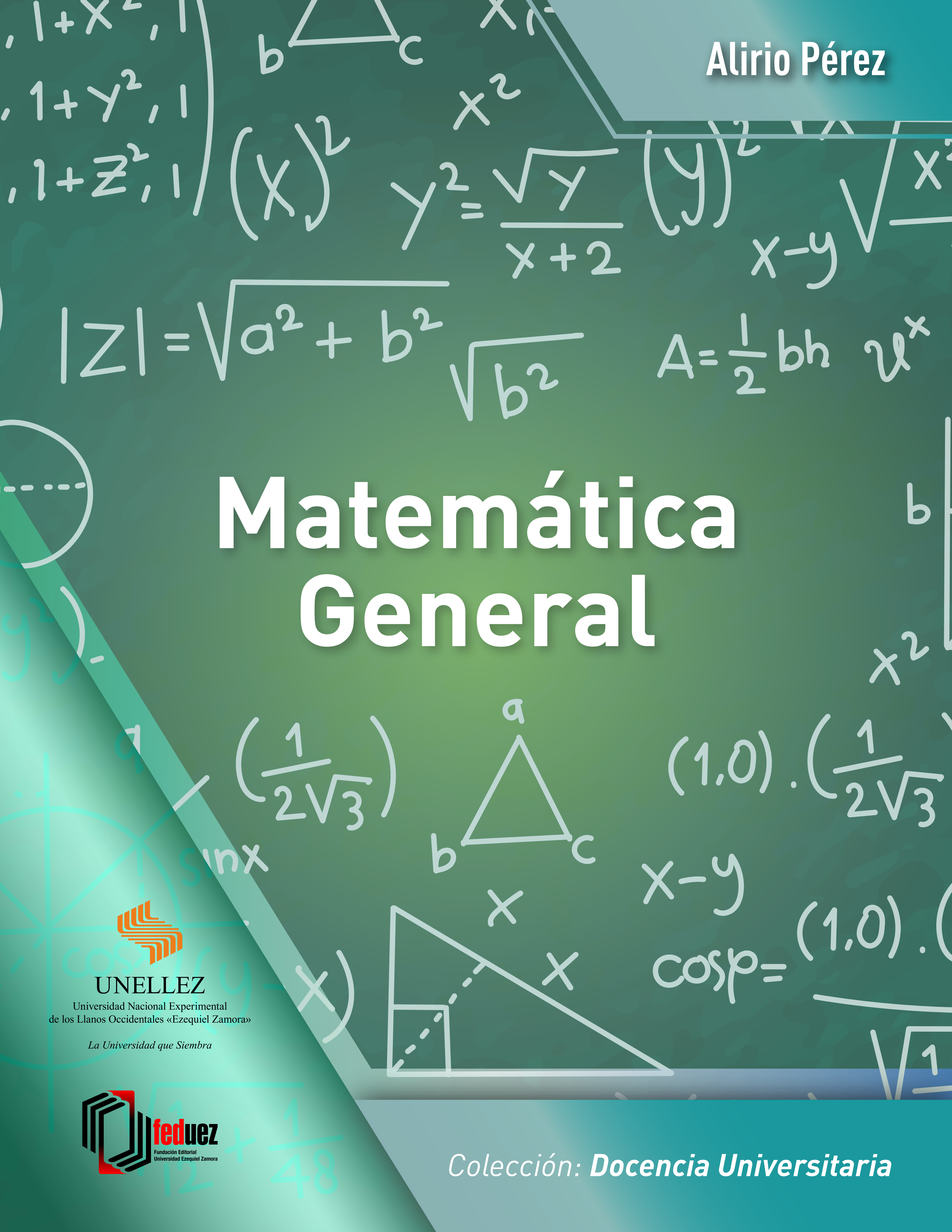


Alirio Pérez

Matemática General

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Colección: **Docencia Universitaria**

Matemática general

Primera edición, 2020

Diseño de cubierta:
Gustavo Quintana

Maquetación:
Alirio Pérez

Depósito Legal: BA2020000019
ISBN: 978-980-248-247-4

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

INDICE

INTRODUCCIÓN

Por todos es conocido que en nuestro quehacer diario una de las herramientas más utilizadas es la Matemática. Si vamos al abasto, mercado, tiendas en general, necesitamos por lo menos dominar las operaciones básicas de los números reales, o la aplicación de la teoría de conjunto. Profundizando más la situación, cualquier hecho ocurrido en la naturaleza necesita ser explicado, esta se hace con la ayuda de los modelos matemáticos, bien sea a través de inecuaciones, funciones, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias, entre otras. Es por ello que este curso tiene gran importancia en su futura carrera, ya que los participantes, representa el centro del proceso enseñanza – aprendizaje y por ende el logro de los objetivos propuestos; por lo que se hace necesario que participen en las actividades que ésta implica, tales como son: lectura detallada de la bibliografía presentada, así como de la exposición realizada en clase por el facilitador, los ejercicios resueltos en clase y la resolución de ejercicios propuestos tanto por el facilitador como los que aparecen en la bibliografía propuesta.

Este curso está dividido en tres (3) módulos que contienen elementos matemáticas básicos que ya ustedes como participantes vieron en el bachillerato, es decir, este es un curso de repaso, el cual le facilitaran la comprensión del cálculo diferencial e integral, los cuales serán estudiados más adelante. Por ser éste un curso básico los participantes tendrán que dedicar gran parte de su tiempo al mismo, sin olvidar que las operaciones básicas vistas en los años anteriores van a ser muy necesarias para el entendimiento del mismo.

Este curso pretende que el participante desarrolle su capacidad de análisis, aplicación y síntesis en el área de las matemáticas que le ayuden fundamentalmente a la mejor comprensión de algunos los subproyectos que verá en su formación en nuestra Universidad y en su crecimiento intelectual como ciudadano venezolano.

CAPÍTULO I

TEORÍA DE CONJUNTOS

Este capítulo se estudiara: *TEORIA DE CONJUNTO*: Definición de conjunto, Formas de denotar un conjunto, Cardinal de un conjunto, Inclusión de conjunto, Igualdad de conjunto, Conjunto vacío, Conjunto universal, Conjunto de las partes, Conjunto finito, Conjunto infinito, Unión de conjuntos, Intersección de conjuntos, Diferencia de conjuntos, Complemento de un conjunto, Cardinal del conjunto AUB, Cardinal del conjunto AUBUC y aplicación de los conjuntos a la vida real

Definición 1: Un *conjunto* se define como una agrupación de entes o cosas (llamados elementos), por ejemplo el conjunto formado por los alumnos de una sección de clases. Los conjuntos los *expresamos* con letras mayúscula, A, B, C, ... , los elementos de un conjunto con letras minúsculas encerrados entre llaves, por ejemplo, el conjunto A={a, b, c}, para decir que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos la letra griega $\in$, y para decir que un elemento no pertenece al conjunto utilizamos la misma letra pero atravesada por un /, por ejemplo $a\in A$, se lee a pertenece al conjunto A y $d\notin A$, d no pertenece al conjunto A.

Los conjuntos se denotan por:

a. *Por comprensión*: cuando se da una característica del conjunto, por ejemplo: el conjunto B={x/x es un Estado llanero} esta determinado por comprensión.

b. *Por extensión*: cuando se mencionan cada uno de los elementos de un conjunto, del ejemplo anterior el conjunto B expresado por extensión seria B={Apure, Barinas, Cojedes, Guarico, Portuguesa}.

Definición 2: El número de elementos que posee un conjunto recibe el nombre de *cardinal de un conjunto* y se denota con la letra n( ), por ejemplo, los cardinales de A y B se denotan como n(A)=3 y n(B)=5 respectivamente.

Definición 3: Un conjunto se dice que es *vacío* si no posee elementos, es decir, si su cardinal es igual a cero y se denota con la letra griega phi ϕ o { }, matemáticamente se define el conjunto vacío como $\phi = \{x \in A \wedge x \notin A\}$.

Definición 4: Se define *conjunto universal* como el conjunto de referencia que contiene un grupo de conjuntos dados, por ejemplo podemos tomar al Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Unellez como conjunto universal de los conjuntos formado por los salones, los Programas, las Coordinaciones, la Administración, etc. pero el Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Unellez puede también ser conjunto de otro conjunto universal mas grande, por ejemplo San Fernando de Apure, pero San Fernando de Apure puede ser de otro conjunto universal mas grande, por ejemplo Venezuela y así sucesivamente.

Definición 5: Un conjunto es *finito* si su cardinal es contable, en caso contrario se dice que el conjunto es *infinito*, ejemplo, el conjunto

A={a, b, c} es un conjunto finito, mientras que el conjunto C={x/x es una estrella} es un conjunto infinito.

<u>Definición 6:</u> Decimos que un conjunto A esta *<u>incluido o es subconjunto de otro conjunto</u>* B si se cumple: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \wedge x \in B$, que se lee: A esta incluido en B, si y solo si, para todo elemento "x", el "x" perteneciente al conjunto A y el elemento "x" pertenece a B, y su representación gráfica es:

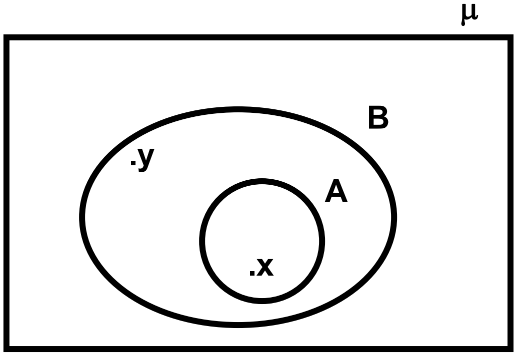


Fig. 1

Para decir que un conjunto no es subconjunto de un conjunto A no esta incluido en B, escribimos $A \not\subset B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$, que se lee A no esta incluido en B si y solo si "x" pertenece a A y "x" no pertenece a B, como podemos ver en el la Fig. 1, $B \not\subset A$, ya que, existe un y tal que "y" pertenece a B e "y" no pertenece a A, matemáticamente se escribe: $\exists y/(y \in B \wedge y \notin A)$.

<u>Definición 7:</u> Al conjunto de todos los subconjunto de un conjunto se le llama *<u>parte de un conjunto o potencia de un conjunto</u>* se denota por P(C), y su cardinal se encuentra por medio de la progresión geométrica $n[P(C)]=2^n$, donde n es el cardinal del conjunto, de aquí

que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos y todo conjunto es subconjunto de si mismo, por ejemplo el conjunto vacío tiene un solo subconjunto que es el mismo, $n[P(\phi)]=2^0= 1$ y el conjunto A tiene 8 subconjuntos ya que $n[P(A)]=2^3=8$, que en este caso son $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

<u>Definición 8:</u> Dos conjuntos A y B se dicen que son <u>*iguales*</u> si y solamente si A esta incluido en B y además B esta incluido en A, matemáticamente esto se escribe: $A=B \Leftrightarrow (A\subset B \wedge B\subset A)$.

<u>Definición 9:</u> Se define la <u>*unión*</u> de dos conjuntos A y B como los elementos "x" que pertenecen al conjunto A o los elementos de "x" que pertenecen al conjunto B, es decir, "x" pertenece a la unión de A y B, si y solo si "x" esta en A o "x" esta en B, matemáticamente: $x\in AUB \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)$, esto se ilustra gráficamente en las figuras 2, 3 y 4.

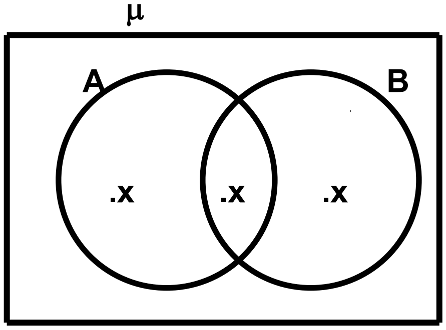


Fig. 2

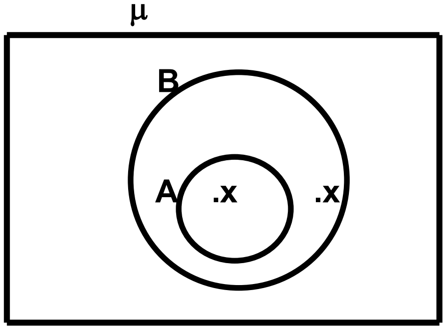


Fig. 3

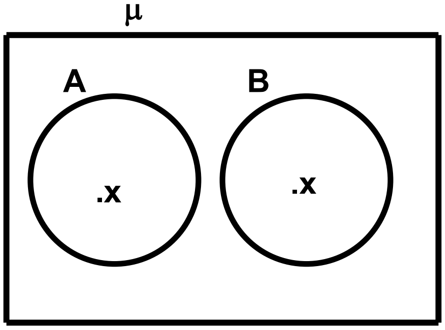


Fig. 4

De la Fig. 3 podemos deducir el siguiente teorema: si $A\subset B \Rightarrow AUB=B$.

Decimos que un elemento “x” no pertenece a la unión de dos conjuntos A y B si “x” no está ni en A ni en B, matemáticamente $x\notin AUB \Leftrightarrow (x\notin A \wedge x\notin B)$.

<u>Definición 10:</u> Se define la <u>*Intersección*</u> de los conjuntos A y B ($\cap$) como: el elemento “x” que pertenece tanto a A como a B, es decir son los elementos comunes a los dos conjuntos, matemáticamente: $x\in A\cap B \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B)$.

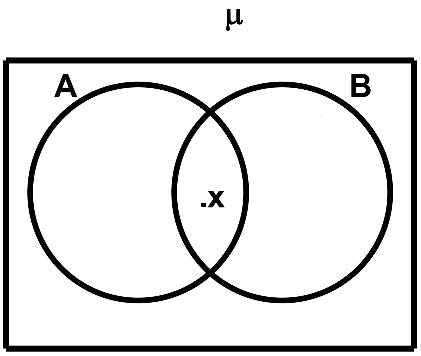


Fig. 5

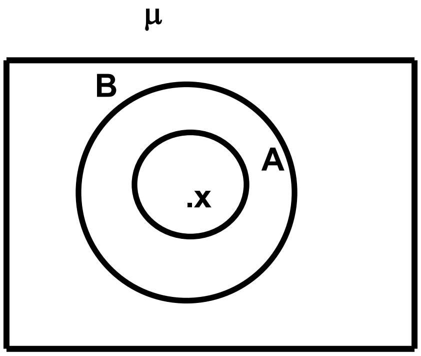


Fig. 6

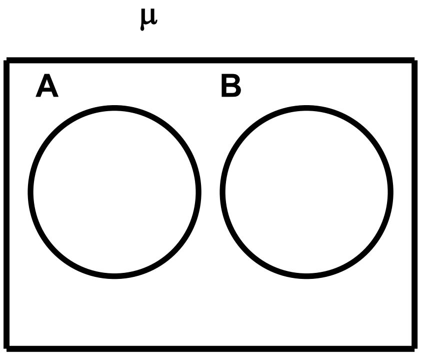


Fig. 7

De la Fig. 6 podemos deducir el siguiente teorema: Si $A\subset B \Rightarrow A\cap B=A$.

Si x no esta en la intersección se dan las siguientes conjeturas:

$$x\notin A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow \text{x esta en A pero no esta en B} \\ x\notin A \wedge x\in B \Rightarrow \text{x no esta en A pero si esta en B} \\ x\notin A \wedge x\notin B \Rightarrow \text{x no esta ni en A ni en B} \end{cases}$$

De estas tres conjeturas se obtiene $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$, es decir, si x no esta en A o no esta en la intersección o si x no esta en B tampoco esta en la intersección.

Definición 11: Se define la *diferencia (-) de los conjuntos A y B* como: como el elemento "x", que esta en A pero no esta en B, matemáticamente: $x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.

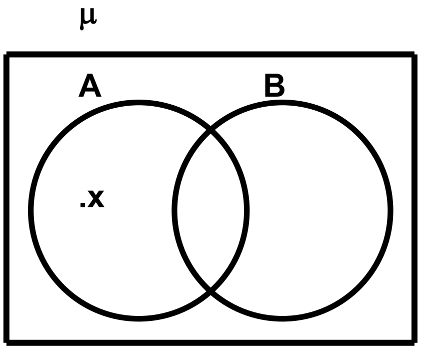


Fig. 8

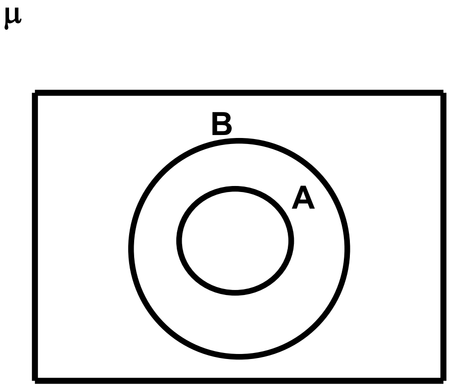


Fig. 9

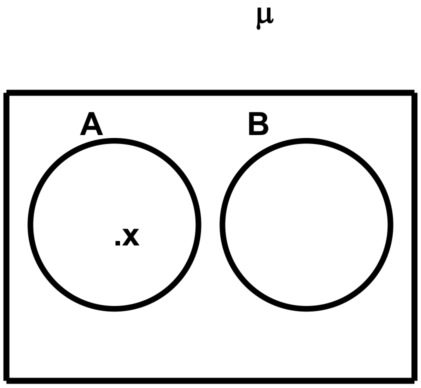


Fig. 10

De la Fig. 9 podemos deducir el siguiente teorema: Si $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$.

Si x no esta en la diferencia se dan las siguientes conjeturas:

$$x \notin A - B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \text{x esta en A y x esta en B} \\ x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow \text{x no esta en A pero si esta en B} \\ x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow \text{x no esta ni en A ni en B} \end{cases}$$

De estas tres conjeturas se obtiene $x \notin A - B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$, es decir, si x no esta en A, no esta en la diferencia o si x esta en B, tampoco esta en la diferencia.

<u>Definición 12:</u> Se define el *<u>Complemento de un conjunto A</u>* como: *(A') el elemento "x" que esta en el conjunto universal y no esta en el conjunto A, matemáticamente:* $x \in A' \Leftrightarrow (x \in \mu \wedge x \notin A)$, es decir, $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$, si pertenece al complemento del conjunto A, entonces x no esta en A, o viceversa, si esta en A no esta en su complemento, es decir, la unión del conjunto A con su complemento A' es el conjunto universal: $A \cup A' = \mu$ y el conjunto A interceptado con su complemento resulta el conjunto Vació: $A \cap A' = \phi$

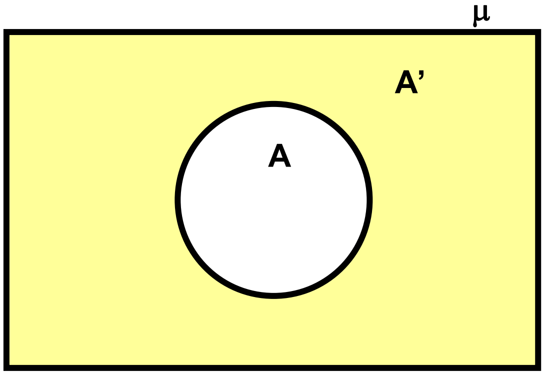


Fig. 11

<u>Ejemplo:</u> Sea el conjunto universal μ={1, 2, 3, ..., 10} y los conjuntos A={1, 2, 3, 4, 5}, B={1, 3, 4, 6, 7} y C={2, 4, 6, 8} si estamos interesados en hallar: AUB, A∩C, A∩(BUC), A-C y [(A∩B)-C]', lo primero que hacemos es representar los conjuntos μ, A, B y C gráficamente ver la Fig. 12, luego aplicamos las definiciones de unión, intersección, diferencia y complemento, obtenemos:

a. AUB={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

b. A∩C={2, 4}

c. **A∩(BUC)={2, 4}**

d. **A-C={1, 3, 5}**

e. **[¨(A∩B)-C]'={2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}**

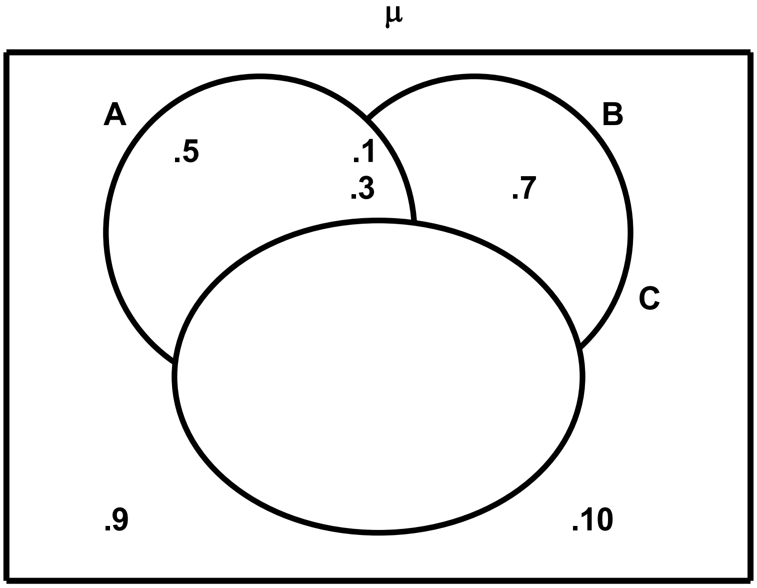


Fig. 12

<u>Definición 13:</u> Se define el *<u>cardinal del conjunto AUB</u>*, como el número de elemento que esta en A o esta en B y se obtiene por la formula:

n(AUB)= n(A) + n(B) - n(A∩B) y su representación gráfica esta en la Fig. 13:

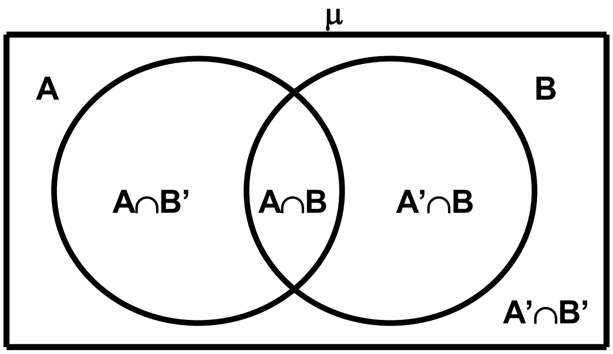


Fig. 13

<u>**Definición 14:**</u> **Se define el <u>*cardinal del conjunto AUBUC*</u>, como el número de elemento que esta en A o esta en B o esta en C, y se obtiene por la formula:**

n(AUBUC)= n(A) + n(B) + n(C) - n(A∩B) - n(A∩C) - n(B∩C) + n(A∩B∩C) y su grafica se muestra en la Fig. 14

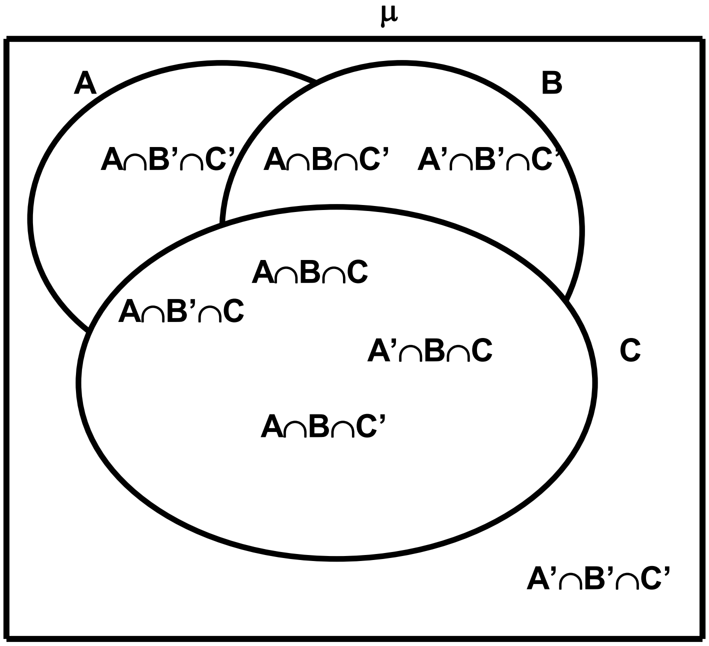


Fig. 14

De la Fig. 14 se tiene que:

n(μ)=n(AUBUC) + n(A'∩B'∩C') ⇒

n(A'∩B'∩C')= n(μ) - n(AUBUC) o n(AUBUC)=n(μ) - n(A'∩B'∩C')

<u>**Ejemplo**</u>**: En reunión del Coordinador de Extensión con los Facilitadores del curso de Aritmética para la escogencia de los días en que se dictará el curso de Aritmética, el Coordinador de extensión recomendó que el curso se puede realizar en tres días los cuales son:**

lunes de 2:00 p.m. a 6:00 p.m., miércoles de 2:00 pm. a 6:00 p.m. y los viernes de 8:00 a.m. a 12:00 m.

En consulta con los Facilitadores (17) para ver que día de los antes mencionados ellos no querían la sesión de clases, se obtuvo la siguiente información:

8 no querían las clases los lunes
8 no querían las clases los miércoles
6 no querían las clases los viernes
4 no querían las clases los lunes y miércoles
3 no querían las clases los lunes y viernes
2 no querían las clases miércoles y viernes
1 no querían las clases los tres días antes mencionados.

Se desea saber:

a. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases uno de los días mencionados?

b. ¿Cuántos de los Facilitadores querían las clases los días mencionados?

c. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes exclusivamente?

d. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los miércoles exclusivamente?

e. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los viernes exclusivamente?

f. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes y miércoles exclusivamente?

g. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes y viernes exclusivamente?

h. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los miércoles y viernes exclusivamente?

Solución: Denotaremos los que no querían las clases los lunes por $n(L)$, los que no querían las clases los miércoles por $n(M)$ y los que no querían las clases los viernes por $n(V)$.

Datos: $n(L)=8$, $n(M)=8$, $n(V)=6$, $n(L \cap M)=4$, $n(L \cap V)=3$, $n(M \cap V)=2$, $n(L \cap M \cap V)=1$,

a. $n(LUMUV)=?$

b. $n(L' \cap M \cap V)=?$

c. $n(L \cap M' \cap V)=?$

d. $n(L \cap M \cap V')=?$

e. $n(L \cap M' \cap V')=?$

f. $n(L' \cap M \cap V')=?$

g. $n(L' \cap M' \cap V)=?$

h. h.- $n(L \cap M' \cap V')=?$ Solución:

a. Según la fórmula para el cardinal de AUBUC, tenemos: $n(LUMUV)=n(L) + n(M) + n(V) - n(L \cap M) - n(L \cap V) - n(M \cap V) + n(L \cap M \cap V) \Rightarrow$ $n(AUBUC)=8 + 8 + 6 - 4 - 3 - 2 + 1=14 \Rightarrow n(AUBUC)=14$, lo que quiere decir que hay 14 Facilitatores que no quieren clases los lunes o los miércoles o los viernes

b. Como $n(\mu)=n(LUMUV) + n(L'\cap M'\cap V') \Rightarrow$ $n(L'\cap M'\cap V')=n(\mu)- n(AUBUC) \Rightarrow n(L'\cap M'\cap V')=17 - 14=3$, existen tres Facilitadores que quieren clases los días lunes, miércoles y viernes.

Para el resto de las preguntas la obtenemos mediante la Fig. 15. Sabemos que 4 no quieren clases ni los lunes ni los miércoles, pero además sabemos que entre esos 4 hay 1 que además no quiere clases los viernes, es decir los que no quieren clases exclusivamente los lunes y miércoles son 3 Facilitadores, de igual manera se llega a la conclusión de que los que no quieren clases exclusivamente los lunes y viernes son 2 Facilitadores y los que no quieren clase los miércoles y viernes exclusivamente es 1 Facilitador, los que no quieren clases exclusivamente los lunes son 2 Facilitadores, los que no quieren clases exclusivamente los miércoles son 3 Facilitadores y los que no quieren clases exclusivamente los viernes son 2 Facilitadores.

$\mu=17$

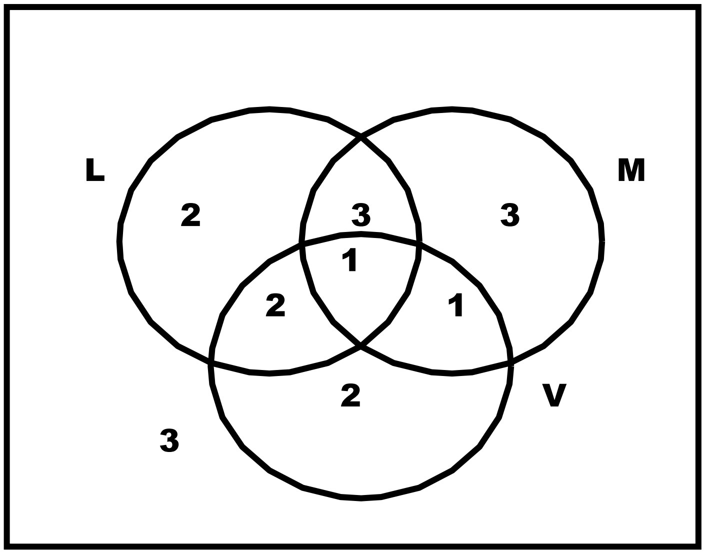


Fig. 15

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Expresar por extensión cada uno de los conjuntos que se dan por comprensión.

a) $A=\{x/x\in Z/x^2 + x - 12=0\}$

Solución: Factorizando $x^2 + x - 12=0$, buscamos dos números que multiplicados resulta -12 y restados resulte 1, todos estos números se obtienen de la descomposición del -12, es decir, $-12=-2_x2_x3$, por lo tanto, los números son: $x=-4$ y $x=3 \Rightarrow (x + 4)(x - 3)=0$, aplicando la propiedad de los reales $a_xb=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$, tenemos que $(x + 4)(x - 3)=0 \Rightarrow x=-4$ y $x=3$, por lo tanto, la solución es $A=\{-4, 3\}$

b) $B=\{x/x\in Q/6x^2 - 7x - 20=0\}$

Solución: Factorizando $6x^2 - 7x - 20=0$, multiplicamos toda la ecuación por 6 (elemento neutro de la suma en serie o multiplicación), $(6x)^2 – 7(6x) - 120=0$, ahora buscamos dos números que multiplicados de -120 y restados de -7, estos números se obtienen de la descomposición del -120, es decir, $-120=-2_x2_x2_x3_x5$, luego los números son: $6x=8$ y $6x=-15$, $\therefore$ $(6x + 8)(6x - 15)=0$, aplicando la propiedad de los reales $a_xb=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$, tenemos que (6x + 8)(6x -

15)=0 $\Rightarrow$ 6x=-8 $\Rightarrow$ $x=-\frac{4}{3}$ y 6x=15 $\Rightarrow$ $x=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{4}{3}$ y $x=\frac{5}{2}$, por lo tanto, la solución es $B=\{-\frac{4}{3},\frac{5}{2}\}$

c) $C=\{x/x\in Q'/x^2-2\sqrt{2}\,x-2=0\}$

Solución: Completando cuadrado en la ecuación $x^2-2\sqrt{2}\,x-2=0$, tenemos $(x-\sqrt{2})^2-2-2=0$ $\Rightarrow$ $(x-\sqrt{2})^2-4=0$ $\Rightarrow$ $(x-\sqrt{2})^2-2^2=0$, aplicando la identidad $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, donde $a=x-\sqrt{2}$ y $b=2$ se tiene $(x-\sqrt{2}-2)(x-\sqrt{2}+2)=0$, aplicando la propiedad de los reales $a_xb=0 \Rightarrow a=0$ o $b=0$, tenemos que $x-\sqrt{2}-2=0 \Rightarrow x=2+\sqrt{2}$ o $x-\sqrt{2}+2=0 \Rightarrow x=-2+\sqrt{2}$, por lo tanto, son ceros $C=\{-2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$

d) $D=\{x/x\in\Re/\,x^2-(3+2\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0\}$

Solución: En este problema factorizaremos la ecuación $x^2-(3+2\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$, aplicando la fórmula: $ax^2+bx+c=0$ $\Rightarrow$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a=1, $b=-(3+3\sqrt{3})$ y $c=3\sqrt{3}$, se tiene que:

$$x=\frac{-(3+2\sqrt{3})\pm\sqrt{(3+2\sqrt{3})^2-4_x3\sqrt{3}}}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-(3+2\sqrt{3})\pm\sqrt{21}}{2} \quad\Rightarrow$$

x=$\frac{-3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$ $\vee$ x=$\frac{-3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$, luego la solución es

D={$\frac{-3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$,$\frac{-3 - (2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$}

2. Expresar por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos que se dan por extensión.

a) A={-3,5}

<u>Solución</u>: tomando x_1=-3 y x_2=5, podemos escribir:

(x – 5)(x + 3)=0, resolviendo el producto notable (x – 5)(x + 3)=0 $\Rightarrow$ x^2 + 3x - 5x - 15=0 $\Rightarrow$ x^2 - 2x - 15=0, en consecuencia la solución es A={x/x$\in$Z/x^2 - 2x - 15=0}

b) B={$\frac{1}{2}$,$-\frac{4}{3}$}

<u>Solución</u>: tomando x_1=$\frac{1}{2}$ y x_2=$-\frac{4}{3}$, se puede escribir:

(x - $\frac{1}{2}$)(x + $\frac{4}{3}$)=0 $\Rightarrow$ (2x – 1)(3x + 4)=0, resolviendo el producto notable:

6x^2 + 8x – 3x - 4=0 $\Rightarrow$ 6x^2 + 5x - 4=0, con lo que tenemos que la solución es B={x/x$\in$Q/6x^2 + 5x - 4=0}

c) {$\sqrt{2}$,$-\sqrt{5}$}

<u>Solución</u>: tomando x_1=$\sqrt{2}$ y x_2=$-\sqrt{5}$, tenemos que:

$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{5})=0 \Rightarrow x^2 + \sqrt{5}\,x - \sqrt{2}\,x – 10=0 \Rightarrow x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})x – 10=0$,

en consecuencia la solución es $C=\{x/x\in Q'/\ x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})x – 10=0\}$

d) $\{\frac{1}{4},\sqrt{3}\}\{\sqrt{2},-\sqrt{5}\}$

Solución: tomando $x_1=\frac{1}{4}$ y $x_2=\sqrt{3}$, tenemos que:

$(x - \frac{1}{4})(x - \sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad (4x – 1)(x - \sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 4\sqrt{3}\,x - x + \sqrt{3}=0$

$\Rightarrow x^2 – (4\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}=0$ $\therefore$ la solución es:

$C=\{x/x\in\Re/x^2 – (4\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}=0\}$

3. Sean A, B y C tres conjuntos tales que: $(A\cup B)\subset A\cup C)$ y $(A\cap B)\subset(A\cap C)$. ¿Qué se puede decir de los conjuntos B y C?

Solución: Demostremos por la doble implicación:

($\Leftarrow$ como $(A\cup B)\subset(A\cup C)$ implica que la parte de B que no esta contenida en A, debe estar contenida en C. Si $x\in B$ pero $x\notin A \Rightarrow x\in A\cup B$, pero por hipótesis $A\cup B\subset A\cup C \Rightarrow x\in A\cup C$, $x\notin A \Rightarrow x\in C$

($\Rightarrow$ El que $(A\cap B)\subset(A\cap C)$ implica también que la parte de B contenida en A esta contenida en C.

Si $x\in B$ y $x\in A \Rightarrow x\in(A\cap B)\subset A\cap C)\subset C \Rightarrow x\in C$, luego, si $x\in B$ (tanto si $x\in A$ como si $x\notin A$) $\Rightarrow x\in C$ $\therefore$ podemos decir que $B\subset C$

4. En la sección A de matemática I de la Carrera de Planificación están inscritos 72 alumnos, de los cuales 22 aprobaron el módulo I, 26

aprobaron el módulo II, 30 aprobaron el módulo III, 6 aprobaron el modulo I y II, 8 aprobaron el módulo I y III, 10 aprobaron el módulo II y III, 16 no aprobaron ninguno de los tres módulos. Se desea saber:

a) ¿Cuántos alumnos aprobaron el módulo I o el módulo II o el módulo III?

b) ¿Cuántos alumnos aprobaron los tres módulos simultáneamente?

c) ¿Cuántos alumnos aprobaron exclusivamente el módulo I?

d) ¿Cuántos alumnos aprobaron exclusivamente el módulo II y III?

Datos:

μ=72

n(I)=22

n(II)=26

n(III)=30

n(I∧II)=6

n(I∧III)=8

n(II∧III)=10

n(I'∧II'∧III')=16

n(I∨II∨III)=?

n(I∧II∧III)=?

n(I∧II'∧III')=?

n(I'∧II∧III)=?

Solución: a) Aplicando la fórmula: $n(\mu)=n(I\vee II\vee III) + n(I'\wedge II'\wedge III') \Rightarrow 72=n(I\vee II\vee III) + 16 \Rightarrow n(I\vee II\vee III)=72 - 16 \Rightarrow n(I\vee II\vee III)=56$, $\therefore$ los alumnos que aprobaron o el módulo I o el módulo II o el módulo III son 56

Solución b) Aplicando la fórmula:

$n(I\vee II\vee III)=n(I) + n(II) + n(III) - n(I\wedge II) - n(I\wedge III) - n(II\wedge III) + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow$

$56=22 + 26 + 30 - 6 - 8 - 10 + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III)=56 - 54 \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III)=2$

$\therefore$ los alumnos que aprobaron los tres módulos simultáneamente son 2

Para la solución c) y d) realizaremos primero el diagrama de Venn, con los datos obtenidos

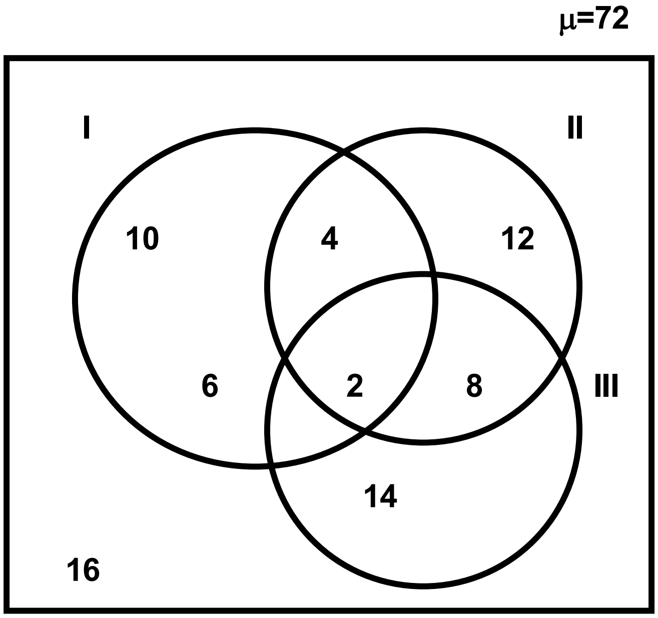


Fig. 16

Este diagrama se obtuvo aplicando las fórmulas:

$n(I\wedge II)=n(I\wedge II\wedge III') + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 6=n(I\wedge II\wedge III') + 2 \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III')=4$

$n(I\wedge III)=n(I\wedge II'\wedge III) + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 8=n(I\wedge II'\wedge III) + 2 \Rightarrow n(I\wedge II'\wedge III)=6$

$n(II\wedge II)=n(I'\wedge II\wedge III) + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 10=n(I'\wedge II\wedge III) + 2 \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III')=8$

$n(I)=n(I\wedge II) + n(I\wedge II'\wedge III) + n(I\wedge II'\wedge III') \Rightarrow 22=6 + 6 + n(I'\wedge II'\wedge III') \Rightarrow n(I\wedge II'\wedge III')=10$

$n(II)=n(I\wedge II) + n(I'\wedge II\wedge III) + n(I'\wedge II\wedge III') \Rightarrow 26=6 + 8 + n(I'\wedge II\wedge III') \Rightarrow n(I'\wedge II\wedge III')=12$

$n(III)=n(I\wedge III) + n(I'\wedge II\wedge III) + n(I'\wedge II'\wedge III) \Rightarrow 30=8 + 8 + n(I'\wedge II'\wedge III) \Rightarrow n(I'\wedge II'\wedge III)=14$, luego, solución c) los alumnos aprobaron exclusivamente el módulo I son 10 y la solución d) los alumnos aprobaron exclusivamente el módulo II y III son 14.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Sean los conjuntos: A={{1. 2},{3, 4, 5}, {7}}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y C={{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}}.**

¿Cuales de las siguientes expresiones son verdaderas y cuales son falsas?

a. $\{1, 2\}\in A$ ( )

b. $\{1, 2\}\subset A$ ( )

c. $\{1, 2\}\in B$ ( )

d. $\{1, 2\}\subset B$ ( )

e. $\{1, 2\}\in C$ ( )

f. $\{1, 2\}\subset C$ ( )

g. $\{1\}\in A$ ( )

h. $\{1\}\in B$ ( )

i. $\{1\}\in C$ ( )

j. $\{1\}\subset A$ ( )

k. $\{1\}\subset B$ ( )

l. $\{2\}\subset B$ ( )

2. **Simplificar la expresión: $(((A\cup B)'\cap C')\cap(B\cup(A\cup B)'))\cup((A\cap B)'\cup A')$**

3. **Sean los conjuntos: *u*={1, 2, 3, ..., 15}, A={1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}, B={1, 2, 6, 7, 11, 12} y C={1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15}. Hallar:**

a. AUBUC

b. $A\cap B\cap C$

c. $(A-B)\cap(C-A)$

d. $[(A'-C')-B']'$

e. $A'\cap B'\cap C'$.

4. En cierto problema el universo de referencia es el conjunto μ={1, 2, ..., 9, a, b, ..., g}, A={1, 2, 4, 5, 8, b, c, d, f}, B={1, 4, 9, a, d, g}, y C={3, 5, 9, A}. Calcular y representar gráficamente:

a. AUB, BUC

b. (AUB)UC

c. $A\cap C$, $(A\cap B)\cap C$

d. A-B, (AUB)-C

e. $(A\cap B)-(A\cap C)$

f. A'

g. (AUB)'

h. (A-B)'

i. P(C)

j. $P(A\cap C)$

k. $P(B\cap C)$

l. En cada caso diga el cardinal del conjunto

5. Sea el conjunto universal el dado en el problema anterior y dados los conjuntos A={a, c, e, g}; B={a, d, g} y C={a, b, e, h}. Hallar:

a. (AUB)-C

b. A'-(B-C)

c. $(B\cap C)'-A'\cap B'$

6. Expresar por comprensión, extensión, hallar el cardinal y el conjunto de las partes del conjunto cuyos elementos son los puntos cardinales.

7. Sea μ el conjunto cuyos elementos están formado por los estados de Venezuela y sus capitales.

Expresar por comprensión y extensión el conjunto μ y cada uno de los siguientes subconjuntos de μ que se dan a continuación.

a. Los Estados orientales de Venezuela.

b. Los Estados centrales de Venezuela.

c. Los Estados occidentales de Venezuela.

d. Los Estados andinos de Venezuela.

e. Las capitales los Estados llaneros de Venezuela.

f. Las capitales los Estados del sur de Venezuela

g. Las capitales los Estados orientales de Venezuela.

h. La capital de Venezuela.

8. Dados los conjuntos:

A={x/x son todos los carros de Venezuela}

$B=\{x/x \in Z\}$

C={$x/x \in Z^{+}$ y además /$1 \leq Z^{+} \leq 100$}

Indique cuales de estos conjuntos son finitos e infinitos

9. Dados los conjuntos:

A={x es de la forma 2x + 1/$1 \leq x \leq 4$}

B={x es de la forma 2x + 1/$1 \leq x \leq 4$}

$C=\{x$ es de la forma $2x + 1/1\leq x\leq 4\}$

Indique en los casos que se dan a continuación si están incluidos ($\subset$) o no están incluidos ($\not\subset$) en los siguientes pares de conjuntos:

A_____B A_____C B_____A B_____C C_____A C_____B

10. Comprobar por medio de las propiedades de los conjuntos que:

a. $A\cup B=B\cup A$

b. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

c. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

d. $(A\cup B)'=A'\cap B$

e. $A - B=A\cap B'$

f. $A\subset B \Rightarrow A - B=\phi$

g. $(A\cup B) - (A\cap B)=(A - B)\cup(B - A)$, Resultado este que recibe el nombre de diferencia simétrica entre A y B y se denota por $A\Delta B$

h. $((A\cup\mu)\cap(A\cap\phi)=\phi$

11. ¿Es posible calcular los elementos del conjunto C y sus subconjuntos A y B sabiendo que $C - A=\{2, 9, 13, 18, 20\}$, $C - B=\{2, 6, 8, 20\}$ y $A - B=\{1, 5, 6, 14\}$

12. El Concesionario del comedor de la UNELLEZ realiza una encuesta entre los estudiantes que lo utilizan, para determinar el porcentaje que prefieren leche en polvo o leche pasteurizada; obteniéndose los siguientes resultados:

55% prefieren leche en polvo

35% prefieren leche pasteurizada

30% no tienen preferencia por ninguno de los dos tipos

Se desea saber:

a. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren leche en polvo o leche pasteurizada?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren leche en polvo y leche pasteurizada?

c. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren exclusivamente leche en polvo?

d. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren exclusivamente leche pasteurizada?

13. El INAVI exige como requisito primordial para la adjudicación de una vivienda, que los solicitantes sean casados, no posean vivienda propia y tengan un ingreso mensual igual o menor al sueldo mínimo. El INAVI recibió 5.000 solicitudes de personas que desean obtener viviendas y al procesar dichas solicitudes se obtuvieron los resultados:

3.050 solicitantes de personas casadas

2.450 solicitantes de personas que no poseen vivienda propia

3.650 solicitantes de personas cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

1.500 solicitantes de personas que son casadas, pero no poseen vivienda propia

2.500 solicitantes de personas casadas y cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

1.700 solicitantes de personas que no poseen vivienda propia y cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

4.650 solicitantes cumplen por lo menos con uno de los tres requisitos

Se desea saber:

a. ¿Cuántas solicitudes no cumplen con ninguno de los tres requisitos?

b. ¿Cuántas solicitudes cumplen simultáneamente con los tres requisitos?

14. La constructora San Fernando ha comprado un lote de 2.200 cabillas en un remate. Una clasificación de dichas cabillas a demostrado que estas pueden ser utilizadas en tres operaciones diferentes como se especifica a continuación:

1.000 para la operación A

880 para la operación B

100 para la operación A y C exclusivamente

500 para la operación A y B

360 para la operación B exclusivamente

1.560 para la operación A o B

1.210 para la operación B o C

Hallar:

a. El número de cabillas que pueden utilizarse simultáneamente para las tres operaciones.

b. El número de cabillas que son desechadas.

15. En una encuesta realizada por el Departamento de Salud en San Fernando se encuestaron a 2.000 personas sobre su preferencia de tres pastillas para calmar el dolor de cabeza, obteniéndose la siguiente información:

1.158 prefieren aspirina

1.050 prefieren bral

632 prefieren cafenol

280 prefieren únicamente aspirina

180 prefieren aspirina y cafenol exclusivamente

172 prefieren bral y cafenol

1.798 prefieren aspirina o bral o cafenol se desea saber:

a. ¿Cuántas personas prefiera únicamente cafenol?

b. ¿Cuántas personas prefiera al menos uno de los productos mencionados?

c. ¿Cuántas personas no prefiera ninguno de los productos mencionados?

1. El departamento de ventas de Comercial Traki selecciona 2.000 clientes entre todos los que poseen cuenta de crédito en dicho establecimiento y se les pregunta sobre el uso que han dado a su crédito durante el pasado año, obteniéndose los siguientes resultados:

550 clientes en juguetes

600 clientes en artículos de vestir

1.100 clientes en artefactos para el hogar

300 clientes en juguetes y artículos de vestir

220 clientes en juguetes y artefactos para el hogar

500 clientes en artículos de vestir y artefactos para el hogar

200 clientes en juguetes, artículos de vestir y artefactos para el hogar.

Se pregunta:

a. ¿Cuantos clientes no usaron su crédito en ninguna de estos tres créditos mencionadas?

b. ¿Cuantos clientes usaron su crédito sólo para comprar juguetes?

17. El departamento de salud en San Fernando efectúa una encuesta sobre los hábitos de fumar de la población san fernandina, con los siguientes resultados:

12.5% fuman pipa

24.5% fuman cigarro

20.0% fuman tabaco

10.0% fuman pipa y cigarro

7.8% fuman pipa y tabaco

12.2% fuman cigarro y tabaco

34.7% fuman al menos uno de los tres productos mencionados

Se pregunta:

a. ¿Cuántas de las personas encuestadas no fuman ninguno de los tres productos mencionados?

b. ¿Cuántas de las personas encuestadas fuman exactamente dos de los productos mencionados?

CAPÍTULO II

CONJUNTOS NUMERICOS

En este capítulo se estudiara: *CONJUNTOS NUMERICOS*: Conjunto inductivo, Conjunto de los números enteros positivos, Conjunto de los números enteros negativos, Conjunto de los números enteros, Conjunto de los números racionales o fraccionarios, Conjunto de los números primos, Conjunto de los números irracionales, Conjunto de los números reales, Propiedades de los números reales, Mínimo común múltiplo, Máximo común divisor, Números coprimos. *OPERACIONES EN $\Re$:* Suma, resta, multiplicación y división de números reales, aplicaciones de los números reales.

<u>Definición 1:</u> Un conjunto *S* se dice que es <u>*inductivo*</u> si cumple con las siguientes condiciones:

1. $1 \in S$
2. Si $s \in S \Rightarrow s + 1 \in S$

Por medio de la definición anterior definimos el número 1, tomando s=1 y aplicando la segunda propiedad (1 + 1) definimos el número 2 y otra vez por la propiedad 2 obtenemos (2 + 1) y lo llamamos 3 y así sucesivamente:

3 + 1 = 4

4 + 1 = 5

.

.

.

n - 1 + n=n

El conjunto formado {1, 2, 3, 4, …... n - 1, n, …...} recibe el nombre de los *enteros positivos* y lo denotaremos Z^+.

<u>Definición 2:</u> Un conjunto se dice que es <u>denso o cerrado</u> con respecto a una operación, si para cada par de elementos del conjunto se tiene que al realizar dicha operación el resultado queda dentro del conjunto.

Si queremos saber si el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición tenemos que ver si se cumple la definición de densidad, Heli: $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow a + b \in Z^+$, vemos que siempre esto es cierto y de igual manera $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow axb \in Z^+$, por lo tanto, el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición y el producto, como este conjunto no es cerrado para la sustracción ya que $\forall a, b \in Z^+ \Rightarrow a - b \notin Z^+$, entonces formamos el conjunto de los enteros negativos que se define como $Z^- = -Z^+$, es decir: $Z^+=\{1, 2, 3, ...\}$ y $Z^-=\{.... -3, -2, -1\}$.

<u>Definición 3:</u> Se define como *el <u>número cero</u>* {0} al punto medio de los números pertenecientes a Z^+ y Z^-, es decir:

{0}={(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), ..., (-n, n), ………………..}

<u>Definición 4:</u> Se define el *<u>conjunto de los números enteros</u>* como aquel conjunto que esta unido por los tres conjuntos formados anteriormente, y lo denotamos por *Z*, es decir: $Z=Z^- U Z^+ U\{0\}$, este conjunto

es cerrado para la adición, producto y sustracción, pero no es cerrado para el cociente, es por ello que tenemos que formar un conjunto donde el cociente este bien definido y este conjunto es el que definiremos a continuación.

Definición 5: Se define el *conjunto de los números racionales o fraccionarios* como el conjunto de números cuyo cociente es el conjunto de los números enteros sobre la unión de los enteros positivo y los enteros negativos y este conjunto lo denotaremos por *Q*, es decir, $Q=\frac{Z}{Z^{-}UZ^{+}}$, al realizar este cociente siempre resulta que queda una cantidad decimal periódica, es por ello que este conjunto también se puede expresar como: $Q=z,\overline{abcd........}$ donde z, a, b, c. son números enteros, es decir, z, a, b, c, d,…..∈*Z*. Cuando el número que se repite es el cero no se coloca, es decir, queda tácito, cuando los números son distintos del cero se le coloca una raya arriba del período, ejemplo: $\frac{8}{2}=4$, no hace falta colocar el cero, ejemplo: $\frac{1}{3}=0,33....$, como el número que se repite es distinto de cero, se tiene que escribir $0,\overline{3}$; el caso de $\frac{4}{7}=0,571428571428.........=0,\overline{571428}$

Definición 6: Un número entero se dice que es *primo* si este posee cuatro divisores, y lo denotaremos por: P(Φ)={±2, ±3, ±5, ±7, ±11 ,±13 ...} y definiremos al conjunto de los números enteros que tienen más de

cuatro divisores como _compuestos_ este conjunto esta formado por: {±4, ±6, ± 8, ±9 ,±10, ±12, ...}

Nota: Como el número 1 y 0 fueron definidos de manera especial estos no son ni primos ni compuestos.

Definición 7: Sea a un número primo y n un número entero, es decir, $a \in P(\Phi)$ y $n \in Z$, entonces, se define $q \in Q$ como aquel conjunto de número que se puede expresar de la manera siguiente: $q=a^n$ que es otra forma de definir a los _números racionales o fraccionarios_.

Definición 8: Si en la expresión $q=a^{n,}$ $\forall n \notin Z$, este conjunto de números recibe el nombre de _números irracionales_ y tienen la particularidad de que nunca dejan una cantidad decimal periódica, es decir, es el complemento del conjunto de los números racionales y lo denotaremos por Q' y sus elementos tienen la forma $p=b^{m/n}$ o $\sqrt[n]{b^m}$, con $p \in Q'$. por ejemplo: $5^{7/9} = \sqrt[9]{5^9}$

Donde:

$\sqrt{\ }$: Radical

b: Cantidad sub-radical

m: Potencia de la cantidad sub-radical

n: Índice del radical

Nota:

$$q=a^n \begin{cases} \text{es } \textit{racional} \text{ si } n \in Z \\ \text{es } \textit{irracional} \text{ si } n \notin Z \end{cases}$$

Como números irracionales tenemos el conjunto de raíces que no son exactas. El conjunto de los números racionales (Q) es cerrado con respecto a la adición, sustracción, producto y cociente ya que $\forall$a, b$\in Q$

$\Rightarrow$ a + b, a - b, $a_x b$. $\frac{a}{b} \in Q$. El conjunto de los números irracionales es cerrado solamente para la adición, ya que:

$\forall a, b \in Q' \Rightarrow$ a - $b \notin Q'$, $a_x b \notin Q'$. $\frac{a}{b} \notin Q'$.

<u>Ejemplo</u>: $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{8}$, $c=\sqrt{2}$ se tiene $a.c \notin Q'$ y $a - c = 0 \notin Q'$, a, $b \notin Q'$ y $a_x b = 4 \notin Q'$ a, $b \in Q'$ y $\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \notin Q'$.

<u>Definición 9:</u> Se define el <u>*conjunto de los números reales ($\mathfrak{R}$)*</u> como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, es decir; *$\mathfrak{R}$=QUQ'*. El conjunto de los números reales es cerrado con respecto a las operaciones de adición, sustracción, producto y cociente ya que: $\forall a, b \in \mathfrak{R} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{R}$, $a - b \in \mathfrak{R}$, $a.b \in \mathfrak{R}$ y $\frac{a}{b} \in \mathfrak{R}$.

Representación gráfica del conjunto de los números reales.

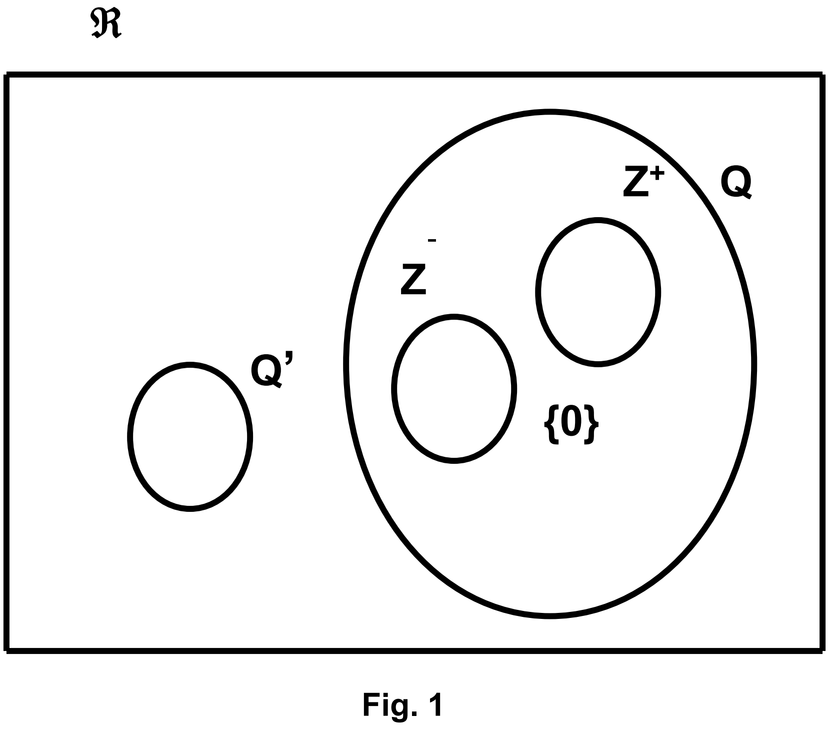


Fig. 1

Representación en la recta de los conjuntos numéricos.

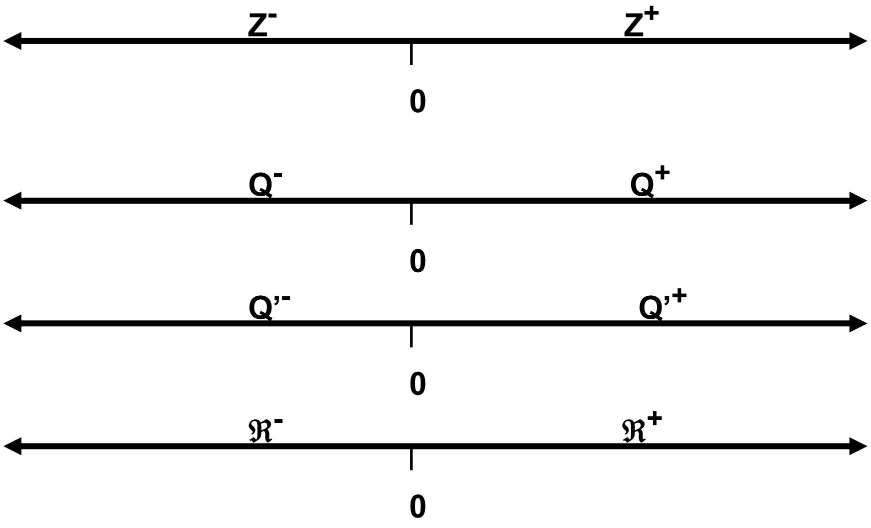


Fig. 2

Definición 10: **Definiremos al** ***conjunto de los números reales ampliados*****, como conjunto de números reales acotados por los símbolos ±∞ y que cumple con las siguientes condiciones:**

1. $\pm\infty \pm K = \pm\infty$

2. $\pm\infty . K = \pm\infty$

3. $\frac{K}{\pm\infty} = 0$

4. $\frac{\pm\infty}{K} = \pm\infty$

5. $\frac{K}{0} = \pm\infty$

Donde K es un número real cualquiera distinto de 0.

La recta real ampliada se representa:

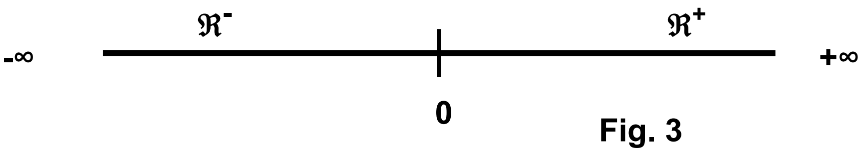


Fig. 3

Propiedades de los números reales

Propiedades de la adición

1. *Asociativa*: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene,$(a + b) + c=a + (b + c)$, es decir, la operación suma esta definido nada más para sumar dos elementos, si en una operación existen más de dos elementos, operamos primero dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.

Ejemplo: a.- $(4 + 6) + 5=10 + 5=15=4 + (6 + 5)=4 + 11=15$;

b. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

2. *Conmutativa*: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a + b=b + a$, es decir el orden de los factores no altera el sumando.

Ejemplo: a.- $3 + 5= 5 + 3= 8$

b. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

3. *Elemento neutro o neutro aditivo*: $\forall a \in \Re$, $\exists e \in \Re / a + e=e + a=a$, es decir, en $\Re$ existe un elemento que sumado a cualquier número real deja a este invariante, este número es el cero $(e=0)$.

Ejemplo: a.- $4 + 0=0 + 4=4$

b. $\sqrt{2} + 0=0 + \sqrt{2}=\sqrt{2}$

4. *Elemento simétrico o inverso aditivo*: $\forall a \in \Re$, $\exists\ a^{-1} \in \Re / a + a^{-1}=a^{-1} + a=e=0$, $\Rightarrow a^{-1} + a=0 \Rightarrow a^{-1}=-a$, es decir, en $\Re$ todo número tiene un simétrico que al sumarlo a su opuesto me da el cero, a a^{-1}, se le llama *inverso aditivo*.

Ejemplo: a.- $5 + (-5)= (-5) + 5= 0$

b. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$

Propiedades del producto

5. *Asociativa*: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene, $(a_x b)c=a(b_x c)$, es decir, como el producto es una suma en serie y la suma esta definido nada más para sumar dos elementos, el producto de igual manera esta definida para operar dos elementos, operamos los primeros dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.

Ejemplo: a.- $(4_x 6)5=24_x 5=120=4(6_x 5)=4_x 30=120$

b. $(\sqrt{2}_x\sqrt{3})\sqrt{5} = \sqrt{2}(\sqrt{3}_x\sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{6}_x\sqrt{5} = \sqrt{2}_x\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{30} = \sqrt{30}$

6. *Conmutativa*: $\forall a, b \in \Re$ se tiene, $a_x b=b_x a$, es decir, el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo: a.- $3_x 5=5_x 3=15$

b. $\sqrt{2}_x\sqrt{3} = \sqrt{3}_x\sqrt{2} = \sqrt{6}$

7. *Elemento neutro o neutro multiplicativo*: $\forall a \in \Re$, $\exists e \in \Re / a_x e=e_x a=a$, es decir, en $\Re$ existe un elemento que multiplicado a cualquier número real me deja a este invariante, este numero es el uno (e=1).

Ejemplo: a.- $4_x 1=1_x 4=4$

b. $1_x\sqrt{2} = \sqrt{2}_x 1 = \sqrt{2}$

8. *Elemento simétrico o Elemento inverso multiplicativo*: $\forall a \in \Re$, $\exists a^{-1} \in \Re / a.a^{-1}=a^{-1}{}_x a=e=1 \Rightarrow a^{-1}{}_x a=1 \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{a}$, es decir, en $\Re$ todo número tiene un simétrico que al multiplicarlo a su opuesto da como resultado el

número uno, a a^{-1} se le llama *inverso multiplicativo*.

Ejemplo: a.- $5_x\frac{1}{5}=\frac{1}{5}{}_x5=1$

b. $\sqrt{2}x\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

9. *Distributiva:* $\forall$a, b, c$\in\Re$ se tiene: $a(b + c)=a_xb + a_xc=b_xa + c_xa=(b + c)a$.

Ejemplo: a.- $5(4 + 3)=5_x4 + 5_x3=20 + 15=35=(4 + 3)5=7_x5=35$

b. $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{2}_x\sqrt{3}+\sqrt{2}_x\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3}_x\sqrt{2}+\sqrt{5}_x\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{2}$

***Elemento absorbente:* $\forall a\in\Re$, $\exists 0\in\Re/0a=a0=0$, es decir, en $\Re$ todo número al multiplicarlo por el cero es absorbido por este.**

Definición 11: Un conjunto que posee las propiedades 1, 3 y 4 recibe el nombre de *Grupo* y si además posee la propiedad 2 recibe el nombre de *Grupo Abeliano o Grupo conmutativo*. Un conjunto que posee las propiedades 5 y 7 recibe el nombre de *Anillo* y si además posee la propiedad 6 recibe el nombre de *Anillo Abeliano o Anillo conmutativo* y si además posee la propiedad 8 recibe el nombre de *Anillo con elemento unidad*. Un conjunto que posee las propiedades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 recibe el nombre de *Campo o Cuerpo*, lo que quiere decir, que el conjunto de los números reales es un *Campo* o un *Cuerpo*.

Definición 12: En la recta real diremos que un número es *menor que (<)* [mayor que (>)] si este se encuentra a la izquierda de este (si este se encuentra a la derecha de este).

Ejemplo: a.- $5<7$ y $9>7$

b. $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ **y** $\sqrt{5}>\sqrt{3}$

10. *<u>Ley de Triconótomia</u>*: $\forall a, b, c \in \Re$ se cumple nada más que una de las siguientes condiciones:

i. a=b

ii. a<b

iii. a>b

11. El conjunto de los números reales es una relación de orden, ya que cumple con las propiedades *<u>reflexiva, antisimétrica y transitiva</u>*:

a. *<u>Reflexiva</u>*: $\forall a \in \Re$ se tiene que a=a.

b. *<u>Antisimétrica</u>*: $\forall a, b \in \Re$ se tiene que si a<b y b<a $\Rightarrow$ a=b

c. *<u>Transitiva</u>*: $\forall a, b, c \in \Re$ se tiene que si a<b y b<c $\Rightarrow$ a<c

<u>Otras propiedades de los reales</u>

12. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re /$ si $a<b \Rightarrow a + c<b + c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5 + 3< 7 + 3 \Rightarrow 8<10$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 1$

13. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re^{+} /$ si $a<b \Rightarrow a_x c<b_x c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5_x 3<7_x 3 \Rightarrow 15<21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}_x\sqrt{8} < \sqrt{3}_x\sqrt{8}\ \sqrt{16} < \sqrt{24} \Rightarrow 4 < 2\sqrt{6}$

14. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re^{-} /$ si $a<b \Rightarrow a_x c>b.c$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 5(-3)>7(-3) \Rightarrow -15>-21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{8}) > \sqrt{3}\,(-\sqrt{8}) \Rightarrow -\sqrt{16} > -\sqrt{24} \Rightarrow -4 > -2\sqrt{6}$

15. $\forall a, b \in \Re, \exists c \in \Re /$, si $a<b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

<u>Ejemplo</u>: a. $5<7 \Rightarrow 1/5>1/7$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

16. $\forall a \in \Re$ **se tiene que** $a^2>0$ **Si** $a=0 \Rightarrow a^2=0$

Ejemplo: **a.** $2^2=4>0$ $(-2)^2=4>0$

b. $(\sqrt{2})^2 = 2$ **y** $(-\sqrt{2})^2 = 2$

17. $\forall a, b \in \Re$, **se tiene que** $(a + b)^2 > a^2 + b^2$

Ejemplo: $(3 + 5)^2 > 3^2 + 5^2 \Rightarrow 8^2 = 64 > 9 + 25 = 34$

18. $\forall a, b \in \Re$ **se tiene que si** $a_x b=0 \Rightarrow a=0$ **o** $b=0$

Ejemplo: **a.** $2_x0=0_x2=0$

b. $\sqrt{2}_x0 = 0_x\sqrt{2} = 0$

19. $\forall a, b \in \Re$ **se tiene que si** $a_x b<0 \Rightarrow (a<0 \wedge b>0)$ **o** $(a>0 \wedge b<0)$

Ejemplo: $-(2_x3)<0 \Rightarrow (-2<0 \wedge 3>0)$ **o** $(2>0 \wedge -3<0)$**, es decir,** $(-2)3= 2(-3)=-6$;

20. $\forall a, b \in \Re$ **se tiene que si** $a_x b>0 \Rightarrow (a>0 \wedge b>0)$ **o** $(a<0 \wedge b<0)$

Ejemplo: $2_x3>0 \Rightarrow (2>0 \wedge 3>0)$ **o** $(-2<0 \wedge -3<0)$**, es decir,** $2.3= -2(-3)=6$

21. $\forall a, b \in \Re$, $\exists n \in \Re / (a_x b)^n = a^n{}_x b^n$ **y** $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $(2_x3)^2=6^2=36 = 2^2{}_x3^2=4_x9=36$

22. $\forall a, b \in \Re$, $\exists n, m \in \Re / a^n{}_x a^m = a^{n+m}$ **y** $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$

Ejemplo: $2^2{}_x2^3=4_x8=32=2^5$ **y** $\frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{4} = 2^1 = 2$

23. $\forall a, b \in \Re, \exists n \in \Re / (a^{n})^{m} = a^{n \times m}$

Ejemplo: $(2^{2})^{3}=4^{3}=64=2^{2\times 3}=2^{6}=64$

Definición 13: Se define el *mínimo común múltiplo de dos números enteros* a y b m.c.m(a, b) como el menor número que es dividido por estos exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Hallar el m.c.m(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: $30=2\times 3\times 5$ y $50=2\times 5^{2}$, luego tenemos que multiplicar los números comunes y no comunes con su mayor exponente, en este caso: m.c.m(30, 50)$=2\times 3\times 5^{2}=150$, fíjese que $\frac{150}{30}=5$, $\frac{150}{50}=3$, note que existen otros números que son divididos por 30 y 50 como son: {300, 450, 600, ...}, pero el menor que cumple con esta condición es el numero 150.

Definición 14: Se define el *máximo común divisor de dos números enteros* a y b M.C.D(a, b) como el mayor número que divide a estos números exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes con su menor exponente.

Ejemplo: Hallar el M.C.D(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: $30=2\times 3\times 5$ y $50=2\times 5^{2}$, luego tenemos que multiplicar los números comunes con su menor exponente, en este caso:

M.C.D(30, 50)=2_x5=10, fíjese que $\frac{30}{10}$=3, $\frac{50}{10}$=5, note que existen otros números que dividen al 30 y 50 como son: {1 y 5}, pero el mayor que cumple con esta condición es el número 10.

<u>Definición 15:</u> Se dice que dos números enteros son *coprimos entre si*, si su máximo común divisor entre ellos es el número uno, e,i, sean ∀a, b∈Z^+, si M.C.D(a, b)=1 ⇒ a y b son coprimos entre si.

<u>Ejemplo</u>: los números 5 y 12 son corrimos entre si porque M.C.D(5, 12)=1

<u>Definición 16:</u> Se define la *suma de dos números racionales* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ como: $\frac{a_xb+c_xd}{b_xd}$ ∀a, c∈*Z* y ∀b, d∈Z^-UZ^+, donde b_xd es el m.c.m(b, d) y a_xd + b_xc es el resultado de dividir cada uno de los miembros del denominador entre el m.c.m y luego multiplicado por cada uno de los miembros del numerador.

<u>Ejemplo</u>: sumar $\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=\frac{48+35}{60}=\frac{83}{60}$, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,12)=60, luego se dividió $\frac{60}{5}$=12 y este resultado se multiplicó por 4, resultando 48, así mismo se dividió $\frac{60}{12}$=5 y este resultado se multiplicó por 7, dando como resultado 35 al sumar 48 + 35=83, por lo tanto, el resultado es: $\frac{83}{60}$

Definición 17: Se define la *resta de dos números racionales* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, de la misma manera que la suma pero utilizado el signo menos «-» en vez del signo más «+».

Ejemplo: restar $\frac{4}{5} - \frac{7}{12} = \frac{48-35}{60} = \frac{13}{60}$, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,15)=60, luego se dividió $\frac{60}{5}=12$ y este resultado se multiplicó por 4, resultando 12, así mismo se dividió $\frac{60}{12}=5$ y este resultado se multiplicó por 7, dando como resultado 35, al restar 48 - 35=13, por lo tanto, el resultado es: $\frac{13}{60}$

Definición 18: Se define el *producto de dos números racionales* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times c}{b \times d}$, $\forall a, c \in Z$ y $\forall b, d \in Z^{-} U Z^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a. c, b. d) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre si.

Ejemplo: Multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{36}{24}$, como el M.C.D(36, 24)=12, dividimos $\frac{36}{12}=3$ y $\frac{24}{12}=2$, luego el resultado de multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$

Definición 19: Se define el *cociente de dos números racionales* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times d}{b \times c}$, $\forall a \in Z$ y $\forall b, c, d \in Z^{-} U Z^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a.d, b.c) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre si.

Ejemplo: Dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$, como el M.C.D(27, 32)=1, dividimos 27 y 32 entre 1 y luego el resultado de dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$

Definición 20: Para *sumar o restar dos números irracionales*, se simplifican los radicales dados (números enteros), es decir, se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos, luego se reducen los radicales semejantes y por último se escriben los números irracionales no semejantes con su propio signo.

Ejemplo: Realizar la siguiente operación:

$\sqrt{900} + \sqrt{972} - \sqrt{2352} - \sqrt{882}$

Solución: se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos:

$900=2^3{}_x3^2{}_x5^2$; $972=2^2{}_x3^5$; $2352=2^4{}_x3_x7^2$ y $882=2_x3^2{}_x7^2$, e.i.

$\sqrt{900} = \sqrt{2^3 x3^2 x5^2}$ $=30\sqrt{2}$; $\sqrt{972} = \sqrt{2^2 x3^5}$ $=18\sqrt{3}$; $\sqrt{2352} = \sqrt{2^4 x3x7^2}$ = $30\sqrt{3}$ y $\sqrt{282} = \sqrt{2_x3^2 x7^2}$ $=21\sqrt{2}$, $\therefore$,

$\sqrt{900} + \sqrt{972} - \sqrt{2352} - \sqrt{882}$ $=30\sqrt{2} + 18\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 21\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$

Definición 21: Para ***multiplicar dos números irracionales***, existen dos casos:

1. Si tienen el mismo índice: se multiplican las cantidades sub-radicales y se deja el mismo índice, e,i, $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = a^{1/n}.b^{1/n}=(ab)^{1/n}=\sqrt[n]{ab}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}{}_x\sqrt[3]{15} = 2^{1/3}{}_x5^{1/3}=(2_x5)^{1/3}=\sqrt[3]{30}$

2. Si tienen distintos índices: se busca el mínimo común índice, se divide este mínimo común índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.

Ejemplo: $\sqrt[3]{9a^2b}\times\sqrt[4]{27ab^2} = (3^2a^2\times b)^{1/3}\times(3^3ab^2)^{1/4}=$

$$\sqrt[12]{(3^2a^2b)^4(3^3ab^2)^3} = \sqrt[12]{3^{17}a^{11}b^{10}} = 3\sqrt[12]{3^5a^{11}b^{10}}$$

Definición 22: Para *dividir dos números irracionales* se emplean los siguientes pasos:

1. Si tienen el mismo índice: se coloca el mismo índice y se dividen las cantidades sub-radicales.

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[4]{9a^2b}}{.\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2a^2b}{3^3ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}$

2. Si tienen distintos índice: se busca el mínimo común índice y se divide este índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{.\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{(9a^2b)^4}{(27ab^2)^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^8a^8b^4}{3^9a^3b^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^5}{3b^2}}$

Definición 23: Se define la *racionalización* como el proceso de convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional (eliminar del denominador el

signo radical, ver propiedad del elemento neutro e inverso del producto de números reales).

Ejemplo: $$\frac{3}{\sqrt[3]{9a^2b}} = 3\frac{\sqrt[3]{9a^2b}}{9a^2b} = \frac{\sqrt[3]{9a^2b}}{3a^2b}$$

Ejemplo: $$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)$$

se obtiene el neutro multiplicativo a partir del conjugado del denominador, e.i. cambiando el signo de la operación en el denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La Comercial Alirio ganó en el año 2.002, Bs. 69.195.600, en el año 2.003 Bs. 30.441.850 más que en el año 2.002, en el año 2.004 Bs. Tanto como lo que se ganó en el año 2.002 y el año 2.003, en el año 2.005 tanto como en los tres años anteriores y en el año 2.006 Bs. 26.092.400 más que lo que se ganó en el año 2.003 y 2.005. ¿Cuánto se ganó en los cinco años la Comercial Alirio? Solución: analicemos las ganancias por años:

2.002 → Bs. 69.195.600

2.003 → Bs. 69.195.600 + Bs. 30.441.850=Bs. 96.637.450

2.004 → Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450=Bs. 168.833.050

2.005 → Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450 + Bs. 168.833.050=Bs. 334.666.100

2.006 → Bs. 26.092.400 + Bs. 96.637.450 + Bs. 334.666.100=Bs. 457.395.950.

Luego se ganó en los cinco años la cantidad de Bs. 1.126.728.150

2. Me gané Bs. 2.500.000 en una rifa y ahora tengo Bs. 5.634.000. Si Juan tiene Bs. 936.000 menos que yo, y María Bs. 893.000 menos que Juan y yo juntos, ¿Cuánto dinero tenemos entre los tres? Solución: analizaremos por persona:

Yo: Bs. 5.634.000

Juan: Bs. 5.634.000 - Bs. 936.000= Bs. 4.698.000

María: Bs. 5.634.000 + Bs. 4.698.000 – Bs. 893.000= Bs. 9.439.950

$\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 19.771.000

3. Pedro tiene Bs. 139.750, José el doble de lo que tiene Pedro, menos Bs. 34.400 y Juan tanto como Pedro y José juntos más Bs. 38.700. si entre los tres se gastan Bs. 266.600, ¿Cuál es el capital común que queda?

<u>Solución</u>: analizaremos por persona:

Pedro: Bs. 139.750

José: Bs. 2x139.750 - Bs. 34.400= Bs. 245.100

Juan: Bs. 139.750 + Bs. 245.100 + Bs. 38.700= Bs. 423.550, $\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 808.400, a esto le restamos lo que gastamos e,i, Bs. 266.600, el capital que nos queda será: Bs. 808.400 - Bs. 266.600, que es Bs. 541.800

4. Si compras 142 libros por Bs. 915.900, si vendes cierta cantidad de libros por Bs. 709.500 a Bs. 10.750 cada uno. ¿Cuántos libros te quedan? y ¿cuánto te ganaste en cada uno de los libros que vendiste?

<u>Solución</u>: aplicando la definición de proporción tenemos: $\frac{142}{915.900} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{915.900}{142} \Rightarrow x=6.450$, cada libro costó Bs. 6.450, ahora

volvemos aplicar la proporción para obtener la cantidad de libros que vendí por Bs. 709.500, i.e., $\frac{10.750}{709.500}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{709.500}{10.750}\Rightarrow x=66$, $\therefore$ **vendí 66 libros y quedan 142 – 66=76 libros y me gané por cada libro 10.750 – 6.450=4.300, me gané por libro Bs. 4.300 y tuve una ganancia de Bs. 66x4.300= Bs. 283.800**

5. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de segundo por cualquiera de tres llaves que vierten: los primeros 4 litros por dos segundos, la segunda 60 litros en cuatro segundos y los terceros 96 litros en seis segundos?

<u>Solución</u>: para obtener la solución hallamos m.c.m(4, 60, 96) y para eso descomponemos en sus factores primos a los números $4=2_x2$, $60=2_x2_x3_x5$ **y** $96=2_x2_x2_x2_x2_x3$, $\therefore$ **m.c.m(4, 60, 96)=**$25_x3_x5=480$**, luego la menor capacidad del tanque es de 480 litros.**

6. José camina un número exacto de pasos andando 6,50 mts. 8 mts. y 10 mts. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

<u>Solución</u>: pasamos los metros a centímetros y luego descomponemos los centímetros en sus factores primos y obtenemos el M.C.D(650, 800, 1000), que es el resultado que nos piden. $650=2_x5_x5_x13$, $800=2_x2_x2_x2_x2_x5_x5$, $1000=2_x2_x2_x5_x5_x5$**, luego el máximo común divisor de los tres número será: M.C.D(650,800.1000)=**$2_x5_x5=50$, $\therefore$ **la mayor longitud posible de cada paso será de 50 cm.**

7. Resolver:

a) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$

Solución: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1+\frac{2}{5}$, ∴ la solución es $\frac{7}{5}$

b) $9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}$

Solución:

$$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{\cfrac{5}{2}}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{8}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{\cfrac{17}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{30}{17}}=$$

$$9-\cfrac{8}{-\cfrac{89}{17}}\Rightarrow 9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=9+\frac{136}{89}$$, ∴ la solución es $\frac{937}{89}$

c) $\left(\cfrac{0.2\mathrm{x}\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\mathrm{x}\frac{3}{5}}\right)^3$

Solución: $\left(\cfrac{0.2\mathrm{x}\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\mathrm{x}\frac{3}{5}}\right)^3=\left[\cfrac{\frac{1}{5}\mathrm{x}\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\mathrm{x}\frac{3}{5}}\right]^3=\left[\frac{2\mathrm{x}3\mathrm{x}5}{3\mathrm{x}3\mathrm{x}3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$, ∴ la solución es

$\frac{8}{27}$

d) $$\left[\frac{2^{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{2}}{3^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{4}}\right]^{4}$$

Solución:

$$\left[\frac{2^{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{2}}{3^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{4}}\right]^{4}=\left[\frac{2^{3}\left(\frac{2^{2}}{3^{2}}\right)^{2}}{3^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\left(\frac{2}{3^{2}}\right)^{4}}\right]^{4}=\left[\frac{\frac{2^{3}2^{4}}{3^{4}}}{\frac{3^{2}3^{3}2^{4}}{2^{3}3^{8}}}\right]^{4}=\frac{2^{12}2^{16}2^{12}3^{32}}{3^{16}3^{8}3^{12}2^{16}}=\frac{2^{24}}{3^{4}} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{2^{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{2}}{3^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\left(\frac{2}{9}\right)^{4}}\right]^{4}, \therefore \text{ la solución es } \frac{16.777.216}{81}$$

e) $$\left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right)\div\left(\sqrt[4]{300}\right)$$

Solución:

$$\frac{2\sqrt{10}x\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}}{\sqrt[4]{300}}=\frac{5}{4}\frac{\sqrt{2_x5}\sqrt[3]{2^{2}{}_x3_x5}}{\sqrt[4]{2^{2}{}_x3_x5^{2}}}=\frac{5}{2^{2}}\sqrt[12]{\frac{2^{6}{}_x5^{6}{}_x2^{8}{}_x3^{4}{}_x5^{4}}{2^{6}{}_x3^{4}{}_x5^{6}}}=\frac{5}{4}\sqrt[12]{2^{8}{}_x5^{4}}=$$

$$\frac{5}{4}\sqrt[3]{2^{2}{}_x5} \Rightarrow \left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right)\div\left(\sqrt[4]{300}\right)=\frac{5}{4}\sqrt[3]{20}$$

f) $$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\,x\sqrt[6]{24}\right)$$

Solución:

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[6]{24}}\right)=\frac{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}}{\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[6]{24}}}\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2^2\times 3\sqrt{2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^6\times 3\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[6]{2^3\times 3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\times 3^2\times 2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}\times 3^4\times 2}}\times\sqrt[6]{2^3\times 3}}}=\frac{\sqrt[8]{2^6\times 3^2}}{\sqrt[24]{2^{24}\times 3^4\times 2}\times\sqrt[6]{2^3\times 3}}=\sqrt[24]{\frac{2^{18}\times 3^6}{2^{24}\times 3^4\times 2\times 2^{12}\times 3^4}}$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[6]{24}}\right)=\frac{1}{\sqrt[24]{2^{37}\times 3^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[24]{2^7\times 3^{22}}}{\sqrt[24]{2^{17}\times 3^2}\,\sqrt[24]{2^7\times 3^{22}}}\qquad\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right)\div\left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}\times\sqrt[6]{24}}\right)=\frac{1}{12}\sqrt[24]{2^7\times 3^{22}}$$

8. Racionalizar:

a) $\dfrac{1}{5a\sqrt{25x^{3}}}$

Solución: $\dfrac{1}{5a\sqrt{25x^{3}}}=\dfrac{1}{25ax\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{25ax}$

b) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$,

Solución: **aplicando la formula** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$**, donde x=a + b**

e y=a – b, tenemos que: $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\dfrac{a+b-(a-b)}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}}\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}{2b}=\frac{a+b-2\sqrt{a-b}-(a-b)}{2b}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{2b-2\sqrt{a-b}}{2b}=\frac{b-\sqrt{a-b}}{b}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuándo la suma es igual a los sumandos?

2. Si p es la suma de p sumandos. ¿Cuáles son los sumandos?

3. Escribir la suma 12 + 15 + 17 de tres modos distintos aplicando la propiedad asociativa

4. Escribir la suma 3 + 5 + 7 + 9 de 6 modos distintos aplicando la propiedad asociativa

5. ¿Qué alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y el otro aumenta 8?

6. m + n=52. ¿Cuál será la suma si m disminuye 4 y n disminuye 6?

7. x + y + z=1.046. ¿Cuál será la suma (x + 5) + (y – 8) + z + 9)?

8. Un sumando disminuye 6, otro 4, otro 7 y otros tres aumentan cada uno 5. ¿Qué le sucede a la suma?

9. ¿Cuánto costo un radio que al venderse por Bs. 16.325 deja una pérdida de Bs. 2560?

10. Después de vender una casa, se registró una pérdida de Bs. 5.731.200, presté Bs. 3.610.000 y me quedé con Bs. 27.331.200. ¿Cuánto me había costado la casa?

11. Hallar la edad de un padre que tiene 15 años más de la suma de las edades de 4 hijos que tienen, el cuarto 3 años, el tercero 1 año más que el cuarto, el segundo 3 años más que el tercero, y el primero tanto como los otros tres juntos.

12. Si ganara Bs. 100.800 menos al mes, podría gastar Bs. 63.000, Bs. 72.000 en manutención, Bs. 323400 en comida, Bs. 106.200 en el colegio de mi hijo y podía ahorrar Bs. 57.600 al mes. ¿Cuánto gano al mes?
13. ¿Por qué la resta se empieza por la derecha y no por la izquierda?
14. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el sustraendo. ¿Que nos queda?
15. $56 + n=81$. ¿Qué número es n?
16. $x - y=5$ y $x + y + 5=12$. ¿Qué número es y?
17. Si el minuendo es 342 y el resto 156. ¿Cuál es el sustraendo?
18. Si recibiera Bs. 261.0000 podría comprarme un carro de Bs. 11.008.000. ¿Cuánto tengo?
19. El menor de 2 números es 12.304 y la diferencia entre ambos es 1.897. ¿Cuál es el número mayor?
20. Juan tiene 15 años; Pedro 2 años más que Juan, José 5 años menos que Juan y Pedro juntos, y Carlos 9 años menos que los 3 anteriores juntos. ¿Cuál es la edad de Pedro, José y Carlos?
21. Resolver: a. (14 + 5) – (6 – 4 + 4) + (6 – 4 + 2)

b. [300 + (2 – 5) – 9 – 3] – (5 – 4)

c. 8 + [9 - {6 – (5 – 4)}] + 14 - {11 - [7 – (3 – 2)]}

d. 250 - [(6 + 4) – (3 – 1) +2] + {16 - [(8 + 3) - (12 – 10)]}

e. Si $xy=3x$. ¿Cuánto vale y?

f. Expresar en forma de suma los de los productos: xy, 4x8

g. 500+ 6(3 + 1)+ (8 – 5)3 – 2(5 + 4)

h. 800 + {20 – 3x4 + 5[18 – (6 – 1)3 + 4(5 – 2)]}

i. (5x4x3) ÷ (15 – 3) + 18 ÷ (11 – 5)5

j. 500 - {(6 – 1)8 ÷4x3 + 16 ÷ (10 – 2)} - 5

22. Compré 115 caballos a Bs. 126.000 cada uno; 15 se murieron y el resto los vendí por Bs. 144.000 cada uno. ¿Gané o perdí y Cuanto?

23. ¿Que alteración sufre el producto 80x5, si el 80 se multiplica por 4 y el 5 se multiplica por 16?

24. Si al dividir x entre 109 el cociente es el doble del divisor, ¿Qué número es x?

25. Se reparten Bs. 1.315.800 entre varias personas en partes iguales y a cada una le tocan Bs. 77.400. ¿Cuantas eran las personas?

26. Uno de los factores del producto 840 es 12. ¿Cuál es el otro factor?

27. ¿Por cuál número hay que dividir a 15480 para que el cociente sea 15?

28. Compro 42 libros por Bs. 226.800 y se venden cierto número por Bs. 171.000 a Bs. 9.000. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí?

29. Repartí 243 lápices entre 54 estudiantes y me sobraron 27 lápices. ¿Cuántos lápices les repartí a cada estudiante?

30. Juan tiene más dinero que Pedro. ¿Que es más, la tercera parte de lo que tiene Juan o la cuarta parte de lo que tiene Pedro?

31. Jesús es más joven que tu. La edad de Juan es la mitad de la edad de Jesús y la edad de Pedro es la tercera parte de la tuya. ¿Quien es

mayor Jesús o Pedro?

32. ¿Qué alteración sufre el cociente 760 ÷10, si 760 se multiplica por 8; y 10 se multiplica por 2?

33. ¿Cuánto aumenta el cociente si se añade el divisor al dividendo, permaneciendo igual el divisor?

34. La suma de 2 números es 1250 y su diferencia 750. ¿Cuáles son los números?

35. Juan tiene 32 metras entre las 2 manos y en la derecha tiene seis más que en la izquierda. ¿Cuántas metras tiene en cada mano?

36. La edad de un padre y la de su hijo suman 90 años. Si el hijo nació cuando el padre tenía 36 años. ¿cuales son las edades actuales del padre y el hijo?

37. ¿Cuál es el número que sumado con su doble da 261?

38. ¿Cuál es el número que sumado con su triple da 384

39. 368 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quíntuplo. ¿Cuál es ese número?

40. La edad de Juan es el cuádruplo de la de José, si ambas edades se suman y a esa suma se le añade 17 años, el resultado es 42 años. Hallar las edades

41. La suma de 2 números es de 450 y su cociente 8 hallar los 2 números

42. La edad de Juan es 4 veces la edad de Pedro y ambas edades suman 45 años. ¿Que edades tienen Juan y Pedro?

43. La diferencia de 2 números es de 150 y su cociente 4. Hallar los 2 números

44. 2.000 excede en 788 a la diferencia de 2 números y en 1.995 a su cociente. Hallar los 2 números.

45. En un colegio hay 3 salones. Todas juntas tienen 85 estudiantes, si en la segunda y la tercera tienen 75 estudiantes y la primera y la tercera 80 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes hay en cada salón?

46. Un palto y un pantalón valen Bs. 150.000, el pantalón y su chaleco Bs.102.000 y el palto y su chaleco Bs. 132.000. ¿Cuánto vale cada pieza?

47. Si a un número añado 23 años, luego resto 41 de esta suma y la diferencia la multiplico por 2, obtengo 132. ¿Cuál es el número?

48. La semana pasada fui a jugar al Casino. El lunes perdí Bs. 400.000; el martes gané Bs.125.000, el miércoles gana el doble de lo que tenia el martes, y el jueves, después de perder la mitad de lo que tenía, me quedaron Bs.465.000 ¿Cuanto tenía antes de empezar a jugar?

49. Un tanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuanto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo 3 llaves que vierten: los primeros 36 litros en 3 minutos; la segunda 48 litros en 6 minutos y los terceros 15 litros en 3 minutos?

50. Un tanque tiene 3 grifos que vierten: el primero 50 litros en 5 minutos; el segundo 91 litros en 7 minutos; y el tercero 108 litros en 12 minutos; y 2 desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los

desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo, necesita 40 minutos para llenarse. ¿Cuál es su capacidad?

51. Compré 500 sombreros a Bs. 10.800 cada uno. Vendí cierto número en Bs. 900.000 a Bs. 9.000 cada uno. ¿A cómo tengo que vender el resto para no perder?

52. Si tú compras 600 sacos de frijoles a Bs. 14.400 cada uno. Por la venta de cierto número de ellos a Bs. 10.800 te ofrecen Bs. 972.000. ¿A cómo tendrás que vender los restantes para tener una ganancia de Bs. 594.000?

53. Un capataz contrata un obrero por Bs. 7.000 diarios, para que trabaje 40 días, transcurridos 35 días por un problema que ocurrió entre ambos el obrero recibió Bs. 200.000.

¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó el obrero?

54. Un comerciante pagó Bs. 4.590.000 por 128 trajes de lana y de gabardina. Por cada traje de lana pagó Bs. 30.000 y por cada traje de gabardina Bs. 40.000. ¿Cuántos traje de cada uno compró?

55. Dos hombres ajustan una obra en Bs.108.000 y trabajan durante 5 días. Uno recibe un salario de Bs. 7.200 diarios. ¿Cuál es el salario del otro?

56. Con el dinero que tú tienes puedes comprar 6 revistas y te sobran Bs. 500 pero si tú quisieras comprar 13 revistas te faltarían Bs. 3.000. ¿Cuánto vale cada revista?

57. ¿Por cuales de los números 2, 3, 4 y 5 son divisibles 84, 375 y 136?

58. Diga, por simple inspección, cual es el residuo de dividir 85 entre 2; 128 entre 5; 215 entre 4; 586 entre 25 y 1.046 entre 8.

59. Diga qué cifra debe suprimirse en 857 para que resulte un número de dos cifras múltiplo de 3.

60. Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2.738. ¿En cuanto se debe disminuir esté número?

61. Diga si los siguientes grupos de números son o no coprimos.

a. 9, 14 y 21

b. 12, 24 y 42

c. 35, 18, 12 y 28

d. 26, 39, 42 y 65

e. 22, 33, 44, 55 y 91

f. 14, 21, 28, 35 y 26

g. 34, 51, 68, 85 y 102

62. De los números 24, 31, 27 36, 42, 53 y 14 formar: un grupo de 4 números que no sean coprimos, un grupo de 4 números que sean coprimos.

63. Hallar el M.C.D(a, b) de:

a. 75 y 80

b. 33, 77 y 121

c. 320, 450, 560 y 600

d. 1.560, 2.400, 5.400 y 6.600

e. 500, 560, 725, 4350 y 8.200

f. 57, 133, 532 y 1.824

g. 2.738, 9.583, 15.059, 3.367 y 12.691

h. 3.174, 4.761, 9.522 y 12.696

64. Hallar el m.c.m(a, b) de:

a. 4, 8, 16 y 32

b. 30, 15 y 60

c. 15, 25 y 75

d. 100, 300, 800 y 900

e. 100, 500, 2.100 y 3.000

f. 105, 306, 405 y 504

g. 33, 49, 165, 245 y 343

h. 108, 216, 306, 2 040 y 4.080

65. Las edades de Juan y Pedro son dos números enteros consecutivos cuya suma es 51. Si Juan es menor que Pedro. ¿Cuál es la edad de cada uno?

66. Si Juan tiene un año menos que José y ambas edades suman 103 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

67. Un comerciante compró el lunes cierto número de sacos de frijoles; el martes compró un saco más que los que compró el lunes; el miércoles uno más de los que compró el martes, y el jueves uno más de los que compró el miércoles. Si en los 4 días adquirió 102 sacos. ¿Cuántos sacos compró cada día?

68. Hallar el m.c.m de los siguientes grupos de números:

a. 540 y 1.050

b. 910, 490 y 560

c. 690, 5.290 y 920

69. Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

70. Se quiere envasar 161 kilos, 253 kilos y 207 kilos de plomo en 3 cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tenga el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuánto cabe en cada caja?

71. Se tienen 3 extensiones de 3.675, 1.575 y 2.275 metros cuadrados de superficie respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea lo menor posible?

72. Para comprar un número exacto de docenas de pelotas de Bs. 8.000 la docena o de un número exacto de docenas de lapiceros a Bs. 6.000 la docena ¿Cuál es la menor suma de dinero necesaria?

73. ¿Qué alteración sufre el número fraccionario $\frac{8}{11}$ si multiplicamos el numerador por 2 y el denominador por 4?

74. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?

75. ¿Cuál de los números fraccionarios $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{27}{135}$ y $\frac{6}{30}$ es el menor?

76. Resolver:

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

b. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$

c. $\frac{3}{5}-\frac{7}{4}+\frac{11}{6}$

d. $\frac{13}{121}+\frac{4}{55}-\frac{9}{10}$

e. $\frac{5}{16}-\frac{2}{48}-\frac{1}{9}+\frac{3}{18}$

f. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{7}{24}-\frac{11}{30}$

g. $\frac{1}{900}+\frac{101}{300}-\frac{13}{60}-\frac{17}{45}+\frac{19}{54}$

h. $3\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}$

i. $1\frac{1}{10}-1\frac{1}{100}$

j. $5\frac{4}{5}-6\frac{3}{10}+8\frac{3}{20}$

k. $3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}-7\frac{1}{12}$

l. $-6\frac{1}{11}-7\frac{5}{11}+8\frac{3}{22}-4\frac{5}{44}$

m. $1\frac{1}{5}+4\frac{1}{80}-5\frac{1}{16}-2\frac{1}{10}$

n. $7+\frac{8}{7}$

o. $\frac{3}{48} - 10 + 3\frac{1}{5} - 8$

p. $-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}$

q. $\left(7\frac{3}{5} - 4\frac{1}{12} + 1\frac{1}{24}\right) - \left(6 - \frac{1}{18}\right)$

r. $0.25 + 4 - 2\frac{3}{5} + 2.3\overline{21}$

s. $2.\overline{3} + 3.5\overline{32} - 12 + \frac{4}{5} - 3\frac{2}{3}$

t. $5\frac{5}{7} + \frac{5}{7} - 9 - 2.35 + 4.\overline{31} - 5.2\overline{23}$

77. **Resolver:**

a. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$

b. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{4}$

c. $\frac{3}{5} \times \frac{17}{19} \times \frac{5}{34} \times \frac{38}{75}$

d. $2\frac{5}{6} \times 3\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{17}$

e. $16 \div \left(14\frac{1}{16} \div 5\frac{1}{6}\right)$

f. $72\left(\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\right)$

g. $\left(16\frac{3}{5} - \frac{7}{10}\right) \div \frac{1}{159}$

h. $9\frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}+5\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)$

i. $\left(11\frac{1}{10}-10\right)\div\left(13-9\frac{2}{5}\right)$

j. $\left[\left(4\frac{1}{3}-3\frac{5}{4}\right)\div\left(5-\frac{2}{7}\right)\right]\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{8}\right)$

k. $\left(2-3.\overline{14}\right)\div\left(\frac{3}{10}+4.23\overline{5}\right)$

78. Un reloj adelanta $\frac{3}{7}$ de minutos cada hora. ¿Cuánto adelantará en 5 horas; en medio día; en una semana?

79. Si de una soga de 40 metros de longitud se cortan 3 partes iguales de $5\frac{2}{3}$ metros de longitud. ¿Cuánto falta a lo que queda para tener $31\frac{5}{8}$ metros?

80. Tenía Bs. 72.000 y gasté los $\frac{3}{8}$. ¿Cuánto me queda?

81. Un mechero consume $\frac{3}{4}$ Kg. de aceite por día. ¿Cuánto consumirá en $\frac{5}{6}$ de día?

82. La edad de María es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la de Carmen. Si Carmen tiene 24 años. ¿Cuántos tiene María?

83. Diez obreros pueden hacer $14\frac{2}{11}$ metros de una obra en una hora. ¿Cuántos metros hace cada obrero en ese tiempo?

84. ¿Cuántas varillas de $\frac{1}{4}$ de metros de longitud se pueden sacar de una varilla de $\frac{5}{12}$ metros de largo?

85. Si Juan hace un trabajo en 8 días. ¿Qué parte del trabajo puede hacer en 1 día; en $1\frac{3}{4}$ días; $3\frac{1}{2}$ días?

86. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{7}{9}$ al añadir 1 al numerador y 4 al denominador?

87. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{8}{9}$ al restar 5 a sus dos términos?

88. Porque número se multiplica $\frac{1}{2}$ cuando se convierte en $\frac{3}{4}$; y $\frac{1}{8}$ cuando se convierte en 6?

89. ¿Por cuál número se multiplica 6 cuando se convierte en 4; 3 cuando se convierte en 1; 11 cuando se convierte en 12?

90. ¿Por qué número se divide 8 cuando se convierte en 6; 9 cuando se convierte en 7; 11 cuando se convierte en 19?

91. ¿Por qué numero se divide $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador; cuando se resta 3 del numerador y se suma 2 al denominador?

92. Hallar qué parte de 5 es 4; de 6 es 7; de 9 es 8.

93. Juan tenía Bs. 6.000.000 y gastó Bs. 180.000. ¿Qué parte de su dinero gastó y que parte le queda?

94. ¿Cuánto perdiste tú cuando vendes a $\frac{3}{7}$ del costo de lo que te costo Bs. 840.000?

95. Juan gasta en alimentación de su familia los $\frac{2}{5}$ de su sueldo mensual. Si en un mes gasta en alimentación Bs. 235.350. ¿Cuál ha sido su sueldo en ese mes?

96. Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedaba. Si todavía tengo Bs. 18.000. ¿Cuánto tenía al principio?

97. Resolver:

a. $$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

b. $$9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

c. $$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

d. $$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

e. $$1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

f. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9}}}}$$

g. $$-3-\cfrac{4}{3-\cfrac{5}{3-\cfrac{7}{3-\cfrac{8}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{3}}}}}}$$

98. Un comerciante hace un pedido de 3.000 kilogramos de mercancía y se lo envían en 4 partidas. En la primera le mandan 17.45 kilogramos En la segunda 40 kilogramos más que la primera, en la tercera tanto como en las dos anteriores y en la cuarta lo restante. ¿Cuántos kilogramos le enviaron en la última partida?

99. Resolver:

a. $$\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$$

b. $$\left[\left(\frac{x_{x}y}{z}\right)^5\right]^6$$

c. $\left[\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{4\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right]^3$

d. $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

e. $6\sqrt{5}+8\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

f. $\sqrt{18}+\sqrt{50}$

g. $\sqrt{108}-\sqrt{72}$

h. $3\sqrt{28}-5\sqrt{63}$

i. $4\sqrt{300}-\sqrt{162}+\sqrt{75}$

j. $\frac{1}{2}\sqrt{8}+\frac{3}{4}\sqrt{50}$

k. $\frac{1}{3}\sqrt{27}-\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{5}{2}\sqrt{24}$

l. $\frac{2}{5}\sqrt{250}-\frac{4}{9}\sqrt{90}+\frac{9}{7}\sqrt{490}$

m. $3\sqrt[3]{125}+2\sqrt[3]{15625}$

n. $2\sqrt[3]{1024}-\sqrt[3]{2000}$

o. $5\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{342}-\sqrt[3]{384}$

p. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{500}$

q. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{48}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{1029}$

r. $\frac{5}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{4}{5}\sqrt[3]{500}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{270}$

s. $\left(3\sqrt{10}\right)\left(7\sqrt{28}\right)\left(5\sqrt{125}\right)$

t. $\left(\frac{7}{6}\sqrt[3]{48}\right)\left(\frac{4}{5}\sqrt[3]{32}\right)\left(7\sqrt[3]{72}\right)$

u. $\left(7\sqrt{240}\div 8\sqrt{80}\right)\left(10\sqrt{560}\div\sqrt{20}\right)$

v. $\left(\frac{9}{5}\sqrt[3]{686}\div\frac{12}{5}\sqrt[3]{32}\right)\div\left(\frac{7}{8}\sqrt[3]{1024}\div\frac{9}{4}\sqrt[3]{8}\right)$

w. $\left[\dfrac{\left(\dfrac{5\sqrt{125}\text{x}4\sqrt[3]{30}}{40\sqrt[4]{60}}\right)^2}{\dfrac{15\sqrt[5]{100}}{\left(10\sqrt[6]{50}\right)^3\left(14\sqrt[3]{80}\right)}}\right]^3$

100. Racionalizar:

a. $\dfrac{6}{\sqrt{128}}$

b. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{108}}$

c. $\dfrac{5a}{\sqrt[6]{4a^5b^3}}$

d. $\dfrac{8abc}{3\sqrt[5]{a^3b^4c^5}}$

e. $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

g. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

h. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

i. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}$

k. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{7}}$

l. $\dfrac{11}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{13}}$

CAPÍTULO III

RAZONES Y PROPORCIONES

En este capitulo se estudiara: RAZONES Y PROPORCIONES la definiciones de razones proporciones y porcentajes, las propiedades de las proporciones y se resolverán problemas aplicados a la vida real que involucren razones proporciones y porcentajes.

Definición 1: La forma matemática que permite comparar las propiedades numéricas de los conjuntos recibe el nombre de *Razón*, es decir, una razón es la comparación de dos números establecidos por el cociente. Se simboliza:

a:b, a/b ó (a, b) y se lee "a es a b", ó "a a b". $\forall a \in Z$, $\forall b \in Z^+ U Z^-$. ($\forall$ se lee para todo) ($\in$ se lee pertenece)

A: recibe el nombre de *antecedente*

B: recibe el nombre de *consecuente*

Ejemplo: En un salón de clase hay un profesor por cada 30 alumnos.

La razón de profesor a alumnos es "1 a 30" y se escribe: 1:30, 1/30 o (1,30).

El conjunto formado por el profesor es el antecedente y el conjunto formado por los treinta alumnos es el consecuente

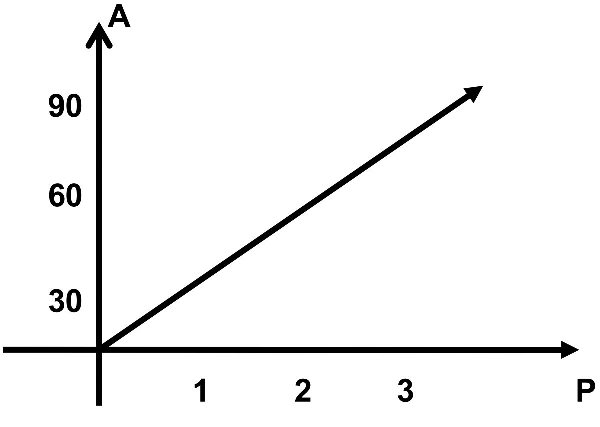


Fig. 1

Observe que la razón es una correspondencia entre los subconjuntos de dos conjuntos.

En el ejemplo anterior, A agrupa subconjuntos cuyo cardinal es n(A)=30 y el conjunto P agrupa subconjuntos cuyo cardinal es n(P)=1.

<u>Ejemplo</u>: Se vende una docena de naranjas por Bs. 80.

Conjunto de Bolívares {80000, 80000, ………………….80000}

Conjunto de Naranjas {12, 12, …………..…………12 }

Fig. 2

La razón de naranjas a bolívares es "12 a 80000" y se escribe: 12:80000, 12/80000 o (12,80000).

El conjunto formado por la docena de naranjas es el antecedente y el conjunto formado por los bolívares es el consecuente

<u>Ejemplo</u>: Un jugador de básquet encesta 8 canastas de cada 10 tiros libres.

La razón de canastas a tiro libre del jugador es: 8:10, 8/10 o (8,10).

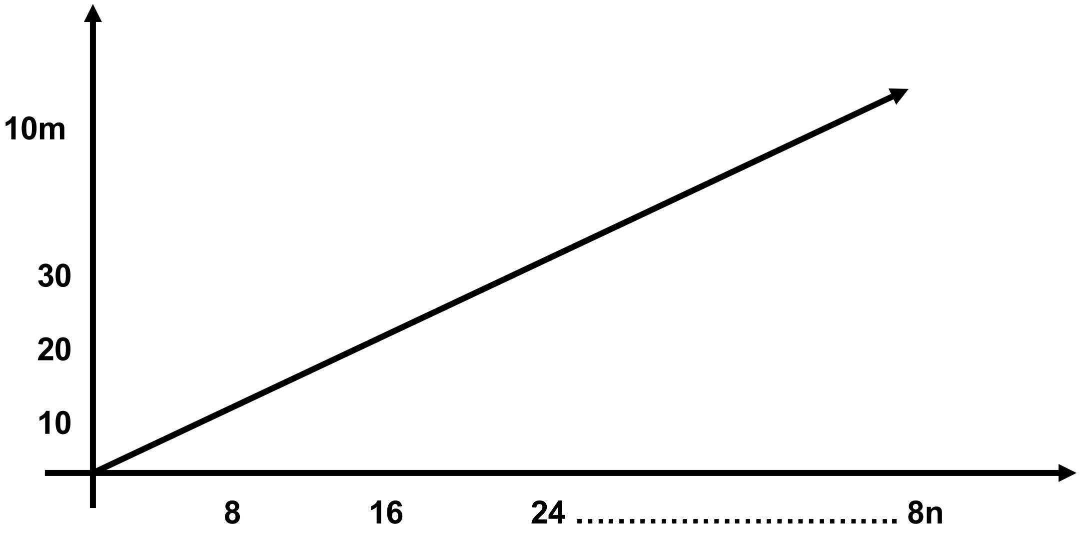


Fig. 3

Definición 2: Al conjunto de pares de números que expresan la comparación entre las propiedades numéricas de los mismos conjuntos lo llamaremos *serie de razones iguales o proporción.*

Ejemplo: Del ejemplo anterior, tenemos:

"8 a 10", "16 a 20", "24 a 30"....8n a 10m, 8:10::16:20::24:30.....8n::10m,

$\frac{8}{10} \cong \frac{16}{20} \cong \frac{24}{30} \cong .... \cong \frac{8n}{10m}$ o (8,10)=(16, 20)=(24, 30) ..... (8n=10m), $\forall$n, m$\in Z^+$, y se lee "8 es a 10 como 16 es a 20 como 24 es a 30.....como 8n es a 10m.", las series de razones iguales o proporciones se comportan como una línea recta, véase en el ejemplo anterior.

También se puede definir una proporción como una *ecuación de dos razones*, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ "a es a b como c es a d" $\forall$a, b, c, d$\in Z^- U Z^+$

En esta proporción a los términos a y d se les llama *términos extremos*, mientras que a los términos b y c se les llama términos medios $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ⇔ a.d=b.c ⇔- $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ o $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ "a es a b como c es a d" ó "d es a c como b es a a" $\forall$a, b, c, d$\in Z^- U Z^+$, es decir, los productos cruzados son iguales. (⇔ se lee si y solo si)

Cualquier termino de la proporción anterior a, b, c, d recibe el nombre de *cuarta proporcional*, en una proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ el termino b recibe el nombre de *media proporcional* de los términos a y d y los términos a y d son llamados *tercera proporcional* de b.

Propiedades de las proporciones

1. **Si $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow$ $a_x d = c_x x$ $\Rightarrow$ $x=\frac{a_x d}{c}$ o $c=\frac{a_x d}{x}$ o $a=\frac{c_x x}{d}$ o**

$d=\frac{c_x x}{a}$ $\forall$a, b, c y d$\in Z^+ U Z^-$ ($\Rightarrow$ se lee entonces, implica)

2. **Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$**

<u>Demostración</u>: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Como $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

<u>Ejemplo</u>: $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}\Rightarrow\frac{2}{5}+1=\frac{8}{20}+1\Rightarrow\frac{2+5}{5}=\frac{8+20}{20}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{28}{20}\Rightarrow\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$

3. **Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$**

Demostración: $\frac{a}{c}+1=\frac{b}{d}+1$ $\Rightarrow$ $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$, pero como $\Rightarrow$

$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$

<u>Ejemplo</u>: $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}\Rightarrow\frac{2+8}{5+20}=\frac{5}{20}\Rightarrow\frac{10}{25}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

4. **Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}$ Demostración: queda como ejercicio y compruébelo con un ejemplo**

<u>Ejemplo</u>: Se compran 5 camisas en Bs. 80.000,

a. ¿Cuánto cuesta cada camisa?

b. ¿Cuántas camisas se compran con Bs. 1.440.000?

<u>Respuestas:</u> a. $\frac{5}{800.000x}=\frac{1}{5}\Rightarrow x=\frac{800.000}{5}\Rightarrow x=Bs.160.000$, cada camisa cuesta Bs. 160.000

b. $\frac{5}{800.000} = \frac{x}{1.440.000} \Rightarrow x = \frac{5.144.000}{800.000} \Rightarrow x = 9\,\text{camisas}$

b. **Ejemplo**:

Definición 3: Se define el porcentaje o rata o tasa (%= $\frac{1}{100}$) como la comparación o razón de un número a 100, es decir, el numerador de una fracción con denominador 100, por ejemplo el 10% es 10/100 y se lee "10 por 100" ó "10 por cada 100" $\frac{10}{100}$=0,1=10%.

Ejemplo: Escribir $\frac{3}{5}$ como porcentaje, $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.1=\frac{3}{5}.\frac{100}{100} \Rightarrow 3.20(\frac{1}{100})$ $\Rightarrow \frac{3}{5}=(60)\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{3}{5}= 60\%$.

Ejemplo: En un examen de matemáticas un alumno responde 12 preguntas correctas de un total de 20, mientras que en un examen de física responde 16 preguntas correctas de un total de 40. ¿En que examen tuvo mejor actuación el alumno?

Respuesta: Obtenemos los porcentajes de las dos materias por separado y el que nos resulte con mayor porcentaje será la respuesta. Examen de matemática: $\frac{12}{20}=\frac{12}{20}(\frac{100}{100}) \Rightarrow \frac{12}{20}=(60)\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{12}{20}=60\%$, es decir, las respuestas correctas en el examen de matemáticas es del 60%

Examen de física: $\frac{16}{40}=\frac{16}{40}(\frac{100}{100}) \Rightarrow \frac{16}{40}=(40)\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{16}{40}=40\%$, es decir, las respuestas correctas en el examen de física es del 460%, luego tuvo mejor actuación en el examen de matemáticas.

EJERCICIOS RESUELTOS

a. En la UNELLEZ Apure la razón de profesores a profesoras es de 3:4 y la razón de alumnos varones a hembra es de 7:15. Si en la UNELLEZ Apure entre docentes y alumnos hay 1670 personas.

a. ¿Cuántos docentes hay en la UNELLEZ Apure?

b. ¿Cuántos alumnos hay en la UNELLEZ Apure?

c. ¿Cuántas profesoras hay en la UNELLEZ Apure?

d. ¿Cuántos profesores hay en la UNELLEZ Apure?

e. ¿Cuántos alumnos hembras hay en la UNELLEZ Apure?

f. ¿Cuántos alumnos varones hay en la UNELLEZ Apure?

Solución: **Razón entre profesores (pr) y profesoras (pra)** $\frac{pr}{pra}=\frac{3}{4}$

Razón entre docentes (d) y profesores (pr) $\frac{d}{pr}=\frac{3}{7}$

Razón entre docentes (d) y profesoras (pra) $\frac{d}{pra}=\frac{4}{7}$

Razón entre alumnos varones (v) y alumnos hembras (h) $\frac{v}{h}=\frac{7}{15}$

Razón de alumnos varones (v) a alumnos (a) $\frac{v}{a}=\frac{7}{22}$

Razón de alumnos hembras (h) a alumnos (a) $\frac{h}{a}=\frac{15}{22}$

Razón de docentes (d) a alumnos (a) $\frac{d}{a}=\frac{7}{22}$

Razón de docentes (d) a personas (p) $\frac{d}{p}=\frac{7}{29}$

Razón de alumnos (a) a personas (p) $\frac{a}{p} = \frac{22}{29}$

c. **Números de docentes: $\frac{7}{29} = \frac{d}{1670} \Rightarrow d = \frac{7_{x}1670}{29} = 403.1$ como se trata de una variable discreta tenemos que hay 403 docentes.**

d. **Números de alumnos: $\frac{22}{29} = \frac{a}{1670} \Rightarrow a = \frac{22_{x}1670}{29} = 1266.9$, como se trata de una variable discreta tenemos que hay 1267 alumnos.**

e. **Números de profesoras: $\frac{4}{7} = \frac{pra}{403} \Rightarrow pra = \frac{4x403}{7} = 230.3$, como se trata de una variable discreta tenemos que hay 230 profesoras.**

f. **Números de profesores: $\frac{3}{7} = \frac{pr}{403} \Rightarrow pr = \frac{3_{x}403}{7} = 172.7$, como se trata de una variable discreta tenemos que hay 173 profesores.**

g. **Números de alumnas: $\frac{15}{22} = \frac{h}{1267} \Rightarrow h = \frac{15_{x}1267}{22} = 863.9$, como se trata de una variable discreta tenemos que hay 864 alumnas hembras.**

1. **Números de alumnos: $\frac{7}{22} = \frac{v}{1267} \Rightarrow v = \frac{7_{x}1267}{22} = 403.1$, como se trata de una variable discreta tenemos que hay 403 alumnos varones.**

2. **Un obrero puede realizar un trabajo en 8 horas. Para terminarlo, se le anexa otro obrero que puede efectuarlo en 12 horas. ¿En cuánto tiempo realizan el trabajo si ambos trabajadores trabajan al mismo tiempo para terminar el trabajo?**

<u>Solución</u>: aplicando las proporciones tenemos: $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$

$\frac{3+2}{24}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{24}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{24}{5}$ $\Rightarrow$ **x=4.8, luego el tiempo empleado por los dos obrero trabajando al mismo tiempo es de 4.8 horas**

3. Hallar los valores de x e y, si se sabe que los dos triángulo son semejantes:

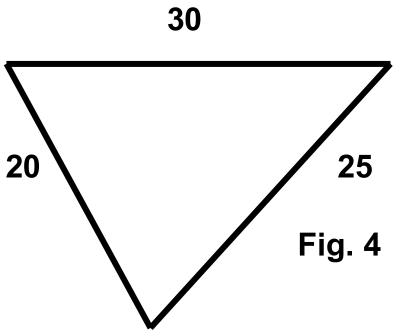


Fig. 4

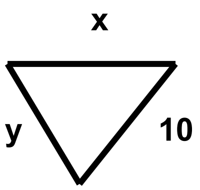


Fig. 5

<u>Solución</u>: como los triángulos son semejantes se cumple que:

$\frac{x}{30}=\frac{y}{20}=\frac{10}{25}$ $\Rightarrow \frac{x}{30}=\frac{10}{25}$ $\Rightarrow x=\frac{10_{x}30}{25}$ $\Rightarrow x=12$

$y\,\frac{y}{20}=\frac{10}{25}$ $\Rightarrow y=\frac{10_{x}20}{25}$ $\Rightarrow y=8$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribe la razón entre cada par de conjuntos:

a. 10 manzanas es a Bs. 25.000

b. La razón de una camisa a Bs. 37.000

c. La razón de Bs. 1.000 a Bs. 50.000

2. En un salón de clases hay 28 hembras y 17 varones

a. ¿Cuál es la razón de hembras a alumnos?

b. ¿Cuál es la razón de varones a alumnos?

3. Un herrero desea partir una placa de 20 m^2 en dos partes cuya razón es 2:5, ¿Cual es la dimensión de cada pieza?

4. En dos triángulos rectángulos semejantes la razón de los catetos opuestos al ángulo recto es de 7 es a 24, mientras que la razón de los catetos adyacentes al ángulo es de $2\frac{11}{12}$ a x. ¿Cuál será el valor de x?

5. La razón de dos números es 7 a 15, si la suma de este número es 22. ¿Cuáles son los números?

6. La razón de dos números es de 25 es a 14, si su diferencia es 11. ¿Cuáles son los números?

7. La suma de tres números es 156 y la razón del primero a 3 es 153, del segundo a 5 es de 260 y del tercero a 7 es de 371. ¿Cuáles son los números?

1. Los profesores Rafael García y Eleazar Luna compran un triple de la lotería de Caracas por Bs. 5000. Si ganan Bs. 4.500.000.

a. ¿Cuánto le corresponde al profesor Rafael García si aportó Bs.

2750?

b. ¿Cuánto le toca al profesor Eleazar Luna si aportó Bs. 2.250?

2. La suma de dos números es 56. Si $\frac{1}{6}$ del menor es $\frac{1}{8}$ del otro. ¿Cuales son los números?

3. El profesor Ricardo Rodríguez recibe un descuento de Bs. 180.000 en una compra de pantalones que costaba Bs. 1.360.000 y un descuento de Bs. 160.000 en la compra de unas camisas que costaba Bs. 1.240.000.

¿En que rubro recibió el profesor Ricardo Rodríguez mejor descuento?

CAPÍTULO IV

SUCESIONES Y SUMATORIAS

En este capítulo estudiaremos: SUCESIONES Y SUMATORIAS: Definición de una sucesión, propiedades de las sucesiones, sucesiones monótonas, sumatorias, propiedades de las sumatorias, inducción matemática.

Definición 1: Se define una Sucesión como la aplicación:

$f:Z^{+} \Rightarrow \Re$, e.i. el dominio (conjunto departida donde la función esta definida ver Modulo III) es el conjunto de los números enteros positivos y su recorrido (conjunto de llegada ver Modulo III) el conjunto de los números reales y se denota $\left(a_i\right)_{i=1}^{n}$ donde:

a_i: los términos de la sucesión

i: variable muda

i=1: límite inferior

n: límite superior

$\left(a_i\right)_{i=1}^{n}=a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$, donde:

a_1: primer término

a_2: segundo término

a_3: tercer término

:

:

:

a_n: enésimo término

Ejemplo: $(i_i)_{i=1}^{n}=\{1, 4, 27, 64, 256, 3125, ... n^n\}$

Ejemplo: Hallar los términos de una sucesión cuyo primer término es 2 y los demás se obtienen sumandote 7 al término anterior.

Solución: $a_1=2 \Rightarrow a_2=a_1 + 7 \Rightarrow a_2=9 \Rightarrow a_3=16 \Rightarrow a_4=23$, $\therefore \{a_i\}=\{a_i + 7\}$ $\Rightarrow \{a_i\}=\{2, 9, 16, 23, \ldots\ldots\ldots\ldots..\}$ ($\therefore$ se lee, por lo tanto)

Ejemplo: En la sucesión $\{a_i\}=4i + 3$, hallar los primeros 5 términos:

Solución: $a_1=4_x1 + 3 \Rightarrow a_1=7$, $a_2=4_x2 + 3 \Rightarrow a_2=11$, $a_3=4_x3 + 3 \Rightarrow a_3=15$, $a_4=4_x4 + 3 \Rightarrow a_4=19$, $a_5=4_x5 + 3 \Rightarrow a_5=23$, por lo tanto, $\{a_i\}=\{4i + 3\}$ $\Rightarrow \{a_i\}^{5}_{i=1}=\{7, 11, 15, 19, 23\}$

Ejemplo: Hallar el término general de la secesión:

$\{a_i\}=\{3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots\ldots\}$

Solución: El primer término a_1 se puede escribir de la forma: $a_1=2_x1 + 1$, el segundo término a_2 se puede escribir de la forma: $a_2=2_x2 + 1$, el tercer término a_3 se puede escribir de la forma: $a_3=2_x3 + 1$, el cuarto término a_4 se puede escribir de la forma: $a_4=2_x4 + 1$ y el quinto término a_5 se puede escribir de la forma: $a_5=2_x5 + 1$, $\therefore$, el término general de la sucesión será: $\{a_i\}=\{2i + 1\}$

Ejemplo: Hallar el término general de la secesión:

$\{a_i\}=\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots\ldots\}$

Solución: El primer término a_1 se puede escribir de la forma: $a_1=2_x1$, el segundo término a_2 se puede escribir de la forma: $a_2=2_x2$, el tercer término a_3 se puede escribir de la forma: $a_3=2_x3$, el cuarto término a_4 se

puede escribir de la forma: $a_4=2_x4$ y el quinto término a_5 se puede escribir de la forma: $a_5=2_x5$, ∴, el término general de la sucesión será: $\{a_i\}=\{2i\}$

Ejemplo: Hallar el término general de la sucesión:

$\{a_i\}=\{1, -1, 1, -1, 1, ,.......\}$

Solución: El primer término a_1 se puede escribir de la forma: $a_1=(-1)^{1+1}=1$, el segundo término a_2 se puede escribir de la forma: $a_2=(-1)^{2+1}=-1$, el tercer término a_3 se puede escribir de la forma: $a_3=(-1)^{3+1}=1$, el cuarto término a_4 se puede escribir de la forma: $a_4=(-1)^{4+1}=-1$ y el quinto término a_5 se puede escribir de la forma: $a_5=(-1)^{5+1}=1$, ∴, el término general de la sucesión será: $\{a_i\}=\{(-1)^{i+1}\}$

Definición 2: Si una sucesión $\left(a_i\right)_{i=1}^{n}$, $a_n<a_{n-1}$, $\forall n\in Z^+$ la sucesión se dice que esta en forma *decreciente*.

Ejemplo: $\left(\frac{1}{2^i}\right)_{i=1}^{n}=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ,............ \frac{1}{2^n}$

Definición 3: Si una sucesión $\left(a_i\right)_{i=1}^{n}$, $a_n>a_{n-1}$, $\forall n\in Z^+$ la sucesión se dice que esta en forma *creciente*.

Definición 4: Una sucesión se dice que es *monótona*, si esta es creciente o decreciente, es decir, *monótona creciente o monótona decreciente*.

Definición 5: La suma de los términos de una sucesión recibe el nombre de *Sumatoria* y se denota por la letra griega $\sum_{i=1}^{n} a_i$, e.i.

$\left(a_i\right)_{i=1}^{n}=a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n \Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$, recibe el nombre de los *términos de la sucesión* $\left(a_i\right)_{i=1}^{n}$, donde:

S_n: Suma de los n primeros término de la sucesión

a_i: los términos de la sucesión

i: variable muda

i=1: límite inferior

n: límite superior

Ejemplo: Hallar la suma de los cinco primeros términos de la sucesión: $\{2^i\}$ Solución: $\sum_{i=1}^{5} 2^i \Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{5} 2^i=2+4+8+16+32=62$

Ejemplo: a. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n$

b. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^2=1+4+9+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2$

c. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3=1+8+27+\ldots\ldots\ldots+n^3$

Ejemplo: Hallar una fórmula recurrente para la suma:

$S_n=\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+n$

Solución: para n=1 ⇒ $S_1=1$, para n=2 ⇒ $S_2=3$, para n=3 ⇒ $S_3=6$, para n=4 ⇒ $S_4=10$, para n=5 ⇒ $S_5=15$, busquemos ahora la fórmula recurrente, es decir:

$S_1=1 \Rightarrow S_1=1 \Rightarrow S_1=\frac{1\times 2}{2} \Rightarrow S_1=\frac{1\times 2}{2}$

$S_2=3 \Rightarrow S_1=3 \Rightarrow S_2=\frac{2_x3}{2} \Rightarrow S_2=\frac{2_x3}{2}$

$S_3=6 \Rightarrow S_1=2_x3 \Rightarrow S_3=\frac{2_x2_x3}{2} \Rightarrow S_3=\frac{3_x4}{2}$

$S_4=10 \Rightarrow S_1=2_x5 \Rightarrow S_4=\frac{2_x2_x5}{2} \Rightarrow S_4=\frac{4_x5}{2}$

$S_5=15 \Rightarrow S_1=3_x5 \Rightarrow S_5=\frac{2_x3_x5}{2} \Rightarrow S_5=\frac{5_x6}{2}$

Como podemos notar, todos los términos contienen un dos en el denominador y para n=1 aparece 1_x2, es decir, 1(1 + 1), para n=2, aparece 2(2 + 1), esto quiere decir para n, aparecerá n(n+1), entonces, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, solamente nos falta probar que esto es válido $\forall n \in Z^+$, eso lo haremos por medio de la inducción matemática (definición de conjunto inductivo), es decir, queremos comprobar que siempre se cumple para todo $\forall n \in Z^+$, se tiene: $S_n=\sum_{i=1}^{n} i=1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n=\frac{n(n+1)}{2}$

a. Para n=1, se tiene que $1=\frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1=1$

b. Supongamos ahora que se cumpla para n=k, donde $k \in Z^+$, e.i. k es un número entero cualquiera: $k=\frac{k(k+1)}{2}$

c. Probaremos ahora que se cumple para n=k + 1, e.i.

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2} \Rightarrow \frac{2(k+1)+k(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

sacando en el miembro izquierdo factor común k + 1, tenemos:

$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, q.e.d (queda esto demostrado), lo cual nos demuestra que esta suma es válida $\forall n\in Z^+$, e.i.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} i =1 + 2 + 3 +\ldots\ldots\ldots\ldots+ n=\frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar una fórmula recurrente para la suma:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} i^2 =1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2$$

<u>Solución</u>: para $n=1 \Rightarrow S_1=1$, para $n=2 \Rightarrow S_2=5$, para $n=3 \Rightarrow S_3=14$, para $n=4 \Rightarrow S_4=30$, para $n=5 \Rightarrow S_5=55$, busquemos ahora la fórmula recurrente, es decir:

$$S_1=1 \Rightarrow S_1=1 \Rightarrow S_1=\frac{1_x2}{2} \Rightarrow S_1=\frac{1_x2_x3}{2_x3} \Rightarrow S_1=\frac{1_x2(2_x1+1)}{6}$$

$$S_2=5 \Rightarrow S_2=5 \Rightarrow S_2=\frac{2_x5}{2} \Rightarrow S_2=\frac{2_x3_x5}{2_x3} \Rightarrow S_2=\frac{2_x3(2_x2+1)}{6}$$

$$S_3=14 \Rightarrow S_3=2_x7 \Rightarrow S_3=\frac{2_x2_x3_x7}{2_x3} \Rightarrow S_3=\frac{3_x4_x7}{2_x3} \Rightarrow S_3=\frac{3_x4(2_x3+1)}{6}$$

$$S_4=30 \Rightarrow S_4=2_x3_x5 \Rightarrow S_4=\frac{2_x2_x3_x5}{2} \Rightarrow S_4=\frac{4_x5_x9}{2_x3} \Rightarrow S_4=\frac{4_x5(2_x4+1)}{6}$$

$$S_5=55 \Rightarrow S_5=5_x11 \Rightarrow S_5=\frac{2_x5_x11}{2} \Rightarrow S_5=\frac{2_x3_x5_x11}{2_x3} \Rightarrow S_5=\frac{5_x6(2_x5+1)}{6}$$

De donde se deduce que: $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, e.i. si por ejemplo $n=4$, $S_4=\frac{4(4+1)(24+1)}{6} \Rightarrow S_4=\frac{4_x5(2_x4+1)}{6} \Rightarrow S_4=30$, solamente nos falta probar que esta suma es válida $\forall n\in Z$, lo cual haremos por inducción, e.i.

$S_n=\sum_{i=1}^{n} i^2$ =1 + 4 + 9 + ... + $n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a. Para n=1, se tiene que $1=\frac{1(1+1)(2_x1+1)}{6}\Rightarrow 1=1$

b. Supongamos ahora que se cumpla para n=k, donde $k\in Z^+$, e.i. k es un número entero cualquiera: $k^2=\frac{k(k+1)(2.k+1)}{6}$

c. Probemos que se cumple para n=k + 1, e.i.

$$\frac{k(k+1)(2.k+1)}{6} + (k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}\Rightarrow$$

$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+2+1)}{6}$, sacando factor común k + 1 en el miembro de la izquierda tenemos:

$$\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1)^2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+1+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{(k+1)((2k)^2+7(2k)+12)}{6.2}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow$$

$$\frac{(k+1)(2k+4)(2k+3)}{6.2}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\Rightarrow$$

$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ q.e.d. (queda esto demostrado)

e.i. esta suma es válida $\forall n\in Z^+$.

<u>Ejemplo</u>: Hallar una fórmula recurrente para la suma:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3$$

<u>Solución</u>: para n=1 $\Rightarrow S_1=1$, para n=2 $\Rightarrow S_2=9$, para n=3 $\Rightarrow S_3=36$, para n=4 $\Rightarrow S_4=100$, para n=5 $\Rightarrow S_5=225$, busquemos ahora la fórmula recurrente, e.i.

$$S_1=1 \Rightarrow S_1=\frac{1_x2_x2}{2_x2} \Rightarrow S_1=\frac{1^2{}_x2^2}{4}$$

$$S_2=3_x3 \Rightarrow S_2=\frac{2_x2_x3_x3}{2_x2} \Rightarrow S_2=\frac{2^2{}_x3^2}{4}$$

$$S_3=2_x2_x3.3 \Rightarrow S_3=\frac{2_x2_x2_x2_x3_x3}{2_x2} \Rightarrow S_3=\frac{3^2{}_x4^2}{4}$$

$$S_4=2_x2_x5_x5 \Rightarrow S_4=\frac{2_x2_x2_x2_x5_x5}{2_x2} \Rightarrow S_3=\frac{4^2{}_x5^2}{4}$$

$$S_5=3_x3_x5_x5 \Rightarrow S_5=\frac{2_x2_x3_x3_x5_x5}{2_x2} \Rightarrow S_5=\frac{5^2{}_x6^2}{4}$$

De donde se deduce que: $S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, e.i. si por ejemplo n=5, $S_5=\frac{5^2{}_x6^2}{4} \Rightarrow S_5=225$, e.i. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ solamente nos falta probar que esta suma es válida $\forall n\in Z^+$, lo cual haremos por inducción, e.i. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, queda como ejercicio.

<u>Propiedades de las Sumatorias:</u>

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, $\Rightarrow$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} k = k + k + k + ... + k = k(1+1+1+ .... +1) \Rightarrow$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} k = nk$

Ejemplo: $S_5 = \sum_{i=1}^{6} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5.6 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} 5 = 30$

2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$

Ejemplo: $S_5 = \sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ y

$S_5 = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$, como se puede observar $S_5 = \sum_{i=1}^{n} a_i$ es igual a $S_5 = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$ pero en forma invertida.

3. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$, comprobando por medio de la definición:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} ka_i = ka_1 + ka_2 + ... + ka_n = k(a_1 + a_2 + a_{3i} + ... + a_n) \Rightarrow$

$S_n = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

Ejemplo: $S_5 = \sum_{i=1}^{5} (4i+2) = 4\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} 2 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{5} (4i+2) = 4(1+2+3+4+5) + 2.5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} (4i-2) = 70$

4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$, comprobando por medio de la definición:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + ... + (a_n \pm b_n) \Rightarrow$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = (a_1 + a_2 + a_3 + \text{ .... } + a_1) \pm (b_1 + b_{21} + b_3 + \text{ .... } + b_4) \Rightarrow$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i \pm \sum_{i=1}^{n}b_i$$

Ejemplo: $S_5=\sum_{i=1}^{5}(2i^2 + 5i) = 2\sum_{i=1}^{5}i^2 + 5\sum_{i=1}^{5}i \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{5}(2i^2 + 5i) = 2(1+4+9+16+25) + 5(1+2+3+4+5) \Rightarrow \sum_{i=1}^{5}(2i^2 + 5i) = 185$$

5. $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

Esta propiedad tiene la ventaja, que mediante esta se pueden derivar las fórmulas: $\sum_{i=1}^{n}i$, $\sum_{i=1}^{n}i^2$, $\sum_{i=1}^{n}i^3$, $\sum_{i=1}^{n}i^4$, ... $\sum_{i=1}^{n}i^n$, esta propiedad se puede comprobar también de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=1}^{n}a_{i-1} = \sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=0}^{n}a_{i-1} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

Ejemplo: deducir aplicando la propiedad Nº 5 que:

a. $S_n=\sum_{i=1}^{n}i = 1 + 2 + 3 + \text{ .... } + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^2 = 1 + 4 + 9 + \text{ .... } + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 =1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Solución:

a. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i =1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n=\frac{n(n+1)}{2}$, haciendo $a_i=i^2$ y aplicando la propiedad Nº 5 tenemos: $\sum_{i=1}^{n}\left[i^2-(i-1)^2\right]=n^2 \Rightarrow n^2=\sum_{i=1}^{n}(2i-1) \Rightarrow$

$n^2=\sum_{i=1}^{n}2i+\sum_{i=1}^{n}(-1) \Rightarrow n^2=\sum_{i=1}^{n}2i-n \Rightarrow n^2=2\sum_{i=1}^{n}i-n \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}i=n^2 + n \Rightarrow$

$S_n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

b. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^2 =1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

haciendo $a_i=i^3$ y aplicando la propiedad Nº 5 tenemos: $\sum_{i=1}^{n}\left[i^3-(i-1)^3\right]=n^3 \Rightarrow$

$n^3=\sum_{i=1}^{n}(3i^2-3i+1) \Rightarrow n^3=3\sum_{i=1}^{n}i^2-3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1 \Rightarrow 3\sum_{i=1}^{n}i^2=n^3+ 3\sum_{i=1}^{n}i-n \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}\left(n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+3n-2n\right) \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right) \Rightarrow S_n=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^3 =1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, queda como ejercicio

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Escriba en forma explicita la siguiente suma:** $\sum_{i=1}^{50}(i^3+3i^2-2i+5)$

Solución: aplicando las propiedades de las sumatoria y las fórmulas recurrentes: $S_n=\sum_{i=1}^{n}k=nk$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, **n=50, tenemos que:**

$$S_{50}=\sum_{i=1}^{50}(i^3+3i^2-2i+5)=\sum_{i=1}^{50}i^3+3\sum_{i=1}^{50}i^2-2\sum_{i=1}^{50}i+5\sum_{i=1}^{50}1 \Rightarrow$$

$$S_{50}=\frac{50^2(51)^2}{4}+3\frac{50\times51\times101}{6}-2\frac{50\times51}{2}+5\times50 \Rightarrow$$

$$S_{50}=1625.625+128775-2250+250 \Rightarrow$$

$$S_{50}=\sum_{i=1}^{50}(i^3+3i^2-2i+5) \Rightarrow S_{50}=1.753.375$$

2. **Calcule el valor de la siguiente suma**: $S_6=\sum_{i=1}^{6}\left(i^3-(i-1)^2\right)$

Solución: resolviendo el producto notable, aplicando las propiedades de las sumatoria y las fórmulas recurrentes: $S_n=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **y** $S_n=\sum_{i=1}^{n}k=nk$, **cuando n=6 tenemos que:**

$$S_6=\sum_{i=1}^{6}\left(i^3-(i-1)^2\right)=\sum_{i=1}^{6}(i^3-i^2+2i-1)=\sum_{i=1}^{6}i^3-\sum_{i=1}^{6}i^2+2\sum_{i=1}^{6}i-\sum_{i=1}^{6}1 \Rightarrow$$

$$S_6=\frac{6^2(7)^2}{4}+\frac{6_x7_x13}{6}-2\frac{6_x7}{2}+6 \Rightarrow S_6=441+91-42+6 \Rightarrow S_6=496$$

3. Derive la siguiente fórmula: $S_n=\sum_{i=1}^{n}ar^{n-1}$

Solución: aplicando las propiedades de la sumatoria tenemos: $S_n=a\sum_{i=1}^{n}r^{n-1} \Rightarrow S_n=a(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots\ldots + r^{n-1})$, aplicando la fórmula recurrente $a^n - b^n=(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots\ldots + b^{n-1})$ y la propiedad del elemento inverso multiplicativo de los números reales tenemos que: $S_n=\frac{a(1+r+r^2+r^3+\ldots\ldots\ldots+r^{n-1})(1-r)}{1-r} \Rightarrow S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

4. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que: $1 + 2^0 + 2^1 + \ldots\ldots\ldots + 2^n=2^{n+1}$

Solución: aplicando la definición de conjunto inductivo tenemos:

i. Veremos que se cumple para n=1, i.e., $1 + 2^0 + 2^1=2^{1+1} \Rightarrow 4=4$, luego se cumple para n=1

ii. Supongamos que se cumple para n=s, i.e., $2^s=2^{s+1}$

iii. Por probar que se cumple para n=s + 1, $2^{s+1} + 2^{s+1}=2^{s+1+1} \Rightarrow 2_x2^{s+1}=2^{s+2} \Rightarrow 2^{s+2}=2^{s+2}$, q.e.d

5. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$3_x5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, sea múltiplo de 17

Solución: aplicando la definición de conjunto inductivo tenemos:

i. Veremos que se cumple para n=1, i.e.

$3_x5^{2(1)+1} + 2^{3(1)+1} = 3_x5^3 + 2^4 = 375 + 16 = 391 = 17_x23$, que es múltiplo de 17

ii. Supongamos que se cumple para n=s, i.e., $3_x5^{2s+1} + 2^{3s+1}$ es múltiplo de 17, i.e., $3_x5_x5^{2s} + 2_x2^{3s} = 15_x5^{2s} + 2_x2^{3s}$, es múltiplo de 17

iii. Por probar que se cumple para n=s + 1, $3_x5^{2(s+1)+1} + 2^{3(s+1)+1}$ es múltiplo de 17 $\Rightarrow$ $3_x5^{2s+3} + 2^{3s+4}$ es múltiplo de 17 $\Rightarrow$ $3_x5^3{}_x5^{2s} + 2^4{}_x2^{3s}$ es múltiplo de 17 $\Rightarrow$ $15_x25_x5^{2s} + 2_x8_x2^{3s} = 15(17 + 8)5^{2s} + 2_x8_x2^{3s}$ es múltiplo 17 $\Rightarrow$ $15_x17_x5^{2s} + 8_x15_x5^{2s} + 2_x8_x2^{2s} = 15_x17_x5^{2s} + 8(15_x5^{2s} + 2_x2^{2s})$, donde $15_x17_x5^{2s}$ es múltiplo de 17 y $8(15_x5^{2s} + 2_x2^{2s})$ también es múltiplo de 17 por hipótesis, luego $3_x5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es múltiplo de 17, q.e.d

6. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

<u>Solución</u>: aplicando la definición de conjunto inductivo tenemos:

i. Veremos que se cumple para n=1, i.e.

$\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, luego se cumple para n=1

ii. Supongamos que se cumple para n=s, i.e., $\frac{s}{2^{s}} = 2 - \frac{s+2}{2^{s}}$

iii. Por probar que se cumple para n=s + 1, e.i.

$2 - \frac{s+2}{2^{s}} + \frac{s+1}{2^{s+1}} = 2 - \frac{s+1+2}{2^{s+1}}$, **realizando la suma fracciones en ambos miembro, donde el m.c.m(1,**2^{s}**,**2^{s+1}**)=**2^{s+1} $\Rightarrow$

$$\frac{2 x 2^{s+1} - 2s - 4 + s + 1}{2^{s+1}} = \frac{2 x 2^{s+1} - s - 3}{2^{s+1}} \Rightarrow \frac{2 x 2^{s+1} - s - 3}{2^{s+1}} = \frac{2 x 2^{s+1} - s - 3}{2^{s+1}} \text{ q.e.d}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Escriba en forma explicita las siguientes sumas:**

a. $\sum_{i=1}^{6} i$

b. $\sum_{1=1}^{5} i^{3i-1}$

c. $\sum_{i=1}^{6} \frac{2i}{4i-5}$

d. $\sum_{i=1}^{5} \frac{5}{2i-6}$, $i \neq 3$

e. $\sum_{i=2}^{6} i\sqrt{2i-3}$

2. **Compruebe por inducción matemática las propiedades de las sumatorias Nº 2, 3, 4 y 5 de la pagina Nº 45**

3. **Calcule los valores de las siguientes sumas:**

a. $\sum_{i=1}^{4} \left(i-(i-1)\right)$

b. $\sum_{i=1}^{6} \left(i^3-(i-1)^2\right)$

c. $\sum_{i=1}^{6} \left(a_i-a_{i-1}\right)$

4. **Escriba explícitamente las siguientes sumas:**

a. $\sum_{i=1}^{6} 3a_i$

b. $3\sum_{i=1}^{6} a_i$

c. $\sum_{i=1}^{6} (a_i + b_i)$

d. $\sum_{i=1}^{6} a_i + \sum_{i=1}^{6} b_i$

5. **Calcular:**

a. $\sum_{i=1}^{100} i$

b. $\sum_{i=1}^{100} i^2$

c. $\sum_{i=1}^{80} (i^3 + i)$

d. $\sum_{i=1}^{50} (i^2 + 3i - 5)^2$

e. $\sum_{i=1}^{6} (i + 3)^3$

f. $\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1)^2$

6. **Deduzca la siguiente fórmula:** $\sum_{i=1}^{n} (a + ib)$

7. **Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:**

$6(1 + 7 + 7^2 + \ldots\ldots\ldots + 7^n) = 7^{n+1}$

8. **Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:**

$4(1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$

9. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5$, sea divisible por 24

10. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$3^{4n} + 9$ sea múltiplo de 10

11. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

12. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

13. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} ai = \frac{an(n+1)}{2}$$

14. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} (3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

15. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

16. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

17. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

18. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)(i-1)! = n!$$

19. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = \frac{a^{n}-1}{a-1}$$

20. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i} = 2(2^{n}-1)$$

21. Probar por medio de la definición de conjunto inductivo que:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a(r^{n}-1)}{r-1}$$

CAPÍTULO V

TEORIA DE CONTEO

En este capítulo se estudiaran los principios fundamentales del conteo: TEORIA DE CONTEO: Conteo, Principio Fundamental del Conteo, Factorial de un Número, Variación, Combinación, Permutación, Diagrama del Árbol y por último resolveremos problemas aplicados a la vida real

Definición 1: **Se define la teoría de conteo como la parte de la matemática que se encarga de estudiar la formación de grupos a partir de los elementos de un conjunto, tomando en cuenta (o no tomando en cuenta) el orden de colocación de estos elementos que contiene el conjunto.**

Ejemplo: **¿De cuántas maneras diferentes podemos contar los elementos de un conjunto que posee tres elementos?**

a. Si los tomamos de tres en tres sin tomar en cuenta el orden de colocación.

b. Si los tomamos de tres en tres tomando en cuenta el orden de colocación.

Solución: a. **Sea A={1, 2, 3}, si los contamos sin tomar en cuenta el orden de colocación se puede contar de una sola manera.**

Solución: b **Si el orden de colocación si importa, entonces hay seis formas distintas que son: 123, 132, 213, 231, 312 y 321.**

Definición 2: **Principio fundamental para contar:** **Sea A el conjunto de tres enteros {0, 1, 2} y B el conjunto de dos enteros {7, 8} ¿se puede**

encontrar el número de parejas de ordenadas distintas (a, b), en las cuales la primera componente de la pareja sea un elemento de A?

Para cada una de estas tres maneras en que puede escogerse la primera componente, en una pareja ordenada, existen dos maneras en las cuales se elige la segunda componente. Así el conjunto de todas estas parejas ordenadas es: {(0, 7), (0, 8), (1, 7), (1, 8), (2, 7), (2, 8)}, que contiene 2.3=6 parejas. El conjunto de tales parejas se llama producto cartesiano. Este ejemplo ilustra el primer principio fundamental de contar.

Ejemplo: ¿Cuantos números pares existen que tengan numeral de tres dígitos?

Solución: Como ayuda para razonar sobre este tipo de problemas se puede hacer un diagrama como este:

las cifras de las centenas es una cualquiera de los nueve elementos de {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, por consiguiente se escribe en el primer espacio.

9		

La cifra de las decenas es un elemento cualquiera de {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, así que se escribe diez en el segundo espacio.

9	10	

Las cifra de las unidades es una cualquiera de los cinco enteros {0, 2, 4, 6, 8}, entonces se escribe cinco en el tercer espacio.

9	10	5

Nuestro primer principio fundamental (producto cartesiano) nos dice que hay 9.10 maneras distintas de escoger las cifras de las centenas y decenas; por lo tanto, existen (9.10).5, o sean 450 números pares pertenecientes a Z^+ diferentes de tres cifras.

Puesto que la unión de {0, 1, 2} y {7, 8} es el conjunto {0, 1, 2, 7, 8}, puede observarse que el número de elementos en los conjuntos dados es: 5=3 + 2. Por otra parte, la unión de {0, 1, 2} y {2, 7} tiene solamente 4 elementos, ya que el número 2 es elemento de los dos conjuntos dados, esto es, $\{2\}=\{0, 1, 2\}\cap\{2, 7\}$.

Este ejemplo ilustra el segundo principio fundamental que utilizamos para contar.

Si un conjunto finito A contiene r elementos, un conjunto finito B contiene s elementos, y su intersección contiene t elementos, entonces la unión de A y B contiene r + s - t elementos. Cuando los conjuntos A y B son disjuntos, entonces el número de elementos en la unión es r + s.

Ejemplo: ¿cuántos enteros positivos impares menores que 10.000 pueden representarse usando los dígitos 0, 3, 6, 9?

Solución: Puesto que existen números con 1, 2, 3, o 4 dígitos podemos considerar estos casos separadamente.

En cada caso, se debe llenar el espacio de las unidades con una cifra impar (3 o 9) y a continuación se llenan los espacios restantes.

La tabla muestra el número de enteros impares representables en cada caso. Nótese que 0 no puede ser el dígito inicial de cualquiera de los números pedidos.

dígitos en el numeral	**1**	**2**	**3**	**4**
Números de enteros impares	**2**	**2.3**	**2.4.3**	**2.4.4.3**

números total de estos impares es: 2 + 6 + 24 + 96=128. $\forall n \in Z^+$

Definición 3: Se define el factorial de un número, como el producto:

n(n - 1)(n - 2) ...... 1 y se denota por n!, que cumple con las siguiente propiedades:

1. **0!=1**
2. **n!=n(n - 1)!**

Ejemplo: a. 3!=3.2.1=6 b. 5!=5.4.3.2.1=120 c. 6!=6.5!=6.120=720

Definición 4: En un conjunto A={1, 2, 3, 4 .... n, n+1, ... m}, si ordenamos estos elementos de m en n, tomando en cuenta el orden de colocación, esta forma de contar los elementos de A recibe el nombre de Variación y se denota por $V_{m,n}$ **y se calcula mediante la fórmula:**

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ o } V_{m,n}=m(m-1) \ldots\ldots (m-n-1)$$

De la definición anterior se puede decir que dos arreglos son diferentes si:

a. **Tienen por lo menos un elemento diferente.**

b. **El orden de colocación de sus elementos son diferentes.**

c. Tienen por lo menos un elemento diferente y el orden de colocación de sus elementos es diferente.

Casos especiales de las variaciones:

a. n=0, no se selecciona ningún elemento, solo se puede formar un conjunto, el conjunto vacío: $V_{m,0} = \frac{m!}{(m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1$

b. n=1, se selecciona un solo elemento de los n disponibles, como un solo elemento no se puede ordenar, en consecuencia se seleccionan n conjuntos de un elemento: $V_{m,1} = \frac{m!}{(m-1)!} = \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = m$

c. n=m, se esta seleccionando n elementos en n elementos o sea que no se efectúa ninguna selección, sino que se toman los n elementos y se reordenan en todas las formas (Permutación simple o ordinaria):

$$V_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Ejemplo: a. Hallar: $V_{5,2}$ **Solución:** $V_{5,2}$**= 5.4=20.**

b. ¿De cuántas maneras diferentes podemos contar los elementos de un conjunto que posee tres elementos, si los tomamos de dos en dos, tomando en cuenta el orden de colocación?

Solución: Estamos en presencia de una variación de tres elementos tomados de dos en dos, es decir, $V_{3,2}$**=3.2=6**

c. ¿De cuantas maneras diferentes pueden elegir en una asociación de vecinos su presidente, un secretario, un tesorero y dos vocales, si la directiva consta de 15 miembros?

Solución: Como el orden de colocación se tiene que tomar en cuenta porque no es lo mismo ser presidente que ser tesorero por ejemplo, tenemos que variar los 15 miembros de 5 en 5, es decir, $V_{15,5}$=15.14.13.12.11=360360, entonces esta asociación puede elegir a sus miembros de 360360 formas distintas.

d. **Varios expertos del SENIAT están efectuando un estudio para determinar cuales negocios comerciales en San Fernando de Apure merecen protección arancelaria.**

A cada experto se le exige que presente una lista en orden de prioridad de los tres negocios comerciales de un total de diez, que estima que merece más protección. ¿Cuántas de cada lista puede presentar cada experto?

Solución: Como cada lista se trata de un conjunto ordenado, es decir cada negocio comercial seleccionados para una lista va a ocupar un lugar específico, estamos en presencia de una variación, es decir $V_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!}$ o $V_{10,3} =$10.9.8=720, por lo tanto cada experto del SENIAT debe presentar 720 listas distintas.

e. **La Gobernación del Estado Apure promociona un concurso público con la finalidad de adivinar el nombre de una nueva fundación que estará a su cargo en el Estado Apure.**

Las bases del concurso son las siguientes:

i. **Las letras para el nombre deberán de ser seleccionadas del conjunto de letras que tienen las palabras Cabalgando por los Llanos de Apure.**

ii. **Los nombres propuestos deben ser palabras de siete letras.**
iii. **Ninguna letra debe repetirse.**
iv. **La primera, tercera, quinta y séptima letra deben ser consonantes.**
v. **La segunda, cuarta y sexta letra deben ser vocales.**
vi. **Una persona puede participar cuantas veces lo desee.**
vii. **Si una persona propone dos o más veces el mismo nombre es descalificada.**
viii. **Las propuestas que acierten el nombre serán sorteados y el ganador será premiado con 2.000.000,00 Bs. en efectivo y un viaje por el Alto Apure, con gastos pagos para dos personas durante una semana.**

¿Cuántos nombres tendrá que proponer una persona para asegurar su participación en el sorteo?

Solución: Como el nombre que se va a escoger del conjunto de letras que tiene la expresión Cabalgando por los Llanos de Apure, contiene 4 vocales y 9 consonantes y estas no pueden repetirse para formar el nombre que se pide, aplicamos el primer principio fundamental del conteo, la cual ilustraremos con la siguiente tabla para mejor ilustración.

1C	1V	2C	2V	3C	3V	4C
9	4	8	3	7	2	6

Para escoger la primera consonante hay 9 formas distintas, para escoger la segunda consonante hay 8 formas distintas, ya que la primera consonante que se escogió no se puede volver a tomar en cuenta, para la

escogencia de la tercera y cuarta consonante hay 7 y 6 formas respectivamente, esto quiere decir que las consonantes se pueden escoger de: $9\times8\times7\times6=3.024$ formas distintas, de igual manera para escoger la primera vocal se puede hacer de 4 formas distintas, para la escogencia de la segunda y tercera vocal se puede hacer de 3 y 2 maneras distintas respectivamente, lo que quiere decir que las vocales se escogen de: $4\times3\times2=24$ formas distintas, por lo tanto, el número de nombres que puede proponer una persona para asegurar su participación en el sorteo será: $3.024\times.24=72.576$. Este problema también se puede resolver aplicando directamente la definición de variación y el principio multiplicativo, es decir, para escoger las consonantes tenemos: $V_{9,4}=9\times8\times7\times6=3.024$ y para escoger las vocales tenemos: $V_{4,3}=4\times3\times2=24$, luego para escoger las consonantes y vocales: $V_{9,4}\times V_{4,3}=3.024\times24=72.576$.

Definición 5: En un conjunto A={1, 2, 3, 4 .... n, n+1, ... m}, si ordenamos estos elementos de m en n, sin tomar en cuenta el orden de colocación, esta forma de contar los elementos de A recibe el nombre de Combinación y se denota por $C_{m,n}$ y se calcula mediante la formula: $C_{m,n}$ $=\dfrac{m!}{m!(m-n)!}$

Ejemplo: a. Calcular $C_{5,3}=\dfrac{5!}{5!(5-3)!}=\dfrac{5!}{3!2!}=5.4.3!$

b. ¿De cuántas maneras diferentes podemos contar los elementos de un conjunto que posee tres elementos, si los tomamos de dos en dos, sin tomar en cuenta el orden de colocación?

<u>Solución:</u> Estamos en presencia de una combinación de tres elementos tomados de dos en dos, es decir: $C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!.2!}{2!.1!} = 3$, los cuales son: {12, 13, 23}

c. ¿Cuántas juntas directivas de cinco personas pueden formarse en una asociación de vecinos, si la directiva consta de 15 miembros?

<u>Solución:</u> Como para tomar las juntas el orden de los miembros no nos importa, estamos en presencia de una combinación, es decir: $C_{15,5} = \frac{15!}{5!(15-45)!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{5!.10!} = 3003$, i.e. 3003 juntas directivas.

d. Para los venideros juegos nacionales se tiene que elegir la comisión técnica que asesorará a los atletas en las disciplinas de atletismo y natación en el Estado Apure.

La comisión estará integrada por siete entrenadores, todos con la misma jerarquía; para lo cual han sido propuestos cinco representantes para atletismo y siete para natación. ¿De cuantas maneras se puede integrar la comisión para que:

a. Tenga dos representantes en atletismo y tres en natación.

b. Tengan como mínimos dos representantes por disciplina

<u>Solución: a</u>. Como el orden de colocación de los representantes que formaran la comisión no se toma en cuenta estamos en presencia de una combinación, es decir, los representantes de la comisión de atletismo se obtiene como: $C_{5,2}$ y la de natación como: $C_{7,3}$. Aplicando el principio fundamental del conteo (principio multiplicativo) se tiene que las comisiones están integradas por:

$$C_{5,2}xC_{7,3}=\frac{5!}{2!(5-2)!}\frac{7!}{3!(7-3)!}=10.35=350$$

b. Esta compuesta por cuatro partes:

i. Escogiendo dos de atletismo y cinco de natación.

ii. Escogiendo tres de atletismo y cuatro en natación.

iii. Escogiendo cuatro en atletismo y tres en natación.

iv. Escogiendo cinco en atletismo y dos en natación.

Esto es: $C_{5,2}xC_{7,5}$ + $C_{5,3}xC_{7,4}$ + $C_{5,4}xC_{7,3}$ + $C_{5,5}xC_{7,2}$=

$$\frac{5!}{2!(5-2)!}x\frac{7!}{5!(7-5)!}+\frac{5!}{3!(5-3)!}x\frac{7!}{4!(7-4)!}+\frac{5!}{4!(5-4)!}x\frac{7!}{3!(7-3)!}+\frac{5!}{5!(5-5)!}x\frac{7!}{2!(7-2)!}$$

=10.21 + 10.32 + 5.35 + 1.21=756

<u>Definición 6</u>: En un conjunto A={1, 2, 3, 4 .... n, n+1, ... m}, si ordenamos estos elementos de n en n, <u>tomando en cuenta el orden de colocación</u>, esta forma de contar los elementos de A recibe el nombre de <u>Permutación</u> y se denota por P_m y se calcula mediante la formula: P_n=n!.

Como podemos notar las permutaciones son un caso particular de las variaciones, con m=n.

<u>Ejemplo:</u> a. Calcular P_5=5!=5.4.3.2.1=120.

b. ¿De cuantas maneras diferentes podemos contar los elementos de un conjunto que posee tres elementos si los tomamos de tres en tres tomando en cuenta el orden de colocación?

<u>Solución:</u> Cómo lo vamos a ordenar de tres en tres tomando en cuenta el orden de colocación, estamos en presencia de una permutación, es decir, P_3=3!=3.2.1=6.

c. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 libros en un estante?

<u>Solución:</u> El problema consiste en colocarlos en el estante tomándolos todos a la vez, es decir permutándolos, en consecuencia: P_6=6!=6.5.4.3.2.1=720 formas diferentes.

Otra manera que podemos colocar la combinación es: $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$

d. Considérese una computadora con 16 puertos y supóngase que en un momento dado cada puerto está en uso (u), no se usa aunque su estado sea funcional (n) o no funciona (i). ¿Cuántas configuraciones son posibles, en la que 10 puertos estén en uso, 4 no se usen pese a que funcionan y 2 más no funcionen? Una secuencia típica de esta naturaleza sería: uuiuinnunuunuuuu

Solución: Para determinar todas las formas en que pueden permutarse tales puertos para formar otros ordenamientos, requiere que se consideren los 16 puertos. Si fuera posible controlar su uso, se tendría frente a si un proceso de 3 pasos.

i. Seleccionar 10 puertos para su uso. $C_{16,10}=\frac{V_{16,10}}{P_{10}} \Rightarrow C_{16,10}=8.008$ formas

ii. Seleccionar 4 de los 6 puertos restantes como no usados y funcionales. $C_{6,4}=\frac{V_{6,4}}{P_4} \Rightarrow C_{6,4}=15$ formas

iii. Seleccionar los dos puertos restantes como puertos que no funcionan. $C_{2,2}=\frac{V_{2,2}}{P_2} \Rightarrow C_{2,2}=1$ forma

Aplicando el principio de multiplicación garantiza que el proceso de 3 pasos en su totalidad puedan realizarse, es decir, $C_{16,10}\text{x}C_{6,4}\text{x}C_{2,2}=8.008\text{x}15\text{x}1=120.120$ formas, estas se pueden escribir en la forma:

$C_{16,10}\text{x}C_{6,4}\text{x}C_{2,2}=\frac{16!}{10!\text{x}6!}\text{x}\frac{6!}{4!\text{x}2!}\text{x}\frac{2!}{2!\text{x}0!}=\frac{16!}{10!\text{x}4!\text{x}2!}$, el cual se puede generalizar para permutaciones de objetos que no se diferencian

$$\frac{n!}{n_1!\text{x}n_2!\text{x}\ldots\ldots\text{x}n_k!}$$

e. Un ingeniero de tránsito debe ajustar el tiempo de cambio de la luz en una serie de 10 semáforos de la calle principal de la ciudad de Valencia. En un momento dado, el semáforo puede estar con las luces rojas, amarrilla o verde encendidas. a. ¿Cuántas variantes de colores de la serie de semáforos son posibles al principio? b. Si las luces se encienden aleatoriamente al inicio, ¿De Cuántas maneras diferentes se tendrán 3 semáforos con luz rojas, 5 con luz amarrillas y 2 con luz verde?

<u>Solución:</u> a. Es un proceso de 10 pasos con 3 opciones en cada uno, es decir $3x3x3x3x3x3x3x3x3x3=3^{10}=59.049$

<u>Solución:</u> b. Aplicamos la fórmula permutaciones de objetos que no se diferencian $\frac{n!}{n_1!xn_2!x......xn_k!}=\frac{10!}{3!x5!x2!}=2.520$

<u>Definición 7:</u> un <u>diagrama de árbol</u> es un instrumento práctico que nos permite especificar por extensión todos los elementos de un producto cartesiano entre conjuntos, que tengan un número de elemento finito.

Para trazar en diagrama del árbol realizaremos los siguientes pasos, es decir sean los conjuntos A y B cualquier lista de los elementos de un producto cartesiano de AxB.

i. Se fija un nodo inicial

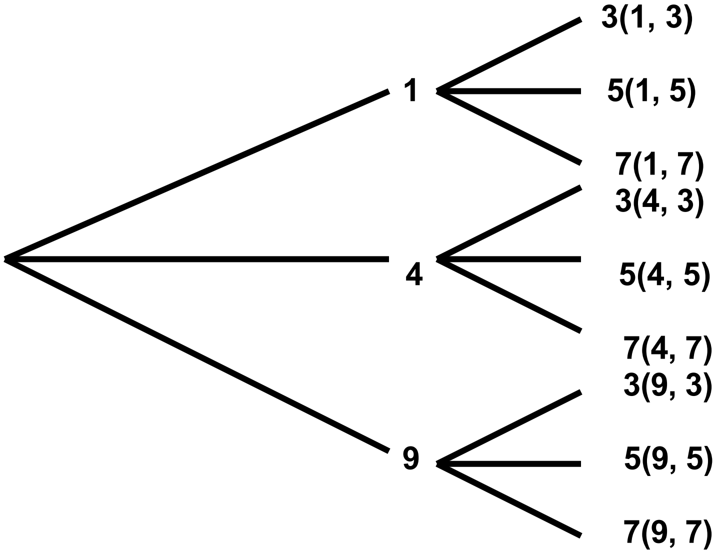
ii. Abrir a partir del nodo inicial tantas ramas como elementos tenga el conjunto A y colocar en los extremos de cada rama cada uno de los elementos del conjunto A.

iii. Abrir a partir de cada una de las ramas, tantas ramas como elementos tengan el conjunto B y colocar cada uno de estos en el extremo de cada rama.

iv. Leer secuencialmente sobre cada rama el conjunto ordenado resultante.

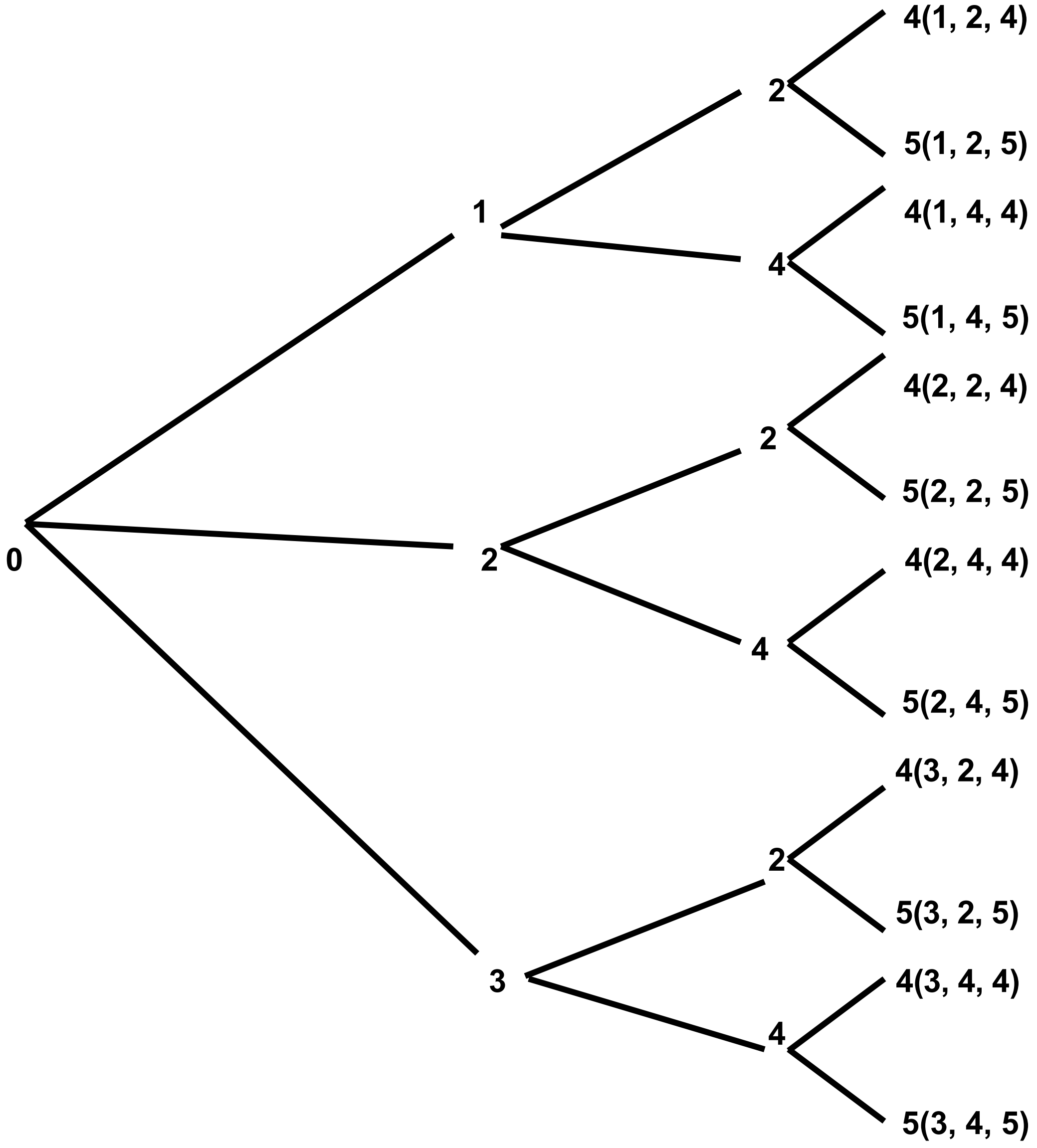
<u>Ejemplo:</u> Sean los conjuntos A={1, 4, 9} y B={3, 5, 7,} listar AxB

<u>Solución:</u> AxB={(1, 3), (1, 5), (1, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (9, 3), (9, 5), (9, 7)} y su representación por medio del diagrama del árbol es:



<u>Ejemplo 9:</u> Sean A={1, 2, 3}, B={2, 4} y C={4, 5} listar AxBxC

<u>Solución:</u> {((1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 4, 4), (1, 4, 5), (2, 2, 4), (2, 2, 5), (2, 4, 4), (2, 4, 5), (3, 2, 4), (3, 2, 5), (3, 4, 4), (3, 4, 5)} y su representación por medio del diagrama del árbol es:


0
1
2
3
2
4
2
4
2
4
4(1, 2, 4)
5(1, 2, 5)
4(1, 4, 4)
5(1, 4, 5)
4(2, 2, 4)
5(2, 2, 5)
4(2, 4, 4)
5(2, 4, 5)
4(3, 2, 4)
5(3, 2, 5)
4(3, 4, 4)
5(3, 4, 5)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule n si a. $\binom{n}{2} = 21$ b. $\binom{n}{2} = 105$

2. ¿Cuántas sucesiones de dos letras pueden formarse?

3. ¿Cuántos numerales de tres cifras pueden formarse utilizando los símbolos 6,7 y 8?

4. ¿De cuántas maneras diferentes pueden resolverse 20 preguntas de un cuestionario cuya respuesta es verdadero o falso?

5. ¿Cuántos subconjuntos de 5 muchachos es posible elegir de un conjunto de 12?

6. Se tienen 10 novelas históricas y 5 novelas bibliográficas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 6 novelas históricas y 3 bibliográficas en una estantería si puede contener solamente 9 libros?

7. Un fabricante de automóviles produce 7 modelos de autos, cada uno dispone de 6 colores diferentes. Además, el comprador puede elegir una de 4 maneras diferentes de tapicería y uno de 5 colores diferentes para el interior. ¿Cuántas variedades diferentes de automóviles puede producir el fabricante?

8. El testigo de un atraco reporta a la P.T.J. que las placas del automóvil en que huyeron los asaltantes era de 6 cifras, pero que el solamente recuerda las 3 ultimas. ¿Cuántas placas tiene que investigar la P.T.J?

9. El Programa de Planificación tiene 13 Sub.-Proyectos en los primeros tres semestres ¿De cuántas maneras diferentes se pueden

inscribir 2 hermanos gemelos en los tres primeros semestre de la carrera de Administración si sus padres desean que queden en secciones distintas?

10. Un restaurante, sirve ensalada con lechuga, tomate, cebolla, zanahoria, remolacha, queso, (pimienta o mostaza). ¿Cuántas ensaladas distintas pueden hacerse, si los clientes pueden escoger 3 cualquiera de los componentes?

11. María Guerra, debe mandar cartas a su esposo, novio, querido, y dos amigos íntimos. El jueves por la noche decide escribir a dos de sus enamorados. ¿De cuántas maneras puede elegirlas, si el orden en que escribe las dos cartas no se toma en cuenta?

12. En un estudio realizado por la O.P.S.U en el Estado Apure para la escogencia de un grupo de profesores que merecen ser condecorados. La O.P.S.U nombra una comisión para determinar dicha escogencia. A cada integrante de la comisión se le exige que presente una lista en orden de prioridad de 5 profesores de un total de 15, que estimen se merecen la condecoración. ¿Cuántas de tales listas pueden presentar cada integrante de la comisión?

13. Una muestra de 6 automóviles usados ha de elegirse al azar de un lote de 22, de los cuales 8 tienen defectos de motor, se rechazará el lote si uno más motores de la muestra resultan defectuosos. ¿Cuántas muestras diferentes de 6 autos pueden elegirse? ¿Cuántas de estas muestras provocan el rechazo del lote?

14. Si una palabra es una ordenación de letras. ¿Cuántas palabras pueden formarse con las letras a, b, c y d si ninguna letra puede repetirse?, supongamos que permitamos las repeticiones ¿Cuántas palabras pueden formarse?

15. ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con los elementos del conjunto A={x/x∈Z y o≤Z≤9}, sin usar dos veces el mismo dígito?, ¿Cuántos subconjuntos de 10 elementos se pueden obtener del conjunto A?

16. a. Una firma posee 3 fábricas A, B y C. El que estas fábricas trabajen o no, depende de las demandas de compras de sus áreas. Si una fábrica trabaja, ha de presentar un informe de operaciones. ¿cuántos conjuntos son posibles (sin incluir el conjunto vacío), b. Supongamos que la fábrica A siempre opera independientemente de cuales sean las condiciones. ¿Cuántos conjuntos de informes son ahora posible?

17. Cuando una serie de productos se introducen al mercado unos después de otros, los introducidos al mercado posteriormente a menudo tienen menos demanda que los presentados anteriormente. Supongamos que se han de introducir 5 productos en sucesión. ¿Cuántas sucesiones pueden introducirse al mercado? ¿De cuantas maneras puede un producto determinado ser el primero?

18. a. ¿Cuántos números de teléfonos pueden ponerse en una central usando 5 dígito para cada número? b. Si se utilizan 3 letras antes de los dígitos ¿Cuántos números podrían ponerse en la central?

19. ¿Cuántas particiones de un conjunto de 25 elementos pueden hacerse si las particiones han de contener 15, 5 y 5 respectivamente?

20. Una compañía debe presentar ofertas para contratos de trabajo cada mes. El jefe de administración informa que la compañía debe hacer ofertas bajas 4 veces, ofertas ajustadas 3 veces y ofertas altas el resto de las veces. Escriba una expresión que indique cuantas maneras puede obtenerse este resultado.

CAPÍTULO VI

INECUACIONES

En este capítulo se estudiara: Intervalos y Desigualdades, Puntos de Separación, Puntos de Pruebas, Vecindad o Entorno, Cota Superior, Cota Inferior, Conjunto Acotado, El Supremo, El ínfimo, Factores de una Inecuación, Inecuaciones lineales, Inecuaciones cuadráticas, Inecuaciones racionales, Inecuaciones con valor absoluto o Distancia entre dos Puntos, Propiedades de la distancia entre dos puntos, Sistema de inecuaciones lineales y no lineales.

Definición 1: Una relación que existe entre los signos $\geq$ ó $\leq$ (mayor o igual que o menor ó igual que) mediante los números reales lo llamamos *desigualdad*.

Ejemplo: $5<8$ ó $8>5$, se lee, cinco menor que ocho ó ocho mayor que cinco.

Definición 2: Al conjunto de los números reales comprendido entre a y b, $\forall a, b \in \Re$, se le llama *intervalo*, los intervalos pueden ser: abiertos, cerrados, semiabierto o semi-cerrado.

Definición 3: $\forall a, b \in \Re$, existe un $x \in \Re / a<x<b \Rightarrow x \in (a, b)$, e.i. los números reales que están entre a y b, recibe el nombre de *intervalo abierto*, también se consideran intervalos abiertos a: $x<a \Rightarrow x \in (-\infty, a)$ y $x>a \Rightarrow x \in (a, +\infty)$ y sus representaciones gráficas son respectivamente:

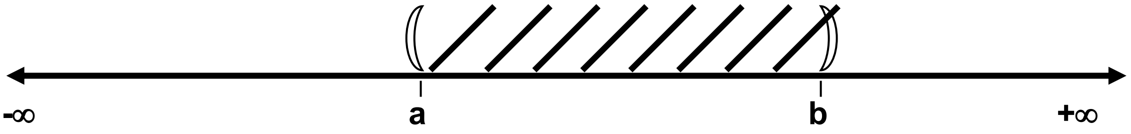


Fig. N° 1

Fig. N° 2

Fig. N° 3

Los intervalos antes mencionados se leen: $a<x<b$, "x es mayor que a pero menor que b, es decir son todos los números comprendidos entre a y b excluyéndolos a ellos, también es un intervalo abierto: $a>x>b$, e.i. x es menor que a o x es mayor que b $\Rightarrow x\in(-\infty, a)\cup(b, +\infty)$ y su representación gráfica es:

Fig. N° 4

<u>Definición 4:</u> $\forall a, b\in\Re$, $\exists$ un $x\in\Re / a\leq x\leq b \Rightarrow x\in[a, b]$, es decir, los números reales que están entre a y b incluyéndolos a ellos, recibe el nombre de <u>*intervalo cerrado*</u> y su representación gráfica es:

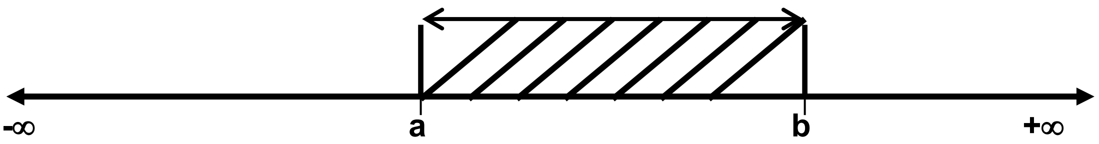


Fig. Nº 5

<u>Definición 5:</u> $\forall a, b\in\Re$, existe un $x\in\Re / a<x\leq b \Rightarrow x\in(a, b]$, $a\leq x<b \Rightarrow x\in[a, b)$, $a>x\geq b \Rightarrow x\in(-\infty, a)\cup[b,+\infty)$, $a\geq x>b \Rightarrow x\in(-\infty, a]\cup(b,+\infty)$, son todos

intervalo semiabierto o intervalo semi-cerrado **y su representación gráfica es respectivamente:**

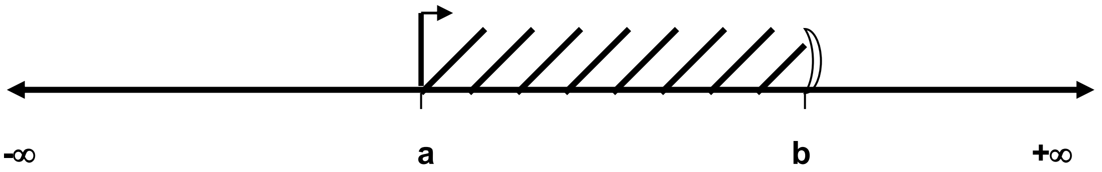


Fig. Nº 6

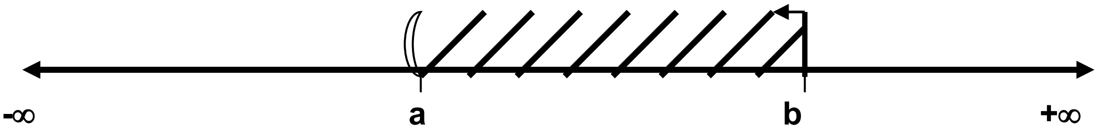


Fig. Nº 7

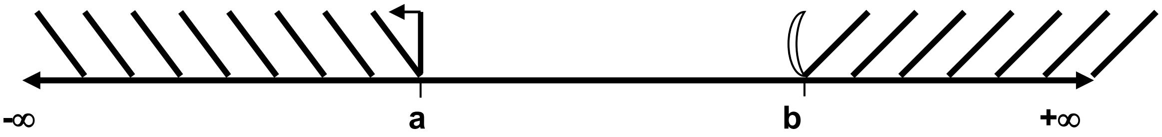


Fig. Nº 8

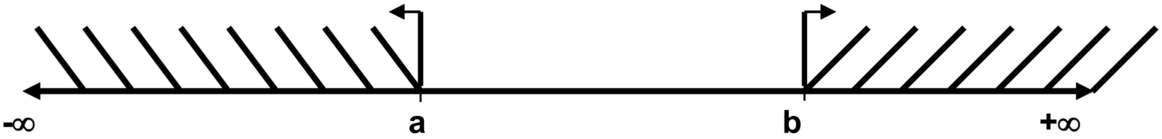


Fig. Nº 9

Definición 6: $\forall x_0 \in \Re$, x_0 se dice que es *un punto de separación (p.s)*, si x_0 separa a la recta en dos partes, estas partes reciben el nombre de intervalos, siempre existirán n + 1 intervalos, dependiendo de los puntos de separación, es decir, si no hay ningún punto de separación, existirá un solo intervalo, que en este caso será la recta real, en la definición 5 vemos que existen dos puntos de separación y en cada caso hay tres intervalos, en el primer y segundo caso, hay un intervalo donde se encuentra x y dos donde no, y en el tercero y cuarto caso hay dos intervalos donde se encuentra x y uno donde no.

<u>Definición 7</u>: $\forall x_0 \in \Re$, x_0 se dice que es *<u>un punto de prueba (p.p)</u>*, si x_0 pertenece a un intervalo, en el cual se necesita saber el signo de cualquier factor, entendiéndose por *<u>factor</u>* cualquier termino $x - x_0$ de una inecuación.

<u>Definición 8</u>: Se define una *<u>inecuación</u>* como una desigualdad que tiene una o más variables, estas variables reciben el nombre de incógnitas, y tienen dos tipos de soluciones que son: solución analítica y solución geométrica.

Las inecuaciones con una o más variable pueden ser lineales y no lineales.

<u>Definición 9</u>: Inecuaciones lineales con una variable: son las que tienen la forma: $mx>a$, $mx<a$, $mx\geq a$ y $mx\leq a$, $\forall a, m \in \Re$, donde sus soluciones analíticas son:

$x>\frac{a}{m}$, $x<\frac{a}{m}$, $x\geq\frac{a}{m}$ y $x\leq\frac{a}{m}$ respectivamente y sus soluciones geométricas son:

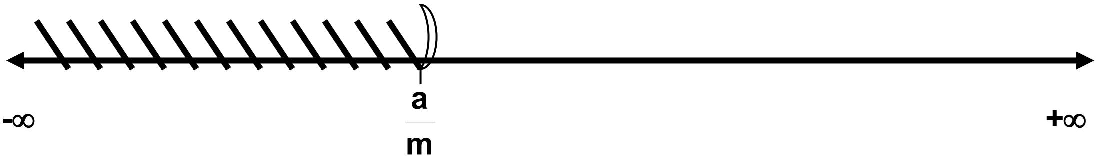


Fig. Nº 10

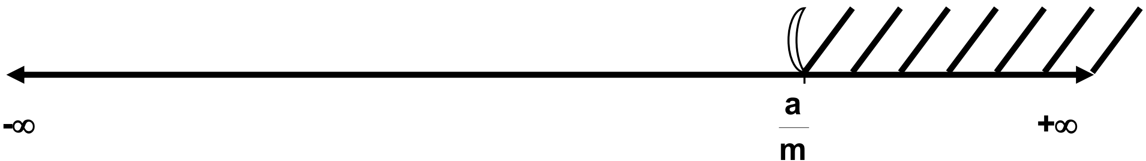


Fig. Nº 11

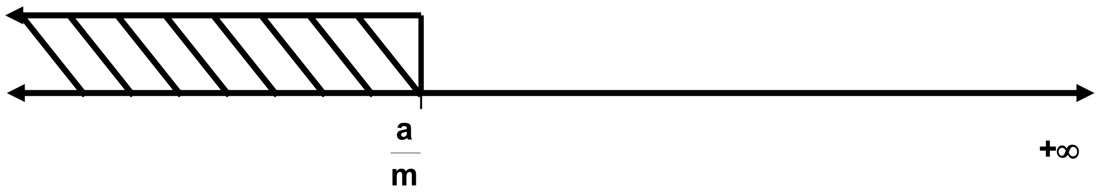


Fig. Nº 12

Fig. Nº 13

Ejemplo: Resolver analítica y geométricamente la siguiente inecuación: $\frac{3}{4}x-\frac{3}{5}x+2x-\frac{1}{4}\geq\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x-2$

Solución: transformamos la inecuación en una inecuación lineal, esto lo hacemos buscando el mínimo común denominador y multiplicamos los dos miembros de la inecuación por este número (propiedades de los números reales), en este caso el mínimo es 60, con lo que nos queda: $45x - 36x + 120x - 15\geq 80 - 40x - 120$. Ahora pasamos todas las variables para el lado izquierdo y todos los términos independientes para el derecho y resolvemos (propiedad de los números reales), con lo que nos queda: $169x\geq -25 \Rightarrow x\geq -\frac{25}{169}$

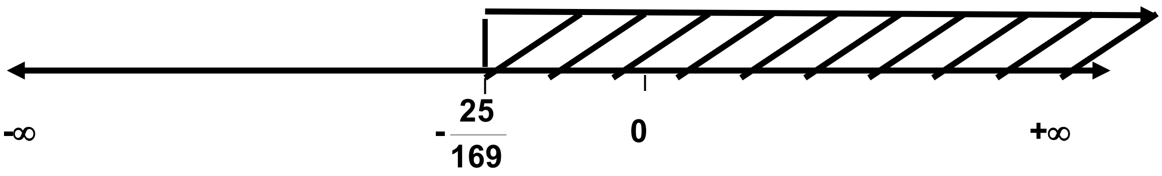


Fig. Nº 14

Definición 10: Las ***inecuaciones cuadráticas*** de una variable: son las inecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c>0$, $ax^2 + bx + c<0$,

$ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, para hallarle sus soluciones, factorizamos, aplicando Ruffini, completando cuadrado o aplicando la fórmula de segundo grado, y luego le aplicamos las propiedades de los números reales.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la inecuación: $3x^2 + 5x - 22<0$. Solución: aplicamos Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 5 & -22 \\ 2 & & 6 & 22 \\ \hline & 3 & 11 & \boxed{0} \end{array}$$

Luego: $3x^2 + 5x - 22<0 \Rightarrow (x - 2)(3x + 11)<0$, por las propiedades de los números reales, nos queda que:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 2<0 \wedge 3x + 11>0 \\ \vee \\ x - 2>0 \wedge 3x + 11<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x<2 \wedge x>-\frac{11}{3} \\ \vee \\ x>2 \wedge\vee\ x<-\frac{11}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{cc} x\in(-\infty,2)\cap(-\frac{11}{3},+\infty) & S_1 \\ \cup & \cup \\ x\in(2,+\infty)\cap(-\infty,-\frac{11}{3}) & S_2 \end{array}\right.$$

Es decir, la solución total es la unión de la solución 1 con la solución 2.

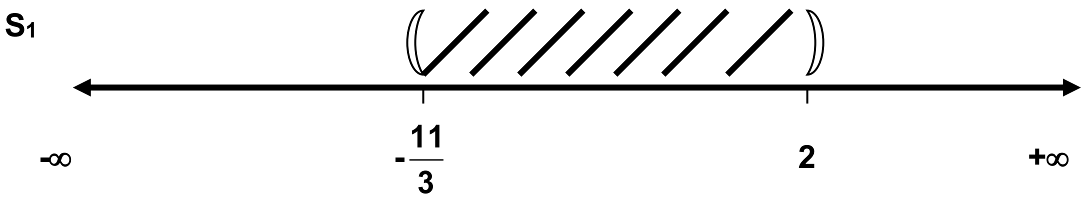


Fig. N° 15

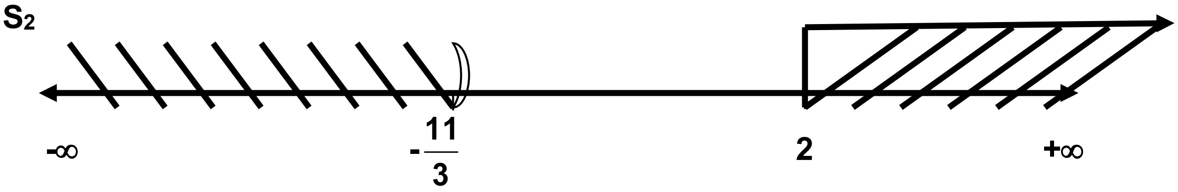


Fig. N° 16

$S_1=(-\frac{11}{3},2)$, $S_2=\phi \Rightarrow S_1US_2=(-\frac{11}{3},2)$.

Otra forma de resolver esta inecuación es mediante los puntos de separación: $3x^2 + 5x - 22<0 \Rightarrow (x - 2)(3x + 11)<0$, tomaremos los factores: x – 2 y 3x + 11 y representamos en la recta real los puntos de separación: $x=-\frac{11}{3}$ y x=2, como tenemos dos puntos de separación tendremos tres intervalos, en cada intervalo tomaremos un punto de prueba, que en este caso son: $-4\in(-\infty, -\frac{11}{3})$, $0\in(-\frac{11}{3}, 2)$ y $3\in(2, +\infty)$, sustituyendo los puntos de pruebas en los factores y anotando los signos que resulta y por ultimo multiplicamos los signos que resultan de cada factor, si este coincide con el signo de la inecuación es solución en caso contrario no. La solución total será la unión de los intervalos soluciones (ver la cuadro Nº 1).

<table>
<tr><td>Factor</td><td colspan="3">p.p p.s p.p p.s p.p
$-\infty$ -4 $-\frac{11}{3}$ 0 2 3 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$x + \frac{11}{3}$</td><td>(-)</td><td>(+)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>$x - 2$</td><td>(-)</td><td>(-)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>Signo</td><td>(+)</td><td>(-)</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td>Solución</td><td>no</td><td>si</td><td>no</td></tr>
</table>

Cuadro Nº 1

Como en este caso el único intervalo solución es $(-\frac{11}{3}, 2)$, resulta que la solución total es: S_T: $x \in (-\frac{11}{3}, 2)$, solución analítica

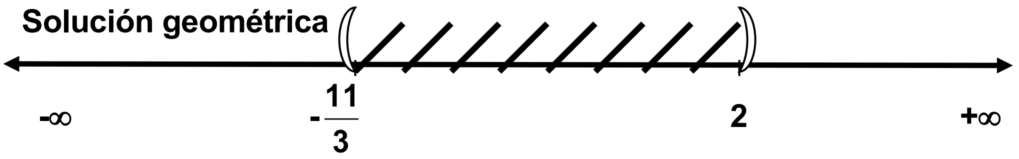


Fig. Nº 17

<u>Definición 12</u>: Las <u>inecuaciones racionales</u> de una sola variable: estas ecuaciones son un caso particular de las ecuaciones cuadráticas, por lo tanto, se resuelven aplicando las propiedades de los números reales o por medio de los puntos de separación.

<u>Ejemplo 4</u>: Resolver la inecuación: $\frac{7X - 5}{5X + 3} \geq 0$

Solución: aplicando las propiedades de los números reales tenemos:

$$\begin{cases} 7x - 5\geq 0 \wedge 5x + 3>0 \\ \qquad\qquad o \\ 7x - 5\leq 0 \wedge 5x + 3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq \frac{5}{7} \wedge x>-\frac{5}{3} \\ \qquad o \\ x\leq \frac{5}{7} \wedge x<-\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[\frac{5}{7}, +\infty)\cap(-\frac{5}{3}, +\infty)\ S_1 \\ \qquad\quad \cup \qquad\qquad \cup \\ x\in(-\infty, \frac{5}{7})\cap(-\infty, -\frac{5}{3})\ S_2 \end{cases}$$

Es decir, la solución total es la unión de la solución 1 con la solución 2.

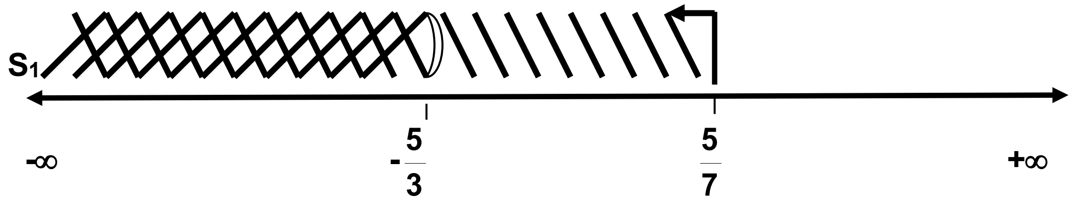


Fig. N° 18

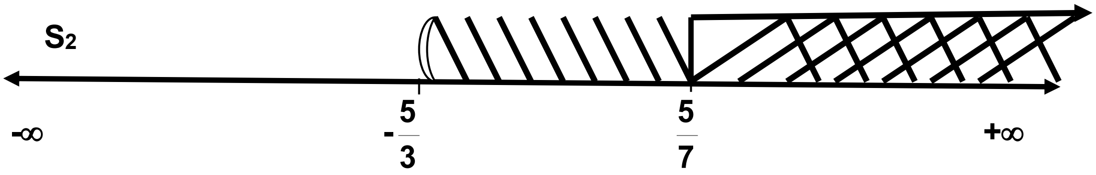


Fig. N° 19

$$S_1=(-\infty, -\frac{5}{3}),\ S_2=[\frac{5}{7}, +\infty) \Rightarrow S_T=S_1\cup S_2=(-\infty, -\frac{5}{3})\cup[\frac{5}{7}, +\infty).$$

Definición 12: Las ***inecuaciones con valor absoluto o distancia entre dos puntos***, de una variable, empezaremos definiendo la distancia entre dos puntos de la manera siguiente:

$|x - x_0|$, geométricamente indica la distancia que existe desde x hasta x_0, es decir, si tenemos: $|x - x_0|\geq a$ o $|x - x_0|\leq a$ y $|x - x_o|=a$, se lee geométricamente, como la distancia que existe desde x hasta x_0 es mayor o igual que a, o la distancia que hay desde x hasta x_0 es menor o igual que a y la distancia que hay desde x hasta x_0 es igual que a, si $|x|=a$, se lee geométricamente, la distancia que existe desde x hasta el origen es igual que a, es decir:

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases}$$

$|x|=\sqrt{x^2}$, y su gráfica es:

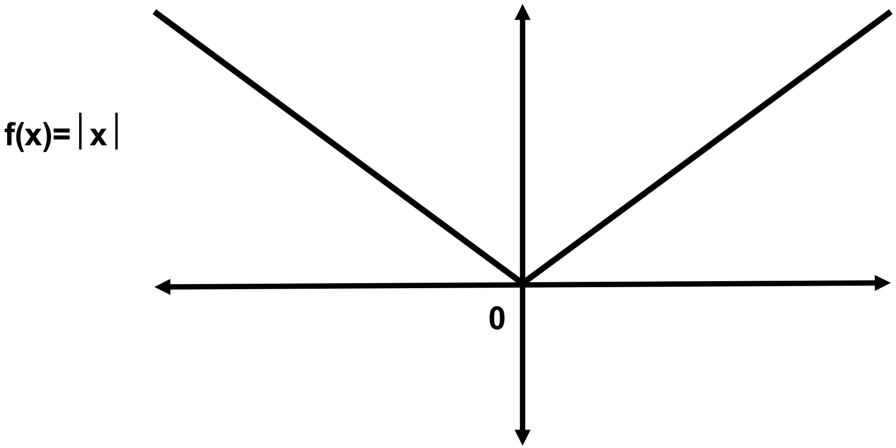


Fig. Nº 20

<u>Propiedades:</u>

1. $|x|\geq 0$ y $|x|=0, \Leftrightarrow x=0$
2. $|ay|=a|x|$
3. $|xy|=|x|\,|y|$
4. $|x/y|=|x|/|y|$
5. $|x|=a \Leftrightarrow -a=x=a \Rightarrow x=-a$ ó $x=a$

Fig. Nº 21

6) $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \Rightarrow x\geq -a$ y $x\leq a, \Rightarrow x\in[-a, a]$

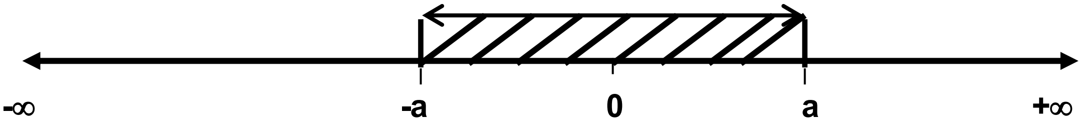


Fig. Nº 22

7) $|x|\geq a \Leftrightarrow -a\geq x\geq a \Rightarrow x\leq -a$ y $x\geq a, \Rightarrow x\in(-\infty, -a]\cup[a, \infty)$

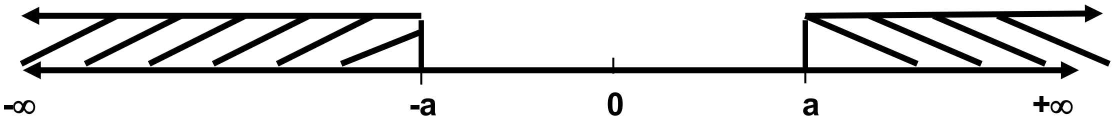


Fig. Nº 23

8. $|x + y|\leq|x| + |y|$, Demostración: $-|x|\leq=x\leq|x|$ y $-|y|\leq y\leq|y|$, si sumamos término a término estas dos expresiones tenemos:

$-|x| -|y|\leq x + y\leq|x| + |y| \Rightarrow -(|x| + |y|)\leq x + y\leq|x| + |y|$, entonces por la propiedad No 6, tenemos que: $|x + y|\leq|x| + |y|$

9. $|x - y|\geq|x| - |y|$

Demostración: $|x|=|x + (y - y)|=|(x - y) + y|\leq|x - y| + |x|$, despejando $|x - y|$ se tiene que: $|x - y|\geq|x| - |y|$

10. $|x - y|\geq||x| - |y||$

Demostración: $|y|=|y + (x - x)|=|(y - x) + x|\leq|y - x| + |y|$, despejando $|y - x|$ se tiene que $|x - y|\geq||x| - |y||$

<u>Ejemplo</u>: La distancia de x a menos $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{5}$

<u>Solución</u>: aplicando la definición de distancia tenemos:

$|x + \frac{2}{3}|<\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5}<x + \frac{2}{3}<\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{2}{3} - \frac{4}{5}<x<-\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{22}{15}<x<\frac{2}{15} \Rightarrow$ que x esta entre $-\frac{22}{15}$ y $\frac{2}{15}$, e.i., $x\in(-\frac{22}{15}, \frac{2}{15})$

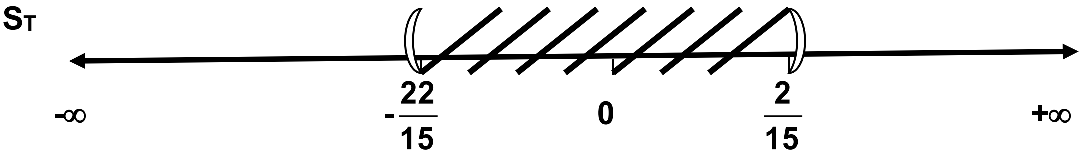


Fig. Nº 24

Ejemplo: Hallar el valor de x que satisface la siguiente ecuación: $|3x - 5| = 10$

Solución: Por la propiedad tenemos: $-10=3x - 5=10 \Rightarrow -5=3x=15 \Rightarrow$

$3x=-5$ ó $3x=15 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$ ó $x=5$

Fig. Nº 25

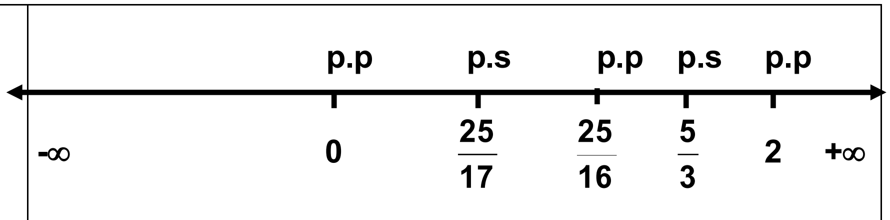
Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación: $\left|\frac{7x-5}{3x-5}\right| \geq 9$

Solución: Por la definición tenemos: $-9\geq\frac{7x-5}{3x-5}\geq 9 \Rightarrow \frac{7x-5}{3x-5}\leq -9$ o

$\frac{7x-5}{3x-5}\geq 9 \Rightarrow \frac{7x-5}{3x-5} + 9\leq 0$ o $\frac{7x-5}{3x-5} - 9\geq 0 \Rightarrow \frac{7x-5+27x-45}{3x-5}\leq 0$ o

$\frac{7x-5-27x+45}{3x-5}\geq 0 \Rightarrow \frac{34x-50}{3x-5}\leq 0$ o $\frac{-20x+40}{3x-5}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-\frac{25}{17}}{x-\frac{5}{3}}\leq 0$ o $\frac{x-2}{x-\frac{5}{3}}\leq 0$

Aplicando el método de los puntos de separación tenemos la solución en el cuadro Nº 2

Factor	
$X - \frac{25}{17}$	(-) (+) (+)

$x - \frac{5}{3}$	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	no	si	no

Cuadro Nº 2

S$_1$: $x\in[\frac{25}{17},\frac{5}{3})$ solución analítica

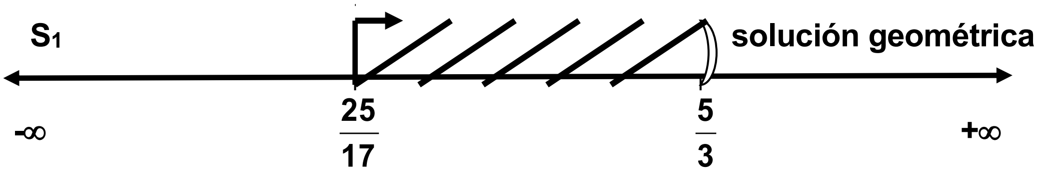


Fig. Nº 26

La solución II la vemos en el cuadro Nº 3

Factores	-∞ p.p 0	p.s $\frac{5}{3}$ p.p 1	p.s 2 p.p 3 +∞
$x - \frac{5}{3}$	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(+)
Signo	(+)	(-)	(+)
Solución	No	si	no

S$_2$: $x\in(\frac{5}{3}, 2]$

Cuadro N° 3

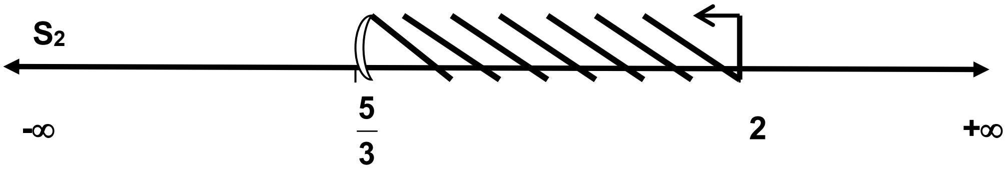


Fig., Nº 27

S_T: $x \in [\frac{25}{17}, \frac{5}{3}) \cup [\frac{5}{3}, 2]$ ó $x \in [\frac{25}{17}, 2] - \{\frac{5}{3}\}$ solución analítica

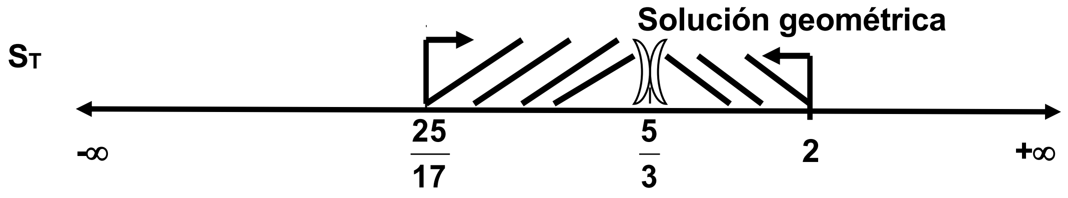


Fig., Nº 28

<u>Ejemplo</u>: Resolver la siguiente inecuación: $|3x^2 + 2x - 16| \geq x - 2$

<u>Solución</u>: Aplicando las propiedades de distancia entre dos puntos tenemos:

$-x + 2 \geq 3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 2x - 16 \leq -x + 2$ ò $3x^2 + 2x - 16 \geq x - 2 \Rightarrow$

$3x^2 + 3x - 18 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 14 \geq 0 \Rightarrow$

$x^2 + x - 6 \leq 0$ ò $3x^2 + x - 146 \geq 0 \Rightarrow$

$(x + \frac{1}{2})^2 - 6 - \frac{1}{4} \leq$ ò $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{14}{3} \geq 0$

$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4} \leq 0$ ò $(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{14}{3} - \frac{1}{36} \geq 0 \Rightarrow$

$(x + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$ ò $(x + \frac{1}{6})^2 \geq \frac{169}{36} \Rightarrow$

$\left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$ ò $\left|x + \frac{1}{6}\right| \geq \frac{13}{6} \Rightarrow$

$-\frac{5}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$ ò $-\frac{13}{6} \geq x + \frac{1}{6} \geq \frac{13}{6} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\le x\le\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$ ò $-\frac{1}{6}-\frac{13}{6}\ge x\ge\frac{13}{6}-\frac{1}{6}\Rightarrow$

$-3\le x\le 2$ ò $-\frac{7}{3}\ge x\ge 2$ **la solución analítica es S_T:** $x\in[-3,2]\cup(-\propto,-\frac{7}{3}]\cup[2,\propto)\Rightarrow$

$x\in\Re$

Solución geométrica:

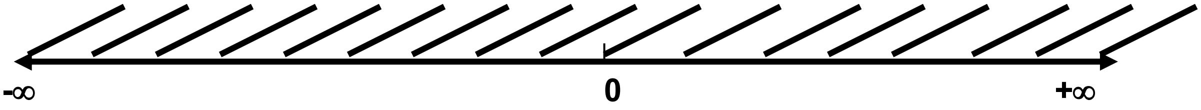


Fig. Nº 29

<u>Solución</u>: Por medio de los puntos de separación:

$-x+2\ge 3x^2+2x-16\ge x-2\Rightarrow$

$3x^2+2x-16\le -x+2$ ò $3x^2+2x-16\ge x-2\Rightarrow$

$3x^2+3x-18\le 0$ ò $3x^2+x-14\ge 0\Rightarrow$

$3x^2+x-6\le 0$ ò $3x^2+x-146\ge 0\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{2})^2-6-\frac{1}{4}\le$ ò $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}\ge 0\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}\le$ ò $(x+\frac{1}{6})^2-\frac{14}{3}-\frac{1}{36}\ge 0\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{2})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\le$ ò $(x+\frac{1}{6})^2-\frac{169}{36}\ge 0\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{2})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\le$ ò $(x+\frac{1}{6})^2-\left(\frac{13}{6}\right)^2\le 0\Rightarrow$

$(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2})\le 0$ ò $(x+\frac{1}{6}-\frac{13}{6})(x+\frac{1}{6}+\frac{13}{6})\ge 0\Rightarrow$

$(x - 2)(x + 3) \leq 0$ ò $(x - 2)(x + \frac{7}{3}) \geq 0$, entonces, la solución I la vemos en el cuadro Nº 4

Factores	**p.p p.s p.p p.s p.p** **-∞ -4 -3 0 2 4 +∞**		
X + 3	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x - 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Signo	**(+)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**No**	**si**	**no**

S_1: $x \in [-3,2)$ Solución analítica

Cuadro N° 5

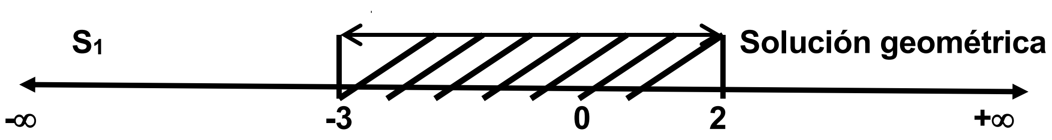


Fig. Nº 30

La solución Nº II,

Factores	**p.p p.s p.p p.s p.p** **-∞ -2 $-\frac{7}{3}$ 0 2 3 +∞**		
$x + \frac{7}{3}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x - 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Signo	**(+)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**Si**	**no**	**si**

Cuadro Nº 6

S_2: $x \in (-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [2, \infty)$ Solución analítica

Solución geométrica

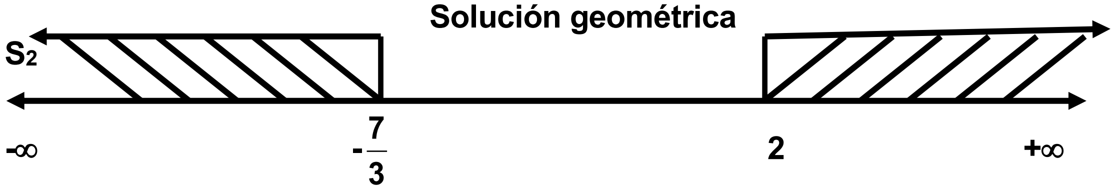


Fig. Nº 31

$S_T = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S_T = \Re$ solución analítica

Solución geométrica:

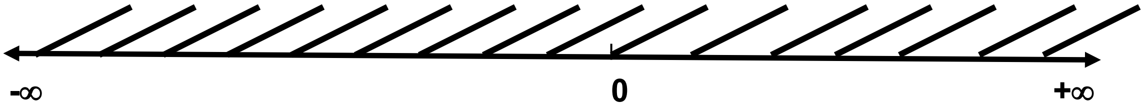


Fig. Nº 32

<u>Ejemplo 9</u>: Resolver la siguiente inecuación: $\frac{2x^3 + x^2 - 7x - 6}{6x^2 - x - 2} \le 0$

<u>Solución</u>: Por el método de los puntos de separación y aplicando Rufini para determinar los factores, tenemos:

Para la expresión $2x^3 + x^2 - 7x - 6$ los factores son: $x+1$, $x-2$ y $x + \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -7 & -6 \\ -1 & & -2 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & 6 & \\ \hline & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Para la hallar los factores de $6x^2 - x - 2$ completamos cuadrado, es decir, $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow (x - \frac{1}{12})^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{144} \Rightarrow (x - \frac{1}{12})^2 - \frac{49}{144} \Rightarrow$

$(x - \frac{1}{12})^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 \Rightarrow (x - \frac{1}{12} - \frac{7}{12})(x - \frac{1}{12} + \frac{7}{12}) \Rightarrow (x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{2})$, los factores son: $x + \frac{1}{2}$, $x - \frac{2}{3}$, (ver cuadro Nº 7)

Factor	p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p $-\infty$ -2 $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{4}$ -1 $-\frac{3}{5}$ $-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{2}{3}$ 1 2 3 $+\infty$					
$x + \frac{3}{2}$	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x + 1$	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
$x + \frac{1}{2}$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x - \frac{2}{3}$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
$x - 2$	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
Solución	si	No	si	no	si	no

Cuadro Nº 7

Solución analítica: $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, 2]$

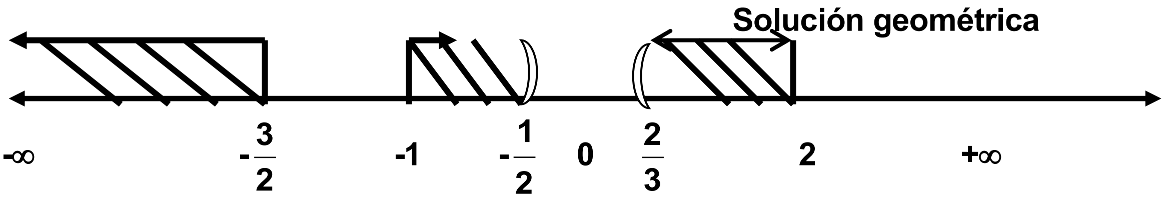


Fig. Nº 33

<u>Definición 13</u>: Se define *<u>Una vecindad o un entorno</u>* de un punto x_0, con radio de convergencia ε, como un intervalo abierto centrado en $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, de donde por la propiedad No 6, se tiene que $|x - x_0| < \varepsilon$

<u>Definición 14:</u> Sea $(D \subseteq \Re)$: $(\exists x_0 \in \Re)$: $x \leq x_0$ $(\forall x \in D)$, decimos que x_0 es una *<u>cota superior</u>* de D y que D esta acotado superiormente por x_0, y si $x_0 \in D$, entonces x_0 es el máximo valor de D y lo denotamos por x_0=máx(D)

<u>Definición 15:</u> Sea $(D \subseteq \Re)$: $(\exists x_0 \in \Re)$: $x \leq x_0$ $(\forall x \in D)$, decimos que x_0 es una *<u>cota inferior</u>* de D y que D esta acotado inferiormente por x_0, y si $x_0 \in D$, entonces x_0 es el mínimo valor de D y lo denotamos por x_0=mín(D).

<u>Definición 16:</u> Se dice que $D \subseteq \Re$, esta *<u>acotado</u>* sii D esta acotado inferiormente y superiormente

<u>Definición 17:</u> Sea $D \subseteq \Re$, D esta acotado superiormente en x_1, entonces $x_1 \in \Re$, recibe el nombre de *<u>supremo de D</u>* o x_1 es la menor de todas las cotas superiores si cumple con las siguientes condiciones:

i) x_1 es cota superior de D

ii) Ningún número menor que x_1 es cota superior de D, e.i. si x_2 es cota superior de D entonces $x_2 \geq x_1$ y el supremo se denota por sup(D).

<u>Definición 18:</u> Sea $D \subseteq \Re$, D esta acotado inferiormente en x_0, entonces $x_0 \in \Re$, recibe el nombre de <u>*ínfimo de D*</u> o x_0 es la mayor de todas las cotas inferiores si cumple con las siguientes condiciones:

iii) x_0 es cota inferior de D

iv) Ningún número mayor que x_0 es cota inferior de D, e.i. si x_1 es cota inferior de D, entonces $x_0 \geq x_1$ y el ínfimo se denota por imf(D).

<u>Definición 19</u>: Inecuaciones lineales con dos variables: son las inecuaciones de la forma: $x<0$, $y>0$; $x<0$, $y<0$; $x>0$, $y>0$; $x>0, y>0$; $y \leq mx+b$; $y \geq mx + b$; $y<mx + b$; $y>mx + b$, las cuales se representan gráficamente de la siguiente manera:

Se representa la frontera, que es la recta considerada como una ecuación, luego para la variable dependiente si el signo es mayor se toma toda la parte de arriba de la frontera, y si es menor se toma toda la parte de abajo de la frontera, para la variable independiente si el signo es mayor se toma la parte derecha de la frontera y si es menor se toma la parte izquierda de la frontera,

Veamos esto gráficamente:

Representación de las rectas en las figuras

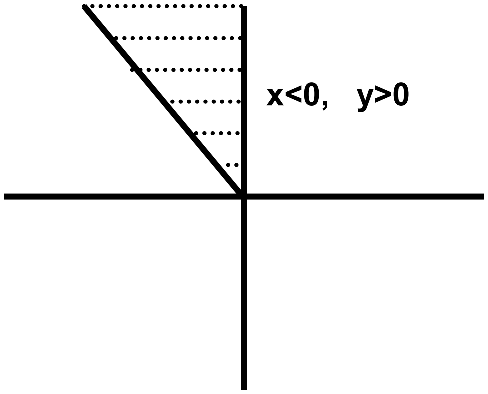


Fig. Nº 34

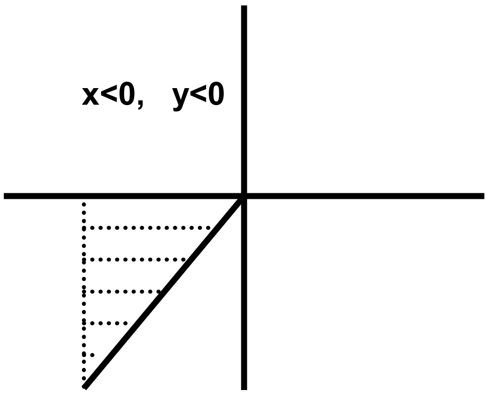


Fig. Nº 35

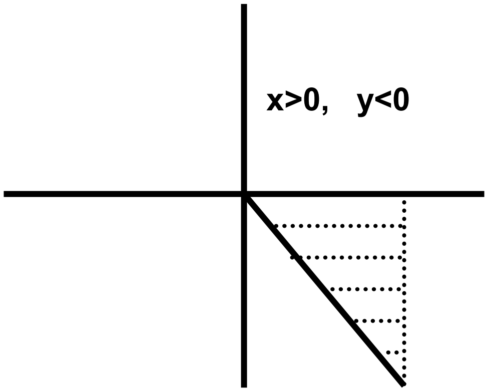


Fig. Nº 36

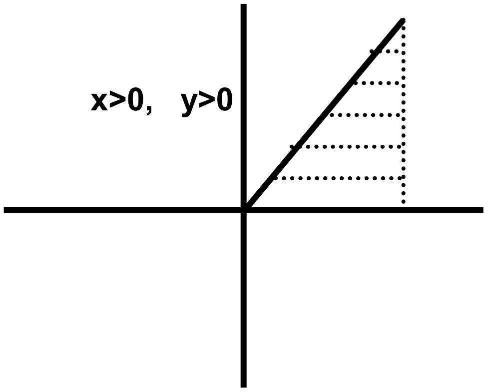


Fig. Nº 37

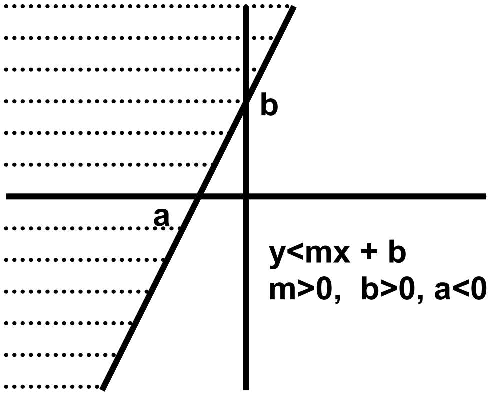


Fig. Nº 38

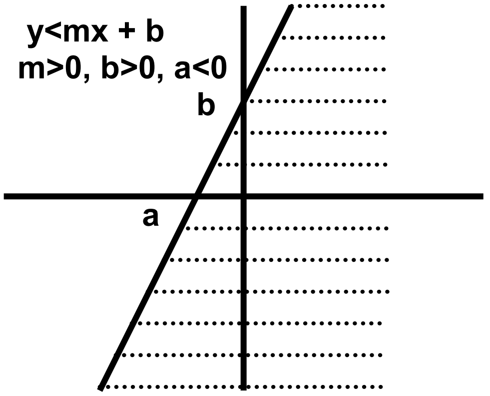


Fig. Nº 39

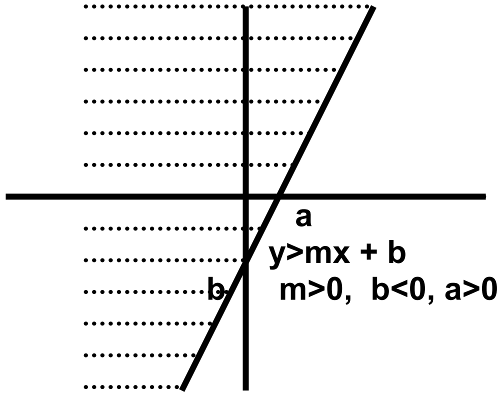


Fig. Nº 40

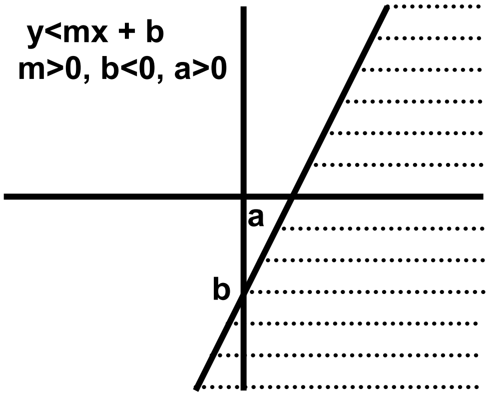


Fig. Nº 41

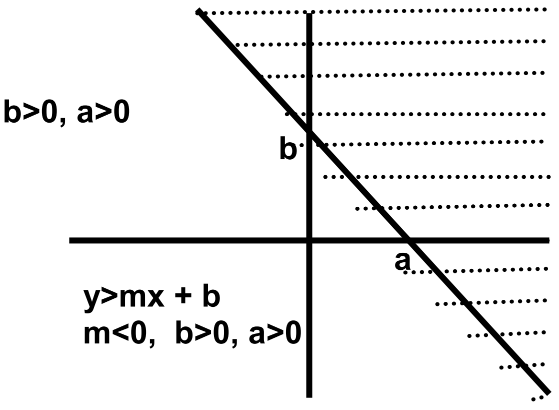


Fig. Nº 42

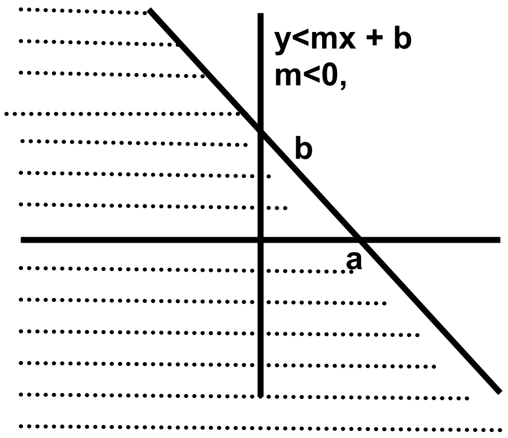


Fig. Nº 43

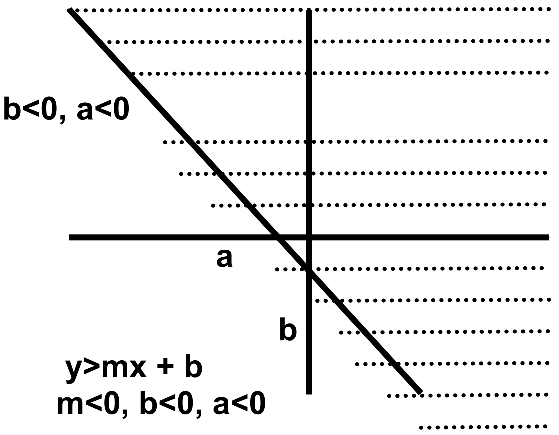


Fig. Nº 44

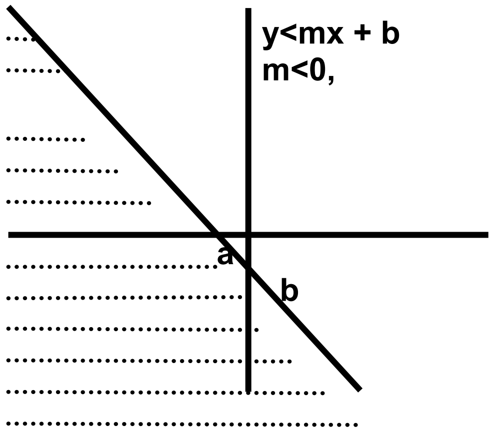


Fig. Nº 45

<u>Ejemplo</u>: Dibujar el gráfico de soluciones de la inecuación: $3x + 2y - 6 \leq 0$.

<u>Solución:</u> Despejando y en la inecuación tenemos: $y \leq -\frac{3}{2}x + 3$, luego bujamos la frontera de esta recta, y aplicamos lo dicho anteriormente, resultando:

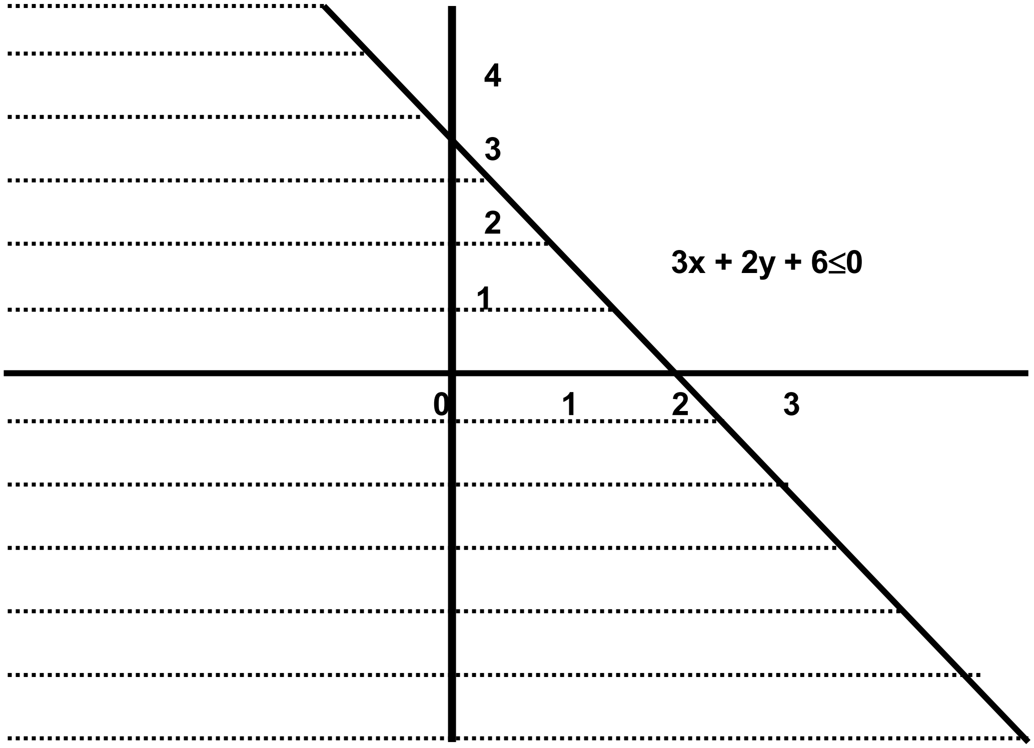


Fig. Nº 46

Ejemplo: **Dibujar el gráfico de soluciones de la inecuación: $5x - 2y + 10 \leq 0$.**

Solución: **Despejando y en la inecuación tenemos: $y \geq -\frac{5}{2}x + 5$, luego bujamos la frontera de esta recta, y aplicamos lo dicho anteriormente, resultando:**

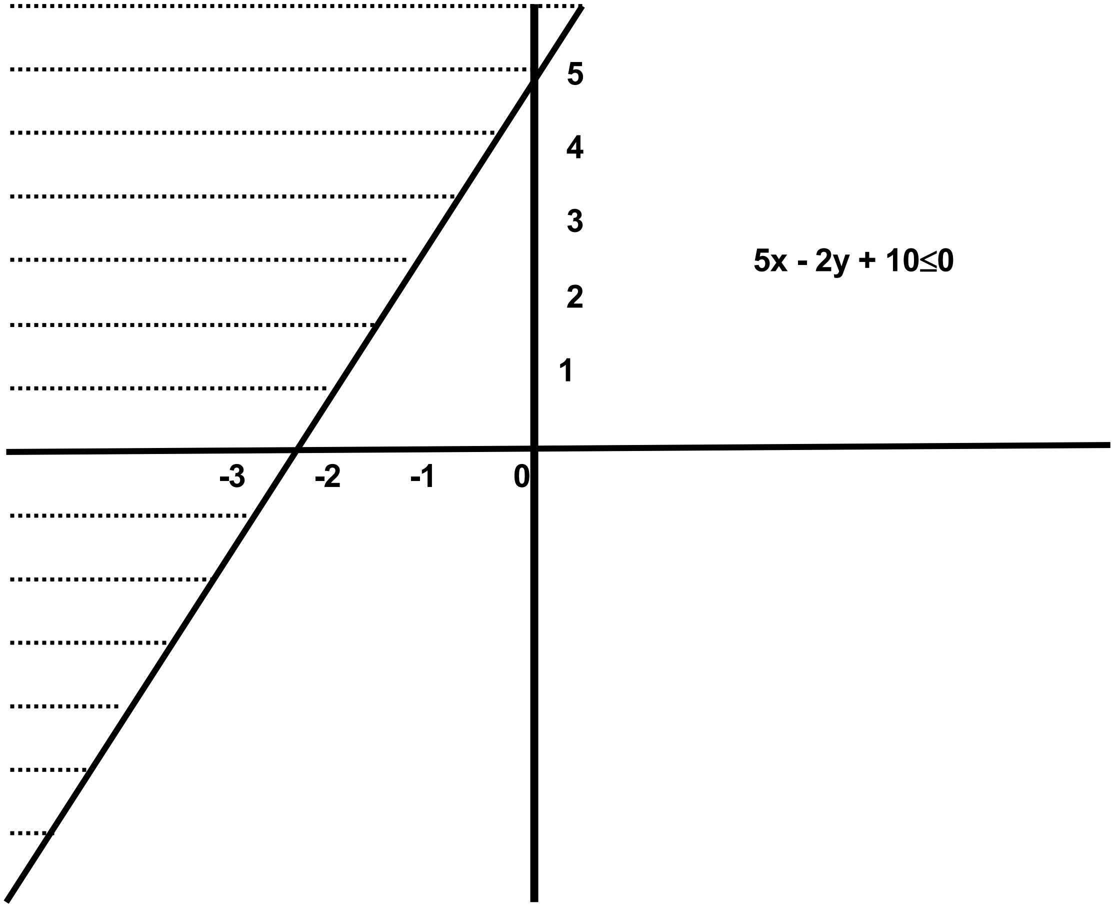


Fig. Nº 47

<u>Inecuaciones no lineales con dos variables</u>: Aquí estudiaremos las inecuaciones con valor absoluto y las cuadráticas.

<u>Definición 15:</u> Inecuaciones con valor absoluto: son de la forma: $y \geq |x|$ e $y \leq |x|$ y su representación es:

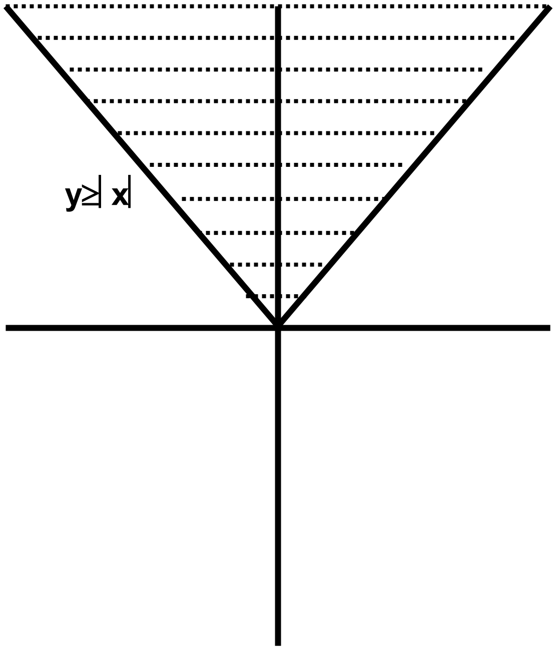


Fig. Nº 48

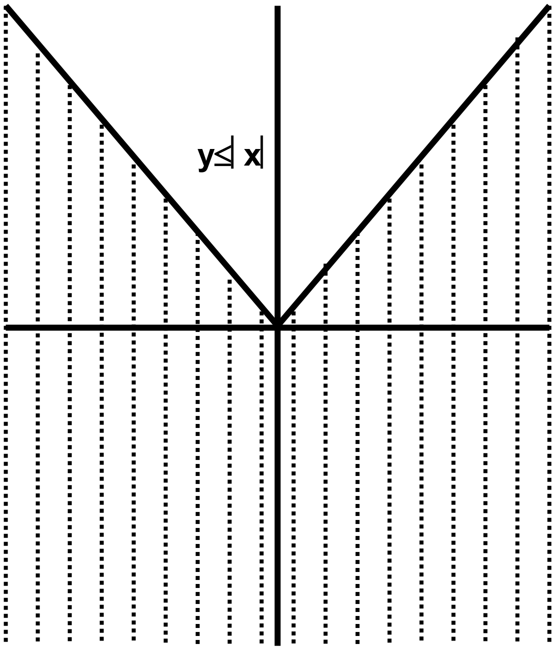


Fig. Nº 49

Ejemplo: Dibujar la gráfica de la inecuación $y > |x+3|$

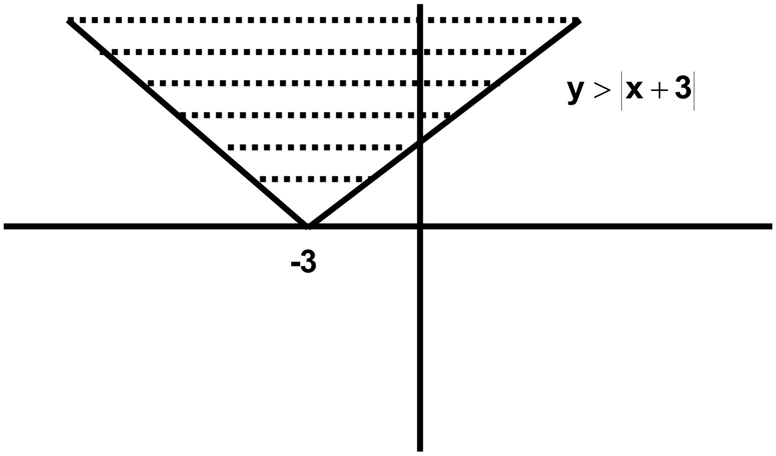


Fig. Nº 50

Ejemplo: Dibujar la gráfica de la inecuación $y < 2 - |x+1|$

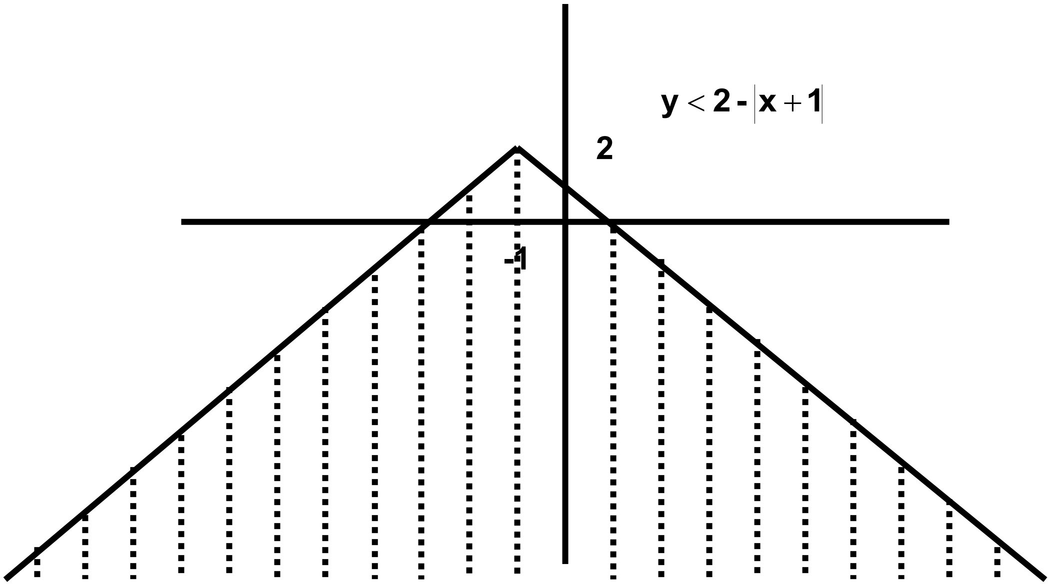


Fig. Nº 51

Definición 16: **Las inecuaciones cuadráticas son de la forma: $y \geq ax^2 + bx + c$; e $y \leq ax^2 + bx + c$, la cual se gráfica la frontera $ax^2 + bx + c = 0$ y luego se procede de la siguiente manera:**

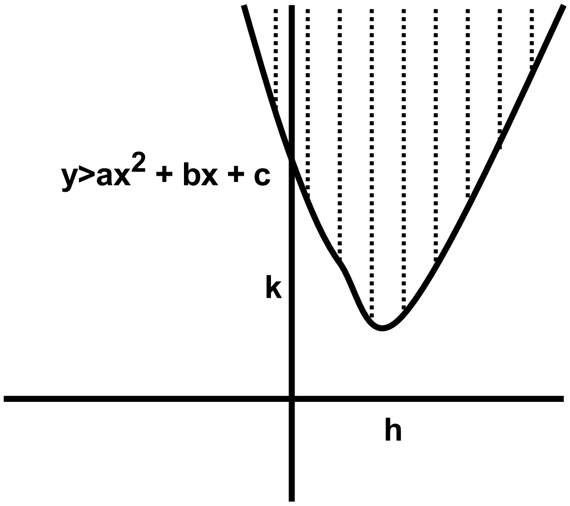


Fig. Nº 51

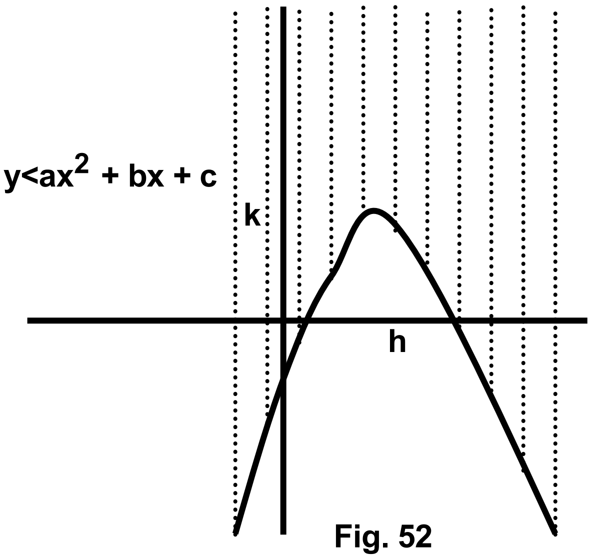


Fig. 52

Ejemplo: **Dibujar el gráfico de la inecuación: $y>x^2 + x - 6$**

<u>**Solución:**</u> **Graficamos la frontera: $y=x^2+x-6$, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego factorizo para obtener los cortes con el eje X.**

$y=(x+\frac{1}{2})^2-6-\frac{1}{4} \Rightarrow y=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$, por lo tanto, el vértice es (h, k)=$\left(-\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0,-6) y factorizando: $y=(x-2)(x+3)$, lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (-3,0) y (2,0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: $y>x^2+x-6$

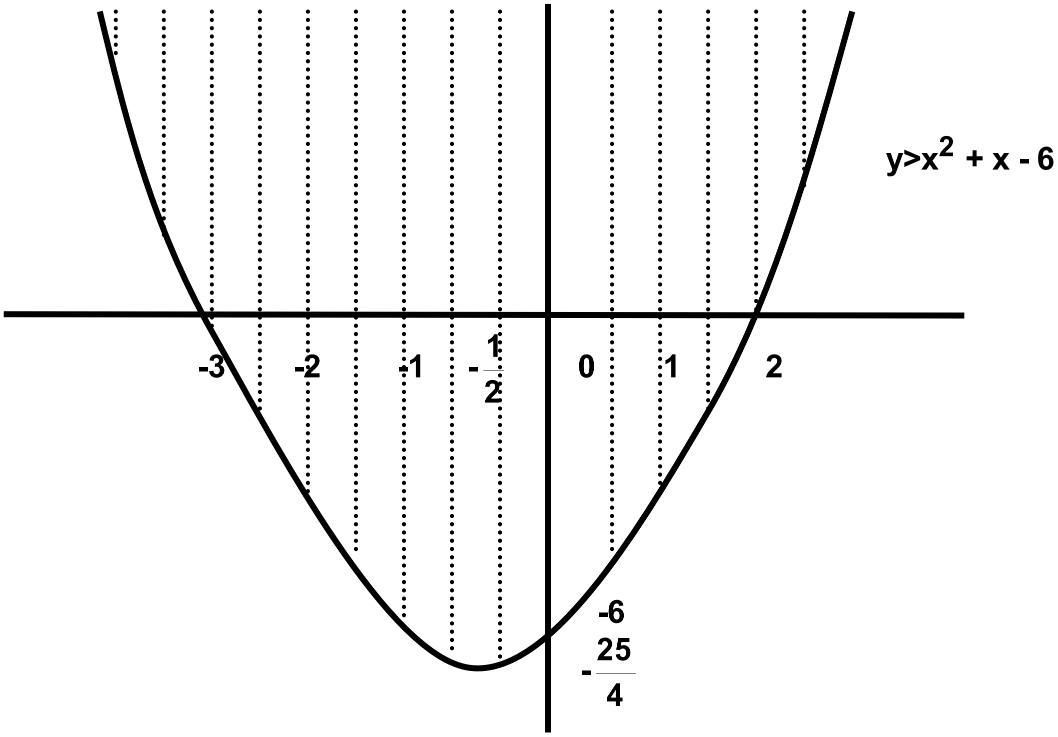


Fig. Nº 53

<u>**Ejemplo:**</u> **Dibujar el gráfico de la inecuación: $y<-x^2-3x+4$**

Solución: Graficamos la frontera y=-x^2 - 3x + 4, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego factorizo para obtener los cortes con el eje X.

$$y=-\lfloor x^2+3x-4 \rfloor \quad \Rightarrow \quad y=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4-\frac{9}{4}\right] \quad \Rightarrow \quad y=-\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right] \quad \Rightarrow$$

$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$, por lo tanto, el vértice es (h, k)=$\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0,4) y factorizando: y=(1 - x)(x + 4), lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (-4, 0) y (1, 0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: y<-x^2 - 3x + 4

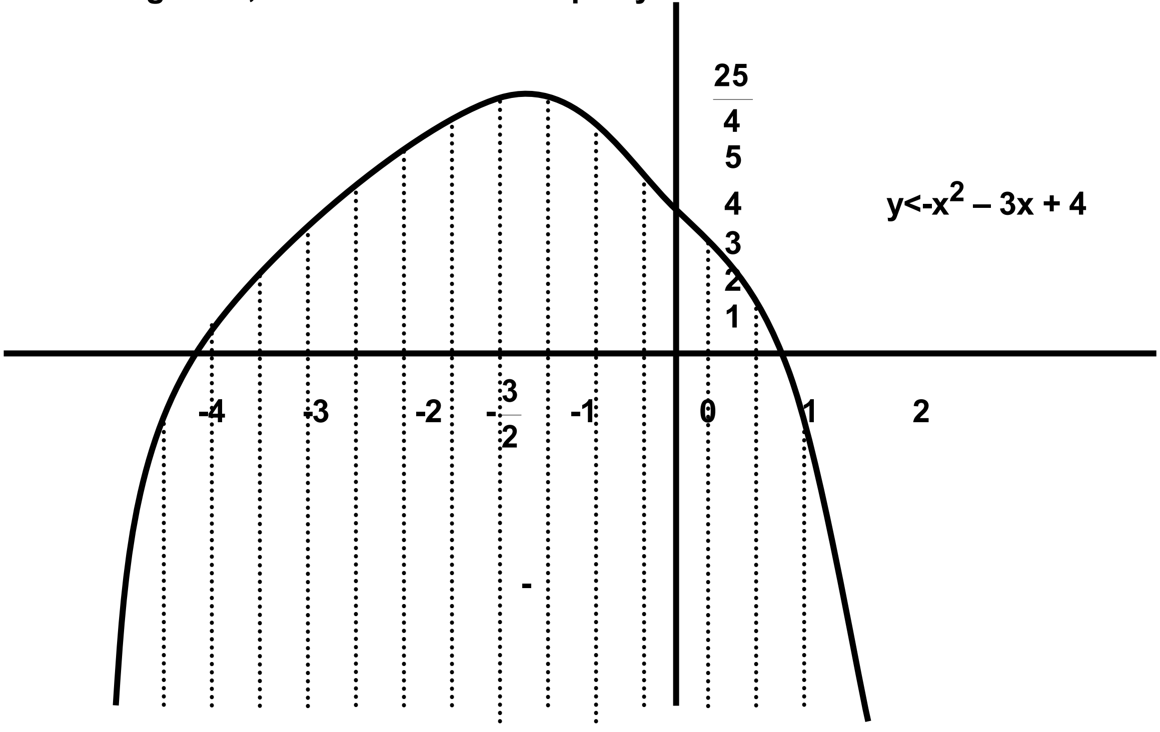


Fig. Nº 54

Ejemplo: Dibujar el gráfico de la inecuación: y>-x^2 + 3x - 2

Solución: Graficamos la frontera $y=-x^2 + 3x - 2$, completamos cuadrado para hallar el vértice, luego se factoriza para obtener los cortes con el eje X.

$$y=-\lfloor x^2-3x+2\rfloor \quad \Rightarrow \quad y=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2-\frac{9}{4}\right] \quad \Rightarrow \quad y=-\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] \quad \Rightarrow$$

$y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$, por lo tanto, el vértice es $(h,k)=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, corta al eje Y en el punto (0, -2) y factorizando: $y=(1 - x)(x - 2)$, lo que nos indica que corta el eje X en los puntos: (1, 0) y (2, 0), con estos datos procedemos a realizar la gráfica, tomando en cuenta que: $y<-x^2 + 3x – 2$

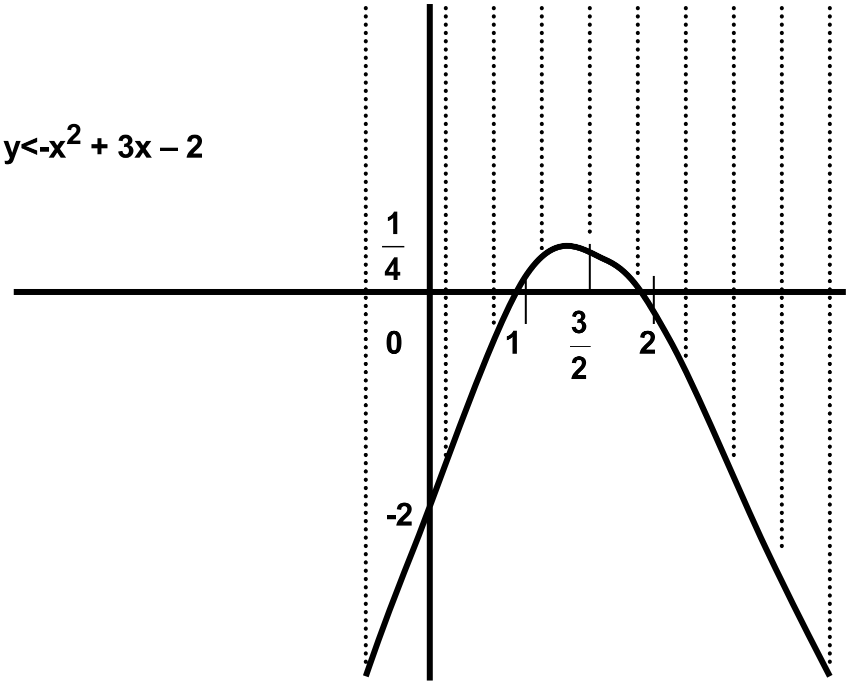


Fig. Nº 55

Definición 17: Se define un sistema de inecuaciones como aquel sistema que esta formado por dos o más inecuaciones. Para la solución de este sistema, se buscan los puntos de intersección de todas las inecuaciones involucradas y se grafican sus fronteras, la solución total será la intersección de dichas inecuaciones.

Ejemplo: Trazar el gráfico del conjunto de soluciones:

$$\begin{cases} l_1: 2x + y - 3>0 \\ l_2: x - 2y + 1<0 \\ l_3: y - 3<0 \end{cases}$$

Solución: Pasando los términos independientes para el segundo miembro, en l1, dividimos toda la ecuación por 3 y luego aplicamos la doble c, en l2 dividimos por -1 y luego aplicamos la doble c, y nos queda:

$$\begin{cases} l_1: 2x + y - 3>0 \\ \\ l_2: x - 2y + 1<0 \\ \\ l_3: y - 3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y_1>3 \\ \\ x - 2y_2<-1 \\ \\ y<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{3}{2}} + \dfrac{y}{3}>1 \\ \dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{\frac{1}{2}}<1 \\ y<3 \end{cases}$$

Por lo tanto, la recta l_1 corta al eje X en el punto P($\frac{3}{2}$, 0) y al eje Y en el punto P(0, 3), la recta l_2 corta el eje X en el punto P(-1, 0) y al eje Y en el punto (0, $\frac{1}{2}$), luego se buscan los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_3, la cual se consigue sustituyendo y=3 en la recta $l_1 \Rightarrow$ x=0, es decir, (0, 3), ahora buscamos los puntos de intersección entre las rectas l_2 y l_3 la cual se consigue sustituyendo y=3 $\Rightarrow$ x=5, es decir, (5, 3), por ultimo buscamos los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_2, aplicando para ello el método de reducción para resolver el sistema de ecuaciones, multiplicando a l_1 por 2 y luego sumamos l_1 y l_2 se reducen las y, obteniéndose el valor de x, que en este caso es: $5x=5 \Rightarrow x=1$, sustituyendo este valor de x en l1 se obtiene que $2 + y -3=0 \Rightarrow y=1$, por lo tanto, las rectas li y l2 se intersectan en el punto P(1, 1) graficando las tres rectas, ubicando los puntos de intersección, la solución será el área común, como se indica en la gráfica:

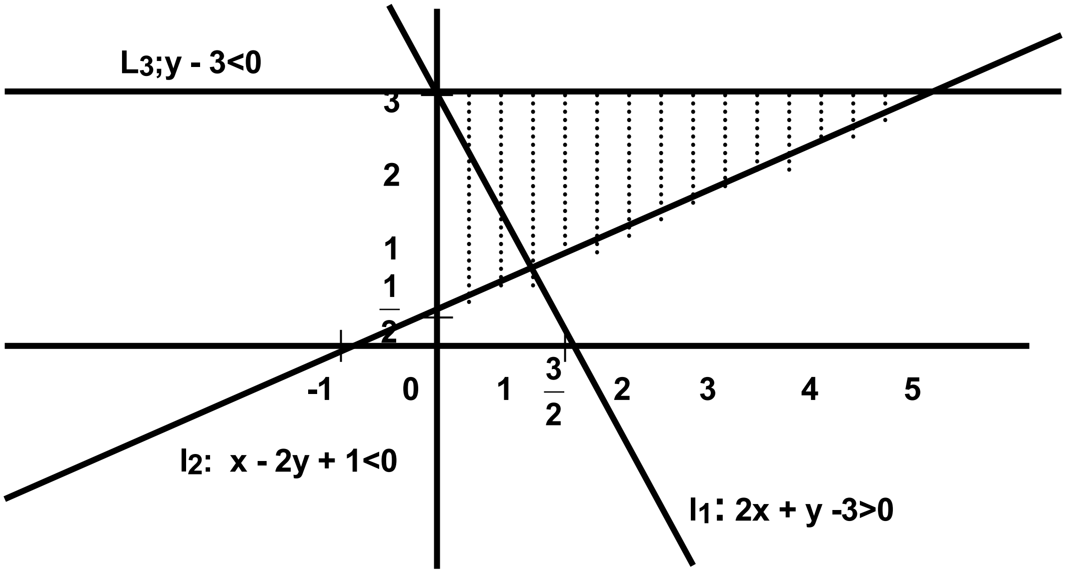


Fig. Nº 56

Ejemplo: Trazar el gráfico del conjunto de soluciones:

$$\begin{cases} y_1>x^2 - 6x + 5 \\ 4x + 2y_2 - 10<0 \end{cases}$$

Solución: Trabajaremos en primer lugar con y_2, completando cuadrado se tiene que: $y_1>(x - 3)^2 - 9 + 5 \Rightarrow y_1>(x - 3)^2 - 4 \Rightarrow y_1>(x - 3)^2 - 2^2$, aplicando la identidad $a^2 - b^2=(a- b)(a + b)$, donde en este caso $a=x - 3$ y $b=2$, se tiene que $y_1>(x - 3 - 2)(x - 3 + 2) \Rightarrow$

$y_1 > (x - 5)(x - 1)$ o también $y_1 > (x - 3)^2 - 4 \Rightarrow (y_1 + 4) > (x - 3)^2$, por la ecuación general de la parábola $(y - k) = L(x - h)^2$, donde (h, k) es el vértice de la parábola, en este caso el vértice es (3, -4), hayamos ahora los cortes con los ejes de coordenados: corte con el eje Y, es cuando $x=0 \Rightarrow y_1=5$, es decir, y_1 corta al eje Y en el punto P(0, 5), corte con el eje X, es cuando $y=0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1)=0 \Rightarrow x - 5=0$ ó $x - 1=0 \Rightarrow x=5$ ó $x=1$, es decir, los cortes con el eje X son P(1, 0) y P(5, 0)

Para y_2, con conseguir los cortes con los ejes de coordenados tenemos la grafica, es decir, corte con el eje Y, $x=0 \Rightarrow 2\,y_2 - 10=0 \Rightarrow y_2=5$, por lo tanto, corta al eje Y en el punto P(0, 5), corte con el eje X, $y_2=0 \Rightarrow 4x - 10=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$, es decir, corta a el eje X en el punto $(\frac{5}{2}, 0)$, por ultimo, buscamos la intersección entre y_1 e y_2, esto lo hacemos igualando y_1 a y_2, es decir, $y_1= y_2, \Rightarrow x^2 - 6x + 5=-2x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x=0 \Rightarrow x(x - 4)=0 \Rightarrow x=0$ ó $x=4$, sustituyendo estos valores de x en y_1 ó y_2, en este caso lo sustituiremos en y_2, para $x=0$, se tiene que $2y_2 - 10=0 \Rightarrow y=5$ y para $x=4$, se tiene que $16 + 2y_2, -10=0 \Rightarrow 2\,y_2,=-6 \Rightarrow y=-3$, por lo tanto, y_1 e y_2 se intersectan en los puntos P(0, 5) y P(4, -3), con todos estos resultados realizaremos la grafica:

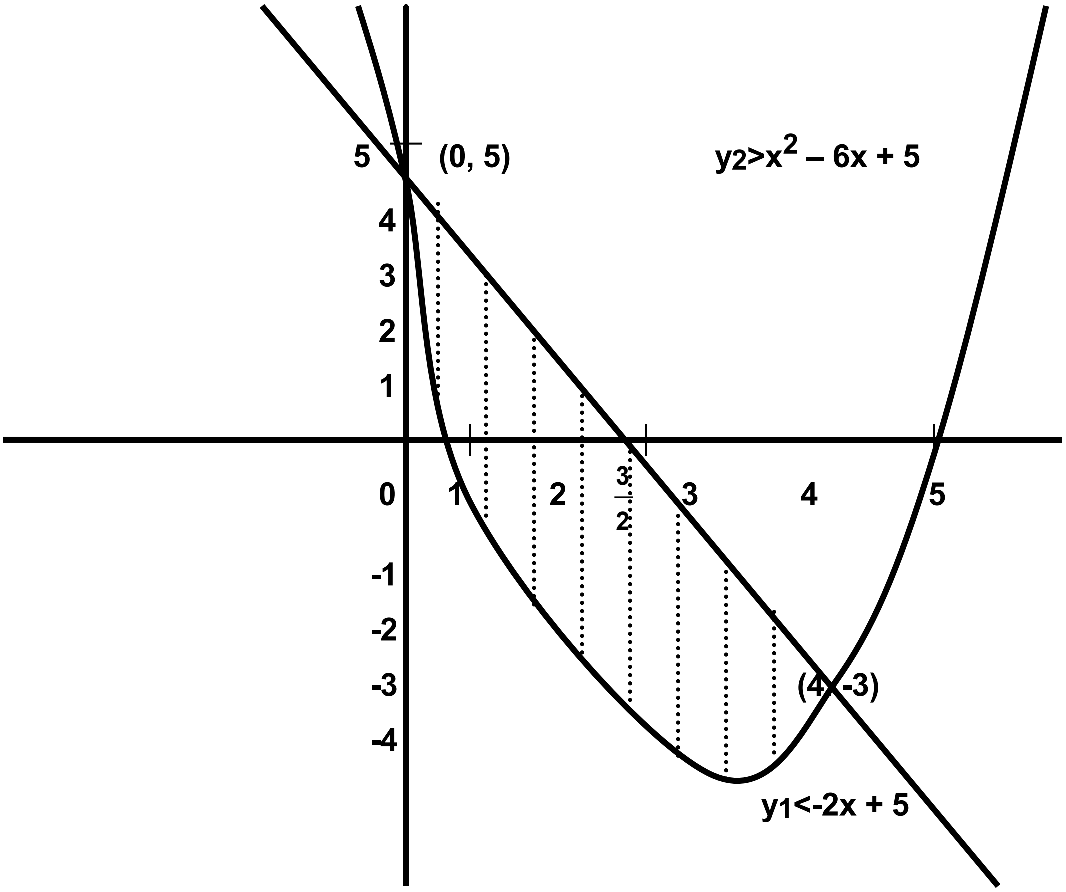


Fig. Nº 57

La solución es el área rayada

EJERCICIO RESUELTOS

1. **Determine que $|x-3|<1 \Rightarrow \frac{1}{8}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{6}$ y halle las soluciones analíticas y geométricas**

Solución: Aplicando la propiedad $|x|<a \Rightarrow$ -a<x<a, tenemos que: $|x-3|<1 \Rightarrow$ -1<x – 3<1 sumando a cada término 7, tenemos: 6<x +4<8, aplicándole a cada miembro el inverso con lo cual cambia de sentido la desigualdad se obtiene lo requerido, e.i. $\frac{1}{8}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{6}$

2. **Determine el intervalo al cual pertenece x si: $\frac{4-3x}{5}\in\left[\frac{3}{4},\frac{6}{5}\right]$**

Solución: como x pertenece al intervalo cerrado $\left[\frac{3}{4},\frac{6}{5}\right]$, tenemos que: $\frac{3}{4}\le\frac{4-3x}{4}\le\frac{6}{5}$, multiplicando cada uno de los miembros por el mínimo común denominador que en este caso es 20 tenemos: 15≤20 – 15x≤24, restándole a cada miembro 20 tenemos: -5≤-15x≤4, multiplicando toda la expresión por -$\frac{1}{15}$ con lo cual las desigualdades cambian de sentido se tiene: $-\frac{4}{15}\ge x\ge-\frac{1}{3}$, se tiene que el intervalo buscado será: $x\in\left(-\infty,-\frac{4}{15}\right]\cup\left[-\frac{1}{3},\infty\right)$ ó $x\varepsilon\Re$ - $\left(-\frac{4}{15},-\frac{1}{3}\right)$

3. **Pruebe que: $|3x-5|<5 \Rightarrow |x|<\frac{10}{3}$**

Solución: Aplicando la propiedad $|x| < a \Rightarrow$ -a<x<a, tenemos que: $|3x-5| < 1 \Rightarrow$ -5<3x – 5<5 sumando a cada termino 5, tenemos: 0<3x<10, multiplicando a cada miembro por $\frac{1}{3}$ se tiene que 0<x<$\frac{10}{3}$, $\therefore$ queda probado que si $|3x - 5| < 5 \Rightarrow |x| < \frac{10}{3}$.

4. Pruebe que la siguiente proposición satisface: x$\in$(2,4) $\Rightarrow$ $\frac{1}{2x+3}$ $\in\left(\frac{1}{11},\frac{1}{7}\right)$

Solución: como $\frac{1}{2x+3}$ $\in\left(\frac{1}{11},\frac{1}{7}\right)$ se tiene que $\frac{1}{11} < \frac{1}{2x+3} < \frac{1}{7}$, aplicándole a cada miembro el inverso con lo cual cambia de sentido la desigualdad se obtiene: 7<2x + 3<11, restándole 3 a cada término obtenemos: 4<2x<8 y multiplicando por $\frac{1}{2}$ se obtiene 2<x<4, $\therefore$ x$\in$(2,4)

5. Sea $\varepsilon \in$Z+, demuestre que: $|(4x-10)-2| < \varepsilon$ si $|x - 3| < \delta$

Solución: $|(4x-10)-2| = |4x-12| = |4(x-3)|$, aplicando la propiedad $|ax| = a\,|x|$, se tiene que 4$|x-3|$<ε, pero como $|x-3|$ está acotado por δ, tenemos que 4δ<$\varepsilon \Rightarrow \delta$<$\frac{\varepsilon}{4}$

6. Hallar las soluciones analíticas y geométricas de las siguientes inecuaciones:

a) $1-\frac{x-7}{3} \geq 2-\frac{2x-3}{4}$

b) $|-7x+3|-|4x+1| \leq 0$

c) $x^2 + 10x + 16 \leq 0$

d) $\sqrt{x^2 - 12x + 35} \leq 0$

e) $3x^3 - 3x^2 - 5x - 2 < 0$

f) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 < 0$

g) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 5x - 3} \leq 0$

Solución a): $1 - \dfrac{x-7}{3} \geq 2 - \dfrac{2x-3}{4}$, multiplicando todos los miembros por el mínimo común denominador m.c.d(3, 4), que en este caso es 12 tenemos: $12 - 4x + 28 \geq 24 - 6x + 9$ agrupando términos semejantes tenemos que $2x \geq -7 \Rightarrow x \geq -\dfrac{7}{2} \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{7}{2}, \infty\right)$ y la solución geométrica:

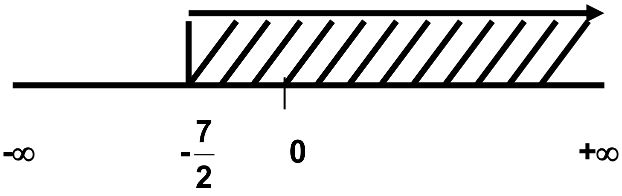


Fig. Nº 58

Solución b): $|-7x+3|-|4x+1| \leq 0 \Rightarrow |-7x+3| \leq |4x+1| \Rightarrow -7x + 3 \geq 4x + 1 \Rightarrow$

$11x \leq 2 \Rightarrow x \leq \dfrac{2}{11} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{11}\right]$

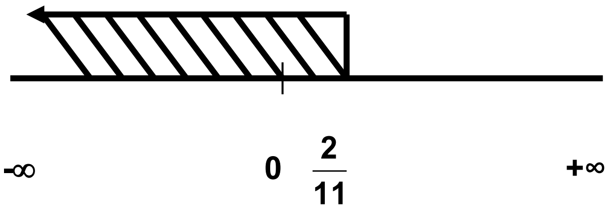


Fig. Nº 59

Solución c): $x^2 + 10x + 16 \leq 0$, completando cuadrado: $(x + 5)^2 + 16 - 25 \leq 0 \Rightarrow (x + 5)^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow (x + 5)^2 \leq 9$, aplicando la definición de distancia entre dos puntos tenemos: $|x+5| \leq 3$, e.i. la distancia que hay desde x hasta -5 es menor o igual que 3, $\therefore x \in [-8, -2]$

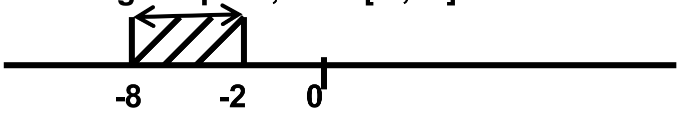


Fig. Nº 60

Solución d): $\sqrt{x^2 - 12x + 35} \leq 0$, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos que $x^2 - 12x + 35 \leq 0$, completando cuadrado $(x - 6)^2 + 35 - 36 \leq 0 \Rightarrow \Rightarrow (x - 6)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x - 6)^2 \leq 1$, aplicando la definición de distancia entre dos puntos tenemos: $|x - 6| \leq 1$, e.i. la distancia que hay desde x hasta 6 es menor o igual que 1, $\therefore x \in [5, 7]$

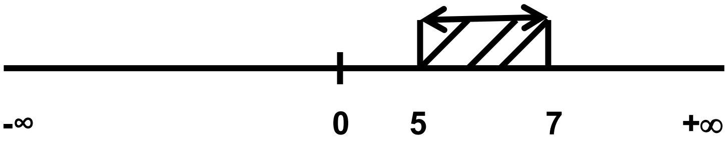


Fig. Nº 61

Solución e) $3x^3 - 3x^2 - 7x - 2 < 0$, aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar

	3	-2	-7	-2
-1		-3	5	2
	3	-3	-2	0
2		6	2	
	3	1	0	

Entonces, $3x^3 - 3x^2 - 7x - 2<0 \Rightarrow (x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - 2)<0$, los puntos de separación en este caso son: $x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$ y $x=2$ y los puntos de prueba son: $x=-2$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ y $x=3$

Factor	p.p p.s $-\infty$ -2 -1	p.p p.s $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$	p.p p.s 0 2	p.p 3 $+\infty$
x + 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
$x + \frac{1}{3}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x - 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Signo	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**si**	**no**	**si**	**no**

Cuadro Nº 8

Solución analítica: $x\in(-\infty, -1) \cup(- \frac{1}{3}, 2)$

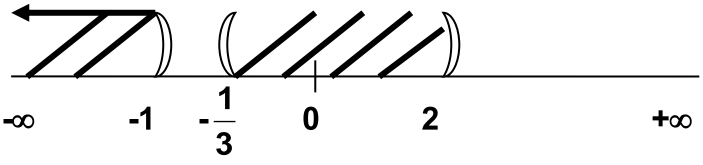
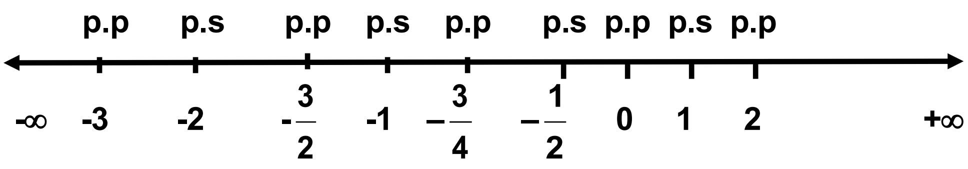


Fig. Nº 62

Solución f): $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2<0$, aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & 0 & -5 & -2 \\
-1 & & -2 & -3 & 3 & 2 \\
\hline
 & 2 & 3 & -3 & -2 & \underline{\vert\, 0} \\
1 & & 2 & 5 & 2 & \\
\hline
 & 2 & 5 & 2 & \underline{\vert\, 0} & \\
-2 & & -4 & -2 & & \\
\hline
 & 2 & 1 & \underline{\vert\, 0} & &
\end{array}$$

Entonces, $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2<0 \Rightarrow (x + 2)(x + 1)(x + \frac{1}{2})(x - 1)<0$, los puntos de separación en este caso son: $x=-2$, $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$ y $x=1$ y los puntos de prueba son: $x=-3$, $x=-\frac{3}{2}$, $x=-\frac{3}{4}$, $x=0$ y $x=2$



Factor					
x + 2	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
x + 1	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x + \frac{1}{2}$	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
x - 2	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)
Solución	si	no	si	no	si

Cuadro Nº 9

Solución analítica: $x \in (-\infty, 2) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

Solución geométrica

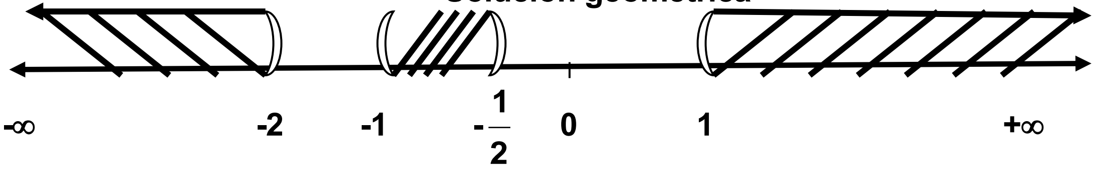


Fig. Nº 63

Solución g): $\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 5x - 3} \leq 0$**, aplicamos Rufini para factorizar, para obtener los factores, los puntos de separación y escoger los puntos de prueba que vamos a seleccionar**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\ 2 & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & -2 & 5 & -3 \\ 1 & & -2 & 3 \\ \hline & -2 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

Entonces, $\frac{x^3+2x^2-5x-6}{-2x^2+5x\text{ - }3} \le 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} \ge 0$, se cambió la desigualdad porque se multiplicó por -1 a $\frac{(x+3)(x+1)(x-2)}{(x-1)(2x-3)} \ge 0$, los puntos de separación en este caso son: x=-3, x=-1, x=1, x=$\frac{3}{2}$, y x=2 y los puntos de prueba son: x=-4, x=-2, x=0, x=$\frac{29}{20}$, x=$\frac{7}{4}$ y x=3

Factor	p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p p.s p.p $-\infty$ -4 -3 -2 -1 0 1 $\frac{29}{20}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$ 2 3 $+\infty$					
x + 3	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
x + 1	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
x - 1	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)
$x - \frac{3}{2}$	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)	(+)
x - 2	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(+)
Signo	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
Solución	no	si	no	si	no	si

Cuadro Nº 10

Solución analítica: $x \in [-2,-1] \cup (1, \frac{3}{2}) \cup [3,+\infty)$

Solución geométrica

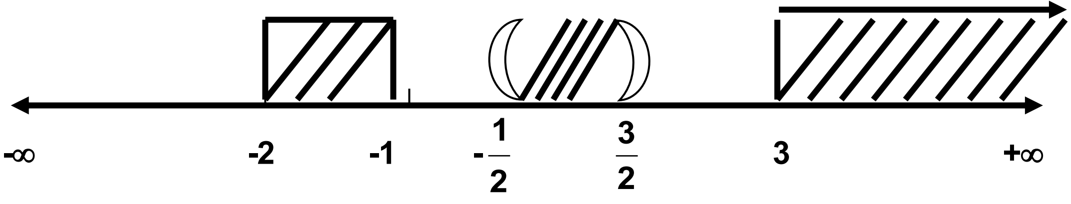


Fig. Nº 64

8. Hallar las soluciones geométricas de las siguientes inecuaciones

de dos variables.

a) $y<\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$

b) $y>x^2 - 6x + 7$

c) $\begin{cases} y<-x^2 + 2x + 2 \\ y>x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2>x \\ y<2 - x \end{cases}$

Solución a) $y<\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$**, para realizar la grafica de esta recta buscamos los puntos con los ejes de coordenadas, e.i.** $\frac{4}{3}x - y>\frac{3}{2}$**, dividiendo los dos miembros por** $\frac{3}{2}$**, tenemos que:** $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}x-\frac{1}{\frac{3}{2}}y>1 \Rightarrow$

$\frac{x}{\frac{9}{8}}-\frac{y}{\frac{3}{2}}>1 \Rightarrow$ **que la recta corta al eje X en el punto** $\left(\frac{9}{8},0\right)$ **y al eje Y en el punto** $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$**,** $\therefore$ **la grafica de la función y será:**

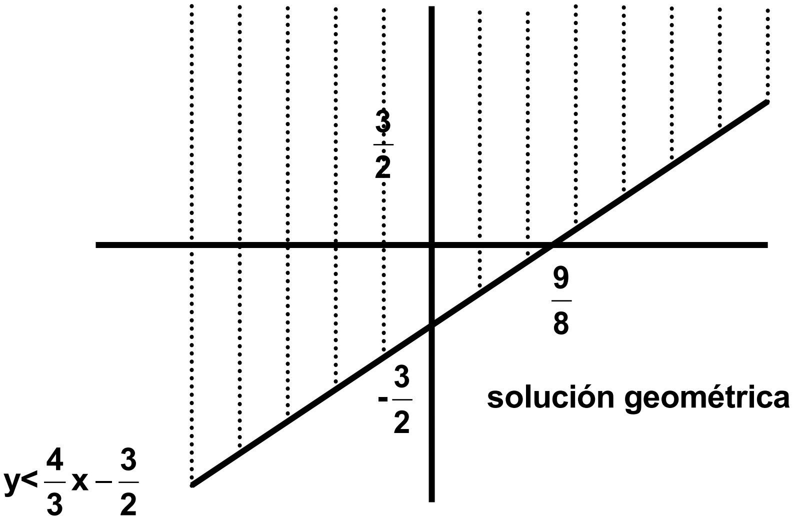


Fig. Nº 65

Solución b): $y>x^2 - 6x + 7$, para realizar la gráfica de esta función, completamos cuadrado en el segundo miembro, $y>(x-3)^2 + 7 - 9 \Rightarrow (y+2)>(x-3)^2$, e.i. el vértice de la parábola esta en el punto (3,-2) y como el coeficiente de la variable x es positivo esta parábola se habré hacia arriba y corta al eje y en el punto (0,7) y al eje x, cuando y=0, tenemos que $(x-3)^2=2 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{2}$, e.i. en los puntos $(3-\sqrt{2}, 0)$ y $(3+\sqrt{2}, 0)$, luego su gráfica será:

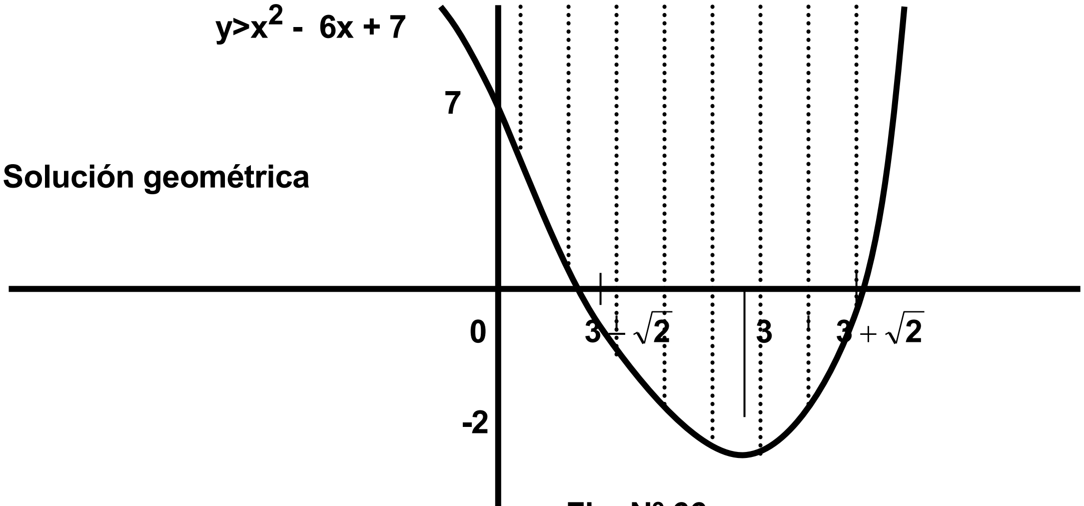


Fig. Nº 66

Solución c): $\begin{cases} y_1<-x^2 + 2x + 2 \\ y_2>x^2 - 2x + 2 \end{cases}$

Completando cuadrado para en la función $y_1<-x^2 + 2x + 2$, en el miembro derecho tenemos; $y_1<-[x^2 - 2x - 2] \Rightarrow y_1<-[(x - 1)^2 - 2 - 1] \Rightarrow y_1<-(x - 1)^2 + 3, \Rightarrow (y_1 - 3)=-(x -1)^2$, con lo que el vértice de la parábola está en el punto P(1, 3), como el lado recto es negativo se habré hacia arriba, corta al eje Y en el punto P(0, 2) y al eje X, cuando $y_1=0 \Rightarrow (x - 1)^2=3 \Rightarrow x=1 \pm \sqrt{3}$, e.i. corta al eje X en los puntos: P($1 - \sqrt{3}$, 0) y ($1 + \sqrt{3}$, 0), ahora, Completando cuadrado en la función $y_2>x^2 - 2x + 2$, en el miembro derecho tenemos; $y_2>(x - 1)^2 + 2 - 1 \Rightarrow y_2>(x - 1)^2 + 1$, $\Rightarrow (y_2 - 1)=(x - 1)^2$, con lo que el vértice de la parábola esta en el punto P(1, 1), como el lado recto es positivo se habré hacia arriba, corta al eje Y en el punto P(0, 2) y al eje X, cuando $y_2=0 \Rightarrow (x - 1)^2=-1 \Rightarrow$ que no hay corte con el eje X, busquemos los puntos de intersección entre y_1 e y_2, lo cual hallaremos igualando y_1 e y_2, $\Rightarrow -x^2 + 2x +2=x^2 -2x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x=0 \Rightarrow 2x(x - 2)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=2$, para $x=0$, se tiene que $y=2$ y para $x=2$ se tiene que $y=2$, luego y_1 e y_2 se intersectan en los puntos P(0, 2) y (2, 2) y su gráfica es:

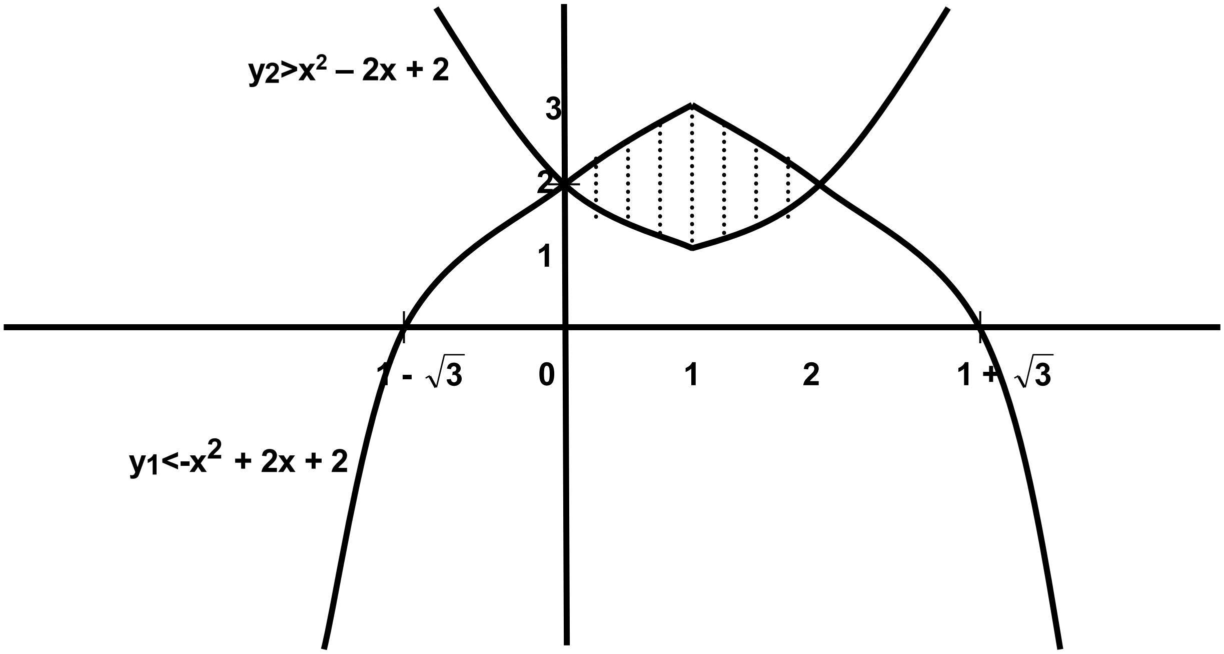


Fig. Nº 67

$$\text{Solución d)} \begin{cases} y_1 > \sqrt{x} \\ y_2 < 2 - x \end{cases}$$

$y_1 > \sqrt{x}$, es una parábola paralela al eje X, en el origen de coordenadas, $y_2 < 2 - x$ es una recta cuyos cortes con los ejes de coordenadas, para x=0, y=2, y para y=0, x=2, e.i. la función corta a los ejes en los puntos P(2 ,0) y P(0, 2), para ver donde se intersectan y_1 e y_2, se igualan estas dos ecuaciones e.i. $\sqrt{x} = 2 - x \Rightarrow x = (2 - x)^2 \Rightarrow x = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, factorizando esta ecuación de segundo grado se tiene que: $(x - 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x=1$ o $x=4$, para x=1 se tiene que y=1 y para x=4 se tiene que y=-3, luego y_1 e y_2, se intersectan en los puntos P(1, 1) y P(4, -3), y su grafica es:

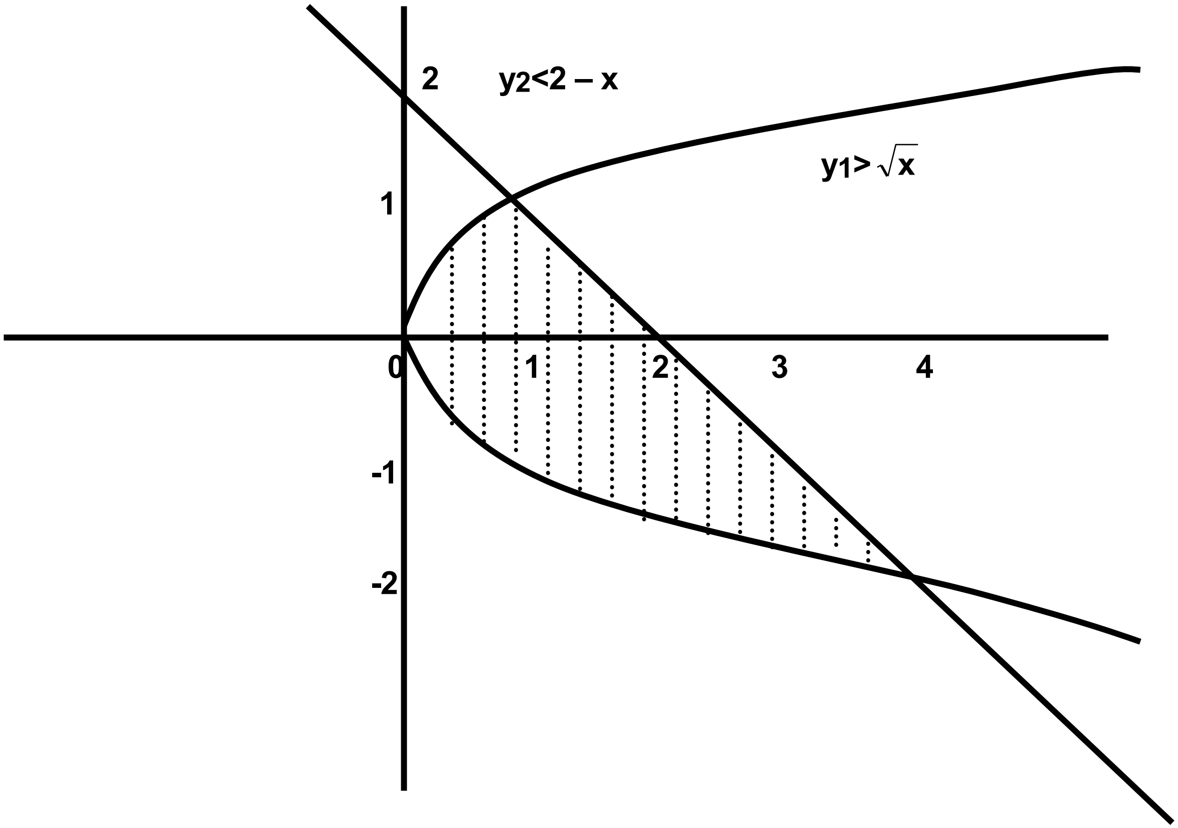


Fig. Nº 68

La solución es el área rayada

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Dados los siguientes conjuntos: A=[-2, 5); B=(0, 7]; C=(-6, 2); D=[4, 8); E=$\left(\frac{10}{3}, \frac{32}{5}\right)$; F=(-∞, 11]; G=(2, ∞); H=[-2, $\sqrt{11}$); I=[$\sqrt{2}, \pi$); J=[$-\frac{9}{4}$, ∞); K=(-∞, $\sqrt{10}$]; L=(e,π], hallar:**

a) **$(A\cap F) - K$**

b) **$(H\cup B)\cap(C - G)$**

c) **$J - (D\cup E)$**

d) **$(A\cup I) - (B\cap F)$**

e) **$(K - L)'$**

f) **$(A\cap L)\cup(B\cap K)$**

2. **Determinar y hallar las soluciones analítica s y geométricas de:**

a) $|(4x + 23) - 3| < 4 \Leftrightarrow |x - 5| < 1$

b) $|(5x - 27) - 3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 6| < \frac{1}{6}$

c) $\left|\frac{1}{x} - 2\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{3} - x\right| < \frac{1}{3}$

3. **Sea $\varepsilon \in Z^{+}$, demuestre que $|(10x - 36) - 14| < \varepsilon$ cuando $|x - 5| < \frac{\varepsilon}{10}$**

4. **Encuentre $\delta \in Z+/ |(4x - 10) - 2| < \varepsilon$ si $|x - 3| < \delta$**

5. **Determine en cada caso, el intervalo al cual pertenece x si:**

a) **$3x - 2 \in [2, 5]$**

b) $\frac{3}{5}x + \frac{3}{4} \in \left(-\frac{1}{2}, 1 \right)$

c) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4} \in \left[-\frac{7}{5}, -\frac{9}{5} \right]$

6. Pruebe cada una de las siguientes proposiciones:

a) $x \in [-2, 5] \Rightarrow x + 3 \in [1, 8]$

b) $x \in (3, 7) \Rightarrow \frac{1}{x-1} \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right]$

7. Resolver las inecuaciones establecidas y trazar su conjunto de soluciones sobre la recta real:

a) $2x - 1 < 6$

b) $\frac{2x-5}{4} \geq 3$

c) $\frac{7x-3}{3} < x + 1$

d) $10 - 3x > \frac{4x-5}{-7}$

e) $|2x-1| - 3 < 0$

f) $|x-7| + 8 > 0$

g) $\left| \frac{3x-7}{4} \leq 8 \right|$

h) $|x+1| - |x+2| \geq 0$

i) $|2x+1| < 5$

j) $|2x-3| < x + 5$

k) $\left|\frac{2}{3}x-5\right| \geq \frac{1}{2}$

l) $\left|\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}\right| > x+3$

m) $|2x-3| \leq |x+2|$

n) $x^2>9$

o) $4x^2 - 12x - 7 >0$

p) $2x^2 - 3x + 1\leq 0$

q) $-3x^2 + 5x + 2>0$

r) $7x^2 - 3x - 5>0$

s) $34x^2 + 2x - 1>0$

t) $4 - 3x - x^2\geq 0$

u) $16x^2 + 1\geq 8x$

v) $x^3 - 3x^2 + x -3>0$

w) $x^3 - 2x^2 - 5x - 3\geq 0$

x) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12>0$

y) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16\leq 0$

z) $x^5 - 5x^3 + 4x>0$

aa) $x^3 + x^2 + x - 4>0$

bb) $\dfrac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+2x^3-9x^2-8x+14} \leq 0$

cc) $\left|\dfrac{2x+5}{4x-3}\right| < 0$

dd) $\left|\dfrac{4x-3}{2x+1}\right| > 1$

ee) $(x^2 + 3x - 4)(x^2 - x -2)\leq 0$

ff) $|7x+13| \leq 3x+2$

gg) $\left|\dfrac{3x-1}{4x+3}\right| > 3$

hh) $\dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x^2-1)(x+2)(x+3)} \leq 0$

ii) $\left|\dfrac{x-3}{2x-1}\right| > \left|\dfrac{4x-1}{5x+6}\right|$

jj) $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right| \leq |x-1|$

kk) $\dfrac{x^3-3x^2+x-3}{3x^2-3x+1} \leq 0$

ll) $\dfrac{2x^4-5x^3-5x^2+5x+3}{2x^2-3x+1} \leq 0$

8. Escribir una inecuación que establezca:

a) La distancia de x a menos $-\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{5}$

b) La distancia de x a $\frac{5}{3}$ es mayor que $\frac{8}{5}$

c) La distancia de San Fernando a Barinas es menor o igual a 625Km.

d) La distancia de San Fernando a Puerto la Cruz es igual a 640Km.

e) La distancia de San Fernando a San Felipe es mayor de 800Km.

9. Dibujar el gráfico y hallar la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $3x + 2y - 6<0$

b) $x - y - 1\geq 0$

c) $2x + 5y -10<0$

d) $5x - 5y>-7$

e) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y > 6$

f) $x^2 + 9x + 8\leq y$

g) $y\leq -x^2 + 9x - 18$

h) $y\geq -x^2 + 10x - 24$

i) $4x^2 + 4x +1>y$

j) $y\geq -2x^2 - 7x + 22$

10. Dibujar el gráfico del conjunto de soluciones de las inecuaciones simultáneas y encontrar los puntos de intersección entre las gráficas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 12>0 \\ x + 6y + 4>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 3>0 \\ x - 2y + 1<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - 2>0 \\ x - 3y + 2<0 \\ y>3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y - 3<0 \\ x - 2y + 1<0 \\ x + y - 5<0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 3y - 12>0 \\ 4x - 5y + 20>0 \\ 4x - y - 12<0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y>x^2 + 9x + 8 \\ x + 2y - 4<0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y>x^2 - 10x + 24 \\ x - y>0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y>x^2 - 8x + 12 \\ y + 5>0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y<-x^2 + 2x - 1 \\ x + 3y + 3<0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y>x^2 - 6x + 5 \\ 4x + 2y - 10<0 \end{cases}$

CAPÍTULO VII

FUNCIONES

En este capítulo se estudiaran: Producto Cartesiano de $\Re x \Re$, Relación, Relación de Equivalencia, Relación de Orden, Funciones: Dominio, Recorrido, Grafo, Tipo de Función: Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva, Operaciones de Funciones: Suma, Resta, Multiplicación y División, Inversa de una Función, Composición de Funciones, Traslación de Funciones al Origen, Rotación de Funciones al Origen, Función Afín, Algunas de sus Propiedades y Gráfica, Aplicación a la Vida Real de Funciones Lineales, Función Polinómica, Raíz de una Función Polinómica, Método de Ruffini para hallar la Raíz de una Función Polinómica, Factorización de las Funciones de la forma $x^n \pm y^n$, Factorización de las Funciones de la forma $\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$, Gráfica de una Función Polinómica: $f(X)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_o$, con $(n\leq3)$, Función Exponencial, Algunas Propiedades y Gráficas, Ecuaciones de Funciones Exponencial, Funciones Logarítmicas, Algunas Propiedades y Gráficas, Ecuaciones de Funciones Logarítmicas, Funciones Trigonométricas, Algunas Propiedades y Gráficas, Ecuaciones de Funciones Trigonométricas, Triángulos, Clasificación de los Triángulos relaciones y las funciones, dominio recorrido de una función, clasificación de las funciones, traslación y rotación de funciones al origen, composición e inversa de una función, operaciones con funciones, funciones polinomicas, exponenciales, logarítmicas, trigonometriítas y circulares.

Teorema 1: Un par ordenado (a, b) se expresa como un conjunto formado por $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, e.i. $(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Demostración: La propiedad característica del par ordenado (a, b) es que $(a, b)=(c, d)$ sii $a=c$ y $b=d$, $\therefore$, se trata de ver que: $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$ sii $a=c$ y $b=d$.

La demostración la haremos por doble inclusión, que consiste en ver si $\{\{a\}, \{a, b\}\}\subset\{\{c\}, \{c, d\}\}$, luego lo contrario, e.i $\{\{c\}, \{c, d\}\}\subset\{\{a\}, \{a, b\}\}$

a. $\{\{a\}, \{a, b\}\}\subset\{\{c\}, \{c, d\}\}$

$$\begin{cases} \{a\}=\{c\} \wedge|\{a, b\}=\{c, d\} \ (1) \\ \qquad\quad \vee \\ \{a\}=\{c, d\} \wedge \{a, b\}=\{c\} \ (2). \end{cases}$$

En el caso (1), $\{a\}=\{c\} \Rightarrow a=c$ y $\therefore$, $\{a, b\}=\{c, d\} \Rightarrow \{a, b\}=\{a, d\} \Rightarrow b=d$

En el caso (2) $\{a\}=\{c, d\} \Rightarrow a=c=d$ y en consecuencia $\{a, b\}=\{c\} \Rightarrow \{a, b\}=\{a\} \Rightarrow a=b$, luego $a=b$ y $c=d$.

a. $\{\{c\}, \{c, d\}\}\subset\{\{a\}, \{a, b\}\}$, si $a=c$ y $b=d$, es evidente que $\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$, quedando esto demostrado

Definición 1: Se define el ***Producto Cartesiano*** de dos conjuntos A y B como el conjunto cuyos elementos son todos pares ordenados cuya primera componente pertenece a A, y la segunda componente pertenece a B, e.i. $AxB=\{(x, y)/x\in A \wedge y\in B\}$. Si $A=B=\Re$ se tiene que: $\Re x\Re=\Re^2=\{(x, y)/x\in\Re \wedge y\in\Re\}$.

<u>Ejemplo:</u> **$A\mathit{C}\Re/A=\{x\in Z/2<x<6\}$ y $B\mathit{C}\Re/B=\{x\in Z/x^2 - 2x - 8=0\}$. Hallar AxB.**

De la definición de conjunto obtenemos que A={3, 4, 5} y B={-2, 4}, luego: AxB={(3, -2), (3, 4), (4, -2), (4, 4), (5, -2), (5, 4)}, este conjunto de pares ordenados recibe el nombre de <u>*grafo.*</u>

La representación tabular es:

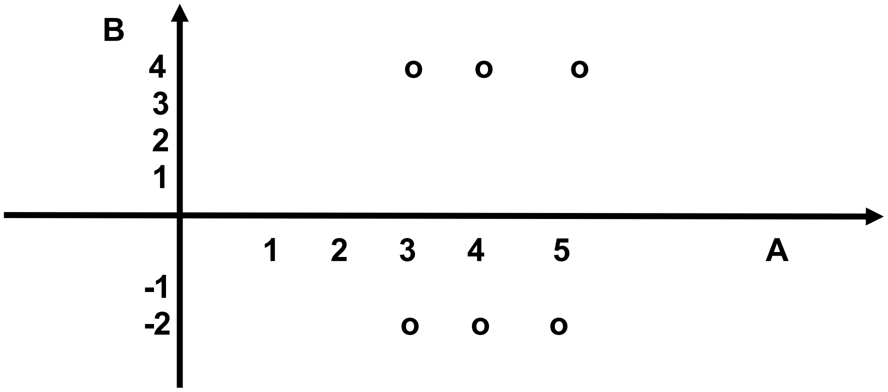


Fig. Nº 1

<u>Definición 2:</u> Una *Relación de A en B*, es cualquier subconjunto del producto cartesiano AxB, e.i. $\Re$ es una relación de A en B sii $\Re\mathit{C}$AxB.

<u>Definición 3:</u> Si A=B=$\Re$, Decimos que $\Re$R es una <u>*relación interna.*</u>

Para decir que un par ordenado (x, y) pertenece a la relación, se escribe $x\Re y$, lo que equivale a decir $(x, y)\in\Re$. Otra manera de definir la *Relación* es como una correspondencia que existe entre un conjunto A llamado <u>*Dominio*</u> y un conjunto B llamado <u>Recorrido.</u>

<u>Ejemplo:</u> En el ejemplo anterior, la relación A es mayor que B, esta representado por el grafo: $a\Re b$={(3, -2), (4, -2), (5, -2), (5, 4)}, e.i. los elementos de A que son mayores que los elementos de B.

Definición 4: Se define el ***Dominio de una Relación*** como las preimágenes de la relación, e.i. los elementos del conjunto A que admiten imagen en B. Matemáticamente: $\mathrm{Dom}\Re=\{x\in A/(x, y)\in\Re\}$.

Ejemplo: En el ejemplo tras anterior, el dominio de la relación es: $\mathrm{Dom}\Re=\{3, 4, 5\}$.

Definición 5: Se define el ***Recorrido de una Relación*** como el conjunto de imágenes de la relación, e.i. el conjunto de elementos de B que admiten un antecedente en A. Matemáticamente $\mathrm{Rec}\Re=\{y\in B/(x, y)\in\Re\}$.

Ejemplo: Como vimos en los ejemplos anteriores el recorrido de la relación es $\mathrm{Rec}\Re=\{-2, 4\}$.

Definición 6: Una relación $\Re\mathit{C}A^2$ es de ***Equivalencia en A*** sii cumple con las siguientes propiedades:

1) ***Reflexiva***, e.i. todo elemento esta relacionado consigo mismo.

2) ***Simétrica,*** e.i. si un elemento a esta relacionado con un elemento b, entonces el elemento b esta relacionado con el elemento a.

3) ***Transitiva,*** e.i. si un elemento a esta relacionado con un elemento b y este elemento b esta relacionado con un elemento c, entonces el elemento a esta relacionado con el elemento c. La relación de equivalencia se denota por: "≡", e.i. $a\equiv a$ reflexiva, $a\equiv b$ y $b\equiv a$ simétrica, $a\equiv b$ y $b\equiv c \Rightarrow a\equiv c$ transitiva.

Ejemplo: En el conjunto Z definimos la relación: $x\Re y$ sii $x - y=\dot{10}$, probemos que esta relación es de equivalencia sobre Z.

1) $x - x=0$, $0=\dot{1}0.0=0.\dot{1}0$, entonces, $\forall x$, $x\Re x$, luego $\Re$ es reflexiva.

2) Supongamos que $x\Re y$, entonces, $x - y=\dot{1}0$, $\therefore$ $\exists$ un $n\in Z/x - y=\dot{1}0.n$, luego $y - x=\dot{1}0\,(-n)=\dot{1}0$, $\Rightarrow$ $x\Re y$ es simétrica.

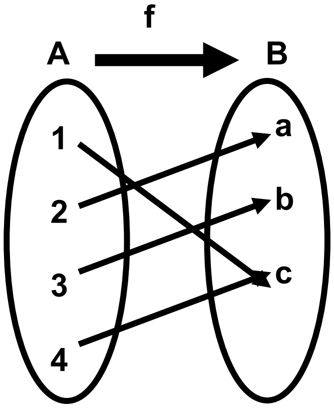
3) Supongamos que $x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow \exists n, m\in Z/x - y=10n$ $y - z=10m$, $\therefore$ $x-z=10(n+m)=\dot{1}0$, $\Rightarrow$ la relación es transitiva y por ende es una relación de equivalencia.

Definición 7: Sea $\Re C A^2$, *$\Re$ es una Relación de Orden en A* sii cumple con las siguientes propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva, la propiedad reflexiva y transitiva se mencionaron en la relación de equivalencia. La propiedad antisimétrica dice que si x esta relacionado con y $\wedge$ y esta relacionado con x, $\Rightarrow$ $x=y$.

Ejemplo: El conjunto de los números reales con la relación "*es menor que (<)*" cumple con una relación de orden. Este ejemplo queda como ejercicio para el lector.

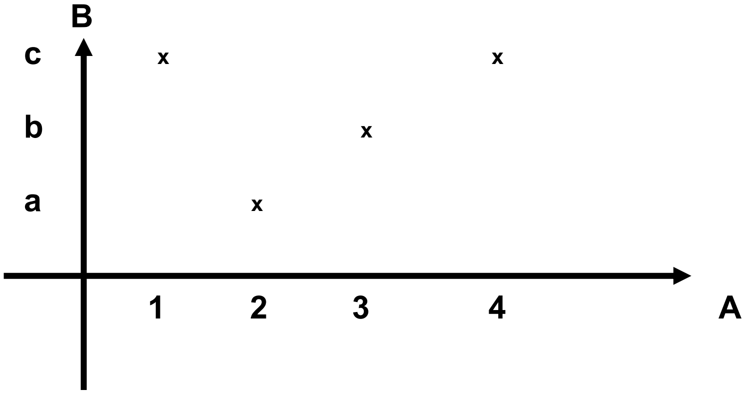
Definición 8: Se define una *Función* como una correspondencia que existe entre un conjunto A llamado dominio y un conjunto B llamado recorrido, donde para todo elemento $x\in A$ $\exists$ un único elemento $y\in B/xfy$, para denotar que f es una función de A en B escribimos: $f:A \rightarrow B$ o bien $x \rightarrow f(x)$.

Ejemplo:



Representación Sagital

Fig. Nº 2



Representación Tabular

Fig. Nº 3

El grafo de esta función es: f={(1, c), (2, a), (3, b), (4, c)}.

Definición 9: Se define el *Dominio de una Función* o conjunto de partida como el campo de existencia de la función, e.i. donde la función esta definida, es por esto que al hacer cualquier estudio de una función lo primero que tenemos que hacer es ver donde la función esta definida o sea buscar su dominio. Matemáticamente:

$\text{Domf}=\{x\in A/y=f(x)$, para algún $y\in B\}$.

<u>Definición 10:</u> **Se define el *<u>Rango o Recorrido</u>* de una función como el conjunto de imágenes que recorre la función. Matemáticamente: Recf={(y∈B/y=f(x), para algún x∈A}.**

En el plano cartesiano el eje de las abscisas (eje de las X) representa el dominio y el eje de las ordenadas (eje de las Y) representa el recorrido de la función. Si la función esta representada gráficamente, para hallar el dominio se traza rectas (imaginarias) paralelas al eje de las Y, donde corten estas rectas a la función pertenecerá al dominio, lo mismo trazando rectas paralelas al eje de las X, donde corten estas rectas a la función pertenecerá al recorrido. Por ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} e \text{ si } a\leq x\leq b \\ \frac{g-f}{d-c}(x-c)+d \text{ si } \quad c\leq x\leq d \end{cases}$$

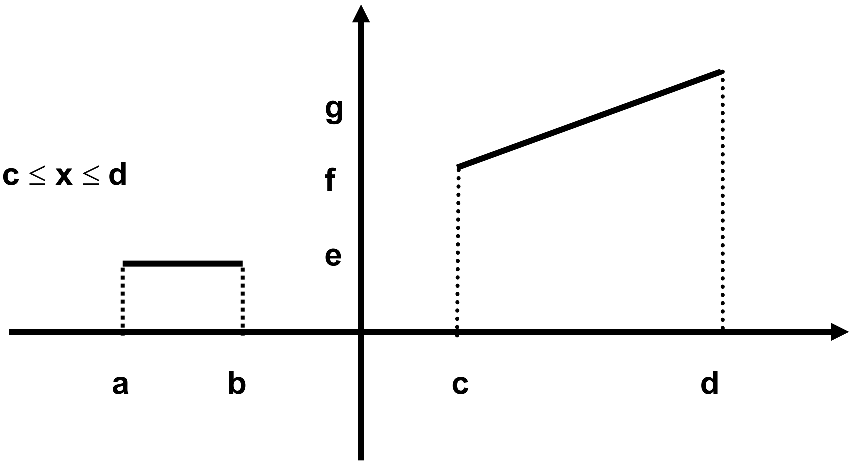


Fig. Nº 4

En la gráfica Nº 3, el Domf=[a, b]U[c, d] y Recf={e}U[f, g]

Si la función la tenemos en forma de grafo, entonces, el dominio serán las primeras componentes y el recorrido las segundas componentes de los pares ordenados, e.i. Domf={x/x es la primera componente del par ordenado (x, y)} y el Recf={y/y es la segunda componente del par ordenado (x, y)}

Ejemplo: $f=\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8) \quad ..... \}$

El Domf=Z^+ y Recf=P, donde P es un número de la forma 2K con $K \in Z^+$. Si la función esta en forma de proporción, entonces vemos los valores de $x \in \Re$ para determinar su dominio y los valores de $y \in \Re$ para determinar su recorrido.

Nota: Generalmente hallar el recorrido de una función es muy complicado, es por ello que primero se construye la gráfica y luego trazamos rectas paralelas al eje de las Y para buscar el recorrido. En este curso buscaremos el recorrido de funciones sencillas, e.i. en el origen.

Ejemplo: Hallar el dominio y el recorrido de las funciones:

a. $f(x)=2x + 7$ y b. $f(x)=\frac{3x - 5}{4x + 7}$

Solución: a. Domf=$\Re$, puesto que x puede tomar cualquier valor real. Para hallar el Recf, despejamos x en función de y, e.i. $x=\frac{y - 7}{2}$, luego Recf=$\Re$

Solución b. Domf=$\Re - \{-\frac{7}{4}\}$, ya que el denominador tiene que ser distinto de cero, $\therefore$, $4x + 7 \neq 0$, $\Rightarrow x \neq -\frac{7}{4}$, para hallar el recorrido, despejamos x en función de y e.i. $y(4x + 7)=3x - 5 \Rightarrow 4xy + 7y=3x - 5 \Rightarrow 3x - 4xy=7y + 5 \Rightarrow x(3 - 4y)=7y + 5 \Rightarrow x=\frac{7y + 5}{3 - 4y}$, $\therefore$, como $3 - 4y \neq 0 \Rightarrow$ que $y \neq \frac{3}{4}$ y en consecuencia el Recf=$\Re - \{\frac{3}{4}\}$.

Definición 11: Sea f:A $\rightarrow$ B, se dice que f es inyectiva, si a cada par de elementos diferentes del dominio le corresponden imágenes diferentes, e.i. $\forall$x, x'$\in$A se tiene que f(x)=f(x') $\Rightarrow$ x=x' o f(x)$\neq$f(x') $\Rightarrow$ x$\neq$x'.

Definición 12: Sea f:A $\rightarrow$ B, se dice que f es sobreyectiva, si f(A)=B, e.i. f:A $\rightarrow$ B es sobreyectiva sii $\forall$y$\in$B $\exists$ x$\in$A/y=f(x).

Definición 13: Sea f:A $\rightarrow$ B, se dice que f es biyectiva o uno a uno sii es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo: Sea f:$\Re \rightarrow \Re$/f(x)=$\frac{3x-8}{4x-5}$ estudiar la función: Primero veremos si la función es inyectiva, e.i. si f(x)=f(x') $\Rightarrow$ x=x', haciendo la igualdad $\frac{3x-8}{4x-5}=\frac{3x'-8}{4x'-5}$ $\Rightarrow$ 12xx'- 15x – 32x'+ 40=12xx'- 32x – 15x'+ 40 $\Rightarrow$ 32x – 15x=32x' – 15x' $\Rightarrow$ 17x=17x' $\Rightarrow$ x=x', $\therefore$, la función es inyectiva.

Veremos ahora si la función es sobreyectiva, $y=\frac{3x-8}{4x-5}$ $\Rightarrow$ 4xy – 5y=3x - 8 $\Rightarrow$ 4xy – 3x=5y - 8 $\Rightarrow$ x=$\frac{5y-8}{4y-3}$ como Recf=$\Re$ - {$\frac{3}{4}$}, f(A)$\neq$B, $\therefore$, f no es sobreyectiva, en consecuencia no es biyectiva.

Definición 14: Sea f:A $\rightarrow$ B y g:C $\Rightarrow$D se define la ***Suma de Funciones*** $\forall$x$\in$A, $\forall$x$\in$B, como (f + g)x=f(x) + g(x) y Domf$\cap$Domg.

Ejemplo 11: f={(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... } y g={(3, 4), (6, 8), (9, 12) .... }. Hallar: (f + g).

Aplicando la definición de suma, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego sumamos sus recorridos.

$f:Z^+ \rightarrow Z^+$, $g:3Z^+ \rightarrow Z^+$, el $Domf=Z^+$ y $Domg=3Z^+ \rightarrow Domf \cap Domg=3Z^+$ y $\therefore$, (f + g)={(3, 13), (6, 26), (9, 39) ,..... }, e.i., la función suma $(f+g):3Z^+ \rightarrow 13Z^+$.

Ejemplo: Dadas las gráficas: $f(x)=\frac{2}{3}x - 6$ y $f(x)=x^2$ como se muestra en la gráficas Nº 4 y Nº 5, hallar la suma de (f + g)x.

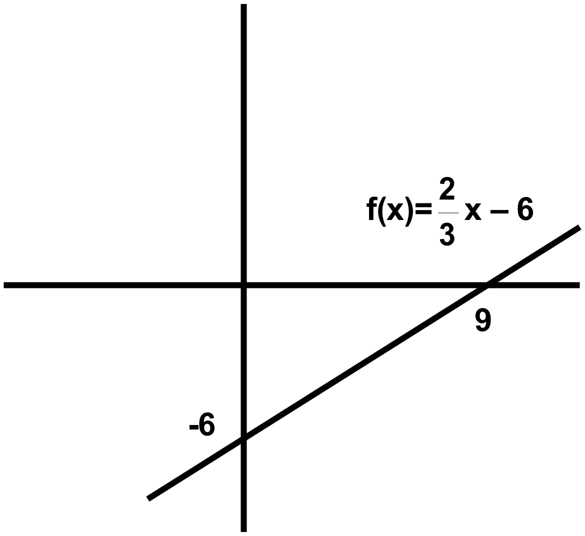


Fig. Nº 5

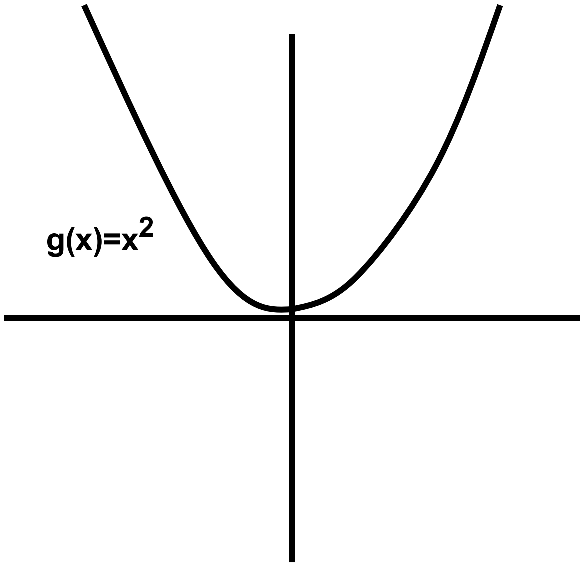


Fig. Nº 6

Según la definición de suma de funciones se tiene que buscar primero los dominios y luego sumamos los recorridos de los elementos comunes en dichos dominios, e.i. $Domf=\Re$ y $Recg=\Re$, luego la solución analítica para la suma de (f + g)x será: $(f+g)_x=x^2 + \frac{2}{3}x - 6$ y la solución geométrica será:

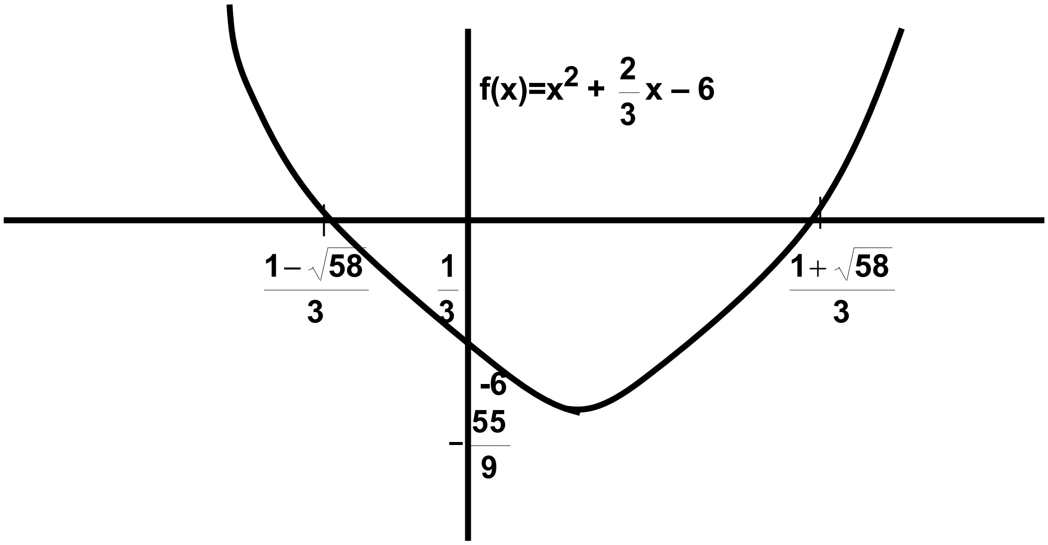


Fig. Nº 7

Para la solución geométrica procedemos de la siguiente manera: Según la gráfica Nº 4, se tiene que: $\frac{x}{9}-\frac{f(x)}{6}=1 \Rightarrow 2x - 3f(x)=18 \Rightarrow$ $f(x)=\frac{2}{3}x - 6$, y la gráfica Nº 5, tenemos: $g(x)=x^2$.

Aplicando la definición de suma de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g, luego sumamos sus recorridos, $Domf=\Re$ y $Domg=\Re$, luego $Domf \cap Domg=\Re$, con lo que, $(f + g)x=f(x) + g(x)=x^2 + \frac{2}{3}x - 6$, $f: \Re \rightarrow \Re$, $g: \Re \rightarrow [0, +\infty]$ y $(f + g): \Re \rightarrow [-\frac{55}{9}, +\infty]$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=2x + 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar $(f + g)x$, Aplicando la definición de suma de funciones, buscamos los dominios de las funciones f y g, luego sumamos sus recorridos.

Domf=$\Re$, Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, luego Domf$\cap$Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, $\therefore$,

(f + g)x=f(x) + g(x)=$\frac{6x^2+23x+13}{3x+5}$ $\Rightarrow$ f:$\Re \to \Re$ y g: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\to$ $\Re$, y (f + g): $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\to$ $\Re$.

<u>Definición 15:</u> Sea f:A $\to$ B y g:C $\to$ D se define la *<u>Resta de Funciones</u>*, $\forall x \in A$, $\forall x \in B$, como (f - g)x=f(x) - g(x) y Domf$\cap$Domg.

<u>Ejemplo:</u> f={(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... } y g={(3, 4), (6, 8), (9, 12) .... } Hallar: (f - g).

Aplicando la definición de resta, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego restamos sus recorridos.

f:$Z^+ \to 3Z^+$, g:$3Z^+ \to 4Z^+$, el Domf=Z^+ y Domg=$3Z^+$ $\Rightarrow$ Domf$\cap$Domg=$3Z^+$ y $\therefore$, (f - g)={(3, 5), (6, 10), (9, 15), ... }, e.i. la función resta, (f - g):$3Z^+ \to 5Z^+$

<u>Ejemplo:</u> f(x)=2x - 3, g(x)= $\frac{4x-2}{3x+5}$ hallar (f - g)x, Aplicando la definición de resta de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego restamos sus recorridos, Domf=$\Re$, Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, luego Domf$\cap$Domg=$\Re$ - {-$\frac{5}{3}$}, luego,

(f - g)x=f(x) - g(x) $\Rightarrow$ f(x) - g(x)=$\frac{6x^2-9x+10x-15-4x+2}{3x+5}=\frac{6x^2-3x-13}{3x+5}$,

f: $\Re \to \Re$, g: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\to$ $\Re$, (f - g)x: $\Re$ - {-$\frac{5}{3}$} $\to$ $\Re$.

Definición 16: Sea $f:A \rightarrow B$ y $g:C \rightarrow D$ se define el ***Producto de Funciones***, $\forall x \in A$, $\forall x \in B$, como $(f.g)x=f(x).g(x)$ y $Domf \cap Domg$.

Ejemplo 16: $f=\{(1, 3), (2, 6), (3, 9) .... \}$ y $g=\{(3, 4), (6, 8), (9, 12) ....\}$. Hallar: $(f.g)$.

Aplicando la definición de producto, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego multiplicamos sus recorridos, $f:Z^+ \rightarrow 3Z^+$, $g:3Z^+ \rightarrow 4Z^+$, **el** $Domf=Z^+$ **y** $Domg=3Z^+ \Rightarrow Domf \cap Domg=3Z^+$ **y** $\therefore$,

$(f.g)=\{(3, 36), (6, 144), (9, 324), ... \}$,

Ejemplo: $f(x)=2x + 3$, $g(x)=\frac{4x-2}{3x+5}$, **hallar** $(f.g)x$, **Aplicando la definición de producto de funciones buscamos los dominios de las funciones f y g y luego multiplicamos sus recorridos,** $Domf=\Re$, $Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, **luego** $Domf \cap Domg=\Re - \{-\frac{5}{3}\}$, $\therefore$, $(f.g)x=f(x).g(x)$

$\Rightarrow f(x).g(x)=\frac{(2x+3)(4x-2)}{3x+5}$ $f: \Re \rightarrow \Re$, $g: \Re - \{-\frac{5}{3}\} \rightarrow \Re$, **y** $(f.g):\Re - \{-\frac{5}{3}\} \rightarrow \Re$

Definición 17: Sea $f:A \rightarrow B$ y $g:C \rightarrow D$ se define la ***División de Funciones***, $\forall x \in A$, $\forall x \in B$, como $(\frac{f}{g})x=\frac{f(x)}{g(x)}$ y $Domf \cap Domg$ y $g(x) \neq 0$.

Ejemplo: $f=\{(1, 3), (2, 6), (3, 9) ....\}$ y $g=\{(3, 4), (6, 8), (9, 12) .... \}$. Hallar: $(\frac{f}{g})$.

Aplicando la definición de división, buscamos los dominios de las funciones f y g, y luego dividimos sus recorridos, $f:Z^+ \rightarrow 3Z^+$,

g:3Z$^+$ → 4Z$^+$, el Domf=Z$^+$ y Domg=3Z$^+$ ⇒ Domf∩Domg=3Z$^+$ y ∴,

(f/g)={(3, $\frac{9}{4}$), (6, $\frac{9}{4}$), (9, $\frac{9}{4}$), ...} e.i. la función cociente es (f/g):3Z$^+$ → {$\frac{9}{4}$}

<u>Ejemplo:</u> f(x)=2x - 3, g(x)= $\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar ($\frac{f}{g}$)x, Aplicando la definición de división de funciones, buscamos los dominio de las funciones f y g, y luego dividimos su recorridos, Domf=ℜ, Domg=ℜ - {-$\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$}, luego Domf∩Domg=ℜ - {-$\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$}, ∴, ($\frac{f}{g}$)x= $\frac{f(x)}{g(x)}$ ⇒

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(2x-3)(3x+5)}{4x-2}$ f:ℜ → ℜ, g: ℜ - {-$\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$} → ℜ, ($\frac{f}{g}$):ℜ - {-$\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$} → ℜ.

<u>Definición 18:</u> Sea f:A → B, donde f es una función biyectiva. La correspondencia F^{-1}, de B en A, definida por (y, x)∈F^{-1}, sii (x, y)∈F, se define una función de B en A llamada <u>Función Inversa de F</u>. se denota por f^{-1}

<u>Ejemplo:</u> Sea f: Z$^+$ → 3Z$^+$/f={(1, 3), (2, 6), (3, 9) ....}. Hallar la f^{-1}, Aplicando la definición de función inversa obtenemos:

f^{-1}={(3, 1), (6, 2), (9, 3) ....}, f^{-1}:3Z$^+$ → Z$^+$

<u>Ejemplo</u>: Sea f:ℜ - {-$\frac{5}{3}$} → ℜ - {$\frac{4}{3}$}/f(x)= $\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar f^{-1}, Aplicando la definición de inversa de una función, obtenemos:

x= $\frac{4f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)+5}$ ⇒ x[3f^{-1}(x) + 5]=4f^{-1}(x) - 2 ⇒ 3xf^{-1}(x) + 5x=4f^{-1} - 2 ⇒

$4f^{-1}$- $3xf^{-1}$=5x – 2 $\Rightarrow$ $f^{-1}=\frac{5x-2}{4-3x}$, de donde se deduce que $f^{-1}(x):\Re - \{\frac{5}{3}\} \rightarrow \Re - \{-\frac{4}{3}\}$

<u>Definición 19:</u> Sea f:A $\rightarrow$ B y g:B $\rightarrow$ C, la función h:A $\rightarrow$ C definida por h(x)=g[f(x)], $\forall x \in A$, se denomina <u>*Función Compuesta*</u> de f y g o función composición de f y g y se escribe: h(x)=(gof)x.

<u>Ejemplo:</u> Sean f:$Z^+ \rightarrow$ $3Z^+$/g:$3Z^+$ $\rightarrow$ $4Z^+$/f={(1 ,3), (2, 6), (3, 9), ...} y g ={(3, 4), (6, 8), (9, 12) ....} Hallar: (gof), Aplicando la definición de composición de funciones obtenemos: (fog)={(1, 4), (2, 8), (3, 12) ......} donde (fog):$Z^+ \rightarrow 4Z^+$

<u>Ejemplo:</u> Sea f(x)=2x + 3, g(x)=$\frac{4x-2}{3x+5}$, hallar (gof)x, Aplicando la definición de composición de funciones, obtenemos: (gof)x=g[f(x)] $\Rightarrow$ $g[f(x)]=\frac{4(2x+3)-2}{3(2x+3)+5}$ $\Rightarrow$ (gof)x=$\frac{8x+10}{6x+14}$ $\Rightarrow$ (gof)x=$\frac{4x+5}{3x+7}$

<u>Definición 20:</u> Las funciones pueden representarse gráficamente como gráficas trazadas sobre un sistema de coordenadas rectangulares, donde la variable independiente (x) se representa en el eje horizontal y la variable dependiente (y) se representa en el eje vertical.

<u>Definición 21:</u> Se define la <u>*Gráfica de una Función*</u>, como aquella que esta constituida por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas (x_o, y_o) satisfacen la ecuación y=f(x).

<u>Ejemplo:</u> Representar gráficamente la parábola $f(x)=x^2$

Solución: Lo primero que hacemos es hallar el dominio de la función $f(x)=x^2$, que en este caso es todos los reales, e.i. Domf=$\Re$, luego le damos valores arbitrarios que pertenezcan a $\Re$, tomemos en este caso: {-2, -1, 0, 1, 2} y hallamos sus respectivas imágenes, y lo representamos en su forma sagital, es decir: las imágenes se hallan sustituyendo los elementos escogidos del dominio en la función $f(x)=x^2$, e.i. $f(\pm2)=(\pm2)^2=4$, $f(\pm1)=(\pm1)^2=1$, $f(0)=(0)^2=0$ como se ilustra en la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

y su gráfica es:

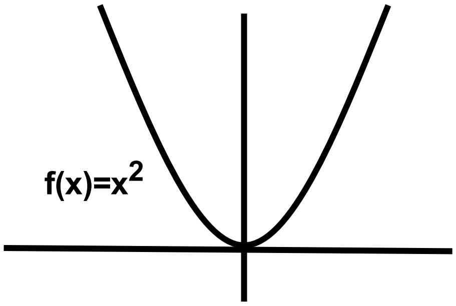


Fig. N° 8

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \Rightarrow (-\infty,0) \\ x^2 & \text{si } 0\leq x<2 \Rightarrow [0,2) \\ 4 & \text{si } 2\leq x<3 \Rightarrow [2,3) \\ 2x-2 & \text{si } 3\leq x<4 \Rightarrow [3,4) \\ -4 & \text{si } x\geq 4 \Rightarrow [4,+\infty) \end{cases}$$

Solución:

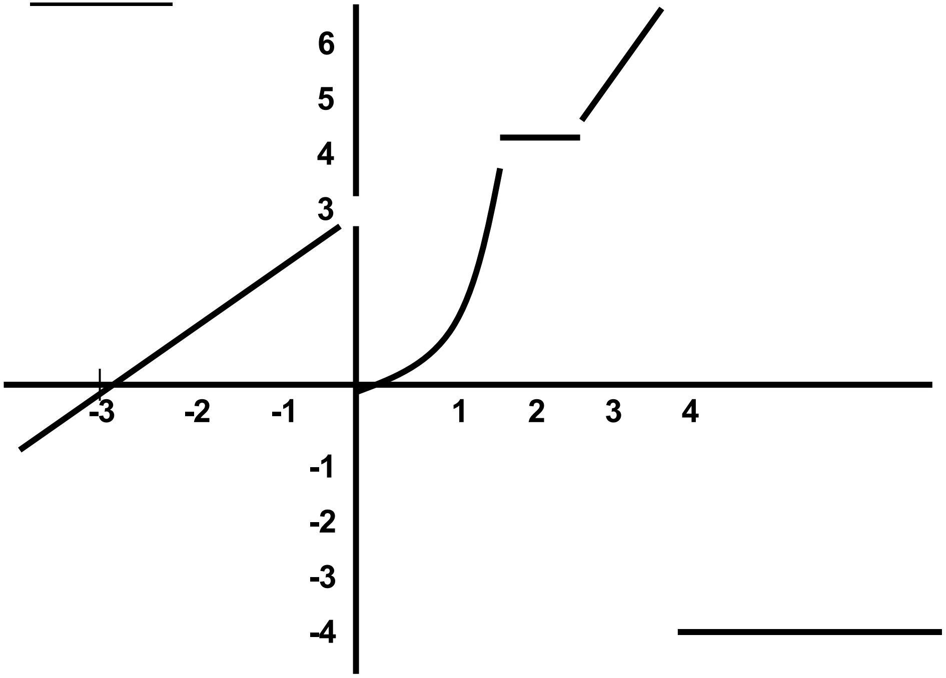


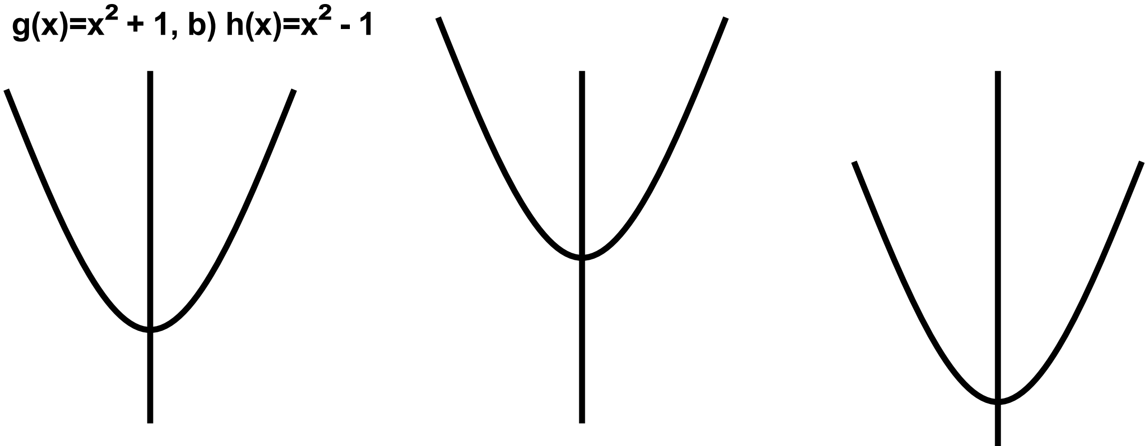
Fig.. N° 9

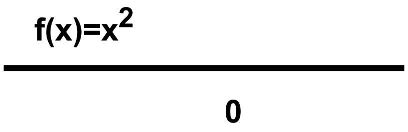
x	-3	0	2	3	4	5
f(x)	0	3	4	4	6	-4

Definición 22 **Si $g(x)=f(x) \pm b$ para algún $b \in \Re$, entonces, la gráfica g(x) se obtiene desplazando la gráfica de f(x) en sentido vertical ± b cantidades, si el signo de b es positivo, hay una traslación vertical hacia arriba en b cantidades, si el signo de b es negativo, hay una traslación vertical hacia abajo en b cantidades.**

Ejemplo: **Graficar $f(x)=x^2$ y sin cálculos adicionales graficar:**

a) $g(x)=x^2 + 1$, b) $h(x)=x^2 - 1$





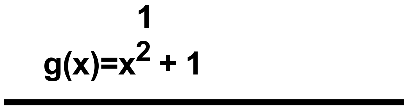


Fig. N° 10

Fig. N° 11

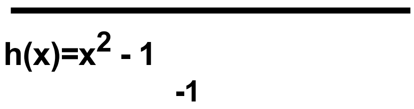
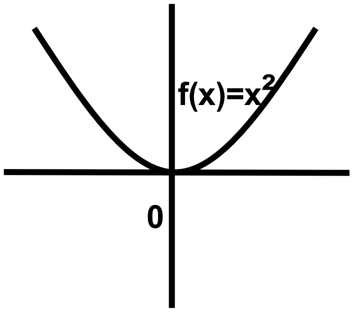


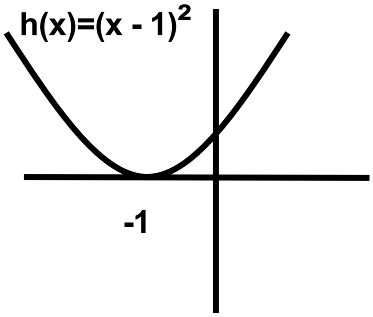
Fig. N° 12

<u>Definición 23:</u> Si g(x)=f(x ± b) para algún b∈ℜ, entonces, la gráfica g(x) se obtiene desplazando la gráfica de f(x) en sentido horizontal ±b cantidades, si el signo de b es positivo, hay una traslación horizontal hacia la izquierda en b cantidades, si el signo de b es negativo, hay una traslación horizontal hacia la derecha en b cantidades.

<u>Ejemplo 27:</u> Graficar f(x)=x^2 y sin cálculos adicionales graficar:

a. **g(x)=$(x + 1)^2$, b) h(x)=$(x - 1)^2$**





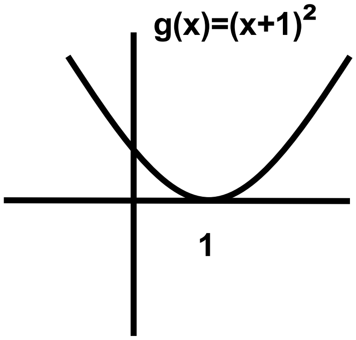


Fig. N° 13

Fig. N° 14

Fig. N° 15

<u>Definición 24:</u> Si g(x)=-f(x), entonces, la gráfica de g(x) se obtiene reflejando la gráfica de f(x) en el eje Y (180^0).

Ejemplo 28: Graficar $f(x)=x^2$ y sin cálculos adicionales graficar: $g(x)=-x^2$

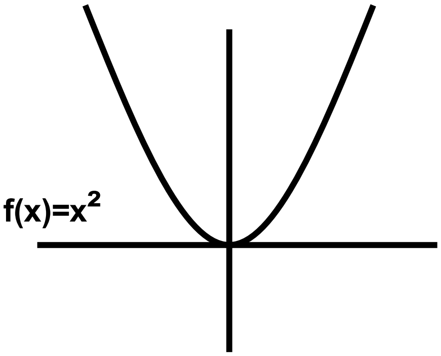


Fig. N° 16

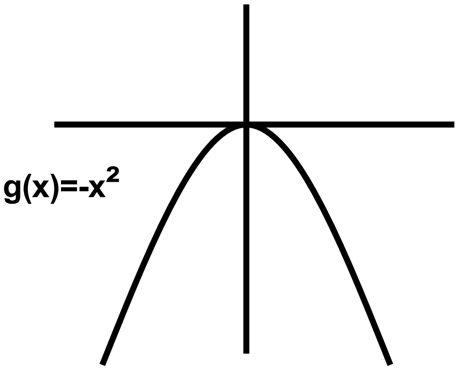


Fig. N° 17

Definición 25: En muchos casos de la vida real, la rata a la cual cambia una cantidad con respecto a otra cantidad recibe el nombre de función lineal.

Ejemplo 29: Un camión sale de San Fernando a Maracay, a una distancia de 300Km. Si se maneja el camión a una velocidad constante de 100Km/h, exprese la distancia del camión hasta su destino como una función del tiempo, Usando x para denotar el número de horas que ha estado el camión en la carretera y f(x) para la distancia correspondiente entre el camión y Maracay. Viajando a 100Km/h el camión recorrerá 100X kilómetros en x horas y, por lo tanto, $f(x)=300 - 100x$. Gráficamente:

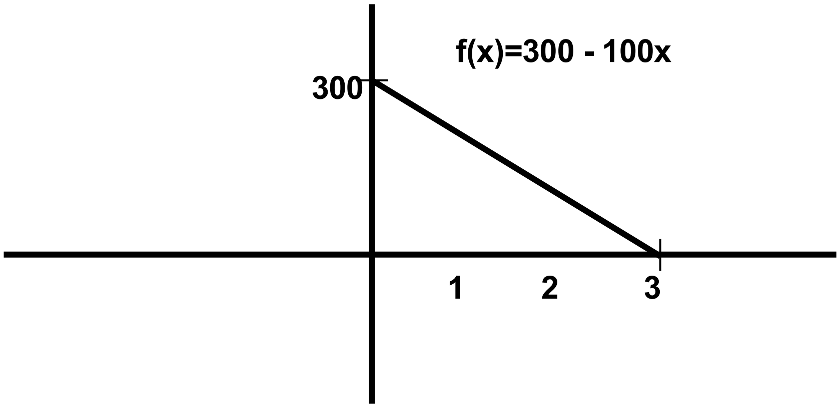


Fig. Nº 18

<u>Definición 25:</u> La función lineal se puede expresar de las siguientes formas:

a. $Ax + Bf(x) + C=0$, b. $f(x)=mx + k$, c. $f(x)=m(x - x_0) + f(x_0)$,

d. $\frac{x}{a}+\frac{f(x_0)}{b}=1$, e. $f(x)=\frac{y_1-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$,

f. $(x_1 - x_0)f(x)=(f(x_1) - f(x_0)) (x_1 - x_0) f(x_0)$,

La ecuación: a. y la f. es la ecuación general de la recta, la b. es la ecuación dada la pendiente y el corte con el eje Y, la c. es la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto, la d. es la ecuación paramétrica de la recta, la e. es la ecuación de la recta dada dos puntos.

En la ecuación a. A, B y $C\in\Re$, y el cociente $m=-\frac{A}{B}$, recibe el nombre de pendiente, que es la razón que existe en el cambio del eje Y a el cambio en el eje X es decir, $m=\frac{\text{Cambio en Y}}{\text{Cambio en X}} \Rightarrow m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

La ecuación b. se obtiene de la ecuación a., despejando en a. la variable dependiente y, luego sustituimos $m=-\frac{A}{B}$ y $k=-\frac{C}{B}$, y la ecuaciones c. es obvio que se deduce de la ecuación b., lo mismo que la ecuación d, donde a es el corte con el eje X, y b es el corte con el eje Y.

<u>Ejemplo:</u> Hallar la pendiente de la recta que une los puntos $P_1(4, -2)$ y $P_2(-3, 4)$,

Solución: aplicando la fórmula de la pendiente tenemos: $m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Rightarrow m=\frac{4-(-2)}{-3-4}$, Si en la ecuación f. $f(x_1)=f(x_0)$ la pendiente vale 0, y en consecuencia nos resulta una recta paralela al eje de las X, y si $x_1=x_0$ la pendiente crece indefinidamente la recta que resulta es paralela el eje de las Y, gráficamente.

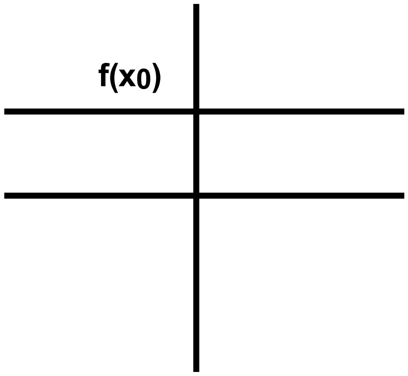


Fig. Nº 19

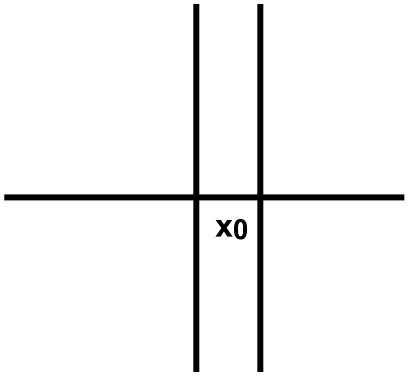


Fig. Nº 20

Ejemplo: Hallar la ecuación lineal si:

a. La pendiente es $\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $P_1(2, 9)$

b. Se pasa por los puntos $P_1(-2, 3)$ y $P_2(2, 9)$

c. Corta a los ejes en: $x_0=-2$ y $f(x_0)=3$

Solución: a. Sustituyendo el valor de la pendiente en la ecuación $f(x)=mx + k$, tenemos: $f(x)=\frac{3}{2}x + k$, como la ecuación pasa por el punto $P_1(2, 9)$, al sustituirlo en la ecuación $f(x)=\frac{3}{2}x + k$, hallamos el valor de k, es

decir, $9=\frac{3}{2}+K \Rightarrow K=6$, luego la ecuación de la recta es: $f(x)=\frac{3}{2}x+6$ y su representación gráfica es:

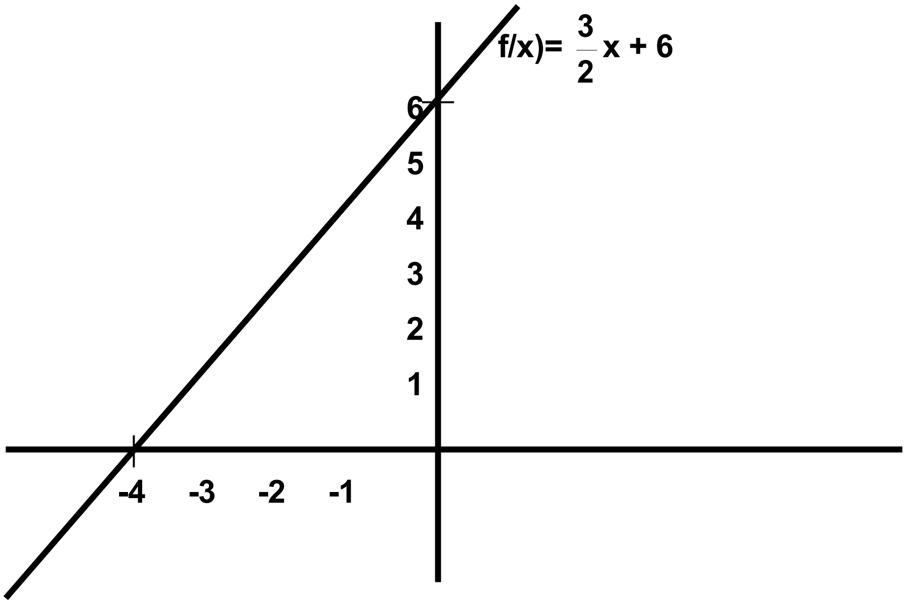


Fig. Nº 21

La solución de la parte b. y c. queda como ejercicio para el lector.

<u>Ejemplo 32:</u> Los estudiantes de la UNELLEZ pueden registrarse para sus clases de verano previamente por correo durante el mes de julio. Los que no se registren previamente deben hacerlo personalmente en agosto. El registrador puede procesar los datos de 40 estudiantes por hora durante este periodo de registro en agosto. Una vez transcurrida 4 horas en agosto, se han registrado 360 estudiantes.

a. Exprese el número de estudiantes registrados como una función del tiempo.

b. ¿Cuantos estudiantes fueron registrados después de transcurridas 3 horas?

c. ¿Cuantos estudiantes se registraron en julio?

Solución: a: Usando x para denotar el número de horas durante las cuales ha estado abierto el registro en agosto y f(x) para denotar el número total correspondiente de estudiantes registrados. El valor de f(x) aumenta en 40 cada vez que x aumente 1, así f(x) es una función lineal de x con pendiente m=40, que pasa por el punto (4,360), luego $f(x)=40x + K \Rightarrow f(4)=360 \Rightarrow 40(4) + k=360 \Rightarrow k=200$, y por lo tanto, la ecuación buscada es: $f(x)= 40x + 200$.

Solución: b. El número de estudiante registrado transcurridos 3 horas es cuando x=3, lo sustituimos en la ecuación encontrada en la parte a) $f(3)=40(3) + 200 \Rightarrow f(3)=320$, esto quiere decir, que transcurridos 3 horas se habían inscrito 320 estudiantes.

Solución: Para saber el número de estudiante que se escribió en julio, simplemente sustituimos en la ecuación x=0, con lo cual nos da que f(0)=200, que es el número de estudiantes que se inscribieron por correo en julio.

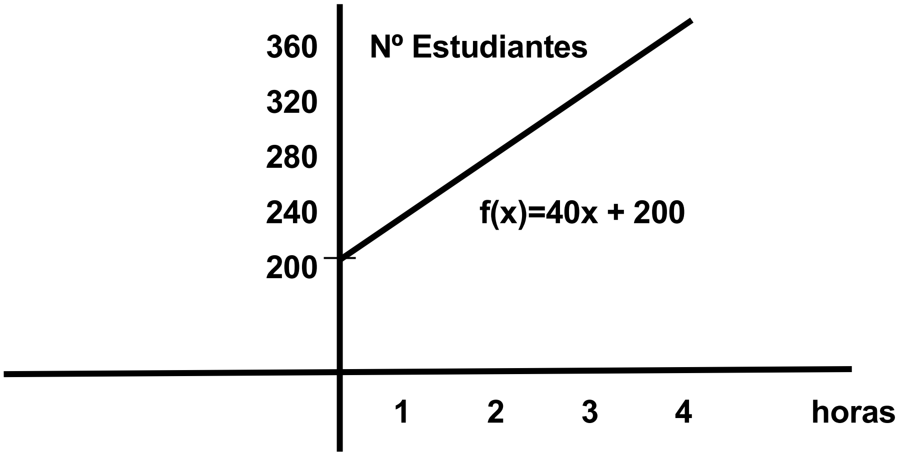


Fig. Nº 22

<u>Ejemplo 33:</u> La tarifa del Metro de Caracas por estación es de Bs. 200, Si el Metro tiene 7 estaciones. Exprese el pasaje como una función del transporte y realice su gráfica

<u>Solución:</u> Usaremos x para denotar cada estación y f(x) para el porte correspondiente.

$$f(X)=\begin{cases} 200 & \text{si } 0<X\leq 1 \\ 400 & \text{si } 1<X\leq 2 \\ 600 & \text{si } 2<X\leq 3 \\ \ldots & \\ \ldots & \\ \ldots & \\ 1.400 & \text{si } 6<X\leq 7 \end{cases}$$

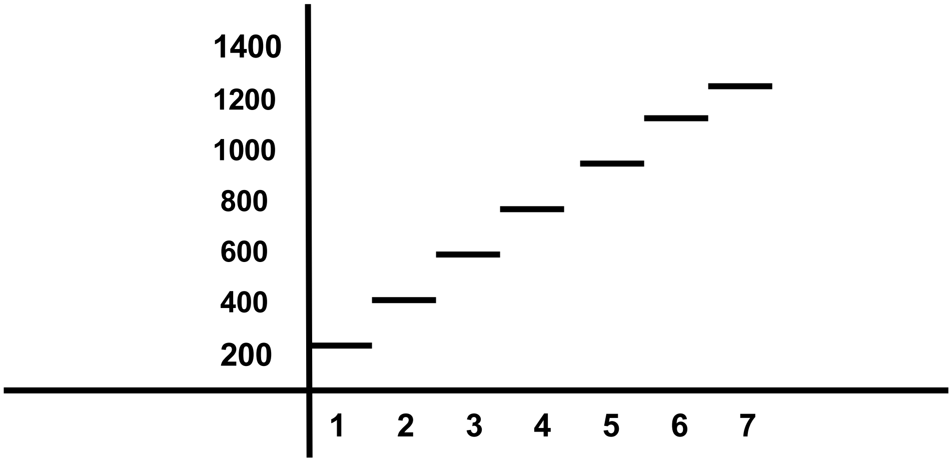


Fig. Nº 23

<u>Definición 27:</u> Un <u>polinomio</u> es una función:

a. $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_o$

b. $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$**, donde: n: grado del polinomio, si** $n\neq 0$ **y** $a_o, a_1, a_2, ... a_n$**: coeficientes del polinomio, x: variable o indeterminada del polinomio. Si el polinomio esta dado en la forma a. se dice que es <u>*decreciente*</u>, y en la forma de b. se dice que es <u>*creciente*</u>.**

Ejemplo: **a. $f(x)=x^5 + 3x^2 – 2x + 5$, es un polinomio decreciente de grado n=5**

b. $f(x)=-2 + 5x^2 + 3x^4+ 2x^6$, se dice que es creciente de grado n=6.

Definición 28: **Para cualquier número $x_o \in \Re$, para el cual $f(x_o)=0$, se dice que es una raíz de f. Si x_o es una raíz del polinomio f(x), entonces, el termino lineal $x - x_o$ es un factor de f, es decir, que podemos escribir: $f(x)=(x - x_o)g(x)$, donde g(x) es en si mismo un polinomio, de un grado menor que f(x).**

Ejemplo 35: **El polinomio $f(x)=x^3 – 3x^2 + 5x - 3$, tiene como raíz a $x_o=1$, ya que f(1)=0 y $f(x)=(x - 1)(x^2 – 2x + 3)$.**

Observación: **En correspondencia entre las raíces y factores implica a lo más n raíces reales. Naturalmente un polinomio de grado n puede tener menos de n raíces. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$, no tiene ninguna raíz real, ya que las raíces en este caso son raíces complejas.**

Definición 29: **Si todos los coeficientes de los polinomios de la forma: $f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_o=0$ ó**

$f:\Re \rightarrow \Re / f(x)=a_o + a_1x + a_2x^2 + ..., + a_nx^n=0$ son ceros, decimos que f(x) es un *polinomio nulo*.

Definición 30: **Si en a) o b) n=0 y $a_o \neq 0$, entonces $f(x)=a_o$, se llaman polinomios constantes.**

<u>Definición 31:</u> Si en el polinomio $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$, con $a_n=1$, se dice que f(x) es un *<u>Polinomio Monico</u>*, es decir, un polinomio es monico si el coeficiente de la variable de mayor grado es igual a 1.

<u>Definición 32:</u> Sean $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$ y $g(x)=b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_o$ se define la suma (resta) como:

$(f \pm g)x= (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_o \pm b_o)$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=x^3 – 3x^2 + 5x - 3$ y $g(X)=3x^3 – 5x^2 – 7x + 7$, entonces:

a. $(f + g)x=4x^3 – 8x^2 – 2x + 4$

b. $(f - g)x=-2x^3 + 2x^2 + 5x - 10$

<u>Definición 33:</u> Sean $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...... + a_o$ y $g(x)=b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_o$ se define la multiplicación como:

$(f.g)x=a_ob_o + (a_ob_1 + a_1b_o)x + (a_ob_2 + a_1b_1 + a_2b_o)x^2 + ... + a_nb_nx^{m+n}$

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=x^3 – 3x^2 + 5x -3$ y $g(x)=3x + 3$, entonces:

$(f.g)x=(3x + 3)(x^3 – 3x^2 + 5x - 3) \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 15x – 9x^2 + 3x^3 – 9x +15x^2 – 6x^3 + 3x^4 \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 6x + 6x^2 – 6x^3 + 3x^4$

Resolviendo por la fórmula tenemos:

1º. Hallamos el grado x del polinomio producto, grado (f.g)x=grado f(x) + grado g(x)=3 + 1=4

2º. Ubicamos los coeficientes de los polinomios f(x) y g(x): Coeficientes de f(x): a_o=-3, a_1=5, a_2=-3, a_3=1, coeficientes de g(x): b_o=3, b_1=3

3º. Hallamos los productos de los coeficientes distintos de cero: a_ob_o=-9, a_ob_1=-9, a_1b_o=15, a_1b_1=15, a_2b_o=-9, a_2b_1=9, a_3b_o=3, a_3b_1=9

4º. Sustituimos estos productos en la fórmula:

$(f.g)x=-9 + (-9 + 15)x + (-9 +15)x^2 + (-9 + 3)x^3 + 3x^4 \Rightarrow$

$(f.g)x=-9 + 6x + 6x^2 – 6x^3 + 3x^4$

<u>Definición 34:</u> Dados dos polinomios f(x) y g(x), llamamos <u>*Cociente*</u> de ambos a un polinomio h(x), tal que, f(x)=g(x)h(x), nada se puede afirmar sobre la existencia de este polinomio, pero si existe, decimos que f(x) es <u>*Divisible*</u> por g(x), o que g(x) es <u>*Divisor*</u> de f(x) y escribimos $\frac{f(x)}{g(x)}$ que se lee "g(x) <u>*Divide*</u> a f(x).

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \Rightarrow f(x)=x^2 + x + 1$, pues $x^3 - 1=(x - 1)(x^2 + x + 1)$

<u>Definición 35:</u> La división de polinomios con coeficientes <u>*Enteros*</u> solamente es posible en ciertos casos especiales. Dados dos polinomios f y g, la división entera de f por g consiste en determinar dos polinomios h y r con las condiciones siguientes: f=g.h + r, con el grado r< grado de g.

La determinación de los coeficientes del cociente h y el resto r se hace de la siguiente manera: particularizando el caso: el dividendo sea de tercer grado y el divisor sea de primer grado, lo que no quita generalidad a la demostración, ejecutamos el siguiente desarrollo:

$$
\begin{array}{r|l}
a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o & b_1x + b_o = b_1(x + \frac{b_0}{b_1}) = b_1(x - c_o) \\
\cline{2-2}
\underline{-a_3x^3 + c_1x^2} & a_3x^2 + c_2x + c_4 \\
c_2x^2 & \\
\underline{-c_2x^2 + c_3x} & c_1 = a_3c_o \\
c_4x & c_2 = a_2 + c_1 \\
\underline{-c_4x + c_5} & c_3 = c_oc_2 \\
r & c_4 = a_1 + c_3 \\
 & c_5 = c_o + c_4 \\
 & r = a_o + c_5
\end{array}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 + x^2 - x + \frac{3}{2} & 2x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-6x^3 + 3x^2} \phantom{- x + \frac{3}{2}} & 3x^2 + 2x + \frac{1}{2} \\
4x^2 \phantom{- x + \frac{3}{2}} & \\
\underline{-4x^2 + 2x} \phantom{+ \frac{3}{2}} & h(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{2} \\
x \phantom{+ \frac{3}{2}} & \\
\underline{-x + \frac{1}{2}} & r = 2 \\
2 &
\end{array}
$$

Definición 36: **Regla de Ruffini: Sea $a \in Q$. Vamos a estudiar la división de un polinomio de Q(x) por el binomio x - a. Particularizando para el caso en que el dividendo sea de tercer grado, lo que no quita generalidad a la demostración, ejecutamos el siguiente desarrollo:**

$\frac{Q(x)}{x-a} = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x-a}$**, por la regla de Ruffini tenemos:**

$$\begin{array}{c|cccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_o \\ & & & & \\ a & & aa_3 & ac_1 & ac_2 \\ \hline & a_3 & c_1 & c_2 & \boxed{r} \end{array}$$

Donde, $c_1=a_2 + aa_3$, $c_2=a_1 + ac_1$ y $r=a_0 + ac_2$

Para aplicar el método de Ruffini se seguirán los pasos siguientes:

1º. Se colocan los coeficientes de las variables del polinomio en forma decrecientes

2º. Se baja el primer cociente del dividendo que lo es también del cociente

3º. Se multiplica por a y se suma con a_2. Se obtiene así c_1. Se multiplica c_1 por a y se suma con a_1 se obtiene c_2 que se multiplica por a y se suma con a_o, resultando r.

<u>Observaciones:</u>

1. El cociente es un polinomio en x cuyo grado es inferior en una cantidad al del dividendo.

2. El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo.

3. Cada coeficiente, excepto el primero, es igual al correspondiente del dividendo más el anterior del cociente multiplicado por a.

Estas tres observaciones constituyen <u>La Regla de Ruffini</u> y los coeficientes del cociente y el resto se obtienen por medio del esquema anterior.

Ejemplo: Dividir: $x^3 - 2x + 1$ por $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{5}} \end{array}$$

Como la división se define como:

$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{r(x)}{N(x)}$ o N(x)=C(x)D(x) + r(x), donde N(x) recibe el nombre de dividendo o numerador, C(x) cociente, D(x) divisor o denominador y r(x) resto o residuo, se tiene que:

$x^3 - 2x + 1 = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 + 2x + 2 + \frac{5}{x^3 - 2x + 1}$, e,i, el cociente es $x^2 + 2x + 2$, el resto es 5

Para factorizar o hallar las raíces de un polinomio por el método de Ruffini, se procede como en el caso anterior, pero las posibles raíces enteras las encontramos descomponiendo en factores primos a a_o, es decir, todos los divisores de a_o.

Ejemplo: Factorizar: $f(x)=x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

Solución: **Primero colocamos los coeficientes de las variables y el término independiente, tomando en cuenta que si no aparece una potencia de la variable el coeficiente es cero. Las posibles raíces enteras de f son: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±9, ±12, ±36.**

	1	0	-14	0	49	0	-36
1		1	1	-13	-13	36	36
	1	1	-13	-13	36	36	0
-1		-1	0	13	0	-36	
	1	0	-13	0	36	0	
2		2	4	-18	-36		
	1	2	-9	-18	0		
-2		-2	0	18			
	1	0	-9	0			
3		3	9				
	1	3	0				

Luego las raíces del polinomio son: ±1, ±2, ±3 y $\therefore$,

$$x^6 – 14x^4 + 49x^2 - 36=(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3).$$

Definición 37: ***Coeficientes indeterminados o Fracciones Parciales***

Por definición, una función algebraica racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Teóricamente, toda función racional puede expresarse en términos de funciones elementales. Con frecuencia el método de fracciones parciales es útil para transformar la fracción racional en una suma de funciones más sencillas. El método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, esto es, aquellas en la que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador. Cualquier fracción impropia, e.i. aquella en la cual el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador, puede transformarse, por división, en la suma de un polinomio más una función propia. En este curso estudiaremos un sólo caso de las fracciones parciales ya que los otros son para niveles más avanzados.

La función H(x) puede ser expresada como la razón de dos polinomios f(x) y g(x). Considere que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendente de la potencia de x, e.i.

$$H(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \text{..............} + a_1 x - a_o}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \text{.............} + b_1 x + b_0}$$

En donde a_0, a_1, ..., $a_m \in \Re$ y b_0, b_1, ..., $b_n \in \Re$, el denominador g(x) puede factorizarse en factores de primer orden y con coeficientes reales de la manera:

$$H(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \text{ .... } (x - x_n)}$$

En donde x_1, x_2, ... x_n son las n raíces de la ecuación g(x)=0 y son llamadas ceros del polinomio g(x). H(x) puede ser entonces expresado como una serie de fracciones, e,i, $H(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \text{........} + \frac{A_n}{x - x_n}$, el caso que vamos a estudiar aquí es que las raíces x_1, x_2, ..., x_n son distintas y el grado de g(x) es menor que el grado de f(x), Las A'es de la ecuación anterior son constantes y llamadas los residuos de H(x). Para determinar el valor de estos residuos, se aplica la siguiente fórmula:

$A_1=(x - x_1)H(x_1)$; $A_2=(x - x_2)H(x_2)$; ...... $A_n=(x - x_n)H(x_n)$

<u>Ejemplo:</u> Descomponer en fracciones parciales:

a. $H(X)=\dfrac{3x+5}{x^2+4x+3}$ **Aplicando Ruffini para factorizar H(x)=x^2 + 5x + 3**

las posibles raíces son: ±1, ±3

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 3 \\ -1 & & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$H(x)=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$ $\Rightarrow$ $H(x)=\dfrac{A_1}{x+1}+\dfrac{A_2}{x+3}$, **donde:**

$A_1=(x+1)H(-1)=\dfrac{3(-1)+5}{(-1)+3}=1;$ $A_2=(x+3)H(-3)\dfrac{3(-3)+5}{(-3)+1}=2$ $\Rightarrow$

$H(x)=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}=\Rightarrow H(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}$

b. $H(x)=\dfrac{3x^3+5x-7}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$, **Aplicando Ruffini para factorizar**

a H(x)=x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6, las posibles raíces son: ±1, ±2, ±3, ±6

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ 1 & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & -6 & & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Luego H(x)=(x -1)(x + 1)(x + 2)(x + 3) y $H(x)=\dfrac{3x^3+5x-7}{(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow$ $H(x)=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{x+1}+\dfrac{A_3}{x+2}+\dfrac{A_4}{x+3}$, **donde:**

$$A1=(x-1)H(1)=\frac{3(1)^3+5(1)-7}{(1+1)(1+2)(1+3)}=\frac{1}{24};$$

$$A2=(x+1)H(-1)\frac{3(-1)^3+5(-1)-7}{(-1-1)(-1+2)(-1+3)}=-\frac{15}{4};$$

$$A3=(x+2)H(-2)\frac{3(-2)^3+5(-2)-7}{(-2-1)(-2+1)(-2+3)}=\frac{41}{3};$$

$A4=(x+3)H(-3)=\dfrac{3(-3)^3+5(-3)-7}{(-3-1)(-3+1)(-3+2)}=\dfrac{103}{8}$, ∴, **tenemos que**

$$H(x)=\frac{1}{24(x-1)}-\frac{15}{4(x+1)}+\frac{41}{3(x+2)}+\frac{103}{8(x+3)}$$

<u>Definición 38:</u> Factorización de la forma: $(x \pm y)^n$

$$(x \pm y)^2=x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(x \pm y)^3=x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

$$(x \pm y)^4=x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$$

:

$$(x \pm y)^n=\binom{n}{0}x^n \pm \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{1}x^{n-2}y^2 \pm \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \binom{n}{n}y^n,$$

donde $\binom{m}{n}=\dfrac{m!}{n(m-n)!}$**, número combinatorio, los cuales se pueden calcular con la ayuda del triangulo de Pascal**

$$\begin{array}{ccc} & \binom{n}{0} & \\ \binom{n}{0} & & \binom{n}{0} \end{array}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{4} \quad \binom{n}{6} \quad \binom{n}{4} \quad \binom{n}{0}$$

Este triangulo también toma la forma:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

<u>Ejemplo 43:</u> Factorizar:

a. $f(x)=(x + 2)^7$

<u>Solución:</u> Desarrollamos el triangulo de pascal hasta llegar al séptimo término, por lo tanto: las potencia del primer miembro, es decir, de las x, decrecen desde n=7, hasta n=0 y las potencia del segundo término es decir, el 2, va creciendo desde n=0, hasta n=7 y los coeficientes se obtienen por medio del triángulo de Pascal.

$$f(x)=x^7 + 14x^6y + 84x^5y^2 + 280x^4y^3 + 560x^3y^4 + 672x^2y^5 + 448x^2y^6 + 128y^7$$

b. **Factorizar:** $f(x)=(x - 1)^8$

<u>Solución:</u> Se aplicaran los mismos paso que se aplico en el ejemplo anterior, desarrollamos el triángulo de pascal hasta llegar al octavo término, y colocando las potencias al primer miembro en forma descendente y al segundo miembro del binomio en forma ascendente, $\therefore$,

$f(x)=x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 – 8xy^7 + y^7$

Definición 39: **Factorización de la forma: $x^n - y^n$:**

$x^2 - y^2=(x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3=(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^4 - y^4=(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

$\vdots \qquad \vdots$

$x^n - y^n=(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$

Ejemplo: **Factorizar: $f(x)=x^4 – 16 \Rightarrow f(x)=x^4 - 2^4$, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: $f(x)=x^4 - 2^4=(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$.**

Definición 40: **Factorización de la forma: $x^n + y^n$:**

$x^2 + y^2=x^2 + 2xy + y^2 – 2xy \Rightarrow x^2 + y^2=(x + y)^2 – 2xy \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x + y)^2 - (\sqrt{2xy})^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x + y - \sqrt{2xy})(x + y + \sqrt{2xy}) \Rightarrow$

$x^2 + y^2=(x - \sqrt{2xy} + y)(x + \sqrt{2xy} + y)$

$x^3 + y^3=(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + y^4=(x^2)^2 + \sqrt{2}\ (y^2)^2 - 2\,x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 + y^2)^2 - 2\,x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2})^2\,x^2y^2 \Rightarrow$

$x^4 + y^4=(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)$

:   :

$$x^n + y^n = \begin{cases} (x^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}})(x^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}}) \text{ si n es par} \\ \\ (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots.. + y^{n-1}) \text{ si n es impar} \end{cases}$$

Ejemplo: **Factorizar: a) $f(x)=x^4 + 16 \Rightarrow f(x)=x^4 + 2^4$, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: $x^4 + 2^4=(x^2 - 2\sqrt{x} + 4)(x^2 + 2\sqrt{x} + 4)$**

b. $f(x)=x^5 + 32 \Rightarrow f(x)=x^5 + 2^5$, aplicando la formula para y=2, tenemos:

$$x^5 + 2^5=(x - 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x +16)$$

Definición 41: **Factorización de la forma $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$**

$$x - y = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-1}y} + \sqrt[4]{x^{n-2}y^2} + \ldots\ldots\ldots. + \sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Ejemplo: **Factorizar: $f(x)=\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}$, aplicando la fórmula**

para y=2, tenemos: f(x)= $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2} = \dfrac{x-2}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4y^2} + \sqrt[4]{8}}$

<u>Definición 42:</u> Factorización de la forma $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

$$x - y = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} - \sqrt[4]{y^3}}$$

:

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-1}y} + \sqrt[4]{x^{n-2}y^2} - \dots\dots\dots - \sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

<u>Ejemplo 46:</u> Factorizar: f(x)= $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2}$ **, aplicando la fórmula para y=2, tenemos: f(x)=** $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2} = \dfrac{x-2}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4y^2} - \sqrt[4]{8}}$

<u>Gráfica aproximada de las funciones polinómicas de la forma:</u>

f(x)=$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_o$**. Para graficar una función polinómica seguiremos los siguientes pasos:**

1. **Se halla el corte con el eje Y, e.i. x=0 ⇒ f(x)=**a_0
2. **Buscamos el corte con el eje X, e.i. cuando y=0 ⇒ f(x)=0, factorizamos f(x) aplicando el método de Ruffini, e.i.**

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_o=a_n(x - x_o)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n)$

3. Ubicamos en los ejes de coordenadas las raíces de f(x).

4. Estudiamos el comportamiento de la gráfica, entre cada par de puntos donde la función corta al eje X. Como la función f(x) es continua y su gráfica es una curva continua, no hay ninguna forma de que f(x) pueda cambiar de signo entre dos puntos de intersección con el eje X, si $\alpha \in (x_o, x_1)$, con x_o y x_1 raíces de f(x) y $f(\alpha)>0$, entonces, la función es *<u>creciente</u>* en ese intervalo y en consecuencia esta por arriba, si $f(\alpha)<0$, entonces la función es *<u>decreciente</u>* y por lo tanto, esta por debajo.

5. Estudiamos la función cuando crece o decrece indefinidamente, es decir, x → ±∞, la función puede crecer o decrecer indefinidamente, veamos esto geométricamente:

1º. Cuando la variable x decrece indefinidamente, la función también decrece indefinidamente, es decir, ($x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$), ilustremos esto geométricamente,

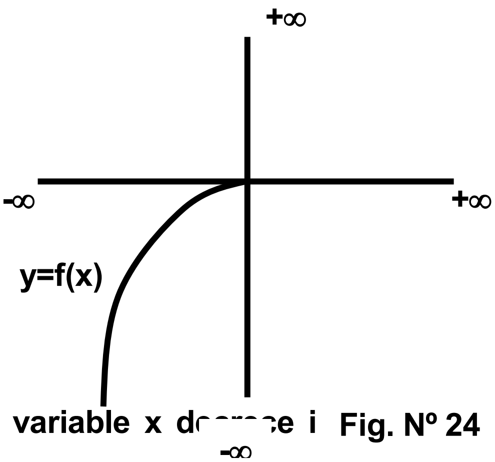


Fig. Nº 24

2º. Cuando la variable x decrece i la función y crece indefinidamente, es decir, ($x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$), ilustremos esto

geométricamente,

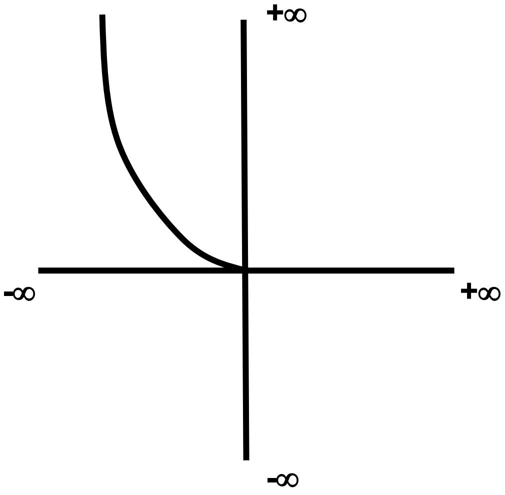


Fig. Nº 25

3º. Cuando la variable x crece indefinidamente, la función y decrece indefinidamente, es decir, (x → +∞ ⇒ f(x) → -∞), ilustremos esto geométricamente,

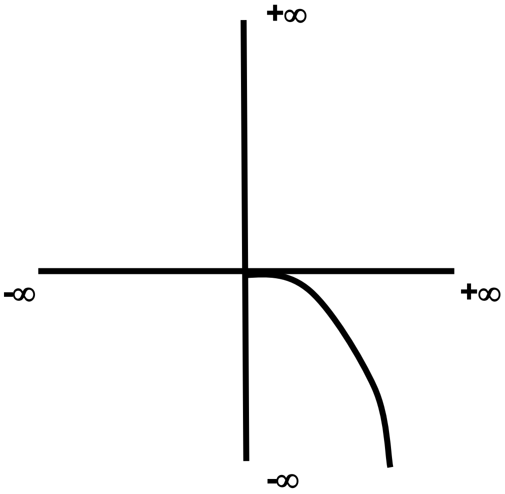


Fig. Nº 26

4º. Cuando la variable x crece indefinidamente, la función y también crece indefinidamente, es decir, (x → +∞ ⇒ f(x) → +∞), ilustremos esto geométricamente,

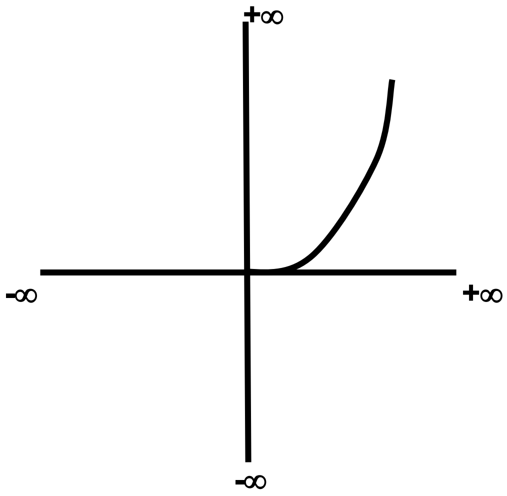


Fig. Nº 27

<u>Nota:</u> Para ver el comportamiento de la función cuando x crece o decrece indefinidamente, solamente sustituimos el valor de ±∞, en la variable de mayor grado, ejemplo $f(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_o$, cuando $x \to +\infty$, entonces $f(+\infty)=a_n(+\infty)^n \Rightarrow f(x)=+\infty$, y $f(-\infty)=a_n(-\infty)^n$, será $f(x)=-\infty$ si n es impar y $f(x)=\infty$ si n es par.

6. Trazamos la gráfica.

<u>Ejemplo 47:</u> Graficar la función $f(x)=x^3 - 3x^2 - x + 3$

<u>Solución:</u> Aplicaremos los pasos descritos anteriormente:

1º. Hallamos el corte con el eje Y, es decir, $a_o=3$, luego corta al eje Y en el punto (0, 3)

2º. Hallamos los cortes con el eje X, aplicamos Ruffini para factorizar f(x)

3º.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -1 & 3 \\
-1 & & -1 & 4 & -3 \\
\hline
 & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Luego $f(x)=x^3 – 3x^2 - x + 3=(x - 1)(x + 1)(x - 3)$, es decir, la función f corta al eje X en los puntos: (-1, 0), (1, 0) y (3, 0).

4º. Estudiamos la función entre cada par de puntos donde la función corta al eje X: entre los puntos (-1, 0) y (1, 0), escogemos $\alpha=0$, ya que $0\in(-1, 1)$, $f(0)=3$, $\therefore$, en este intervalo la función es creciente, e.i. esta por arriba, entre los puntos (1, 0) y (3, 0), escogemos $\alpha=2$, ya que $2\in(1, 3)$, $f(2)=(2)^3 - 3(2)^2 - 2 + 3=-3$, $\therefore$, en este intervalo la función es decreciente, e.i. esta por abajo.

5º. Vemos que pasa cuando x crece o decrece indefinidamente, $x \rightarrow -\infty$, implica que $f(-\infty)=(-\infty)^3 \Rightarrow f(-\infty)=-\infty$, es decir la función decrece indefinidamente, $x \rightarrow +\infty$, implica que $f(+\infty)=(+\infty)^3 \Rightarrow f(+\infty)=+\infty$, e.i. la función crece indefinidamente.

6º. Realizamos la gráfica con los datos obtenidos.

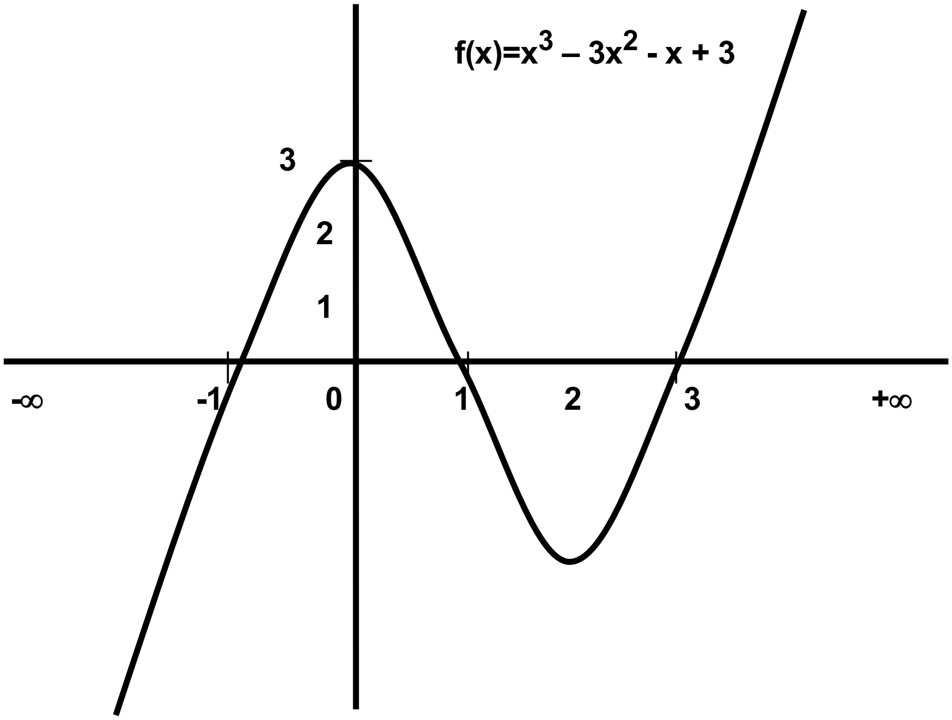


Fig. N° 28

Ejemplo 48: Graficar la función $f(x)=x^3 - 9x + 1$

Solución: Aplicaremos los pasos descritos para realizar la grafica de una función:

1º. Hallamos el corte con el eje Y, e.i. $a_o= 1$, luego corta al eje Y en el punto (0, 1)

2º. Hallamos los cortes con el eje X, como la función f(x), no tiene raíces enteras, trasladamos la función, e.i. $f(x)=g(x) + 1$, donde $g(x)=x^3 - 9x$, factorizando $g(x)=x(x - 3)(x + 3)$, la función g(x) corta al eje X en los puntos: (-3, 0), (0, 0) y (3, 0)

3º. Estudiamos la función entre cada par de puntos donde la función corta al eje X: entre los puntos (-3, 0) y (0, 0), escogemos $\alpha=-1$,

ya que -1∈(-3, 0), f(-1)=(-1)^3 - 9(-1)=10, ∴, en este intervalo la función es creciente, es decir, esta por arriba, entre los puntos (0, 0) y (3, 0), escogemos α=2, ya que 2∈(1, 3), f(2)=(2)^3 - 9(2)^2=-10 , ∴, en este intervalo la función es decreciente, e.i. esta por abajo.

4º. Vemos que pasa cuando x crece o decrece indefinidamente, x → -∞, implica que f(-∞)=(-∞)^3 ⇒ f(-∞)=-∞, e.i. la función decrece indefinidamente, x → +∞, implica que f(+∞)=(+∞)^3 ⇒ f(+∞)=+∞, e.i. la función crece indefinidamente.

5º. Realizamos la gráfica de g(x) con los datos obtenidos

6º. Gráfica

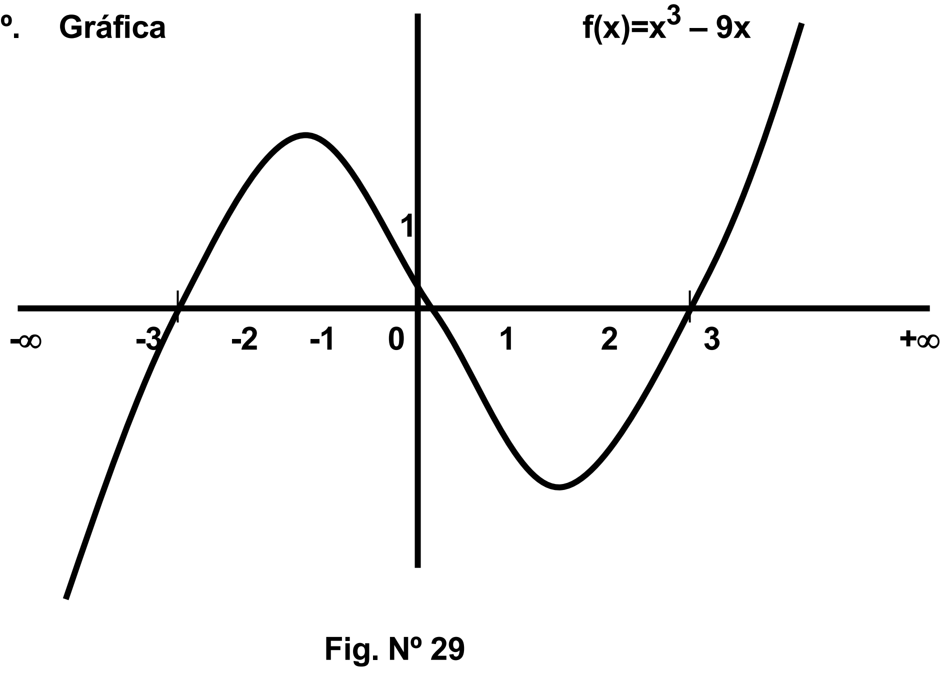


Fig. Nº 29

Trasladando verticalmente g(x) una cantidad hacia arriba obtenemos f(x)

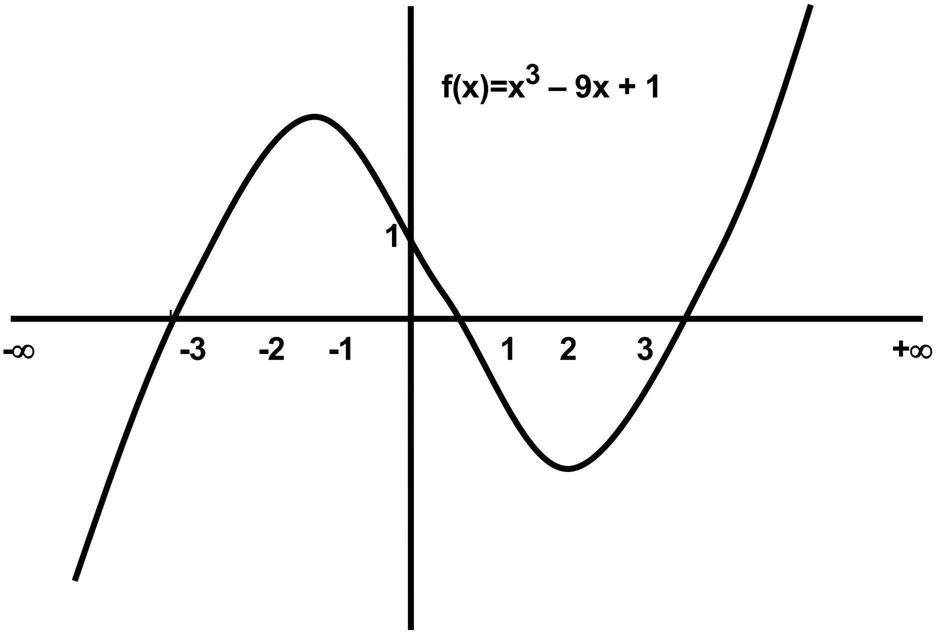


Fig. Nº 30

Definición 43: **Sea $f:\Re \rightarrow \Re^{+}/f(x)=a^{x}$, $\forall x \in \Re$ y $\forall a \in \Re^{+}$, $a \neq 1$, f(x) recibe el nombre de *Función Exponencial*, donde *a* recibe el nombre de base y x de exponente, y f(x) posee las siguientes características:**

1. **La función esta definida en todo el conjunto de los números reales es decir, Domf=$\Re$**
2. **El recorrido de la función son los reales positivos Recf=$\Re^{+}$**
3. **Si $a \in (1,+\infty)$, la función es estrictamente creciente "una función f es *creciente* si $\forall x_i \in$Domf y $\forall i \in Z^{+}$ se tiene que $x_i < x_{i+1} \Rightarrow f(x_i) < f(x_{i+1})$"**
4. **Si $a \in (0,1)$, la función es estrictamente decreciente "una función f es *decreciente* si $\forall x_i \in$Domf y $\forall i \in Z^{+}$ se tiene que $x_i > x_{i+1} \Rightarrow f(x_i) > f(x_{i+1})$"**
5. **La función exponencial es inyectiva, ya que $f(x')=a^{x'}=a^{x} \Rightarrow x'=x$**

6. La función exponencial no es sobreyectiva, ya que Recf=$\Re^+$, no contiene al conjunto de los números reales.

<u>Propiedades de la función exponencial:</u> ver propiedades de los números reales.

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> f:$\Re \rightarrow \Re^+$/f(x)=a^x, con a$\in$(1, 0), hallamos el grafo de f(x)

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2

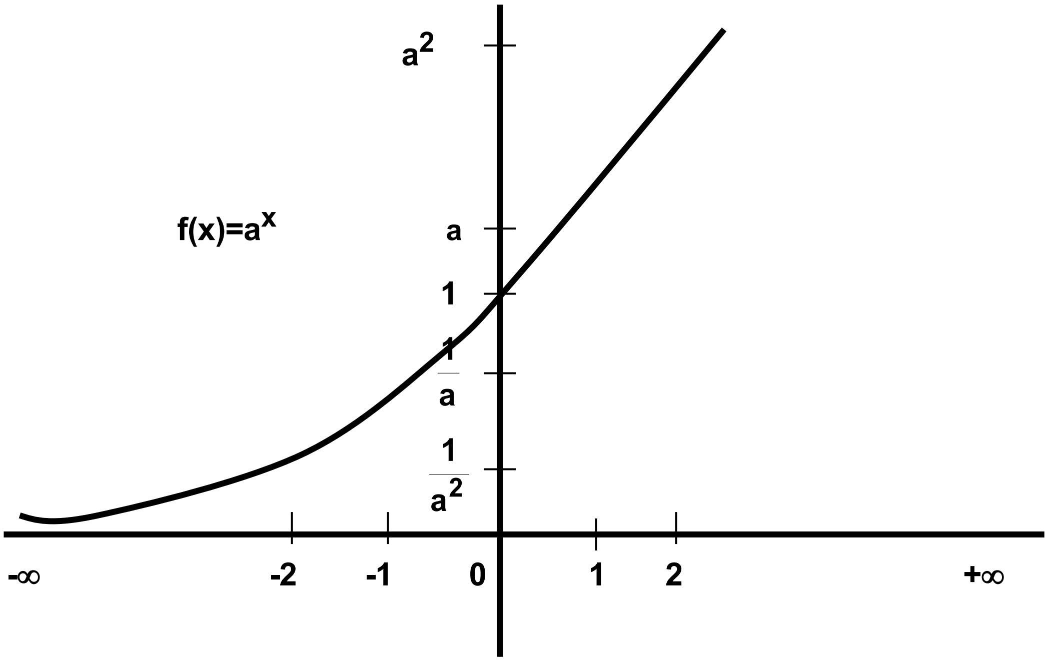


Fig. Nº 31

<u>Ejemplo:</u> Graficar f(x)=3^x

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

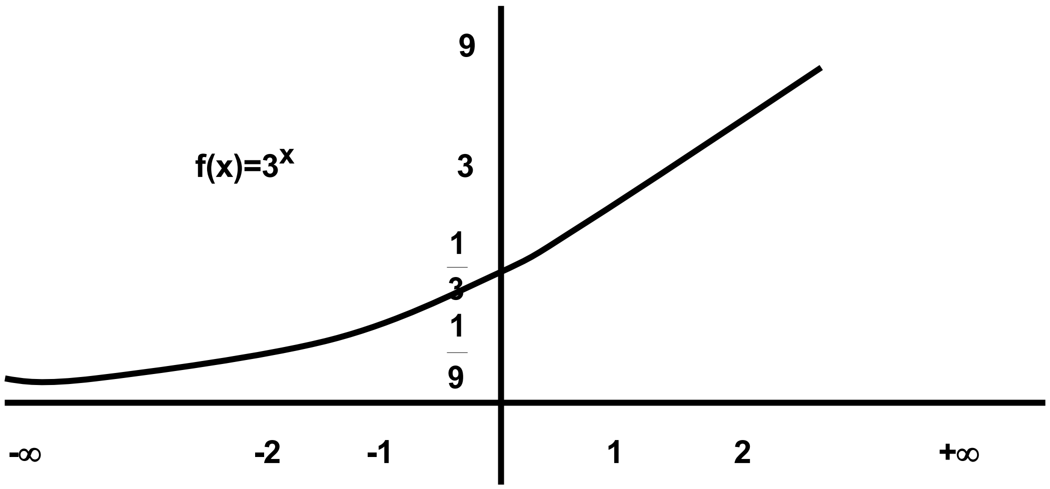


Fig. Nº 32

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> f:ℜ → $ℜ^+$/f(x)=a^x, con a∈(0,1), hallamos el grafo de f(x)

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	a^2	a	1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^2}$

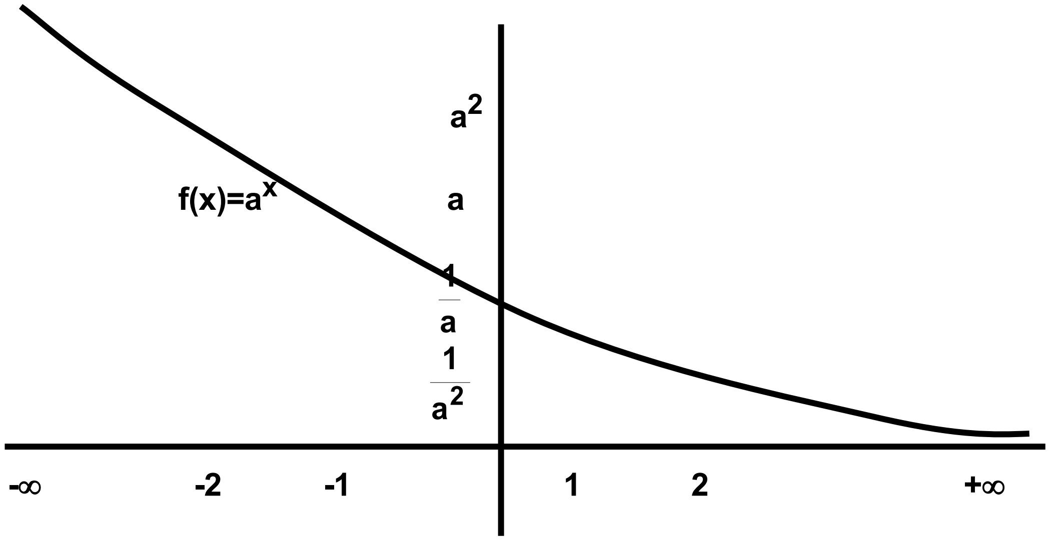


Fig. Nº 33

Ejemplo 50: Graficar f(x)=$\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

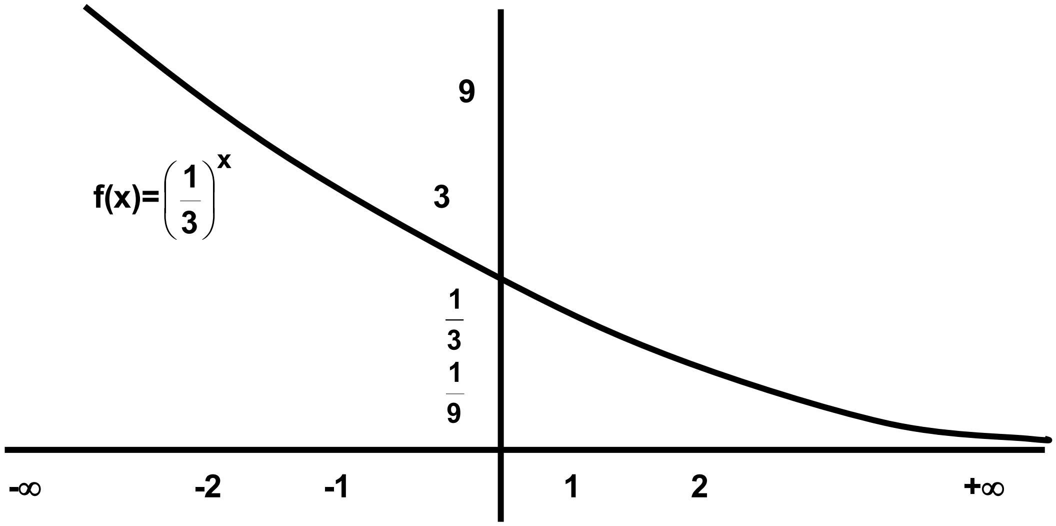


Fig. Nº 34

Si la base es el número $e=(1+\frac{1}{n})^n$ cuando n → +∞, e.i. cuando n crece indefinidamente, e=2,71828..., llamado el número neperiano en honor a Nepper su descubridor. La función $f(x)=e^{kx}$, es un caso particular de la función exponencial de base e.

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> $f:\Re \to \Re^+/f(x)=e^{kx}$, $\forall k\in Z^+$ hallamos el grafo de f(x)

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	e^{-2k}	e^{-k}	1	e^k	e^{2k}

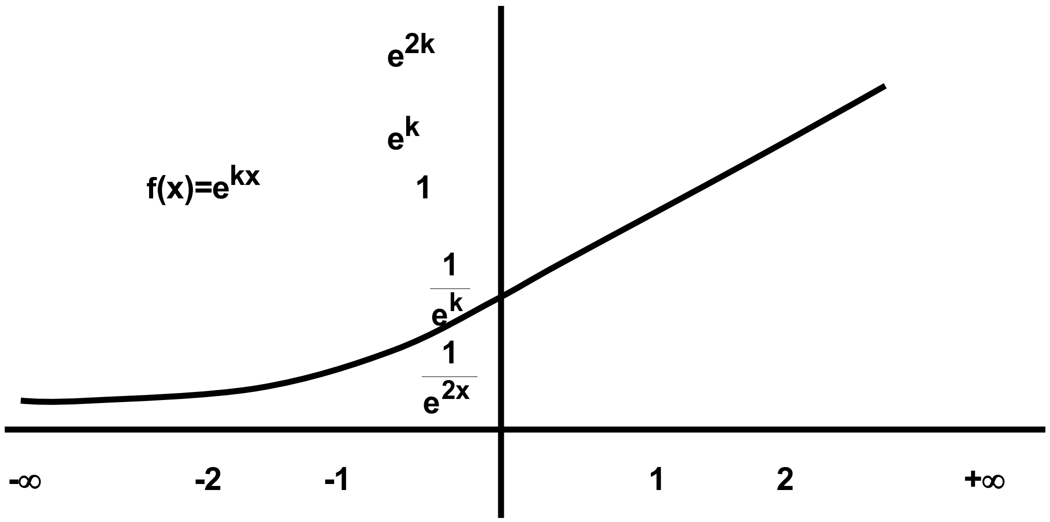


Fig. Nº 35

<u>Gráfica de la función exponencial.</u> **$f:\Re \rightarrow \Re^+/f(x)=e^{kx}, \forall k\in Z^-$ hallamos el grafo de f(x)**

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	e^{-2k}	e^{-k}	1	e^k	e^{2k}

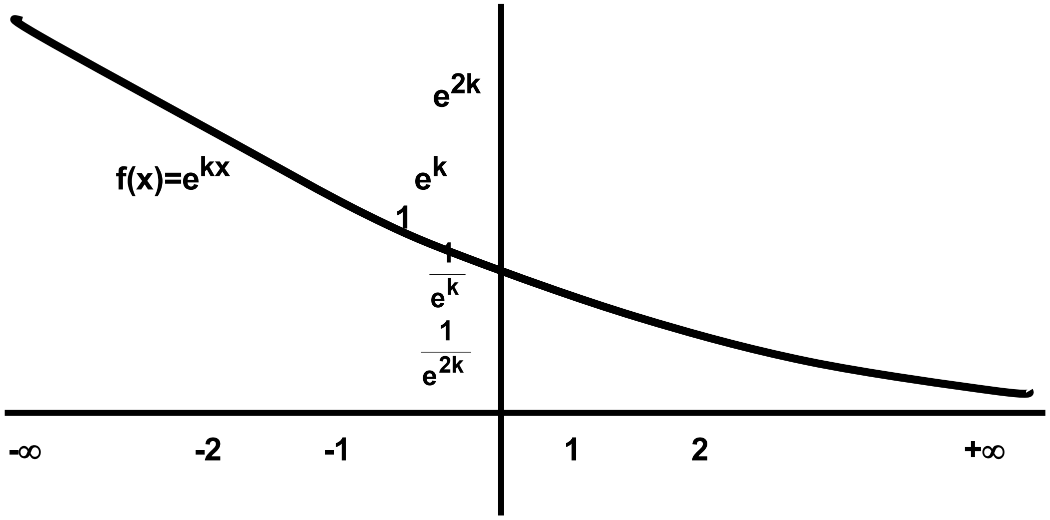


Fig. Nº 36

Definición 44: Se resuelve una ecuación exponencial, hallando el valor de la variable independiente x, que satisface a la variable dependiente f(x).

Ejemplo Hallar el valor de x, que satisface la ecuación:

a. $3^x=81$, en este caso la variable dependiente f(x)=81, como $81=3^4$, la ecuación nos queda $3^x=3^4$, lo que implica que x=4.

b) $5^{x^2-9x+12}=\frac{1}{25}$, en este caso la variable dependiente f(x)=$\frac{1}{25}$ $\Rightarrow$

$5^{x^2-9x+12}=5^{-2} \Rightarrow x^2 - 9x + 12=-2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0$

$\Rightarrow$ x=2 o x=7

Definición 45: Se llama ***Función Logarítmica*** a la inversa de la función exponencial, definida por la expresión $y=\lg_a x$ o $f(x)=\{(x,y)/y=\lg_a x \text{ y } 0<x<\infty,\}$ y f(x) posee las siguientes características:

1. La función esta definida el conjunto de los números reales positivos e.i. Domf=$\Re^+$
2. El recorrido de la función son los reales Recf=$\Re$
3. Si $a\in(1,+\infty)$, la función es estrictamente decreciente
4. Si $a\in(0,1)$, la función es estrictamente creciente
5. La función logarítmica no es inyectiva, ya que $f(x')=a^{x'}=a^x \Rightarrow x'\neq x$
6. La función logarítmica es sobreyectiva, ya que Recf=$\Re$, contiene al conjunto de los números reales.

Propiedades de la función logarítmica: ver propiedades de los números reales.

Gráfica de la función logarítmica. $f:\Re^{+} \rightarrow \Re / f(x)=lg_{a}x$, con $|a|<1$, hallamos el grafo de f(x)

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2
f(x)	-2	-1	0	1	2

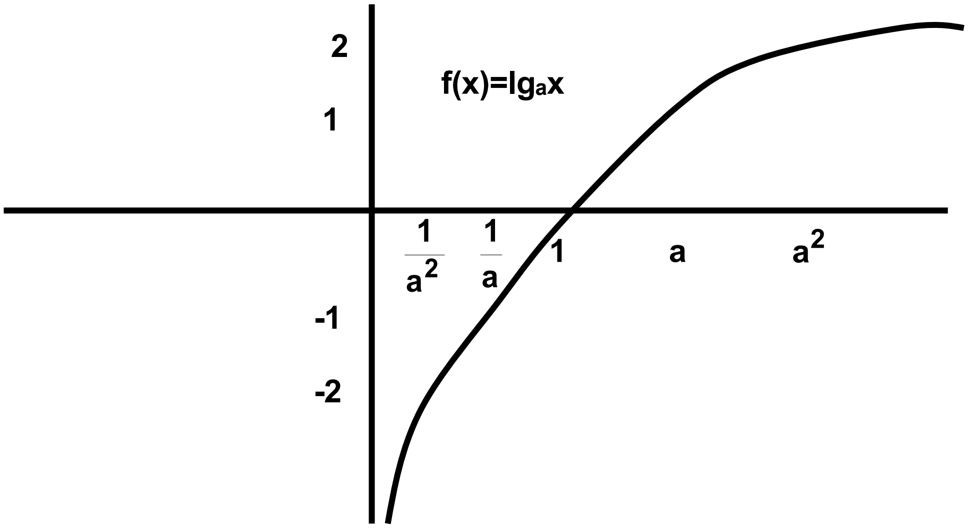


Fig. Nº 37

Gráfica de la función logarítmica. $f:\Re^{+} \rightarrow \Re / f(x)=lg_{a}x$, con $|a|>1$, hallamos el grafo de f(x)

x	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2
f(x)	-2	-1	0	1	2

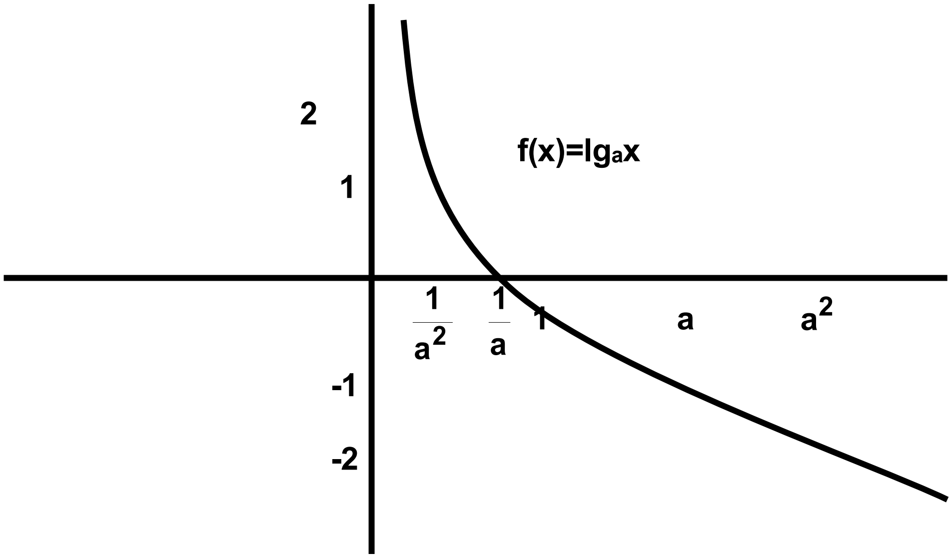


Fig. Nº 38

<u>Gráfica de la función logaritmo natural</u> f:$\Re \rightarrow \Re^+$/f(x)=lnx, $\forall k \in Z^+$ hallamos el grafo de f(x)

x	**$\frac{1}{e^2}$**	**$\frac{1}{e}$**	**1**	**a**	**e^2**
f(x)	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**

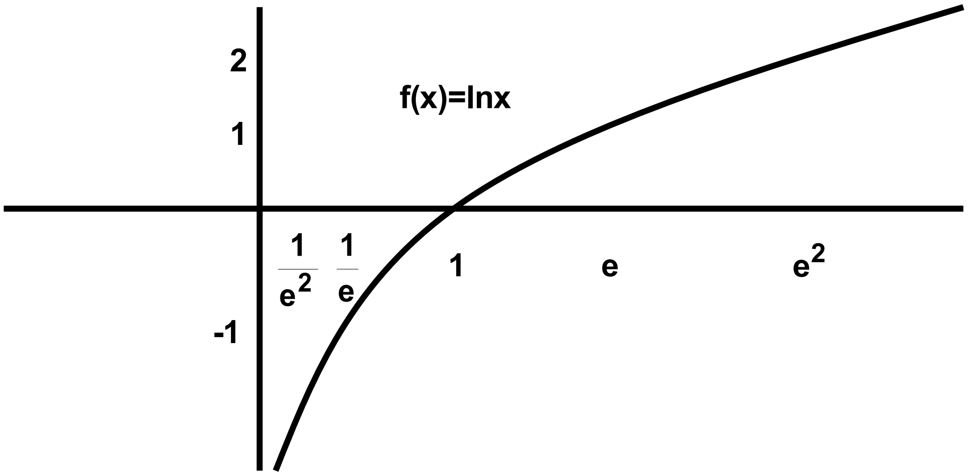


Fig. Nº 39

<u>Ejemplo 52:</u> Graficar f(x)=lg$_3$x

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
f(x)	-2	-1	0	1	2

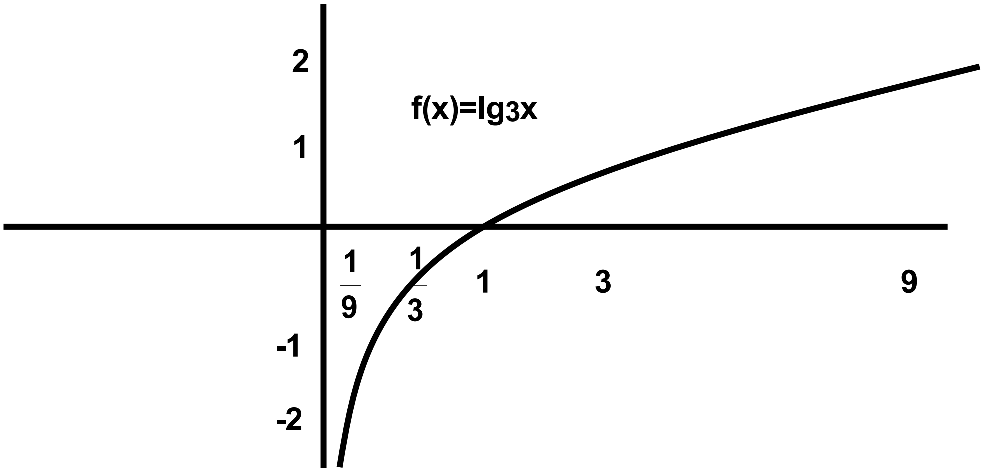


Fig. Nº 40

Ejemplo 53: Graficar $f(x)=lg_{\frac{1}{3}}x$

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
f(x)	-2	-1	0	1	2

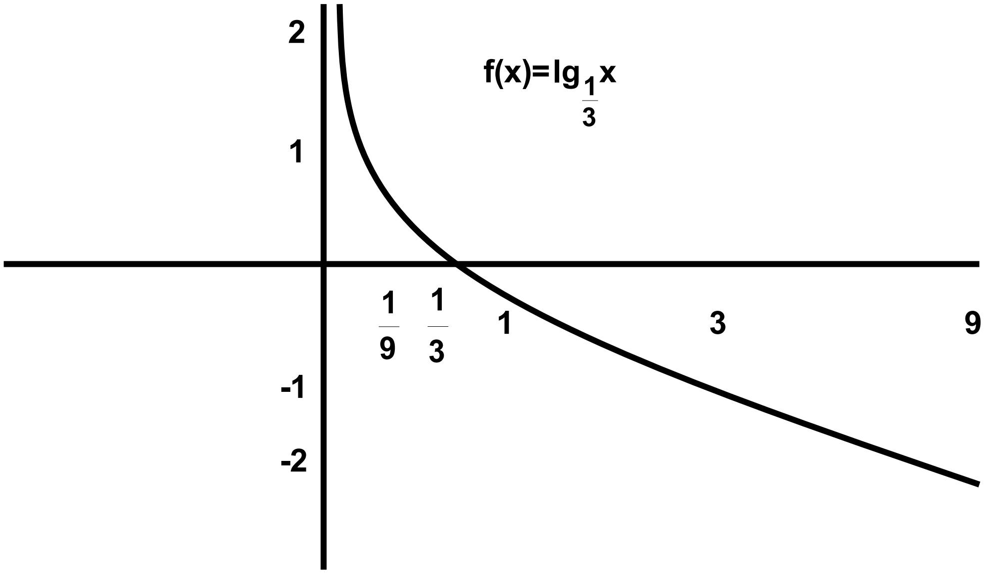


Fig. Nº 41

Definición 46: Se define una ***Ecuación Logarítmica*** como aquella que implica el logaritmo de una expresión que contiene una incógnita.

Ejemplo 54: Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\lg(2x+1)=\lg(x + 6)$

Solución: aplicando a ambos miembros la exponencial de base 10 se tiene: $10^{\lg(2x+1)} = 10^{\lg(x+6)} \Rightarrow 2x + 1=x + 6 \Rightarrow x=5$

b) $\lg x + \lg 3=\lg 5$

Solución: Pasando al miembro de la derecha el logaritmo en base 3 y luego aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos: $\lg x=\lg 5 - \lg 3$ $\Rightarrow \lg x=\lg\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

c) $\ln x - \ln(x+1)=\ln 4$

Solución: Aplicando las propiedades de los logaritmos y aplicando a ambos miembro la exponencial de base e se tiene: $\ln\frac{x}{x+1}=\ln 4 \Rightarrow$ $\frac{x}{x+1}=4 \Rightarrow x=4x + 4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$

d) $\lg_2 x + 3 = \lg_2\frac{2}{x}$

Solución: Aplicando las propiedades de los logaritmos y pasando las variables para el miembro izquierdo se tiene que: $\lg_2\frac{2}{x} - \lg_2 x = 3\lg_2 2 \Rightarrow \lg_2\frac{2}{x^2} = \lg_2 8 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$, como el dominio de los logaritmos son los reales positivos, entonces $x=\frac{1}{2}$

<u>Definición 47:</u> ***<u>Un ángulo</u>*** **consiste de dos semirrectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ con un punto común llamado vértice y una rotación que lleva la semirrecta $\overline{OA}$ sobre $\overline{OB}$. La rotación de un ángulo tiene una medida con signo. Frecuentemente hablamos de la medida de rotación de un ángulo como la medida del ángulo.**

<u>Definición 48:</u> Se dice que un ángulo es ***<u>Positivo</u>*** **si su rotación es en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.**

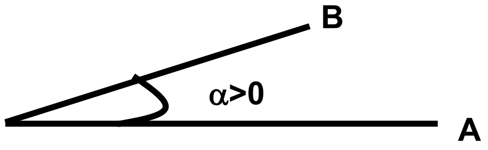


Fig. Nº 42

<u>Definición 49:</u> Se dice que un ángulo es ***<u>Negativo</u>*** **si su rotación es del mismo sentido al de las agujas del reloj.**

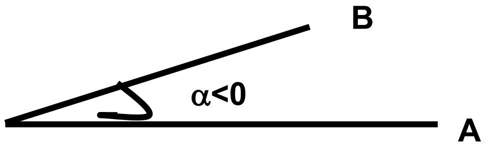


Fig. Nº 43

<u>Definición 50:</u> Podemos considerar la notación de ángulo de un sistema de coordenadas rectangulares. Tracemos una semirrecta h que coincide con el semi eje X positivo. Hagamos rotación con la semirrecta h formando un ángulo positivo con vértice en el origen de coordenadas. Esto es, con centro en el origen, rotemos la semirrecta h en el sentido contrario a la rotación de las agujas del reloj. Cuando h coincide por primera vez con el eje Y decimos que h forma un ángulo recto con el eje

positivo de la rotación. Si dividimos esta rotación en noventas pasos iguales, entonces cada uno de estos pasos constituyen la unidad de medida del ángulo y lo llamamos *Grado*

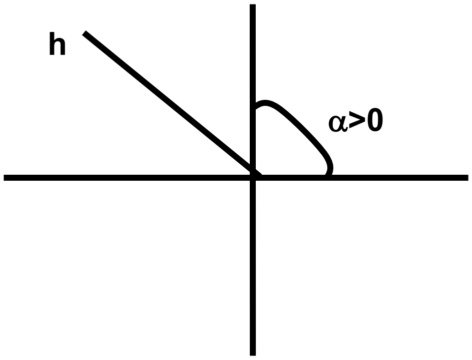


Fig. Nº 44

Existe otra unidad para la medición de ángulos, que es el *Radian*, Trazamos un círculo alrededor del origen, con radio igual a la unidad. Sea c la circunferencia de ese círculo. Giremos la semirrecta h desde el eje de las X positivo formando un ángulo con la circunferencia c antes y después de la rotación. Entonces medimos el ángulo por el arco de A y B. Como la longitud de la circunferencia c de un círculo de radio r es $2\pi r$, y como c tiene radio $r=1$, la relación completa viene medida por el número $2\pi=6.2831$…… Decimos que ese ángulo es 2π radianes. Por comparación con los grados podemos escribir: $360º=2\pi$ radianes $\Rightarrow$ 1 radian $\frac{360º}{2\pi}$ $\Rightarrow$ 1 radian=57,29577951….

En conclusión si nos dan la posición inicial $\overline{OA}$ y un ánguloα, se determina de manera única la posición final $\overline{OB}$. A α se le llama ángulo entre $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

Recíprocamente supongamos que se da la posición inicial $\overline{OA}$ y la posición final $\overline{OB}$. Podemos considerar varias rotaciones para llegar a la posición OB partiendo de la del lado OA, entonces el ángulo A o B nos queda determinado de manera única por $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. Sin embargo, si α es un ángulo entre $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, todos los otros se representan por: $\alpha + 2n\pi$ ($n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots..$)

Definición 51: Sea el círculo unidad, se define el *seno del ángulo α*, (senα) como la proyección sobre el eje de las X, de la misma manera se define el *coseno del ángulo α,* (cosα) como la proyección sobre el eje Y, a la *tangente del ángulo α* (tgα) como la razón de la función seno del ángulo α y la función coseno del ángulo α y se definen la *cosecante del ángulo α* (cscα), *la secante del ángulo α* (secα) y la *cotangente del ángulo α* (ctgα), como las inversas de las funciones seno del ángulo α, coseno del ángulo α y tangente del ángulo α respectivamente.

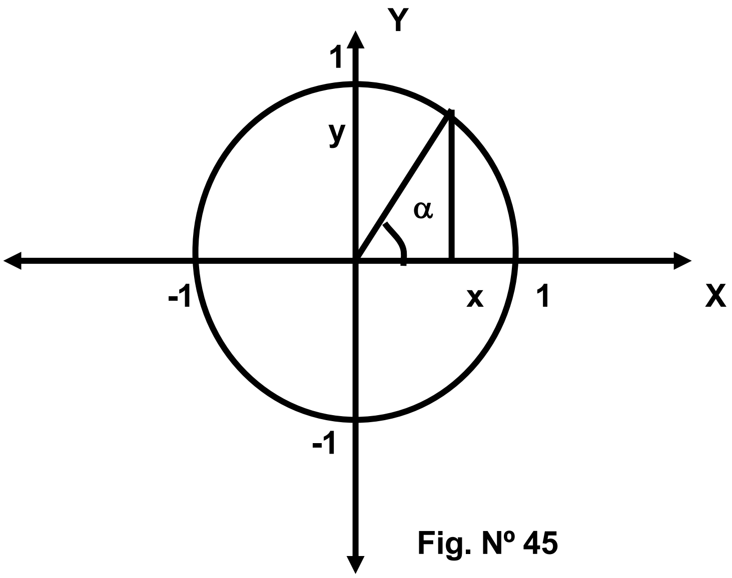
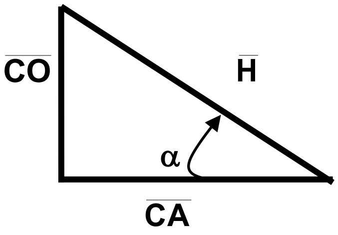


Fig. Nº 45

En otras palabras la función *__seno__* se define como la razón del cateto opuesto al ángulo α $\overline{CO}$ y la hipotenusa $\overline{H}$, senα=$\frac{\overline{CO}}{\overline{H}}$, la función *__coseno__* como la razón del cateto adyacente al ángulo α $\overline{CA}$ y la hipotenusa $\overline{H}$, cosα=$\frac{\overline{CA}}{\overline{H}}$, la función *__tangente__* como la razón del cateto opuesto al ángulo α $\overline{CO}$ y el cateto adyacente $\overline{CA}$, tgα=$\frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}$, la función *__cosecante__* como la razón de la hipotenusa $\overline{H}$ y el cateto opuesto $\overline{CO}$ al ángulo α, cscα=$\frac{\overline{H}}{\overline{CO}}$, la función *__sec__* como la razón de la hipotenusa $\overline{H}$ y del cateto adyacente $\overline{CA}$ al ángulo α, secα=$\frac{\overline{H}}{\overline{CA}}$, la función *__cotangente__* como la razón del cateto adyacente al ángulo α $\overline{CA}$ y el cateto opuesto $\overline{CO}$, ctgα=$\frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}$, es decir: tg$\alpha$=$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, csc$\alpha$.sen$\alpha$=1, sec$\alpha$.cos$\alpha$=1 y ctg$\alpha$.tg$\alpha$=1

Por el *__Teorema de Pitágoras__* tenemos, que en un triangulo rectángulo, la suma de sus catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado, e.i.



$$\overline{H}^2=\overline{CO}^2+\overline{CA}^2$$

Fig. Nº 46

Como $\overline{CO}=\overline{H}sen\alpha$ y $\overline{CA}=\overline{H}cos\alpha$, sustituyendo estos valores en la ecuación $\overline{H}^2=\overline{CO}^2 + \overline{CA}^2$, nos resulta:

$\overline{H}^2=\overline{H}^2sen^2\alpha + \overline{H}^2cos^2\alpha \Rightarrow sen^2\alpha + cos^2\alpha=1$ y si en esta expresión dividimos cada uno de los términos por el $cos^2\alpha$ y el $sen^2\alpha$ respectivamente se obtendrán las ecuaciones $tg^2\alpha + 1=sec^2\alpha$ y $ctg^2\alpha + 1=csc^2\alpha$, de igual manera se puede deducir y queda como ejercicio al lector que $sen(\alpha \pm \beta)=sen\alpha cos\beta \pm sen\beta cos\alpha$ y $cos(\alpha \pm \beta)=cos\alpha cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$, en estas dos últimas ecuaciones si hacemos $\alpha=\beta$ se deduce que: $sen0^o=0$ y $sen2\alpha=2sen\alpha cos\alpha$, $cos0^o=1$ y $cos2\alpha=cos^2\alpha - sen^2\alpha$, además si en la expresión $tg(\alpha \pm \beta)=\frac{sen(\alpha \pm \beta)}{cos(\alpha \pm \beta)}$, se sustituyen los valores del $sen(\alpha \pm \beta)$ y el del $cos(\alpha \pm \beta)$, se obtiene que la $tg(\alpha \pm \beta)=\frac{sen\alpha cos\beta \pm sen\beta cos\alpha}{cos\alpha osa\beta \mp sen\alpha cos\beta}$, en la cual si dividimos en el miembro de la derecha cada uno de los términos por $cos\alpha cos\beta$ y $sen\alpha cos\beta$ respectivamente se obtienen; $tg(\alpha \pm \beta)=\frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$, y $ctg(\alpha \pm \beta)=\frac{ctg\alpha \pm ctg\beta}{1 \mp ctg\alpha ctg\beta}$, de la misma manera si hacemos $\alpha=\beta$ llegamos a que $tg0^o=0$ y $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

<u>Gráficas de las funciones trigonométricas:</u> **seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente**

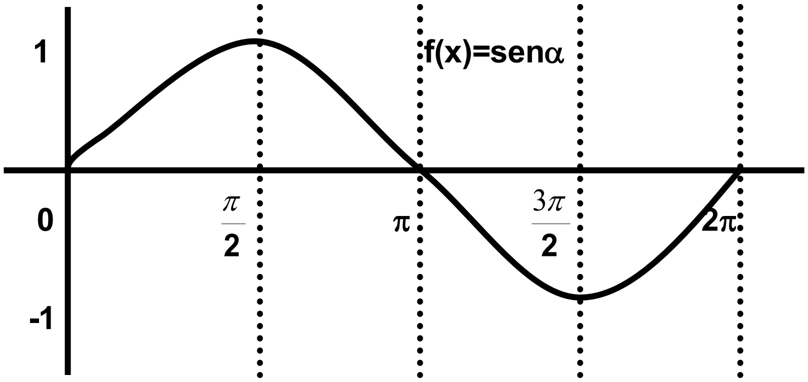


Fig. N° 47

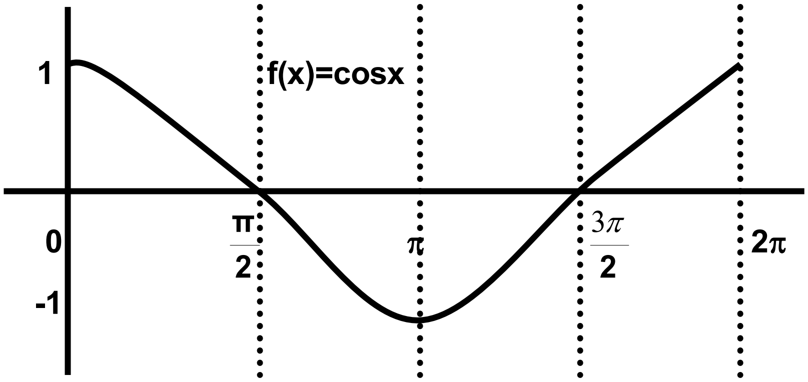


Fig. N° 48

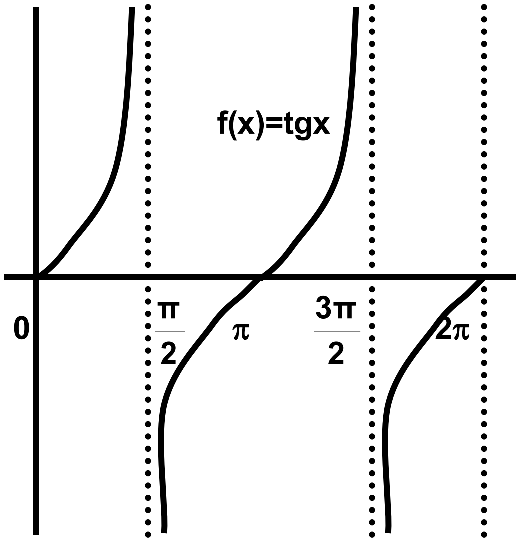


Fig. Nº 49

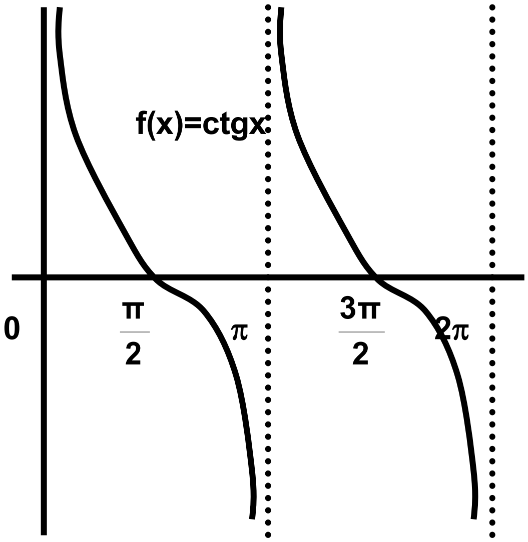


Fig. Nº 50

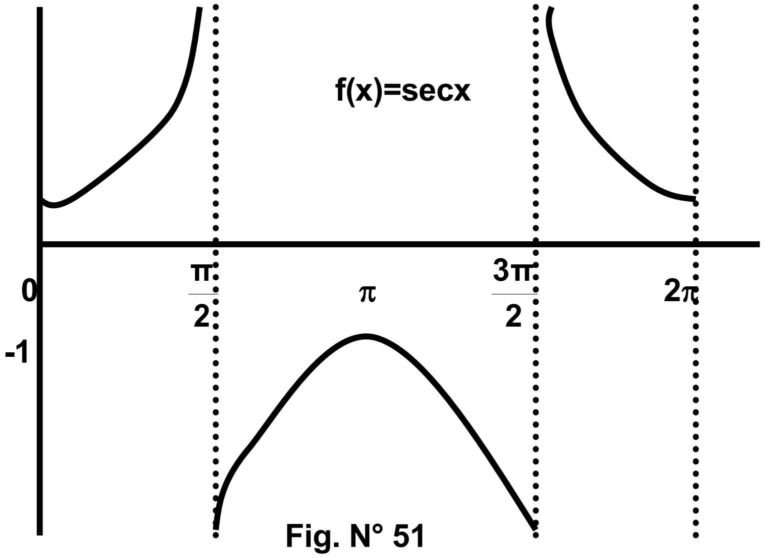


Fig. N° 51

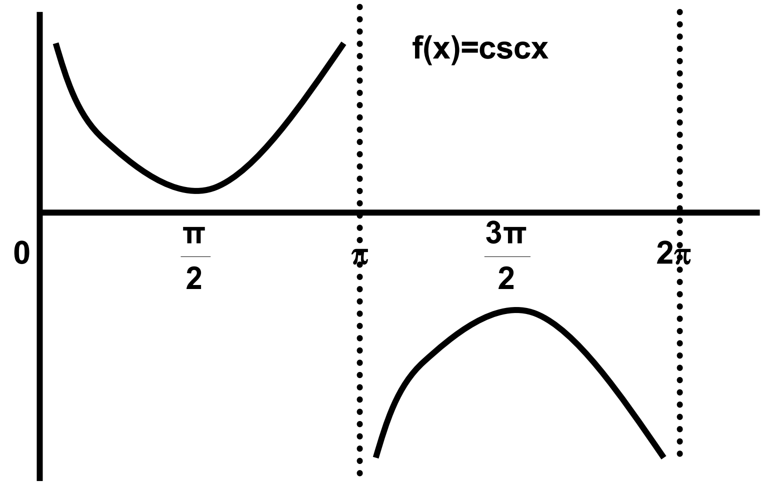


Fig. Nº 52

<u>Características de las funciones trigonométricas:</u>

1. <u>Función seno:</u> a) Dominio, todo el conjunto de los números reales, es decir, Domf=ℜ

b. El recorrido esta en el intervalo Recf∈[-1, 1]

c. No es una función inyectiva

d. No es una función sobreyectiva

e. Es una función impar, es decir, sen(-α)=-senα

f. Es positiva en el primero y segundo cuadrante

2. Función coseno: a) Dominio todo el conjunto de los números reales, es decir, Domf=$\Re$

b. El recorrido esta en el intervalo Recf$\in$[-1, 1]

c. No es una función inyectiva

d. No es una función sobreyectiva

e. Es una función par, es decir, cos(-α)=cosα

f. Es positiva en el primer y cuarto cuadrante

3. Función tangente: a. Dominio todo el conjunto de los números reales menos los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, e.i. Domf$\in\Re$ - $\{n\frac{\pi}{2}\}$, $\forall n\in Z$

b. El recorrido es todo el conjunto de los números reales: Recf$\in\Re$

c. No es una función inyectiva

d. Es una función sobreyectiva

e. Es una función impar, es decir, tg(-α)=-tgα

f. Es positiva en el primer y tercer cuadrante

4. Función cosecante: a. El Dominio es todo el conjunto de los números reales menos los múltiplos de nπ, es decir, Domf=$\Re$ - $\{n\pi\}$, $\forall n\in Z$

b. El recorrido es todo el conjunto de los números reales menos el cero, es decir, Recf$\in\Re$ - $\{0\}$

c. No es una función inyectiva

d. No es una función sobreyectiva

e. Es una función impar, e.i. csc(-α)=-cscα

f. Es positiva en el primero y segundo cuadrante

5. <u>Función secante:</u> a. Dominio todo el conjunto de los números reales menos los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, e.i. Domf$\in\Re$ - $\{n\frac{\pi}{2}\}$, $\forall n\in Z$

b. El recorrido es todo el conjunto de los números reales menos el cero, es decir, Recf$\in\Re$ - $\{0\}$

c. No es una función inyectiva

d. No es una función sobreyectiva

e. Es una función par, e.i. cos($-\alpha$)=cosα

f. Es positiva en el primer y cuarto cuadrante

6. <u>Función cotangente:</u> a. Dominio es todo el conjunto de los números reales menos los múltiplos de nπ, e.i. Domf=$\Re$ - $\{n\pi\}$, $\forall n\in Z$

b. El recorrido es todo el conjunto de los números reales: Recf$\in\Re$

c. No es una función inyectiva

d. Es una función sobreyectiva

e. Es una función impar, e.i. ctg($-\alpha$)=-ctgα

f. Es positiva en el primer y tercer cuadrante

<u>Definición 52:</u> Se define un <u>triángulo</u> como un polígono que tiene tres (3) lados, donde se intersecan dos lados recibe el nombre de <u>vértice</u>, los cuales se denotan con letra mayúscula y los lados opuestos a los vértices se denotan con letra minúscula, los ángulos con letras griegas, los elementos de los triángulos son: los lados, los vértice y los ángulos.

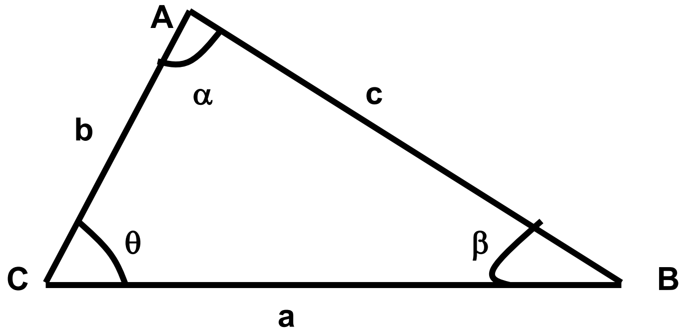


Fig. Nº 53

Los triángulos se clasifican según sus lados y sus ángulos:

<u>Según sus lados</u>:

i. <u>Isósceles:</u> los que tienen dos de sus lados y dos ángulos iguales

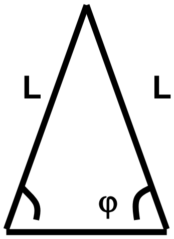


Fig. Nº 54

ii. <u>Equiláteros:</u> los que tienen sus tres lados y ángulos iguales

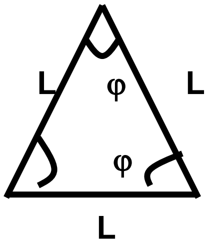


Fig. Nº 55

iii. <u>Escaleno:</u> los que tienen todos sus lados y ángulos distintos

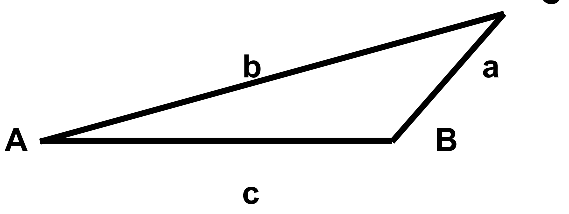


Fig. Nº 56

<u>Según sus ángulos</u>:

i. <u>Acutángulo:</u> que tienen sus tres ángulos agudos (menor de 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad)

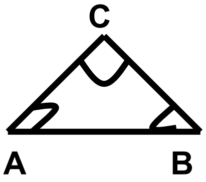


Fig. Nº 57

ii. <u>Obtusángulo:</u> si tiene un Angulo obtuso (mayor de 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad)

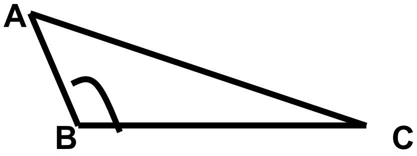


Fig. Nº 58

iii. <u>Rectángulo:</u> si tiene un Angulo igual a 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad

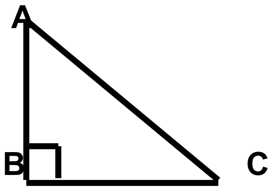


Fig. Nº 59

<u>Definición 53:</u> si trazamos dos rectas de dos vértices distintos que pasen por el punto medio del lado opuesto al vértice de estos, donde se intersectan estas rectas recibe el nombre de mediana.

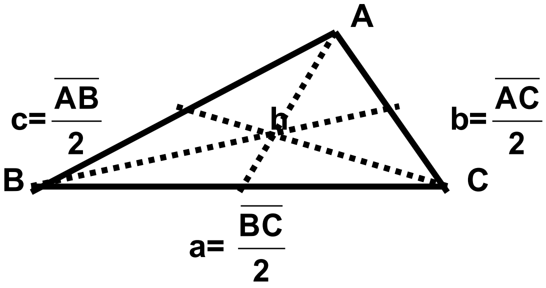


Fig. Nº 60

<u>Definición 54:</u> se define la altura de un trianguló, como la recta perpendicular que se traza desde un vértice a su lado opuesto, ∴ un triangulo tiene tres alturas.

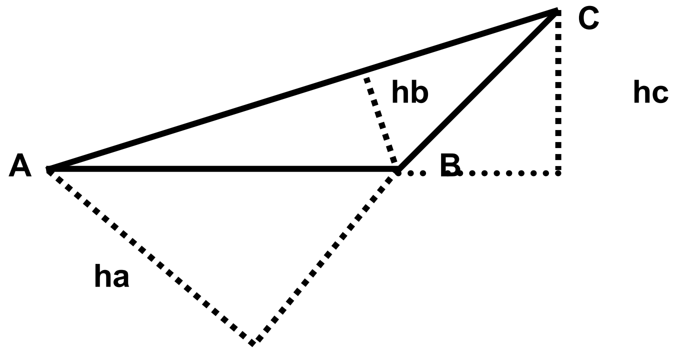


Fig. Nº 61

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los conjuntos:

A, $B\subset\Re$/ A=$\{x\in Z/\sqrt{x^2+8}=3\}$ y B=$\{x\in Z/x^3+x^2-9x-9=0\}$, hallar:

a. AxB

b. BxA

c. aRb, $a\in A$y $b\in B$, con la relación “a es mayor que b”

d. Hallar el dominio en cada caso

e. Hallar el recorrido en cada caso

f. La representación tabular y sagital de AxB

Solución: lo primero que haremos es expresar por extensión los conjuntos A y B. Para el conjunto A tenemos que: $\sqrt{x^2+8}=3$, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos: $x^2+8=9 \Rightarrow x^2+8-9=0 \Rightarrow x^2-1=0$ $\Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ y $x=1$, entonces tenemos, A={-1,1}, para el conjunto B tenemos: $x^3+x^2-9x-9=0$, aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -9 & -9 \\
-1 & & -1 & 0 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
3 & & 3 & 9 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}$$

Por lo tanto, B={-3, -1, 3}

Solución a): AxB={(-1, -3), (-1, -1), (-1, 3), (1, -3), (1, -1), (1, 3)}

Solución b): BxA={(-3, -1), (-3, 1), (-1, -1), (-1, 1), (-3, -1), (-3, 1)}

Solución c): aRb={(-1, 3), (1, 3)}

Solución d): DomAxB=A, DomBxA=B, DomaRb=A

Solución e)

Representación Tabular

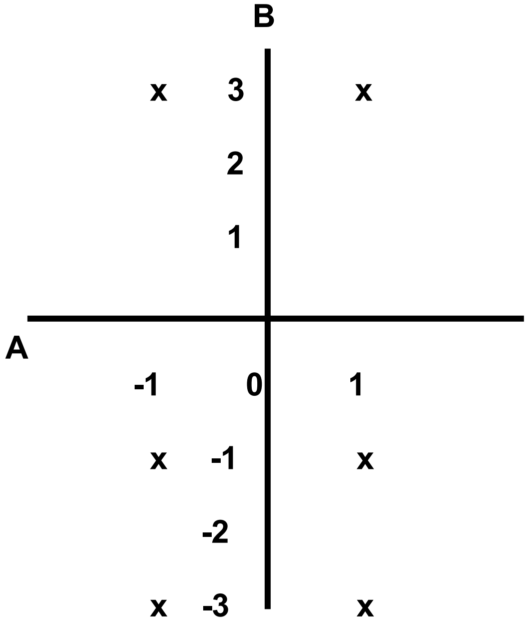


Fig. Nº 62

Representación Sagital

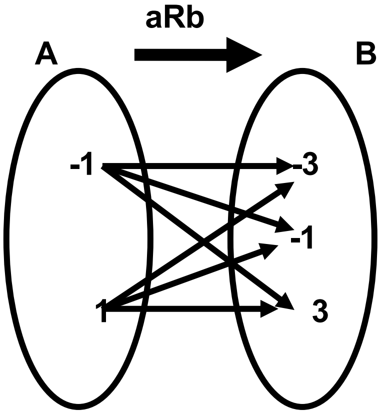


Fig. Nº 63

2. Sea f={(1, 3), (3, 4), (5, 6), (7, 7), (9, 12)} y g={(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)}, hallar:

g. (f + g)
h. (f – g)
i. (fxg)
j. (f/g)
k. f^{-1}
l. g^{-1}

Solución: como la suma, la resta, la multiplicación y la división de funciones se definen de la siguiente manera:

(f + g)=f + g $\wedge$ Domf$\cap$Domg

$(f - g)=f - g \wedge Domf \cap Domg$

$(fxg)=fxg \wedge Domf \cap Domg$

$(f /g)=f/g \wedge Domf \cap Domg \wedge g \neq 0$

Buscamos el dominio de A y el de B, lo intersectamos y luego súmanos o restamos o multiplicamos o dividimos según sea el caso los recorridos de los elementos que pertenecen a la intersección.

$Domf=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $Domg=\{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow Domf \cap Domg=\{1, 3, 5]$

<u>Solución</u> a): $(f + g)=\{(1, 5), (3, 10), (5, 16)\}$

<u>Solución</u> b): $(f - g)=\{(1, 1), (3, -2), (5, -5)\}$

<u>Solución</u> c): $(fxg)=\{(1, 6), (3, 24), (5, 60)\}$

<u>Solución</u> d): $(f/g)=\{(1, \frac{3}{2}), (3, \frac{2}{3}), (5, \frac{3}{5})\}$

Para la solución e) y f), aplicamos la definición de función inversa, la cual nos dice que si la función es biyectiva, entonces la inversa es la función donde el recorrido se convierte en dominio y viceversa

<u>Solución</u> e): $f^{-1}=\{(3, 1), (4, 3), (6, 5), (7, 7), (12, 9)\}$

<u>Solución</u> f): $g^{-1}=\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5)\}$

3. Realizar la grafica de la función $f(x)=x^2$ y luego sin cálculos adicionales hallar:

a. $g(x)=2 + x^2$

b. $h(x)=(x - 2)^2$

c. $t(x)= -x^2 - 2x + 2$

<u>Solución</u>: grafiquemos la función f(x)=x^2, esta función es una parábola que pasa por el origen y como su dominio esta definido en todos los reales, podemos realizar la gráfica dándole cinco (5) valores:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4

Luego la gráfica es:

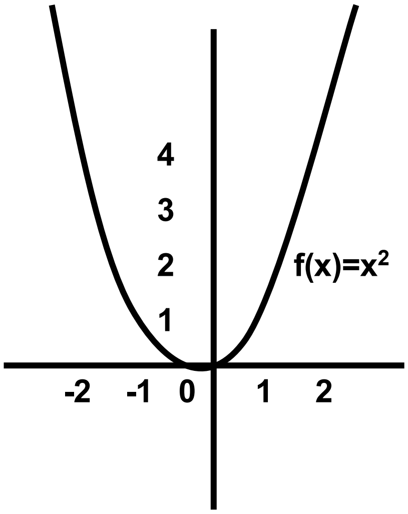


Fig. Nº 64

<u>Solución</u> a): g(x)=2 + x^2, como hay una traslación vertical se traslada la función f(x) dos cantidades hacia arriba, para la solución b) h(x)=$(x - 2)^2$ hay una traslación horizontal, la función se traslada dos (2) cantidades hacia la derecha y para la solución c) t(x)=$-x^2 – 2x + 2$, completando cuadrado, tenemos: t(x)=$-[x^2 + 2x – 2] \Rightarrow$ t(x)=$-[(x + 1)^2 – 2 -1]$ $\Rightarrow$ t(x)=$-(x + 1)^2 + 3$, lo que quiere decir que la función f(x) se traslada

verticalmente tres (3) cantidades hacia arriba, horizontalmente una cantidad hacia la izquierda, y luego rota 180°, veamos esto gráficamente

Solución a) $g(x)=2 + x^2$ solución b) $h(x)=(x-2)^2$ solución c) $t(x)=-x^2 - 2x + 2$

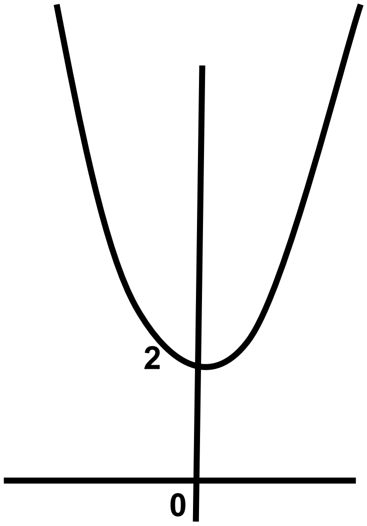


Fig. Nº 65

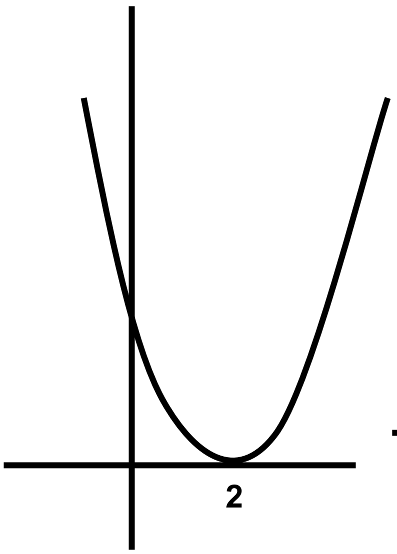


Fig.Nº 66

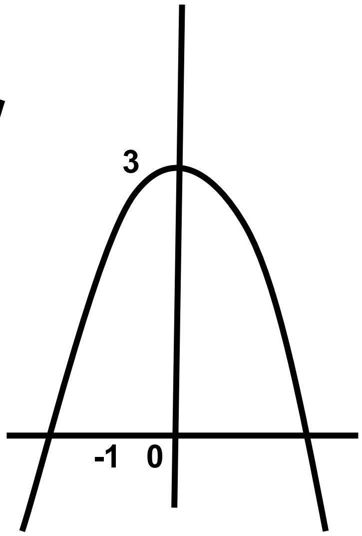


Fig. Nº 67

4. **Encuentre una ecuación para la recta que satisface las condiciones que se dan a continuación:**

a) **Pasa por el punto p(1, -6) y tiene pendiente $m=-\frac{1}{3}$**

b) **Pasa por el punto p(2, 3) y pasa por el punto p(-2, 4)**

c) **Corta al eje X en x=3 y al eje Y en y=4**

d) **Pasa por el punto p(-4, 5) y es perpendicular a la recta $3x + 4y - 2=0$**

<u>Solución</u> a): la ecuación de la recta dada la pendiente y un punto esta determinada por: $y=m(x - x_0) + y_0$, donde $x_0=1$, $y_0=-6$ y $m=-\frac{1}{3}$, ∴,

$$y=-\frac{1}{3}(x - 1) - 6 \Rightarrow 3y=-(x - 1) - 18 \Rightarrow 3y=-x - 17 \text{ o } x + 3y + 17=0$$

Solución b): la ecuación de la recta dados dos puntos es:

$y(x_1 – x_0)=(y_1 – y_0)(x – x_0) + y_0(y_1 – y_0)$, donde $x_0=2$, $x_1=-2$, $y_0=3$ e $y_1=4$, tenemos: $y(-2 – 2)=(4 -3)(x - 2) + 3(-2 – 2) \Rightarrow -4y=x – 2 – 12 \Rightarrow -4y=x – 14$ o $x + 4y – 14=0$

Solución c): la ecuación simétrica de la recta esta determinada por: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, donde a es el corte con el eje X y b el corte con el eje Y, $\therefore$,

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \Rightarrow 4x + 3y=12$ o $4x + 3y – 12=0$

Solución c): como la recta que buscamos es perpendicular a la recta $3x + 4y – 2=0$ y como dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una es la inversa opuesta de la otra, tenemos que si $m_1=-\frac{3}{4}$, entonces la pendiente de la recta que buscamos es $m_2=\frac{4}{3}$ y como $y=m(x – x_0) + y_0$, donde $x_0=-3$, $y_0=5$ $\Rightarrow y=\frac{4}{3}(x –(-3)) + 5 \Rightarrow 3y=4(x + 3) + 5 \Rightarrow 3y=4x + 17$ o $3x – 4y – 17=0$

5. Sea $f(x)=\frac{2x+3}{5x-2}$ y $g(x)=\sqrt{2x+3}$, hallar:

a. (f + g)x

b. (f– g)x

c. (fxg)x

d. (f/g)x

e. $f^{-1}(x)$

f. **$g^{-1}(x)$**

g. **¿Qué condición debe cumplir f(x) para que sea biyectiva?**

h. **¿Qué condición debe cumplir g(x) para que sea biyectiva?**

Solución: Aplicamos las definiciones de suma, resta, multiplicación y división de funciones:

Solución a. (f + g)x=f(x) + g(x) $\wedge$ Df$\cap$Dg, buscando el dominio de f(x)=$\frac{2x+3}{5x-2}$ tenemos que 5x - 2$\neq$0 $\Rightarrow$ x$\neq\frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ Domf=$\Re$ - {$\frac{2}{5}$}, para el dominio de g(x)=$\sqrt{2x+3}$, 2x + 3$\geq$0 $\Rightarrow$ x$\geq$-$\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ Domg=[-$\frac{3}{2}$, ∞) $\Rightarrow$ Domf$\cap$Domg=[-$\frac{3}{2}$, ∞) - {$\frac{2}{5}$}, ahora sumamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e,i, (f + g)x=$\frac{2x+3}{5x-2}$ + $\sqrt{2x+3}$

Solución b. (f - g)x=f(x) - g(x) $\wedge$ Df$\cap$Dg, por la solución a) tenemos que: Domf$\cap$Domg=[-$\frac{3}{2}$, ∞) - {$\frac{2}{5}$}, ahora restamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. (f + g)x=$\frac{2x+3}{5x-2}$ - $\sqrt{2x+3}$

Solución c. (fxg)x=f(x)g(x) $\wedge$ Df$\cap$Dg, por la solución a) tenemos que: Domf$\cap$Domg=[-$\frac{3}{2}$, ∞) - {$\frac{2}{5}$}, ahora multiplicamos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. (fxg)x=$\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{5x-2}$

Solución d. (f/g)x=f(x)/g(x) $\wedge$ Df$\cap$Dg y además g$\neq$0, por la solución a. tenemos que: Domf$\cap$Domg=$(-\frac{3}{2}, \infty) - \{\frac{2}{5}\}$, ahora dividimos los recorridos de los elementos pertenecientes a la intersección, e.i. (f/g)x=$\frac{(2x+3)}{(5x-2)\sqrt{2x+3}}$

Solución e. Aplicando la definición de inversa de una función, suponiendo que la función es biyectiva, entonces despejamos x en función de y, e.i. y=$\frac{2x+3}{5x-2} \Rightarrow (5x-2)y=2x+3 \Rightarrow 5xy-2y=2x+3 \Rightarrow$

$5xy-2x=2y+3 \Rightarrow x(5y-2)=2y+3 \Rightarrow x=\frac{2y+3}{5y-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)=\frac{2x+3}{5x-2}$

Solución f. Aplicando la definición de inversa de una función, suponiendo que la función es biyectiva, entonces despejamos x en función de y, e.i. y=$\sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2=2x+3 \Rightarrow 2x=y^2-3 \Rightarrow x=\frac{y^2-3}{2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}$

Solución g. para que la función f(x)=$\frac{2x+3}{5x-2}$ sea biyectiva tiene que estar definida de la siguiente manera: f:$\Re - \{\frac{2}{5}\} \rightarrow \Re - \{\frac{2}{5}\}$/ f(x)=$\frac{2x+3}{5x-2}$

Solución h. para que la función g(x)=$\sqrt{2x+3}$ sea biyectiva tiene que estar definida de la siguiente manera: f:$[-\frac{3}{2}, \infty) \rightarrow \Re\}$/ f(x)=$\sqrt{2x+3}$

6. Un fabricante puede producir celulares a un costo de Bs. 43.000

cada uno. Calcula que si los vende a x bolívares cada uno podrá vender aproximadamente 150.000 – x celulares al mes. La ganancia mensual del fabricante es una función del precio x al cual vende los celulares.

a. Exprese esta función matemáticamente

b. ¿Cuál será la ganancia si vende los celulares a Bs. 90.000 cada uno.

<u>Solución</u> a. como la ganancia es el ingreso menos el costo, e.i. G=I – C, donde en este caso el I=N°de celulares por el precio de venta unitario de los celulares, entonces, I=(150.000 – x)x, y C=43.000(150.000 –x), e.i.

N° de celulares=150.000 – x

Precio de venta unitario= Bs. x

Costo unitario por celular=Bs. 43.000

$\therefore$ el modelo matemático será: G(x)=(150.000 – x)x – 43.000(150.000) $\Rightarrow$ G(x)=(150.000 - x)(x – 43.000)

<u>Solución</u> b): como el precio de los celulares es de Bs. 90.000, sustituimos este valor por el valor de x en la función ganancia y obtenemos que:

G(x)=(150.000 – 90.000)(x – 90.000) $\Rightarrow$ G(x)=18.404.000.000 Bs.

7. Factorice aplicando Rufini:

a. $x^3 + 2x^2 – 5x + 6=0$

b. $x^4 + 3x^3 – 7x^2 – x + 6=0$

<u>Solución</u> a. $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \lfloor 0 \\
-2 & & -2 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \lfloor 0 &
\end{array}$$

Luego, $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=(x + 2)(x – 1)(x – 3)$

<u>Solución</u> b. $x^4 + 3x^3 – 7x^2 – x + 6=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\
-1 & & -1 & 0 & 7 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -7 & 6 & \lfloor 0 \\
1 & & 1 & 1 & -6 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \lfloor 0 & \\
2 & & 2 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \lfloor 0 & &
\end{array}$$

Luego, $x^4 + 3x^3 – 7x^2 – x + 6=((x + 3)(x + 1)(x – 1)(x – 2)$

8. Aplique fracciones parciales a: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^3-2x^2-5x+6}$

<u>Solución</u>: como $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=(x + 2)(x – 1)(x – 3)$, ver problema anterior, tenemos que: $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x-3)} \Rightarrow f(x)= \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-3}$, donde los valores de A, B y C, se calculan de la siguiente manera:

$$A=\left(\frac{2x+3}{(x-1)(x-3)}\right)_{x=-2} \Rightarrow A=\frac{2_x2+3}{(-2-1)(-2-3)} \Rightarrow A=\frac{7}{15}$$

$$B=\left(\frac{2x+3}{(x+2)(x-3)}\right)_{x=1} \Rightarrow B=\frac{2_x1+3}{(1+2)(1-3)} \Rightarrow B=-\frac{5}{6}$$

$C=\left(\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)}\right)_{x=3} \Rightarrow C=\frac{2_x3+3}{(3+2)(3-1)} \Rightarrow C=\frac{9}{10}$, $\therefore$ f(x) se puede escribir

como: $f(x)=\dfrac{7}{15(x+2)}-\dfrac{5}{6(x-1)}+\dfrac{9}{10(x-3)}$

9. Factorizar aplicando las fórmulas: $x^n - y^n$, $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$

i. $2x^2 - 5$

ii. $4x^4 - 1$

iii. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}$

iv. $\sqrt[5]{x}-2$

Solución: Aplicando las identidades:

$x^n - y^n=(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$ y

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}+.........+\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

Solución i. $2x^2 - 5 \Rightarrow x^2-\frac{5}{2} \Rightarrow x^2-\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \Rightarrow (x-\sqrt{\frac{2}{5}})(x+\sqrt{\frac{2}{5}})$

Solución ii. $4x^4 - 1=x^4-\frac{1}{16} \Rightarrow$

$$x^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = (x - \frac{1}{2})(x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8})$$

Solución iii. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5} = \dfrac{x-5}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{25}}$

Solución iv) $\sqrt[5]{x} - 2 = \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{32} \Rightarrow$

$$\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{32} = \frac{x-32}{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{32x^3} + \sqrt[5]{1204x^2} + \sqrt[5]{32768x} + \sqrt[5]{1048576}}$$

10. Represente gráficamente el siguiente polinomio: f(x)=$x^3 - 3x^2 - x + 3$

Solución: para realizar la gráfica seguiremos los siguientes pasos:

i. Hallamos el dominio de la función: Domf=$\Re$

ii. Buscamos el corte con el eje Y, (x=0) $\Rightarrow$ f(0)=3, cota al eje Y en el punto (0, 3)

iii. Buscamos el corte con el eje X, (y=0) $\Rightarrow$ $x^3 - 3x^2 - x + 3=0$, aplicando Rufini

Solución a): $x^3 - 2x^2 - 5x + 6=0$

	1	-3	-1	3
1		1	-2	-3
	1	-2	-3	0
-1		-1	3	
	1	-3	0	

Luego, $x^3 - 2x^2 – 5x + 6=(x + 1)(x – 1)(x – 3)=0$, $\therefore$, la función corta al eje X en: x=-1, x=1 y x=3, entonces corta al eje X en los puntos (-1, 0), (1, 0) y (3, 0) estos puntos que cortan al eje de las X, son puntos de separación, e.i. como existen tres puntos de separación, tenemos cuatro intervalos, en los cuales vamos a tomar un punto de prueba para determinar si la función esta por encima o por debajo del eje X y así poder hacer la gráfica aproximada.

iv. Puntos de prueba: $-2\in(-\infty, -1)$; $0\in(-1, 1)$; $2\in(1, 3)$ y $4\in(3, +\infty)$

v. Estudio de la función por medio de los puntos de prueba:

a. Para $x=-2 \Rightarrow f(-2)=(-2)^3 – 2(-2)^2 – 5(-2) + 6 \Rightarrow f(-2)=-15$, esto quiere decir que cuando los valores de x crecen indefinidamente la función f(x), también crece indefinidamente

b. Para $x=0 \Rightarrow f(0)=6$, esto nos indica que en el intervalo (-1, 1) la función esta por encima del eje X.

c. Para $x=2 \Rightarrow f(2)=(2)^3 – 2(2)^2 – 5(2) + 6 \Rightarrow f(2)=1$, $\therefore$, la función en el intervalo (1, 3) esta por debajo del eje X

d. Para $x=4$ $f(4)=(4)^3 – 2(4)^2 – 5(4) + 6 \Rightarrow f(4)=15$, esto nos indica que cuando los valores de x crecen indefinidamente, la función f(x) también crece indefinidamente

vi. Con los datos obtenidos realizamos la gráfica:

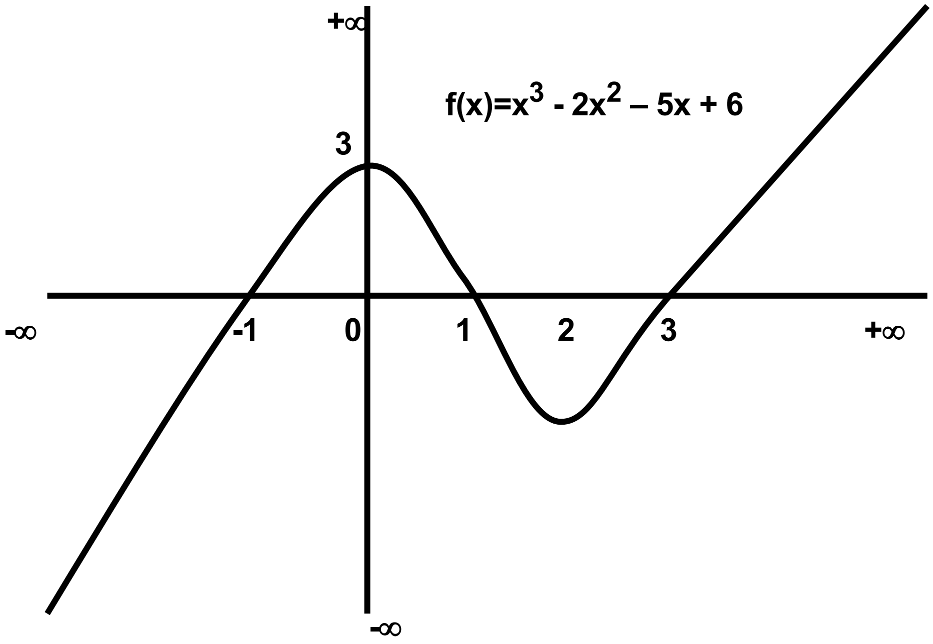


Fig. N° 68

11. Use la traslación en sentido vertical adecuada para representar gráficamente el siguiente polinomio: $f(x)=x^3 + 7x^2 - 30x + 2$

Solución: aplicando la definición de traslación vertical, hacemos $f(x)=g(x) + 2$, e.i. grafiquemos $g(x)$ y luego la trasladamos 2 lugares hacia arriba, para realizar la gráfica $g(x)$ seguiremos los siguientes pasos:

i. Hallamos el dominio de la función: $Domg=\Re$

ii. Buscamos el corte con el eje Y, $(x=0) \Rightarrow g(0)=0$, cota al eje Y en el punto (0, 0)

iii. Buscamos el corte con el eje X, $(y=0) \Rightarrow x^3 + 7x^2 - 30x=0, \Rightarrow$ $x(x + 10)(x - 3)=0 \Rightarrow x=0, x=-10$ y $x=3$, como existen tres puntos de separación, tenemos cuatro intervalos, en los cuales vamos a tomar un punto de prueba para determinar si la función esta por encima o por debajo del eje X y así poder hacer la gráfica aproximada.

iv. Puntos de prueba: $-11 \in (-\infty, -10)$; $-1 \in (-10, 0)$; $1 \in (0, 3)$ y $4 \in (3, +\infty)$

v. Estudio de la función por medio de los puntos de prueba:

a. Para $x=-11 \Rightarrow g(-11)=(-11)^3 + 7(-11)^2 - 30(-11) \Rightarrow g(-11)=-924$, esto quiere decir, que cuando los valores de x decrecen indefinidamente la función g(x), también decrece indefinidamente

b. Para $x=-1 \Rightarrow g(-1)= (-1)^3 + 7(-1)^2 - 30(-1) \Rightarrow g(-1)=36$, esto nos indica que en el intervalo (-10, 0) la función esta por encima del eje X.

c. Para $x=1 \Rightarrow g(1)=(1)^3 + 7(1)^2 - 30(1) \Rightarrow g(1)=-22$, $\therefore$, la función en el intervalo (0,3) esta por debajo del eje X

d. Para $x=4$ $g(4)=(4)^3 + 7(4)^2 - 30(4) \Rightarrow g(4)=56$, esto nos indica que cuando los valores de x crecen indefinidamente, la función f(x) también crece indefinidamente

vi. Con los datos obtenidos realizamos la gráfica:

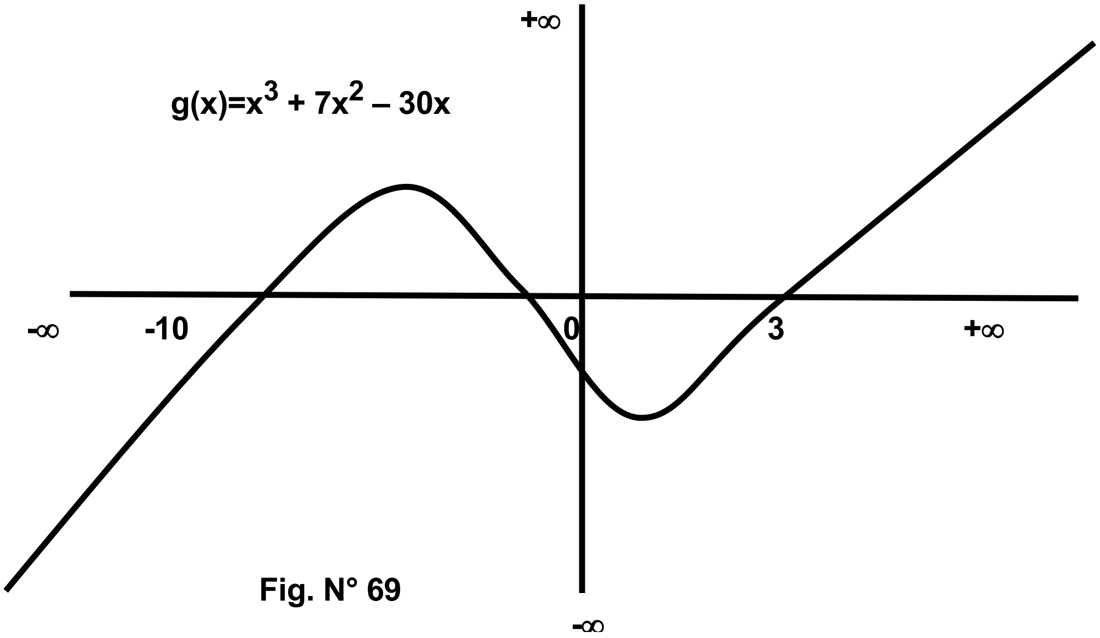


Fig. N° 69

Trasladando g(x) 2 cantidades hacia arriba tenemos:

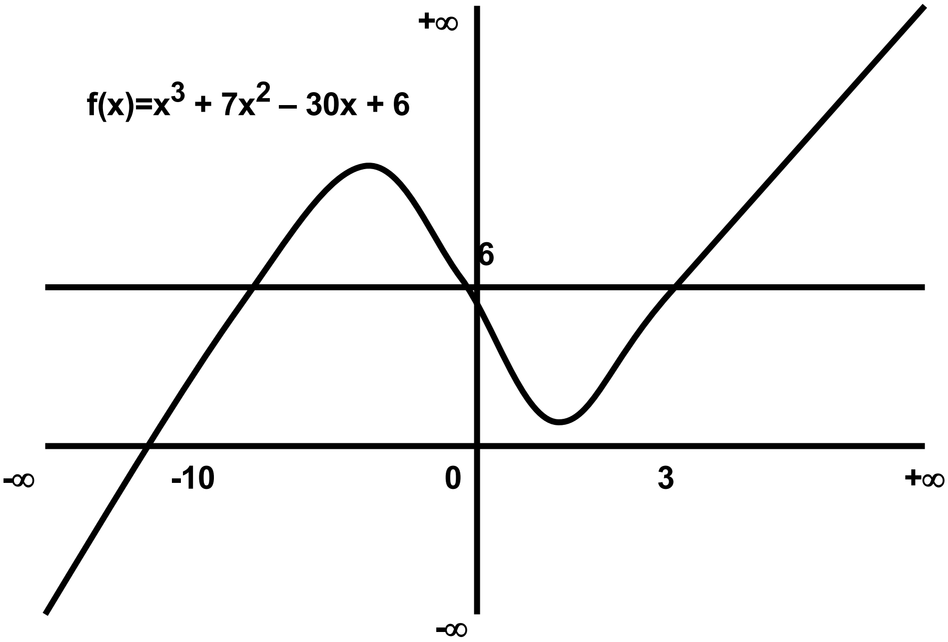


Fig. N° 70

12. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales

a. $2^x + 4^x=72$

b. $3^{x+1} + 9^x=108$

c. $2^{x^2-3x} = 16$

Solución **a.** $2^x + 4^x=72 \Rightarrow 2^x + \left(2^x\right)^2 - 72 = 0$**, haciendo un cambio,**

$y=2^x$ obtenemos que $y^2 + y - 72=0$, factorizando esta ecuación tenemos:

$(y + 9)(y - 8)=0 \Rightarrow y=-9$ o $y=8$, como el valor de y no puede ser negativo,

tenemos entonces que $y=8 \Rightarrow 8=2^x \Rightarrow 2^3=2^x \Rightarrow x=3$

<u>Solución</u> b. $3^{x+1} + 9^{x}=108 \Rightarrow \left(3^{x}\right)^{2} + 3_{x}3^{x} - 108 = 0$**, haciendo un cambio,** $y=3^{x}$**, obtenemos que** $y^{2} + 3y - 108=0$**, factorizando esta ecuación tenemos:** $(y + 12)(y - 9)=0 \Rightarrow y=-12$ **o** $y=9$**, como el valor de y no puede ser negativo, tenemos entonces que** $y=9 \Rightarrow 9=2^{x} \Rightarrow 3^{2}=3^{x} \Rightarrow x=2$

<u>Solución</u> c. $2^{x^{2}-3x} = 16 \Rightarrow 2^{x^{2}-3x} = 2^{4} \Rightarrow x^{2} - 3x=4 \Rightarrow x^{2} - 3x - 4=0$ **factorizando esta ecuación tenemos:** $(x + 1)(x - 4)=0 \Rightarrow x=-1$ **o** $x=4$**,**

13. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas

a. $lg3(x - 2) + lg3x=lg38$

b. $lg(x^{2} - 15x)=3$

c. $lg(x + 5) - lg(x - 4)=1$

<u>Solución</u> a. $lg3(x - 2) + lg3x=lg38 \Rightarrow lg3(x - 2)x=lg38 \Rightarrow$ $x^{2} - 2x - 8=0$**, completando cuadrado tenemos que:** $(x - 1)^{2} - 8 - 1=0$ $\Rightarrow (x - 1)^{2} - 9=0 \Rightarrow (x - 1 - 3)(x - 1 + 3)=0 \Rightarrow (x - 4)(x - 2)=0 \Rightarrow x=-2$ **o** $x=4$**, pero x no puede ser negativo,** $\therefore$ **la solución es:** $x=4$

<u>Solución</u> b. $lg(x^{2} - 15x)=3 \Rightarrow 10^{lg(x^{2}-15x)} = 10^{3} \Rightarrow x^{2} - 15x - 1000=0$**, factorizando tenemos que:** $(x - 40)(x + 25)=0$**, luego** $x=40$ **o** $x=-25$**, pero x no puede ser negativo, entonces para este caso la respuesta es:** $x=40$

Solución c. $lg(x + 5) - lg(x - 4)=1 \Rightarrow lg\frac{x+5}{x-4}=lg1($ $\Rightarrow$

$\frac{x+5}{x-4}=10 \Rightarrow x + 5=10x - 40 \Rightarrow 10x - x - 40 - 5=0 \Rightarrow 9x - 45=0 \Rightarrow x=5$

14. Calcular aplicando las identidades trigonométricas:

a. sen105°

b. cos75°

c. tg15°

<u>Solución</u> a. sen105°=sen(60° + 45°), aplicando la identidad trigonométrica: sen(α ± β)=senαcosβ ± senβcosα tenemos que: sen60°cos45° + sen45°cos60° $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\frac{1}{2} \Rightarrow$ sen105°=$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

<u>Solución</u> b. cos75°=cos(30° + 45°), aplicando la identidad trigonométrica: cos(α ± β)=cosαcosβ ∓ senβsenα tenemos que: cos30°cos45° - sen30°sen45° $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\frac{1}{2} \Rightarrow$ cos75°=$\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

<u>Solución</u> c. tg15°=tg(45° - 30°), aplicando la identidad trigonométrica: tg(α ± β)=$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta}$ tenemos que: tg15°=$\frac{tg45 - tg30}{1 - tg45tg30}$ $\Rightarrow$

tg15°=$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow$ tg15°=$\frac{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3}$ tg15°=$\frac{1-2\sqrt{3}+3}{-2} \Rightarrow$ tg15°=$\sqrt{3}$ - 2

15. Sea senα=$\frac{3}{5}$ y senβ=$\frac{2}{\sqrt{13}}$ hallar:

a. sen(α + β)

b. cos(α - β)

c. **tg(α + β)**

Solución: aplicando el teorema de Pitágoras:

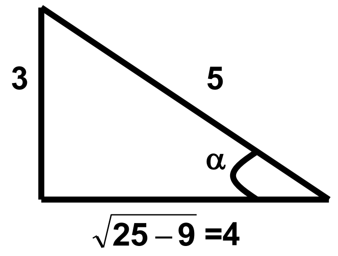


Fig. Nº 71

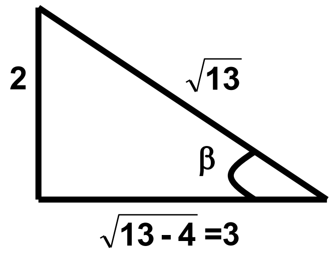


Fig. Nº 72

Solución a): Aplicando la identidad trigonométrica:

sen(α + β)=senαcosβ + senβcosα, donde según el triángulo de la figura 67 y 68 se tiene que: $\text{sen}\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\text{sen}\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha\frac{4}{5}$,

$\text{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ **y** $\text{tg}\beta=\frac{2}{3}$, **se tiene que:** $\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\text{x}\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\text{x}\frac{4}{5}\Rightarrow$

$$\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{9}{5\sqrt{13}}+\frac{8}{5\sqrt{13}}\Rightarrow\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{17}{5\sqrt{13}}\Rightarrow\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{17\sqrt{13}}{65}$$

Solución b): Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\text{x}\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{3}{5}\text{x}\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{5\sqrt{13}}+\frac{6}{5\sqrt{13}}\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\frac{18}{5\sqrt{13}}\Rightarrow\text{sen}(\alpha+\beta)=\frac{18\sqrt{13}}{65}$$

Solución c): Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\text{tg}\beta}\Rightarrow\text{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{4}\text{x}\frac{2}{3}}\Rightarrow\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

$tg(\alpha - \beta)=\frac{1}{18}$

16. Sea b=40 cm. el cateto opuesto y c=50 cm. la hipotenusa de un triangulo rectángulo, halle el perímetro y el área del triangulo

Solución:

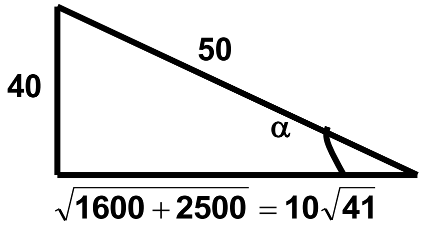


Fig. Nº 73

Como perímetro de un triángulo es la suma de sus lados, se tiene que, $P=40 + 50 + 10\sqrt{41} \Rightarrow P=90 + 10\sqrt{41} \Rightarrow P=10(9 + \sqrt{41})$ cm.

El área del triángulo, es igual a la base por la altura sobre dos, e.i,

$A=\frac{40x10\sqrt{41}}{2} \Rightarrow A=200\sqrt{41}\ cm^2$

17. Sea c=60 la hipotenusa y α=28°30' un ángulo de un triángulo rectángulo, halle el perímetro y el área del triangulo

Solución:

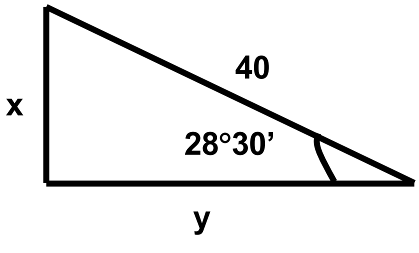


Fig. Nº 74

El perímetro del triangulo es P=40 + x + y, donde $sen28°30'=\frac{x}{40} \Rightarrow$

$x=40sen28°30' \Rightarrow x=19,09$ y $cos28°30'=\frac{y}{40} \Rightarrow y=40cos28°30' \Rightarrow y=35.15 \Rightarrow$

P=40 + 19,09 + 35.15 ⇒ P=94.24 cm. y el área A=$\frac{19.09_x 35.15}{2}$, luego

A=335.51 cm^2

18. Si los lados de un triángulos son respectivamente a=4 cm. b=13 cm. y c=15 cm. Hallar los tres ángulos

Solución:

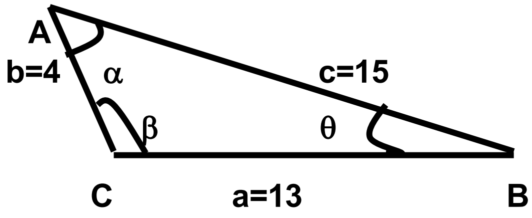


Fig. Nº 75

Por el teorema del coseno tenemos:

$$a^2=b^2 + c^2 - 2bxcxcos\theta \Rightarrow cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b_x c} \Rightarrow$$

$$\theta=cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b_x c}\right) \Rightarrow \theta=cos^{-1}\left(\frac{13^2+15^2-4^2}{2_x 13_x 15}\right) \Rightarrow \theta=14.25°,$$

análogamente $\alpha=cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a_x b}\right) \Rightarrow \alpha=cos^{-1}\left(\frac{13^2+4^2-15^2}{2_x 13_x 4}\right) \Rightarrow$

α**=112.62° y** $\beta=cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b_x c}\right) \Rightarrow \beta=cos^{-1}\left(\frac{4^2+15^2-13^2}{2_x 4_x 15}\right) \Rightarrow$

β**=53.13°**

20. Demostrar que

a. $\frac{senx - cosx}{senx} = 1 - ctgx$

b. $\frac{1-\text{senx}}{\text{cosx}}=\frac{\text{cosx}}{1+\text{senx}}$

c. $\frac{1}{\text{senxcosx}}=\text{tgx}+\text{ctgx}$

d. $\frac{\text{tgx}+\text{ctgx}}{\text{tgx}-\text{ctgx}}=\frac{\cos^{2}x}{\text{tg}^{2}x-1}$

e. $(1 - \text{sen}^2x)(1 + \text{tg}^2x)=\text{senxsecxctgx}$

Solución a): $\frac{\text{senx - cosx}}{\text{senx}}=1-\text{ctgx}$, realizando la división tenemos:

$\frac{\text{senx - cosx}}{\text{senx}}=\frac{\text{senx}}{\text{senx}}-\frac{\text{cosx}}{\text{senx}}=1-\text{ctgx}\Rightarrow\frac{\text{senx - cosx}}{\text{senx}}=1-\text{ctgx}$ q.e.d

Solución b): $\frac{1-\text{senx}}{\text{cosx}}=\frac{\text{cosx}}{1+\text{senx}}$, por la propiedad del inverso multiplicativo tenemos que: $\frac{1-\text{senx}}{\text{cosx}}=\frac{(1-\text{senx})(1+\text{senx})}{\text{cosx}(1+\text{senx})}$, por la identidad $\cos^2x=1-\text{sen}^2x$ o $\cos^2x=(1-\text{senx})(1+\text{senx})$ se tiene que $\frac{(1-\text{senx})(1+\text{senx})}{\text{cosx}(1+\text{senx})}=\frac{\cos^{2}x}{\text{cosx}(1+\text{senx})}\Rightarrow\frac{1-\text{senx}}{\text{cosx}}=\frac{\text{cosx}}{1+\text{senx}}$ q.e.d.

Solución c): $\frac{1}{\text{senxcosx}}=\text{tgx}+\text{ctgx}$, por la identidad $\cos^2x+\text{sen}^2x=1$ tenemos que: $\frac{1}{\text{senxcosx}}=\frac{\cos^{2}x+\text{sen}^{2}x}{\text{senxcosx}}$, aplicando la definición de suma de fracciones se tiene que:

$$\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}\Rightarrow\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$=ctgx + tgx $\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ q.e.d

Solución d): $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}$, aplicando las identidades

tgx=$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ y ctgx=$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$, se tiene que: $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}=\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}$,

resolviendo la suma y resta de fracciones tenemos que:

$\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen}x}}$, aplicando la división de fracciones no

queda $\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen}x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen}x}}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}$, aplicando la identidad $\cos^2$x + sen^2x=1, tenemos $\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}$, por la propiedad de elemento inverso multiplicativo se tiene que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}\Rightarrow$$

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-1}\text{ q.e.d.}$$

Solución e): $(1 - \operatorname{sen}^2x)(1 + \operatorname{tg}^2x)=\operatorname{sen}x\sec x\operatorname{ctg}x$, aplicando las identidades trigonométricas: $\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ y $\cos^2x=1 - \operatorname{sen}^2x$ se tiene que

$$(1 - \operatorname{sen}^2x)(1 + \operatorname{tg}^2x)=\cos^2x(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x})\Rightarrow$$

$\cos^2x(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x})=\cos^2x(\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x})$, aplicando las identidades $\cos x=\frac{1}{\sec x}$ y $\cos^2x + \operatorname{sen}^2x=1$, se tiene que:

$\cos^2x(\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x})=\cos^2x\sec^2x$, por el inverso multiplicativo tenemos que: $\cos^2x\sec^2x=\frac{\cos^2 x\sec^2 x\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\Rightarrow$

$$\frac{\cos^2 x\sec^2 x\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}x\frac{\cos x}{\cos x}x\sec xx\operatorname{sen}x\Rightarrow$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}x\frac{\cos x}{\cos x}x\sec xx\operatorname{sen}x=\operatorname{ctg}xx\sec xx\operatorname{sen}x\Rightarrow$$

$(1 - \operatorname{sen}^2x)(1 + \operatorname{tg}^2x)=\operatorname{sen}x\sec x\operatorname{ctg}x$ q.e.d

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dados los conjuntos:

$A\subset\Re/A=\{x\in Z^{-}/-3\leq x\leq 4\}$ y $B\subset\Re/B=\{x\in Q/15x^{2}-x-2=0\}$. Hallar:

a. AxB, b. BxA, c. $a\Re b$ con la relación "a es el triple de b", d. $a\Re b$ con la relación "a es el inverso multiplicativo de b", e. hallar el dominio, el recorrido, la representaciones sagital y tabular, en cada caso.

2. Dado el conjunto $AC\Re/A=\{x\in\frac{Z}{3}\leq x\leq 5\}$ y la relación $\Re=\{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 3)\}$, probar que $\Re$ es una relación de equivalencia.

3. Probar que el conjunto $\Re$ con la relación "$\frac{a}{b}$" es una relación de orden.

En las relaciones dadas a continuación:

f={(4,2), (0,11), (3,5), (7,20), (9,15)}

g={(5,-20), (0,30), (3,16), (7,11), (8,7)}

h={(3,2), (5,5), (3,7), (-2,0), (8,9)}

t={(5,-3), (0,7), (4,3), (8,9), (9,10), (11,16)}

a. Obtener sus gráficas

b. ¿Cuales de estas son funciones?

c. Hallar el dominio

d. Hallar el recorrido

e. Realizar la suma: (f + g)

f. Realizar la resta: (f – h)

g. Realizar el producto (fxt)

h. Realizar el cociente ($\frac{f}{s}$)

i. Realizar las operaciones [(f + g) – (h + t)]

j. Realizar las operaciones [(gxt) + (f*h)]

4. En cada uno de los ejercicios siguientes decir si las relaciones dadas son o no funciones y dar una razón para su respuesta. En cada ejercicio hallar su dominio y recorrido

a) $y^2=4x$

b) $y=-3x + 2$

c) $y=\frac{3}{x}$

d) $x^2 + y^2=16$

e) $y=5 - x$

f) $x=y$

g) $y^2=4x^2$

h) $y=-x^2 -x - 6$

i) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

j) $y=3^x$

k) $y=lg_{\frac{1}{5}}x$

l) $y=lg5xlg_5x$

m) $y=lgx^3$

n) $y=e^{-x^2}$

o) $y=sen(2x + 3)$

p) $y=tg(x + \pi)$

q) $y=sec(3x - 45^o)$

5. Hallar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f:[0,\infty] \rightarrow [0,\infty]/f(x)=\sqrt{-x}$

b) $f: \Re R \rightarrow \Re/f(X)=2x^2 - 5$

c) $f:\Re - \{\frac{1}{5}\} \rightarrow \Re - \{\frac{2}{3}\}/f(x)=\frac{2x-7}{3x-5}$

d) $f:\Re \rightarrow \Re/f(x)=\sqrt{x+5}$

6. Estudiar las siguientes funciones:

a) $f: \Re \rightarrow \Re/f(x)=x^2 - 16x - 25$

b) $f:(-\infty,5] \rightarrow \Re/f(x)=x^2 - 16x - 25$,

c) $f:(-\infty,5] \rightarrow [0,\infty]/f(X)=x^2 - 16x - 25$

d) $f:(0,\infty] \rightarrow \Re - \{-1\}/f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$

7. En Renta Car el alquiler de un automóvil es de Bs. 25.500 más Bs. 2.500 por Km.

a) ¿Cual es el costo del alquiler de un automóvil para un viaje de 50 Km?

b) Exprese el costo del alquiler como una función del número de Km.

de viaje.

8. Sean f={($\frac{1}{2}$, 3), ($\frac{3}{2}$, 3), ($\frac{5}{2}$, 3), …....} y

g={(0, 1), ($\frac{1}{2}$, 2), (1, 3), ($\frac{3}{2}$, 4) ..,....}, hallar:

a) (f + g)

b) (f - g)

c) (f.g)

d) (f/g)

e) f^{-1}

f) (fog)

9. Sean f(x)=2x + 3, g(x)=$\sqrt{3x+5}$, h(x)=$3x^2 - 5x + 7$ y t(x)=$\frac{4x-3}{5x-7}$, hallar:

a) (f + g)x, b) (f - t)x, c) (g^2.t)x, d) (h/t)x, e) (g^{-1})x, f) (t^{-1})x, g) (fog)x,

h. (hog)x, i) (tog)x

10. Comprobar que (fogoh)x=[fo(goh)x]x=[(fog)xoh]x, e.i. que la composición de funciones cumple con la propiedad asociativa.

11. Represente gráficamente las siguientes funciones:

a) f(x)=x

b) g(x)=x^3

c) h(x)=$\sqrt[3]{x}$

d) t(x)=$\frac{1}{x}$

e) $s(x)=\sqrt{x}$

f) $v(x)=\frac{1}{x^2}$,

12. **Pepe Ganga ofrece la siguiente venta especial. Si se compra 5 camisas al precio total de 10.400 Bs. por camisa, entonces pueden comprarse camisas adicionales a mitad de precio. Hay un límite de 9 camisas por cliente. Exprese el costo de la compra de las camisas como una función del número comprado y grafique esta función.**

13. **La línea aérea Avior cobra por viaje de San Fernando a Maiquetía a los niños según la siguiente política: niños menores 2 años no pagan, niños con edades comprendidas entre 2 y 12 años pagan Bs. 50.000 y todo niño mayor de 12 años paga Bs. 80.000. Exprese el precio como una función de la edad de la persona y graficar esta función.**

14. **Basándonos en el ejercicio (11) sin cálculos adicionales graficar:**

a) $g(x)=(x - 3)^3$, $h(x)=x^3 + 5$, $t(x)=5 - (x - 2)^3$

b) $g(x)=\sqrt[3]{x} - 2$, $h(x)=\sqrt[3]{x+1}$, $t(x)=3 - \sqrt[3]{x}$,

c) $g(x)=\frac{1}{x} + 2$, $h(x)=3 - \frac{1}{2 - x}$

d) $g(x)=\sqrt{x+3}$, $h(x)=2 - \sqrt{x}$,

e) $g(x)=2 - \frac{1}{(x+2)^2}$, $h(x)= \frac{1}{(x+2)^2} - 1$

15. **Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las siguientes rectas y trazar su grafica:**

a. $y=3x$

b. $y=2x - 2$

c. $x + y=0$

d. $2x + 4y=12$

e. $x=-3$

f. $y=2$

16. Escribir la ecuación de la recta que tiene las siguientes propiedades:

a) Pasa por el punto (2, 1), con pendiente 3

b) Pasa por el punto $(\frac{12}{13}, \frac{1}{3})$ paralela al eje X

c) Pasa por el punto $(\frac{1}{4}, -1)$ paralela al eje Y

d) Pasa por los puntos (1, 3) y (2, 5)

e) Corta a los ejes de coordenadas en $x=3$ e $y=5$.

17. Encuentre un número real k tal que p(-1, 2) esté sobre la recta $kx - 5y + 2=0$

18. Encuentre una ecuación para la recta que satisface las condiciones que se dan a continuación:

a) Pasa por el punto p(2, -6) y tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$

b) Pasa por el punto p(10, -6) y es paralela al eje X

c) Pasa por el punto p(10, -6) y es perpendicular al eje Y

d) Pasa por el punto p(7, -3) y es perpendicular a la recta $2x - 5y - 8=0$

e) Pasa por el punto $p(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2})$ y es paralela a la recta $x + 3y - 1=0$

19. Hallar (f + g)x, ($f_x g$)x y ($\frac{f}{g}$)x con los siguientes pares de funciones:

a) f(x)=x + 1 y g(x)=$\frac{3}{x+1}$

b) f(x)=$\sqrt{x+3}$ y g(x)=x^3 + x

c) f(x)=x^2 – 1 y g(x)=$\sqrt{x+1}$

20. Muestre que las funciones: f(x)=$\sqrt{x^2-1}$ y g(x)=$|x|$ - 1, no son inyectivas.

21. Muestre que las funciones: f(x)=x + 1 y g(x)=$\frac{3}{x+1}$, son inyectivas

22. Supóngase que se han restringido los dominios de las funciones que se dan, de tal forma que se puede definir fog y gof. En cada caso hallar (fog)x y (gof)x:

a) f(x)=5x + 10 y g(x)=x^2 + 1

b) f(x)=$\sqrt{x+\sqrt{x}+1}$ y g(x)=x^2

c) f(x)=x^2 - 4 y g(x)=$\sqrt{2x-1}$

d) f(x)=$\frac{4x+2}{3x+5}$ y g(x)=2x +3

e) f(x)=$|x|$ - 2 y g(x)=-5

f) f(x)=x^2 + 1 y g(x)=$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+2}$

23. Hallar g de manera tal que fog=F, suponiendo que:

a) **$f(x)=x^2$ y $g(x)=\left(1-\frac{1}{x^4}\right)^2$**

b) **$f(x)=x^2+1$ y $g(x)=(2x^3-1)^2+1$**

24. **Para cada una de las funciones dadas, encuentre funciones f y g tales que h(x)=(gof)x:**

a) **$h(x)=\sqrt{2x-1}$**

b) **$h(x)=6(x-3)^2-x+2$**

25. **En cada una de las funciones F dadas, encuentre funciones f, g, y h tales que F(x)=h(g(f(x))):**

a) **$f(x)=\sqrt{(x-3)^3}$**

b) **$f(x)=\sqrt{(2x-3)^3}$**

c) **$f(x)=\ln(2x-5)^4$**

d) **$f(x)=\text{sen}^2(x+5)$**

26. **Las siguientes funciones pueden ser expresadas como una composición (fog)x. Determine las funciones f y g que forman dicha función:**

a) **$f(x)=(x-3)^5$**

b) **$f(x)=(x+3)^2+2$**

c) **$f(x)=\sqrt{x-5}$**

27. **Determinar si cada una de las funciones siguientes es inyectiva o**

no y halle su inversa en caso de que lo sea:

a) $f(x)=3x + 1$

b) $f(x)=x^3 – 1$

c) $f(x)=\frac{1}{1-x}$

d) $f(x)= 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

e) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

f) g) $f(x)=x^2 - 3x +2$

28. Obténgase la función inversa f^{-1} en cada caso:

a) $f(x)=3x + 1$

b) $f(x)=x^2 + 2x – 1$ con $x\geq-1$

c) $f(x)=x^4$ con $x\geq0$

d) $f(x)= \sqrt{x-3}$,

e) $f(x)=\frac{4x+5}{3x+1}$

f) $f(x)=x^3 + 1$

g) $f(x)=\frac{5x+2}{x}$

29. Sean $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x – 1$. Calcular: a) (fog)x, b) (gof)x c) f^{-1} d) g^{-1}

30. Cierto pozo de petróleo rinde 500 barriles de petróleo crudo por mes, que pueden ser vendidos a $ 30 por barril.

a) Establezca una función que exprese el ingreso total proveniente del pozo de petróleo.

b) ¿A cuánto ascenderán los ingresos provenientes del pozo de petróleo durante los próximos 6 meses?

31. Un alpinista asciende a la rata de 46.8 m/h. Después de 4 horas ha llegado a una altura de 1.435,2 mts.

a) Exprese la altura a que esta el alpinista como una función del tiempo y represente gráficamente esta función.

b) ¿A qué altura se encontraba cuando comenzó a escalar?

c) ¿A qué altura se encontrará al finalizar 6 horas?

32. Un constructor compra una maquinaria por un valor de Bs. 34.000.000 que deprecia linealmente de manera que su valor comercial después de 10 años será de Bs. 1.700.000.

a) Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad.

b) ¿Cuál es el valor de la maquinaria después de transcurridos 4 años?

c) ¿Cuál es el tiempo de vida comercial de la maquinaria?

33. El valor de cierto libro raro se duplica cada 10 años. El libro costaba originalmente Bs. 5.100.

a) ¿Cuánto vale el libro cuando tenga 30 años?, ¿cuándo tenga 40 años?

b) ¿Puede expresarse el valor del libro como una función de su antigüedad? Explique su respuesta.

34. El museo de Historia natural local cobra la entrada de grupos de acuerdo con la siguiente política: a los grupos menores de 50 personas, se les cobra una tarifa de Bs. 2.500 por persona, mientras que a los grupos de 50 personas o más se le cobra una tarifa reducida de Bs. 1.700 por persona.

a) Exprese la suma que ha de pagar un grupo por su entrada al museo como una función del tamaño del grupo y grafique.

b) ¿Para cuáles valores de la variable independiente tiene esta función una interpretación práctica?

c) ¿Cuánto dinero ahorrará un grupo de 49 personas en los costos de entrada si puede conseguir un miembro adicional?

35. Dadas las funciones definidas mediante $f(x)=x^2 - 2$, $g(x)=3x + 1$ y $h(x)=x$: hallar:

a) $(f + g)x$,

b) $(f - h)x$

c) $(g*h)x$

d) $\left(\frac{g}{h}\right)x$

e) $(g - f)x$

36. Los gráficos que se dan a continuación corresponden a las funciones y=f(x) e y=g(x), Determinar:

a) Dominio y recorrido de f(x) y g(x)

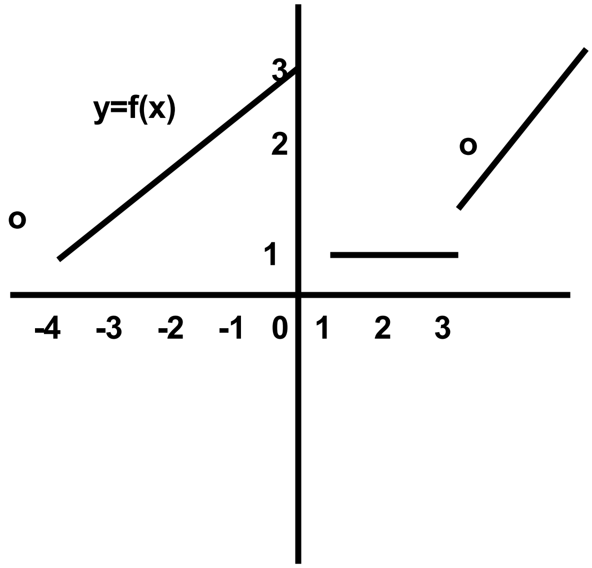
b) f(-4), f(0), f(1), f(2), f(3), y f(-6)

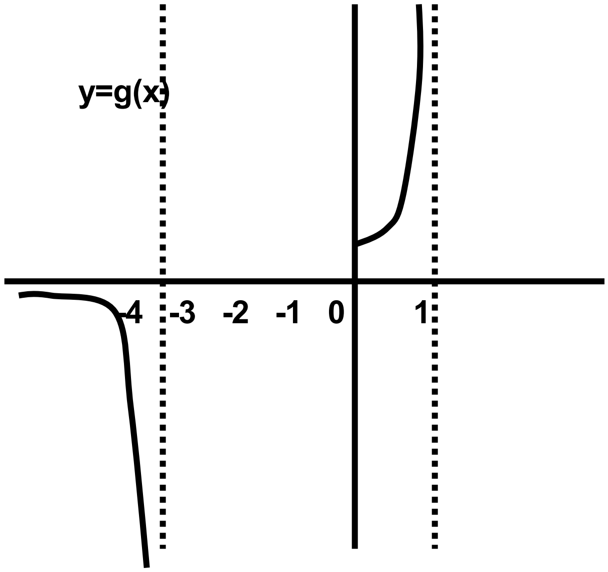
c) g(-4), g(0), g(2), g(3), g(4), g(5) y g(6)

d) **Si $y=f(x)=3$, ¿Cuál es el valor de x?**

e) **si $y=g(x)=3$ ¿Qué valores de x la satisfacen?**

f) **¿Es f una función inyectiva? De no serlo, cuales son las restricciones a su dominio que permiten a f ser inyectiva**





37. **Dados los polinomios $f(x)=3x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 7$**

$g(x)=4x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ y $h(x)=x^6 - 3x^2 + 5$ Hallar:

a) **$(f + g)x$**

b) **$(f - g)x$**

c) **$(f + g - 2h)x$**

d) **$(f - 3g - 2h)x$**

e) **$(f.g)x$**

f) **$h^2(x)$,**

g) **$(g.h)x$**

h) **$(g.f - h)x$**

38. En cada una de las funciones que se dan a continuación, determine su dominio y trace su grafica

a) $f(x)=|x-7|$

b) $f(x)=-\ |x-2|$

c) $f(x)=-|x|\ +2$

d) $f(x)=2|x|\ -3$

e) $f(x)=\frac{4x^2-1}{3x^2+1}$,

f) $f(x)=\sqrt{x+2}$

g) $f(x)=\frac{2x-1}{3x^2+1}$

h) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$

i) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-9}$,

j) $f(x)=\frac{x^3+9x^2+27x+35}{x+5}$

k) $f(x)=\frac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5}$

l) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

m) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 \text{ si } x>3 \\ 2x-1 \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

n) $f(x)=\begin{cases} 6x + 7 \text{ si } x\leq -2 \\ 4 - x \text{ si } x>-2 \end{cases}$

o) $f(x)=\begin{cases} x \text{ si } x\geq 3 \\ -2 \text{ si } x<-3 \end{cases}$

p) $f(x)=\begin{cases} -1 \text{ si } x\leq 0 \\ 2 \text{ si } 0<x<3 \\ 4 \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

q) $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\leq 2 \\ -x \text{ si } x>2 \end{cases}$

r) $f(x)=\begin{cases} -x + 4 \text{ si } x<-2 \\ |x| \quad \text{si } -2\leq x<3 \\ 5 \quad \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

39. Dados los polinomios $f(x)=2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x -3$, $g(x)=x - 3$, $h(x)=2x + 1$ Hallar:

a) $(\frac{f}{g})x$

b) $(\frac{f}{h})x$

38. Determine Q(x) y R(x) tales que P(x)=R(x)*Q(x). Si P(x) es la expresión dada en cada caso:

a) $P(x)=2x^2 - 3x + 1$

b) $P(x)=-3x^2 + 5x + 2$

c) $P(x)=7x^2 – 34x – 5$

d) $P(x)=3x^2 + 2x – 1$

e) $P(x)=x^3 – 3x^2 + x – 3$

f) $P(x)=x^3 – 2x^2 – 5x + 6$

g) $P(x)=2x^3 – 3x^2 – 5x + 6$

h) $P(x)=2x^4 – 5x^3 – 5x^2 + 5x + 3$

39. Determine en cada caso: R(x) tal que $R(x)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ Si:

a) $P(x)= 2x^4 – 5x^3 – 5x^2 + 5x + 3$, $Q(x)= 2x^2 – 3x + 1$

b) $P(x)=x^3 – 3x^2 + x – 3$, $Q(x)=3x^2 + 2x – 1$

c) $P(x)=x^3 – 2x^2 – 5x + 6$, $Q(x)=-3x^2 + 5x + 2$

40. Factorice, aplicando Ruffini:

a) $f(x)=-x^3 + 3x – 2$

b) $f(x)=2x^3 + 3x^2 - 11x – 6$

c) $f(x)=2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x – 3$,

d) $f(x)=24x^4 + 14x^3 – 13x^2 – 2x + 1$

e) $f(x)=x^6 - 1$

41. Aplique fracciones parciales a:

a) $h(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x-15}$

b) $h(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+6x^2+11x+6}$

c) $h(x)=\dfrac{3x^2-2}{6x^3+2x^2-24x-8}$

d) $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2-3x}{5x^4+19x^3-9x^2-19x+4}$

e) $h(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{24x^3-14x^2-x+1}$

42. Factorizar, aplicando las formulas: $x^n \pm y^n$, $\sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$

a) $f(x)=x^5 + 1$

b) $f(x)=3x^4 + 2$

c) $f(x)=x^6 + 6$

d) $f(x)=2 - x^5$

e) $f(x)=x^4 - 3$,

f) $f(x)= \sqrt[4]{x} - 5$

g) $f(x)= \sqrt[5]{x} + 4$

h) $f(x)= \sqrt[6]{x} + \sqrt[n]{2}$

43. Use la traslación en sentido vertical adecuada para representar gráficamente los siguientes polinomios:

a) $f(x)=x^2 + 3x + 4$

b) $f(x)=x^3 + x^2 + 5$

c) $f(x)=x^5 – 3x^3 + 3$

44. Representе Gráficamente los polinomios:

a) $f(x)=(x + 3)(x - 1)^2$

b) $f(x)=(x + 3)(x - 1)^3$

c) $f(x)=(x - 3)(x - 1)^4$

d) $f(x)=(x - 3)(x - 1)^5$

e) ¿Qué puede decir, sobre el comportamiento de cada gráfica en el apartado a) hasta el d) cerca del punto de Intersección (1,0)?

ii) Se dice que una raíz x_o de un polinomio f(x) es una <u>raíz de orden k</u>, si k es el mayor entero para el cual $(x - x_o)^k$ es un factor de f(x). Sobre la base de las observaciones hechas por usted en la parte i) ¿qué conclusión puede obtener acerca del comportamiento de la gráfica de un polinomio cerca del punto de intersección con el eje X proveniente de una raíz de orden par?, ¿qué conclusión puede obtener acerca del comportamiento de la gráfica de un polinomio cerca del punto de intersección con el eje X proveniente de una raíz de orden impar? De una justificación para las conclusiones obtenidas por usted

45. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $e^{2x}e^{5x}=e^{14}$

b) $\left(e^{5x+1}\right)^{2}=e$

c) $(27)^{2x}+1=\frac{1}{3}$

d) $3e^{3x+1}=5$

e) $6e^{1-x}+1=25$

f) $2(10)^{x}+(10)^{x}+1=4$

g) $4^{x+3}=7$

h) $5^{2x-5}=9$

i) $5(3^{x}-6)=10$

j) $4.5^{3-x}-7=2$,

k) $\frac{8}{3^{x}}=4$

l) $3^{x^{2}-5x+6}=1$

m) $2^{x+1}+4^{x}=288$

n) $2^{x}+2^{x+1}+2{\times}2^{x+2}=56$,

o) $5^{2x+2}+(25)^{x}+(25)^{x-1}=651$

p) $\sqrt[5]{8^{3x+2}}=\sqrt{3^{2x-1}}$

q) $169^{\sqrt{x}}-14.13^{\sqrt{x}}+13=0$,

r) $3^{x}{\times}3^{x+1}{\times}3^{x-2}=243$

s) $5^{2x-2}+5^{2x-3}+5^{2x-4}=\frac{155}{625}$

t) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}-5.2^{x+2}=-56$

a. $2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=64$

46. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmica:

a) $lg(x-3)=3$

b) $lg2(x+1)=4$

c) $lg4(3x-4)=2$

d) $lg4(2x+4)-3=lg43,$

e) $lg(3x-1)-lg(x-3)=2$

f) $lgx+lg(x-5)=2$

g) $lg3(2x+3)=4-lg3(x+6),$

h) $lg(x+2)^2=2$

i) $lg_3\frac{2}{x}=3+lg_2x$

j) $lnx=ln(3x+1)+1$

k) $lg(x^2-x-5)=0,$

l) $lg(3x+1)+lg(6x-1)=lg(9x-1)$

m) $(lgx)^2+6lgx+9=0$

n) $lg_{27}x+lg_9x=10,$

o) lg(x – 1)=0.25

p) $\lg_{\sqrt{x+2}} 130 = 16$

47. Transformar:

a) 0.45 radianes a grados

b) 2.25 radianes a grados

c) 0.33π radianes a grados

d) 1.25π radianes a grados

e) 15º a radianes

f) 45º25’30” a radianes

g) 100º20’38” a radianes

h) 290º35’42” a radianes

48. Si c es la hipotenusa y a y b los catetos opuestos y adyacentes respectivamente de un triángulo rectángulo, calcular en cada caso el lado que falta

a) a=10 cm. b=6cm.

b) a=30 cm. b=40 cm.

c) c=32 cm. a=12cm.

d) c=32 cm. b=20 cm.

e) c=100 cm. b=80 cm.

49. Hallar la hipotenusa c de un triángulo rectángulo isósceles si se sabe que:

a) a=4 cm.

b) a=6 cm.

c) a=15 cm.

d) a=9 cm.

e) a=11 cm.

50. Hallar la altura h de un triángulo equilatero si se sabe que:

a) l=18 cm.

b) l=12 cm.

c) l=6 cm.

d) l=15 cm.

e) l=45 cm.

51. Hallar el perímetro y el área de los siguientes triángulos rectángulos sabiendo que a y b son los catetos y c es la hipotenusa

a) c=30 cm. y a=25 cm.

b) c=7.5 cm. y b=5.25 cm.

c) c=5.3 cm. y a=4.7 cm.

d) a=22 cm. y b=45 cm.

e) a=30 cm. y b=40 cm.

52. Hallar los ángulos de los siguientes triángulos:

a) a=5,31 cm. b=10.91 cm. y c=13 cm.

b) a=85,04 cm. b=70 cm. y c=79.2 cm.

c) a=33 cm. b=51.47 cm. y c=46.25 cm.

d) a=28 cm. b=34 cm. y c=26 cm.

e) a=10.59 cm. b=14.77 cm. y c=20.15 cm.

53. Hallar el perímetro y el área de los siguientes triángulos

oblicuángulos:

a) **b=50 cm. c=66.6 cm. y $\angle$A=83°26 ´**

b) **a=60 cm. b=50 cm. y $\angle$C=78°28’**

c) **c=54.75 cm. b=318 cm. y $\angle$B=41°27’**

d) **b=61.52 cm. c=83.44cm. y $\angle$A=29°14’**

e) **b=40 cm. c=24.8 cm. y $\angle$A=98°9´**

54. **Calcular el valor de las siguientes razones trigonométricas:**

a) **sen48º**

b) **cos25º22’**

c) **tg28º32’20”**

d) $\sec\frac{3\pi}{4}$

e) $\csc\frac{2\pi}{3}$

f) **tg1.2π**

g) **sen25º + sen40º**

h) **cos70º - cos20º**

i) $\frac{\text{sen}24^{\circ}+\text{sen}56^{\circ}}{\cos 24^{\circ}+\cos 56}$

j) $\frac{\text{sen}5x-\text{sen}3x}{\cos 5x-\cos 3x}$

k) $\frac{4\text{sen}60^{\circ}-2\text{tg}^{2}30^{\circ}}{1-\cos^{2}30^{\circ}}$

l) $\frac{5\text{tg}30^{\circ}-\text{tg}45^{\circ}}{\cos 30^{\circ}}$

55. Demostrar que:

a) $\frac{\text{senx}-\text{ctgx}}{\text{tgx}-\text{cscx}}$=cosxxctgx

b) $\frac{\text{cos2x}}{\text{cosx}}$=2cosx – secx

c) $\frac{\text{secx}+\text{cscx}}{1+\text{tgx}}$=cscx

d) sec2x=$\frac{\text{tgx}}{1+\text{tg}^2\text{x}}$

e) $\frac{\text{cos2x}}{\text{senx}}$ + $\frac{\text{sen2x}}{\text{cosx}}$=cscx

g) $\frac{\text{secx}+\text{cosx}}{1+\text{tgx}}$=cscx

h) $\frac{1}{1-\text{senx}}+\frac{1}{1+\text{senx}}$=2sec^{2}x

i) $\frac{\text{secx}-\text{cscx}}{\text{secx}+\text{cscx}}=\frac{\text{tgx}-1}{\text{tgx}+1}$,

j) sec^{4}x – sec^{2}x=tg^{4}x + tg^{2}x

k) senx – sen^{3}x=tgxcos^{3}x

l) $\frac{1+\text{ctgx}}{\text{cscx}}=\frac{1+\text{tgx}}{\text{secx}}$

m) $\frac{\text{secx}+1}{\text{secx}-1}=\frac{1+\text{cosx}}{1-\text{cosx}}$

n) $\frac{\text{csc}^2\text{x}-1}{\text{sec}^2\text{x}-1}$=ctg^{4}x

o) $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$ =2secx,

p) $\frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ =1 + senxcosx

56. Hallar el valor de x en las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2tg^2x + 3\sec x=0\ x\in[0,2\pi]$

b) $\cos 2x + \cos x + 1=0\ \ x\in[0,2\pi]$

c) $10\cos^2 x - 6=0$

d) $\operatorname{sen}3x=\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x \quad x\in[0,2\pi]$

e) $\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ =2

f) $\cos 6x=1 - 2\operatorname{sen}^2 3x$,

g) $\operatorname{sen}x + 1=4\operatorname{sen}x - \cos 2x$

h) $\operatorname{sen}(60º - x) - \operatorname{sen}2x=0$

i) $\operatorname{sen}2x + \cos x=0$,

j) $2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=1 - \cos x$

BIBLIOGRAFIA

ANGEL Oneto (2001). Números, Anillos y Cuerpos. D.R © Editorial de la Universidad del Zulia (EDILUZ) Maracaibo Estado Zulia.

BALDOR (1987). Algebra Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Aritmética. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

B. DEMIDOVICH (1993). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Undécima Edición Editorial Paraninfo España.

CARDENAS, Humberto, RAGGI Francisco & LLuis Emilio. (1974). Algebra Superior. Editorial Trillas. México D.F.

CESAR R. Gallo P. (2005). Matemáticas para Estudiantes de Administración y Economía. Segunda Reimpresión Universidad Central de Venezuela Caracas.

ERNEST F. Haessler & Jr/Richard S. Paul (1992). Matemáticas para Administración y Economía. Segunda Edición Editorial Iberoamericana Puebla, México

FRALEIGH, John B. (1980) Calculo con Geometría Analítica. Versión en Español de Gonzalo Prada. Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México. Fondo Interamericano.

FRAN Ayres, Jr & ELLIOTT Mendelson (2001). Calculo. Cuarta Edición. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

FUENMAYOR Euro (1978). Matemáticas 1111 Universidad del Zulia Facultad Experimental de Ciencias Estudio Universitario Supervisados EUS. L.U.Z Maracaibo Estado Zulia.

GRANVILLE (1995) Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa, S.A de C.U Mexico D.F.

IGNACIO Bello (1998). Algebra Elemental. Editores Thomson Internacional (Universidad Abierta)

JEAN E. Weber (1982). Matemáticas para Administración y Economía. Cuarta Edición Editorial Harla de Venezuela C.A

LARSON, Roland & HOSTETLER Robert. (1989). Calculo y Geometría Analítica. Tercera Edición. Editorial McGraw-Hill.

LEITHOLD, Louis. (1992). El Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición. Editorial Harla. México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Harla México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Matemáticas Previas al Cálculo. Editorial Harla. México.

LIPSCHUTZ, Seymour, P.hd. (1991). Algebra Lineal. Editorial McGraw-Hill.

MAX PETTERS, Wuilliam S. (1979). Algebra y Trigonometría. Primera Edición. Editorial Reverté S.A. México. D.F.

MUNEN M.A. & YIZZE J.P. Precálculus Introducción Funcional. Segunda Edición. Editorial Reverté S.A. México D.F.

NAYIT, E. Lopéz V. (1991). Fundamentos de Geometría Plana. D.R Editorial de la Universidad del Zulia Maracaibo Estado Zulia.

PALOMA Sanz, FRANCISCO José Vázquez & Pedro Ortega (1998). Problemas de Algebra Lineal Cuestiones, Ejercicios y Tratamientos en Derive. Editorial PRENTICE HALL España Madrid.

PISKUNOV, N.(1995). Calculo Diferencial e Integral. 6ta edición Tomo I. Editorial LIMUSA. S.A de C.V México D.F.

PURCELL, Edwin J. (1991). Calculo con Geometría Analítica. Sexta Edición Traducción M. en Ciencias Elena de Ortega. Facultad de Ciencias. UNAM. Editorial Hispanoamericana, S.A. México.

ROBERT C. Drede & Murria Spieel. (2004). Calculo Avavzado. Editorial Mc. Graw-Hill/Interamericana de España S.A.U.

ROBERT T. Smith & RONAND B. Minton (2000). Calculo Tomo I. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

TAYLOR, H. Wade Thomas (1.976). Matemática Básica con Vectores. Primera Edición. Editorial Limusa, México D.F.

Matemática General

El libro está conformado por siete capítulos a lo largo de los cuales el autor hace un despliegue se sus conocimientos en esta área y brinda apoyo al lector sobre temas como teoría de conjuntos, conjuntos numéricos, teoría de conteo, desigualdades e intervalos y funciones reales. La presencia de numerosos ejercicios resueltos y formulados con la mayor cantidad de detalles posibles permiten al lector estudioso comprender sus fundamentos para aplicarlos luego en aquellas situaciones de la vida real que requieran de su uso. De igual forma, en cada capítulo se incluye gran cantidad de ejercicios por resolver, los cuales permiten tanto al estudiante como al docente contar con una base sobre la cual poner en práctica los aspectos teóricos explicados en la obra. La mayoría de las explicaciones dadas en la obra, sobre todo aquellas relacionadas con las funciones reales, se complementan con figuras que permiten ampliar la visión acerca del tema logrando de una manera armónica un equilibrio entre los aspectos numéricos y los gráficos.

ISBN: 978-980-248-247-4
9 789802 482474