

Resolución

Por consideraciones electrostáticas, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es $V = q/C$ y también por consideraciones casi electrostáticas la tensión entre los extremos de la resistencia es $V = RI$, por tanto $RI = q/C$. Por conservarse la carga eléctrica $I = -dq/dt$. Luego

$$-R \frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow V = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow E = \frac{V}{L} = \frac{q_0}{CL} e^{-\frac{t}{RC}},$$

donde se ha considerado el campo eléctrico entre las armaduras homogéneo. Una circunferencia (ca) de radio r y centrada entre las placas no abarca corriente eléctrica, luego la cuarta ecuación de Maxwell aplicada a ella da

$$\oint_{ca} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{co} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \frac{q_0}{CL} e^{-\frac{t}{RC}} 2\pi r dr = -\frac{\epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 q_0}{RC^2 L} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$

$$B = -\frac{\epsilon_0 \mu_0 r q_0}{2RC^2 L} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Por tanto, mirando desde el centro de la armadura positiva hacia la negativa, la flecha que representa el campo \mathbf{B} en la circunferencia tiene sentido antihorario.

Como la capacidad del condensador es $C = \epsilon_0 S/L$, sustituyendo los datos en la ecuación anterior resulta para el módulo del campo

$$B = 1,63 \times 10^{-9} \text{ T}.$$

La solución encontrada es sólo aproximada. En efecto, el campo magnético variable induce un campo eléctrico que hay que sumar al calculado. Este campo eléctrico producirá un campo magnético y así sucesivamente. Al final tanto el \mathbf{E} como el \mathbf{B} calculados verificarán todas las ecuaciones de Maxwell y la conservación de la carga eléctrica.

10.18 Con fines de prospección geofísica se lanza, desde un helicóptero y hacia abajo, una onda electromagnética plana, de frecuencia 2 MHz, amplitud 210 V/m y polarizada linealmente. Se sabe que el terreno es asimilable a una capa dieléctrica de $\epsilon_{r1} = 4$ y de profundidad $h = 18,75$ m, estando esta capa sobre otra muy profunda y de $\epsilon_{r2} = 25$. Supóngase que vuelven al helicóptero solamente las dos ondas siguientes: la reflejada por la primera interfase y la reflejada por primera vez en la segunda. Calcular las amplitudes de la 1ª y de la 2ª.

Resolución

El ángulo de incidencia es nulo luego el de reflexión y el de refracción también son nulos. La velocidad de la onda en el medio 1, aire, es aproximadamente $v_1 = c$, en el medio 2, primera capa, es

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} = \frac{c}{2},$$

y en la segunda, medio 3,

$$v_3 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{c}{5}.$$

La reflectancia en la interfase 1-2 es según la Ecuación (10.40)

$$R \equiv \frac{E'_{0r}}{E_0} = \frac{\cos \theta_i - \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r}{\cos \theta_i + \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3},$$

y la transmitancia 1-2 es según la Ecuación (10.39)

$$T \equiv \frac{E_{0r}}{E_0} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{v_1}{v_2} \cos \theta_r} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

Para 2-3

$$R = \frac{\cos \theta_i - \frac{v_2}{v_3} \cos \theta_r}{\cos \theta_i + \frac{v_2}{v_3} \cos \theta_r} = \frac{1-5/2}{1+5/2} = -\frac{3}{7}.$$

Para la 2-1

$$T = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{v_2}{v_1} \cos \theta_r} = \frac{2}{1+1/2} = \frac{4}{3}.$$

Los signos menos indican el cambio de sentido del campo eléctrico. La Figura 10.13 representa gráficamente las variaciones de amplitud. Se han dibujado las flechas más gruesas para los campos de mayor valor de su amplitud. La onda incidente de amplitud E_0 es reflejada con una amplitud de un tercio y la onda refractada tiene una amplitud dos tercios. Esta segunda onda es reflejada con una amplitud de tres séptimos, etc. Los resultados son 70,0 V/m y 80,0 V/m.

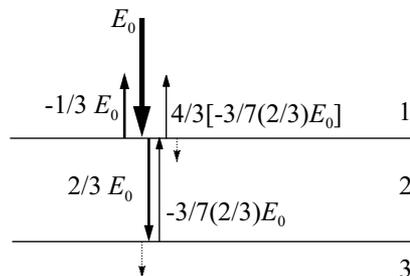


Figura 10.13. Una onda electromagnética se propaga en el medio 1 hacia abajo. En las reflexiones y refracciones producidas el campo eléctrico va variando de amplitud.

10.19 Teniendo en cuenta la relación (1.37) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ y obligando a que los potenciales vector \mathbf{A} y escalar V verifiquen la ecuación $(1/c^2)(\partial V/\partial t) + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, calcule $\nabla^2 \mathbf{A}$ y $\nabla^2 V$ a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Resolución

Aplicando las Ecuaciones (1.37), (10.26), y (10.11), un cálculo rutinario de cierta complejidad conduce a los siguientes resultados:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} .$$

$$\nabla^2 V \equiv \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \left(-\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} .$$

Nótese que en las expresiones anteriores aparecen las magnitudes electromagnéticas densidad de carga, densidad de corriente, potencial vector y potencial escalar. La aplicación de dichas fórmulas permiten también la solución de los problemas electromagnéticos.

10.20 El potencial vector es $\mathbf{A} = \mathbf{u}_y B_0/k \text{sen}(kx + kct)$ en el espacio vacío, donde $B_0 = 0,0002 \text{ T}$, $k = 2 \text{ rad/m}$ y c la velocidad de la luz, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. El campo eléctrico es $\mathbf{E} = \mathbf{u}_y E_0 \cos(kx + kct)$. Calcular E_0 y la diferencia de potencial escalar entre el punto $(0, 4 \text{ m}, 0)$ y el origen de coordenadas, en el instante $t = 5 \times 10^{-6} \text{ s}$.

Resolución

La rapidez con que varía \mathbf{A} con el tiempo es

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = B_0 c \cos(kx + kct) \mathbf{u}_y .$$

De la ecuación que define \mathbf{A} resulta

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_0 \text{sen}(kx + kct)/k & 0 \end{vmatrix} = B_0 \cos(kx + kct) \mathbf{u}_z .$$

Como del campo eléctrico propuesto se obtiene que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \cos(kx + kct) & 0 \end{vmatrix} = -E_0 k \text{sen}(kx + kct) \mathbf{u}_z ,$$

y de la ley de inducción se deduce que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 k c \text{sen}(kx + kct) \mathbf{u}_z ,$$

igualando ambas expresiones resulta $E_0 = -B_0 c = -6,0 \times 10^4 \text{ V/m}$ y también $\mathbf{E} = -B_0 c \cos(kx + kct) \mathbf{u}_y$. De la definición de d.d.p. escalar

$$\begin{aligned} V_P - V_0 &= -\int_0^P \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^4 \left(E_y + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right)_{x=0, z=0} dy \\ &= -\int_0^4 [-B_0 c \cos(k \cdot 0 + kct) + B_0 c \cos(k \cdot 0 + kct)] dy = 0 . \end{aligned}$$

Al sustituir los valores del enunciado en la expresión de la frecuencia angular $\omega = kc$ resulta un valor muy alto debido al valor tan elevado de la velocidad de la luz en el vacío. Por tanto el problema dista mucho de ser un problema electrostático y no cabe aplicar otra fórmula para la diferencia de potencial.

10.21 Se considera un solenoide ideal muy largo de radio R , en el vacío con n vueltas por unidad de longitud. Si circula por el solenoide una intensidad de corriente I constante, se pide: 1°) A partir de las ecuaciones de Maxwell demostrar cuál es el valor del vector \mathbf{B} en todos los puntos, tanto interiores como exteriores. 2°) Determinar el potencial vector (A_t) en dichos puntos. 3°) Representar gráficamente los valores obtenidos en los apartados anteriores en función de la distancia del eje.

Resolución

1°) Como nada depende del tiempo es un problema de magnetostática. No obstante, las ecuaciones de Maxwell son perfectamente aplicables tanto a fenómenos estáticos como no estáticos, por eso se van a utilizar en el cálculo de los campos.

Flujo de \mathbf{B} a través de una caja cilíndrica, Figura 10.14,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{lat}}} B_r dS_{\text{lat}} + \int_{S_{\text{bas,sup}}} B_l dS_{\text{base}} - \int_{S_{\text{bas,inf}}} B_l dS_{\text{base}} = \int_{S_{\text{lat}}} B_r dS_{\text{lat}} = 0 \Rightarrow \boxed{B_r = 0},$$

tanto en el interior como en el exterior.

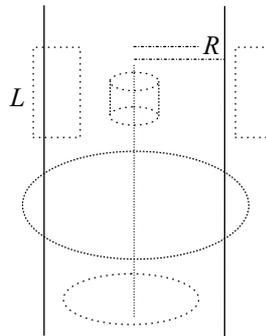


Figura 10.14. Una corriente eléctrica por un solenoide cilíndrico origina un campo magnético y un potencial vector calculables circulando por las líneas dibujadas.

Circulación de \mathbf{B} a lo largo de una circunferencia concéntrica con el eje del solenoide y situada en un plano perpendicular a dicho eje,

$$\oint_{ca} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{co} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \boxed{B_t = 0}, \text{ en el exterior y en el interior.}$$

Circulación a lo largo de un rectángulo exterior,

$$\oint_{rec} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow B_l \text{ independiente de } \rho \Rightarrow \boxed{B_l = 0}, \text{ fuera.}$$

Ídem con un lado dentro y otro fuera,

$$\oint_{rec} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{lint}} B_l dl + \int_{\text{l ext}} 0 dl = B_l L = \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 NI \Rightarrow \boxed{B_l = \mu_0 n I}, \text{ dentro.}$$

2°) Teorema de Gauss en circunferencia que abarca al solenoide,

$$\oint_{ca} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{co} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{co} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \boxed{A_t = \frac{\mu_0 n I R^2}{2\rho}}, \text{ fuera.}$$

Ídem en el interior,

$$\oint_{ca} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_t 2\pi\rho = \int_{co} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \boxed{A_t = \frac{\mu_0 n I \rho}{2}}.$$

3º) La Figura 10.15 representa el campo magnético y el potencial vector. Nótese cómo el campo magnético es constante dentro del solenoide y nulo en el exterior. En cambio el potencial vector aumenta linealmente con la distancia al eje a partir de un valor nulo y decae hiperbólicamente en el exterior.

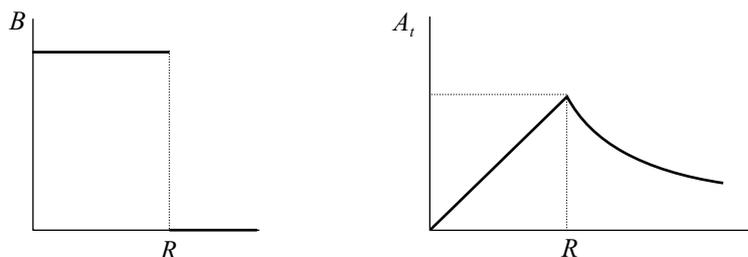


Figura 10.15. Campo magnético y del potencial vector en función de la distancia al eje del solenoide.

- 10.22** En una región del espacio los potenciales vector \mathbf{A} y escalar V tienen las expresiones $\mathbf{A} = C_1 t(z^2 \mathbf{u}_x + x^2 \mathbf{u}_y + y^2 \mathbf{u}_z)$ y $V = C_2(x^2 y + z^2 x + y^2 z)$, siendo C_1 y C_2 constantes conocidas. Calcular las densidades de carga ρ y de corriente \mathbf{j} en dicha región.

Resolución

De la relación entre \mathbf{E} y los potenciales escalar y vectorial se obtiene

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\{[C_2(2xy + z^2) + C_1 z^2] \mathbf{u}_x + [C_2(x^2 + 2yz) + C_1 x^2] \mathbf{u}_y + [C_2(2zx + y^2) + C_1 y^2] \mathbf{u}_z\} .$$

Sustituida en la ley de Gauss da

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -2C_2 \varepsilon_0 (x + y + z) .$$

Por otra parte de la definición de potencial vector se deduce que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 2C_1 t (y \mathbf{u}_x + z \mathbf{u}_y + x \mathbf{u}_z) .$$

Sustituyendo los valores calculados para \mathbf{E} y \mathbf{B} en la ley de Maxwell-Ampère resulta

$$\mathbf{j} = -\frac{2C_1 t}{\mu_0} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z) .$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 10.23** Un rayo de luz monocromática incide desde el vacío sobre vidrio ($n = 1,5$), con un ángulo de incidencia de 60° y polarizado paralelamente a la interfase. Calcular la transmitancia de amplitudes.

Solución: $\theta_r = 35,26^\circ \Rightarrow T = 0,58$.

- 10.24** 1º) Recordando el valor de la densidad de energía eléctrica en un medio isotrópico y lineal $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}/2$ y su valor en un campo magnético, obtener la expresión de la densidad de energía donde existe un campo electromagnético. 2º) Sabiendo que la intensidad de una onda es la potencia que atraviesa una superficie perpendicular a la dirección de propagación, por unidad de área, expresar la intensidad de una onda.

Solución: 1º) εE^2 , 2º) $\varepsilon E^2 / (\varepsilon \mu)^{1/2}$.

- 10.25** Dos antenas de televisión están situadas sobre un plano horizontal y separadas por la distancia a . Las antenas emiten ondas polarizadas verticalmente y van a ser detectadas a grandes distancias de ambas, de modo que el campo eléctrico detectado debido a una de ellas actuando por separado es $E_1 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t)$ y el debido a la otra antena $E_2 = E_0 \cos(kr_2 - \omega t)$, donde r_1 y r_2 son las distancias respectivas al receptor. 1º) Deduzca la diferencia de fase entre las dos señales recibidas. 2º) Contando el ángulo a partir de la horizontal que es mediatriz del segmento que une las antenas, calcule el ángulo mínimo en cuya dirección no se recibe ninguna señal.

Solución: 1º) $\delta = k(r_2 - r_1) = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda \approx 2\pi a \sin \theta / \lambda$, 2º) $\theta = \arcsen(\lambda/2a)$.

ALGUNAS APLICACIONES A LA INGENIERÍA

11

11.1 La Figura 11.1 muestra un dispositivo utilizado para la medida precisa de capacidades y que se aplica también a la medida de permitividades dieléctricas. El montaje permite determinar C_2 de un condensador, conocida la capacidad C_1 de otro patrón. Inicialmente el interruptor I está abierto y el voltímetro V puentado. Posteriormente, se retira el puente y se cierra el interruptor, produciéndose una corriente continua por el circuito $ABGA$. Moviendo el cursor X sobre el hilo de sección uniforme AB , se llega a una posición en la que el voltímetro no indica diferencia de potencial. Demostrar que, en esta posición,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{l_2}{l_1},$$

relación que permite determinar C_1 midiendo las longitudes l_1 y l_2 y conociendo C_2 .

¿Como utilizaría este dispositivo para la medida de permitividades dieléctricas?

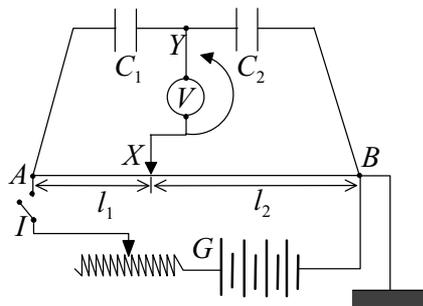


Figura 11.1. Dispositivo medidor de capacidades y de permitividades dieléctricas relativas.

Resolución

Cuando el interruptor está abierto no hay ninguna corriente en el circuito y los condensadores están descargados por la conexión a tierra. Así, al retirar el puente, el voltímetro no señala ninguna diferencia de potencial entre X y Y . Al cerrar el interruptor, se produce una corriente continua a lo largo del circuito $ABGA$, y una corriente inicial hacia los condensadores, hasta el momento en que quedan cargados.

Por un lado, si la intensidad que recorre el circuito es i , las diferencias de potencial entre A y

X , y entre X y B , son, de acuerdo con la ley de Ohm,

$$V_A - V_X = R_1 i = \eta \frac{l_1}{S} i, \quad V_X - V_B = R_2 i = \eta \frac{l_2}{S} i,$$

donde η es la resistividad del hilo y S su sección. De la expresión anterior, se tiene

$$\frac{V_A - V_X}{V_X - V_B} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (11.1)$$

es decir, el cociente entre las caídas de tensión entre dos trozos del hilo es igual al cociente entre sus longitudes.

Por otro lado, como los condensadores están conectados en serie, sus cargas son iguales, es decir, $+q$ y $-q$ en el primero, y $+q$ y $-q$ en el segundo. La diferencia de potencial entre sus armaduras se puede escribir entonces como

$$V_A - V_Y = \frac{q}{C_1}, \quad V_Y - V_B = \frac{q}{C_2},$$

de donde

$$\frac{V_A - V_Y}{V_Y - V_B} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (11.2)$$

Si la situación del cursor X es tal que el voltímetro no indica diferencia de potencial, es decir, $V_X = V_Y$, entonces, de las Ecuaciones (11.1) y (11.2), se tiene el resultado buscado,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

que permite una sencilla determinación experimental de C_1 .

Basándose en el resultado anterior, el mismo dispositivo permite determinar permitividades dieléctricas. Supóngase que se dispone de dos condensadores iguales excepto por el dieléctrico entre sus armaduras. Como la capacidad de un condensador es siempre proporcional a la permitividad relativa de su dieléctrico, se tendrá,

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_{r,1}}{\varepsilon_{r,2}}.$$

Si estos dos condensadores se introducen en el dispositivo de la Figura 11.1, entonces $\varepsilon_{r,1}/\varepsilon_{r,2} = l_2/l_1$, lo cuál permite determinar la razón entre sus permitividades. Si además el condensador C_2 no tiene dieléctrico (en la práctica, aire), obtenemos

$$\varepsilon_{r,1} = \frac{l_2}{l_1},$$

para la permitividad relativa del dieléctrico del condensador.

Este resultado se puede aplicar con generalidad: todo dispositivo que permite determinar capacidades puede ser usado para determinar permitividades dieléctricas. El procedimiento es sencillo cuando el dieléctrico puede moldearse para llenar un condensador, como en el caso de líquidos y la mayoría de los sólidos. Cuando no, como en el caso de polvos o sólidos en trocitos pequeños, puede resolverse el problema de la siguiente manera. Se rellena el condensador 1 con una solución de dos líquidos de permitividades dieléctricas muy diferentes, de modo que variando su concentración relativa, varía también su permitividad. Se rellena el condensador 2 con la misma solución conteniendo los trocitos del dieléctrico sólido. Cuando sus capacidades sean iguales ($l_1 = l_2$), significa que la permitividad dieléctrica de la solución es igual a la permitividad dieléctrica del sólido. Basta entonces medir, como se ha explicado antes, la capacidad de cualquiera de los dos para determinar la permitividad del sólido.

- 11.2** La Figura 11.2 esquematiza un dispositivo utilizado para la medida de cargas muy pequeñas, incluso elementales, y que se basa en el uso de un condensador plano-paralelo. En el experimento que se describe, se conocen los siguientes datos y se obtuvieron las siguientes medidas. La separación entre las armaduras del condensador es $d = 0,01$ m. Por un pequeño orificio en la armadura superior, entran gotitas de aceite, de densidad $\rho = 0,6$ kg/m³, obtenidas por pulverización y cargadas en este proceso o por irradiación por rayos X. Entre las armaduras hay aire, cuya viscosidad es $\eta = 0,00018$ Nsm⁻². Cuando entre las armaduras del condensador no hay ninguna diferencia de potencial, se observa (con un microscopio) que las gotitas caen a una velocidad de régimen estacionario $v = 0,0012$ ms⁻¹. Si se ajusta la diferencia de potencial a $V = 103,2$ V, se observa que las gotitas quedan en suspensión. Se pretende determinar la carga q de las gotitas. Ayuda: la fricción de las gotitas esféricas con el aire viene dada por la fórmula de Stokes $F = 6\pi\eta r v$, siendo r el radio de las gotitas.

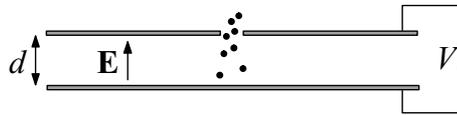


Figura 11.2. Dispositivo para la medida de cargas eléctricas muy pequeñas.

Resolución

Cuando las gotitas de aceite caen bajo la acción de su propio peso (hacia abajo), la fuerza electrostática (hacia arriba) y el rozamiento con el fluido (hacia arriba), tras una aceleración inicial, se alcanza una velocidad límite o de régimen estacionario. Dicha velocidad se determina por la condición de que se cancelen todas las fuerzas, es decir,

$$-mg + qE + 6\pi\eta r v = 0,$$

donde m es la masa de las gotitas y E el campo eléctrico entre las armaduras, dado por $E = V/d$.

Si la diferencia de potencial V es tal que la partícula queda suspendida ($v = 0$), se tendrá,

$$-mg + qE = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{mg}{E} = \frac{mgd}{V}. \quad (11.3)$$

Determinando la masa m de las gotas, y conocidas todas las demás magnitudes, es posible determinar su carga.

Para determinar la masa se realiza el experimento sin diferencia de potencial, observándose la caída de las gotas a velocidad constante v . En este caso se tiene

$$-mg + 6\pi\eta r v = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + 6\pi\eta r v = 0,$$

de donde el radio de las gotas es

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} = 1,28 \times 10^{-5} \text{ m},$$

y por tanto su masa vale

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 1,16 \times 10^{-11} \text{ kg}.$$

De la Fórmula (11.3), se obtiene entonces

$$q = 5,07 \times 10^{-15} \text{ C}.$$

Experimentos más precisos en aire enrarecido y en condiciones controladas de presión y temperatura permiten determinar cargas mucho más pequeñas, como hizo Millikan en su famoso experimento. En él, se observó que todas las cargas medidas eran múltiplos (entre 5 y 20) de la carga elemental $1,602 \times 10^{-19}$ C, lo que puso de manifiesto por primera vez la cuantificación de la carga eléctrica.

- 11.3** Una línea que conduce una corriente continua tiene 4.5 km de longitud y 3 ohmios de resistencia. Esta línea, por un mal aislamiento, tiene una derivación a tierra, de modo que la corriente en la entrada es de 20 amperios y en la salida 16. La tensión en la entrada es de 230 voltios y a la salida 214. ¿Dónde se ha producido la avería y cuál es la resistencia de la derivación a tierra?

Resolución

Como puede observarse por el enunciado del problema, mediante la ayuda de un amperímetro y un voltímetro puede detectarse el punto de fallo en una red eléctrica. Para ello considérese el esquema de la Figura 11.3, correspondiente a la línea problema. La resistencia R_f representa la resistencia de la derivación a tierra en el punto de la avería. Este punto divide a la línea, supuesta de longitud L , en dos tramos de longitudes x y $L-x$. El punto de conexión a tierra está a 0 V, siendo V_1 la tensión de entrada de 230 V y V_2 la de salida de 214 V.

Las resistencias de la línea y de los tramos de longitud x y $L-x$ son, aplicando la expresión de la resistencia de un conductor filiforme, respectivamente

$$R = \rho \frac{L}{S}; \quad R_x = \rho \frac{x}{S}; \quad R_{L-x} = R - R_x = \rho \frac{L-x}{S},$$

siendo ρ la resistividad del conductor y S la sección de la línea. La intensidad de fuga se determina fácilmente, teniendo en cuenta que en el punto de fallo se cumple la ley de nudos, que según la figura resulta

$$I_1 = I_2 + I_f.$$

Sustituyendo los valores se obtiene

$$I_1 = 20 \text{ A}; \quad I_2 = 16 \text{ A}; \quad I_f = I_1 - I_2 = 4 \text{ A}.$$

Aplicando la ley de Ohm entre el punto a tensión V_1 y tierra, teniendo en cuenta las intensidades de la figura, resulta

$$V_1 - 0 = R_x I_1 + R_f I_f, \quad (11.4)$$

y entre el punto a tensión V_2 y tierra,

$$V_2 - 0 = -(R - R_x) I_2 + R_f I_f, \quad (11.5)$$

dado que en este caso la corriente de intensidad I_2 es contraria al sentido de circulación escogido (de V_2 a tierra). Restando ambas ecuaciones queda

$$V_1 - V_2 = R_x(I_1 - I_2) + R I_2 \Rightarrow R_x = \frac{V_1 - V_2 - R I_2}{I_1 - I_2} = \frac{230 - 214 - 0,5 \times 16}{20 - 16} = 2 \Omega.$$

Dividiendo las expresiones dadas para R_x y R se obtiene

$$\frac{R_x}{R} = \frac{x}{L} \Rightarrow x = L \frac{R_x}{R} = 4500 \frac{2}{3}.$$

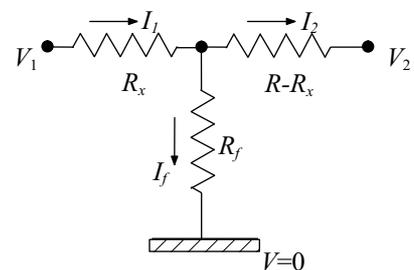


Figura 11.3. Derivación a tierra en una línea.

Por tanto

$$x = 3000 \text{ m .}$$

Es decir la avería está a tres kilómetros del punto inicial.

El valor de la resistencia de fuga se puede determinar despejando en cualquiera de las dos expresiones de la ley de Ohm (11.4) o (11.5), resultando

$$R_f = \frac{V_1 - R_x I_1}{I_f} = \frac{230 - 2 \times 20}{4} = 47,5 \Omega .$$

$$R_f = 47,5 \Omega .$$

- 11.4** a) Determinar a qué diferencia de potencial puede estar sometida una persona sin sufrir ningún riesgo de electrocución. b) Si se necesita manipular un cable de 380 V, ¿qué resistencia de protección R_p se debe utilizar?

Resolución

a) El problema que se plantea tiene que ver con la seguridad en el trabajo en lo referente a riesgo eléctrico. Si se aplica la ley de Ohm, la diferencia de potencial a la que puede estar sometido el cuerpo humano viene dado por

$$V_A - V_B = R_h I ,$$

siendo R_h la resistencia del cuerpo humano e I la intensidad que recorre el mismo.

Seguindo la normativa española sobre riesgo eléctrico, la norma UNE-20572 indica que el límite a partir del cual pueden existir riesgos fisiológicos peligrosos viene dado por la curva

$$I = I_1 + 10/t ,$$

siendo I la intensidad que recorre el cuerpo humano en mA, $I_1 = 10$ mA y t el tiempo de contacto en segundos. Esto indica que el cuerpo humano es capaz de resistir sin ningún riesgo 10 mA, sea cual sea el tiempo de duración del contacto. En la práctica, corrientes de 20 mA pueden considerarse como no peligrosas, dado que la persona puede soltarse en un tiempo suficientemente breve como para no sufrir ningún daño apreciable.

En lo referente a la resistencia del cuerpo humano, su valor depende fundamentalmente de la trayectoria de la corriente, del grado de humedad de la piel y de la tensión a la que esté sometido, al margen de los diferentes elementos que puede llevar una persona, especialmente en los puntos de contacto, y que pueden alterar dichos valores: guantes, calzado aislante, presencia de suciedad...

En la referente a la trayectoria de la corriente, se suele normalizar la resistencia del cuerpo humano desde la mano hasta el pie, considerándose éstos como los puntos de contacto a diferente potencial.

La resistencia del cuerpo humano disminuye considerablemente con la humedad. Normalmente suelen considerarse cuatro estados de la piel: completamente seca, húmeda, mojada o sumergida.

El cuerpo humano varía su resistencia en función de la tensión aplicada, disminuyendo a medida que la tensión aumenta.

La norma UNE-20572 da ciertos valores para la resistencia en función de la tensión, que corresponden a las condiciones de trabajo en obra, esto es, piel húmeda. Dichos valores son los siguientes:

Tensión (V)	Resistencia (Ω)
≤ 25	2500
50	2000
250	1000
Asíntota	650

entendiéndose como “asíntota” el valor al que tiende la resistencia del cuerpo humano para valores de tensión elevados.

Aplicando la ley de Ohm, considerando como valor de resistencia del cuerpo humano $1000\ \Omega$, resulta que la d.d.p. máxima admisible entre mano y pie para una corriente soportable de 10 mA es,

$$V_A - V_B = R_h I = 10\ \text{V} .$$

Pero para esa tensión se debería haber tomado como resistencia $2500\ \Omega$, según la tabla anterior, lo que conduce a una tensión soportable de

$$V_A - V_B = R_h I = 25\ \text{V} .$$

Teniendo en cuenta estos cálculos, se tiene una explicación al hecho de que se tome 24 V como la tensión de seguridad en obra.

b) Si se desea manipular un cable a tensión de 380 V, sabiendo que la corriente máxima sin riesgo es de 10 mA, resulta que la resistencia total que debe existir entre el cable y el punto de contacto con tierra (0 V) es, a partir de la ley de Ohm,

$$R = (V_A - V_B)/I = 380/10 = 38\ \text{k}\Omega ,$$

recordando que con la intensidad en mA, la resistencia se obtiene en $\text{k}\Omega$. Esa resistencia total es la suma de la resistencia del cuerpo humano y la resistencia de protección, que se comportan como una asociación en serie. Dado que, como se ha deducido en el apartado anterior, entre los puntos de contacto de la persona sólo puede existir una d.d.p. de 25 V (para la cual la resistencia del cuerpo humano es $2500\ \Omega = 2,5\ \text{k}\Omega$), resulta que la resistencia de protección es $R_p = R - R_h = 35,5\ \text{k}\Omega$.

- 11.5** Con motivo de la muerte por electrocución de una persona al entrar en contacto con un andamio accidentalmente puesto a tensión, en un artículo de prensa se leía lo siguiente: “... el andamio está instalado de forma irregular, puesto que *abraz*a a una farola del alumbrado público, a modo de anclaje. Pero la instalación de la farola falló y tuvo una fuga de electricidad que cargó de corriente la estructura. La lluvia que caía a esas horas de la noche del pasado viernes propició la fatalidad... La noche del accidente, los bomberos midieron con un voltímetro la carga de los barrotes instantes después de la electrocución: 220 voltios. Cuando se cortó la energía del alumbrado en la zona, la corriente en los barrotes bajó a 50 voltios.” a) Analizar los errores que el artículo comete desde el punto de vista eléctrico. b) Dar una explicación a los valores medidos por el voltímetro. c) Explicar los motivos de la electrocución y si los riesgos hubieran continuado tras la desconexión, tanto en un día seco como lluvioso. d) Analizar cómo minimizar los riesgos de electrocución en todo el proceso.

Resolución

a) Ni la carga de los barrotes ni la corriente en los barrotes se determinan con un voltímetro. Lo que se está midiendo con el voltímetro es la diferencia de potencial del andamio respecto de tierra.

b) Los 220 V que el voltímetro mide cuando está conectada la corriente coincide con la tensión a la que está la farola. Para ello debe recordarse que dos conductores puestos en contacto están al mismo potencial, en este caso el potencial de 220 V de una fase de la red eléctrica. Al desconectar de la red eléctrica, la tensión no bajó a 0 V porque el andamio no estaba conectado a tierra, comportándose como un conductor aislado y cargado. La carga que adquirió mientras estaba conectado es la que produce esa d.d.p. de 50 V. Si hubiera estado conectado a tierra, el andamio se hubiera descargado y la tensión hubiera descendido hasta 0 V.

c) Al contactar una persona con el andamio, se establece una corriente eléctrica entre el punto de contacto y el suelo por estar a diferente potencial. Considerando la resistencia del cuerpo humano

de $1000\ \Omega$ en mojado, aplicando la ley de Ohm puede determinarse la corriente que atraviesa el cuerpo humano:

$$I = (V_A - V_B)/R = 220/1000 = 220\ \text{mA} ,$$

valor muy superior a la corriente sin riesgo eléctrico de $10\ \text{mA}$, lo que explica la muerte por electrocución del accidentado. Sin embargo no es correcto indicar que la lluvia fuera la que propició la fatalidad, puesto que si el día hubiera sido seco, la resistencia del cuerpo humano puede considerarse de $2500\ \Omega$, lo que conduce a una corriente de

$$I = (V_A - V_B)/R = 220/2500 = 88\ \text{mA} ,$$

también suficientemente elevada como para haber producido la electrocución.

Después de la desconexión, el andamio quedaba a $50\ \text{V}$, lo que en el caso de lluvia habría supuesto una corriente de

$$I = (V_A - V_B)/R = 50/1000 = 50\ \text{mA} ,$$

con riesgo de electrocución dependiendo del tiempo de contacto. Hay que observar que esta corriente sólo es la inicial, decreciendo con el tiempo: al no estar ya el andamio conectado a la fuente de tensión, esta corriente estaría descargándolo. Si el día hubiera sido seco, la corriente inicial habría sido

$$I = (V_A - V_B)/R = 50/2500 = 20\ \text{mA} ,$$

perfectamente soportable.

d) Por supuesto, lo primero que debería haberse hecho era respetar la normativa que impide que el andamio esté anclado a la farola, con lo que nunca habría estado a la tensión de $220\ \text{V}$. Pero pueden hacerse algunas consideraciones adicionales sobre el procedimiento seguido: el andamio debería haberse conectado a tierra, para que una vez retirada la tensión, no hubiese ningún riesgo de electrocución, como se ha visto que aún existía. Si se hubiera conectado a tierra, el andamio se hubiera descargado inmediatamente a través de esa conexión. Esa conexión a tierra hubiera servido también para descargar el andamio ante cualquier otra carga accidental (por ejemplo, por una tormenta).

También puede indicarse que si el andamio hubiera sido de madera y no metálico, no hubiese existido riesgo eléctrico, al ser la madera un material aislante. Lo mismo puede decirse respecto a la persona: si hubiese ido provista de guantes o de calzado aislante, posiblemente no se hubiese electrocutado.

11.6 Un diferencial es un dispositivo que se emplea para la protección de las personas ante contactos indirectos, esto es, ante el contacto con una parte conductora de una instalación que en principio no tenía que estar en tensión, pero que accidentalmente se ha puesto en tensión. El diferencial corta la corriente de la instalación en un tiempo inferior a $20\ \text{ms}$, cuando por el cable de la fase (R) pasa una corriente superior a la que recorre el cable del neutro (N) en una cantidad igual o superior a su corriente de corte. Justificar los valores que deben emplearse en la resistencia de la toma de tierra de una instalación, según se emplee un diferencial de sensibilidad $30\ \text{mA}$ o $300\ \text{mA}$.

Resolución

Según el reglamento electrotécnico de baja tensión, la puesta o conexión a tierra es la unión eléctrica directa, sin fusibles ni protección alguna, de una parte del circuito eléctrico o de una parte conductora no perteneciente al mismo mediante una toma de tierra con un electrodo o grupo de electrodos enterrados en el suelo. Con la puesta a tierra se pretende que en el conjunto de instalaciones, edificios y superficie próxima al terreno no aparezcan diferencias de potencial peligrosas y que a su vez permita el paso a tierra de corrientes de defecto o de descargas atmosféricas. El esquema del circuito de puesta a tierra es el de la Figura 11.4(a). Cuando el receptor se pone a tensión debido a un fallo eléctrico, se establece una corriente I_d a través de la toma de tierra,

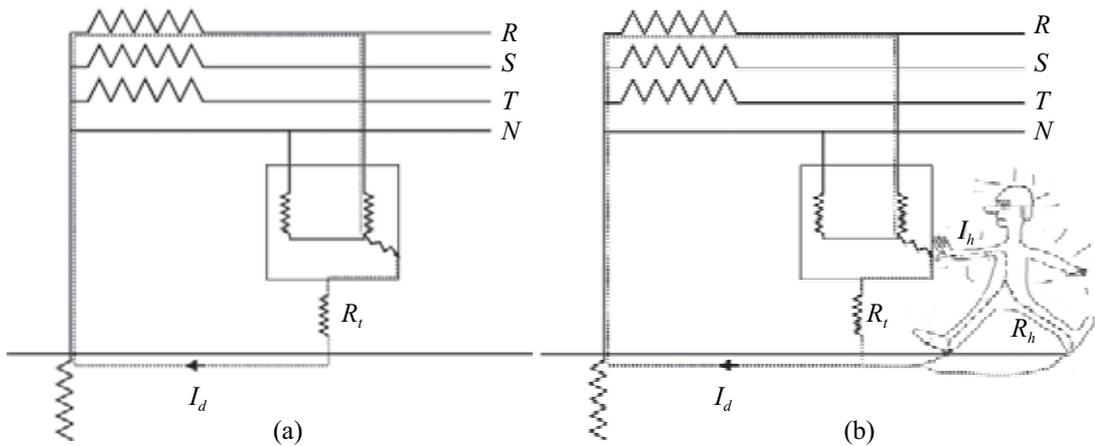


Figura 11.4. Circuito de puesta a tierra para protección contra contactos indirectos.

de resistencia R_t , cerrándose el circuito a través de la conexión a tierra existente en la instalación de suministro. Cuando una persona contacta con el aparato que cree sin tensión, la corriente circularía tanto por el circuito de tierra como a través de la persona [Figura 11.4(b)]. Para que ésta no corra ningún riesgo de electrocución, el aparato no debe estar a una tensión superior a 24 V (“tensión de seguridad”). La corriente a través del cuerpo humano es, en este caso,

$$I = (V_A - V_B)/R = 24/2500 < 10 \text{ mA} .$$

Estudiando el circuito de puesta a tierra, entre el aparato y la tierra hay una diferencia de potencial dada por

$$V_A - V_B = R_t I_d .$$

Este valor debe ser inferior a 24 V para que no haya riesgos para la persona. Por tanto el valor de la resistencia de tierra viene dado por

$$R_t = (V_A - V_B)/I_d .$$

El diferencial es un dispositivo situado en el circuito de alimentación (normalmente en los cuadros principales y auxiliares de las instalaciones) que evalúa la diferencia existente entre la corriente que circula por el cable de fase (R) y por el neutro (N) (o entre las tres fases y el neutro, si abraza a todas ellas), que para la Figura 11.4(a) es igual a la corriente que pasa por R_t . Cuando las corrientes de fase y neutro son diferentes, en el diferencial se induce un campo magnético. Cuando la diferencia de intensidades supera un valor característico, denominado sensibilidad del diferencial, éste interrumpe la corriente.

Si se instala un diferencial de 300 mA, denominado de baja sensibilidad, por el circuito de tierra puede circular hasta esa corriente sin que se corte la alimentación. Para que la tensión del receptor no supere los 24 V, la resistencia de tierra R_t deberá ser de

$$R_t = (V_A - V_B)/I_d = 24/0,3 = 80 \Omega .$$

Si el diferencial es de 30 mA, la resistencia de tierra deberá ser de

$$R_t = (V_A - V_B)/I_d = 24/0,03 = 800 \Omega .$$

Queda la duda de qué ocurre cuando la corriente supera los valores de la intensidad de corte, durante el tiempo que tarda el diferencial en interrumpir la corriente. Durante ese tiempo el potencial que adquiere el receptor es superior a 24 V y la corriente que pasaría por el individuo sería superior a la de seguridad. Pero este tiempo es inferior a 20 ms, y el cuerpo humano es capaz de soportar durante este breve tiempo corrientes elevadas sin riesgo.

- 11.7** Uno de los métodos de trabajo en líneas de alta tensión se denomina *método de trabajo a distancia*. En este método el operario, estando siempre en contacto con la torre conectada a tierra, debe mantenerse a una distancia de los cables mayor que la denominada *distancia de peligro*. Esta distancia es tanto mayor cuanto más elevada es la tensión del cable. Para trabajar sobre los cables, el operario emplea pértigas construidas de fibra de vidrio con resinas. Justificar los fundamentos electrostáticos de los aspectos aquí reseñados sobre este método de trabajo.

Resolución

El método se basa en el conocimiento de los fundamentos de la ruptura dieléctrica. Al estar el operario conectado a tierra en todo momento, su potencial es de 0 V. Por tanto la diferencia de potencial entre el cable de alta tensión y el operario coincide con la tensión de la línea. Esta diferencia de potencial se relaciona con el campo electrostático por la expresión

$$V_{\text{cable}} - V_{\text{operario}} = V_{\text{cable}} = \int_{\text{cable}}^{\text{operario}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Si el campo electrostático supera el valor de la rigidez dieléctrica E_{max} del medio, se produce la ruptura dieléctrica, conduciendo el material la corriente eléctrica. Para una tensión dada de cable y para una rigidez dada del material (en principio el aire), se obtiene de la expresión una distancia para que no se produzca la ruptura. A medida que aumenta la tensión del cable, puesto que la rigidez es un valor constante, será necesario aumentar la distancia de separación entre el operario y el cable.

Las pértigas construidas con fibra de vidrio y resinas son aislantes, por lo que la rigidez dieléctrica del material es mayor. Esto hace que, para la misma distancia, no se produzca la ruptura hasta valores de tensión más elevadas, lo que permite emplearlas siempre que no se está trabajando a muy alta tensión.

- 11.8** La espira de la figura se halla en presencia de un campo magnético B uniforme. Dicha espira consta de dos escobillas unidas a dos metales. Si por dicha espira se hace pasar una corriente continua I , justificar, razonadamente, el efecto mecánico que se produce en la espira.

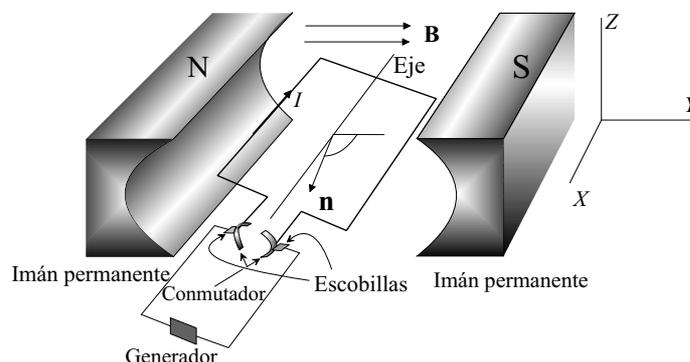


Figura 11.5. Esquema básico de un motor. La espira móvil es el rotor; los extremos de la misma llevan unidos dos conductores de forma circular, a los que se denominan conmutadores. Además, hay unas escobillas unidas al circuito externo que hacen contacto con dichos conmutadores. Obsérvese como la normal a la superficie apunta hacia dentro de la espira.

Resolución

Según vimos en el Problema 7.4, cuando se hacía girar una espira a una velocidad angular Ω en torno a uno de sus ejes, en presencia de un campo magnético B homogéneo, se inducía una fuerza

electromotriz en el circuito que variaba de forma sinusoidal. Aunque allí no se dijo, un sistema como este constituye el fundamento del *alternador*; así, con un alternador tenemos disponible una fuente de f.e.m., para ser utilizada en otros sistemas. En el caso del presente problema, la cuestión es justo la inversa; dada una espira por la que circula una corriente constante, hay que averiguar qué efecto tiene sobre ella la existencia de un campo magnético uniforme. Para responder a esta cuestión, vamos a imaginar un dispositivo como el mostrado en la Figura 11.5.

Dicho esquema consta de una espira móvil llamada *rotor*, la cual puede girar por su eje de simetría. Además, lleva adosados dos elementos metálicos circulares denominados *conmutadores*, que hacen contacto con unas *escobillas* unidas al circuito externo ligado al generador de corriente. Por último, la parte de la espira se encuentra en presencia de las piezas polares de un imán permanente¹, el cual produce un campo magnético en la región de la espira, prácticamente homogéneo. Debido a que por la espira circula una corriente I , según la Ecuación (5.23) se tiene que ésta tendrá un momento magnético $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, en donde S es la superficie correspondiente al plano de la misma. Por otra parte, al haber un campo magnético \mathbf{B} presente, existirá un momento mecánico de valor $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$. Si tomamos un instante en el que la espira se encuentra en la posición mostrada en la Figura 11.5, aplicando las anteriores ecuaciones se tiene:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = IS(0, -\sin\theta, -\cos\theta),$$

y teniendo en cuenta que $\mathbf{B} = (0, B, 0)$, se encuentra

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = ISB \cos\theta \mathbf{u}_x.$$

Este resultado indica que existe un momento \mathbf{N} en la dirección y sentido marcados por el vector

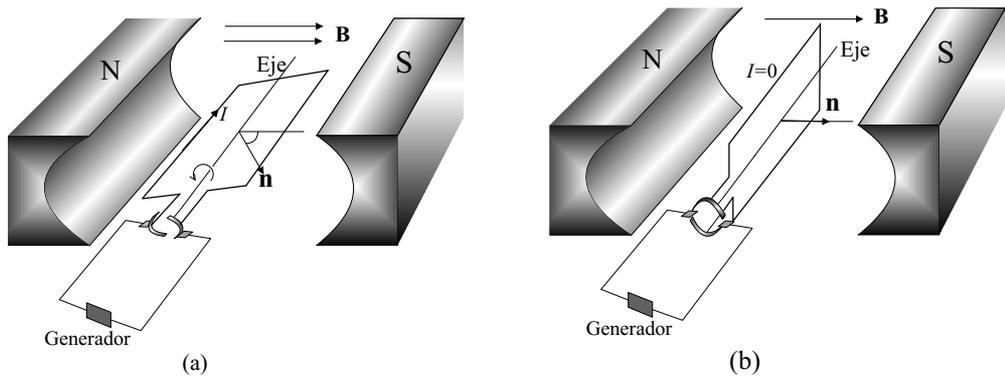


Figura 11.6. (a) La espira tiende a girar en torno al eje OX , según marca la dirección y sentido del vector axial \mathbf{N} . (b) La espira continúa girando hasta que se sitúa con su normal \mathbf{n} paralela al campo \mathbf{B} . En este instante no circula corriente.

unitario \mathbf{u}_x . Al ser el momento mecánico un vector axial quiere decir que se producirá una rotación de la espira en torno al eje OX positivo [Figura 11.6(a)], lo cual físicamente se traduce en que, la espira tenderá a situarse con su normal paralela al campo \mathbf{B} externo ($\mathbf{N} = 0$). Cuando esto ocurre [Figura 11.6(b)] no circula corriente por el rotor, ya que las escobillas hacen contacto simultáneamente con los dos metales que constituyen el conmutador, no habiendo, por lo tanto, diferencia de potencial entre ellos. Sin embargo, debido a que el rotor tiene masa y estaba en movimiento, tiende, por su inercia, a seguir rotando, ligeramente respecto de la posición mostrada en la Figura 11.6(b), en el mismo sentido antihorario. Ello es suficiente para que las escobillas estén en contacto con el otro metal del conmutador, con el cual antes no hacían contacto, consiguiendo, de este modo, que la corriente circule en el mismo sentido que lo hacía con anterioridad, haciendo así que la espira rote siempre en el mismo sentido (Figura 11.7).

¹También puede emplearse un electroimán.

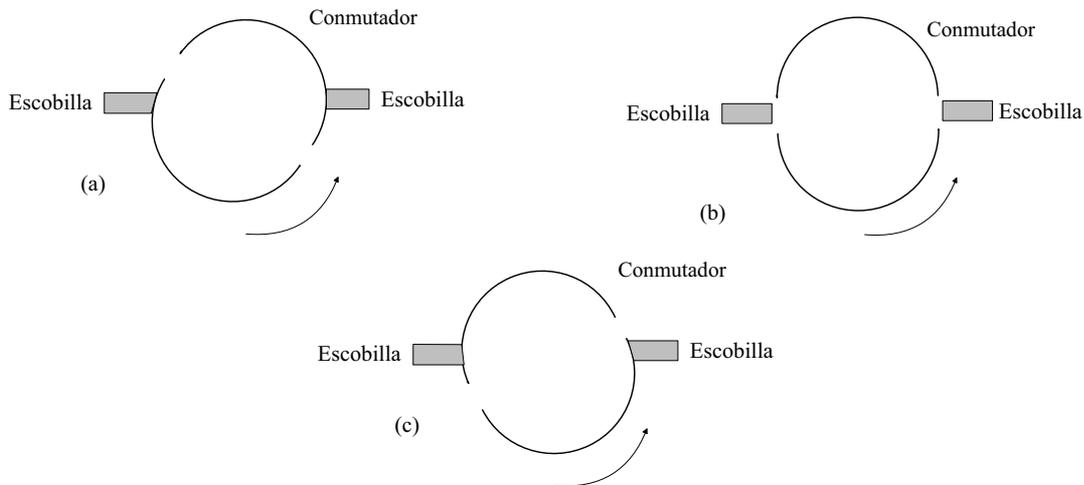


Figura 11.7. (a) En esta posición las escobillas tocan cada metal que forma el conmutador. (b) Aquí no existe diferencia de potencial entre ambos metales, ya que las escobillas están en contacto con ello, al mismo tiempo; por esta razón no circula corriente. (c) Cada una de las escobillas toca el otro metal del conmutador, haciendo así que la corriente circule siempre en el mismo sentido en la espira.

- 11.9** Un generador de 1,8 MW y tensión de salida 12 kV se conecta a un transformador (ideal) que eleva la tensión a 120 kV y que suministra potencia a un complejo industrial situado a 60 km de distancia. La resistencia de la línea de transmisión es 30Ω . 1) Calcular la intensidad en el generador, la potencia perdida en la línea y el porcentaje correspondiente. 2) Si no se utiliza el transformador y directamente se conecta el complejo al generador, estimar el porcentaje de potencia perdida en la línea.

Transformador lineal.

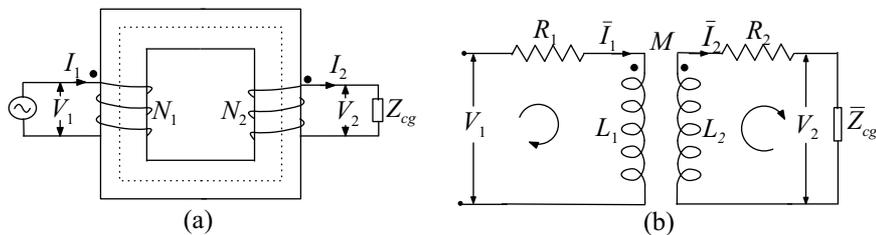


Figura 11.8. (a) Esquema mostrando los devanados del transformador. (b) Esquema equivalente del transformador lineal.

Una de las aplicaciones más comunes del fenómeno de inducción mutua es el transformador. Este dispositivo utiliza un campo alterno para transmitir la energía de un sistema, con una determinada tensión, a otro con tensión diferente. La Figura 11.8(a) muestra un transformador, donde la bobina de entrada, denominada primario, tiene N_1 espiras y la de salida, secundario, N_2 . Ambas bobinas están devanadas en un núcleo de un material ferromagnético. Z_{cg} representa la carga en el secundario. Cuando el transformador es lineal se puede representar por un circuito como el mostrado en la Figura 11.8(b), que muestra dos mallas acopladas magnéticamente y dos resistencias, R_1 y R_2 , correspondientes a cada devanado. L_1 y L_2 son los coeficientes de autoinducción y M el coeficiente de inducción mutua. La permeabilidad magnética del material del núcleo se considera constante dentro del rango de operación de las tensiones e intensidades y por ello el transformador se llama lineal. Se supone que el flujo magnético está confinado en el

núcleo y que todas las líneas de campo \mathbf{B} atraviesan todas las espiras de los devanados, diciéndose que no hay dispersión de flujo. Si para el circuito de la Figura 11.8(a) se determinan L_1 , L_2 y M utilizando valores medios de los campos, se obtiene que $M = \sqrt{L_1 L_2}$ y $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2$ (resultados iguales a los obtenidos en el Problema 7.13).

Como resultado de aplicar las leyes de Kirchoff al circuito de la Figura 11.8(b) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} (-\bar{V}_1) + R_1 \bar{I}_1 + (iL_1\omega)\bar{I}_1 - (iM\omega)\bar{I}_2 &= 0 \\ R_2 \bar{I}_2 + (iL_2\omega)\bar{I}_2 - (iM\omega)\bar{I}_1 + \bar{Z}_{cg}\bar{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La solución del sistema conduce a la siguiente relación del cociente de intensidades en cada devanado

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{(iM\omega)}{(R_2 + iL_2\omega + \bar{Z}_{cg})}. \tag{11.6}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{V}_2 = \bar{I}_2 \bar{Z}_{cg}$, la relación de la tensión aplicada a la carga a la salida del segundo devanado, \bar{V}_2 , y la de entrada en el primer devanado \bar{V}_1 , viene dada por

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{(iM\omega)\bar{Z}_{cg}}{[(R_1 + iL_1\omega)(R_2 + iL_2\omega + \bar{Z}_{cg}) + (M\omega)^2]}. \tag{11.7}$$

El cociente \bar{V}_1/\bar{I}_1 se denomina impedancia de entrada, \bar{Z}_{en} , y es igual a

$$\bar{Z}_{en} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = R_1 + iL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{(R_2 + iL_2\omega + \bar{Z}_{cg})}. \tag{11.8}$$

Si se supone que las pérdidas en los devanados son despreciables (resistencias prácticamente nulas) y, además, las relaciones entre las impedancias son

$$\left. \begin{aligned} L_1\omega &\gg R_1 \\ |iL_2\omega| &\gg |\bar{Z}_{cg}| \gg R_2 \end{aligned} \right\}$$

las Ecuaciones (11.6) y (11.7) se reducen a

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{y} \quad \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1},$$

que corresponden a los cocientes para las intensidades y d.d.p. para el caso de un transformador ideal. La impedancia de entrada obtenida en este caso es

$$\bar{Z}_{en} = \frac{(iL_1\omega)(\bar{Z}_{cg})}{(iL_2\omega + \bar{Z}_{cg})} \simeq \frac{L_1}{L_2} \bar{Z}_{cg} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \bar{Z}_{cg}. \tag{11.9}$$

Las relaciones anteriores muestran que las corrientes en cada devanado están en fase, así como también lo están las diferencias de potencial. Por tanto en un transformador ideal (Figura 11.9), es decir sin pérdidas, con acoplamiento magnético perfecto y con coeficientes de autoinducción muy grandes, el cociente de las intensidades y las d.d.p. en el primario y secundario viene dado por

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{V_1}{V_2} = n,$$

donde $n = N_1/N_2$ se denomina relación de transformación. Como las corrientes y tensiones están en fase, el factor de potencia δ es el mismo en ambos devanados. La potencia de entrada, $P_1 = V_1 I_1 \cos \delta$, es la misma que la de salida, $P_2 = V_2 I_2 \cos \delta$.

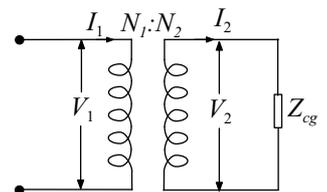


Figura 11.9. Esquema del transformador ideal.

Resolución

En la resolución del ejercicio se supone que las cargas son resistivas.

1) Son conocidos la tensión de entrada $V_1=12$ kV, la de salida $V_2=120$ kV y la potencia aportada por el generador $P_1=1,8$ MW.

- A partir de P_1 se determina la corriente en el primario (generador)

$$P_1 = V_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{1,8 \times 10^6}{12 \times 10^3} = 150 \text{ A.}$$

- La relación de transformación es

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{12 \times 10^3}{120 \times 10^3} = 0,1.$$

- La intensidad en el secundario, y en consecuencia en la línea de transmisión, será

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} = 150 \times 0,1 = 15 \text{ A.}$$

- La potencia consumida en la línea viene dada por

$$P_{\text{línea}} = R I_2^2 = 30 \times 15^2 = 6750 \text{ W.}$$

- Porcentaje de la potencia perdida

$$\frac{6750}{1,8 \times 10^6} \times 100 = 0,37 \%.$$

2) Si no hay transformador, la intensidad en la línea se calcula directamente como

$$P_{\text{gen.}} = 1,8 \times 10^6 = V I = 12 \times 10^3 I \Rightarrow I = 150 \text{ A.}$$

- La potencia perdida en la línea será

$$P_{\text{línea}} = R I^2 = 30 \times 150^2 = 675 \text{ kW.}$$

- El porcentaje de energía perdida

$$\frac{675 \times 10^3}{1,8 \times 10^6} \times 100 = 37,5 \%.$$

Los resultados obtenidos muestran que al transmitir la potencia con una tensión menor la intensidad es mayor y, consecuentemente, las pérdidas por efecto Joule en la línea de transmisión son muy grandes. Como las pérdidas son proporcionales al cuadrado de la intensidad, si la tensión de salida en el generador se eleva diez veces, las pérdidas en la línea se reducen en un factor cien.

Las compañías eléctricas utilizan los transformadores para disminuir las pérdidas por calentamiento en la distribución. La potencia se genera a tensiones entre aproximadamente 12-25 kV. La salida del generador se conecta a un transformador cuyo objetivo es elevar la tensión hasta 110 kV-1000 kV. La salida del transformador directamente se conecta a la línea de transmisión que transporta la energía a la distancia deseada. En el otro extremo de la línea se sitúan las subestaciones, cuyos transformadores disminuyen la tensión hasta 13-34,5 kV para su distribución. Finalmente, para proporcionar energía a los usuarios otro transformador reduce la tensión a valores más seguros en torno a 110-220 V (dependiendo del país); en España la tensión suministrada es 220 V.

- 11.10** La subestación S.E. de la Figura 11.10 se utiliza para disminuir los 14 kV en la subestación a los 220 V de suministro a los usuarios. La subestación sirve a 200 viviendas que consumen hasta 20 A. Determinar la intensidad máxima en el primario y la potencia aparente aportada.

Resolución

Como se vio en el ejercicio anterior, las líneas de transmisión son de alta tensión para disminuir las pérdidas por efecto Joule. En los extremos de las líneas es preciso la utilización de transformadores para bajar la tensión a un valor más seguro. En el proceso de transformación se obtiene a la salida una tensión menor y una intensidad mayor. En este ejercicio se estudia el paso final para obtener la tensión que se suministra a los usuarios. El transformador se supone ideal.

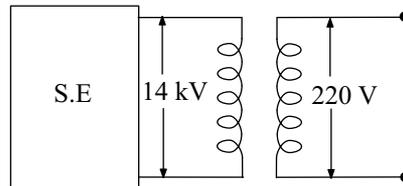


Figura 11.10. Esquema de la subestación y conexión a los usuarios.

- Para los datos del problema, la relación de transformación es

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{220}{14 \times 10^3} = 0,0157.$$

- La intensidad máxima en el secundario es $I_2 = 20 \times 200 = 4000$ A. De aquí se deduce que la intensidad en el primario vale

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = 0,0157 \times 4000 = 62,8 \text{ A.}$$

- La potencia aparente aportada por el primario viene dada por

$$S_1 = V_1 I_1 = 62,8 \times 14 \times 10^3 = 879,2 \text{ kVA.}$$

- 11.11** Un generador de 380 V y 50 Hz alimenta una carga con $R = 4 \Omega$ y $L = 8$ mH a través de una línea cuya resistencia es $R_l = 0,2 \Omega$ y $L_l = 0,5$ mH. Determinar las pérdidas en la línea de transmisión y la d.d.p. en la carga en los siguientes casos: 1) el generador se conecta a un transformador que eleva la tensión según la relación $n = N_1/N_2 = 0,1$ y al final de la línea de transmisión hay otro transformador para disminuir la tensión siendo $n' = N'_1/N'_2 = 10$ [Figura 11.12(a)], 2) el generador se conecta directamente a la carga [Figura 11.13(a)]. Ambos transformadores se consideran ideales.

Impedancia referida al circuito primario del transformador.

Para un transformador ideal, el esquema de la Figura 11.9 se puede reducir al mostrado en la Figura 11.11, donde la impedancia de la carga está referida al circuito primario. Se denomina impedancia de entrada \bar{Z}_{en} al valor de la carga referida al circuito primario, es decir,

$$\bar{Z}_{en} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{(N_1/N_2) \bar{V}_2}{(N_2/N_1) \bar{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \bar{Z}_{cg} = n^2 \bar{Z}_{cg},$$

resultado coincidente con el de la Ecuación (11.9) cuando el transformador es ideal.

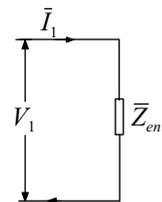


Figura 11.11. Esquema con la carga referida al primario.

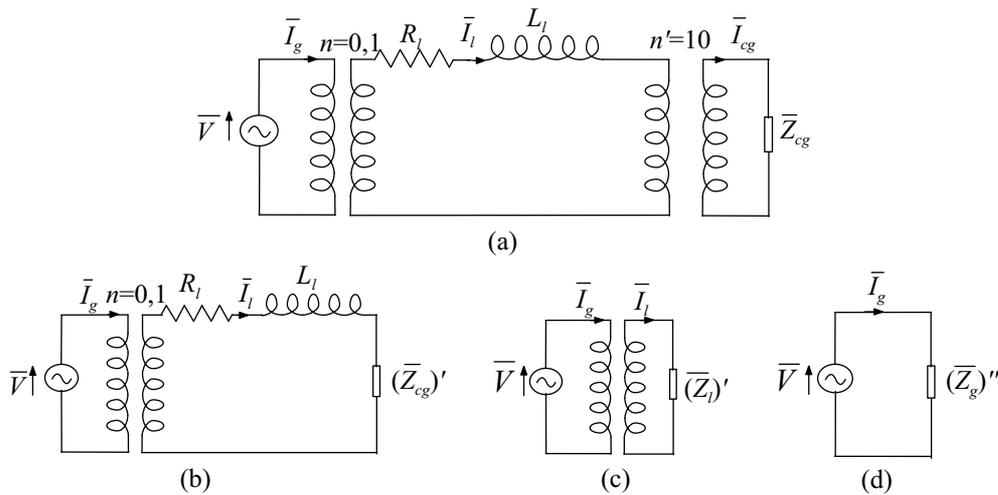


Figura 11.12. (a) Conjunto generador, línea, carga y transformadores. (b) Carga referida a la línea. (c) Transformador de alta y línea. (d) Conjunto referido al circuito primario.

Resolución

1) Determinación de la impedancia de entrada desde el lado del generador:

- Impedancia de la carga:

$$\bar{Z}_{cg} = R + iL\omega = 4 + i(8 \times 10^{-3}) \times (2\pi \times 50) = 4 + i2,513 = 4,724 e^{i0,178\pi} \Omega.$$

- Impedancia de la línea :

$$\bar{Z}_l = R_l + iL_l\omega = 0,2 + i(0,5 \times 10^{-3}) \times (2\pi \times 50) = 0,2 + i0,157 = 0,254 e^{i0,212\pi} \Omega.$$

- Impedancia de la carga referida a la línea [Figura 11.12(b)]:

$$(\bar{Z}_{cg})' = (n')^2(4 + i2,513) = 100(4 + i2,513) \Omega.$$

- Impedancia de la línea y carga [Figura 11.12(c)]:

$$(\bar{Z}_l)' = \bar{Z}_l + (\bar{Z}_{cg})' = (0,2 + i0,157) + (400 + i251,3) = 400,2 + i251,457 \Omega.$$

- Para la impedancia referida a la tensión de generador (impedancia de entrada), según el esquema de la Figura 11.12(d) se obtiene:

$$(\bar{Z}_g)'' = n^2(\bar{Z}_l)' = (0,1)^2(400,2 + i251,457) = 4,002 + i2,515 = 4,727 e^{i0,178\pi} \Omega.$$

Determinación de las intensidades:

- Intensidad en la línea del generador:

$$\bar{I}_g = \frac{\bar{V}}{(\bar{Z}_g)''} = \frac{380 e^{i0}}{4,727 e^{i0,178\pi}} = 80,389 e^{-i0,178\pi} \text{ A.}$$

- Intensidad en la línea de transmisión:

$$\frac{\bar{I}_g}{\bar{I}_l} = \frac{1}{n} \Rightarrow \bar{I}_l = n\bar{I}_g = 0,1 \times (80,389 e^{-i0,178\pi}) = 8,0389 e^{-i0,178\pi} \text{ A.}$$

- Intensidad en la carga:

$$\frac{\bar{I}_l}{\bar{I}_{cg}} = \frac{1}{n'} \Rightarrow \bar{I}_{cg} = n' \bar{I}_l = 10 \times (8,0389 e^{-i0,178\pi}) = 80,389 e^{-i0,178\pi} \text{ A.}$$

Pérdidas y d.d.p. en la carga:

- Pérdidas en la línea de transmisión:

$$P_l = R_l I_l^2 = 0,2 \times (8,0389)^2 = 12,9 \text{ W.}$$

- d.d.p. en la carga:

$$\bar{V}_{cg} = \bar{Z}_{cg} \times \bar{I}_{cg} = (4,724 e^{i0,178\pi}) \times (80,389 e^{-i0,178\pi}) = 379,7 \text{ V.}$$

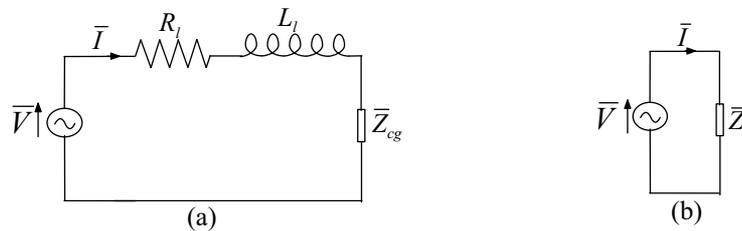


Figura 11.13. (a) Carga directamente conectada al generador. (b) Esquema equivalente.

2) Si la carga se conecta directamente al generador [Figura 11.13(a)]:

- Impedancia del conjunto línea y carga [Figura 11.13(b)]:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_l + \bar{Z}_{cg} = (0,2 + i 0,157) + (4 + i 2,513) = 4,2 + i 2,67 = 4,977 e^{i0,180\pi} \Omega.$$

- Intensidad en la línea:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{380 e^{i0}}{4,977 e^{i0,180\pi}} = 76,351 e^{-i0,180\pi} \text{ A.}$$

- Pérdidas en la línea:

$$P_l = R_l I^2 = 0,2 \times 76,351^2 = 1165,9 \text{ W.}$$

- d.d.p. en la carga

$$\bar{V}_{cg} = \bar{Z}_{cg} \times \bar{I} = 4,724 e^{i0,178\pi} \times 76,351 e^{-i0,180\pi} = 360,7 e^{-i0,002\pi} \text{ V.}$$

Los resultados obtenidos muestran que conectando directamente la carga, las pérdidas en la línea de transmisión son aproximadamente 100 veces mayores. Por otra parte, utilizando transformadores la tensión en la carga es 99,9 % de la del generador, mientras en la conexión directa como la caída de tensión en la línea es mayor dicho porcentaje es 94,9 %.

11.12

Al circuito primario de un transformador se conecta un generador y al secundario un condensador con capacidad 900 pF. Se realiza un experimento variando la frecuencia de excitación y se observa que la corriente es máxima a una frecuencia de 1500 Hz. Es conocido que el coeficiente de autoinducción en el primario es $L_1 = 0,8 \text{ H}$ y que la relación de transformación es $n = N_1/N_2 = 0,1$. Se pretende evaluar el flujo disperso determinando el coeficiente de acoplamiento k (relación entre el flujo mutuo y total). Calcular con los datos dados dicho coeficiente.

Nota: Se desprecian las pérdidas por efecto Joule en los devanados así como las pérdidas en el núcleo debidas a la histéresis y por corrientes de Foucault.

Modelo del transformador incluyendo el flujo disperso.

En los transformadores reales hay pérdidas por flujo disperso debido a que el acoplamiento magnético entre las bobinas no es perfecto. Además hay otras pérdidas no consideradas en el modelo simple estudiado en este apartado. Si por el devanado del primario circula una corriente I_1 que produce un flujo Φ_{11} , el flujo a través del secundario Φ_{21} es sólo una parte k_1 de Φ_{11} . El coeficiente de inducción mutua es igual a $M_{21} = \Phi_{21}/I_1 = k_1\Phi_{11}/I_1 = k_1L_1$. De igual forma $M_{12} = k_2L_2$. Como $M_{12} = M_{21} = M$, resulta $M = k\sqrt{L_1L_2}$, siendo $k = \sqrt{k_1k_2}$. El coeficiente k se denomina coeficiente de acoplamiento. Cuando el acoplamiento magnético es perfecto $k = 1$ pero si hay flujo disperso k es menor de la unidad.

Para el transformador lineal de las Figuras 11.8(a) y (b), si $R_1 = R_2 = 0$, según la Ecuación (11.8), la impedancia de entrada es

$$\bar{Z}_{en} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = iL_1\omega + \frac{(M\omega^2)}{(iL_2\omega + \bar{Z}_{cg})},$$

que también puede escribirse como

$$\bar{Z}_{en} = iL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right) + \frac{i\omega\bar{Z}_{cg}M^2/L_2}{i\omega L_2 + \bar{Z}_{cg}}.$$

Como $M^2 = k^2L_1L_2$ y $L_1/L_2 = n^2$, \bar{Z}_{en} puede expresarse como

$$\bar{Z}_{en} = (iL_1\omega)(1 - k^2) + \frac{(i\omega\bar{Z}_{cg}k^2L_1)}{(i\omega L_1/n^2 + \bar{Z}_{cg})} = (iL_1\omega)(1 - k^2) + \frac{1}{1/(i\omega k^2L_1) + 1/(k^2n^2\bar{Z}_{cg})}, \quad (11.10)$$

que representa una impedancia en serie con otras dos en paralelo. Por tanto el modelo del transformador incluyendo el flujo disperso y referido al circuito primario se puede representar según el esquema de la Figura 11.14(a) y de forma más simplificada como el de la Figura 11.14(b).

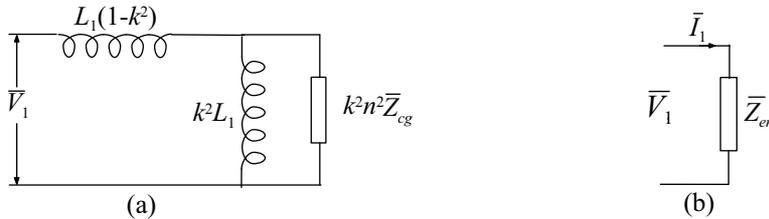


Figura 11.14. (a) Esquema equivalente incluyendo el flujo disperso referido al primario del transformador. (b) Esquema simplificado.

Resolución

El transformador y la carga es equivalente al esquema de la Figura 11.14 cuya impedancia es la dada por la Ecuación (11.10). En este caso la carga corresponde a un condensador cuya impedancia es $\bar{Z}_{cg} = -i/(C\omega)$. La intensidad será máxima cuando la frecuencia de excitación coincida con la de resonancia, que ocurrirá, como se vio en el Apartado 8.4.6, cuando la parte imaginaria de la impedancia sea nula.

Por tanto, la Ecuación (11.10) en este caso es

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{en} &= (iL_1\omega)(1 - k^2) + \frac{1}{1/(i\omega k^2L_1) + 1/[k^2n^2(-i/(C\omega))]} \\ &= iL_1\omega \left[\frac{n^2 - \omega^2L_1C + k^2\omega^2L_1C}{n^2 - \omega^2L_1C} \right]. \end{aligned}$$

La impedancia debe anularse para que la intensidad sea máxima. Por ello, el numerador de la ecuación anterior debe ser nulo, lo que implica que

$$k^2 L_1 C \omega^2 - L_1 C \omega^2 + n^2 = 0.$$

De la condición anterior y los datos del enunciado: $L_1 = 0,8 \text{ H}$, $C = 9 \times 10^{-10} \text{ F}$, $\omega = 2\pi \times 1500 = 9424 \text{ rad s}^{-1}$, y $n = 0,1$, se obtiene que el valor de k viene dado por

$$k^2 = \frac{L_1 C \omega^2 - n^2}{L_1 C \omega^2} = \frac{0,8 \times 9 \times 10^{-10} \times (9424)^2 - 0,1^2}{0,8 \times 9 \times 10^{-10} \times (9424)^2} = 0,84 \Rightarrow k = 0,92.$$

11.13

El reactor de fusión experimental JET se puede considerar (Figura 11.15) constituido por:

- 1) Un anillo de plasma P análogo a un conductor no magnético de resistencia R , radio medio r_a y sección A .
- 2) Un conjunto de N espiras apretadas por las que circula la corriente I_2 , de las que sólo hay una dibujada en la figura.
- 3) Un circuito magnético de sección A' que, por circular la I_1 variable con el tiempo, origina en la sección S un B creciente con el tiempo en la forma $B = Ct$.

Calcular: 1) la f.e.m. \mathcal{E}_1 inducida en P a lo largo de su radio medio y debida a I_1 , 2) la intensidad I que produce dicha \mathcal{E}_1 en P , 3) el campo B_2 en P debido a I_2 , 4) el campo B_1 en P debido a I .

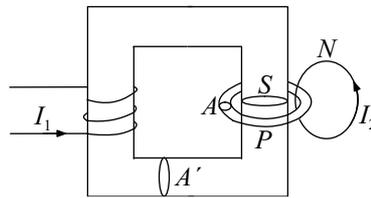


Figura 11.15. Esquema del reactor de fusión experimental JET.

Resolución

1) Se determina la f.e.m. a lo largo de una línea cerrada media en P , para lo que será necesario calcular el flujo a través del área limitada por dicha curva. El campo magnético debido a I_1 está confinado preferentemente en el núcleo ferromagnético y sólo atravesará de la referida área la sección S . La f.e.m. a lo largo del radio medio de P debida a I_1 será

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(SCt)}{dt} = -SC.$$

2) La corriente inducida se calcula directamente ya que se supone conocida la resistencia R , obteniendo

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = -\frac{SC}{R}.$$

3) Para calcular el campo B_2 en P debido a I_2 , igualmente se sigue una línea media a lo largo de P y se aplica la ley de Ampère, la fuerza magnetomotriz que atraviesa la superficie será NI_2 . Los resultados de los campos H_2 y B_2 medios en P debidos a I_2 serán

$$H_2 2\pi r_a = NI_2 \Rightarrow B_2 = \mu_0 H_2 = \mu_0 \frac{NI_2}{2\pi r_a}.$$

4) Para calcular el campo B_1 en P debido a la corriente I inducida en él, primero se calcula el campo H_1 y después B_1 . Para ello, se aplica la ley de Ampère a lo largo de una circunferencia de radio r situada en una sección de P y centrada en dicha sección, obteniendo

$$H_1 2\pi r = \frac{I}{A} \pi r^2 \Rightarrow H_1 = \frac{I}{A} \frac{r}{2} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2A}.$$

11.14 En un semiconductor tipo n las cargas libres o de conducción (portadores de carga), es decir, las que se pueden mover en su interior con libertad, son electrones. En un semiconductor tipo p conviene suponer que las cargas de conducción son positivas, de carga $+e$ y se llaman huecos. Al fabricar una unión pn con una parte tipo p y otra tipo n como en la Figura 11.16, resulta que hay un gradiente de concentración tanto de electrones como de huecos, con lo que los electrones móviles de la derecha en el semiconductor n se difunden hacia la izquierda y los huecos lo hacen hacia la derecha tendiendo a alcanzar cierta concentración de ambos en cada lado. Con ello, si ambas partes estaban descargadas inicialmente, se va cargando negativamente la parte izquierda y positivamente la derecha, y al intentar cruzar la unión una nueva carga es repelida por aquellas y se llega a un equilibrio. Supongamos que los electrones difundidos se acumulan homogéneamente en una pequeña capa de espesor D en la izquierda y los huecos en una capa de espesor D a la derecha, teniendo ambas capas la misma densidad de carga ρ , salvo el signo. Se desea calcular el campo eléctrico a la distancia x de la unión y el potencial eléctrico en todos los puntos.

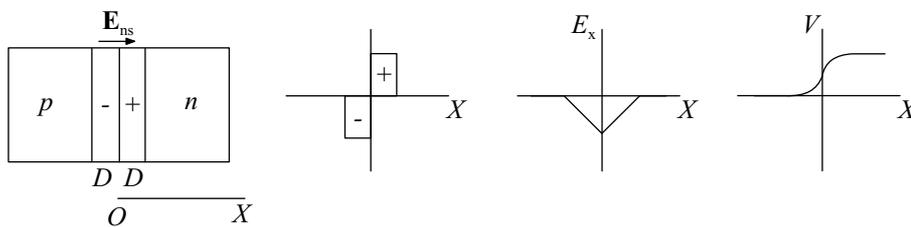


Figura 11.16. Unión entre un semiconductor tipo p y otro tipo n . Las cargas de conducción se difunden creando una doble capa de cargas. Se representan la densidad de carga, el campo electrostático y el potencial.

Resolución

La primera ecuación de Maxwell aplicada a una caja imaginaria que abarque a ambas capas da

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_x = 0,$$

luego el campo eléctrico es nulo fuera de la doble capa. Para una caja que abarque desde $x = -D$ hasta un plano distante x ($x < 0$) de la unión

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{-\rho S(D+x)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\rho(D+x)}{\varepsilon_0}.$$

El potencial eléctrico de un punto cualquiera se obtiene de

$$\mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad V = -\int E_x dx + C = \frac{\rho(Dx + x^2/2)}{\varepsilon_0} + C.$$

Adjudicando el valor $V = 0$ a los puntos con $x = -D/2$, resulta finalmente

$$V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (3D^2/8 + Dx + x^2/2),$$

cuyo valor en el plano $x = 0$ es

$$V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (3D^2/8).$$

Considerando una caja desde x hasta D resulta para $x > 0$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho S(D-x)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{\rho}{\varepsilon_0} (x-D),$$

y el potencial

$$V = - \int E_x dx + C' = - \frac{\rho}{\epsilon_0} (-Dx + x^2/2) + C' = \frac{\rho}{\epsilon_0} (3D^2/8 + Dx - x^2/2).$$

En la Figura 11.16 están representados los valores de la densidad de carga supuesta, del campo eléctrico y del potencial.

- 11.15** Con los datos del Problema 11.14, deducir la f.e.m. y la diferencia de potencial entre los bornes del dispositivo, llamado diodo. Discutir el valor de la intensidad de corriente en los tres casos siguientes de conectar al diodo: 1) Una resistencia eléctrica. 2) Una resistencia y una pila que lo polariza directamente. 3) Una resistencia y una pila que lo polariza inversamente.

Resolución

Caso 1), Figura 11.17. En la única región del espacio donde hay campo eléctrico es en la doble capa, pero allí la fuerza por unidad de carga debida a la diferencia de concentración, que llamamos campo no electrostático (Capítulos 4 y 7), se superpone al campo debido a las cargas que se distribuyen y da un campo efectivo nulo. Luego la f.e.m. es nula y por tanto la intensidad de corriente es cero.

Caso 2), Figura 11.18. En este caso el terminal positivo de la pila se conecta al borne del material p , lo que origina un nuevo campo eléctrico dirigido de izquierda a derecha por el interior del diodo. Este campo es debido a las cargas acumuladas en los bornes de la pila y es por tanto electrostático, luego al valor del campo calculado en el problema anterior hay que restarle el campo debido a la pila. Una carga positiva que se mueva hacia la derecha por la región p se encontrará con un campo eléctrico débil y podrá atravesar con facilidad la doble capa. Lo mismo le ocurrirá a una carga negativa que se mueva hacia la izquierda por la región n . Por tanto la conexión directa favorece el paso de corriente.

Caso 3), Figura 11.19. Ahora la pila aplica un campo eléctrico de derecha a izquierda en el interior del diodo, con lo cual aumenta el campo electrostático. Los huecos de la zona p que se mueven libremente se encuentran un campo electrostático grande y tienen gran dificultad para cruzar la doble capa. Otro tanto les ocurre a los electrones de la parte n y en consecuencia la corriente es pequeña.

En resumen la polarización directa de un diodo de semiconductores facilita el paso de corriente y la inversa lo dificulta. Se comporta de manera diferente según la dirección, o sea es anisótropo. Nótese la diferencia importante con los dispositivos lineales estudiados en otros capítulos.

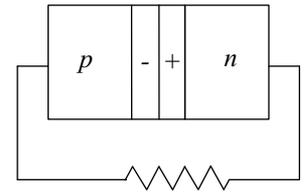


Figura 11.17. El campo eléctrico efectivo en la unión pn es nulo, no originando corriente eléctrica por la resistencia.

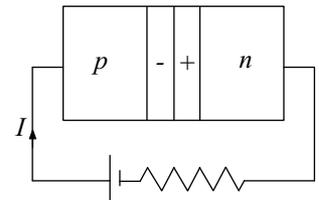


Figura 11.18. La polarización directa originada por la batería provoca la conducción a través de la unión pn .

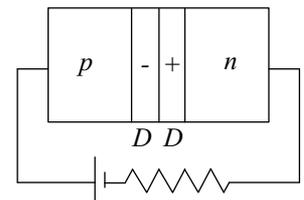


Figura 11.19. La polarización inversa de la unión pn no permite un paso de corriente apreciable por la unión.

- 11.16** La Figura 11.20 es un esquema de un circuito rectificador de corriente. El primario de un transformador se conecta a la red de corriente alterna. El secundario tiene tres bornes A , O y B . El potencial de A respecto de O es $V_A = V_0 \text{sen}(2\pi f_0 t)$ y el de B respecto de O es $V_B = -V_A$. En los rectificadores RE_1 y RE_2 de semiconductores se representa el lado p mediante una flecha y el lado n por un segmento; ellos tienen la propiedad de ofrecer una resistencia pequeña, que aquí supondremos nula, cuando tienen una polarización directa y una resistencia, que aquí supondremos infinita, cuando tiene una polarización inversa. Por tanto, los rectificadores ideales nombrados dejan pasar la corriente sin resistencia cuando la densidad de corriente tiene el sentido de la flecha. Calcular la tensión instantánea de C respecto de O .

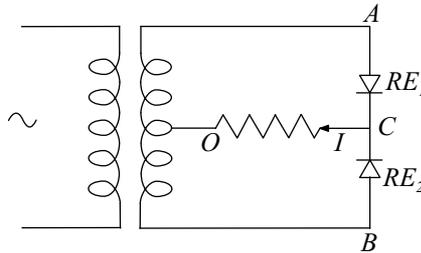


Figura 11.20. Esquema de un rectificador. Los diodos RE_1 y RE_2 son unidireccionales para la corriente, permitiendo que exista una densidad de corriente por la resistencia únicamente hacia la izquierda.

Resolución

Desde $t = 0$ hasta $t = 1/(2f_0)$ es V_A positiva luego el diodo 1 está con polarización directa y no ofrece resistencia. En cambio el rectificador 2 lo está con polarización inversa y no permite el paso de corriente. Despreciando los efectos de la bobina, circulará por la resistencia una corriente de intensidad

$$I = V_A/R = V_0 \text{sen}(2\pi f_0 t)/R.$$

Desde $t = 1/(2f_0)$ hasta $t = 1/f_0$ ocurre lo contrario, estando el rectificador 1 polarizado inversamente y el 2 directamente, luego circulará corriente por el 2 y no por el 1. La corriente total por la resistencia es igual que en el semiperiodo anterior

$$I = V_A/R = V_0 \text{sen}(2\pi f_0 t)/R.$$

Pudiendo escribirse para cualquier instante

$$I = V_A/R = V_0 |\text{sen}(2\pi f_0 t)|/R.$$

La corriente es pues de dirección constante y se dice que ha sido rectificada. La Figura 11.21 representa los valores instantáneos de la intensidad.

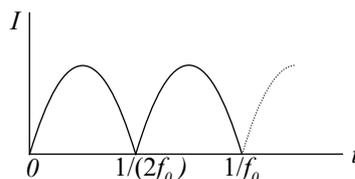


Figura 11.21. Intensidad de corriente por la resistencia de la Figura 11.20.

11.17 En un sondeo geofísico profundo se baja una sonda eléctrica formada por dos conductores aislados que acaban en sendos electrodos separados $r = 40$ cm entre sí. El aparato de medida está formado por una batería, un amperímetro y un voltímetro. Se hace circular una corriente eléctrica continua por el conductor de la sonda que acaba en el electrodo D_1 y retorna por la TIERRA al aparato de medida. La intensidad asociada medida con el amperímetro es $I = 2$ A. Por el segundo conductor no circula corriente y la d.d.p. de su electrodo D_2 respecto del suelo y medida con el voltímetro es $V = 4$ voltios. Se desea conocer la resistividad ρ del terreno.

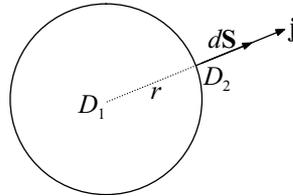


Figura 11.22. Una corriente eléctrica manando del electrodo D_1 inmerso en la tierra origina una diferencia de potencial entre los puntos D_1 y D_2 . Permite medir la resistividad eléctrica del terreno.

Resolución

Como el electrodo D_2 está próximo al D_1 la corriente es aproximadamente radial y homogénea. La intensidad de corriente a través de una esfera de radio $r = 40$ cm, Figura 11.22, es

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\mathbf{E}}{\rho} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{E}{\rho} dS = \frac{E}{\rho} 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho I}{4\pi r^2},$$

donde se ha aplicado la definición de intensidad y la ley de Ohm.

El potencial del electrodo D_2 respecto del suelo, que está muy alejado de dicho electrodo, es

$$V = - \int_{\infty}^{D_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^{D_2} \frac{\rho I}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho I}{4\pi r}$$

$$\rho = \frac{4\pi r V}{I} = \frac{4 \times 3,14 \times 0,40 \times 4}{2} = 10 \Omega.$$

11.18 Para la medida del campo magnético \mathbf{B} se usa habitualmente una sonda Hall. La sonda está formada por una pequeña cinta conductora de anchura L , espesor e , por la que se hace circular una pequeña corriente de intensidad I , Figura 11.23. La conducción eléctrica se realiza con cargas libres de valor q de las cuales hay n por unidad de volumen. La lámina se sitúa en el interior de un campo magnético \mathbf{B} con su dirección perpendicular a la cinta. Con un voltímetro de gran resistencia interna se mide la d.d.p. V entre los lados de la cinta. Calcular B .

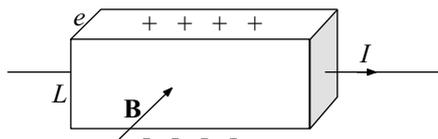


Figura 11.23. Una corriente eléctrica circulando por la cinta origina una d.d.p. que permite medir el campo magnético donde está inmersa.

Resolución²

La intensidad de corriente es

$$I = jS = nqvLe \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{nqLe}.$$

Las cargas en movimiento están sometidas a una fuerza que las desvía hacia el filo de la cinta. Entonces se acumulan en un lado hasta que el campo electrostático originado aplica una fuerza que contrarresta la del campo magnético. Esto ocurre cuando

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = vB.$$

La f.e.m producida es pues

$$\mathcal{E} = EL = vBL = \frac{I}{nqe}B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{nqe\mathcal{E}}{I} = \frac{nqeV}{I},$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathcal{E} = V$.

²El efecto Hall aquí descrito es de naturaleza clásica. Sin embargo, en la década de los noventa se descubrió el efecto Hall cuántico (véase Hook and Hall, *Solid State Physics*, Wiley (1999),p.405).

PROGRAMAS MATLAB

A

Cálculo de la integral del problema 2.11.

```

syms V E1 E2 F1 F2 FV r z Ri Re
F1=-2*r^2/(r^2+z^2)^(3/2)
E1=int(F1,r)
F2=pi*z*r/(r^2+z^2)^(3/2);
E2=int(F2,r)
FV=r/(r^2+z^2)^(1/2);
V=int(FV,r);
E1=int(F1,r,Ri,Re)
E2=int(F2,r,Ri,Re)
V=int(FV,r,Ri,Re)
Ri=0.2;
Re=0.4;
z=0.3;
ro=4*10^(-6);
e0=8.8543*10^(-12);
E1=subs(E1)*ro/(4*pi*e0)
E2=subs(E2)*ro/(4*pi*e0)
V=subs(V)*ro/(4*e0)

```

Resolución del sistema de ecuaciones del problema 4.21.

Para el pentágono simple

```
V=[24;24;24;24;24]
```

```
R=[62,-20,0,0,-20;-20,62,-20,0,0;0,-20,62,-20,0;0,0,-20,62,-20;-20,0,0,-20,62]
```

```
I=inv(R)*V
```

Para el pentágono doble

```
V=[0;0;0;0;120]
```

```
R=[74,-20,0,0,-20,-12;-20,74,-20,0,0,-12;0,-20,74,-20,0,-12 ;0,0,-20,74,-20,-12;-20,0,0,-20,74,-12;-12,-12,-12,-12,-12,60]
```

```
I=inv(R)*V
```

Representación gráfica del problema 8.2.

```
t=0:0.0002:.064;
```

```
x=2*(1-exp(-250*t)).*(t<0.016);
```

```
y=2*exp(-500*(t-0.016)).*(t>=0.016);
```

```
z=2*(1-exp(-250*(t-0.032))).*(t>0.032);
```

```
u=z.*(t<0.048);
```

```
w=2*exp(-500*(t-0.048)).*(t>=0.048);
```

```
plot(t,x+y+u+w);
```

Representación gráfica del problema 8.5.

```
t=0:0.0002:0.035;
```

```
I=0.2*sin(447*t);
```

```
V=0.3*cos(447*t); %valor proporcional
```

```
Q=0.1*cos(447*t); %valor proporcional
```

```
plot(t,I,t,V,t,Q);
```

Representación gráfica del problema 8.7.

```
t=0:0.0002:0.20;
```

```
x=3.24*exp(-33*t);
```

```
y=3.29*sin(200*t-0.45*pi);
```

```
plot(t,x+y);
```

Representación gráfica del problema 8.8.

```
t=0:0.000002:0.001;
```

```
x=10.73*exp(-5000*t).*sin(13228*t+0.38*pi);
```

```
y=28.4*exp(-5000*t).*cos(13228*t+0.38*pi);
```

```
plot(t,x+y);
```

PROPIEDADES ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS DE CIERTOS MATERIALES

B

B.1. CONSTANTES FÍSICAS

Constante	Símbolo	Valor
Velocidad de la luz	c	$3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
Masa del electrón en reposo	m_e	$9,107 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Carga del electrón	$-e$	$-1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del protón en reposo	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$

B.2. RESISTIVIDAD Y COEFICIENTE DE TEMPERATURA

Sustancia	ρ (Ωm)	α (K^{-1})
<i>Metales</i>		
Mercurio	96×10^{-8}	0,0009
Hierro	$9,7 \times 10^{-8}$	0,0065
Tungsteno	$5,5 \times 10^{-8}$	0,0045
Aluminio	$2,65 \times 10^{-8}$	0,0043
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	0,0068
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$	0,0041
Plomo	$2,1 \times 10^{-7}$	0,0045
<i>Aleaciones</i>		
Nicromo	100×10^{-8}	0,0004
Constantán	49×10^{-8}	0,0000
Manganita	44×10^{-8}	
<i>Semiconductores</i>		
Germanio	0,46	-0,048
Silicio	640	
Grafito	$1,4 \times 10^{-5}$	-0,0005
<i>Aislantes</i>		
Azufre	2×10^{15}	
Cuarzo (Si O_2)	1×10^{13}	
Madera	10^8 - 10^{11}	
Vidrio	10^{10} - 10^{14}	
Lucita	$> 10^{13}$	
Mica	10^{11} - 10^{15}	
Diamante	10^{13}	
Aceite (transformador)	10^{11}	
Agua(destilada)	10^4	

B.3. PERMITIVIDADES RELATIVAS

Sustancia	ϵ_r
Vacío	1.0000
Aire (1 atm, 20°C)	1.0006
Aire (100 atm, 20°C)	1.055
Aceite (transformador)	2.24
Agua (0°C)	88.8
Agua(20°)	80.1
Alcohol etílico (0°)	28.4
Alcohol etílico (20°)	25.0
Vidrio	3.8-6.8
Mica	6.0
Madera	3.5-9
Papel	2-4
Cuarzo	4.3
Baquelita	5
Teflón	2.1
Caucho	2.3-4
Poliestireno	2.6
Caucho	2.3-4.0
Tierra(seca)	3-4
Plexiglass	3.4

B.4. PERMEABILIDADES RELATIVAS

Sustancia	μ_r
Vacío	1.00000 (no magnético)
Bismuto	0.99983 (diamagnético)
Cobre	0.99999 (diamagnético)
Plata	0.99998 (diamagnético)
Agua	0.99999 (diamagnético)
Aire	1.00000036 (paramagnético)
Aluminio	1.000021 (paramagnético)
Magnesio	1.000012 (paramagnética)
Cobalto	250 (ferromagnético)
Níquel	600 (ferromagnético)
Acero suave (0.2 C)	2000 (ferromagnético)
Hierro (0.2 impureza)	5000 (ferromagnético)
Permalloy 78 (78.5Ni)	100000 (ferromagnético)
Mumetal (75 Ni, 5 Cu, 2 Cr)	100000 (ferromagnético)

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, M. y Finn, E.J., *Física. Vol. II: Campos y ondas*, (Addison- Wesley Iberoamericana, Argentina, 1986).
- Bozorth R.M., *Ferromagnetism*, (Van Nostrand, Toronto, 1951).
- Bronstein, J.N. y Semendjajew K.A., *Taschenbuch der Mathematik (Teil I)*, (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991).
- Brenner, E. y Javid, M., *Análisis de Circuitos Eléctricos*, (Ediciones del Castillo S.A., Madrid, 1966).
- Chapman, S.J., *Electric Machinery and Power System Fundamentals*, (McGraw-Hill, Boston, 2002).
- Cheng, D.K., *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*, (Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1997).
- Chikazumi, S., *Physics of Magnetism*, (Krieger, Florida, 1978).
- Cullity, B.D., *Introduction to magnetic materials*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1972).
- Dalven, R., *Introduction to Applied Solid State Physics*, (Plenum Press, New York, 1981).
- Durand, E., *Magnétostatique*, (Masson, Paris, 1968).
- Edminister, J.A. y Nahvi, M., *Circuitos Eléctricos*, (McGraw-Hill, Schaum, Madrid, 1997).
- Feynman, R., Leighton, R. y Sands, M., *Física*, vol 2, (Addison- Wesley Iberoamericana, Argentina, 1987).
- Fouillé, A., *Electrotecnia para Ingenieros*, (Aguilar S.A., Madrid, 1977).
- Gascón, F., *Electromagnetismo*, (Servicio de Publicaciones de la Fundación Gómez Pardo, Madrid, 1995).
- Grant, I.S. and Phillips, W.R., *Electromagnetism*, (John Wiley & Sons, Chichester, 1998).
- Harris, J.W. & Stocker, H., *Handbook of Mathematics and Computational Science*, (Springer, New York, 1988).
- Hernando, A. y Rojo, J. M., *Física de los materiales magnéticos*, (Síntesis, Madrid, 2001).
- Hook, J.R. & Hall, H.E., *Solid State Physics*, (John Wiley & Sons, Chichester, 1999).
- Irwin, J.D., *Análisis Básico de Circuitos en Ingeniería*, (Prentice Hall, México, 1997).
- Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- Joss, G. *Theoretical Physics*, (Dover, New York, 1986).

- Kraus, J.D. y Fleisch, D.A., *Electromagnetismo con Aplicaciones*, (McGraw Hill, México, 2000).
- Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., *Electrodinámica de los medios continuos*, (Editorial Reverté, Barcelona, 1975).
- López Pérez, E. y Núñez Cubero, F., *100 Problemas de Electromagnetismo*, (Alianza Editorial, Madrid, 1997).
- Lorrain, P. y Corson, D.R., *Campos y Ondas Electromagnéticas*, (Selecciones Científicas, Madrid, 1994).
- Marsden, J.E. y Tromba, A.J., *Cálculo Vectorial*, (Addison-Wesley Iberoamericana, 1987).
- Marshall, S.V., DuBroff, R.E. y Skitek, G.G., *Electromagnetismo, Conceptos y Aplicaciones*, (Prentice Hall Iberoamericana, México, 1997).
- Medina, R. y Porras, M.A., *Teoría Elemental de Electroestática y Corriente Continua*, (Servicio de Publicaciones de la Fundación Gómez Pardo, Madrid, 2000).
- Monn, P. & Spencer, D.E., *Field Theory Handbook*, (Springer Verlag, Berlin, 1961).
- Palacios, J., *Electricidad y Magnetismo*, (Espasa-Calpe S.A., Madrid, 1959).
- Panofsky, W. & Phillips, M., *Classical Electricity and Magnetism*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1978).
- Pearson, C.E., *Handbook of Applied Mathematics*, (Van Nostrand Reinhold, New York, 1990).
- Popovic, B.D., *Introductory Engineering Electromagnetics*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1971).
- Post, R.F. Un nuevo maglev, , *Investigación y Ciencia*, pp. 61-65, marzo 2000.
- Purcell, E.M., *Electricidad y Magnetismo*, Berkeley Physics Course, vol. 2, (Reverté, Barcelona, 1992).
- Ras, E., *Transformadores de potencia, de medida y de protección*, (Marcombo Boixareu Editores, Barcelona, 1991).
- Reitz, J.R., Mildford, F.J. y Christy, R.W., *Fundamentos de la teoría electromagnética*, (Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1996).
- Rodríguez, M., Bellver, C. y González, A., *Campos Electromagnéticos*, (Publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1995).
- Sears, F.W., Zemansky, M., Young, H. y Freedman, R., *Física. Vol. II*, (Pearson Educación, México, 1999).
- Serway, R.A., *Electricidad y Magnetismo*, (McGraw Hill, México, 1997).
- Spiegel, M.R., *Vector Analysis*, (Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1959).
- Wangness, R.K., *Campos Electromagnéticos*, (Limusa, México, 1993).

Electricidad y Magnetismo

Ejercicios y Problemas Resueltos

El presente libro de la colección PRENTICE PRACTICA está dirigido, fundamentalmente, a estudiantes del primer ciclo de Ingeniería y Física.

Cada capítulo consta de una breve introducción teórica seguida de ejercicios resueltos explicados de forma didáctica y en grado de dificultad creciente, con el fin de que el lector pueda profundizar en sus conocimientos de ELECTROMAGNETISMO en función de su nivel.

La obra contiene más de doscientos problemas resueltos, la mayor parte de los cuales han sido propuestos en los exámenes oficiales de la E. T. S. I. Minas de la Universidad Politécnica de Madrid en los últimos veinte años.



PRENTICE PRACTICA es una colección de libros, cuyo texto es eminentemente práctico. La finalidad de esta colección es permitir al alumno comprender y afianzar la asimilación de la teoría a través de diversos ejercicios y ejemplos.

PRENTICE PRACTICA es una colección amena, de carácter muy didáctico y que, de una forma sencilla, consigue que el alumno obtenga un perfecto manejo práctico de la asignatura.

PRENTICE PRACTICA está dirigida al alumno para conseguir su autoaprendizaje en la materia. La colección es una de las más actualizadas del mercado.



www.pearsoneducacion.com

ISBN 84-205-4214-8



9 788420 542140