Alirio Pérez

CÁLCULOS MATEMÁTICOS PARA INGENIEROS

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»

La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Colección: **Docencia Universitaria**

Cálculos matemáticos para ingenieros

Primera edición, 2020

Diseño de cubierta:
Gustavo Quintana

Maquetación:
Alirio Pérez

Depósito Legal: BA2020000018
ISBN: 978-980-248-246-7

UNELLEZ
Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales «Ezequiel Zamora»
La Universidad que Siembra

feduez
Fundación Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Indice

Capítulo		Pág.
	Prólogo	
0	Teoría de Conjuntos	
	Ejercicios Resueltos1	
	Ejercicios Propuestos	
	Conjuntos Numéricos	
I	Definiciones y propiedades sobre límite y continuidad de funciones de una variable real	
	Continuidad	
	Propiedades de las funciones contínuas	
	Ejercicios sobre límites	
	Ejercicios sobre continuidad	
II	Definiciones y propiedades sobre derivadas de funciones de una variable real	
	Ejercicos propuestos	
III	Aplicaciones de las derivadas al campo de la ingeniería	
	Ejercicios resueltos	
	Ejercicios propuestos	
IV	Definiciones, propiedades y tablas sobre integrales indefinidas de funciones de una variable real	
	Integración indefinida	
	Propiedades de la integral indefinida	
	Tabla de integración	
	Integración por fracciones parciales	
	Ejercicios resueltos	

	Ejercicios propuestos
V	Definiciones y propiedades sobre integrales definidas e impropias de funciones de una variable real
	Propiedades de las integrales definidas
	Ejercicios resueltos
	Ejercicios propuestos
VI	Aplicaciones de las integrales definidas al campo de la ingeniería y la física
	Ejercicios resueltos de cálculo de área
	Ejercicios propuestos de cálculo de área
	Valor promedio
	Volumen de revolución de sólidos
VII	Definiciones y propiedades sobre límite y continuidad de funciones de varias variables reales
	Ejercicios resueltos
	Ejercicios propuestos
VIII	Definiciones y propiedades sobre derivadas de funciones de varias variables reales
	Ejercicios resueltos
	Ejercicios propuestos
IX	Aplicación de las derivadas de funciones de varias variables al campo de la ingeniería
	Ejercicios resueltos
	Ejercicios propuestos
X	Definiciones y propiedades sobre integrales de funciones de varias variables reales
	Ejercicios resueltos

Ejercicios propuestos

XI Definiciones y propiedades sobre ecuaciones diferenciales de funciones de una variable real

Ejercicios resueltos

Ejercicios propuestos

XII Introducción de la transformada de Laplace

Tabla de algunas transformadas de Laplace

Ejercicios resueltos

Ejercicios propuestos

Bibliografía

Apéndices

PROLOGO

En el campo relacionado con la ingeniería es necesario conocer de muchas herramientas de matemáticas, de cálculo y análisis, ya que los modelos matemáticos son de gran importancia en este campo como en otros relacionados con la vida diaria. Para la creación de tales modelos necesitamos tener conocimientos sobre el algebra matricial, así como del cálculo diferencial e integral, entre estas se encuentran: la noción de limite y continuidad, las derivadas, la integral de Riemann, las ecuaciones diferenciales y las distintas transformadas integrales, entre otras herramientas del cálculo, es por esto que este libro texto para los estudiantes que estudian Ingeniería es de una importancia, así para todos aquellos estudiantes de cualquier rama de la técnica o ciencias sociales, en todas los Vicerrectorados o Escuelas de las Universidades Tradicionales o Privadas del país o cualquier parte del mundo, donde se imparten los tópicos antes mencionados, es por este motivo que se justifica que nuestra Universidad la UNELLEZ, se nivele en el aspecto para que nuestros egresados puedan competir con todos los profesionales de cualquier Universidad. Por medio de este Texto trato de aportar los conocimientos adquiridos en muchos años de experiencia en mi vida profesional de manera razonada, por otra parte también se justifica este libro ya que puede servir de guía para que los docentes que dicten los Sub-Proyectos o asignaturas de Matemática y Cálculo; y cualquier persona que necesite indagar a cerca de los limites, continuidad, derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace, puedan utilizarlo.

Este libro texto está dividido en 12 capítulos que contienen elementos matemáticos básicos y complejos que facilitaran la comprensión de una gama de definiciones. Por ser éste un texto básico, los usuarios tendrán que dedicar gran parte de su tiempo al mismo, sin olvidar que las operaciones básicas y el conjunto de los números reales vistas en los años anteriores y que se van a incluir en este texto en el Capítulo 0, van a ser predominante para el entendimiento del mismo.

Este libro texto pretende que los leyentes desarrollen su capacidad de análisis, aplicación y síntesis en el área de las Matemáticas que le ayuden fundamentalmente a la mejor comprensión de todos los Sub-Proyectos que cursará en su venidera carrera en nuestra Universidad y en su formación intelectual.

El Titulo que poseo es de Licenciado en Matemáticas egresado de la Universidad del Zulia y de Magíster Scientiaarum en Administración de la Universidad Ezequiel Zamora. Actualmente me desempeño como Profesor a dedicación exclusiva con categoría titular en la Universidad Ezequiel Zamora, en las Carreras de Administración, Contaduría, Educación e Ingeniería.

CAPÍTULO 0

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se estudiara: Definición de conjunto, Formas de denotar un conjunto, Cardinal de un conjunto, Inclusión de conjunto, Igualdad de conjunto, Conjunto vacío, Conjunto universal, Conjunto de las partes, Conjunto finito, Conjunto infinito, Unión de conjuntos, Intersección de conjuntos, Diferencia de conjuntos, Complemento de un conjunto, Cardinal del conjunto AUB, Cardinal del conjunto AUBUC y aplicación de los conjuntos a la vida real

Definición 1: Un *conjunto* se define como una agrupación de entes o cosas (llamados elementos), por ejemplo el conjunto formado por los alumnos de una sección de clases. Los conjuntos los *expresamos* con letras mayúscula, A, B, C, ... , los elementos de un conjunto con letras minúsculas encerrados entre llaves, por ejemplo, el conjunto A={a, b, c}, para decir que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos la letra griega $\in$, y para decir que un elemento no pertenece al conjunto utilizamos la misma letra pero atravesada por un /, por ejemplo a$\in$A, se lee a pertenece al conjunto A y d$\notin$A, d no pertenece al conjunto A.

Los conjuntos se denotan por:

a. *Por comprensión*: cuando se da una característica del conjunto, por ejemplo: el conjunto B={x/x es un Estado llanero} esta determinado por comprensión.

b. *Por extensión*: cuando se mencionan cada uno de los elementos de un conjunto, del ejemplo anterior el conjunto B expresado por extensión seria B={Apure, Barinas, Cojedes, Guarico, Portuguesa}.

Definición 2: El número de elementos que posee un conjunto recibe el nombre de *cardinal de un conjunto* y se denota con la letra n( ), por ejemplo, los cardinales de A y B se denotan como n(A)=3 y n(B)=5 respectivamente.

Definición 3: Un conjunto se dice que es *vacío* si no posee elementos, es decir, si su cardinal es igual a cero y se denota con la letra griega phi ϕ o { }, matemáticamente se define el conjunto vacío como $\phi =\{x\in A \wedge x\notin A\}$.

Definición 4: Se define *conjunto universal* como el conjunto de referencia que contiene un grupo de conjuntos dados, por ejemplo podemos tomar al Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Unellez como conjunto universal de los conjuntos formado por los salones, los Programas, las Coordinaciones, la Administración, etc. pero el Vicerrectorado de Planificación y Desarrollo Regional de la Unellez puede también ser conjunto de otro conjunto universal mas grande, por ejemplo San Fernando de Apure, pero San Fernando de Apure puede ser de otro conjunto universal mas grande, por ejemplo Venezuela y así sucesivamente.

Definición 5: Un conjunto es *finito* si su cardinal es contable, en caso contrario se dice que el conjunto es *infinito*, ejemplo, el conjunto A={a, b,

c} es un conjunto finito, mientras que el conjunto C={x/x es una estrella} es un conjunto infinito.

<u>Definición 6:</u> Decimos que un conjunto A esta <u>*incluido o es subconjunto de otro conjunto*</u> B si se cumple: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \wedge x \in B$, que se lee: A esta incluido en B, si y solo si, para todo elemento "x", el "x" perteneciente al conjunto A y el elemento "x" pertenece a B, y su representación gráfica es:

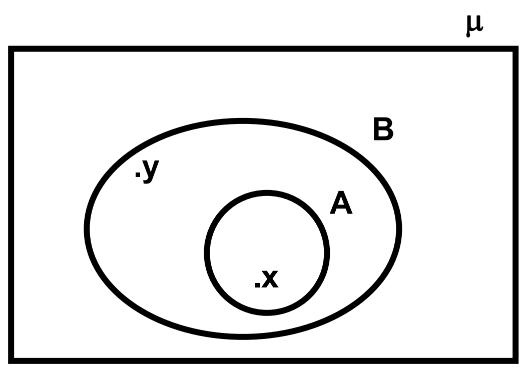


Fig. 1

Para decir que un conjunto no es subconjunto de un conjunto A no esta incluido en B, escribimos $A \not\subset B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$, que se lee A no esta incluido en B si y solo si "x" pertenece a A y "x" no pertenece a B, como podemos ver en el la Fig. 1, $B \not\subset A$, ya que, existe un y tal que "y" pertenece a B e "y" no pertenece a A, matemáticamente se escribe: $\exists y/(y \in B \wedge y \notin A)$.

<u>Definición 7:</u> Al conjunto de todos los subconjunto de un conjunto se le llama <u>*parte de un conjunto o potencia de un conjunto*</u> se denota por P(C), y su cardinal se encuentra por medio de la progresión geométrica $n[P(C)]=2^n$, donde n es el cardinal del conjunto, de aquí que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos y todo conjunto

es subconjunto de si mismo, por ejemplo el conjunto vacío tiene un solo subconjunto que es el mismo, $n[P(\phi)]=2^0= 1$ y el conjunto A tiene 8 subconjuntos ya que $n[P(A)]=2^3=8$, que en este caso son $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.

<u>Definición 8:</u> Dos conjuntos A y B se dicen que son <u>*iguales*</u> si y solamente si A esta incluido en B y además B esta incluido en A, matemáticamente esto se escribe: $A=B \Leftrightarrow (A\subset B \wedge B\subset A)$.

<u>Definición 9:</u> Se define la <u>*unión*</u> de dos conjuntos A y B como los elementos "x" que pertenecen al conjunto A o los elementos de "x" que pertenecen al conjunto B, es decir, "x" pertenece a la unión de A y B, si y solo si "x" esta en A o "x" esta en B, matemáticamente: $x\in AUB \Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B)$, esto se ilustra gráficamente en las figuras 2, 3 y 4.

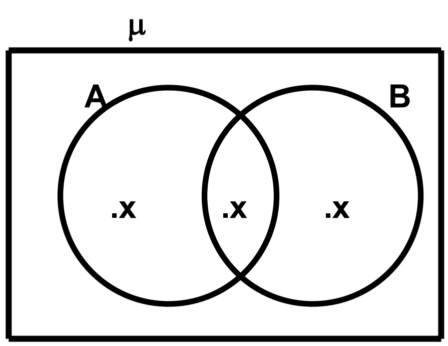


Fig. 2

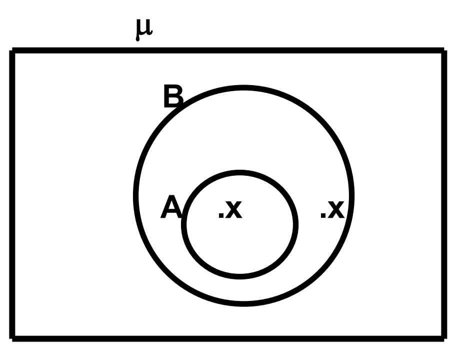


Fig. 3

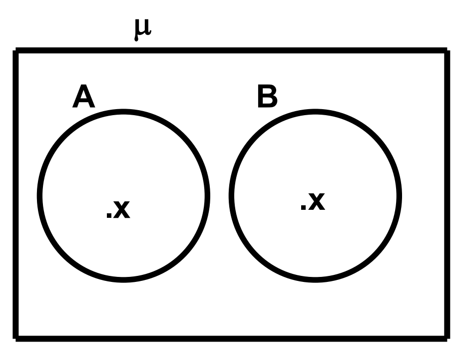


Fig. 4

De la Fig. 3 podemos deducir el siguiente teorema: si $A\subset B \Rightarrow AUB=B$.

Decimos que un elemento "x" no pertenece a la unión de dos conjuntos A y B si "x" no está ni en A ni en B, matemáticamente $x \notin AUB \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$.

<u>Definición 10:</u> Se define la <u>*Intersección*</u> de los conjuntos A y B ($\cap$) como: el elemento "x" que pertenece tanto a A como a B, es decir son los elementos comunes a los dos conjuntos, matemáticamente: $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.

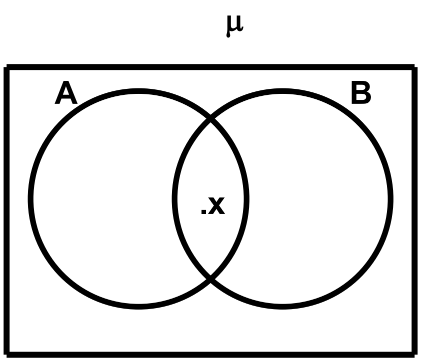


Fig. 5

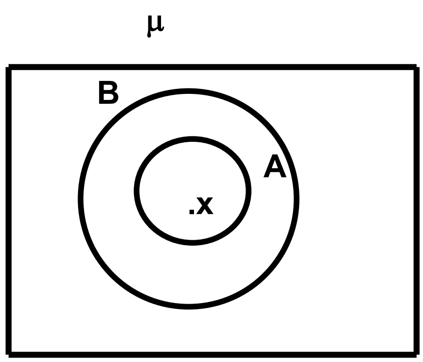


Fig. 6

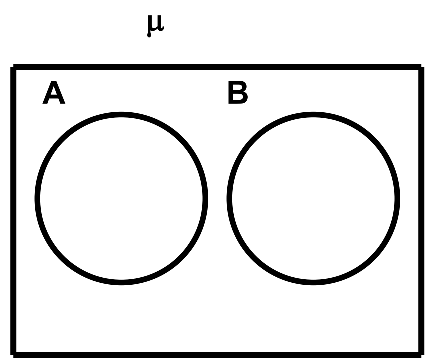


Fig. 7

De la Fig. 6 podemos deducir el siguiente teorema: Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

Si x no esta en la intersección se dan las siguientes conjeturas:

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow \text{x esta en A pero no esta en B} \\ x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow \text{x no esta en A pero si esta en B} \\ x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow \text{x no esta ni en A ni en B} \end{cases}$$

De estas tres conjeturas se obtiene $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$, es decir, si x no esta en A o no esta en la intersección o si x no esta en B tampoco esta en la intersección.

<u>Definición 11:</u> Se define la <u>*diferencia (-) de los conjuntos A y B*</u> como: como el elemento "x", que esta en A pero no esta en B, matemáticamente: $x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.

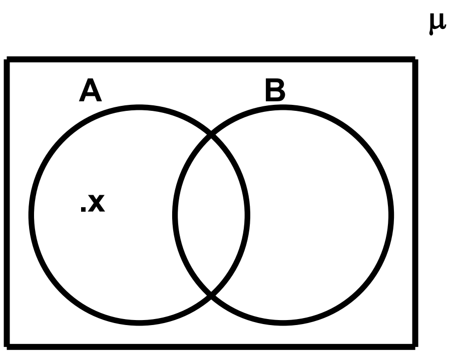


Fig. 8

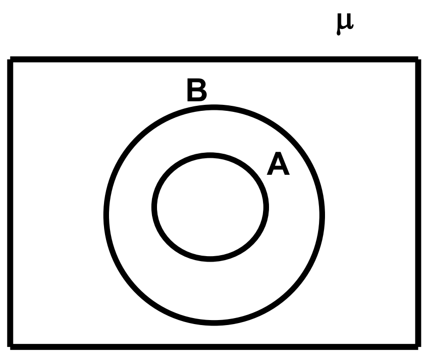


Fig. 9

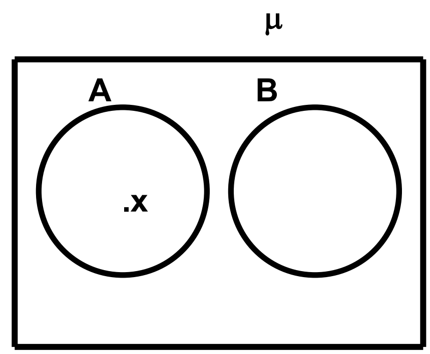


Fig. 10

De la Fig. 9 podemos deducir el siguiente teorema: Si $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$.

Si x no esta en la diferencia se dan las siguientes conjeturas:

$$x \notin A - B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \text{x esta en A y x esta en B} \\ x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow \text{x no esta en A pero si esta en B} \\ x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow \text{x no esta ni en A ni en B} \end{cases}$$

De estas tres conjeturas se obtiene $x \notin A - B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$, es decir, si x no esta en A, no esta en la diferencia o si x esta en B, tampoco esta en la diferencia.

<u>Definición 12:</u> Se define el <u>*Complemento de un conjunto A*</u> como: *(A') el elemento "x" que esta en el conjunto universal y no esta en el conjunto A, matemáticamente:* $x \in A' \Leftrightarrow (x \in \mu \wedge x \notin A)$, es decir, $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$, si pertenece al complemento del conjunto A, entonces x no esta en A, o viceversa, si esta en A no esta en su complemento, es decir, la unión del conjunto A con su complemento A' es el conjunto universal: $A \cup A' = \mu$ y el

conjunto A interceptado con su complemento resulta el conjunto Vació: $A \cap A' = \phi$

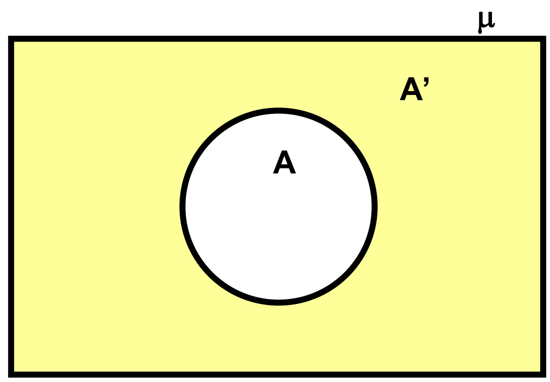


Fig. 11

<u>Ejemplo:</u> Sea el conjunto universal μ={1, 2, 3, ..., 10} y los conjuntos A={1, 2, 3, 4, 5}, B={1, 3, 4, 6, 7} y C={2, 4, 6, 8} si estamos interesados en hallar: AUB, $A \cap C$, $A \cap$(BUC), A-C y [($A \cap B$)-C]', lo primero que hacemos es representar los conjuntos μ, A, B y C gráficamente ver la Fig. 12, luego aplicamos las definiciones de unión, intersección, diferencia y complemento, obtenemos:

a. AUB={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

b. $A \cap C$={2, 4}

c. $A \cap$(BUC)={2, 4}

d. A-C={1, 3, 5}

e. [¨($A \cap B$)-C]'={2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

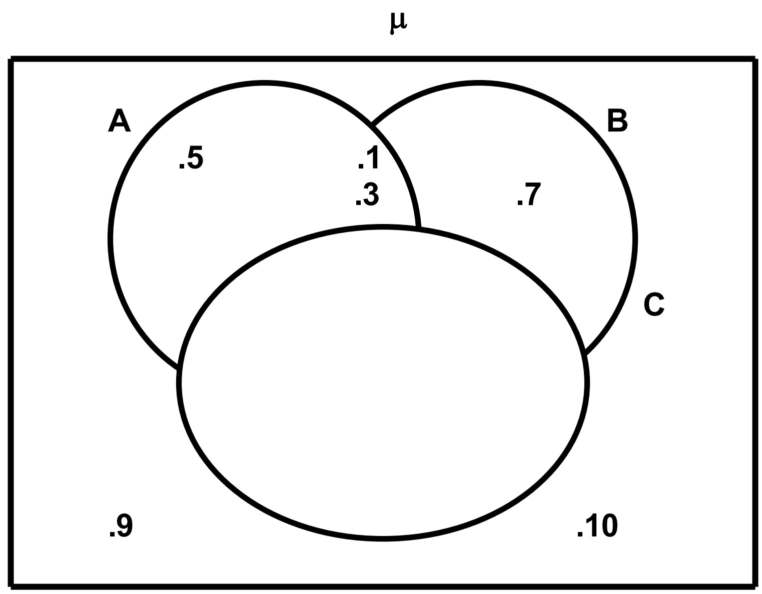


Fig. 12

<u>Definición 13:</u> Se define el <u>*cardinal del conjunto AUB*</u>, como el número de elemento que esta en A o esta en B y se obtiene por la formula: n(AUB)= n(A) + n(B) - n(A∩B) y su representación gráfica esta en la Fig. 13:

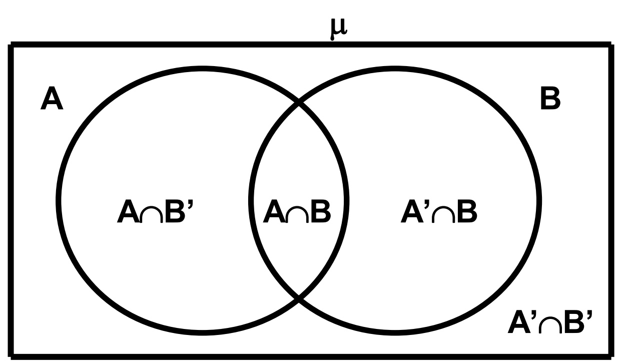


Fig. 13

<u>Definición 14:</u> Se define el <u>*cardinal del conjunto AUBUC*</u>, como el número de elemento que esta en A o esta en B o esta en C, y se obtiene por la formula:

n(AUBUC)= n(A) + n(B) + n(C) - n(A∩B) - n(A∩C) - n(B∩C) + n(A∩B∩C) y su grafica se muestra en la Fig. 14

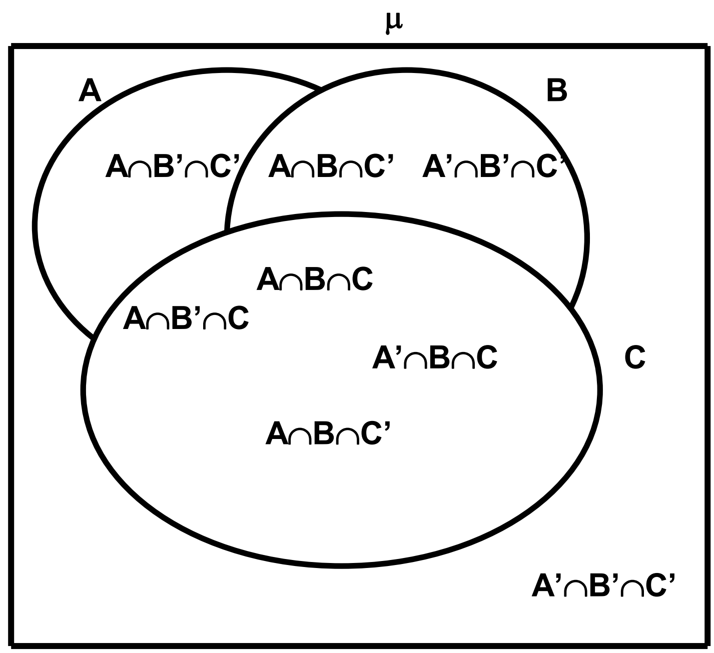


Fig. 14

De la Fig. 14 se tiene que:

$n(\mu)=n(AUBUC) \quad + \quad n(A'\cap B'\cap C') \quad \Rightarrow$

$n(A'\cap B'\cap C')= n(\mu) \quad - \quad n(AUBUC)$ o $n(AUBUC)=n(\mu) - n(A'\cap B'\cap C')$

<u>Ejemplo</u>: En reunión del Coordinador de Extensión con los Facilitadores del curso de Aritmética para la escogencia de los días en que se dictará el curso de Aritmética, el Coordinador de extensión recomendó que el curso se puede realizar en tres días los cuales son: lunes de 2:00 p.m. a 6:00 p.m., miércoles de 2:00 pm. a 6:00 p.m. y los viernes de 8:00 a.m. a 12:00 m.

En consulta con los Facilitadores (17) para ver que día de los antes mencionados ellos no querían la sesión de clases, se obtuvo la siguiente información:

8 no querían las clases los lunes

8 no querían las clases los miércoles

6 no querían las clases los viernes

4 no querían las clases los lunes y miércoles

3 no querían las clases los lunes y viernes

2 no querían las clases miércoles y viernes

1 no querían las clases los tres días antes mencionados.

Se desea saber:

a. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases uno de los días mencionados?

b. ¿Cuántos de los Facilitadores querían las clases los días mencionados?

c. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes exclusivamente?

d. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los miércoles exclusivamente?

e. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los viernes exclusivamente?

f. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes y miércoles exclusivamente?

g. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los lunes y viernes exclusivamente?

h. ¿Cuántos de los Facilitadores no querían las clases los miércoles y viernes exclusivamente?

<u>Solución:</u> Denotaremos los que no querían las clases los lunes por n(L), los que no querían las clases los miércoles por n(M) y los que no querían las clases los viernes por n(V).

<u>Datos:</u> n(L)=8, n(M)=8, n(V)=6, $n(L\cap M)=4$, $n(L\cap V)=3$, $n(M\cap V)=2$, $n(L\cap M\cap V)=1$,

a. **n(LUMUV)=?**

b. **$n(L'\cap M\cap V)$=?**

c. **$n(L\cap M'\cap V)$=?**

d. **$n(L\cap M\cap V')$=?**

e. **$n(L\cap M'\cap V')$=?**

f. **$n(L'\cap M\cap V')$=?**

g. **$n(L'\cap M'\cap V)$=?**

h. **h.- $n(L\cap M'\cap V')$=? Solución:**

a. **Según la fórmula para el cardinal de AUBUC, tenemos: n(LUMUV)=n(L) + n(M) + n(V) - $n(L\cap M)$ - $n(L\cap V)$ - $n(M\cap V)$ + $n(L\cap M\cap V)$ $\Rightarrow$ n(AUBUC)=8 + 8 + 6 – 4 – 3 – 2 + 1=14 $\Rightarrow$ n(AUBUC)=14, lo que quiere decir que hay 14 Facilitatores que no quieren clases los lunes o los miércoles o los viernes**

b. **Como n(μ)=n(LUMUV) + $n(L'\cap M'\cap V')$ $\Rightarrow$ $n(L'\cap M'\cap V')$=n(μ)- n(AUBUC) $\Rightarrow$ $n(L'\cap M'\cap V')$=17 – 14=3, existen tres Facilitadores que quieren clases los días lunes, miércoles y viernes.**

Para el resto de las preguntas la obtenemos mediante la Fig. 15. Sabemos que 4 no quieren clases ni los lunes ni los miércoles, pero

además sabemos que entre esos 4 hay 1 que además no quiere clases los viernes, es decir los que no quieren clases exclusivamente los lunes y miércoles son 3 Facilitadores, de igual manera se llega a la conclusión de que los que no quieren clases exclusivamente los lunes y viernes son 2 Facilitadores y los que no quieren clase los miércoles y viernes exclusivamente es 1 Facilitador, los que no quieren clases exclusivamente los lunes son 2 Facilitadores, los que no quieren clases exclusivamente los miércoles son 3 Facilitadores y los que no quieren clases exclusivamente los viernes son 2 Facilitadores.

μ=17

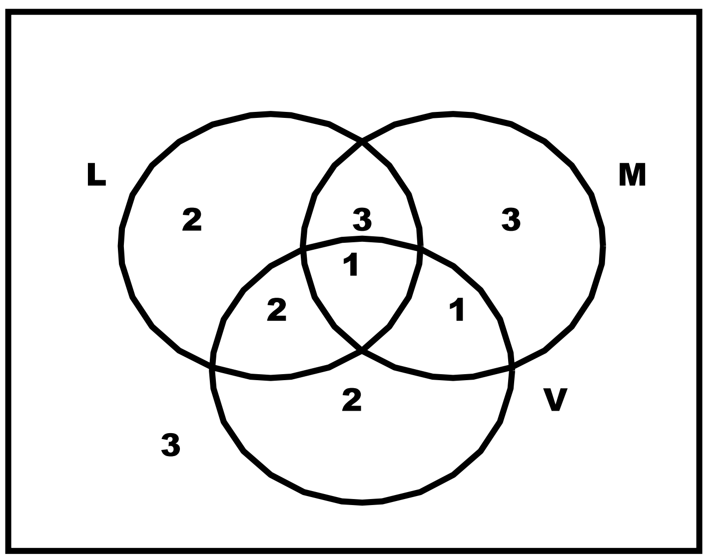


Fig. 15

<u>EJERCICIOS RESUELTOS</u>

1. **Expresar por extensión cada uno de los conjuntos que se dan por comprensión.**

a) **$A=\{x/x \in Z/x^2 + x - 12=0\}$**

Solución: Factorizando $x^2 + x - 12=0$, buscamos dos números que multiplicados resulta -12 y restados resulte 1, todos estos números se obtienen de la descomposición del -12, es decir, $-12=-2_x2_x3$, por lo tanto, los números son: $x=-4$ y $x=3 \Rightarrow (x + 4)(x - 3)=0$, aplicando la propiedad de los reales $a_xb=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$, tenemos que $(x + 4)(x - 3)=0 \Rightarrow x=-4$ y $x=3$, por lo tanto, la solución es $A=\{-4, 3\}$

b) $B=\{x/x\in Q/6x^2 - 7x - 20=0\}$

Solución: Factorizando $6x^2 - 7x - 20=0$, multiplicamos toda la ecuación por 6 (elemento neutro de la suma en serie o multiplicación), $(6x)^2 – 7(6x) - 120=0$, ahora buscamos dos números que multiplicados de -120 y restados de -7, estos números se obtienen de la descomposición del -120, es decir, $-120=-2_x2_x2_x3_x5$, luego los números son: $6x=8$ y $6x=-15$, $\therefore$ $(6x + 8)(6x - 15)=0$, aplicando la propiedad de los reales $a_xb=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$, tenemos que $(6x + 8)(6x - 15)=0 \Rightarrow 6x=-8 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$ y $6x=15 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$ y $x=\frac{5}{2}$, por lo tanto, la solución es $B=\{-\frac{4}{3},\frac{5}{2}\}$

c) $C=\{x/x\in Q'/x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 2=0\}$

Solución: Completando cuadrado en la ecuación $x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 2=0$, tenemos $(x - \sqrt{2})^2 - 2 - 2=0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})^2 - 4=0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})^2 - 2^2=0$, aplicando la identidad $a^2 – b^2=(a – b)(a + b)$, donde $a=x - \sqrt{2}$ y $b=2$ se tiene

(x - $\sqrt{2}$ - 2)(x - $\sqrt{2}$ + 2)=0, aplicando la propiedad de los reales a$_x$b=0 $\Rightarrow$ a=0 o b=0, tenemos que x - $\sqrt{2}$ - 2=0 $\Rightarrow$ x=2 + $\sqrt{2}$ o x - $\sqrt{2}$ + 2=0 $\Rightarrow$ x=-2 + $\sqrt{2}$, por lo tanto, son ceros C={-2 + $\sqrt{2}$,2 + $\sqrt{2}$ }

d) D={x/x$\in\Re$/ $x^2-(3+2\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$ }

Solución: En este problema factorizaremos la ecuación $x^2-(3+2\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$, aplicando la fórmula: ax^2 + bx +c=0 $\Rightarrow$ x= $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a=1, b=-(3 + 3$\sqrt{3}$) y c=3$\sqrt{3}$, se tiene que: x= $\dfrac{-(3+2\sqrt{3})\pm\sqrt{(3+2\sqrt{3})^2-4_x3\sqrt{3}}}{2}$ $\Rightarrow$ x=$\dfrac{-(3+2\sqrt{3})\pm\sqrt{21}}{2}$ $\Rightarrow$ x= $\dfrac{-3-(2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$ $\vee$ x=$\dfrac{-3-(2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$, luego la solución es D={ $\dfrac{-3-(2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$, $\dfrac{-3-(2\sqrt{3}+\sqrt{21})}{2}$ }

2. Expresar por comprensión cada uno de los siguientes conjuntos que se dan por extensión.

a) A={-3,5}

Solución: tomando x_1=-3 y x_2=5, podemos escribir:

(x – 5)(x + 3)=0, resolviendo el producto notable (x – 5)(x + 3)=0 $\Rightarrow$ x^2 + 3x - 5x - 15=0 $\Rightarrow$ x^2 - 2x - 15=0, en consecuencia la solución es A={x/x$\in$Z/x^2 - 2x - 15=0}

b) $B=\{\frac{1}{2},-\frac{4}{3}\}$

<u>Solución</u>: tomando $x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{4}{3}$, se puede escribir:

$(x-\frac{1}{2})(x+\frac{4}{3})=0 \Rightarrow (2x-1)(3x+4)=0$, resolviendo el producto notable:

$6x^2+8x-3x-4=0 \Rightarrow 6x^2+5x-4=0$, con lo que tenemos que la solución es

$B=\{x/x\in Q/6x^2+5x-4=0\}$

c) $\{\sqrt{2},-\sqrt{5}\}$

<u>Solución</u>: tomando $x_1=\sqrt{2}$ y $x_2=-\sqrt{5}$, tenemos que:

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{5})=0 \Rightarrow x^2+\sqrt{5}x-\sqrt{2}x-10=0 \Rightarrow x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{2})x-10=0$, en consecuencia la solución es $C=\{x/x\in Q'/\ x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{2})x-10=0\}$

d) $\{\frac{1}{4},\sqrt{3}\}\{\sqrt{2},-\sqrt{5}\}$

<u>Solución</u>: tomando $x_1=\frac{1}{4}$ y $x_2=\sqrt{3}$, tenemos que:

$(x-\frac{1}{4})(x-\sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad (4x-1)(x-\sqrt{3})=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2-4\sqrt{3}x-x+\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow x^2-(4\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0 \therefore$ la solución es:

$C=\{x/x\in\Re/x^2-(4\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0\}$

3. Sean A, B y C tres conjuntos tales que: $(A\cup B)\subset A\cup C)$ y $(A\cap B)\subset(A\cap C)$. ¿Qué se puede decir de los conjuntos B y C?

<u>Solución</u>: Demostremos por la doble implicación:

($\Leftarrow$ como $(A\cup B)\subset(A\cup C)$ implica que la parte de B que no esta contenida en A, debe estar contenida en C. Si $x\in B$ pero $x\notin A \Rightarrow x\in A\cup B$, pero por hipótesis $A\cup B\subset A\cup C \Rightarrow x\in A\cup C$, $x\notin A \Rightarrow x\in C$

($\Rightarrow$ El que $(A\cap B)\subset(A\cap C)$ implica también que la parte de B contenida en A esta contenida en C.

Si $x\in B$ y $x\in A \Rightarrow x\in(A\cap B)\subset A\cap C)\subset C \Rightarrow x\in C$, luego, si $x\in B$ (tanto si $x\in A$ como si $x\notin A$) $\Rightarrow x\in C$ $\therefore$ podemos decir que $B\subset C$

4. En la sección A de matemática I de la Carrera de Planificación están inscritos 72 alumnos, de los cuales 22 aprobaron el módulo I, 26 aprobaron el módulo II, 30 aprobaron el módulo III, 6 aprobaron el modulo I y II, 8 aprobaron el módulo I y III, 10 aprobaron el módulo II y III, 16 no aprobaron ninguno de los tres módulos. Se desea saber:

a) ¿Cuántos alumnos aprobaron el módulo I o el módulo II o el módulo III?

b) ¿Cuántos alumnos aprobaron los tres módulos simultáneamente?

c) ¿Cuántos alumnos aprobaron exclusivamente el módulo I?

d) ¿Cuántos alumnos aprobaron exclusivamente el módulo II y III?

Datos:

$\mu=72$

$n(I)=22$

$n(II)=26$

$n(III)=30$

$n(I\wedge II)=6$

$n(I \wedge III)=8$

$n(II \wedge III)=10$

$n(I' \wedge II' \wedge III')=16$

$n(I \vee II \vee III)=?$

$n(I \wedge II \wedge III)=?$

$n(I \wedge II' \wedge III')=?$

$n(I' \wedge II \wedge III)=?$

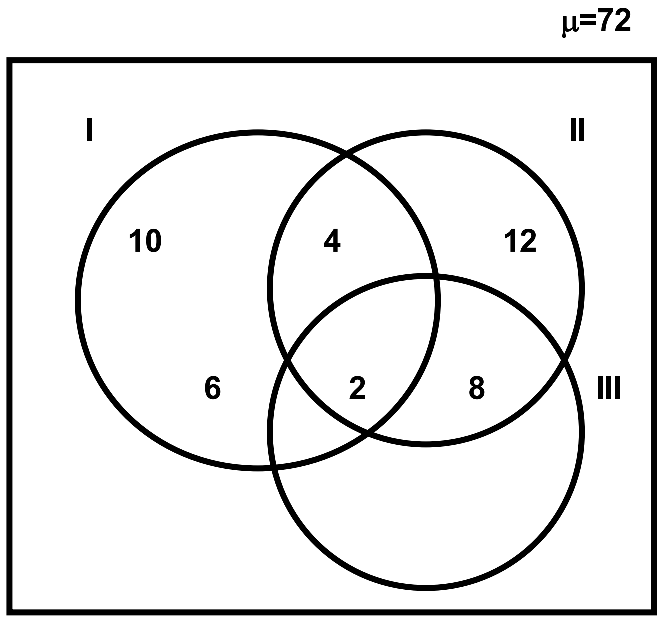
<u>Solución</u>: a) Aplicando la fórmula: $n(\mu)=n(I \vee II \vee III) + n(I' \wedge II' \wedge III') \Rightarrow 72=n(I \vee II \vee III) + 16 \Rightarrow n(I \vee II \vee III)=72 - 16 \Rightarrow n(I \vee II \vee III)=56$, $\therefore$ los alumnos que aprobaron o el módulo I o el módulo II o el módulo III son 56

Solución b) Aplicando la fórmula:

$n(I \vee II \vee III)=n(I) + n(II) + n(III) - n(I \wedge II) - n(I \wedge III) - n(II \wedge III) + n(I \wedge II \wedge III) \Rightarrow$

$56=22 + 26 + 30 - 6 - 8 - 10 + n(I \wedge II \wedge III) \Rightarrow n(I \wedge II \wedge III)=56 - 54 \Rightarrow n(I \wedge II \wedge III)=2$ $\therefore$ los alumnos que aprobaron los tres módulos simultáneamente son 2

Para la solución c) y d) realizaremos primero el diagrama de Venn, con los datos obtenidos



14

16

Fig. 16

Este diagrama se obtuvo aplicando las fórmulas:

$n(I\wedge II)=n(I\wedge II\wedge III') + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 6=n(I\wedge II\wedge III') + 2 \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III')=4$

$n(I\wedge III)=n(I\wedge II'\wedge III) + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 8=n(I\wedge II'\wedge III) + 2 \Rightarrow n(I\wedge II'\wedge III)=6$

$n(II\wedge II)=n(I'\wedge II\wedge III) + n(I\wedge II\wedge III) \Rightarrow 10=n(I'\wedge II\wedge III) + 2 \Rightarrow n(I\wedge II\wedge III')=8$

$n(I)=n(I\wedge II) + n(I\wedge II'\wedge III) + n(I\wedge II'\wedge III') \Rightarrow 22=6 + 6 + n(I'\wedge II'\wedge III') \Rightarrow n(I\wedge II'\wedge III')=10$

$n(II)=n(I\wedge II) + n(I'\wedge II\wedge III) + n(I'\wedge II\wedge III') \Rightarrow 26=6 + 8 + n(I'\wedge II\wedge III') \Rightarrow n(I'\wedge II\wedge III')=12$

$n(III)=n(I\wedge III) + n(I'\wedge II\wedge III) + n(I'\wedge II'\wedge III) \Rightarrow 30=8 + 8 + n(I'\wedge II'\wedge III) \Rightarrow n(I'\wedge II'\wedge III)=14$, luego, solución c) los alumnos aprobaron exclusivamente el módulo I son 10 y la solución d) los alumnos aprobaron exclusivamente el módulo II y III son 14.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean los conjuntos: A={{1. 2},{3, 4, 5}, {7}}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y C={{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}}.

¿Cuales de las siguientes expresiones son verdaderas y cuales son falsas?

a. $\{1, 2\}\in A$ ( )

b. $\{1, 2\}\subset A$ ( )

c. $\{1, 2\}\in B$ ( )

d. $\{1, 2\}\subset B$ ( )

e. $\{1, 2\}\in C$ ( )

f. $\{1, 2\}\subset C$ ( )

g. $\{1\}\in A$ ( )

h. $\{1\}\in B$ ( )

i. $\{1\}\in C$ ( )

j. $\{1\}\subset A$ ( )

k. $\{1\}\subset B$ ( )

l. $\{2\}\subset B$ ( )

2. Simplificar la expresión: $(((A\cup B)'\cap C')\cap(B\cup(A\cup B)'))\cup((A\cap B)'\cup A')$

3. Sean los conjuntos: *u*={1, 2, 3, ..., 15}, A={1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}, B={1, 2, 6, 7, 11, 12} y C={1, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15}. Hallar:

a. AUBUC

b. $A \cap B \cap C$

c. $(A-B) \cap (C-A)$

d. $[(A'-C')-B']'$

e. $A' \cap B' \cap C'$.

4. En cierto problema el universo de referencia es el conjunto $\mu=\{1, 2, ..., 9, a, b, ..., g\}$, $A=\{1, 2, 4, 5, 8, b, c, d, f\}$, $B=\{1, 4, 9, a, d, g\}$, y $C=\{3, 5, 9, A\}$. Calcular y representar gráficamente:

a. AUB, BUC

b. (AUB)UC

c. $A \cap C$, $(A \cap B) \cap C$

d. A-B, (AUB)-C

e. $(A \cap B)-(A \cap C)$

f. A'

g. (AUB)'

h. (A-B)'

i. P(C)

j. $P(A \cap C)$

k. $P(B \cap C)$

l. En cada caso diga el cardinal del conjunto

5. Sea el conjunto universal el dado en el problema anterior y dados los conjuntos $A=\{a, c, e, g\}$; $B=\{a, d, g\}$ y $C=\{a, b, e, h\}$. Hallar:

a. (AUB)-C

b. A'-(B-C)

c. $(B \cap C)'-A' \cap B'$

6. Expresar por comprensión, extensión, hallar el cardinal y el conjunto de las partes del conjunto cuyos elementos son los puntos cardinales.

7. Sea μ el conjunto cuyos elementos están formado por los estados de Venezuela y sus capitales.

Expresar por comprensión y extensión el conjunto μ y cada uno de los siguientes subconjuntos de μ que se dan a continuación.

a. Los Estados orientales de Venezuela.

b. Los Estados centrales de Venezuela.

c. Los Estados occidentales de Venezuela.

d. Los Estados andinos de Venezuela.

e. Las capitales los Estados llaneros de Venezuela.

f. Las capitales los Estados del sur de Venezuela

g. Las capitales los Estados orientales de Venezuela.

h. La capital de Venezuela.

8. Dados los conjuntos:

A={x/x son todos los carros de Venezuela}

$B=\{x/x \in Z\}$

$C=\{x/x \in Z^{+}$ y además $/1 \leq Z^{+} \leq 100\}$

Indique cuales de estos conjuntos son finitos e infinitos

9. Dados los conjuntos:

$A=\{x$ es de la forma $2x + 1/1 \leq x \leq 4\}$

$B=\{x$ es de la forma $2x + 1/1 \leq x \leq 4\}$

C={x es de la forma 2x + 1/1≤x≤4}

Indique en los casos que se dan a continuación si están incluidos (⊂) o no están incluidos (⊄) en los siguientes pares de conjuntos:

A_____B A_____C B_____A B_____C C_____A C_____B

10. Comprobar por medio de las propiedades de los conjuntos que:

a. $A \cup B = B \cup A$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d. $(A \cup B)' = A' \cap B$

e. $A - B = A \cap B'$

f. $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$

g. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$**, Resultado este que recibe el nombre de diferencia simétrica entre A y B y se denota por** $A \Delta B$

h. $((A \cup \mu) \cap (A \cap \phi) = \phi$

11. ¿Es posible calcular los elementos del conjunto C y sus subconjuntos A y B sabiendo que C – A={2, 9, 13, 18, 20}, C – B={2, 6, 8, 20} y A – B={1, 5, 6, 14}

12. El Concesionario del comedor de la UNELLEZ realiza una encuesta entre los estudiantes que lo utilizan, para determinar el porcentaje que prefieren leche en polvo o leche pasteurizada; obteniéndose los siguientes resultados:

55% prefieren leche en polvo

35% prefieren leche pasteurizada

30% no tienen preferencia por ninguno de los dos tipos

Se desea saber:

a. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren leche en polvo o leche pasteurizada?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren leche en polvo y leche pasteurizada?

c. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren exclusivamente leche en polvo?

d. ¿Qué porcentaje de estudiantes prefieren exclusivamente leche pasteurizada?

13. El INAVI exige como requisito primordial para la adjudicación de una vivienda, que los solicitantes sean casados, no posean vivienda propia y tengan un ingreso mensual igual o menor al sueldo mínimo. El INAVI recibió 5.000 solicitudes de personas que desean obtener viviendas y al procesar dichas solicitudes se obtuvieron los resultados:

3.050 solicitantes de personas casadas

2.450 solicitantes de personas que no poseen vivienda propia

3.650 solicitantes de personas cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

1.500 solicitantes de personas que son casadas, pero no poseen vivienda propia

2.500 solicitantes de personas casadas y cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

1.700 solicitantes de personas que no poseen vivienda propia y cuyo ingreso es el sueldo mínimo o inferior

4.650 solicitantes cumplen por lo menos con uno de los tres requisitos

Se desea saber:

a. ¿Cuántas solicitudes no cumplen con ninguno de los tres requisitos?

b. ¿Cuántas solicitudes cumplen simultáneamente con los tres requisitos?

14. La constructora San Fernando ha comprado un lote de 2.200 cabillas en un remate. Una clasificación de dichas cabillas a demostrado que estas pueden ser utilizadas en tres operaciones diferentes como se especifica a continuación:

1.000 para la operación A

880 para la operación B

100 para la operación A y C exclusivamente

500 para la operación A y B

360 para la operación B exclusivamente

1.560 para la operación A o B

1.210 para la operación B o C

Hallar:

a. El número de cabillas que pueden utilizarse simultáneamente para las tres operaciones.

b. El número de cabillas que son desechadas.

15. En una encuesta realizada por el Departamento de Salud en San Fernando se encuestaron a 2.000 personas sobre su preferencia de tres pastillas para calmar el dolor de cabeza, obteniéndose la siguiente información:

1.158 prefieren aspirina

1.050 prefieren bral

632 prefieren cafenol

280 prefieren únicamente aspirina

180 prefieren aspirina y cafenol exclusivamente

172 prefieren bral y cafenol

1.798 prefieren aspirina o bral o cafenol se desea saber:

a. ¿Cuántas personas prefiera únicamente cafenol?

b. ¿Cuántas personas prefiera al menos uno de los productos mencionados?

c. ¿Cuántas personas no prefiera ninguno de los productos mencionados?

1. El departamento de ventas de Comercial Traki selecciona 2.000 clientes entre todos los que poseen cuenta de crédito en dicho establecimiento y se les pregunta sobre el uso que han dado a su crédito durante el pasado año, obteniéndose los siguientes resultados:

550 clientes en juguetes

600 clientes en artículos de vestir

1.100 clientes en artefactos para el hogar

300 clientes en juguetes y artículos de vestir

220 clientes en juguetes y artefactos para el hogar

500 clientes en artículos de vestir y artefactos para el hogar

200 clientes en juguetes, artículos de vestir y artefactos para el hogar.

Se pregunta:

a. ¿Cuantos clientes no usaron su crédito en ninguna de estos tres créditos mencionadas?

b. ¿Cuantos clientes usaron su crédito sólo para comprar juguetes?

17. El departamento de salud en San Fernando efectúa una encuesta sobre los hábitos de fumar de la población san fernandina, con los siguientes resultados:

12.5% fuman pipa

24.5% fuman cigarro

20.0% fuman tabaco

10.0% fuman pipa y cigarro

7.8% fuman pipa y tabaco

12.2% fuman cigarro y tabaco

34.7% fuman al menos uno de los tres productos mencionados

Se pregunta:

a. ¿Cuántas de las personas encuestadas no fuman ninguno de los tres productos mencionados?

b. ¿Cuántas de las personas encuestadas fuman exactamente dos de los productos mencionados?

CONJUNTOS NUMÉRICOS

En esta sección se estudiara: *CONJUNTOS NUMERICOS*: Conjunto inductivo, Conjunto de los números enteros positivos, Conjunto de los números enteros negativos, Conjunto de los números enteros, Conjunto de los números racionales o fraccionarios, Conjunto de los números primos, Conjunto de los números irracionales, Conjunto de los números reales, Propiedades de los números reales, Mínimo común múltiplo, Máximo común divisor, Números coprimos. *OPERACIONES EN* $\Re$*:* Suma, resta, multiplicación y división de números reales, aplicaciones de los números reales.

Definición 1: Un conjunto *S* se dice que es *inductivo* si cumple con las siguientes condiciones:

1. $1 \in S$
2. Si $s \in S \Rightarrow s + 1 \in S$

Por medio de la definición anterior definimos el número 1, tomando s=1 y aplicando la segunda propiedad (1 + 1) definimos el número 2 y otra vez por la propiedad 2 obtenemos (2 + 1) y lo llamamos 3 y así sucesivamente:

3 + 1 = 4

4 + 1 = 5

.

.

.

n - 1 + n=n

El conjunto formado {1, 2, 3, 4, …... n - 1, n, …...} recibe el nombre de los *enteros positivos* y lo denotaremos Z^+.

<u>Definición 2:</u> Un conjunto se dice que es <u>denso o cerrado</u> con respecto a una operación, si para cada par de elementos del conjunto se tiene que al realizar dicha operación el resultado queda dentro del conjunto.

Si queremos saber si el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición tenemos que ver si se cumple la definición de densidad, Heli: $\forall$a, b$\in Z^+ \Rightarrow$ a + b$\in Z^+$, vemos que siempre esto es cierto y de igual manera $\forall$a, b$\in Z^+ \Rightarrow$ axb$\in Z^+$, por lo tanto, el conjunto Z^+ es cerrado con respecto a la adición y el producto, como este conjunto no es cerrado para la sustracción ya que $\forall$a, b$\in Z^+ \Rightarrow$ a - b$\notin Z^+$, entonces formamos el conjunto de los enteros negativos que se define como $Z^-=-Z^+$, es decir: Z^+={1, 2, 3, ...} y Z^-={.... -3, -2, -1}.

<u>Definición 3:</u> Se define como *el <u>número cero</u>* {0} al punto medio de los números pertenecientes a Z^+ y Z^-, es decir:

{0}={(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3), ..., (-n, n), ………………..}

<u>Definición 4:</u> Se define el *<u>conjunto de los números enteros</u>* como aquel conjunto que esta unido por los tres conjuntos formados anteriormente, y lo denotamos por *Z*, es decir: $Z=Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$, este conjunto

es cerrado para la adición, producto y sustracción, pero no es cerrado para el cociente, es por ello que tenemos que formar un conjunto donde el cociente este bien definido y este conjunto es el que definiremos a continuación.

<u>Definición 5:</u> Se define el *conjunto de los <u>números racionales o fraccionarios</u>* como el conjunto de números cuyo cociente es el conjunto de los números enteros sobre la unión de los enteros positivo y los enteros negativos y este conjunto lo denotaremos por *Q*, es decir, $Q=\frac{Z}{Z^{-}UZ^{+}}$, al realizar este cociente siempre resulta que queda una cantidad decimal periódica, es por ello que este conjunto también se puede expresar como: $Q=z,\overline{abcd........}$ donde z, a, b, c. son números enteros, es decir, z, a, b, c, d,…..∈*Z*. Cuando el número que se repite es el cero no se coloca, es decir, queda tácito, cuando los números son distintos del cero se le coloca una raya arriba del período, ejemplo: $\frac{8}{2}=4$, no hace falta colocar el cero, ejemplo: $\frac{1}{3}=0,33....$, como el número que se repite es distinto de cero, se tiene que escribir $0,\overline{3}$; el caso de $\frac{4}{7}=0,571428571428\ldots\ldots\ldots=0,\overline{571428}$

<u>Definición 6:</u> Un número entero se dice que es *<u>primo</u>* si este posee cuatro divisores, y lo denotaremos por: P(Φ)={±2, ±3, ±5, ±7, ±11 ,±13 ...} y definiremos al conjunto de los números enteros que tienen más de cuatro divisores como *<u>compuestos</u>* este conjunto esta formado por: {±4, ±6, ± 8, ±9 ,±10, ±12, ...}

Nota: **Como el número 1 y 0 fueron definidos de manera especial estos no son ni primos ni compuestos.**

Definición 7: **Sea *a* un número primo y *n* un número entero, es decir, $a \in P(\Phi)$ y $n \in Z$, entonces, se define $q \in Q$ como aquel conjunto de número que se puede expresar de la manera siguiente: $q=a^n$ que es otra forma de definir a los *números racionales o fraccionarios*.**

Definición 8: **Si en la expresión $q=a^n$, $\forall n \notin Z$, este conjunto de números recibe el nombre de *números irracionales* y tienen la particularidad de que nunca dejan una cantidad decimal periódica, es decir, es el complemento del conjunto de los números racionales y lo denotaremos por Q' y sus elementos tienen la forma $p=b^{m/n}$ o $\sqrt[n]{b^m}$, con $p \in Q'$. por ejemplo: $5^{7/9} = \sqrt[9]{5^9}$**

Donde:

$\sqrt{\ }$: Radical

b: Cantidad sub-radical

m: Potencia de la cantidad sub-radical

n: Índice del radical

Nota:

$$q=a^n \begin{cases} \text{es } \textit{racional} \text{ si } n \in Z \\ \text{es } \textit{irracional} \text{ si } n \notin Z \end{cases}$$

Como números irracionales tenemos el conjunto de raíces que no son exactas. El conjunto de los números racionales (*Q*) es cerrado con

respecto a la adición, sustracción, producto y cociente ya que $\forall$a, b$\in$*Q* $\Rightarrow$ a + b, a - b, a$_x$b. $\frac{a}{b}\in$*Q*. El conjunto de los números irracionales es cerrado solamente para la adición, ya que:

$\forall$a, b$\in$*Q'* $\Rightarrow$ a - b$\notin$*Q'*, a$_x$b$\notin$*Q'*. $\frac{a}{b}\notin$*Q'*.

<u>Ejemplo</u>: a=$\sqrt{2}$, b=$\sqrt{8}$, c=$\sqrt{2}$ se tiene a.c$\notin$*Q'* y a - c=0$\notin$*Q'*, a, b$\notin$*Q'* y a$_x$b=4$\notin$*Q'* a, b$\in$*Q'* y $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}\notin$*Q'*.

<u>Definición 9:</u> Se define el <u>*conjunto de los números reales ($\Re$)*</u> como la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, es decir; $\Re$=*QUQ'*. El conjunto de los números reales es cerrado con respecto a las operaciones de adición, sustracción, producto y cociente ya que: $\forall$a, b$\in\Re$ $\Rightarrow$ a + b$\in\Re$, a - b$\in\Re$, a.b$\in\Re$ y $\frac{a}{b}\in\Re$.

Representación gráfica del conjunto de los números reales.

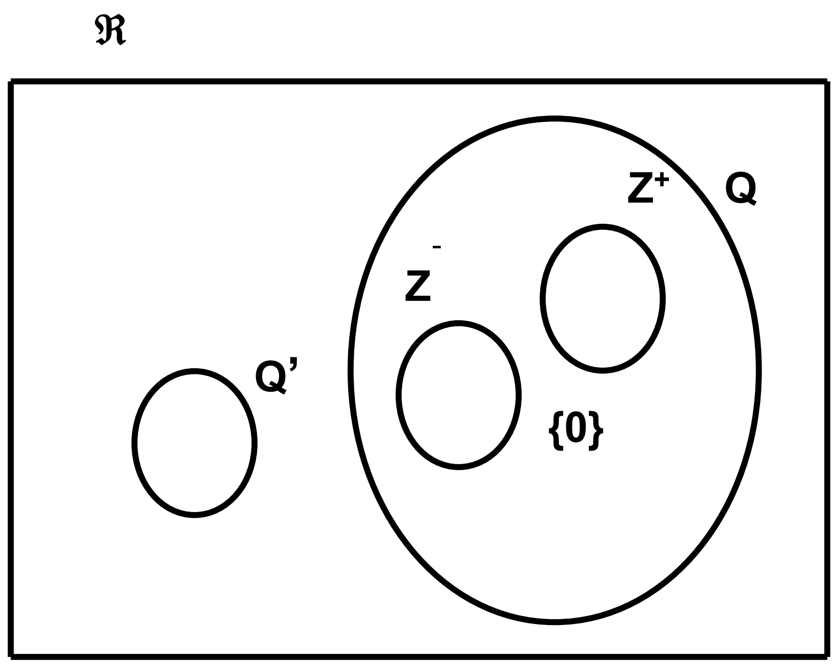


Fig. 1

Representación en la recta de los conjuntos numéricos.

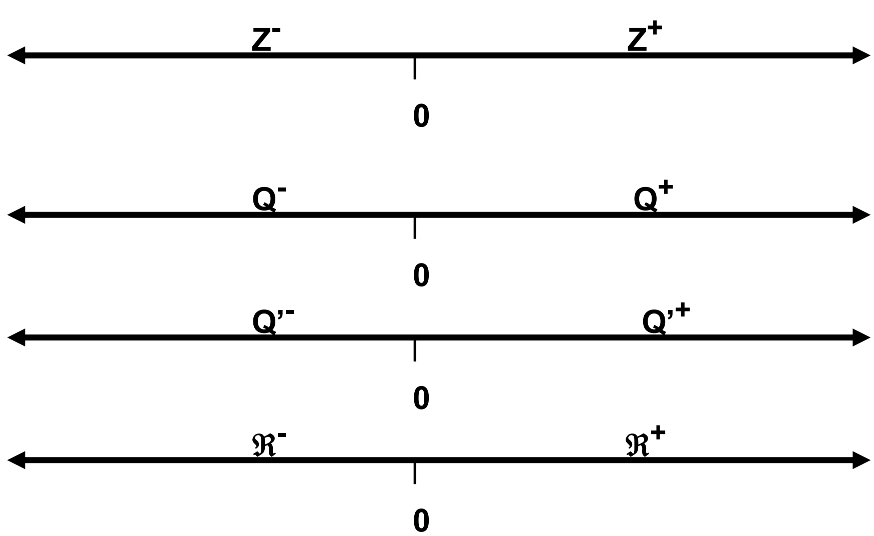


Fig. 2

<u>Definición 10:</u> Definiremos al ***conjunto de los números reales ampliados***, **como conjunto de números reales acotados por los símbolos $\pm\infty$ y que cumple con las siguientes condiciones:**

1. $\pm\infty \pm K = \pm\infty$
2. $\pm\infty . K = \pm\infty$
3. $\frac{K}{\pm\infty} = 0$
4. $\frac{\pm\infty}{K} = \pm\infty$
5. $\frac{K}{0} = \pm\infty$

Donde K es un número real cualquiera distinto de 0.

La recta real ampliada se representa:

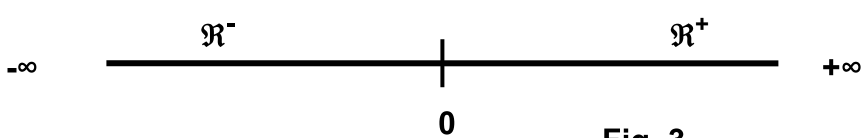


Fig. 3

<u>Propiedades de los números reales</u>

<u>Propiedades de la adición</u>

1. ***<u>Asociativa</u>***: $\forall a, b, c \in \Re$ **se tiene, $(a + b) + c = a + (b + c)$, es decir, la operación suma esta definido nada más para sumar dos elementos, si en una operación existen más de dos elementos, operamos primero dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.**

<u>Ejemplo</u>: a.- $(4 + 6) + 5 = 10 + 5 = 15 = 4 + (6 + 5) = 4 + 11 = 15$;

b. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5} = \sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5})$

2. ***Conmutativa***: $\forall$a, b$\in\mathfrak{R}$ se tiene, a + b=b + a, es decir el orden de los factores no altera el sumando.

Ejemplo: a.- 3 + 5= 5 + 3= 8

b. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

3. ***Elemento neutro o neutro aditivo***: $\forall$a$\in\mathfrak{R}$, $\exists$e$\in\mathfrak{R}$/a + e=e + a=a, es decir, en $\mathfrak{R}$ existe un elemento que sumado a cualquier número real deja a este invariante, este número es el cero (e=0).

Ejemplo: a.- 4 + 0=0 + 4=4

b. $\sqrt{2}+0=0+\sqrt{2}=\sqrt{2}$

4. ***Elemento simétrico o inverso aditivo***: $\forall$a$\in\mathfrak{R}$, $\exists$ $a^{-1}\in\mathfrak{R}$/a + a^{-1}=a^{-1} + a=e=0, $\Rightarrow$ a^{-1} + a=0 $\Rightarrow$ a^{-1}=-a, es decir, en $\mathfrak{R}$ todo número tiene un simétrico que al sumarlo a su opuesto me da el cero, a a^{-1}, se le llama ***inverso aditivo***.

Ejemplo: a.- 5 + (-5)= (-5) + 5= 0

b. $\sqrt{2}-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$

Propiedades del producto

5. ***Asociativa***: $\forall$a, b, c$\in\mathfrak{R}$ se tiene, (a$_x$b)c=a(b$_x$c), es decir, como el producto es una suma en serie y la suma esta definido nada más para sumar dos elementos, el producto de igual manera esta definida para operar dos elementos, operamos los primeros dos y el resultado lo operamos con el tercero y así sucesivamente si hay más de tres elementos.

Ejemplo: a.- (4$_x$6)5=24$_x$5=120=4(6$_x$5)=4$_x$30=120

b. $(\sqrt{2}_x\sqrt{3})\sqrt{5}=\sqrt{2}(\sqrt{3}_x\sqrt{5})\Rightarrow\sqrt{6}_x\sqrt{5}=\sqrt{2}_x\sqrt{15}\Rightarrow\sqrt{30}=\sqrt{30}$

6. ***Conmutativa***: $\forall a, b \in \mathscr{R}$ se tiene, $a_x b = b_x a$, es decir, el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo: a.- $3_x 5 = 5_x 3 = 15$

b. $\sqrt{2}_x\sqrt{3} = \sqrt{3}_x\sqrt{2} = \sqrt{6}$

7. ***Elemento neutro o neutro multiplicativo***: $\forall a \in \mathscr{R}, \exists e \in \mathscr{R} / a_x e = e_x a = a$, es decir, en $\Re$ existe un elemento que multiplicado a cualquier número real me deja a este invariante, este numero es el uno (e=1).

Ejemplo: a.- $4_x 1 = 1_x 4 = 4$

b. $1_x\sqrt{2} = \sqrt{2}_x 1 = \sqrt{2}$

8. ***Elemento simétrico o Elemento inverso multiplicativo***: $\forall a \in \mathscr{R}$, $\exists a^{-1} \in \mathscr{R} / a.a^{-1} = a^{-1}{}_x a = e = 1 \Rightarrow a^{-1}{}_x a = 1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a}$, es decir, en $\mathscr{R}$ todo número tiene un simétrico que al multiplicarlo a su opuesto da como resultado el número uno, a a^{-1} se le llama *inverso multiplicativo*.

Ejemplo: a.- $5_x \frac{1}{5} = \frac{1}{5}{}_x 5 = 1$

b. $\sqrt{2}x\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1$

9. ***Distributiva:*** $\forall a, b, c \in \mathscr{R}$ se tiene: $a(b + c) = a_x b + a_x c = b_x a + c_x a = (b + c)a$.

Ejemplo: a.- $5(4 + 3) = 5_x 4 + 5_x 3 = 20 + 15 = 35 = (4 + 3)5 = 7_x 5 = 35$

b. $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \sqrt{2}_x\sqrt{3} + \sqrt{2}_x\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{3}_x\sqrt{2} + \sqrt{5}_x\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{2}$

Elemento absorbente: $\forall a \in \mathscr{R}, \exists 0 \in \mathscr{R} / 0a = a0 = 0$, es decir, en $\mathscr{R}$ todo número al multiplicarlo por el cero es absorbido por este.

<u>Definición 11:</u> Un conjunto que posee las propiedades 1, 3 y 4 recibe el nombre de *<u>Grupo</u>* y si además posee la propiedad 2 recibe el nombre de *<u>Grupo Abeliano o Grupo conmutativo</u>*. Un conjunto que posee las propiedades 5 y 7 recibe el nombre de *<u>Anillo</u>* y si además posee la propiedad 6 recibe el nombre de *<u>Anillo Abeliano o Anillo conmutativo</u>* y si además posee la propiedad 8 recibe el nombre de *<u>Anillo con elemento unidad</u>*. Un conjunto que posee las propiedades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 recibe el nombre de *<u>Campo o Cuerpo</u>*, lo que quiere decir, que el conjunto de los números reales es un *<u>Campo</u>* o un *<u>Cuerpo</u>*.

<u>Definición 12:</u> En la recta real diremos que un número es *menor que (<)* [mayor que (>)] si este se encuentra a la izquierda de este (si este se encuentra a la derecha de este).

Ejemplo: a.- 5<7 y 9>7

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ **y** $\sqrt{5} > \sqrt{3}$

10. *<u>Ley de Triconótomia</u>*: $\forall$a, b, c$\in\Re$ se cumple nada más que una de las siguientes condiciones:

i. a=b

ii. a<b

iii. a>b

11. El conjunto de los números reales es una relación de orden, ya que cumple con las propiedades *<u>reflexiva, antisimétrica y transitiva</u>*:

a. *<u>Reflexiva</u>*: $\forall$a$\in\Re$ se tiene que a=a.

b. *<u>Antisimétrica</u>*: $\forall$a, b$\in\Re$ se tiene que si a<b y b<a $\Rightarrow$ a=b

c. ***Transitiva***: $\forall$a, b, c$\in\Re$ se tiene que si a<b y b<c $\Rightarrow$ a<c

Otras propiedades de los reales

12. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re$/ si a<b $\Rightarrow$ a + c<b + c

Ejemplo: a. $5<7 \Rightarrow 5 + 3< 7 + 3 \Rightarrow 8<10$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 1$

13. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re^{+}$/ si a<b $\Rightarrow$ $a_x c<b_x c$

Ejemplo: a. $5<7 \Rightarrow 5_x3<7_x3 \Rightarrow 15<21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}_x\sqrt{8} < \sqrt{3}_x\sqrt{8}\ \sqrt{16} < \sqrt{24} \Rightarrow 4 < 2\sqrt{6}$

14. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re^{-}$/ si a<b $\Rightarrow$ $a_x c>b.c$

Ejemplo: a. $5<7 \Rightarrow 5(-3)>7(-3) \Rightarrow -15>-21$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{8}) > \sqrt{3}\,(-\sqrt{8}) \Rightarrow -\sqrt{16} > -\sqrt{24} \Rightarrow -4 > -2\sqrt{6}$

15. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re$/, si a<b $\Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Ejemplo: a. $5<7 \Rightarrow 1/5>1/7$

b. $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

16. $\forall$a$\in\Re$ se tiene que $a^2>0$ Si $a=0 \Rightarrow a^2=0$

Ejemplo: a. $2^2 =4>0$ $(-2)^2 =4>0$

b. $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $(-\sqrt{2})^2 = 2$

17. $\forall$a, b$\in\Re$, se tiene que $(a + b)^2 >a^2 + b^2$

Ejemplo: $(3 + 5)^2>3^2 + 5^2 \Rightarrow 8^2 =64>9 + 25=34$

18. $\forall$**a, b**$\in\Re$ **se tiene que si a$_x$b=0 $\Rightarrow$ a=0 o b=0**

Ejemplo: a. $2_x0=0_x2=0$

b. $\sqrt{2}_x0 = 0_x\sqrt{2} = 0$

19. $\forall$**a, b**$\in\Re$ **se tiene que si a$_x$b<0 $\Rightarrow$ (a<0 $\wedge$ b>0) o (a>0 $\wedge$ b<0)**

Ejemplo: $-(2_x3)<0 \Rightarrow (-2<0 \wedge 3>0)$ o $(2>0 \wedge -3<0)$, es decir, (-2)3= 2(-3)=-6;

20. $\forall$**a, b**$\in\Re$ **se tiene que si a$_x$b>0 $\Rightarrow$ (a>0 $\wedge$ b>0) o (a<0 $\wedge$ b<0)**

Ejemplo: $2_x3>0 \Rightarrow (2>0 \wedge 3>0)$ o $(-2<0 \wedge -3<0)$, es decir, 2.3= -2(-3)=6

21. $\forall$**a, b**$\in\Re$**,** $\exists n\in\Re/(a_xb)^n = a^n{}_xb^n$ **y** $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $(2_x3)^2=6^2=36=2^2{}_x3^2=4_x9=36$

22. $\forall$**a, b**$\in\Re$**,** $\exists n, m\in\Re/a^n{}_xa^m= a^{n+m}$ **y** $\frac{a^n}{b^m}=a^{n-m}$

Ejemplo: $2^2{}_x2^3=4_x8=32=2^5$ y $\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{4}=2^1=2$

23. $\forall$**a, b**$\in\Re$**,** $\exists n\in\Re/(a^n)^m=a^{n_xm}$

Ejemplo: $(2^2)^3=4^3=64=2^{2_x3}=2^6=64$

Definición 13: Se define el *mínimo común múltiplo de dos números enteros* a y b m.c.m(a, b) como el menor número que es dividido por estos exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes y no comunes con su mayor exponente.

<u>Ejemplo</u>: Hallar el m.c.m(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: $30=2_x3_x5$ y $50=2_x5^2$, luego tenemos que multiplicar los números comunes y no comunes con su mayor exponente, en este caso: m.c.m(30, 50)=$2_x3_x5^2$=150, fíjese que $\frac{150}{30}$=5, $\frac{150}{50}$=3, note que existen otros números que son divididos por 30 y 50 como son: {300, 450, 600, ...}, pero el menor que cumple con esta condición es el numero 150.

<u>Definición 14:</u> Se define el *máximo común divisor de dos números enteros* a y b M.C.D(a, b) como el mayor número que divide a estos números exactamente, este número se consigue descomponiendo a (a y b) en sus factores primos y luego se multiplican los números comunes con su menor exponente.

<u>Ejemplo</u>: Hallar el M.C.D(30, 50), se descomponen los números 30 y 50 en factores primos, es decir: $30=2_x3_x5$ y $50=2_x5^2$, luego tenemos que multiplicar los números comunes con su menor exponente, en este caso: M.C.D(30, 50)=2_x5=10, fíjese que $\frac{30}{10}$=3, $\frac{50}{10}$=5, note que existen otros números que dividen al 30 y 50 como son: {1 y 5}, pero el mayor que cumple con esta condición es el número 10.

<u>Definición 15:</u> Se dice que dos números enteros son *coprimos entre si*, si su máximo común divisor entre ellos es el número uno, e,i, sean $\forall$a, b$\in Z^+$, si M.C.D(a, b)=1 $\Rightarrow$ a y b son coprimos entre si.

<u>Ejemplo</u>: los números 5 y 12 son corrimos entre si porque M.C.D(5, 12)=1

<u>Definición 16:</u> Se define la *suma de dos números racionales* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ **como:** $\frac{a_x b + c_x d}{b_x d}$ **$\forall$a, c$\in$*Z* y $\forall$b, d$\in$*Z*$^{-}$UZ^{+}, donde b$_x$d es el m.c.m(b, d) y a$_x$d + b$_x$c es el resultado de dividir cada uno de los miembros del denominador entre el m.c.m y luego multiplicado por cada uno de los miembros del numerador.**

<u>Ejemplo</u>: sumar $\frac{4}{5}+\frac{7}{12}=\frac{48+35}{60}=\frac{83}{60}$**, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,12)=60, luego se dividió** $\frac{60}{5}$**=12 y este resultado se multiplicó por 4, resultando 48, así mismo se dividió** $\frac{60}{12}$**=5 y este resultado se multiplicó por 7, dando como resultado 35 al sumar 48 + 35=83, por lo tanto, el resultado es:** $\frac{83}{60}$

<u>Definición 17:</u> Se define la *<u>resta de dos números racionales</u>* $\frac{a}{b}$ **-** $\frac{c}{d}$**, de la misma manera que la suma pero utilizado el signo menos «-» en vez del signo más «+».**

<u>Ejemplo</u>: restar $\frac{4}{5}$ **-** $\frac{7}{12}=\frac{48-35}{60}=\frac{13}{60}$**, para este resultado se obtuvo el m.c.m(5,15)=60, luego se dividió** $\frac{60}{5}$**=12 y este resultado se multiplicó por 4, resultando 12, así mismo se dividió** $\frac{60}{12}$**=5 y este resultado se**

multiplicó por 7, dando como resultado 35, al restar 48 - 35=13, por lo tanto, el resultado es: $\frac{13}{60}$

<u>Definición 18:</u> Se define el *<u>producto de dos números racionales</u>* $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times c}{b \times d}$, $\forall a, c \in \boldsymbol{Z}$ y $\forall b, d \in \boldsymbol{Z}^{-} U \boldsymbol{Z}^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a. c, b. d) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre si.

<u>Ejemplo</u>: Multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{36}{24}$, como el M.C.D(36, 24)=12, dividimos $\frac{36}{12}$=3 y $\frac{24}{12}$=2, luego el resultado de multiplicar $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$

<u>Definición 19:</u> Se define el *<u>cociente de dos números racionales</u>* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ como $\frac{a \times d}{b \times c}$, $\forall a \in \boldsymbol{Z}$ y $\forall b, c, d \in \boldsymbol{Z}^{-} U \boldsymbol{Z}^{+}$, luego a este resultado se le extrae el M.C.D(a.d, b.c) y se divide cada uno de ellos entre M.C.D, e,i, el resultado final son dos números coprimos entre si.

<u>Ejemplo</u>: Dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$, como el M.C.D(27, 32)=1, dividimos 27 y 32 entre 1 y luego el resultado de dividir $\frac{3}{4} \div \frac{8}{9} = \frac{27}{32}$

***<u>Definición 20:</u>* Para *sumar o restar dos números irracionales*, se simplifican los radicales dados (números enteros), es decir, se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos, luego**

se reducen los radicales semejantes y por último se escriben los números irracionales no semejantes con su propio signo.

<u>Ejemplo</u>: Realizar la siguiente operación:

$\sqrt{900}+\sqrt{972}-\sqrt{2352}-\sqrt{882}$

<u>Solución</u>: se descomponen las cantidades sub-radicales en sus factores primos:

$900=2^3{}_x3^2{}_x5^2$; $972=2^2{}_x3^5$; $2352=2^4{}_x3_x7^2$ y $882=2_x3^2{}_x7^2$, e.i.

$\sqrt{900}=\sqrt{2^3x3^2x5^2}=30\sqrt{2}$; $\sqrt{972}=\sqrt{2^2x3^5}=18\sqrt{3}$; $\sqrt{2352}=\sqrt{2^4x3x7^2}=30\sqrt{3}$ y $\sqrt{282}=\sqrt{2_x3^2x7^2}=21\sqrt{2}$, $\therefore$, $\sqrt{900}+\sqrt{972}-\sqrt{2352}-\sqrt{882}=30\sqrt{2}+18\sqrt{3}-28\sqrt{3}-21\sqrt{2}=9\sqrt{2}-10\sqrt{3}$

<u>Definición 21:</u> Para <u>*multiplicar dos números irracionales*</u>, existen dos casos:

1. Si tienen el mismo índice: se multiplican las cantidades sub-radicales y se deja el mismo índice, e,i, $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=a^{1/n}.b^{1/n}=(ab)^{1/n}=\sqrt[n]{ab}$

<u>Ejemplo</u>: $\sqrt[3]{2}_x\sqrt[3]{15}=2^{1/3}{}_x5^{1/3}=(2_x5)^{1/3}=\sqrt[3]{30}$

2. Si tienen distintos índices: se busca el mínimo común índice, se divide este mínimo común índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.

Ejemplo: $\sqrt[3]{9a^2b} \times \sqrt[4]{27ab^2} = (3^2a^2 \times b)^{1/3} \times (3^3ab^2)^{1/4} =$

$$\sqrt[12]{(3^2a^2b)^4(3^3ab^2)^3} = \sqrt[12]{3^{17}a^{11}b^{10}} = 3\sqrt[12]{3^5a^{11}b^{10}}$$

Definición 22: **Para *dividir dos números irracionales* se emplean los siguientes pasos:**

1. **Si tienen el mismo índice: se coloca el mismo índice y se dividen las cantidades sub-radicales.**

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[4]{9a^2b}}{\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2a^2b}{3^3ab^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{3b}}$

2. **Si tienen distintos índice: se busca el mínimo común índice y se divide este índice entre cada índice de los números involucrados y se multiplica por la potencia de las cantidades sub-radicales y por último se simplifica.**

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{\sqrt[4]{27ab^2}} = \sqrt[12]{\dfrac{(9a^2b)^4}{(27ab^2)^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^8a^8b^4}{3^9a^3b^6}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^5}{3b^2}}$

Definición 23: **Se define la *racionalización* como el proceso de convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional (eliminar del denominador el signo radical, ver propiedad del elemento neutro e inverso del producto de números reales).**

Ejemplo: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9a^2b}} = 3\dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{9a^2b} = \dfrac{\sqrt[3]{9a^2b}}{3a^2b}$

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=3(\sqrt{3}+\sqrt{2}.)$

se obtiene el neutro multiplicativo a partir del conjugado del denominador, e.i. cambiando el signo de la operación en el denominador.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La Comercial Alirio ganó en el año 2.002, Bs. 69.195.600, en el año 2.003 Bs. 30.441.850 más que en el año 2.002, en el año 2.004 Bs. Tanto como lo que se ganó en el año 2.002 y el año 2.003, en el año 2.005 tanto como en los tres años anteriores y en el año 2.006 Bs. 26.092.400 más que lo que se ganó en el año 2.003 y 2.005. ¿Cuánto se ganó en los cinco años la Comercial Alirio? Solución: analicemos las ganancias por años:

2.002 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600

2.003 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 30.441.850=Bs. 96.637.450

2.004 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450=Bs. 168.833.050

2.005 $\rightarrow$ Bs. 69.195.600 + Bs. 96.637.450 + Bs. 168.833.050=Bs. 334.666.100

2.006 $\rightarrow$ Bs. 26.092.400 + Bs. 96.637.450 + Bs. 334.666.100=Bs. 457.395.950.

Luego se ganó en los cinco años la cantidad de Bs. 1.126.728.150

2. Me gané Bs. 2.500.000 en una rifa y ahora tengo Bs. 5.634.000. Si Juan tiene Bs. 936.000 menos que yo, y María Bs. 893.000 menos que Juan y yo juntos, ¿Cuánto dinero tenemos entre los tres? Solución: analizaremos por persona:

Yo: Bs. 5.634.000

Juan: Bs. 5.634.000 - Bs. 936.000= Bs. 4.698.000

María: Bs. 5.634.000 + Bs. 4.698.000 – Bs. 893.000= Bs. 9.439.950

$\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 19.771.000

3. Pedro tiene Bs. 139.750, José el doble de lo que tiene Pedro, menos Bs. 34.400 y Juan tanto como Pedro y José juntos más Bs. 38.700. si entre los tres se gastan Bs. 266.600, ¿Cuál es el capital común que queda?

<u>Solución</u>: analizaremos por persona:

Pedro: Bs. 139.750

José: Bs. 2x139.750 - Bs. 34.400= Bs. 245.100

Juan: Bs. 139.750 + Bs. 245.100 + Bs. 38.700= Bs. 423.550, $\therefore$ entre los tres tenemos Bs. 808.400, a esto le restamos lo que gastamos e,i, Bs. 266.600, el capital que nos queda será: Bs. 808.400 - Bs. 266.600, que es Bs. 541.800

4. Si compras 142 libros por Bs. 915.900, si vendes cierta cantidad de libros por Bs. 709.500 a Bs. 10.750 cada uno. ¿Cuántos libros te quedan? y ¿cuánto te ganaste en cada uno de los libros que vendiste?

<u>Solución</u>: aplicando la definición de proporción tenemos: $\frac{142}{915.900} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{915.900}{142} \Rightarrow x = 6.450$, cada libro costó Bs. 6.450, ahora volvemos aplicar la proporción para obtener la cantidad de libros que vendí por Bs. 709.500, i.e., $\frac{10.750}{709.500} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{709.500}{10.750} \Rightarrow x = 66$, $\therefore$ vendí 66 libros y quedan 142 – 66=76 libros y me gané por cada libro 10.750 – 6.450=4.300, me gané por libro Bs. 4.300 y tuve una ganancia de Bs. 66x4.300= Bs. 283.800

5. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de segundo por cualquiera de tres llaves que vierten: los primeros 4 litros por dos segundos, la segunda 60 litros en cuatro segundos y los terceros 96 litros en seis segundos?

<u>Solución</u>: para obtener la solución hallamos m.c.m(4, 60, 96) y para eso descomponemos en sus factores primos a los números $4=2_x2$, $60=2_x2_x3_x5$ y $96=2_x2_x2_x2_x2_x3$, $\therefore$ m.c.m(4, 60, 96)=25_x3_x5=480, luego la menor capacidad del tanque es de 480 litros.

6. José camina un número exacto de pasos andando 6,50 mts. 8 mts. y 10 mts. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

<u>Solución</u>: pasamos los metros a centímetros y luego descomponemos los centímetros en sus factores primos y obtenemos el M.C.D(650, 800, 1000), que es el resultado que nos piden. $650=2_x5_x5_x13$, $800=2_x2_x2_x2_x2_x5_x5$, $1000=2_x2_x2_x5_x5_x5$, luego el máximo común divisor de los tres número será: M.C.D(650,800.1000)=2_x5_x5=50, $\therefore$ la mayor longitud posible de cada paso será de 50 cm.

7. Resolver:

a) $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$$

<u>Solución</u>: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1+\frac{2}{5}$, $\therefore$ **la solución es** $\frac{7}{5}$

b) $$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}$$

Solución: $$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=$$

$$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{\frac{5}{2}}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\frac{8}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{\frac{17}{5}}}=9-\cfrac{8}{7-\frac{30}{17}}=9-\cfrac{8}{-\frac{89}{17}}\Rightarrow$$

$$9-\cfrac{8}{7-\cfrac{6}{5-\cfrac{4}{3-\cfrac{1}{2}}}}=9+\frac{136}{89}$$, $\therefore$ la solución es $\frac{937}{89}$

c) $$\left(\frac{0.2x\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}x\frac{3}{5}}\right)^3$$

Solución: $$\left(\frac{0.2x\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}x\frac{3}{5}}\right)^3=\left[\frac{\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}\right]^3=\left[\frac{2\times3\times5}{3\times3\times3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$, $\therefore$ la solución es

$\frac{8}{27}$

d) $$\left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4$$

Solución: $$\left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4 = \left[\frac{2^3\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{3^2}\right)^4}\right]^4 = \left[\frac{\frac{2^3 2^4}{3^4}}{\frac{3^2 3^3 2^4}{2^3 3^8}}\right]^4 =$$

$$\frac{2^{12}2^{16}2^{12}3^{32}}{3^{16}3^{8}3^{12}2^{16}} = \frac{2^{24}}{3^4} \Rightarrow \left[\frac{2^3\left(\frac{4}{9}\right)^2}{3^2\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^4}\right]^4,\ \therefore \text{ la solución es}$$

$$\frac{16.777.216}{81}$$

e) $$\left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right) \div \left(\sqrt[4]{300}\right)$$

Solución: $$\frac{2\sqrt{10}\mathbf{x}\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}}{\sqrt[4]{300}} = \frac{5}{4}\,\frac{\sqrt{2\text{x}5}\sqrt[3]{2^2\text{x}3\text{x}5}}{\sqrt[4]{2^2\text{x}3\text{x}5^2}} = \frac{5}{2^2}\sqrt[12]{\frac{2^6\text{x}5^6\text{x}2^8\text{x}3^4\text{x}5^4}{2^6\text{x}3^4\text{x}5^6}} =$$

$$\frac{5}{4}\sqrt[12]{2^8\text{x}5^4} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{2^2\text{x}5} \Rightarrow \left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{60}\right) \div \left(\sqrt[4]{300}\right) = \frac{5}{4}\sqrt[3]{20}$$

f) $$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\,\mathbf{x}\sqrt[6]{24}\right)$$

<u>Solución</u>: $$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt[6]{24}\right) = \frac{\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}}{\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt[6]{24}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2^2\times3\sqrt{2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2^6\times3\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt[6]{2^3\times3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\times3^2\times2^2}}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}\times3^4\times2}}}\times\sqrt[6]{2^3\times3}} = \frac{\sqrt[8]{2^6\times3^2}}{\sqrt[24]{2^{24}\times3^4\times2}\times\sqrt[6]{2^3\times3}} = \sqrt[24]{\frac{2^{18}\times3^6}{2^{24}\times3^4\times2\times2^{12}\times3^4}}$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt[6]{24}\right) = \frac{1}{\sqrt[24]{2^{37}\times3^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[24]{2^7\times3^{22}}}{\sqrt[24]{2^{17}\times3^2}\,\sqrt[24]{2^7\times3^{22}}} \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4}}}\right) \div \left(\sqrt{4\sqrt[3]{3\sqrt[4]{2}}}\times\sqrt[6]{24}\right) = \frac{1}{12}\sqrt[24]{2^7\times3^{22}}$$

8. Racionalizar:

a) $$\frac{1}{5a\sqrt{25x^3}}$$

<u>Solución</u>: $$\frac{1}{5a\sqrt{25x^3}} = \frac{1}{25ax\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{25ax}$$

b) $$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}},$$

<u>Solución</u>: aplicando la formula $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$**, donde x=a + b e y=a – b, tenemos que:** $$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\dfrac{a+b-(a-b)}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)}{2b} = \frac{a+b-2\sqrt{a-b}-(a-b)}{2b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} = \frac{2b-2\sqrt{a-b}}{2b} = \frac{b-\sqrt{a-b}}{b}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuándo la suma es igual a los sumandos?

2. Si p es la suma de p sumandos. ¿Cuáles son los sumandos?

3. Escribir la suma 12 + 15 + 17 de tres modos distintos aplicando la propiedad asociativa

4. Escribir la suma 3 + 5 + 7 + 9 de 6 modos distintos aplicando la propiedad asociativa

5. ¿Qué alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y el otro aumenta 8?

6. m + n=52. ¿Cuál será la suma si m disminuye 4 y n disminuye 6?

7. x + y + z=1.046. ¿Cuál será la suma (x + 5) + (y – 8) + z + 9)?

8. Un sumando disminuye 6, otro 4, otro 7 y otros tres aumentan cada uno 5. ¿Qué le sucede a la suma?

9. ¿Cuánto costo un radio que al venderse por Bs. 16.325 deja una pérdida de Bs. 2560?

10. Después de vender una casa, se registró una pérdida de Bs. 5.731.200, presté Bs. 3.610.000 y me quedé con Bs. 27.331.200. ¿Cuánto me había costado la casa?

11. Hallar la edad de un padre que tiene 15 años más de la suma de las edades de 4 hijos que tienen, el cuarto 3 años, el tercero 1 año más que el cuarto, el segundo 3 años más que el tercero, y el primero tanto como los otros tres juntos.

12. Si ganara Bs. 100.800 menos al mes, podría gastar Bs. 63.000, Bs.

72.000 en manutención, Bs. 323400 en comida, Bs. 106.200 en el colegio de mi hijo y podía ahorrar Bs. 57.600 al mes. ¿Cuánto gano al mes?

13. ¿Por qué la resta se empieza por la derecha y no por la izquierda?

14. Si del minuendo se resta la diferencia y de esta resta se quita el sustraendo. ¿Que nos queda?

15. 56 + n=81. ¿Qué número es n?

16. x – y=5 y x + y + 5=12. ¿Qué número es y?

17. Si el minuendo es 342 y el resto 156. ¿Cuál es el sustraendo?

18. Si recibiera Bs. 261.0000 podría comprarme un carro de Bs. 11.008.000. ¿Cuánto tengo?

19. El menor de 2 números es 12.304 y la diferencia entre ambos es 1.897. ¿Cuál es el número mayor?

20. Juan tiene 15 años; Pedro 2 años más que Juan, José 5 años menos que Juan y Pedro juntos, y Carlos 9 años menos que los 3 anteriores juntos. ¿Cuál es la edad de Pedro, José y Carlos?

21. Resolver: a. (14 + 5) – (6 – 4 + 4) + (6 – 4 + 2)

b. [300 + (2 – 5) – 9 – 3] – (5 – 4)

c. 8 + [9 - {6 – (5 – 4)}] + 14 - {11 - [7 – (3 – 2)]}

d. 250 - [(6 + 4) – (3 – 1) +2] + {16 - [(8 + 3) - (12 – 10)]}

e. Si xy=3x. ¿Cuánto vale y?

f. Expresar en forma de suma los de los productos: xy, 4x8

g. 500+ 6(3 + 1)+ (8 – 5)3 – 2(5 + 4)

h. 800 + {20 – 3x4 + 5[18 – (6 – 1)3 + 4(5 – 2)]}

i. **$(5x4x3) \div (15 - 3) + 18 \div (11 - 5)5$**

j. **$500 - \{(6 - 1)8 \div 4x3 + 16 \div (10 - 2)\} - 5$**

22. Compré 115 caballos a Bs. 126.000 cada uno; 15 se murieron y el resto los vendí por Bs. 144.000 cada uno. ¿Gané o perdí y Cuanto?

23. ¿Que alteración sufre el producto 80x5, si el 80 se multiplica por 4 y el 5 se multiplica por 16?

24. Si al dividir x entre 109 el cociente es el doble del divisor, ¿Qué número es x?

25. Se reparten Bs. 1.315.800 entre varias personas en partes iguales y a cada una le tocan Bs. 77.400. ¿Cuantas eran las personas?

26. Uno de los factores del producto 840 es 12. ¿Cuál es el otro factor?

27. ¿Por cuál número hay que dividir a 15480 para que el cociente sea 15?

28. Compro 42 libros por Bs. 226.800 y se venden cierto número por Bs. 171.000 a Bs. 9.000. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí?

29. Repartí 243 lápices entre 54 estudiantes y me sobraron 27 lápices. ¿Cuántos lápices les repartí a cada estudiante?

30. Juan tiene más dinero que Pedro. ¿Que es más, la tercera parte de lo que tiene Juan o la cuarta parte de lo que tiene Pedro?

31. Jesús es más joven que tu. La edad de Juan es la mitad de la edad de Jesús y la edad de Pedro es la tercera parte de la tuya. ¿Quien es mayor Jesús o Pedro?

32. ¿Qué alteración sufre el cociente 760 ÷10, si 760 se multiplica por 8; y 10 se multiplica por 2?

33. ¿Cuánto aumenta el cociente si se añade el divisor al dividendo, permaneciendo igual el divisor?

34. La suma de 2 números es 1250 y su diferencia 750. ¿Cuáles son los números?

35. Juan tiene 32 metras entre las 2 manos y en la derecha tiene seis más que en la izquierda. ¿Cuántas metras tiene en cada mano?

36. La edad de un padre y la de su hijo suman 90 años. Si el hijo nació cuando el padre tenía 36 años. ¿cuales son las edades actuales del padre y el hijo?

37. ¿Cuál es el número que sumado con su doble da 261?

38. ¿Cuál es el número que sumado con su triple da 384

39. 368 excede en 14 unidades a la suma de un número con su quíntuplo. ¿Cuál es ese número?

40. La edad de Juan es el cuádruplo de la de José, si ambas edades se suman y a esa suma se le añade 17 años, el resultado es 42 años. Hallar las edades

41. La suma de 2 números es de 450 y su cociente 8 hallar los 2 números

42. La edad de Juan es 4 veces la edad de Pedro y ambas edades suman 45 años. ¿Que edades tienen Juan y Pedro?

43. La diferencia de 2 números es de 150 y su cociente 4. Hallar los 2 números

44. 2.000 excede en 788 a la diferencia de 2 números y en 1.995 a su cociente. Hallar los 2 números.

45. En un colegio hay 3 salones. Todas juntas tienen 85 estudiantes, si en la segunda y la tercera tienen 75 estudiantes y la primera y la tercera 80 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes hay en cada salón?

46. Un palto y un pantalón valen Bs. 150.000, el pantalón y su chaleco Bs.102.000 y el palto y su chaleco Bs. 132.000. ¿Cuánto vale cada pieza?

47. Si a un número añado 23 años, luego resto 41 de esta suma y la diferencia la multiplico por 2, obtengo 132. ¿Cuál es el número?

48. La semana pasada fui a jugar al Casino. El lunes perdí Bs. 400.000; el martes gané Bs.125.000, el miércoles gana el doble de lo que tenia el martes, y el jueves, después de perder la mitad de lo que tenía, me quedaron Bs.465.000 ¿Cuanto tenía antes de empezar a jugar?

49. Un tanque cuya capacidad es de 300 litros está vacío y cerrado su desagüe. ¿En cuanto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo 3 llaves que vierten: los primeros 36 litros en 3 minutos; la segunda 48 litros en 6 minutos y los terceros 15 litros en 3 minutos?

50. Un tanque tiene 3 grifos que vierten: el primero 50 litros en 5 minutos; el segundo 91 litros en 7 minutos; y el tercero 108 litros en 12 minutos; y 2 desagües por los que salen 40 litros en 5 minutos y 60 litros en 6 minutos respectivamente. Si estando vacío el estanque y abiertos los desagües, se abren las tres llaves al mismo tiempo, necesita 40 minutos para llenarse. ¿Cuál es su capacidad?

51. Compré 500 sombreros a Bs. 10.800 cada uno. Vendí cierto número en Bs. 900.000 a Bs. 9.000 cada uno. ¿A cómo tengo que vender el resto para no perder?

52. Si tú compras 600 sacos de frijoles a Bs. 14.400 cada uno. Por la venta de cierto número de ellos a Bs. 10.800 te ofrecen Bs. 972.000. ¿A cómo tendrás que vender los restantes para tener una ganancia de Bs. 594.000?

53. Un capataz contrata un obrero por Bs. 7.000 diarios, para que trabaje 40 días, transcurridos 35 días por un problema que ocurrió entre ambos el obrero recibió Bs. 200.000.

¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó el obrero?

54. Un comerciante pagó Bs. 4.590.000 por 128 trajes de lana y de gabardina. Por cada traje de lana pagó Bs. 30.000 y por cada traje de gabardina Bs. 40.000. ¿Cuántos traje de cada uno compró?

55. Dos hombres ajustan una obra en Bs.108.000 y trabajan durante 5 días. Uno recibe un salario de Bs. 7.200 diarios. ¿Cuál es el salario del otro?

56. Con el dinero que tú tienes puedes comprar 6 revistas y te sobran Bs. 500 pero si tú quisieras comprar 13 revistas te faltarían Bs. 3.000. ¿Cuánto vale cada revista?

57. ¿Por cuales de los números 2, 3, 4 y 5 son divisibles 84, 375 y 136?

58. Diga, por simple inspección, cual es el residuo de dividir 85 entre 2; 128 entre 5; 215 entre 4; 586 entre 25 y 1.046 entre 8.

59. Diga qué cifra debe suprimirse en 857 para que resulte un número de dos cifras múltiplo de 3.

60. Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2.738. ¿En cuanto se debe disminuir esté número?

61. Diga si los siguientes grupos de números son o no coprimos.

a. 9, 14 y 21

b. 12, 24 y 42

c. 35, 18, 12 y 28

d. 26, 39, 42 y 65

e. 22, 33, 44, 55 y 91

f. 14, 21, 28, 35 y 26

g. 34, 51, 68, 85 y 102

62. De los números 24, 31, 27 36, 42, 53 y 14 formar: un grupo de 4 números que no sean coprimos, un grupo de 4 números que sean coprimos.

63. Hallar el M.C.D(a, b) de:

a. 75 y 80

b. 33, 77 y 121

c. 320, 450, 560 y 600

d. 1.560, 2.400, 5.400 y 6.600

e. 500, 560, 725, 4350 y 8.200

f. 57, 133, 532 y 1.824

g. 2.738, 9.583, 15.059, 3.367 y 12.691

h. 3.174, 4.761, 9.522 y 12.696

64. Hallar el m.c.m(a, b) de:

a. **4, 8, 16 y 32**

b. **30, 15 y 60**

c. **15, 25 y 75**

d. **100, 300, 800 y 900**

e. **100, 500, 2.100 y 3.000**

f. **105, 306, 405 y 504**

g. **33, 49, 165, 245 y 343**

h. **108, 216, 306, 2 040 y 4.080**

65. Las edades de Juan y Pedro son dos números enteros consecutivos cuya suma es 51. Si Juan es menor que Pedro. ¿Cuál es la edad de cada uno?

66. Si Juan tiene un año menos que José y ambas edades suman 103 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

67. Un comerciante compró el lunes cierto número de sacos de frijoles; el martes compró un saco más que los que compró el lunes; el miércoles uno más de los que compró el martes, y el jueves uno más de los que compró el miércoles. Si en los 4 días adquirió 102 sacos. ¿Cuántos sacos compró cada día?

68. Hallar el m.c.m de los siguientes grupos de números:

a. **540 y 1.050**

b. **910, 490 y 560**

c. **690, 5.290 y 920**

69. Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud se quieren dividir

en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

70. Se quiere envasar 161 kilos, 253 kilos y 207 kilos de plomo en 3 cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tenga el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuánto cabe en cada caja?

71. Se tienen 3 extensiones de 3.675, 1.575 y 2.275 metros cuadrados de superficie respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea lo menor posible?

72. Para comprar un número exacto de docenas de pelotas de Bs. 8.000 la docena o de un número exacto de docenas de lapiceros a Bs. 6.000 la docena ¿Cuál es la menor suma de dinero necesaria?

73. ¿Qué alteración sufre el número fraccionario $\frac{8}{11}$ si multiplicamos el numerador por 2 y el denominador por 4?

74. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?

75. ¿Cuál de los números fraccionarios $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{27}{135}$ y $\frac{6}{30}$ es el menor?

76. Resolver:

a. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$

b. $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$

c. $\frac{3}{5}-\frac{7}{4}+\frac{11}{6}$

d. $\frac{13}{121}+\frac{4}{55}-\frac{9}{10}$

e. $\frac{5}{16}-\frac{2}{48}-\frac{1}{9}+\frac{3}{18}$

f. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{7}{24}-\frac{11}{30}$

g. $\frac{1}{900}+\frac{101}{300}-\frac{13}{60}-\frac{17}{45}+\frac{19}{54}$

h. $3\frac{1}{4}+5\frac{3}{4}$

i. $1\frac{1}{10}-1\frac{1}{100}$

j. $5\frac{4}{5}-6\frac{3}{10}+8\frac{3}{20}$

k. $3\frac{3}{4}+5\frac{5}{9}-7\frac{1}{12}$

l. $-6\frac{1}{11}-7\frac{5}{11}+8\frac{3}{22}-4\frac{5}{44}$

m. $1\frac{1}{5}+4\frac{1}{80}-5\frac{1}{16}-2\frac{1}{10}$

n. $7+\frac{8}{7}$

o. $\frac{3}{48}-10+3\frac{1}{5}-8$

p. $-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}$

q. $\left(7\frac{3}{5}-4\frac{1}{12}+1\frac{1}{24}\right)-\left(6-\frac{1}{18}\right)$

r. $0.25 + 4 - 2\frac{3}{5} + 2.3\overline{21}$

s. $2.\overline{3}+3.5\overline{32}-12+\frac{4}{5}-3\frac{2}{3}$

t. $5\frac{5}{7}+\frac{5}{7}-9-2.35+4.\overline{31}-5.2\overline{23}$

77. Resolver:

a. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$

b. $\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{4}$

c. $\frac{3}{5}\times\frac{17}{19}\times\frac{5}{34}\times\frac{38}{75}$

d. $2\frac{5}{6}\times 3\frac{3}{4}\times 1\frac{1}{17}$

e. $16\div\left(14\frac{1}{16}\div 5\frac{1}{6}\right)$

f. $72\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{9}\right)$

g. $\left(16\frac{3}{5}-\frac{7}{10}\right)\div\frac{1}{159}$

h. $9\frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}+5\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\right)$

i. $\left(11\frac{1}{10}-10\right)\div\left(13-9\frac{2}{5}\right)$

j. $\left[\left(4\frac{1}{3}-3\frac{5}{4}\right)\div\left(5-\frac{2}{7}\right)\right]\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{8}\right)$

k. $\left(2-3.\overline{14}\right)\div\left(\frac{3}{10}+4.23\overline{5}\right)$

78. Un reloj adelanta $\frac{3}{7}$ de minutos cada hora. ¿Cuánto adelantará en 5 horas; en medio día; en una semana?

79. Si de una soga de 40 metros de longitud se cortan 3 partes iguales de $5\frac{2}{3}$ metros de longitud. ¿Cuánto falta a lo que queda para tener $31\frac{5}{8}$ metros?

80. Tenía Bs. 72.000 y gasté los $\frac{3}{8}$. ¿Cuánto me queda?

81. Un mechero consume $\frac{3}{4}$ Kg. de aceite por día. ¿Cuánto consumirá en $\frac{5}{6}$ de día?

82. La edad de María es $\frac{1}{2}$ de los $\frac{2}{3}$ de la de Carmen. Si Carmen tiene 24 años. ¿Cuántos tiene María?

83. Diez obreros pueden hacer $14\frac{2}{11}$ metros de una obra en una hora. ¿Cuántos metros hace cada obrero en ese tiempo?

84. ¿Cuántas varillas de $\frac{1}{4}$ de metros de longitud se pueden sacar de una varilla de $\frac{5}{12}$ metros de largo?

85. Si Juan hace un trabajo en 8 días. ¿Qué parte del trabajo puede hacer en 1 día; en $1\frac{3}{4}$ días; $3\frac{1}{2}$ días?

86. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{7}{9}$ al añadir 1 al numerador y 4 al denominador?

87. ¿Aumenta o disminuye y cuánto $\frac{8}{9}$ al restar 5 a sus dos términos?

88. Porque número se multiplica $\frac{1}{2}$ cuando se convierte en $\frac{3}{4}$; y $\frac{1}{8}$ cuando se convierte en 6?

89. ¿Por cuál número se multiplica 6 cuando se convierte en 4; 3 cuando se convierte en 1; 11 cuando se convierte en 12?

90. ¿Por qué número se divide 8 cuando se convierte en 6; 9 cuando se convierte en 7; 11 cuando se convierte en 19?

91. ¿Por qué numero se divide $\frac{7}{8}$ cuando se añade 5 al numerador y 3 al denominador; cuando se resta 3 del numerador y se suma 2 al denominador?

92. Hallar qué parte de 5 es 4; de 6 es 7; de 9 es 8.

93. Juan tenía Bs. 6.000.000 y gastó Bs. 180.000. ¿Qué parte de su dinero gastó y que parte le queda?

94. ¿Cuánto perdiste tú cuando vendes a $\frac{3}{7}$ del costo de lo que te costo Bs. 840.000?

95. Juan gasta en alimentación de su familia los $\frac{2}{5}$ de su sueldo mensual. Si en un mes gasta en alimentación Bs. 235.350. ¿Cuál ha sido su sueldo en ese mes?

96. Ayer perdí los $\frac{3}{7}$ de mi dinero y hoy los $\frac{3}{8}$ de lo que me quedaba. Si todavía tengo Bs. 18.000. ¿Cuánto tenía al principio?

97. Resolver:

a. $$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

b. $$9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

c. $$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

d. $$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

e. $$1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$$

f. $$1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9}}}}$$

g. $$-3-\cfrac{4}{3-\cfrac{5}{3-\cfrac{7}{3-\cfrac{8}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{3}}}}}}$$

98. Un comerciante hace un pedido de 3.000 kilogramos de mercancía y se lo envían en 4 partidas. En la primera le mandan 17.45 kilogramos En la segunda 40 kilogramos más que la primera, en la tercera tanto como en las dos anteriores y en la cuarta lo restante. ¿Cuántos kilogramos le enviaron en la última partida?

99. Resolver:

a. $$\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$$

b. $$\left[\left(\frac{x_x y}{z}\right)^5\right]^6$$

c. $$\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{4\left(\frac{2}{5}\right)^2}\right]^3$$

d. $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

e. $6\sqrt{5}+8\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

f. $\sqrt{18}+\sqrt{50}$

g. $\sqrt{108}-\sqrt{72}$

h. $3\sqrt{28}-5\sqrt{63}$

i. $4\sqrt{300}-\sqrt{162}+\sqrt{75}$

j. $\frac{1}{2}\sqrt{8}+\frac{3}{4}\sqrt{50}$

k. $\frac{1}{3}\sqrt{27}-\frac{3}{4}\sqrt{48}+\frac{5}{2}\sqrt{24}$

l. $\frac{2}{5}\sqrt{250}-\frac{4}{9}\sqrt{90}+\frac{9}{7}\sqrt{490}$

m. $3\sqrt[3]{125}+2\sqrt[3]{15625}$

n. $2\sqrt[3]{1024}-\sqrt[3]{2000}$

o. $5\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{342}-\sqrt[3]{384}$

p. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{32}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{500}$

q. $\frac{5}{2}\sqrt[3]{48}+\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{1029}$

r. $\frac{5}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{4}{5}\sqrt[3]{500}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{270}$

s. $\left(3\sqrt{10}\right)\left(7\sqrt{28}\right)\left(5\sqrt{125}\right)$

t. $\left(\frac{7}{6}\sqrt[3]{48}\right)\left(\frac{4}{5}\sqrt[3]{32}\right)\left(7\sqrt[3]{72}\right)$

u. $\left(7\sqrt{240}\div 8\sqrt{80}\right)\left(10\sqrt{560}\div\sqrt{20}\right)$

v. $\left(\frac{9}{5}\sqrt[3]{686} \div \frac{12}{5}\sqrt[3]{32}\right) \div \left(\frac{7}{8}\sqrt[3]{1024} \div \frac{9}{4}\sqrt[3]{8}\right)$

w. $\left[\dfrac{\left(\dfrac{5\sqrt{125}x4\sqrt[3]{30}}{40\sqrt[4]{60}}\right)^2}{\dfrac{15\sqrt[5]{100}}{\left(10\sqrt[6]{50}\right)^3\left(14\sqrt[3]{80}\right)}}\right]^3$

100. Racionalizar:

a. $\dfrac{6}{\sqrt{128}}$

b. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{108}}$

c. $\dfrac{5a}{\sqrt[6]{4a^5b^3}}$

d. $\dfrac{8abc}{3\sqrt[5]{a^3b^4c^5}}$

e. $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

f. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

g. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

h. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

i. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{5}}$

j. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}$

k. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{7}}$

l. $\dfrac{11}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{13}}$

CAPÍTULO I

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Punto de Acumulación, Límites, Límites Laterales, Límites Infinitos, Límites en el Infinito, Propiedades de los Límites, infinitesimales, Límites Indeterminados de la Forma: $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, ∞^∞, $1^{\pm\infty}$, Límites Trigonométricos, Límites Logarítmicos, Límites Exponenciales, Continuidad, Puntos de Discontinuidad, Asuntotas: Verticales, Horizontales y Oblicuas, Gráfica aproximada de las funciones por medio de los límites.

Límites

Expresaremos dando unos ejemplos de límite para introducirnos en este campo:

Ejemplo 1: Sea f(x)=4x - 3; ¿hacia que punto se aproximan los valores de esta recta cuando x se aproxima al punto x=5?.

x	4.9	4.99	4.992	5.001	5.01	5.1
f(x)	16.6	16.96	16.968	17.004	17.04	17.4

Cuando x se aproxima a 5, observamos que: 4x - 3 se aproxima al 17.

Se dice que el límite de f(x)=4x - 3, cuando x se aproxima a 5 es 17 y se escribe:

$$\lim_{x \to 5}(4x - 3) = 17$$

Geométricamente lo veremos en clase.

Ejemplo 2: Sea f(x)= $\frac{x^2-25}{x-5}$ ¿a que valor se aproxima f(x) cuando x se acerca a 5?

X	4.9	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
f(x)	9.9	9.99	9.995	10.001	10.01	10.1

Cuando x se aproxima a 5, se observa que f(x)=$\dfrac{x^2-25}{x-5}$, se aproxima a 10.

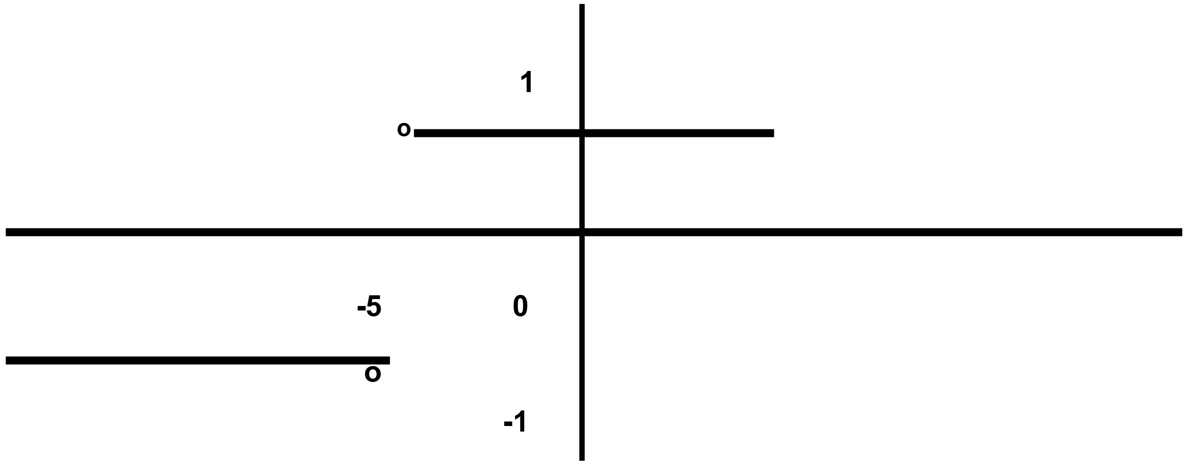
Vemos que esta función se comporta de manera semejante a la función f(x)=x + 5, para valores distintos de 5, por lo tanto (∴), es lo mismo escribir:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} \Rightarrow L = \lim_{x \to 5}(x+5), \Rightarrow L \to 10$$

Nótese que: $\dfrac{x^2-25}{x-5} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x + 5$

<u>Ejemplo 3</u>: Sea f(x)=$\dfrac{x+5}{|x+5|}$. Estudiemos el comportamiento de f(x) cuando x se aproxima al -5.

x	4,9	4,99	4,999	5,001	5,01	5,1
f(x)	-1	-1	-1	1	1	1

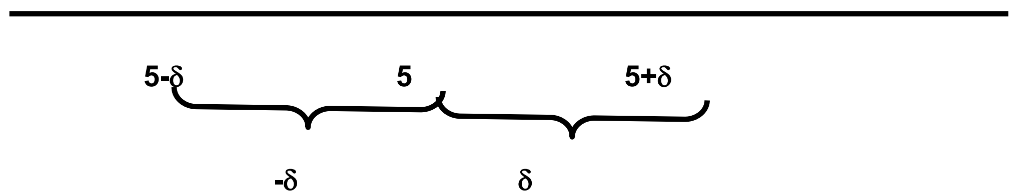


Como podemos observar, cuando x<-5, f(x) se aproxima a –1 y cuando x>-5, f(x) se aproxima a 1, de esta manera no podemos asegurar hacia que número real se aproxima f(x), cuando x tiende a -5, es decir, que no existe L$\in\Re$ tal que: $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x+5}{|x+5|}$=L, Luego el limite de la función f(x) = $\frac{x+5}{|x+5|}$, cuando x se aproxima a -5, no existe.

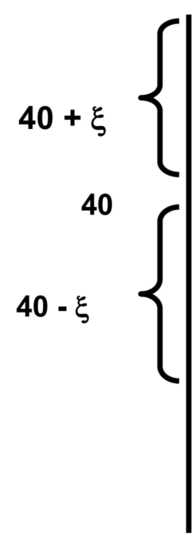
Supongamos que el dominio de una función f(x) contiene intervalos (x_0,x_1) y (x_1, x_2), si al aproximarse x hacia x_1, tanto como sea posible, f(x) tiende a un número L, entonces, L será el límite de f(x) cuando x tiende a x_1 , lo cual se escribe como: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = L$

<u>Ejemplo 4</u> $\lim\limits_{x \to 5}(7x+5) = 40$

Esto significa que la expresión 7x + 5 se aproxima al valor 40, cuando x se aproxima a 5, por la izquierda y por la derecha, esto lo pueden ustedes observar en los tres ejemplos anteriores, es conveniente que estos valores estén en un entorno de $x_1 = 5$ de radio δ, es decir, que los valores de x que tienden a 5, sean tales que $x \in (5 - \delta, 5 + \delta)$ y $0<\delta<1$.



Existe una dependencia de f(x) respecto a x que hace que f(x) se encuentre en un entorno de L=40 de radio ξ, es decir, los valores de f(x) próximos a 40, resultan tales que $f(x) \in (40 - \xi, 40 + \xi)$.



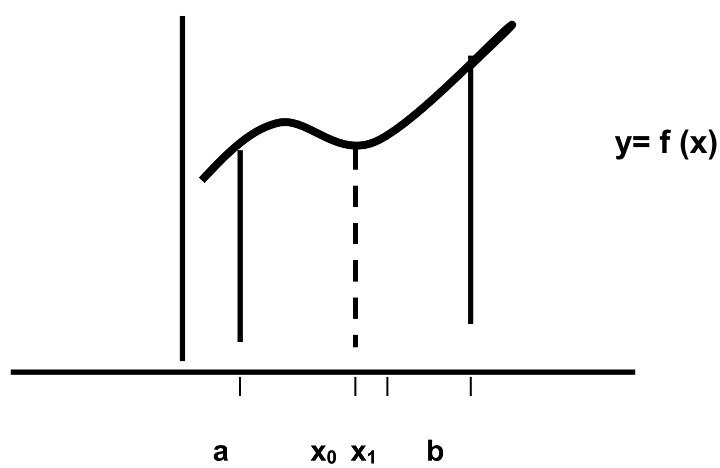
Si damos un valor de $\xi=0{,}01$, tenemos que $f(x) \in (39{,}99;40{,}01)$ cuando $x \in (5-\xi, 5+\xi)$. Así dado $(\xi>0)$, existe $(\delta>0)$ que garantiza que la distancia de f(x) a 40 sea menor que 0,01. En símbolos:

Dado $(\xi>0)$, $(\exists\, \delta>0)$: $(\forall x \in \Re)$, $\wedge$ $0<|x - 5|<\delta<1 \Rightarrow |f(x) - 13|<\xi$. Si relacionamos las distancias $d_1=|x - 5|$ y $d_2=|f(x) - 40|$, obtenemos la relación

entre ξ y δ veamos que si: $|f(x) - 40| = |7x + 5 - 40| = |7x - 35| = 7|x - 5| < \xi$, si y solo si, (sii), $|x - 5| < \frac{\xi}{7}$, de esta manera $|f(x) - 40| =< \xi$, sii, $|x - 5| < \frac{\xi}{7}$.

<u>Definición 1</u>: Se dice que $x_o \in \Re$ es un <u>punto de acumulación (p.a)</u> o <u>punto límite (p.l)</u> de $D \subseteq \Re$, si para cada intervalo abierto I, tal que $x_o \in I$, se tiene que: $(I - \{x_o\}) \cap D \neq \phi$

<u>Geométricamente</u>

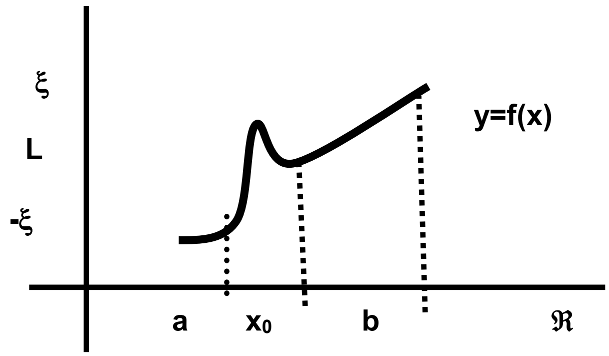


Por la definición de conjunto vacío, esto quiere decir que si al intervalo abierto le quitamos el punto x_0, debiera existir por lo menos otro punto x_1, que también pertenece a D, si esto es cierto, entonces x_o, es un punto de acumulación de D.

<u>Definición 2</u>: Sea $f: D \rightarrow \Re$, con $x_0 \in \Re$, x_0 es un (p.a) de $D \subseteq \Re$, decimos que <u>f posee límite L en x_0</u>, sii, $(\forall \xi > 0)(\exists \delta > 0):(\forall x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta < 1) \Rightarrow |f(x) - L| < \xi$ y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Geométricamente:



<u>Ejemplo 5</u>: Estudiar la función f(x)=3x + 10, en el punto de acumulación x=4, es decir:: $\lim_{x \to 4}(3x+10) = 22$

Solución: Hay que hallar una relación entre el δ y ξ, es decir:

$(\forall\xi>0), (\exists\delta>0): (\forall x\in D \wedge 0<|x-4|<\delta<1) \Rightarrow |3x+10-22|<\xi$ como $|3x+10-22| = |3x-12| = |3(x-4)| = 3|x-4|<\xi$, entonces $3\delta<\xi \Rightarrow \delta<\xi/3$. Si $\xi=0{,}01 \Rightarrow \delta=0{,}003$, si $\xi=0{,}001 \Rightarrow \delta= 0{,}0003$.

<u>Ejemplo 6</u>: Comprobar que $\lim_{x \to 1}(2x^2+5x-3)$ **=4**

<u>Solución:</u> $(\forall\xi>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in D \wedge 0<|x-1|<\delta<1) \rightarrow |2x^2+5x-3-4|<\xi$, Como:

$$|2x^2 + 5x - 7| = |\frac{1}{2}[(2x)^2 + 5(2x) - 14]| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}|(2x + 7)(2x - 2)| = \frac{1}{2}|2(2x+7)(x-1)| = |2x+7||x-1|<\xi \Rightarrow |2x-7|\delta<\xi$$

Cómo $|x-1|<\delta<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2 \Rightarrow 0<2x<4 \Rightarrow 7<2x+7<11$; cómo 7 es menor que 2x+7, se puede acotar $|2x-7|$ por el 7, lo que implica, que $7\delta<\xi \Rightarrow \delta<\xi/7$ si le damos valores a ξ, obtenemos la dependencia del δ.

<u>Ejemplo 7</u>: Comprobar que $\lim\limits_{x \to 3}(\sqrt{2x+3}+4)=7$

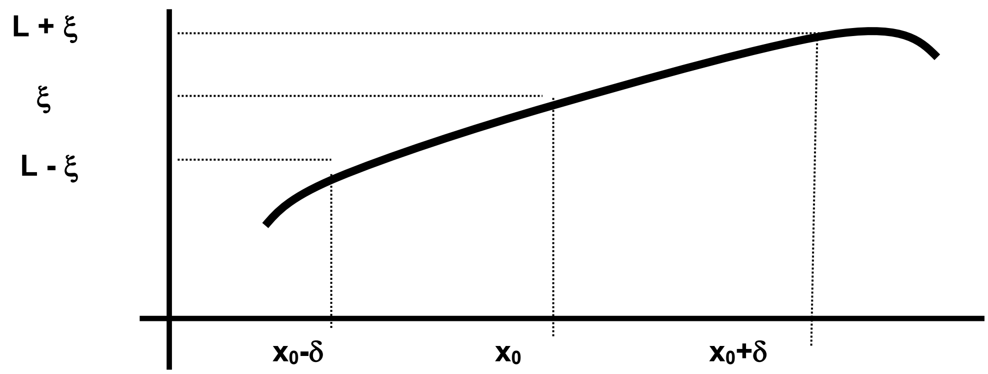
Solución: $(\forall\xi>0)(\exists\delta>0):(\forall x\in D \wedge 0<|x-3|<\delta<1) \Rightarrow |(\sqrt{2x+3}+4-7|<\xi$ Tenemos que

$$\left|\sqrt{2x+3}-3\right| = \left|\sqrt{2x+3}-\sqrt{9}\right| = \left|\frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}\right| = \frac{2|x-3|}{\sqrt{2x+3}+3} < \xi \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{2\delta}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|}<\xi$, Como $|x-3|<\delta<1 \Rightarrow -1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow 4<2x<8 \Rightarrow$ $7<2x+3<11 \Rightarrow \sqrt{7}<\sqrt{2x+3}<\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{7}+3<\sqrt{2x+3}+3<\sqrt{11}+3$, entonces podemos acotar: $\left|\sqrt{2X+3}+3\right|$ por $\sqrt{11}+3$ ya que este termino es mayor que $\sqrt{2x+3}+3$, lo que hace que, $\dfrac{2\delta}{\left|\sqrt{2x+3}+3\right|}=\dfrac{2\delta}{\sqrt{11}+3}<\xi \Rightarrow \delta<\dfrac{(\sqrt{11}+3)\xi}{2}$

<u>Definición 3</u>. Sea f: D → $\Re$ x_0 es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, se dice que <u>f posee límite a la izquierda de x_0</u>, sii $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x_0-x<\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\xi$, Análogamente se dice que <u>f tiene límite a la derecha de x_0,</u> sii, $(\exists L\in\Re)$, $(\forall\xi>0)$, $(\exists\delta>0)$: $(\forall x\in D \wedge 0<x-x<\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\xi$ y se denota respectivamente como:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$



<u>Teorema 1</u>: (Unicidad del Límite) Si f:D → ℜ, x_0, es (p.a) de D y f tiene límite L_1 y L_2, entonces, $L_1 = L_2$, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_2$, lo mismo vale para el límite a la izquierda de x_o y para el límite a la derecha de x_o, es decir:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$ Veremos este teorema con un ejemplo:

<u>Ejemplo 9:</u>

Sea $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \leq 3 \\ (x-1)^2 \text{ si } x > 3 \end{cases}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+1) = 4$ **ya que (∀ξ>0), se tiene entonces que $|x+1-4|=|x - 3|<\xi$ cuando $o<3-x<\delta$ y para ello basta tomar δ=ξ, Análogamente, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-1) = 4$, En efecto: $|(x - 1)^2 - 4|=|(x - 1)^2 — 2^2|=|(x – 1 - 2)(x – 1 + 2)|=|(x - 3)(x + 1)|=|x - 3||x + 1|<\xi \Rightarrow \delta\ |x + 1|<\xi \Rightarrow \delta< \dfrac{\xi}{|x+1|}$, como $|x - 3|<1 \Rightarrow$ -**

$1<x-3<1 \Rightarrow 3< x+1<5 \Rightarrow \delta< \frac{\xi}{3}$, **por lo tanto, el** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **existe.**

Ejemplo 10: $f(x)= \frac{x-3}{|x-3|}$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -1$ **y** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ **como los límites laterales son distintos entonces**

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{|x-3|}$ **no existe.**

Definición 4. Sea f:D → $\Re$, x_0, es un (p.a) de $D\subseteq\Re$, Diremos que f posee límite infinito en el punto x_0, sii $(\forall M(\xi)>0), (\exists\delta>0): (\forall x\in D \wedge 0<|x-x_0|<\delta<1) \Rightarrow |f(x)|> M$ **y se denota:** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Si en la definición anterior f(x)<M, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Ejemplo 11: El $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \infty$, **para probar esto debemos observar M>0, se haya** $(\delta>0)$: $0<|X - 3|<\delta$, **entonces** $\left|\frac{1}{x-3}\right|>M$ **como** $\left|\frac{1}{x-3}\right|>M$, **si** $|x - 3|< \frac{1}{M}$, **tomamos** $\delta = \frac{1}{M}$, **se Concluye que** $0<|x - 3|< \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x-3}\right|>M$.

<u>Ejemplo 12</u>. $\lim_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = \frac{2(3)+3}{3^2+5(3)-24} = \frac{9}{0} = \infty$, es decir,

$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ y $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$ =+∞, por lo tanto,

$\lim_{x \to 3} \frac{2x+3}{x^2+5x-24} = -\infty$, no existe.

<u>Definición 5</u>: (+∞) es un (p.a) de $D \subseteq \Re$, sii $(\forall n \in z^+)$, $(\exists x \in D)$: $(x \leq n)$, Análogamente (-,∞), es un (p a) de $D \subseteq \Re$, sii-$(\forall n \in z^+)$, $(\exists x \in D)$: $(x \leq -n)$.

<u>Definición 6:</u> Sea $f: D \to \Re$ y (-∞) es un (p.a) de $D \subseteq \Re$, <u>decimos que f posee límite L en -∞</u>, sii, $(\forall \xi > 0)$, $(\exists M = M(\xi))$: $(\forall x \in D \wedge x < M) \Rightarrow |f(x) - L| > \xi$. Análogamente, <u>f posee límite L en -∞</u> sii, $(\forall \xi > 0)$, $(\exists M = M(\xi))$: $(\forall x \in D \wedge x > M) \Rightarrow |f(x) - L| > \xi$ se denotan respectivamente como : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

<u>Ejemplo 13</u>: Demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1} = 5$

<u>Solución:</u> $(\forall \xi > 0)$ $(\exists M = M(\xi))$: $(\forall x \in D \wedge x > M)$ $\Rightarrow$ $\left| \frac{5x+5}{x+1} - 5 \right| < \xi$ como

$$\left| \frac{5x+3}{x+1} - 5 \right| = \left| \frac{5x+3-5x-5}{x+1} \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| = \left| \frac{2}{x+1} \right| < \xi \text{ si } \frac{2}{x+1} < \xi \Rightarrow x > \frac{2}{\xi} - 1$$

haciendo $M(\xi) = \frac{\xi}{2} - 1$. Se nota que para cada número positivo ξ se puede encontrar un número M= $\frac{\xi}{2}-1$, tal que x>M, por lo tanto, el número 5 es el Límite

de la función f(x)= $\frac{5x+3}{x+1}$ es decir, $\lim_{x \to \infty} \frac{5x+3}{x+1}$ =5

Teorema 2. Sea H(x)= $\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0}$, Entonces,

cuando x → ∞, H(x)= $\frac{\infty}{\infty}$ y

$$\lim_{x \to \infty} H(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n<m \\ \infty & \text{si } n>m \end{cases}$$

Demostración: Sea n= m, entonces, $\lim_{x \to \infty} H(x) =$

$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^n + \dots + b_0}$ Aplicando la propiedad del elemento

neutro del producto de los numeros reales 1= $\frac{x^n}{x^n}$ obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{bm\frac{x^n}{x^n} + b_{m-1}\frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + \frac{b_0}{x^n}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{an}{bm}$$

y cuando x → ∞, nos queda: $L \to \dfrac{a_n}{b_m}$

Para los casos n<m y n>m, la demostración es similar.

<u>Ejemplo 14</u>. Hallar el $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$

<u>Solución:</u> L=$\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$ = (∞ - ∞), como

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$L=\lim_{x \to \infty}\frac{x^3+x^2+1-\left(x^3-x^2+1\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3-x^2+1\right)^2}\right)} \Rightarrow$$

$$L=\lim_{x \to \infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3-x^2+1\right)^2}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

como cumple con las condiciones del teorema buscamos los valores de n y m, n=2 y m=6/3 ⇒ m=2, entonces a_n=2 y b_m=1+1+1= 3 ⇒ L →2/3.

<u>Ejemplo 15</u>: Hallar $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{3x^2-5x+3}{\sqrt{2x^8+5x-4}}=\dfrac{\infty}{\infty}$

Solución: Como cumple con las condiciones del teorema, buscamos los valores de n y m, n=2 y m=$\frac{8}{2} = 4$, como n<m = > L →0.

Ejemplo 16: Hallar $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt[3]{x} + 7} = \frac{\infty}{\infty}$

Solución: Como cumple con las condiciones del teorema buscamos n y m, n=$\frac{1}{2}$, m=$\frac{1}{3}$, como n>m $\Rightarrow$ L= ∞

Propiedades de los Límites:

Sean $L_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ y $K \in \Re$, se tiene que :

1) $\lim\limits_{x \to x_0} K = K$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} Kf(x) = K \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = KL_1$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^n$ = $(L_1)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = (L_1)^{L_2}$

<u>Ejemplo 17:</u> Hallar $\lim\limits_{x \to 2} 4$, por la propiedad N°1, $\lim\limits_{x \to 2} 4$ =4 $\Rightarrow$ L→ 4

<u>Ejemplo 18:</u> Hallar $\lim\limits_{x \to 2} 3x$, por la propiedad N° 2, se tiene L=3$\lim\limits_{x \to 2} x$

$\Rightarrow$ L→ 6

<u>Ejemplo 19</u>: Hallar $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 5x - 3)$, Por las propiedades 1,2,3 y 4,

tenemos:

$2\lim\limits_{x \to 2} x \lim\limits_{x \to 2} x + 5\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 3 \Rightarrow$ L= 2.2.2.+5.2.-3 $\Rightarrow$ L= 8+10-3 $\Rightarrow$ L→ 15

<u>Ejemplo 20</u>: Hallar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x+5}{3x+2} =$

por la propiedad Nº 5, tenemos:

$$L=\lim_{x \to 2} \frac{4x+5}{3x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(4x+5)}{\lim\limits_{x \to 2}(3x+5)} = \frac{4.2+5}{3.2+5} = \frac{13}{11} \Rightarrow L \to \frac{13}{11}$$

<u>Ejemplo 21</u>: Hallar $\lim\limits_{x \to 2}(3x+5)^{4x-3}$ por las propiedades Nº 6 y 7, tenemos:

$$L=\left[\lim_{x \to 2}(3x+5)\right]^{\left|\lim\limits_{x \to 2}(4x-3)\right|} \Rightarrow L=(3.2+5)^{4.2-3} \Rightarrow L=11^5 \Rightarrow L \to 161.051$$

<u>Definición 7</u>: Si $\lim\limits_{x \to x_0}(\sigma(x))$, es decir, $|\alpha(x)|$ ‹ξ cuando 0< $|x-\alpha|$ <δ(ξ), la función α(x) se llama Infinitesimal (infinitamente pequeña) cuando $x \to x_o$. Análogamente se determina la función infinitesima (Infinitesimalmente pequeña) α(x), cuando $x \to \infty$.

<u>Definición 8</u>: La suma y el producto de un número limitado de infinitésimos, cuando $x \to x_o$, es también un infinitésimo cuando $x \to x_o$, si α(x) y β (x) son infinitésimos cuando $x \to x_o$, y $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ =C, donde 0< $|C| < +\infty$, si $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$=1, las funciones α(x) y β(x) se llaman equivalentes cuando $x \to x_o$; es decir, α(x) ~ β (x), por ejemplo, si $x \to 0$, tenemos senx ~ x, tgx ~ x y Ln(1+x) ~ x, es decir, $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$, $\lim\limits_{x \to 0}\frac{tgx}{x}=1$ y $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$, el limite de la razón de dos infinitesimos no se altera, si los terminos de la misma se sustituyen por otros cuyos valores respectivos son equivalentes. De acuerdo con esto, al hallar el

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, donde $\alpha(x) \to 0$ y $\beta(x) \to 0$, cuando $x \to x_0$, al numerador y al denominador de la fracción pueden restársele (o sumarsele) infinitesimos de orden superior, elegidos de tal forma, que las cantidades resultantes son equivalentes a las anteriores.

De estos tres límites se deducen los siguientes límites: a) $L=\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

$$\Rightarrow L=\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x \Rightarrow L \to 0$$

b. $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \Rightarrow L=\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} \Rightarrow L=\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} \Rightarrow L=\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \Rightarrow L=\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow L \to \frac{1}{2}$$

c. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, Por medio un cambio de variable $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

$$\Rightarrow (x \to \infty \Rightarrow t \to 0) \Rightarrow L=\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \Rightarrow \ln L=\ln \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \Rightarrow \ln L=\lim_{t \to 0} \ln \frac{1+t}{t}$$

$\Rightarrow$ lnL=1 $\Rightarrow$ L$\rightarrow$ e, En conclusión: L=$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ $\Rightarrow L \rightarrow 0$; L=$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1-\cos x}{2}}{x}$

$\Rightarrow L \rightarrow \dfrac{1}{2}$; L=$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ $\Rightarrow L \rightarrow$ e y L=$\lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ $\Rightarrow L \rightarrow e$

Definición 9: Se denomina número e al límite de la variable $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{n}$, cuando x → ∞ (n ≥ N), es decir: $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ =e, con e∈Q' y tiene un valor aproximado a 2,7188281828.

Ejemplo 22. Hallar L=$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x}$ =1^{∞} Solución: Haciendo $\dfrac{1}{5x}$ = t $\Rightarrow$

x=$\dfrac{1}{5t}$ cuando (x → ∞ $\Rightarrow$ t $\rightarrow$ 0); L=$\lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{5t}}$ $\Rightarrow$ L=$\left(\lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{5}}$ =$e^{\frac{1}{5}}$

Ejemplo 23: Hallar L=$\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ =$1^{\infty} \Rightarrow$ L=$\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{x}$ $\Rightarrow$ L=

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$, haciendo t=$\frac{-2}{x+1}$ $\Rightarrow$ x=$-\frac{2}{x}-1$, (cuando x→ $\infty \Rightarrow$ t→0) $\Rightarrow$

$$\lim_{t \to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}-1} \Rightarrow L=\left(\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-2} \lim_{t \to 0}(1+t)^{-1} \Rightarrow L \to e^{-2}$$

Definición 10. Se definen los límites indeterminados como aquellos límites que al sustituirle al punto de acumulación toman la forma siguiente: $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^{0}, 0^{∞}, ∞^{0}, ∞^{∞}, $1^{\pm\infty}$ y se le rompe la indeterminación aplicando las herramientas vistas en el precálculo como son propiedades de los números reales, factorización, racionalización, etc.

Ejemplo 24: Hallar L=$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{x+1}{x-1}$=$\frac{\infty}{\infty}$, por medio del teorema N° 3, tenemos que n=1, m=1, an=1, bm= 1, lo que implica que L→1.

Ejemplo 25: Hallar L=$\lim\limits_{x \to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ = $\frac{0}{0}$ $\Rightarrow$ L=$\lim\limits_{x \to 16}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{16}}{x-16}$,

Racionalizando tenemos: $\lim\limits_{x \to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}$ $\Rightarrow L \to \frac{1}{8}$

Ejemplo 26: Hallar $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{0}{0}$

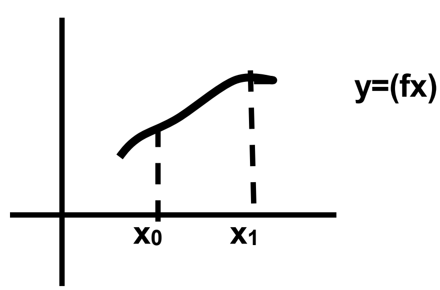
$$L = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x}} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} \Rightarrow L \to \frac{\sqrt{2}}{2}$$

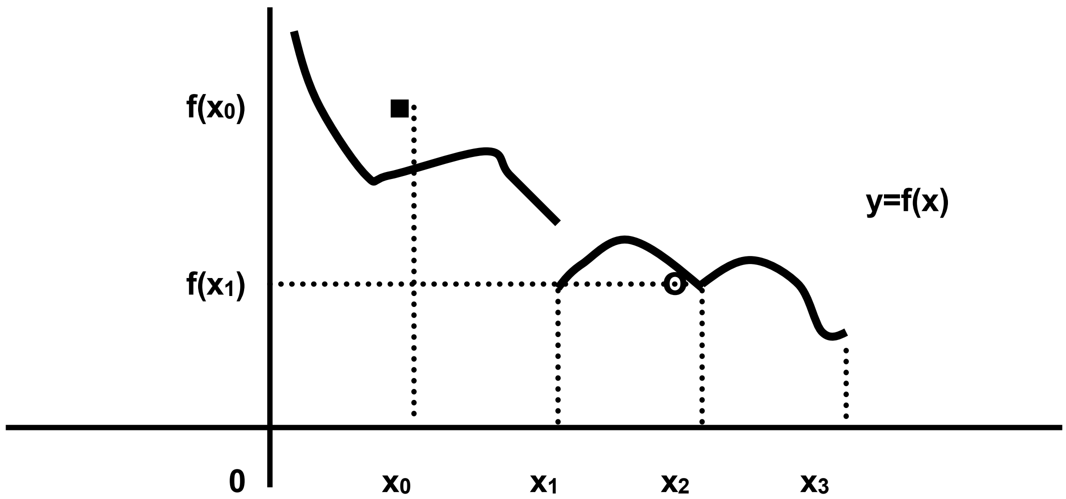
Continuidad

Una idea intuitiva de continuidad es que la curva que representa la gráfica de una función debe estar sin interrupciones en toda ella. Por el contrario si esta presenta interrupciones o saltos se dice que la función es discontínua y los puntos donde se producen las interrupciones o saltos reciben el nombre de puntos de discontinuidad.

Ilustramos estos dos casos geométricamente:



Esta función es continua en todo el intervalo (x_0, x_1)



Supongamos que la gráfica dada en la figura anterior corresponda a una función y=f(x). Esta función representa una función de salto. El $\lim_{x \to x_1} f(x)$, no existe porque no hay un número L para el cual f(x) se encuentre muy próximos a L, cuando x se aproxima suficientemente a x_1.

Podemos observar también en la gráfica que no existe el $\lim_{x \to 0} f(x)$. En x_2. se aprecia que f(x) no esta definida, pero pareciera que el hueco que hay se puede tapar con solo incluir en la grafica el punto (x_2, $f(x_2)$), de esta manera se romperia la discontinuidad en el punto (x_2, $f(x_2)$), haciendo que el $\lim_{x \to x_2} f(x) = f(x_2)$. En x_0 el valor de f(x) no resulta apropiado para la continuidad de f(x), el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, pero su valor no es igual a $f(x_0)$.

Conclusión: De todas estas observaciones se desprende que la discontinuidad surge cuando el límite de una función no existe ó si el límite aunque existe no es igual al valor de la función.

<u>Definición 11</u>: Sea $f: D \to \Re$, $x_0 \in \Re$, la función <u>f es continua en x_0</u> sii $(\forall \xi>0), (\exists \delta>0): (\forall x \in D \wedge 0<|x - x_0|<\delta<1) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|<\xi$

<u>Observación:</u> En la definición anterior vemos que $x_0 \in D$, esto es la función f debe estar definida en x_0, entonces, x_0 es un (p.a) de D, o x_0 es un punto aislado de D, entonces $\exists \delta>0$ tal que x_0 es el único punto común a D y $|x - x_0|<\delta$. Asi que para $x= x_0$, entonces, $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$, para cada $\xi>0$. Por lo tanto, cualquier punto aislado $x_0 \in D$ es un punto de continuidad de f(x), es decir, f es continua en x_0.

La definición anterior se traduce de la siguiente manera: Una función f es continua en un punto x_0, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Así la función es continua x_0 si cumple con las siguientes condiciones:

1) La función está definida en x_0

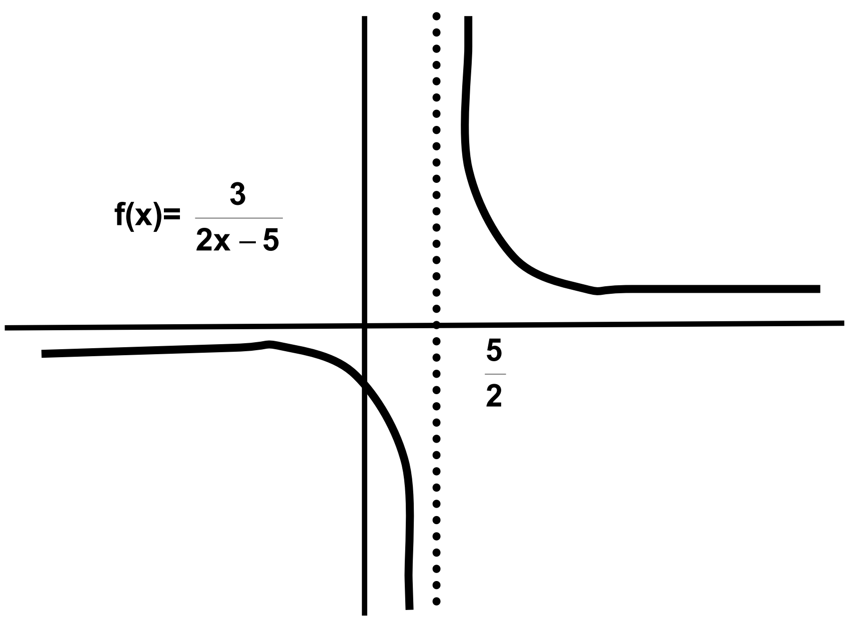
2) El $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ existe y sea finito

3) El $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>Definición 12</u>: Si f(x) es una función, f será continua, si es continua en cada uno de sus puntos donde este definida (intervalo, segmento, etc.).

<u>Definición 13</u>: Se dice que una función f(x) no es continua en el punto x_0, sii, este punto no verifica las tres condiciones de continuidad citadas anteriormente.

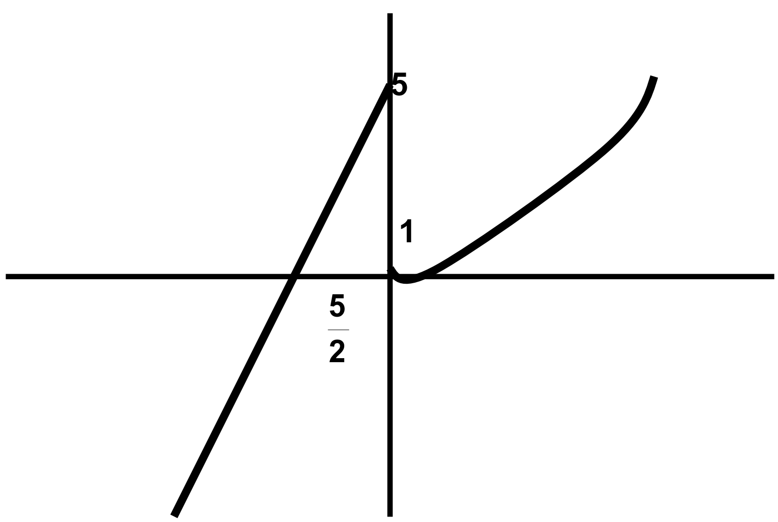
<u>Ejemplo 25:</u> $f(x)=\frac{3}{2x-5}$, esta funciÓn es discontinua en el punto $x=\frac{5}{2}$, ya que la función no cumple la primera condición de continuidad.



<u>Definición 14:</u> **Si la función f(x) tiene limites finitos:** $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$**, con** $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$**, entonces,** x_0 **recibe el nombre discontinuidad de primera especie.**

<u>Ejemplo 26:</u>

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si } x\leq 1 \end{cases}$$



<u>Definición 15:</u> Si x_0 no esta definida, pero $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$, x_0 recibe el nombre de punto de discontinuidad evitable y la discontinuidad se evita (se redefine), dándole al valor de x0 el valor al cual el limite tiende, es decir, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$

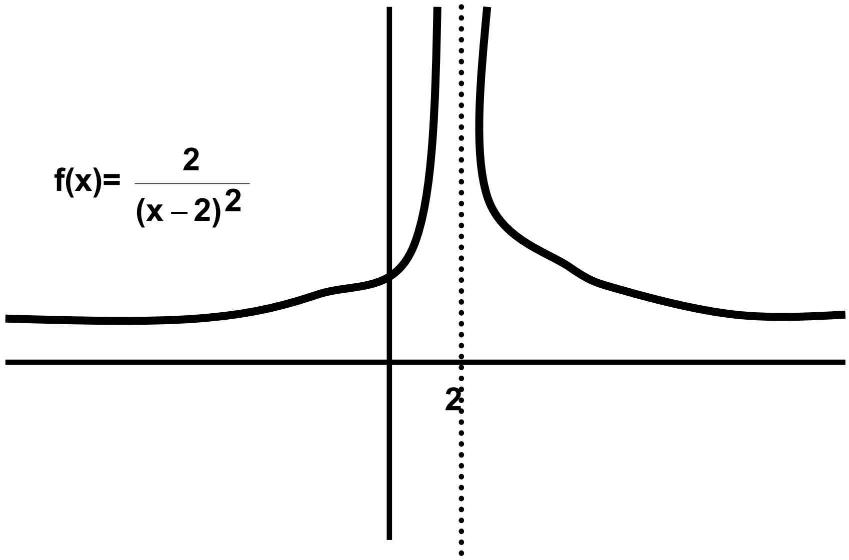
$$f(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

<u>Ejemplo 27:</u> $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18}$, esta función no esta definida en x=-3, pero $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{(x-6)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-6} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} f(x) = -\dfrac{1}{3}$, por lo tanto hay una discontinuidad evitable en el punto x=-3 y la función se redefine

$$f(x)=\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x - 18} & \text{si } x \neq -3 \\ -\dfrac{1}{9} & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

<u>Definición 15:</u> Los puntos de discontinuidad que no son de primera especie se llaman de segunda especie, que son aquellos puntos donde la función no esta definida y los limites laterales no existen.

<u>Ejemplo:</u> $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$, en x=2 hay una discontinuidad inevitable de segunda especie, ya que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=\pm\infty$, es decir, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)=+\infty$



<u>Propiedades de las funciones continuas</u>

1) La Suma (resta) de dos funciones continuas f y g, en un punto x_0, es otra función continua.

En efecto $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow f(x_0) \pm g(x_0)= (f \pm g)x_0$

2) El producto de dos funciones continuas f y g en el punto Xo, es una función continua. En efecto: $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow$ $f(x).g(x)=(f.g)x_o$

3) El cociente de dos funciones continuas en el punto x_o, es otra función continua, excepto en donde x anula al denominador.

En efecto, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)x_0$

4) La función f(x) =K (función constante) es continua en cualquier punto.

5) La función f(x)= x, (función identidad) es continua en cualquier punto.

6) La función polinomia f(x)= $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ es continua en cualquier punto.

Las funciones irracionales f(x) definidas por f(x)= $\sqrt[m]{g(x)}$, donde g(x) es un polinomio, es continua en todos los puntos de su dominio.

7) Un punto de acumulación (aislado), también se considera como una función continua.

Para estudiar la continuidad de cualquier función y=f(x) y realizar su gráfica aproximada, seguiremos los siguientes pasos:

1. Se halla el dominio de la función, es decir Domf
2. Se buscan los puntos de discontinuidad si es que los hay.
3. Si hay puntos de discontinuidad se estudian el comportamiento cerca de ellos

4. Se clasifican los distintos tipos de discontinuidad, es decir, si es evitable (se redefine la función) o inevitable, (de primera o de segunda especie).

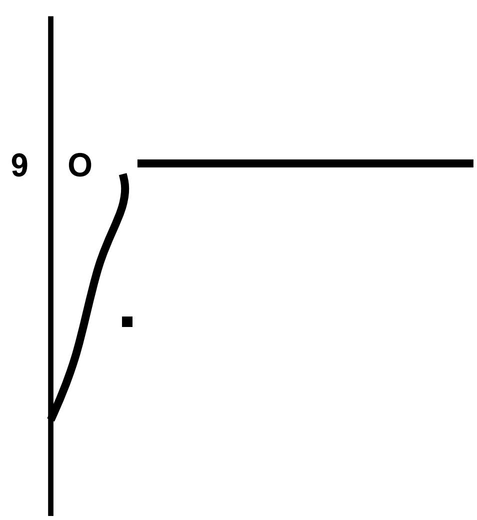
5. Se estudia la función en sus extremos.

6. se hallan los cortes con los ejes de coordenadas, si es posible.

7. se realiza la gráfica aproximada.

<u>Ejemplo 29:</u> Representar gráficamente las siguientes funciones y localice los puntos de discontinuidad (si los hay) y use la notación de límite para describir el comportamiento de f cerca de estos puntos de discontinuidad.

a. $f(x)= \begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 3 & \text{si } x>3 \end{cases}$



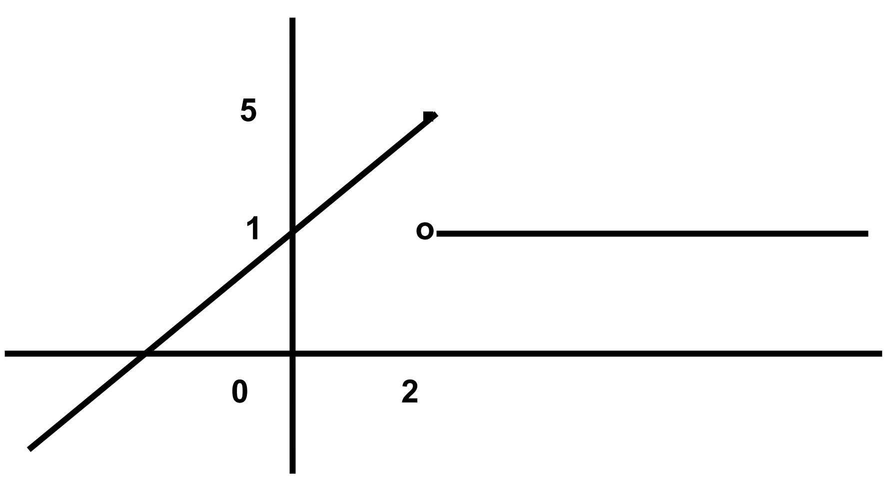
1. Domf=$[0,\infty)$

2. Puntos de discontinuidad $\{x=3\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 9$

4. Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=3), no se cumple la tercera condición de discontinuidad, ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$ y f(3)=6.

b. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$



1. Domf=$\Re$

2. Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad:

   $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

4. Existe un punto de discontinuidad inevitable de primera especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

Ejemplo 30: Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

a. f(x)= $\dfrac{x^2}{x-2}$

1. Domf=$\Re$ -{2}

2. Puntos de discontinuidad $\{x=2\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad:

   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

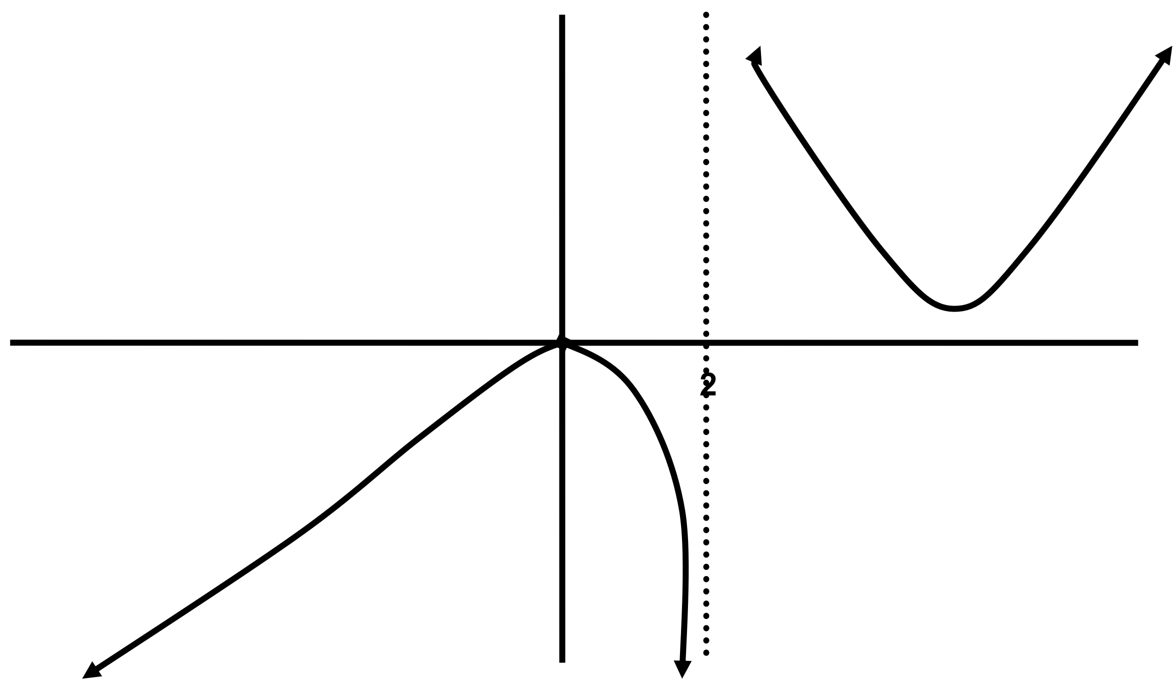
4. Existe un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie en el punto (x=2), no se cumple la segunda condición de discontinuidad, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

5. Estudio de la función en los extremos: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto ($\therefore$),

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

6. Corte con los ejes de coordenadas: X=0 $\Rightarrow$ Y=0, es decir, (0,0)

7. Su grafica:



b. f(x)= $\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$

1. Domf=[-7,∞) – {$\pm$2}

2. Puntos de discontinuidad $\{$x=-2 y x=2$\}$

3. Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad: a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{\sqrt{5}-3}{0} = \pm\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-}{+} - \infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-}{-} + \infty$, b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{0}{0}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+7)-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 24} \dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} \Rightarrow L \to \dfrac{1}{24}$

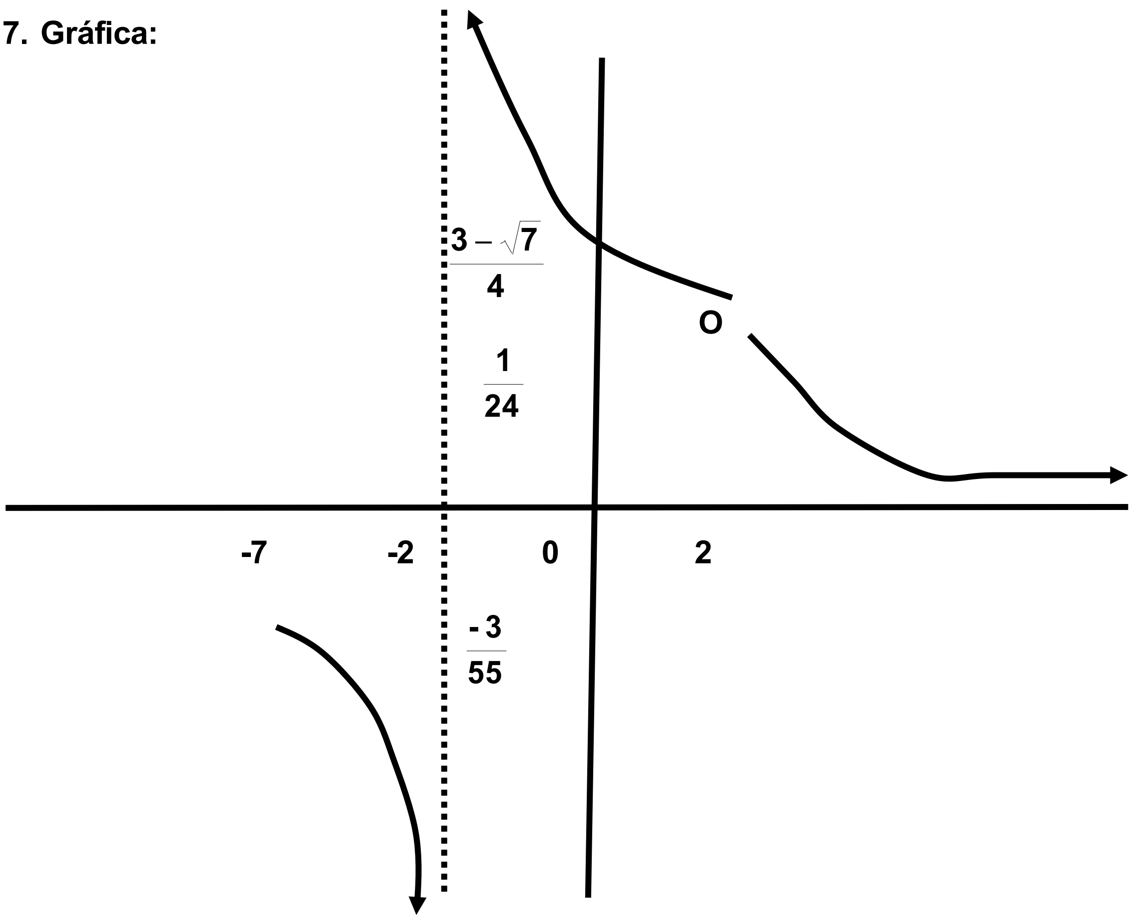
4. Existe dos puntos de discontinuidad; a) En x=-2 hay un punto de discontinuidad inevitable de segunda especie b) en el punto (x=2), hay una discontinuidad evitable y como , $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{9}}{x^2-4} = \dfrac{1}{24}$ la función se redefine de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} & \text{si } x\neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{24} & \text{si } x=2 \end{cases}$$

5. Estudio de la función en los extremos: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty}$, por el teorema Nº 2 tenemos que: n=$\dfrac{1}{2}$, y m=2, como n>m, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$=0 y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$=0

6. Cortes con los ejes de coordenadas: corte con el eje Y (x=0) $\Rightarrow$ y= $\frac{\sqrt{7}-3}{-4} \Rightarrow y = \frac{3-\sqrt{7}}{4} \Rightarrow (0, \frac{3-\sqrt{7}}{4})$ y corte con el eje X (y=0) $\Rightarrow \sqrt{x+7}$ - 3=0 $\Rightarrow$ x + 7=9 $\Rightarrow$ x=2, como x=2 no pertenece al dominio de la función, entonces no existe corte con el eje x.

7. Gráfica:



Ejercicios Sobre Límites

1. Comprobar por medio de la definición de límite que se cumplen:

a. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-5} = \frac{-1}{2}$ b. $\lim\limits_{x \to 3}(3x-9) = 0$ c. $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 = 12$ d. $\lim\limits_{x \to 1}\sqrt{x+3}$ =2

e. $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 5x + 2) = 16$ f. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$ g. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{7}{x-5} = -\frac{7}{3}$ h. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-5}{4x+3}$

$= \frac{1}{2}$

i. $\lim\limits_{x \to -4} \frac{8}{x-2} = -\frac{4}{3}$ j. $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 + 15x - 63) = 16$ k.= $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ l=

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{8}{x+9}$

m. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+5}{x-1} = \infty$ n. $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \frac{x^2}{3}) = 1$ o. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-3}{x^2-1} = 0$ p.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+5}{3x+2} = \frac{2}{3}$

q. $\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{4x-5} - \sqrt{3})$ =0 r. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4x}{5x-2}$ =1 s. $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{4}{x-2} + \frac{5}{x+2}\right)$ t.

$\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$

u. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+5}{9x+2}$ = $\frac{1}{3}$ v. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x-5}{3x^2+4} = 0$ w. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{4x+9} = 5$ x. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+5}{x+7}$

=∞

y. $\lim\limits_{x \to a}(\sqrt{x^2} - a) = 0$ z. $\lim\limits_{x \to 0}(ax^2 + ax + a^2) = 3a^2$

2. **Aplicando las propiedades de límite y de los números reales, hallar los siguientes límites:**

a) $\operatorname*{llim}_{x \to \infty} \dfrac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5+1}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ c)

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$ e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ f)

$\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ h) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2-(\pi+1)x+\pi}{x^3-\pi^3}$ i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ j)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

k) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ n) $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ ñ)

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$ o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} 3x}$ q)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ r) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{4+x}{6-x}\right]^x$

s) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x - 1}{x^2 - 1} \right]^{x+1}$ t) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})x$ u) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\lg(1+10x)}{x}$ v) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

w) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ x) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$ y) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \right)^{x+1}$

z) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Ejercicios Sobre Continuidad

3. Realizar las siguientes gráficas aproximadas y estudiar la función en los puntos de discontinuidad, si los hay

a. $f(x)= \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x<-2 \\ x^2 - 1 & \text{si } -2\leq x<0 \\ 3 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 2x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ b. $f(x)= \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x<4 \\ x^2 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$ c. $f(x)= \begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\leq x<3 \\ x^2 + 1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x<2 \\ 3 & \text{si } 2\le x<4 \\ 5 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ e. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x>4 \end{cases}$ f. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } \ge 1 \end{cases}$

g. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ x+1 & \text{si } 2<x\le 5 \\ 6 & \text{si } 5<x<7 \end{cases}$ h. $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } 4<x\le 5 \\ 1-x & \text{si } x>5 \end{cases}$ i. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

j. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 5 & \text{si } 2\le x\le 4 \\ x-1 & \text{si } 4\le x<6 \end{cases}$ k. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ l. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ 2 & \text{si } 1<x<3 \\ 5 & \text{si } 3\le x<5 \end{cases}$

m. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ 6 & \text{si } x=3 \\ 9 & \text{si } x>3 \end{cases}$ n. $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ o. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

p. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } 3<x<5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$ q. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ r. $f(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{si } x<1 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

s. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si } x<4 \end{cases}$ t. $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ \operatorname{Ln} x & \text{si } x>0 \end{cases}$ u. $f(x)=\begin{cases} \lg_3 x & \text{si } x\le 0 \\ \frac{3}{x} & \text{si } 0<x<4 \\ 2x-3 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$

v. $f(x)=\begin{cases} |x-3| & \text{si } x<-2 \\ e^{2x+1} & \text{si } -2\le x\le 0 \end{cases}$ w. $f(x)=\begin{cases} 2.400 & \text{si } 0\le x\le 40 \\ 80x-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } 40<x<80 \end{cases}$

$\frac{3}{x-2}$ si $0<x<2$ $\qquad$ $40x$ si $x\geq 80$

x. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x<2 \\ 5 & \text{si } 2\leq x\leq 4 \\ x-1 & \text{si } 4\leq x<6 \end{cases}$ $\qquad$ y. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0\leq x<2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } 2\leq x<4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } 4\leq x<6 \end{cases}$

z. Una función está dada por la fórmula:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{cuando } x\neq 2 \\ A & \text{cuando } x=2 \end{cases}$$

¿Cómo debe elegirse el valor de la función A=f(2) para que la función f(x), completada de esta forma, sea continua cuando x=2?. Construir la gráfica de f(x).

4. Averiguar si las funciones que se dan a continuación son continuas, en caso de no ser, diga que condición de la discontinuidad falla y de que tipo es, si la continuidad es evitable redefina la función.

a. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ b. $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$ c. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ d. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

d. $f(x)=\dfrac{x^2+x-x}{x+2}$ e. $f(x)=\dfrac{x^4-x^3+x^2-12x+4}{x^3-6x^2+11x-6}$ f. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

g. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-2x-3}$ h. $f(x)=\dfrac{x4-x2}{3x-5}$ i. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ j. $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x}$ k. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ l. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ m. $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$ n. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

o. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x-3}$ p. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$ q. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ r. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

s. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ t. $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}$ u. $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x}$ v. $f(x)=1-\dfrac{2}{x^3}$

w. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ x.. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x-3}$ y . $f(x)=\dfrac{-x^2+7x-10}{x^2+x-2}$

CAPÍTULO II

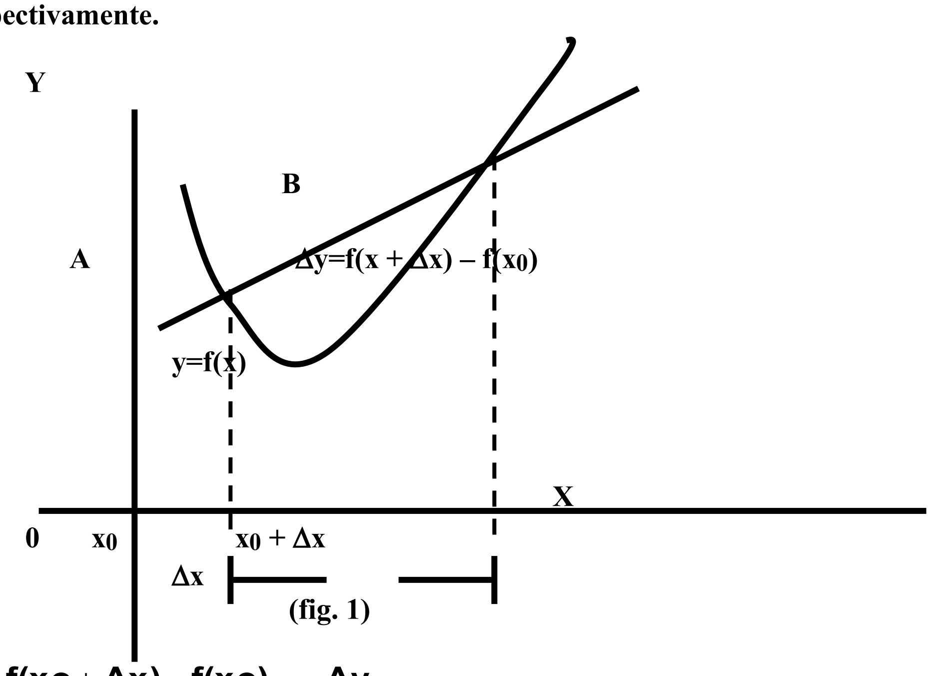
DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE DERIVADAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Derivadas, Interpretación Geométrica de la Derivada, Derivada en un Punto, Funciones Diferenciables a la Izquierda de un Punto, Funciones Diferenciables a la Derecha de un Punto. Funciones Diferenciables en un Punto, Teorema 1 (Sobre Funciones Diferenciables), Propiedades de la Derivadas, Derivadas de Funciones Compuestas, Teorema 2 (Derivada de la Función Inversa), Derivada de Funciones Dadas en Forma Implícitas, Derivadas de Funciones Dadas en Forma Paramétricas, Diferenciales, Interpretación Geométrica de las Diferenciales, Derivada de Orden Superior, Ejercicios Propuestos.

Empezáremos este módulo dando unos ejemplos para visualizar la definición de la derivada.

Ejemplo 1: **Considérese la gráfica de la función y=f(x) de la fig. 1.**

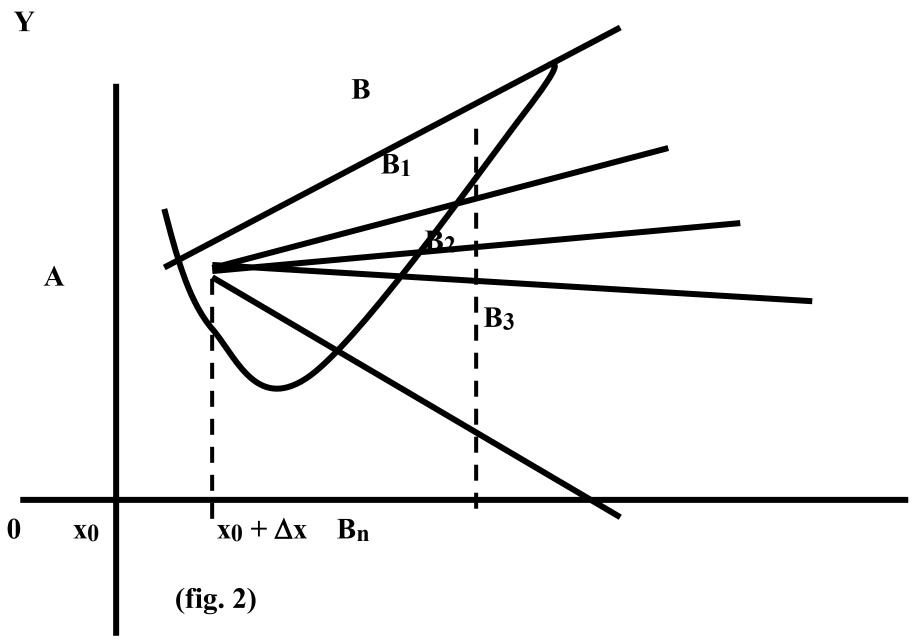
Tomemos dos puntos A[x_0,f(x_0)] y B[x + Δx,f(x + Δx)] Representados por los puntos A y B respectivamente.



(fig. 1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(xo + \Delta x) - f(xo)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ **=m (pendiente de la recta secante), que pasa por los puntos A y B.**

Supongamos que A permanece fijo y que B se mueve sobre la curva aproximándose a A como se muestra en la (fig 2).



(fig. 2)

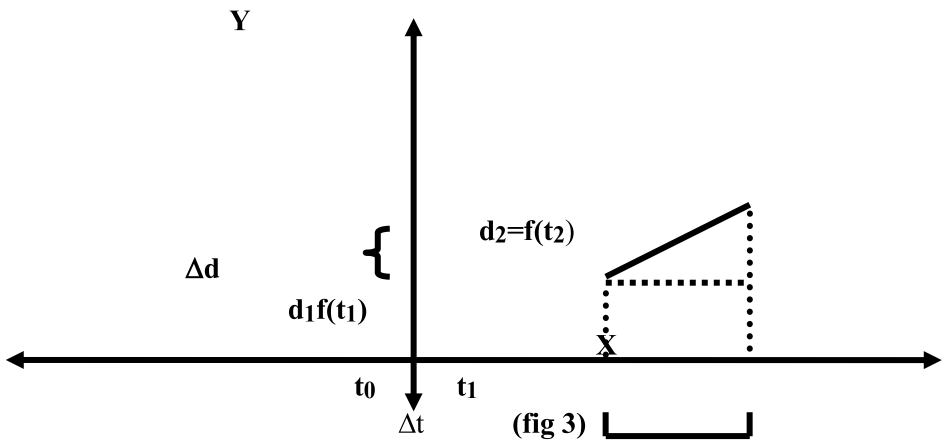
Como podemos observar que cuando B se aproxima a A, la recta AB tiende a una posición fija, y la pendiente de la secante se aproxima a un valor límite determinado, este valor límite representa la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Observamos que cuando $\Delta x \rightarrow 0$, B $\rightarrow$ A y así podemos hacer que la pendiente de la secante (m_{sec}) difiera de la pendiente de la tangente (m_{tg}) tan poco como queramos, escogiendo B sobre la curva suficientemente cerca de A, (pero distinto de A). Podemos observar que allí interviene el límite y de allí que:

$$m_{tg}=\lim_{\Delta x \to 0}(m_{sec}) \Rightarrow m_{tg}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m_{tg}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

<u>Ejemplo 2:</u> Consideremos un cuerpo que se mueve a través de una recta coordenada, sea d la distancia recorrida en un tiempo t. Cuando hay una variación en el tiempo, la posición del cuerpo en la recta cambia y de allí podemos establecer la función

posición d, tal que d=f(t) que será la distancia del cuerpo a un punto de referencia 0 en el instante t, ver (Fig.3)



(fig 3)

En el tiempo t_0, el cuerpo ha recorrido una distancia $d_1=f(t_0)$ y en el tiempo t_1 la posición de $d_2=f(t_1)$. La distancia $(d_2 - d_1)$ se llama <u>desplazamiento del cuerpo en el tiempo (t_0,t_1)</u> y $(t_2 - t_1)$ es el <u>tiempo transcurrido durante ese desplazamiento</u>, es decir, $\Delta d=d_2 - d_1$ y $\Delta t=t_1 - t_0$.

Si partimos del hecho de que la distancia d y el tiempo t son de naturaleza física y en consecuencia puede medirse, tenemos que transcurrido el tiempo t_0, el cuerpo ocupa la posición $d_1 + f(t_0)$ y en el instante $t_0 + \Delta t$ la posición del cuerpo es $d_1 + \Delta d = f(t_0 + \Delta t)$, es decir, que el desplazamiento del cuerpo en el tiempo $t_0 + \Delta t$ es $[(t_0 + \Delta t)] - f(t_0)$ y el tiempo transcurrido durante ese desplazamiento es Δt. Definiremos ahora la velocidad media del cuerpo en movimiento desde t_0 hasta $(t_0 + \Delta t)$ como: $\dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(x_0)}{\Delta t}$

Con el fin de hallar la velocidad instantánea o velocidad en el instante t, consideramos la velocidad media para intervalos del tiempo Δt cada vez más pequeño, es decir, Δd cuando $\frac{\Delta d}{\Delta t} \rightarrow 0$ y llegamos así a la determinación del limite de la velocidad

cuando t → 0 $\Rightarrow v=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta d}{\Delta t} \Rightarrow v=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Podemos generalizar el ejemplo, matemáticamente sustituyendo d por y, t por x, es decir: $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si comparamos las nociones establecidas en los ejemplos anteriores acerca de la pendiente de una curva en un punto y la velocidad instantánea, veremos que sus interpretaciones obedecen a una misma expresión matemática, es decir, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

A este límite se le llama el valor de la derivada de la función f en x_0.

Puesto que x puede tomar cualquier valor en el dominio de la función f en donde el $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ exista, es por lo que obtenemos una nueva función $f'=\frac{dy}{dx}$ y en donde dicho límite nos facilita la regla para asociar $f'(x)$ al número x.

<u>Definición 1:</u> Sea $f:D \rightarrow \Re$, Decimos que f es <u>diferenciable en un punto x_0</u> sii $x_0 \in D$, x_0 es (p.a) de $D \subset \Re$, y el límite $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe y es finito. Si este límite existe y en finito, entonces su valor es llamado <u>Derivada de f en x_0</u> y lo denotaremos por $f'(x_0)$. Si la función f es diferenciable en cada punto de el conjunto $S \subseteq D$, entonces decimos f es diferenciable sobre S y la función $f':S \rightarrow \Re$, es llamada la <u>derivada de f sobre S.</u>

Notece que $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = \Delta x + x_0$ y $\Delta x \to 0$ cuando $x \to x_0$, es decir, $\frac{dy}{dx} =$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Más aún, si llamamos $\Delta x = h$, tenemos: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Además de $f^{|}(x)$ se usan f', y', $\frac{dy}{dx}$ para significar la derivada de y con respecto a x, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y) = y' = f'(x)$

<u>Definición 2:</u> Sea $f: D \to \Re$. Decimos que f es <u>diferenciable a la izquierda de x_0</u> sii ($x_0 \in D$), x_0 es (p.a) $D \subset \Re$ y el límite $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y es finito.

Analogamente f es <u>diferenciable a la derecha de x_0</u> sii ($x_0 \in D$), x_0 es (p.a) de $D \subset \Re$ y el límite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe y es finito.

<u>Definición 3:</u> Sea $f: D \to \Re$. Decimos que f es <u>Difrenciable en x_0</u> si f es diferenciable a la izquierda de x_0 y f es diferenciable a la derecha de x_0, es decir,

$$\frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Teorema 1:</u> Sea $f: D \to \Re$, f diferenciable en $x_0 \in D$. Entonces <u>f es continua en x_0.</u>

La primera condición de continuidad se cumple por ser x_0 un (p.a), es decir, la función es definidad en el punto x_0.

La segunda condición de continuidad también se cumple, ya que como la función es diferenciable entonces el $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Solo hay que ver que se cumpla la tercera condición de continuidad, es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En efecto, como $f(x)=f(x) - f(x_0) + f(x_0)$ (elemento neutro e inverso de la adición de los números reales), además por elemento neutro e inverso multiplicativo de los números reales tenemos:

$$f(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) + f(x_0),\ \forall x\in D$$

Aplicando el límite cuando a ambos miembros de la expresión anterior cuando $x \to x_0$, nos resulta: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) + f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).0 + f(x_0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, por lo tanto, se cumple la tercera propiedad y en consecuencia, toda función derivable es continua.

El reciproco es falso, todas las funciones continuas no son derivables, veamos esto con un ejemplo.

<u>Ejemplo 3:</u> Hallar la derivada de la función f(x) =lxl

<u>Solución:</u>

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{sí } x\geq 0 \\ -x & \text{sí } x\leq 0 \end{cases}$$

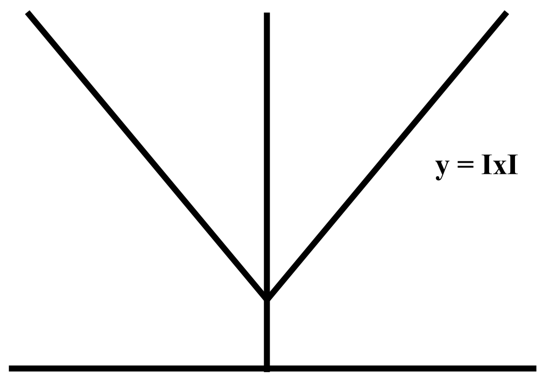
Hallando las derivadas laterales en x=0, tenemos:

$$\frac{dy}{dx}(0^-)=\lim_{h \to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(0^-)=\lim_{h \to 0}\frac{-x-h+x}{h} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}(0^{-}) = -\lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0^{-}))=-1$$

$$\frac{dy}{dx}(0^{+}) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0^{+}) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(0^{+}) = -\lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}(0^{+}) = 1$$



Como las derivas laterales son distintas, la derivada en el punto $x_0=0$ no existe, sin embargo la función f(x)=IxI es continua, ver fig. 5

<u>Propiedades de las Derivadas:</u>

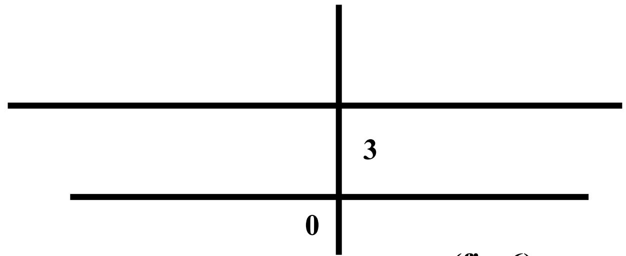
1. **Sea f(x)=k, $\forall k \in \Re$, entonces** $\frac{dy}{dx}=0$

0

(fig. 5)

<u>Demostración:</u> $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \frac{0}{h} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$

Ejemplo 4. **Hallar la derivada de la función f(x)=3.**



(fig. 6)

Solución: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \frac{0}{h} \Rightarrow$ **que si f(x)=3** $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$

2. **Sea** $k \in \Re$ **y f(x) diferenciable, entonces** $\frac{dkf}{dx}(x_o) = k\frac{df}{dx}(x_0)$

Demostración: **Sea F una función tal que F(x)=k.f(x), donde f es derivable en** x_0**,**

entonces:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{c\lfloor f(x_0+h) - f(x_0) \rfloor}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = c\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \frac{df}{dx}(x_0) = c\frac{df}{dx}(x_0)$$

Como x_0 **es cualquier número en el dominio de** $\frac{df}{dx}(x_0)$**, entonces** $\frac{dkf}{dx}(x_o)$

$= k\frac{df}{dx}(x_0)$.

Ejemplo 5: **a) Hallar la derivada de la recta f(x)=mx + k**

Solución: $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{m(x+h)+b-mx-b}{h} \Rightarrow$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{mx+mh-mx}{h} \Rightarrow \frac{df}{dx} = m$$

b) Hallar la derivada de la función: f(x)=5x + 3 $\Rightarrow \dfrac{df}{dx} = 5$

3. Sean f y g funciones derivables en x, entonces se tiene: $(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$.

Demostración: **Sean f y g derivables en x_0, entonces:**

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(f \pm g)(x_0 \pm h) - (f \pm g)(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) \pm (f(x_0) \pm g(x_0))}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) \pm g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) \pm g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \Rightarrow \frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

Ejemplo 6: **a) Hallar la derivada de la función:**

$f(x)=ax^2 + bx + C$.

Solución: $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} \Rightarrow$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{ax^2+2axh+h^2+bx+bh-ax^2-bx}{h}\Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{2axh+bh}{h}\Rightarrow\frac{df}{dx}=2ax+b$$

b. **hallar la derivada de $f(x)=7x^2-3x+5\Rightarrow\dfrac{df}{dx}=14x-3$**

4. **Sean f en g derivables en x_0, entonces:**

$(f.g)'_x=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Demostración:

$$\frac{df_xg}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(f.g)_{(x+h)}-(f.g)_x}{h}=$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)}{h}$, **aplicando las propiedades del elemento neutro y simétrico de la adición de números reales, es decir, sumando y restando: $f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)$ y $g(x+h)f(x)-g(x+h)f(x)$ tenemos que la derivada es igual al límite:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)+g(x+h)f(x)-g(x+h)f(x)-f(x).g(x)}{h}$$

$\displaystyle\frac{df_xg}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$, **aplicando las propiedades de los límites tenemos:**

$$\frac{df_xg}{dx}=\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\Rightarrow$$

$$(f.g)x=f(x)\frac{dg}{dx}+g(x)\frac{df}{dx}$$

Ejemplo 7: **Hallar la derivada de la función: $H(x)=(2x+3)(3x^2+2x+2)$**

Solución: Por la propiedad 4 y los ejemplos 5 y 6 tenemos:

$f(x)=2x+3 \rightarrow \frac{df}{dx}=2$ y $g(x)=3x^2 + 2x + 2 \rightarrow \frac{dg}{dx}=6x+2$, Sustituyendo $\frac{dH}{dx}=2(3x^2 + 2x+2) + (2x+3)(6x+2)$, resolviendo y agrupando términos semejantes tenemos:

$$\frac{dH}{dx}=6x^2 + 4x + 4+12x^2 + 4x+ 18x + 6 \Rightarrow \frac{dH}{dx}=18x^2 + 26x + 10$$

5. Sea f derivable, entonces $\left[\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right]=\left[\frac{df}{dx}\right]^{-1} \Rightarrow \left[\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right]=-\left[\frac{\frac{df}{dx}}{f^2(x)}\right]$

Demostración: $\left[\frac{df}{dx}\right]^{-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f-1(x+h)-f-1(x)}{h} \Rightarrow$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]^{-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} \Rightarrow \left[\frac{df}{dx}\right]^{-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{df}{dx}\right]^{-1}=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{f(x+h)f(x)} \Rightarrow \left[\frac{df}{dx}\right]^{-1}=-\frac{\frac{df}{dx}}{f^2(x)}$$

Ejemplo 8: Hallar la derivada de la función: $f(x)=\frac{1}{2x^2+3}$

Solución: $\frac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(x+h)^2+3}-\frac{1}{2x^2+3}}{h} \Rightarrow$

$$\frac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2x^2+3-2(x+h)^2-3}{h(2(x+h)^2+3)(2x^2+3)} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2x^2-2x^2-4xh-2h^2}{h(2(x+h)^2+3)(2x^2+3)} \Rightarrow \frac{df}{dx}=$$

$$\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2h(2x+h)}{h}\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\left[2(x+h)^2+3\right]\left[2x^2+3\right]} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{-4x}{(2x^2+3)^2}$$

6. Sean f y g derivables, entonces: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g(x)\frac{df}{dx}-f(x)\frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}$

<u>Demostración:</u> Es un caso particular de la propiedad (4) ya que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df{\times}g^{-1}}{dx}=f'(x)g^{-1}(x)\frac{df}{dx}+f(x)\frac{dg^{-1}}{dx}$$ donde por la propiedad (5)

$$\frac{dg^{-1}}{dx}=\frac{g^{-1}(x)}{(g(x))^2}$$, sustituyendo a $\frac{dg^{-1}}{dx}$ nos resulta que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=f'(x).g^{-1}(x)-\frac{g^{-1}(x)\frac{df}{dx}}{(g(x))^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{dg^{-1}}{dx}(g(x))^2-f(x)\frac{dg}{dx}.}{(g(x))^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo 9: Hallar la derivada de la función: $H(x)=\frac{2x+3}{4x+5}$

<u>Solución:</u> $$\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)+3}{4(x+h)+5}-\frac{2x+3}{4x+5}}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(2(x+h)+3)(4x+5)-(2x+3)(4(x+h)+5)}{h(4(x+h)+5)(4x+5)} \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)(4x+5)-(2x+3)(4x+4h+5)}{h(4(x+h)+5)(4x+5)} \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{8x^2+10x+8xh+10h+12x+16-8x^2-8xh-10x-12x-12h-15}{h(4(x+h)+5)(4x+5)}$$

$$\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(4(x+h)+5)(4x+3)} \Rightarrow H'(x)=\frac{-2}{(4x+5)^2}$$

7. Sea $f(x)=x^n$, entonces, $f'(x)=nx^{n-1}\ \forall\ n\in\Re$

Demostración: $$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+...+h^n-x^n}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\ldots+h^{n-1})}{h} \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$

<u>Ejemplo 10:</u> Hallar la derivada de $f(x)=3x^3+4x^2+5$

<u>Solución:</u> $$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^3+4(x+h)^2+5-3x^3-4x^2-5}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^3+9x^2h+3xh^2+h^3+4x^2+8xh+4h^2-3x^3-4x^2}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{9x^2h+3xh^2+h^3+8xh+4h^2}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{h(9x^2+3xh+h^2+8x+4h)}{h} \Rightarrow f'(x)=9x^2+8x$$

Sea $f(x)=\operatorname{sen}\alpha x$, $\forall\alpha\in\Re$, entonces $f'(x)=\alpha\cos\alpha x$

<u>Demostración:</u> $$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha(x+h)-\operatorname{sen}\alpha e}{h}$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, tenemos:

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x\cos h+\operatorname{sen}hx\cos\alpha e-\operatorname{sen}\alpha x}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x(\cos hx-1)+\operatorname{sen}hx\cos\alpha e}{h}$$ **aplicando las propiedades de los**

límites: $\frac{df}{dx} = sen\alpha en\alpha x \lim_{h \to 0} \frac{coshx - 1}{h}$ + $\alpha cos\alpha x \lim_{h \to 0} \frac{senhx}{h}$, como

$\lim_{h \to 0} \frac{coshx - 1}{h} = 0$ y $\lim_{h \to 0} \frac{senhx}{h} = 1 \Rightarrow \frac{df}{dx}$=$\alpha cos\alpha x$

<u>Ejemplo 11:</u> **Hallar la derivada de la función f(x)=sen4x**

<u>Solución:</u> $\frac{df}{dx}$=4cos4x

8. Sea f(x)=cosαx ∀α∈ℜ, entonces f'(x)=-αsenαx

<u>Demostración:</u> $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{cos\alpha os + h) - cos\alpha o}{h}$

Aplicando la identidad cos(α±β)=cosαcosβ ∓ Sen(αSenβ y las propiedades de los límites tenemos:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{cos\alpha x cos\alpha h - sen\alpha h sen\alpha s - cos\alpha o}{h} \Rightarrow$$

$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{cos\alpha x(cos\alpha h - 1) - sen\alpha h sen\alpha s}{h}$, **aplicando las propiedades de los límites:**

$\frac{df}{dx} = \alpha sen\alpha x \lim_{h \to 0} \frac{coshx - 1}{h}$ - $\alpha sen\alpha x \lim_{h \to 0} \frac{senhx}{h}$, como $\lim_{h \to 0} \frac{coshx - 1}{h} = 0$ y

$\lim_{h \to 0} \frac{senhx}{h} = 1 \Rightarrow \frac{df}{dx}$=-αsenαx

<u>Ejemplo 12:</u> **Hallar la derivada de la función f(x)=cos5x**

<u>Solución:</u> $\frac{df}{dx}$=-5sen5x

9. Sea f(x)=tg(αx) ∀α∈R, entonces f'(x)=αsen^2(αx)

Demostración: H(x)=tg(αx), como la tg(αx)=$\frac{sen(\alpha en}{cos(\alpha os}$, aplicando las propiedades 6, 8 y 9, haciendo f(x)=sen(αx) ⇒

$\frac{df}{dx}$=αcos(αx) y g(x)=cos(αx) ⇒ $\frac{df}{dx}$=-αsen(αx), entonces,

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\alpha cos(\alpha x)cos(\alpha(\alpha - sen(\alpha en(\alpha x sen(\alpha en}{cos^2(\alpha \alpha x}\quad\Rightarrow\quad\frac{dH}{dx}=\frac{\alpha}{cos^2(\alpha\alpha x}\quad\Rightarrow$$

H'(x)=αsec^2(αx)

<u>Ejemplo 13:</u> **Hallar la derivada de la función f(x)=tg4x**

<u>Solución:</u> $\frac{df}{dx}$=4sec^{2}4x

10. Sea f(x)=cscαx, ∀α∈ℜ, entonces, $\frac{df}{dx}$=αcscαxctgαx

<u>Demostración:</u> (Ejercicio).

11. Sea f(x)=secαx, ∀α∈ℜ, entonces, $\frac{df}{dx}$=-αsecαxtgαx

<u>Demostración:</u> (Ejercicio).

12. Sea f(x)=ctgαx ∀α∈ℜ, entonces, $\frac{df}{dx}$=-αcsc^{2}α

<u>Demostración:</u> (Ejercicio)

a. Sea f(x)=e$^{\alpha x}$ Vα∈ℜ, entonces $\frac{df}{dx}$=αe$^{\alpha x}$ <u>Demostración:</u>

$$\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{(\alpha\alpha+h)}-e^{(\alpha\alpha x}}{h}\quad\Rightarrow\quad\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha x}e^{\alpha h}-e^{\alpha x}}{h}$$

$\frac{df}{dx}=e^{\alpha x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha x}e^{\alpha h}-e^{\alpha x}}{h}$, como el límite $\lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{h}$=α, entonces, $\frac{df}{dx}$=αe$^{\alpha x}$

<u>Ejemplo 14:</u> **Hallar la derivada de la función $f(x)=e^{3x}$**

<u>Solución:</u> $\dfrac{df}{dx}=3e^{3x}$

13. Sea $f(x)=lg_a(\alpha x)$, $\forall\alpha\in R$, entonces $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{\alpha lg_a e}{x}$

<u>Demostración:</u> **(ejercicio)**

En el caso de que la base del logaritmo sea e, entonces $f(x)=Ln\alpha x \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=\dfrac{1}{x}$

<u>Ejemplo 15:</u> **Hallar la derivada de la función $f(x)=lg_3 2x$**

Solución: $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{2lg_3 e}{x}$

<u>Definición 4:</u> **<u>Derivada de Funciones Compuesta</u>, sean f y g, derivables, tales que $y=f(u)$, con $u=g(x)$, entonces la función compuesta $H(x)$ con $H(x)=(f\ o\ g)_x=f[g(x)]$**

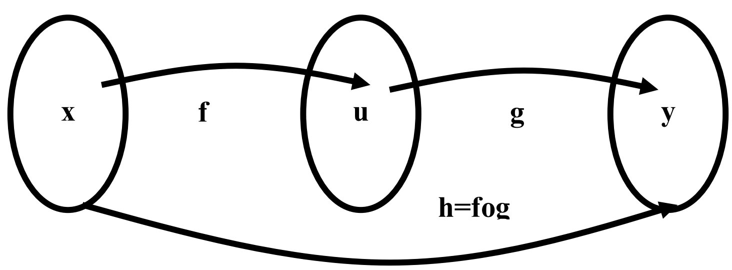


fig 7

Veamos como obtener la derivada

$$\frac{dH}{dx}=\frac{d(fog)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(x+h)-(fog)x}{h}\Rightarrow\frac{dH}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x)}{h}$$

Aplicando la propiedad del neutro multiplicativo de los números reales, tenemos:

$$\frac{d(fog)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\ \frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}\Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} g'(x)$$, Haciendo K=g(x+h) – g(x), entonces si h→ 0

k→ 0 y g(x+h) → g(x), por lo tanto: $\frac{dH}{dx} = \frac{df}{dx}$ [g(x)]. $\frac{dg}{dx}$, por lo que concluimos que

$\frac{d(fog)}{dx} = \frac{df}{dx}$ [g(x)]. $\frac{dg}{dx}$, puesto que, y=$\frac{d(fog)}{dx}$ y u=q(x), tenemos que: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Ejemplo 16: Hallar la derivada de la función $f(x)=(x^2+2x+4)^4$

Solución: Haciendo y=f(x) podemos establecer $y=u^4=f(u)$ con $u=x^2+2x+4=g(x)$, por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^4) = 4u^3$ y $\frac{du}{dx} = 2x + 2$, sustituyendo, tenemos: $\frac{dy}{dx} = 4(x^2 + 2x + 3)^3(2x + 2)$

Ejemplo 17: Halla la derivación de la función: $f(x)=\sqrt[4]{x^5 - 7x^3 + 2}$

Solución: $f(x)=(x^5 - 7x3 + 2)^{1/4} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{4}(x^5 - 7x^3 + 2)^{-3/4}(5x^4 - 21x^2) \Rightarrow$

$$\frac{df}{dx} = \frac{x^2(5x^2 - 7)}{\sqrt[4]{(x^5 - 7x^3 + 2)^3}}$$

Si en las propiedades del 2 al 15. El argumento de cada función es una función compuesta (u), entonces, estas se transforman en las siguientes:

1. $\frac{dku}{dx} = k\frac{du}{dx}$

2. $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$ donde v es también una función compuesta.

3. $$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

4. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{\frac{du}{dx}}{u^2}$$

5. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=-\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{du}{dx}}{v^2}$$

6. $$(u^n)'=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

7. $$\frac{d\,\mathrm{sen}(\alpha u)}{dx}=\alpha\cos(\alpha u)\frac{du}{dx}$$

8. $$\frac{d\cos(\alpha u)}{dx}=-\alpha\,\mathrm{sen}(\alpha u)\frac{du}{dx}$$

9. $$\frac{d\,\mathrm{tg}(\alpha u)}{dx}=\alpha\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

10. $$\frac{d\csc(c\ \alpha u)}{dx}=-\alpha\csc(\alpha u)\,\mathrm{ctg}(\alpha u)\frac{du}{dx}$$

11. $$\frac{d\sec(\alpha u)}{dx}=\alpha\sec x(\alpha u)\,\mathrm{tg}(\alpha u)\frac{du}{dx}$$

12. $$\frac{d\,\mathrm{ctg}(\alpha u)}{dx}=\alpha\csc^2(\alpha u)\frac{du}{dx}$$

13. $$\frac{da^{\alpha u}}{dx}=\alpha\ln a\frac{du}{dx}$$

14. $$\frac{de^{\alpha u}}{dx}=\alpha e^{\alpha u}\frac{du}{dx}$$

15. $$\frac{d(\lg_a(\alpha u))}{dx}=\frac{\alpha}{u\lg_a e}\frac{du}{dx}$$

16. $$\frac{d(\ln_a(\alpha u))}{dx} = \frac{\alpha}{u}\frac{du}{dx}$$

<u>Teoremas 2</u>: (<u>Derivada de la Función Inversa)</u>

Sea f:I → ℜ, inyectiva sobre un intervalo, y suponga que f es derivable en $f^{-1}(x)$, con $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x_o)] \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en x

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0) = \frac{1}{f\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)}$$

<u>Demostración:</u> Sea $x_o=f(x_1)$, entonces:

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_0+h)-f^{-1}(x_0)}{h} \Rightarrow \frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_o+h)-x_o}{h},$$

Ahora bien, si todo número $x_o + h$ del dominio f^{-1} puede escribirse de la forma: $x_o + h=f(x_1 + k)$, para k único, entonces:

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_o+h)-x_1}{h} \Rightarrow \frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_1+k)-x_1}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{k}{f(x_1+h)-f(x_1)}, \text{ al ser:}$$

$x_o + h=f(x_1 + k)$ es $f^{-1}(x_o + h)=a + k$ ó
$k=f'(x_o + h) - x_1 \Rightarrow f^{-1}(x_o + h) - f^{-1}(x_o)$, ya que f es continua en x_1, la función f^{-1} es continua en x_o. Esto significa que k → 0, cuando h→0. Luego:

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{k}{f(x_1+k)-f(x_1)} \Rightarrow$$

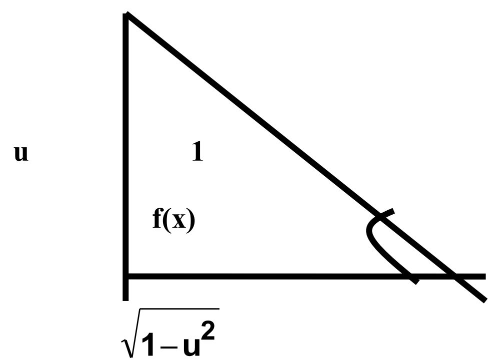
$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_o+h)-f^{-1}(x_o)}{h} \Rightarrow \frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_1+k)-f(x_1)}{k}} \Rightarrow$$

$$\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)==\frac{1}{\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_1)}=\frac{1}{\frac{d(f^{-1})}{dx}(x_0)(f^{-1}(x_o))}$$

Seguiremos con las propiedades de las derivadas agregándoles las de las funciones inversas de las funciones trigonométricas.

17. **Sea f(u)=sen^{-1}u, u=f(x) una función compuesta de x, entonces:** $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$

<u>Demostración:</u> sea f(x)=sen^{-1}u, aplicando la inversa de una función al sen^{-1}u, a cada término tenemos: senf(x)=u $\Rightarrow$ f'(x)cosf(x)=u' $\Rightarrow$ f'(x)= $\dfrac{\frac{du}{dx}}{\cos f(x)}$ **, por el teorema de Pitágoras tenemos: cosf(x)=** $\sqrt{1-u^2}$ **, por lo tanto, f'(x)=** $\dfrac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$



<u>Ejemplo 18:</u> Hallar la derivada de la función:

f(x)=sen^{-1}(2x+3)

<u>Solución:</u> aplicando la función seno a ambos miembros de la función dada y derivándola obtenemos: senf(x)=2x + 3 $\Rightarrow$ f'(x)cosf(x)=2 $\Rightarrow$ f'(x)= $\dfrac{2}{\cos f(x)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{df}{dx} =$

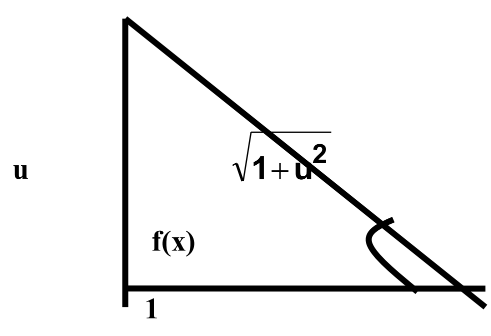
$\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$ **, ya que el cosf(x)=** $\sqrt{1-(2x+3)^2}$

18. Sea $f(x)=\cos^{-1}u$, entonces, $\frac{df}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$

Demostración: (Ejercicio)

19. Sea $f(x)=tg^{-1}u$, entonces $f'(x)=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$

Demostración: aplicando la inversa de una función al $tg^{-1}u$, a cada término tenemos: $tgf(x)=u$ derivando ambos miembros nos queda: $\frac{df}{dx}\sec^2 f(x)=\frac{du}{dx} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{du}{dx}}{\sec^2 f(x)}$, por el teorema de Pitágoras tenemos: $\sec^2 f(x)=1+u^2$, por lo tanto, $\frac{df}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$



<u>Ejemplo 19:</u> **Hallar la derivada de la función f(x)=tg$^{-1}\sqrt{2x}$**

<u>Solución:</u> aplicando la función tangente a ambos miembros de la función dada y derivándola obtenemos: tgf(x)=$\sqrt{2x}$ $\Rightarrow$

$$\frac{df}{dx}\sec^2 f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x}\sec^2 f(x)} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}(1+2x)}$$

, ya que la $\sec^2 f(x)=1+2x$

20. **Sea f(x)=ctg^{-1}u, entonces** $\frac{df}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$

<u>Demostración</u>: (Ejercicio)

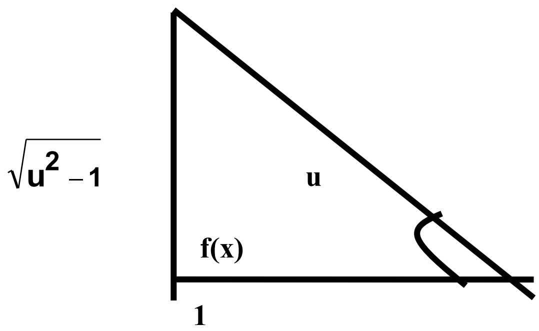
21. **Sea f(x)=sec^{-1}u, entonces** $\frac{df}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

<u>Demostración:</u> aplicando la inversa de una función a la sec^{-1}u, a cada término tenemos: secf(x)=u derivando ambos miembros nos queda: $\frac{df}{dx}$ **secf(x)tgf(x)=u'** $\Rightarrow \frac{df}{dx}=$

$$\frac{\frac{du}{dx}}{\sec^2 f(x)\,\mathrm{tg}f(x)}$$

, por el teorema de Pitágoras tenemos: tgf(x)=$\sqrt{u^2-1}$, por lo tanto,

$$\frac{df}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$



Ejemplo 20: Hallar la derivada de la función $f(x)=\sec^{-1}(2x+1)$

Solución: $\frac{df}{dx}=\frac{2}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1}} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{2}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

22. Sea $f(x)=\csc^{-1}u$, entonces, $\frac{df}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

Demostración: (Ejercicio)

Definición 5: (Derivadas de Funciones Dadas en Forma implícita) Sea $f(x,y)=0$ una función dada en forma implícita, sí f es derivable, entonces:

$$f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=0 \Rightarrow f'_x(x,y)+f'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)},$$

donde $f'_x(x,y)$ se consigue derivando a $f(x,y)=0$, manteniendo a y constante, de la misma forma se consigue $f'_y(x,y)$ manteniendo a x constante.

Ejemplo 20: Halla la derivada de la siguiente función:

$x^2 + 2xy - y + 3y^2=0$ dada en forma implícita.

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula para las derivadas implícitas halladas anteriormente, tenemos: $f'_x(x,y)$=2x + 2y, esto se hizo derivando a f(x,y), manteniendo a la y constante, $f'_y(x,y)$=2x -1 + 6y, se obtuvo derivando a f(x,y), con respecto a y manteniendo a la x constante, por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y}{2x+2y-1}$ o $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y}{1-2x-2y}$

<u>Ejemplo 21:</u> $tg^{-1}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

<u>Solución:</u> Primero hacemos f(x,y)=0, es decir: $tg^{-1}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$, luego aplicando la fórmula para la derivada implícita hallada anteriormente, tenemos:

$$f'_x(x,y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{\left(x^2+y^2\right)'}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow f'_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} - \frac{-x}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$f'_x(x,y) = -\frac{x+y}{x^2+y^2}$, esto se hizo derivando a f(x,y), manteniendo a la y constante,

$$f'_y(x,y) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{\left(x^2+y^2\right)'}{\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow f'_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow f'_y(x,y) =$$

$-\frac{x-y}{x^2+y^2}$, se obtuvo derivando a f(x,y), con respecto a y manteniendo a la x constante,

por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

<u>Definición 6:</u> (Derivada de Funciones Dada en Forma Paramétrica) Sea y=f(x), con x dependiendo de un parámetro t, es decir, x=φ(t), entonces y=f[φ(t)], si derivamos esta función, con respecto a t, tenemos que $y^i=\frac{dy}{dx}$, es la derivada de una función que depende de un parámetro y se obtiene derivando a la función y con respecto a t de la siguiente manera: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$.(por la derivación de funciones compuestas), despejando $\frac{dy}{dx}$, tenemos que: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ o $y'=\frac{y'_t}{x^i_t}$, esta es la fórmula para obtener la derivada de una función que depende de un parámetro t.

<u>Ejemplo 22:</u> Halla la derivada de la siguiente función dada en forma parametrica.

$$y=\begin{cases} x = t^2 \\ \frac{1}{2t} \end{cases}$$

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula para las derivadas dadas en forma paramétricas halladas anteriormente, tenemos: $y'_t=-\frac{1}{2t^2}$ y $x'_t=2t$, se obtuvo derivando a x e y con respecto a t, por lo tanto, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4t^3}$ o $y'=-\frac{1}{4t^3}$

<u>Definición 7:</u> Sea y=f(x) una función derivable, esto implica que $y'=\frac{dy}{dx}$, vamos a darles valor por separado a dy y dx que recibirán el nombre de <u>diferenciales</u> y por lo tanto, podemos considerar a $\frac{dy}{dx}$ como un símbolo para la derivada o como el cociente de diferenciales.

Como x∈Domf' se tiene que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde llamaremos a los incrementos $\Delta x=h$ y $\Delta y=k$, es decir, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{k}{h}$, cuando $h \to 0$, la razón $\frac{k}{h} \to f'(x)$ y por lo tanto, $\frac{k}{h} = f'(x) + \alpha$, donde $\alpha \to 0$, cuando $h \to 0$, entonces, $k=f'(x).h + \alpha.h$, al producto f'(x).h se le denomina <u>Diferencial de la función y=f(x)</u>, y se designa por <u>dy o dy=f'(x).h</u>

Si f es la función tal que f(x)=x, entonces, $f'(x)=1 \Rightarrow dy=1.h \Rightarrow dy=h$, ya que x'=1.

Se puede observar que dx=x, es por otra parte una variable independiente, donde el diferencial dy dependerá de las variables (x,dx), por lo tanto, dy puede escribirse: $dy=f'(x)dx \Rightarrow f'(x)=\frac{dy}{dx}$, así $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como el cociente de dos diferenciales de la función derivada por la de la variable independiente como la derivada de y con respecto a x.

Mientras que la diferencial dx=h, la diferencial dy de la variable dependiente no es, en general, igual al incremento correspondiente k, ya que $\Delta y=f(x + h) - f(x)$ y $dy=f'(x)dx$

Geométricamente:

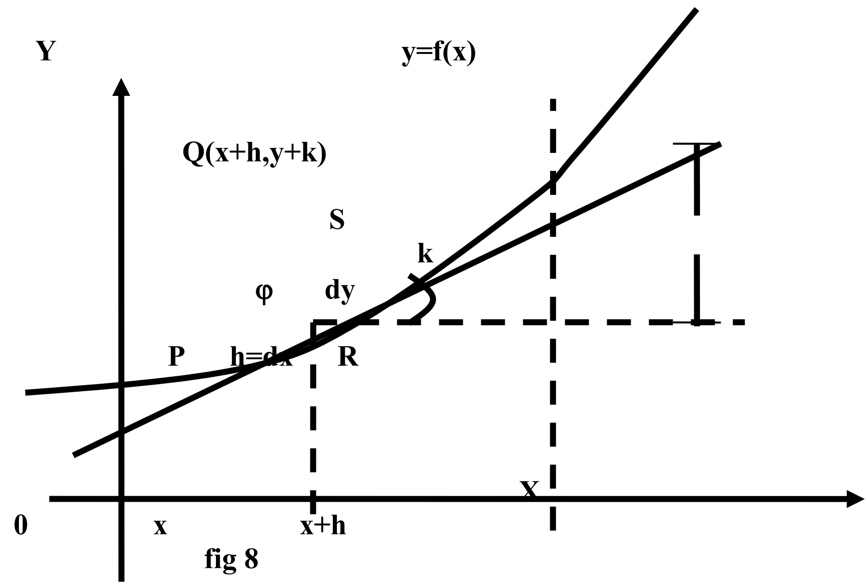


fig 8

En el triangulo rectángulo ΔPRS se deduce: $tg\varphi=\frac{RS}{PR}$, puesto que $f'(x)=tg\varphi$, tenemos que: $\overline{RS}=f'(x).\overline{PR} \Rightarrow \overline{RS}=f'(x).h \Rightarrow \overline{RS}=f'(x).dx$ y por lo tanto, $dy=f'(x).dx$.

El incremento de k con dy para los mismos valores de x y dx, es $\overline{SQ}$, se observa también que k no siempre es mayor que dy.

En muchas ocasiones resulta de interés encontrar el incremento k de la variable dependiente que le corresponde a un incremento h de la variable independiente y para esto es de utilidad el uso de $dy=f'(x)dx$, puesto que dy es una buena aproximación de k si dx es "suficientemente pequeño"

Ejemplo 23: Hallar el incremento y la diferencial de la función $f(x)=3x^2 - x$.

Solución: $k=3(x + h)^2 - (x + h) - 3x^2 + x \Rightarrow k=(6x - 1)h + 3h^2 \Rightarrow k=(6x - 1) \Rightarrow$ $k=(6x - 1)dx$.

Y'=6x – 1 $\Rightarrow \frac{dy}{dx}$=(6x – 1) $\Rightarrow$ dy=(6x – 1)dx

<u>Ejemplo 24:</u> Calcular k y dy de la función f(x)=3x^2 – x, para x=1 y h=0.01

<u>Solución:</u> k=3(x + h)^2 – (x + h) – 3x^2 + x $\Rightarrow$ k=(6x – 1)h + 3h^2 $\Rightarrow$ k=(6 – 1)0.01 + 3(0.01)^2 $\Rightarrow$ k=0.0503, dy=(6x – 1)h $\Rightarrow$ dy=(6 – 1)0.05 $\Rightarrow$ dy=0.0500

<u>Definición 8:</u> (Derivadas de Orden Superior), sea y'=f'(x) la derivada de la función y=f(x), se define la <u>segunda derivada de y con respecto a x</u> como la derivada de la función y'=f'(x), es decir y''=f''(x) $\Rightarrow$ y''=$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $\Rightarrow$ y''=$\frac{d^2y}{dx^2}$, de la misma manera se define las derivadas: terceras, cuartas,............,n-ésima: y'''=$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ $\Rightarrow$ y'''=$\frac{d^3y}{dx^3}$, y^{iv}=$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ $\Rightarrow$ y^{iv}=$\frac{d^4y}{dx^4}$ $\Rightarrow$ .... y$^{(n)}$=$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ $\Rightarrow$ y$^{(n)}$=$\frac{d^ny}{dx^n}$

<u>Ejemplo 23:</u> Hallar y'''=$\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función: y=cosx – senx

<u>Solución:</u> Hallamos la primera derivada y'=-senx – cosx, volviendo a derivar se halla la segunda derivada y''=-cosx + senx, volviendo a derivar hallamos la tercera y'''=sen x + cos x.

<u>Ejemplo 24:</u> Halla y''=$\frac{d^2f}{dx^2}$ de la función:

x^3 – 3x^{2}y + 19xy=0 en el punto (1.1).

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula para las derivadas implícitas tenemos:

$\mathbf{f'_x(x,y)}$**=$3x^2 - 6xy + 19y$, y** $\mathbf{f'_y(x,y)}$**=$-6x^2 + 19x$, por lo tanto,** $\frac{df}{dx} = -\frac{3x^2 - 6xy + 19y}{-3x^2 + 19x}$

, sustituyo esta derivada en el punto (1.1), tenemos que: $\frac{df}{dx}(1,1) = -\frac{3 - 6 + 19}{-3 + 19} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx}(1,1) = -1$**, ahora derivando nuevamente esta función aplicando para ello la derivada de un cociente** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ **y luego sustituimos a x=1, y=1 y** $\frac{dy}{dx}(1,1) =$ **-1, tenemos:**

u=$3x^2$ - 6xy + 19y $\Rightarrow \frac{du}{dx}$ **=6x – 6y – 6xy' + 19y', v=$-6x^2$ + 19x** $\Rightarrow$

$\frac{dv}{dx}$ **=-12x + 19, por lo tanto,**

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{6(x - y - xy^i + 19y^i)(-6x^2 + 19x) - (3x^2 - 6xy + 19y)(-12x + 19)}{(-6x^2 + 19x)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}\,(1,1) = \frac{6(1 - 1 + 1)(-6 + 19) - (3 - 6 + 19)(-12 + 19)}{(-6 + 19)^2} \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2}\,(1,1 = -\frac{64}{169}$$

<u>Ejemplo 25:</u> **Hallar y''=$\frac{d^2y}{dx^2}$ de la siguiente función dada en forma paramétrica:**

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{1-t} \\ \\ y=\ln t \end{cases}$$

<u>Solución:</u> **Aplicando la fórmula para las derivadas dadas en forma paramétricas, tenemos: y'$_t$=$\frac{1}{t}$ y x'$_t$=$\frac{1}{(1-t)^2}$, por lo tanto, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{(1-t)^2}}$ o y'=$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-t)^2}{t}$, ahora derivando nuevamente esta función aplicando para ello la derivada de un cociente $\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}\right)'=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, tenemos: u=$(1-t)^2$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx}$=-2(1–t) v=t $\Rightarrow$ $\frac{dv}{dx}$=1, por lo tanto,** $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{2(1-t)t-(1-t)^2}{t^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Aplicando la definición de la derivada hallar:**

a. $f(x)=4x^2 + x - 1$

b. $f(x)=\sqrt{2x+3}$

c. $f(x)=\frac{1}{x+1}$

d. $f(x)=\ln x^2$

e. $f(x)=e^{3x+5}$

f. $(x+1)^2$

g. $f(x)=\lg_3(3x+2)$

h. $f(x)=e^x \operatorname{sen}(3x-2)$

2. **Aplicando las propiedades de la función derivada y=f(x) calcular $y'=\frac{df}{dx}$ en cada caso.**

a. $f(x)=[3-2\operatorname{sen}(3+2x)]^5$

b. $f(x)=\sqrt[3]{4x5}-\sqrt[5]{5x+3}$

c. $f(x)=\ln x^4 - \ln^4 x$

d. $f(x)=\cos^6(2x+5)\operatorname{sen}^5\dfrac{2x-3}{5}$

e. $f(x)= \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{3x-2}{4x-3}}$

f. $f(x)=x^5e^{2x}$

g. $f(x)=\dfrac{x^5-4x^4-5x^2-4}{3-\ln(4x-5)}$

h. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{2+\cos 2}$

i. $f(x)=(2\lg_4 x)3\lg_4 x$

j. $f(x)=\lg_5(\cos 2x)$

k. $f(x)=\csc(\sec(\csc(3x-2)))$

l. $f(x)=e^{\sec^2 x}$

m. $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{tg}4x}{1+\operatorname{tg}4x}$

n. $f(x)=\cos^{-1}e^x$

o. $f(x)=f(x)=12\operatorname{tg}x^2$

p. $10^{\operatorname{sen}^{-1}10^{x}}$

q. $f(x)=\sqrt[3]{3x^3+2x}+\lg_3{}^3x$

r. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-5}{x\sqrt{x^2-5}}$

s. $f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}3\right)^3$

t. $f(x)=\left(\dfrac{3x+2}{x^2-5}\right)^{x^2}$

u. $f(x)=tg^{-1}\dfrac{2}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

v. $f(x)=(1\text{-}cscx)^{secx}$

w. $f(x)=\dfrac{secx}{3csc^2x}+\dfrac{1}{3}\ln(ctg\dfrac{x}{3})$

x. $f(x)=\left(\sqrt{2x+1}\right)^{x^3}$

y. $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+cosx}{1-cosx}}$

z. $f(x)=10secxtgx$

aa. $y=\dfrac{e^{tg^{-1}x}}{x^2-1}$

bb. $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

cc. $f(x)=\dfrac{e^{ctg^{-1}2x-1}}{5x^{2}-5x-6}$

dd. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{2x^{2}+x+2}{3x^{2}+x+5}}-\lg_{5}\sqrt[5]{\dfrac{2x^{2}+x+2}{3x^{2}+x+5}}$

3. Encontrar la pendiente de $y=3x^3 - 2x^2 + 5$ en el punto (-1,-2)

4. Encontrar la pendiente de $4xy^3 - 5x^2y^2 + 3x^3y=0$ en el punto (2.2)

5. Encontrar la pendiente de $\left.\begin{array}{l} x=t\cos^2 t \\ y=t\,sen^2 t \end{array}\right\}$ en: $t=\dfrac{1}{4}$

6. Sí la distancia recorrida por un móvil está dada por $y=6t^3 + 2t^2 + 4t - 1$, hallar la velocidad del cuerpo cuando t=1, t=2 y t=3.

7. Hallar el incremento k y la diferencial dy de la función $y=5x + x^2$ para x=2 y h=0.001

8. Hallar la diferencial de la función $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, para x=9 y h=0.01

9. Calcular la diferencial de la función y=tgx, para $x=\dfrac{\pi}{3}$ y $h=\dfrac{\pi}{180}$

10. Hallar las diferenciales de las siguientes funciones, para cualquier valor de las variables independiente y de su incremento.

a. $y=\frac{1}{x^n}$

b. $y=\frac{x}{1-x}$

c. $y=sen^{-1}\frac{x}{a}$

d. $y=tg^{-1}\frac{x}{a}$

e. $y=e^{-x^2}$

f. $y=x\ln x - x$

g. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$

11. Muestre que la función $y=\frac{x^2+2x+2}{2}$ satisface a la ecuación diferencial: $(y')^2 + 1=2xy''$

12. Muestre que la función $y=C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2 satisface a la ecuación $y'' + 3y' + 2y=0$

13. Muestre que la función $y=e^{2x}sen5x$ satisface la ecuación $y'' - 4y' + 29y=0$

14. Hallar y''' si $y=x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 5x + 3$

15. Muestre que $y=e^{-x}\cos x$ satisface la ecuación $y^{iv} + 4x=0$

16. Suponga que cada una de las ecuaciones que se dan a continuación determina una función f tal que y=f(x). Encuentre $y'=\frac{df}{dx}$

a. $x\,sen(xy) + \cos(xy)=0$

b. $x + y^2 + \ln(x+y)=0$

c. $x + ye^x + xy^3=0$

d. $5x^3 - 2\sqrt{x^3y^3} + 4y^3 - 7=0$

e. $y^4 - \sqrt{(2x-3)(3y-2)} + 3x^2=2$

f. $\sqrt{3x-1} - \frac{1}{\sqrt{3y-1}} - 10 = x - y$

g. $x^3 - y^3=tg\,\frac{y}{x}$

h. $\sec yx + 1=0$

17. Hallar $y' = \dfrac{df}{dx}$ de cada una de las funciones que se dan a continuación:

a. $\begin{cases} x = 2t^2 - 5t + 1 \\ y = t^3 - 4t - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1-t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1-t^3} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 5t^5 - 5t^3 + 4t - 1 \\ y = t^4 - 3t^2 - 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

e. $\begin{cases} x = a\sec^2 t \\ y = b\sec^3 t \end{cases}$

f. $\begin{cases} x = \sec^4 t \\ y = \csc^4 t \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 2 - 2t + t^2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1-t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1-t^3} \end{cases}$

18. Hallar las derivadas del orden indicado:

a. $y=x(2x-1)^2\,(x+3)^3$ hallar $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$

b. $y=\dfrac{a}{x^n}$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

c. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

d. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}}$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

e. $y=\cos\dfrac{3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

f. $y=e^x\cos x$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

g. $y=\csc^2 x\ln x$ hallar $y^{iv}=\dfrac{d^4y}{dx^4}$

19. Comprobar que la función: $y=x^n[c_1\cos(\ln x) + c_2\operatorname{sen}(\ln x)]$ donde C_1 y C_2 son constantes y $n\in\Re$, satisface la ecuación: $x^2y'' + (1 - 2n)xy^i + (1 + n^2)y=0$

Comprobar que la función: $y=C_1\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + C_2\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, donde C_1 y $C_2\in\Re$, satisface la ecuación diferencial $y'' + y=0$

20. Comprobar que la función:

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

donde C_1, C_2, C_3 y $C_4 \in \Re$ Csatisface la ecuación diferencial $y^{iv} + y = 0$

22. Hallar las derivadas $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ si:

a. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \quad y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$

b. $x = \operatorname{sen}^2 t \quad y = \cos^2 t$

c. $x = a\cos y \quad y = \operatorname{sen} t$

d. $x = a(e^t + e^{-t}) \quad y = b(e^t - e^{-t})$

e. $x = \cos^3 t \quad y = b\operatorname{sen}^3 t$

f. $x = a(t - \operatorname{sen} t) \quad y = a(1 - \cos t)$

g. $x = e^{2t}\cos^2 t \quad y = e^{2t}\operatorname{sen}^2 t$

h. $x = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad y = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

23. Hallar las derivadas $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ de las siguientes funciones dadas en forma implícitas.

a. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ en los puntos i) (2,4) y ii) (2,0)

b. $y^2 = 2px$

c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

d. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

e. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

f. $tg^{-1}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

24. Hallar la derivada n-ésimo $y^n=\frac{d^n y}{dx^n}$ de la función $y=(ax + b)^n$, donde $n \in Z$

25. Hallar las derivadas n-ésimo $y^n=\frac{d^n y}{dx^n}$ de las funciones:

a. $y=\frac{1}{1-x}$

b. $y=\sqrt{x}$

26. Hallar las derivadas n-ésimo $y^n=\frac{d^n y}{dx^n}$ de las funciones:

a. y=senx

b. y=cos2x

c. $y=e^{-3x}$

d. $y=\ln(x+1)$

e. $y=\frac{1}{x+1}$

f. $y=\frac{1+x}{1-x}$

g. $y=\text{sen}^2x$

h. $y=\ln(ax+b)$

27. Demostrar que y, determinada como función de x por las ecuaciones $x=\text{sen}t$ e $y=ae^{\sqrt{2}t}+be^{-\sqrt{2}t}$, satisface a la ecuación diferencial $(1-x^2)\frac{d^ny}{dx^n}-x\frac{d^ny}{dx^n}=2y$

28. Hallar y^n, si:

a. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

b. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$

c. $y=\frac{1}{x(1-x)}$

d. $y=\frac{\ln x}{x}$

e. $y=x^n e^x$

f. $y=tg^{-1}x$

CAPÍTULO III

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL CAMPO DE LA INGENIERÍA

En este capítulo se estudiara: Recta tangente, Recta normal, Ejercicios, Teorema de L-Hopital, Funciones Crecientes, Funciones Decrecientes, Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio, Puntos Críticos de la Primera Derivada, Puntos de Separación, Máximo Relativo o Máximo Local, Mínimo Relativo o Mínimo Local. Valores Extremos, Máximo Absoluto, Mínimo Absoluto, Teorema del Valor Extremo, Intervalos de Concavidad y Convexidad, Puntos de Inflexión, Criterio de la Segunda Derivada, Puntos Críticos de la Segunda Derivada, Criterio de la Segunda Derivada para Extremos Relativos, como Dibujar un Grafico de una Función cualquiera, Aplicaciones de la derivada en problemas de la Ingeníeria, Ejercicios.

<u>Definición 1</u>: Se define la *recta tangente* a una curva, como la recta que pasa por el punto $P_0(x_0,f(x_0))$ y tiene pendiente $m=f'(x_0)$, es decir, $y= f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

<u>Definición 2</u>: Se define la *recta normal* a una curva como aquella recta perpendicular a la recta tangente en el punto $P_0(x_0,f(x_0))$, es decir,

$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

Para hallar la recta tangente o normal se seguirán los siguientes pasos:

1. **Se halla la primera derivada de la función**
2. **Se sustituye el punto en el cual se va ha hallar la recta tangente o normal en la primera derivada (pendiente de la recta tangente o normal)**
3. **Se sustituye la pendiente y el punto en las ecuaciones para hallar la recta tangente o normal según sea el caso**
4. **Se opera en las ecuaciones descritas anteriormente**

<u>Ejemplo</u>: Hallar la recta tangente y normal a la curva: $f(x)=x^2 + 2x + 5$, en el punto (2,4).

<u>Solución</u>:

1. $f'(x_0)=2x + 2$
2. $f'(x_0)=2(2) + 2 \Rightarrow f'(2)=6$

3. Recta tangente: $y=6(x-2)+4$

4. $y=6x-8$

5. Recta normal: $y=-\frac{1}{6}(x-2)+4$

6. $x+6y-26=0$

Teorema de L' - Hopital: Sea $H(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x)\to 0$ o $(f(x)\to \infty)$ y $g(x)\to 0$ o $(g(x)\to\infty)$ cuando $x\to x_0$, entonces $L=\lim_{x\to x_0} H(x)$, tiende a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, si este es el caso L se puede hallar de la siguiente manera:

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}\ldots\ldots\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

, en los casos cuando la indeterminación es de la forma: $0.\infty$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, 1^{∞}, ∞^{0}, ∞^{∞}, 0^{∞}, 0^{0}, $\infty-\infty$, se pueden convertir en las indeterminaciones $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$ aplicando las propiedades de los números reales.

Ejemplo: Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite:

$L=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2^{x}}$ **Solución:** $L=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2^{x}}=\frac{\infty}{\infty}$, satisface las condiciones, luego:

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2^{x}}\Rightarrow L=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2}=\infty\Rightarrow L\to\infty$$

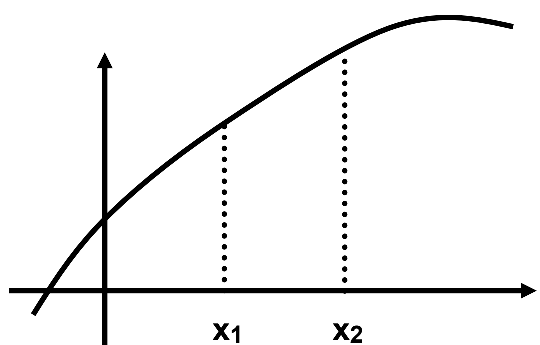
$f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)= e^x \Rightarrow f(x)''= e^x$

$g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow g''(x)=2$

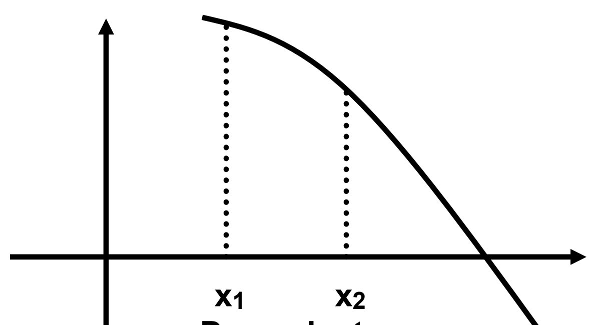
<u>Definición 3</u>: Sea f: A $\rightarrow$ B una función definida en un intervalo (abierto, semiabierto o semicerrado y cerrado)

1. **Se dice que f es *creciente* en este intervalo si para cualquier par de puntos x_1, x_2 perteneciente al intervalo se tiene que: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$**

2. **Se dice que f es *decreciente* en este intervalo si para cualquier par de puntos x_1, x_2 perteneciente al intervalo se tiene que: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$**



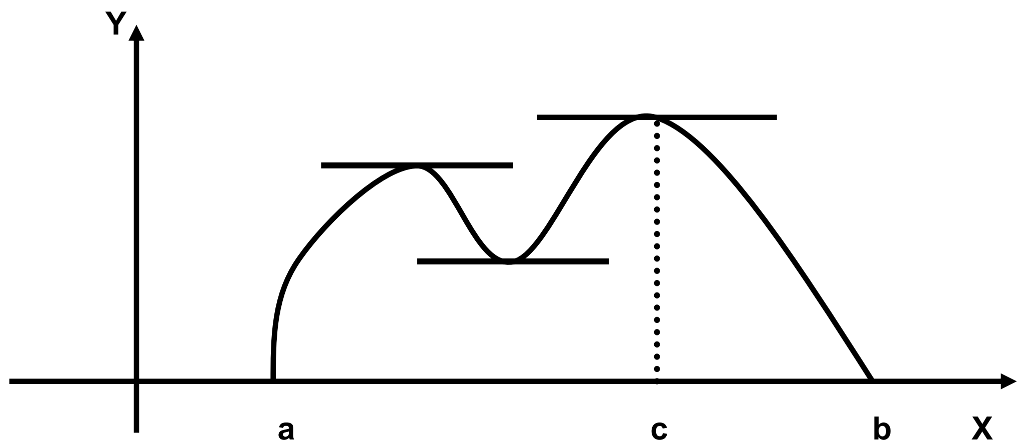
Creciente



Decreciente

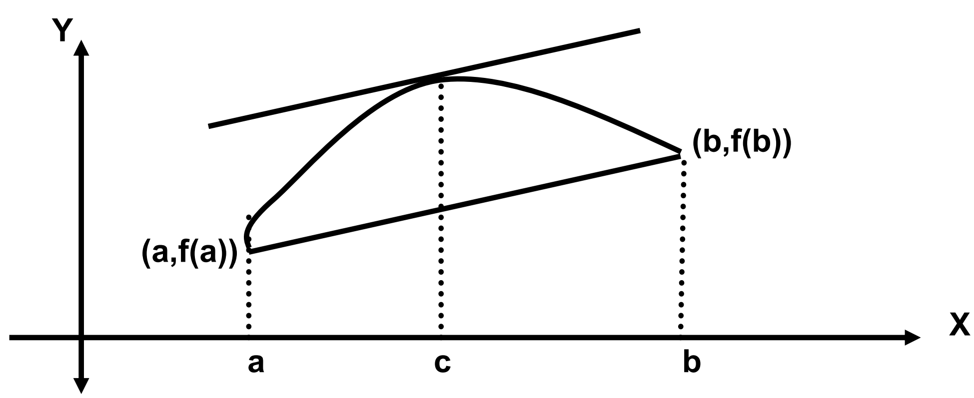
<u>Teorema 1:</u> (*Teorema de Rolle*) Sea a<b. Si f: A $\rightarrow$ B es continua en el intervalo cerrado [a,b], diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y f(a)=f(b)=0. entonces existe c en el intervalo (a,b) tal que f'(c)=0.Geométricamente, este teorema dice que, si el grafico de una función continua corta el eje X en dos puntos y tiene una tangente en

todo punto entre estos dos, entonces debe tener al menos una tangente horizontal en un punto intermedio.



<u>Teorema 2:</u> (*Teorema del Valor medio*) Sea a<b. Si f: A $\rightarrow$ B es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es diferenciable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un punto tal que: f(b) – f(a)=f'(c).(b – a), este teorema también se puede escribir:

f'(c)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos p_1=(a,f(a)) y p_2=(b,f(b)) y f'(c) es la pendiente de la tangente en el punto (c,f(c)).



Luego, el teorema del valor medio nos dice que, si el grafico de una función continua tiene una tangente en cada punto entre a y b, entonces la tangente en algún punto entre a y b debe ser paralela a la recta que pasa por $p_1=(a,f(a))$ y $p_2(b,f(b))$.

<u>Teorema 3:</u> sea $f: A \to B$, una función continua en el intervalo I y diferenciable en todo punto interior de I (excluyendo los extremos).

1. **Si $f'(x)>0$ en todo el interior de I, entonces f es *creciente* en I.**
2. **Si $f'(x)<0$ en todo el interior de I, entonces f es *decreciente* en I.**

<u>Demostración;</u>

1. **Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I tales que $x_1<x_2$. Por el teorema del valor medio tenemos que: $f(x_2) - f(x_1)=f'(c).(x_2 - x_1)$, para algún $c\in(x_1,x_2)$.**

   Como $f'(c)>0$ y $x_2 - x_1>0$, concluimos que $f(x_2) - f(x_1)>0$. Luego, $f(x_1)<f(x_2)$, como x_1 y x_2 fueron tomados al azar en I, se concluye que f es creciente en I.
2. **Sean x_1 y x_2 dos puntos pertenecientes a I tales que $x_1<x_2$. Por el teorema del valor medio tenemos que: $f(x_2) - f(x_1)=f'(c).(x_2 - x_1)$, para algún $c\in(x_1,x_2)$.**

   Como $f'(c)<0$ y $x_1 - x_2>0$, concluimos que $f(x_1) - f(x_2)>0$. Luego, $f(x_1)>f(x_2)$, como x_1 y x_2 fueron tomados al azar en I, se concluye que f es decreciente en I.

<u>Definición 4:</u> Se definen los *puntos críticos de la primera derivada* a aquellos puntos donde la derivada no existe o donde la derivada se anula, es decir, los puntos donde la derivada no existe son aquellos puntos de discontinuidad, y los puntos donde la derivada se anulan son los puntos donde la recta tangente tiene pendiente cero (0).

<u>Ejemplo:</u> Probar que la función $f(x)=\sqrt{x}$, es creciente.

<u>Solución:</u> Esta función esta definida en en intervalo $[0,\infty)$, en el cual f es continua. Además f es diferenciable en el intervalo $(0,\infty)$ y se cumple que: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\geq 0,\ \forall x\in(0,\infty)$.

Luego, por la parte 1 del teorema anterior, se concluye que $f(x)=\sqrt{x}$, es creciente en todo su dominio $[0,\infty]$.

<u>Ejemplo</u>: Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$f(x)=2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

<u>Solución</u>: Para resolver este problema seguiremos los siguientes pasos:

1. **Hallamos el dominio de la función, que en este caso es: $Domf=\Re$**
2. **Se hallan los puntos de discontinuidad si es que los hay, como en este caso el dominio es todos los reales no hay ningún punto de discontinuidad.**
3. **Hallamos la derivada de la función, es decir, $f'(x)=6x^2 - 6x - 12$,**

4. Se hallan los puntos críticos de la primera derivada, en este caso como la función es continua en toda la recta real, solamente habrán puntos críticos donde la derivada se anula, esto implica que f'(x)=0, o sea, $6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$ esto implica que los puntos críticos son $x_1=-1$ y $x_2=2$, estos puntos críticos también reciben el nombre de *puntos de separación*. (Matemática Genera Modulo II),

5. Se obtienen los intervalos de crecimientos y decrecimientos con los puntos críticos, siempre habrán (n + 1) intervalos de crecimientos y decrecimientos dependiendo de los puntos críticos, en nuestro caso los intervalos de crecimiento y decrecimientos son:

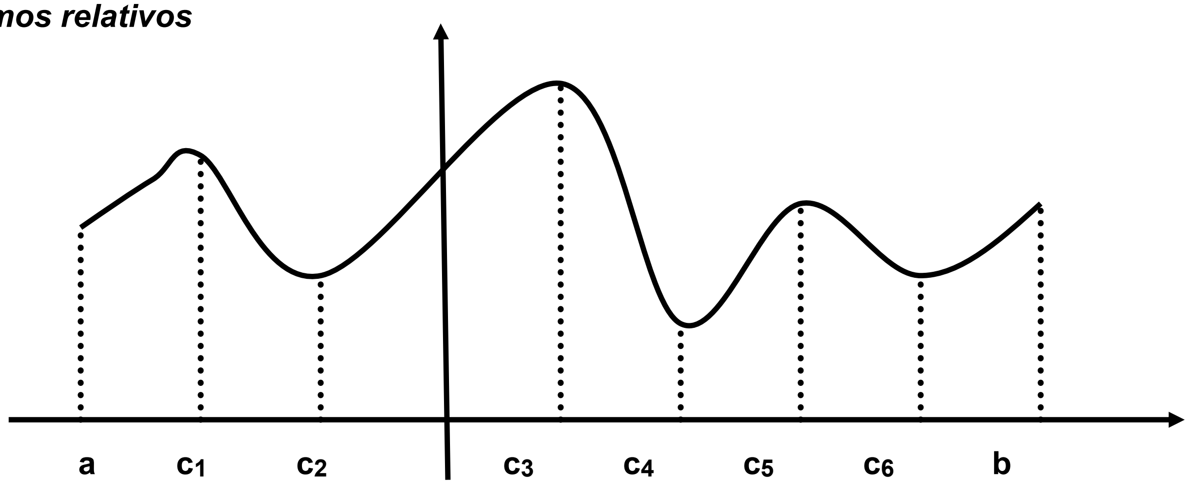
$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$f'(-2)>0$	$f'(0)<0$	$f'(3)>0$
Crece	decrece	crece

6. Se sustituyen puntos de prueba (Matemática Genera Modulo II), en cada uno de los intervalos y según lo visto anteriormente si el signo es positiva la función viene creciendo y si el signo es negativo la función viene decreciendo, como f'(-2) es positivo la función en el intervalo $(-\infty,-1)$, viene creciendo, de la misma manera en el intervalo $(-1,2)$ la función decrece y $(2,\infty)$ la función crece.

<u>Definición 5:</u> Sea f: A → B, se dice que f tiene un *máximo relativo o máximo local* en el punto c, si existe un intervalo abierto que contiene a c y contenido en el dominio de f tal que f(c)≤ f(x) ∀x∈I.

<u>Definición 6:</u> Sea f: A → B, se dice que f tiene un *mínimo relativo o mínimo local* en el punto c, si existe un intervalo abierto que contiene a c y contenido en el dominio de f tal que f(c)≥ f(x) ∀x∈I.

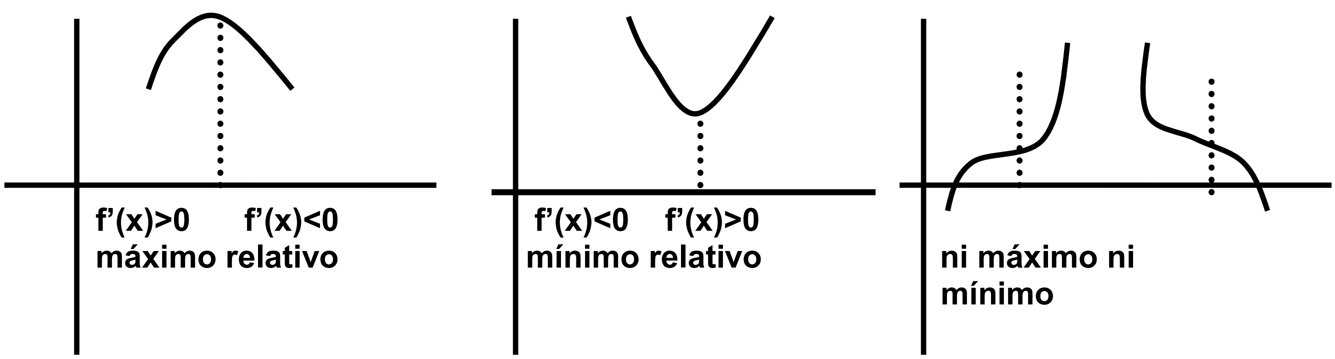
A los máximos y mínimos relativos se les da el nombre de *Valores extremos relativos*



La figura posee máximos relativos en los puntos c_1, c_3, y c_5 y tiene mínimos relativos en los puntos c_2, c_4 y c_6. Los extremos relativos de f son $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$, $f(c_4)$, $f(c_5)$ y $f(c_6)$.

<u>Teorema 4:</u> (Criterio de la primera derivada para extremos relativos). Sea f: A → B, una función continúa en un intervalo (a,b) y sea c∈(a,b) un punto crítico de f., entonces:

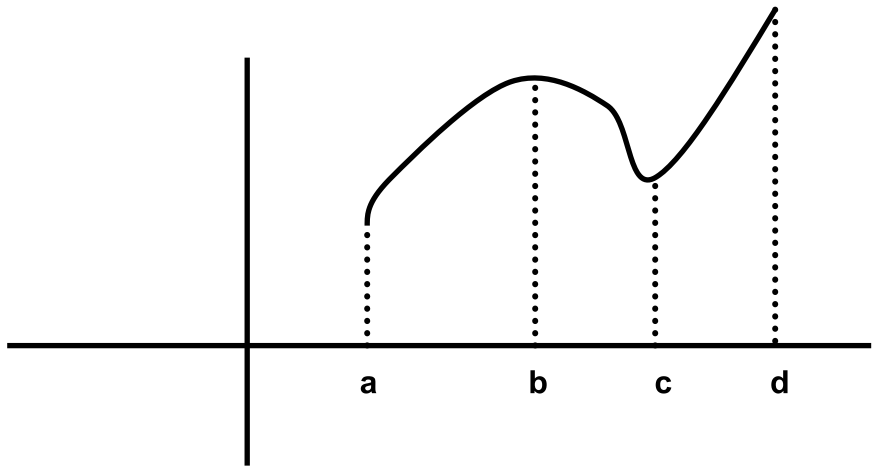
1. **Si $f'(c)>0$ en un intervalo abierto a la izquierda de c y si $f'(c)<o$ en un intervalo abierto a la derecha de c, entonces f tiene un máximo relativo en el punto (c,f(c)), es decir, si una función en un intervalo viene creciendo, luego la derivada se anula y empieza a decrecer estamos en presencia de un punto máximo relativo.**
2. **Si $f´(c)<0$ en un intervalo abierto a la izquierda de c y si $f'(c)>0$ en un intervalo abierto a la derecha de c, entonces f tiene un mínimo relativo en el punto (c,f(c)), es decir, si una función en un intervalo viene decreciendo, luego la derivada se anula y empieza a crecer estamos en presencia de un punto mínimo relativo.**
3. **Si en un intervalo abierto a la izquierda de c y en un intervalo abierto a la derecha de c, $f'(c)$ tiene el mismo signo, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en c.**



<u>Definición 7:</u> Sea f: A $\rightarrow$ B y D$\subseteq$A. Diremos que f tiene un *máximo absoluto* sobre D, si $\exists c\in D / f(c)\geq f(x), \forall x$

<u>Definición 8:</u> Sea f: A $\rightarrow$ B y D$\subseteq$A. Diremos que f tiene un mínimo absoluto sobre D, si $\exists c\in D / f(c)\leq f(x), \forall x$

El número f(a) y f(d) recibe el nombre de *máximo o mínimo absoluto* y f(b) y f(c) *máximo relativo y mínimo relativo de* f sobre D.



La función tiene un mínimo absoluto en a, un máximo relativo en b, un mínimo absoluto en c y un máximo absoluto en d.

<u>Teorema 5:</u> (*Teorema del Valor extremo*). Si f: A $\rightarrow$ B es una función continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre [a,b].

Para determinar los valores extremos absolutos de una función continúa de f: A $\rightarrow$ B en un intervalo cerrado [a,b], se procede de la siguiente manera.

1. **Se encuentran los valores de la función en los puntos críticos de f que están en el intervalo [a,b].**
2. **Se encuentran los en los extremos de la función, es decir f(a) y f(b).**
3. **El máximo absoluto es el mayor de los valores y el mínimo absoluto el menor de los valores hallados.**

<u>Ejemplo:</u> Hallar los extremos absolutos y relativos de la siguiente función $f(x)=x^4 - 2x^2$ en el intervalo [-2,2].

<u>Solución:</u>

a. **Hallamos el dominio de la función en el intervalo [-2,2], Domf=[-2,2].**
b. **Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=4x^3 - 4x$.**
c. **Hallamos los puntos críticos de la primera derivada. Como la función esta definida en todo el intervalo [-2,2], los únicos puntos críticos es donde la derivada se anula, es decir $f'(x)=0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1)=0$ $\Rightarrow x(x - 1)(x + 1)=0 \Rightarrow x=-1, x=0$ y $x=1$**
d. **Se hallan los intervalos de crecimiento y decrecimiento y se analiza el signo de la derivada, tomando en cada intervalo un punto de prueba.**

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(-2)<0$	$f'(-0,5)>0$	$F'(0,5)<0$	$f'(2)>0$
Decrece	**Crece**	**Decrece**	**Crece**

e. **Aplicamos el criterio de la primera derivada:**

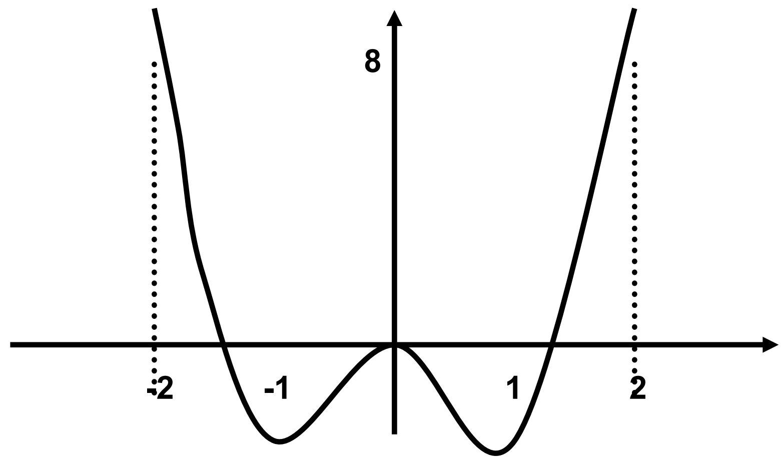
   f tiene un mínimo relativo en $x=-1$, $f(-1)=-1$, f tiene un máximo relativo en $x=0$, $f(0)=0$

   f tiene un mínimo relativo en $x=1$, $f(1)=-1$

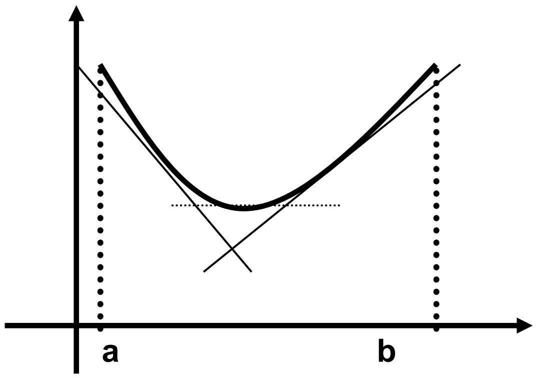
f. **Se hallan los extremos absolutos sustituyendo en la función los valores x=-2 y x=2 ⇒ f(-2)=8 y f(2)=8.**

g. **Conclusión: hay un máximos relativos en el punto (0,0), y dos mínimo relativos en los puntos (-1,-1) y (1,-1), que coinciden con los mínimos absoluto, y los máximos absolutos están en los puntos (-2,8) y (2,8).**

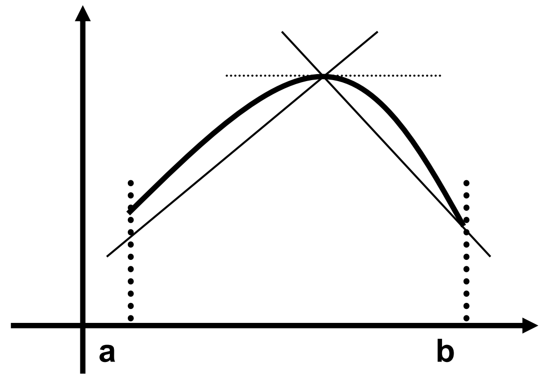
h. **Grafica.**



<u>Definición 9:</u> El gráfico de una función es *cóncava o cóncava hacia arriba* si el grafico está siempre encima de cualquier recta tangente; y es *convexa o cóncava hacia abajo* si el grafico esta siempre por debajo de cualquier recta tangente



Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia arriba

<u>Criterio de concavidad</u>

$a<x<b \Rightarrow x \in (a,b)$	**El gráfico de f en (a,b)**
$f''(x)>0$	**Es cóncavo hacía arriba**
$f''(x)<0$	**Es cóncava hacia abajo**

<u>Definición 10:</u> Un punto sobre el gráfico de una función que cambia de cóncavo a convexo, es decir de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo o viceversa, se llama *punto de inflexión.* Si (c,f(c)) es un punto de inflexión de la función f: $A \rightarrow B$,/ y=f(x), para los x cercanos a c debe cumplirse que los signos de f''(x) antes de c y después de c deben ser distintos. En el mismo punto c la derivada f''(x) puede no existir. Si existe debe cumplirse que f''(x)=0.

Para hallar los puntos de inflexión de una función se seguirán los pasos siguientes:

a. Se encuentran los ***puntos críticos de la segunda derivada*** **que son aquellos puntos donde la derivada no existe o donde la segunda derivada se anula,**

b. **Se estudia el signo de f'' a la izquierda y derecha de cada uno de los puntos críticos de la segunda derivada, utilizando para ello puntos de prueba. Si en un intervalo la función es cóncava hacia arriba o cóncavo hacia abajo y cambia a cóncavo hacia abajo o cóncavo hacia arriba respectivamente entonces se dice que existe un punto de inflexión en ese punto y su imagen.**

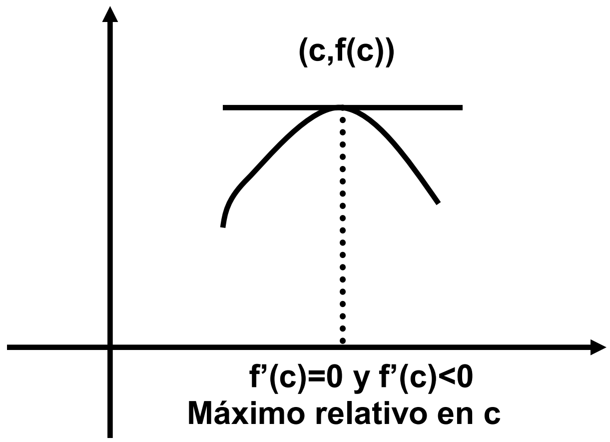
<u>Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.</u>

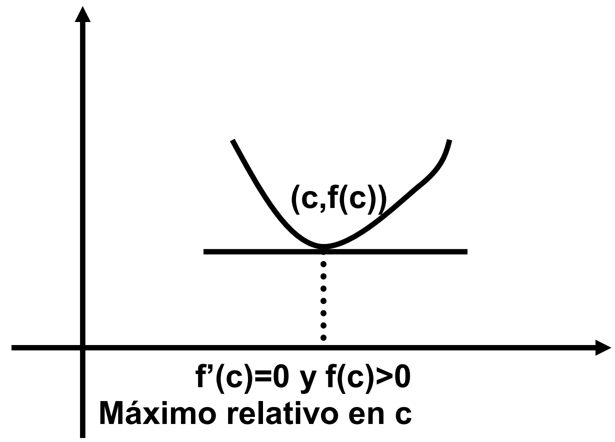
La segunda derivada nos proporciona un criterio muy sencillo y practico para determinar la naturaleza de los puntos críticos de la primera derivada de una función definida en un intervalo. Este criterio establece lo siguiente:

Si	y si	Entonces f tiene
$f'(c)=0$	$f(c)>0$	Un mínimo relativo
$f'(c)=0$	$f''(c)<0$	Un máximo relativo

La condición $f'(c)=0$ nos dice que c es un punto critica de la primera derivada de la función. La condición $f''(c)>0$ y el criterio de concavidad nos dice que, cerca de c, el gráfico de f es cóncavo hacia arriba. En este caso, concluimos que f tiene un mínimo relativo en c.

Similarmente, la condición f''(c) y el criterio de concavidad nos dice que, cerca de c, el gráfico de f es cóncavo hacia abajo. En este caso concluimos que f tiene un máximo relativo en c.





El criterio de la segunda derivada nos dice si f''(c)=0 nada se concluye. Puede ser máximo, o mínimo o ninguno de los dos.

<u>**Como dibujar el grafico de una función cualquiera**</u>

Para realizar la grafica de una función sea esta de cualquier tipo seguiremos los siguientes pasos:

1. **Se halla el dominio de la función.**
2. **Se describen los puntos de discontinuidad, si es que los hay.**
3. **Se estudia la función cerca de cada uno de los puntos de discontinuidad si es que los hay.**
4. **Se estudia la función en los extremos.**
5. **Se hallan los cortes con los ejes de coordenados si es que los hay.**

6. **Se halla la primera derivada de la función.**

7. **Se halla la segunda derivada de la función**

8. **Se hallan los puntos críticos de la primera derivada.**

9. **Se hallan los puntos críticos de la segunda derivada.**

10. **Se hallan los intervalos de crecimientos y decrecimientos.**

11. **Se hallan los máximos y mínimos relativos, si es que los hay**

12. **Se hallan los intervalos de concavidad**

13. **Se hallan los puntos de inflexión, si es que los hay.**

14. **Se realiza la gráfica de la función con todos los datos anteriores.**

Ejemplo: **Realizar la grafica de la siguiente función:**

$f(x)=-x^4 + 6x^2 - 1$

Solución a: **$f(x)=-x^4 + 6x^2 - 1$, se seguiremos los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:**

1. **Domf=$\Re$**

Como la función esta definida en todos los reales, no existe punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. **Estudio de la función en los extremos:**

$$\lim_{x \to -\infty}(-x^4 + 6x - 1) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty}(-x^4 + 6x - 1) = -\infty$$

3. **Corte con los ejes de coordenados:**

corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ $-x^4 + 6x^2 - 1=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-\sqrt{3+\sqrt{8}}$, $x_2=-\sqrt{3-\sqrt{8}}$, $x_3=\sqrt{3-\sqrt{8}}$ y $x_4=\sqrt{3+\sqrt{8}}$

corte con el eje y $\Rightarrow$ (x=0) $\Rightarrow$ y=-1

4. **Primera derivada: $f'(x)=-4x^3 + 12x$.**

5. **Segunda derivada: $f''(x)=-12x^2 + 12$**

6. **Puntos críticos de la primera derivada:**

   $f'(x)=0 \Rightarrow -4x(x^2 - 3)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$ y $x_3=\sqrt{3}$

7. **Puntos críticos de la segunda derivada: $f''(x)=0 \Rightarrow -12(x^2 - 1) \Rightarrow x_1=-1$, y $x_2=1$**

8. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f'(-2)>0	f'(-1)<0	f'(1)>0	f'(2)<0
Crece	Decrece	Crece	Decrece

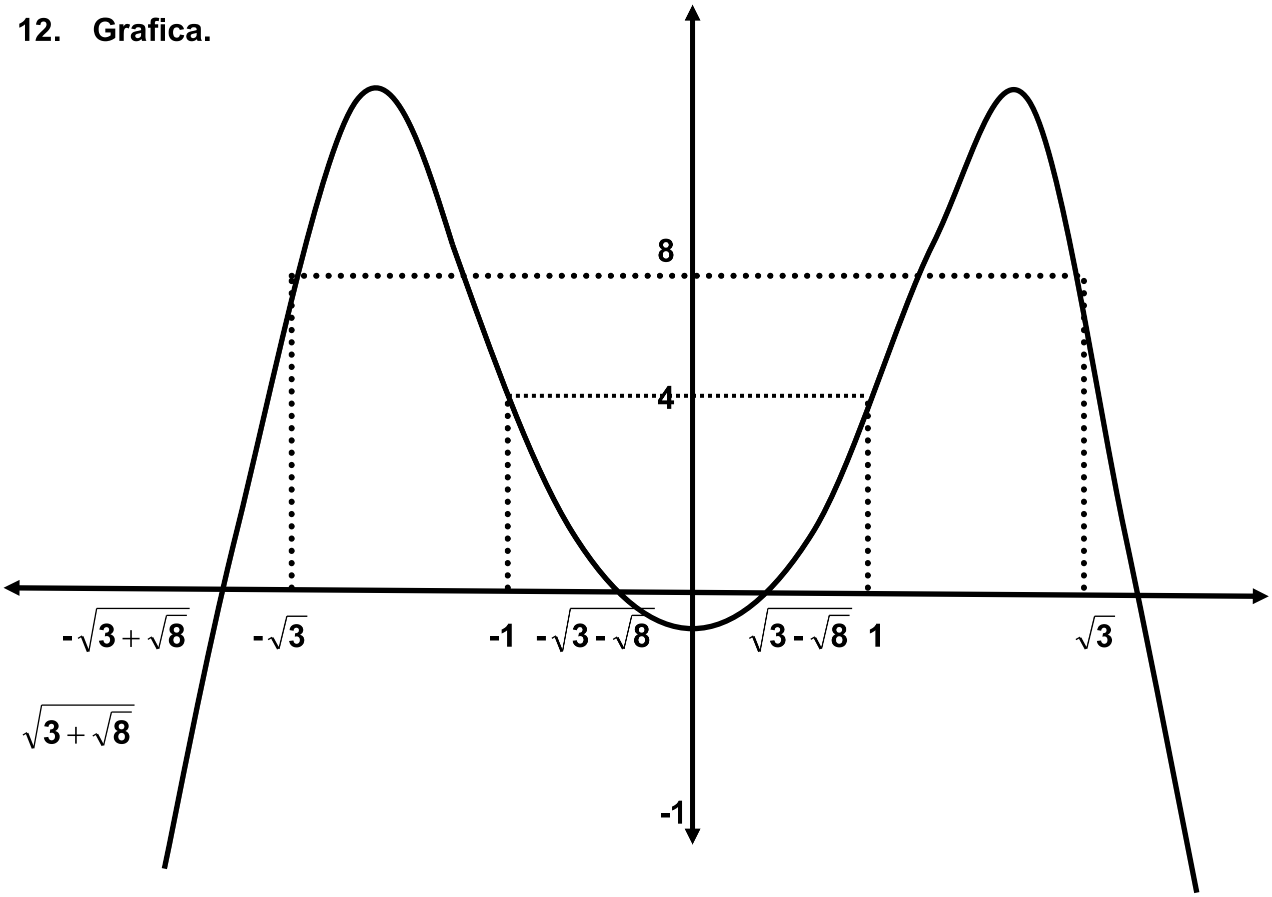
9. **Máximos y mínimos: $\exists$max $(-\sqrt{3},8)$, $\exists$mín (0,-1) y $\exists$max $(\sqrt{3},8)$**

10. **Intervalos de concavidad:**

$(-\infty,-1)$	(-1,1)	$(1,+\infty)$
F''(-2)<0	f''(0)>0	f''(2)<0
Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

11. **Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en (-1,4) y (1,4).**

12. Grafica.


8
4
-1
$-\sqrt{3+\sqrt{8}}$
$-\sqrt{3}$
-1
$-\sqrt{3-\sqrt{8}}$
$\sqrt{3-\sqrt{8}}$
1
$\sqrt{3}$
$\sqrt{3+\sqrt{8}}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Hallar la recta tangente y normal a la curva:**

f(x)= $\sqrt{x-2}$ **, en el punto x=6.**

Solución:

1. $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

2. $f'(6)=\dfrac{1}{2\sqrt{6-2}}=\dfrac{1}{4}$ **y** $f(6)=\sqrt{6-2}=2$

3. **Recta tangente:** $y=\dfrac{1}{4}(x-6)+2$

4. $x-4y+2=0$

5. **Recta normal:** $y=-4(x-6)+2$

6. $4x+y-26=0$

2. **Hallar la recta tangente y normal a la curva "bruja de Agnesi" f(x)=**

$\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ **, en el punto x=2a.**

Como no dan el valor de y_0, lo obtenemos y seguido a esto operamos los pasos descritos anteriormente.

Solución:

1. $f(2a)=\dfrac{8a^3}{4a^2+4a^2}=a$

2. $f'(x_0)=\dfrac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$

3. $f'(2a)=-\dfrac{32a^4}{64a^4}=\dfrac{1}{2}$

4. Recta tangente: $y=-\dfrac{1}{2}(x - 2a) + a$

5. $x + 2y + 4a=0$

6. Recta normal: $y=2(x - 2a) + a$

7. $y=2x - 3a$

3. **Hallar la recta tangente y normal a la curva:**

$f(x)=x^3 + y^3=4xy^2 + 1$ en el punto (2,1).

Solución:

1. $f'_x=3x^2 - 4y^2$, $f'_y=3y^2 - 8xy \Rightarrow y'=\dfrac{3x^2-4y^2}{y(8x-3y)}$

2. $y'_{(2,1)}=\dfrac{12-4}{16-3}=\dfrac{8}{13}$

3. Recta tangente: $y= \quad (x - 2) + 1$

4. $8x - 13y -+13=0$

5. Recta normal: $y=-\dfrac{13}{8}(x - 2) + 1$

6. $13x + 8y - 34=0$

4. **Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite:**

$$L=\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}$$

<u>Solución:</u> $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}}=\dfrac{0}{0}$, como L satisface las condiciones del teorema, llamamos a la función del numerador f(x) y a la del denominador g(x) y las derivamos dos veces obteniéndose: L=

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^{2}} \Rightarrow L= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} =1 \Rightarrow L\to 1,$$

$f(x)=e^{x} + e^{-x} – 2 \Rightarrow f'(x)=e^{x} - e^{-x} \Rightarrow f(x)''=e^{x} + e^{-x}$

$g(x)=x^{2} \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow g''(x)=2$

5. Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite: L=

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^{2}-x-6}\right)$$

<u>Solución:</u> $L=\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^{2}-x-6}\right)=\infty - \infty$, como L no satisface las condiciones, pero resolviendo la suma de fracción nos resulta que:

$$L=\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L=\lim_{x \to 3}\left(\frac{x+2-5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L=\lim_{x \to 3}\left(\frac{x-3}{x^{2}-x-6}\right)$$

$=\dfrac{0}{0}$, ahora L si satisface las condiciones del teorema de L-Hopital, luego:

$f(x)=x - 3 \Rightarrow f'(x)=1$

$g(x)=x^{2} – x - 6 \Rightarrow g'(x)=2x – 1$

$$L=\lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^{2}-x-6}\right) \Rightarrow L= \lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{1}{5} \Rightarrow L \to \frac{1}{5}$$

6. Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Solución: $L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\frac{0}{0}$ que si satisface las condiciones del teorema de L-Hopital, luego:

$f(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow f'=\cos x$

$g(x)=x \Rightarrow g'=1$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\cos x \Rightarrow L\to 1$$

7. Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite: L=

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Solución: $L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}$, L satisface las condiciones del teorema, luego:

$f(x)=1-\cos x \Rightarrow f'=\operatorname{sen}x$

$g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x$

$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} \Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2x} \Rightarrow L=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, por el ejemplo del apartado d., tenemos que $L\to \frac{1}{2}$

8. Aplicando la regla de L-Hopital hallar el siguiente límite:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

<u>**Solución:**</u> $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0}$, **L satisface las condiciones del teorema,**

luego: $f(x)= \text{sen}^{-1}\sqrt{x} \Rightarrow f' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}$ **y** $g'(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$L=\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow L=\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \Rightarrow L=\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow L \to 1$$

9. **Realizar la gráfica de la siguiente función:** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

<u>**Solución:**</u> $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ **se seguirá los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:**

1. **Domf=$\Re$ - {$\pm$2}**
2. **Puntos de discontinuidad x_1=-2 y x_2=2**
3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad.**

$$L = \lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty,\quad L = \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty,\quad L = \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty,$$

$$L = \lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty,\quad L = \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, L = \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

4. **Estudio de la función en los extremos:**

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1,\quad L = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

5. **Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ x=0 $\Rightarrow$ (0,0)**

6. **Primera derivada:** $f'(x)=\dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$

7. **Segunda derivada:** $f''(x)=\dfrac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$

8. **Puntos críticos de la primera derivada: donde la derivada se anula $f'(x)=0 \Rightarrow -8x=0 \Rightarrow x_1=0$, los puntos críticos donde la derivada no existe: $x_1=-2$, y $x_2=2$**

9. **Puntos críticos de la segunda derivada: donde la derivada se anula $f''(x)=0 \Rightarrow 8(3x^2+8)=0$, no hay puntos críticos de la segunda derivada donde se anulen, luego donde la derivada no existe $x_1=-2$, y $x_2=2$**

10. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(-2)>0$	$f'(-1)<0$	$f'(1)>0$	$f'(2)<0$
Crece	Crece	Decrece	Decrece

11. **Máximos y mínimos, $\exists$mín (0,0)**

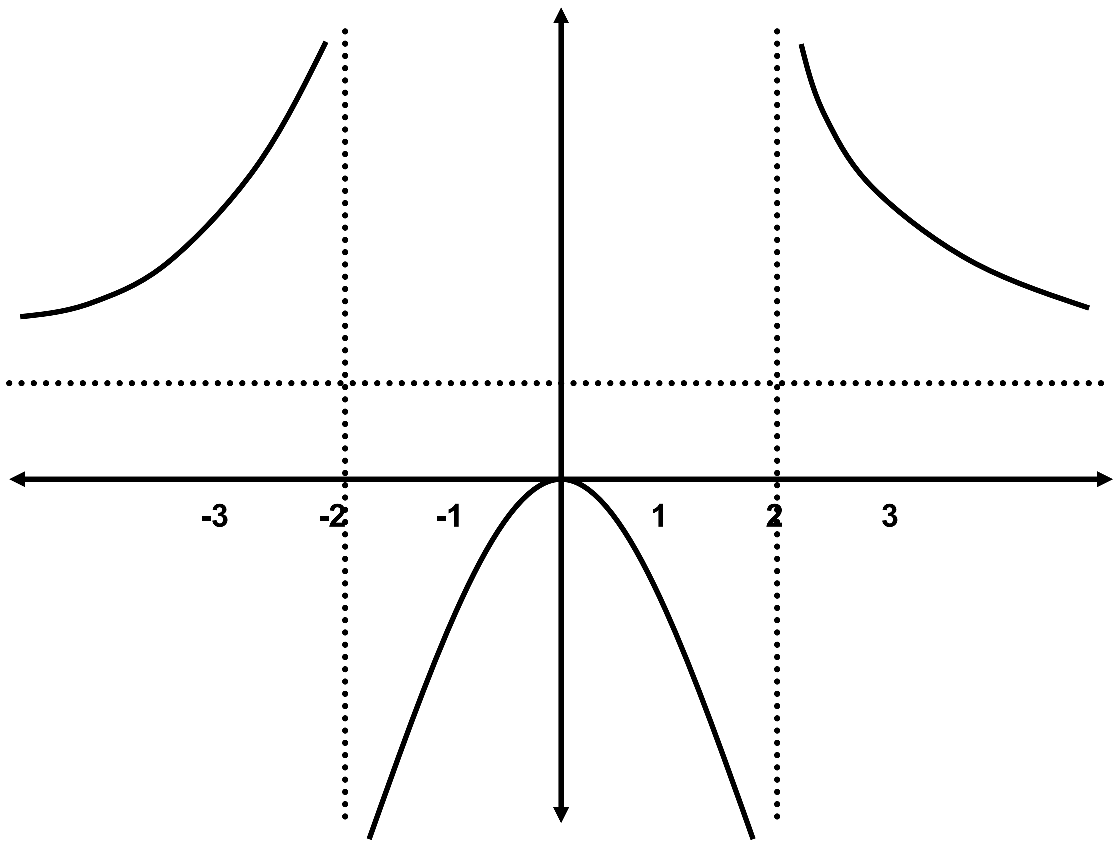
12. **Intervalos de concavidad:**

$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(-3)>0$	$f''(0)<0$	$f''(2)>0$

Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

13. Puntos de inflexión: no existen.

14. Gráfica.



10. Realizar la gráfica de la siguiente función: f(x)= $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

<u>Solución:</u> f(x)= $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ **se seguirá los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:**

1. Domf=$\Re$ **- {±1}**

2. Puntos de discontinuidad $x_1=-1$ **y** $x_2=1$**.**

3. **Estudio de la función cerca de los puntos de discontinuidad.**

$$L = \lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty,\quad L = \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,\quad L = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty,$$

$$L = \lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty,\quad L = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty,\quad L = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

4. **Estudio de la función en los extremos:**

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x2-1}} = -\infty\ ;\quad L = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x2-1}} = +\infty$$

5. **Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ x=0 $\Rightarrow$ (0,0)**

6. **Primera derivada: f'(x)=** $\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$

7. **Segunda derivada: f''(x)=** $\dfrac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$

8. **Puntos críticos de la primera derivada: donde la derivada se anula f'(x)=0 $\Rightarrow$ $x^2 - 3=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-\sqrt{3}$ y $x_2=\sqrt{3}$, los puntos críticos donde la derivada no existe: $x_1=-1$, y $x_2=1$**

9. **Puntos críticos de la segunda derivada: donde la derivada se anula f''(x)=0 $\Rightarrow$ $2x(9 - x^2)$ $\Rightarrow$ $x_1=0$, $x_2=-3$ y $x_2=3$, puntos críticos donde la derivada no existe: $x_1=-1$, y $x_2=1$**

10. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$

f'(-2)>0	f'(-1.5)<0	f'(0)<0	f'(1)<0	f'(2)>0
Crece	Decrece	Decrece	Decrece	Crece

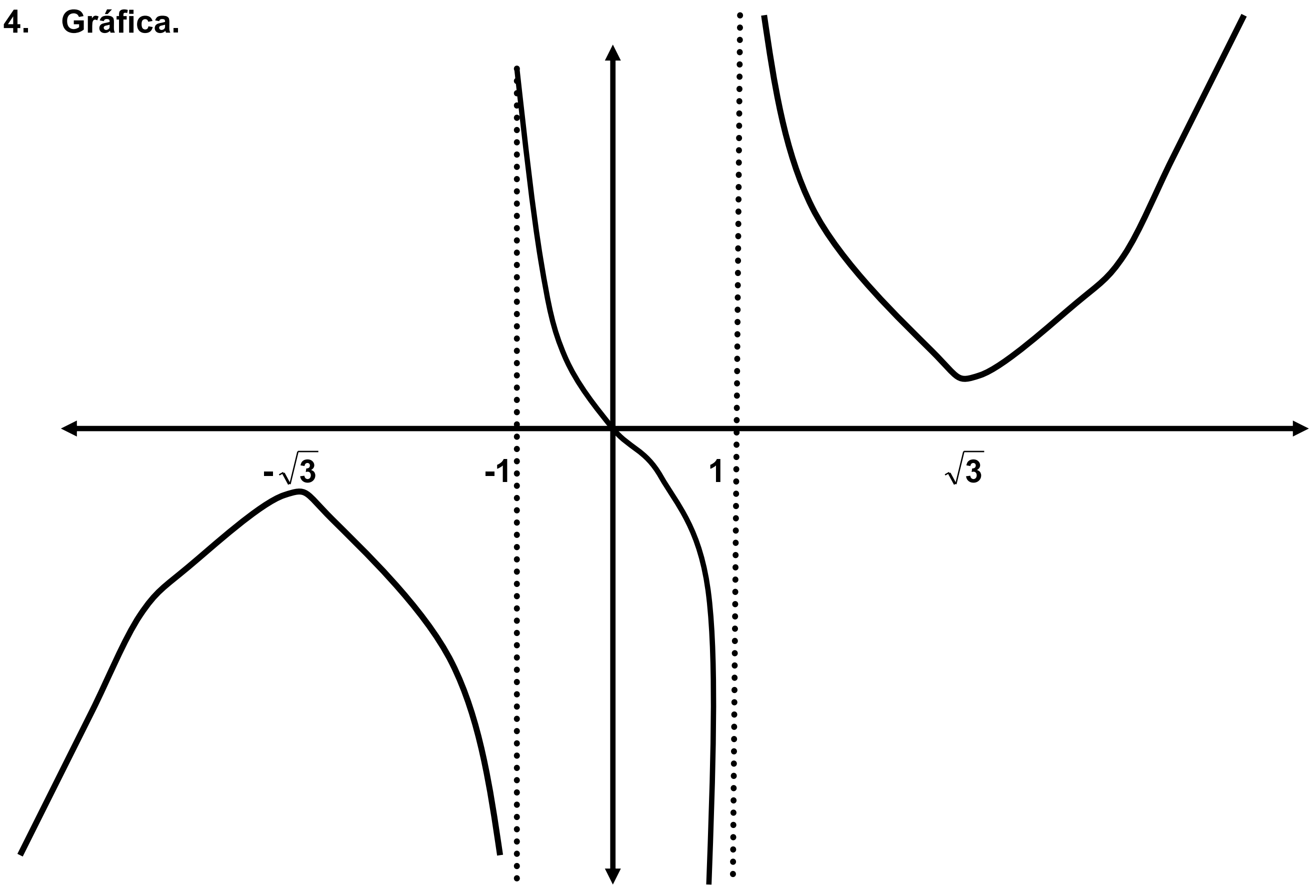
11. Máximos y mínimos: $\exists$max $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$, $\exists$mín $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$

12. Intervalos de concavidad:

(-∞,-3)	(-3,-1)	(-1,0)	(0,1)	(1,3)	(3,+∞)
F''(-4)<0	f''(-2)>0	f''(-05)>	f''(0.5)<0	f''(2)>0	f''(4)<0
Convexa	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava	Convexa

13. Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en (0,0) y (3,1.5).

14. Gráfica.



11. **Realizar la gráfica de la siguiente función: $f(x)=xe^{-x}$**

<u>Solución:</u> $f(x)=xe^{-x}$ se seguiremos los pasos señalados anteriormente en cada uno de los tres ejemplos:

1. **Domf=$\Re$**

   Como la función esta definida en todos los reales, no existe punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. **Estudio de la función en los extremos**

   $$L = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = +\infty \text{ y } L = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$$

3. **Corte con los ejes de coordenados:**

   corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ (0,0)

   corte con el eje y $\Rightarrow$ (x=0) $\Rightarrow$ (0,0)

4. **Primera derivada: $f'(x)=e^{-x}(1-x)$.**

5. **Segunda derivada: $f''(x)=-e^{-x}(2-x)$**

6. **Puntos críticos de la primera derivada: $f'(x)=0 \Rightarrow (1-x)=0 \Rightarrow x_1=1$**

7. **Puntos críticos de la segunda derivada: $f''(x)=0 \Rightarrow (2-x)=0 \Rightarrow x_1=2$**

8. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

(-∞,-1)	(1,+∞)
f'(-2)>0	f'(2)<0
Crece	Decrece

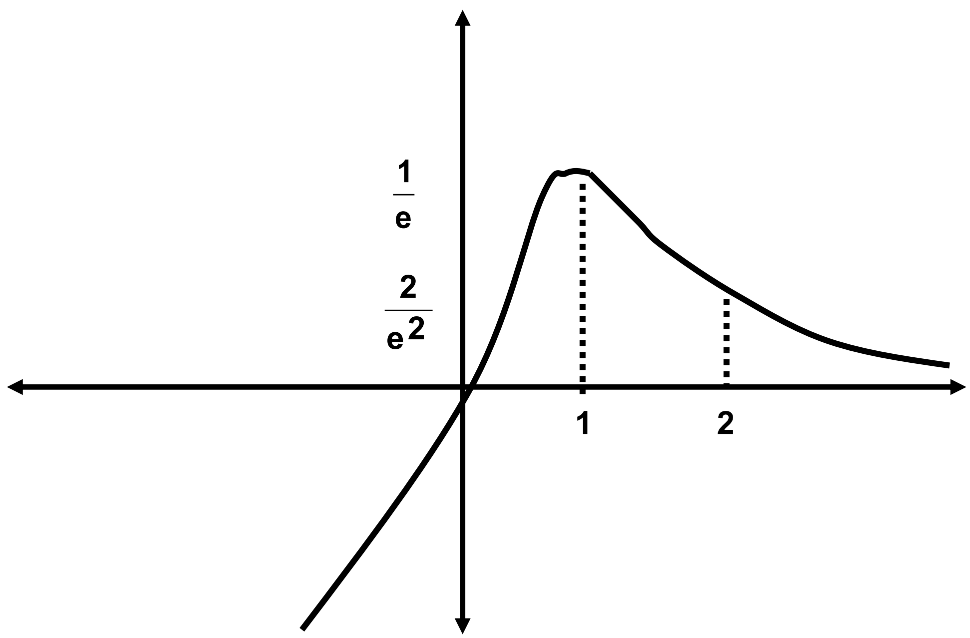
9. **Máximos y mínimos: $\exists$max $(1,\frac{1}{e})$**

10. **Intervalos de concavidad:**

$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(-2)<0$	$f''(2)>0$
Cóncava hacia abajo	**Cóncava hacia arriba**

11. **Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en $(2,\frac{2}{e^2})$.**

12. **Gráfica.**



12. **Realizar la gráfica de la siguiente función: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$**

<u>Solución:</u> se seguiremos los pasos señalados anteriormente:

1. **Domf={0,∞}**

Como la función esta definida en todo el intervalo {0,∞}, no existen punto de discontinuidad, en consecuencia saltamos el paso 2 y 3.

2. Estudio de la función en los extremos $L = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{0} \Rightarrow L = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{1}}{\frac{x}{1}}$

$\Rightarrow$ L= $L = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$, ahora podemos aplicar la regla de L'Hopital o

sea: f(x)=lnx $\Rightarrow$ f'=$\frac{1}{x}$ y g(x)=$\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ g'=$-\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow$ L=$L = \lim\limits_{x \to 0^+}(-\frac{1}{x3})$ $\Rightarrow$

L $\rightarrow$ -∞

$L = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'-Hopital tenemos: f(x)=lnx $\Rightarrow$

f'=$\frac{1}{x}$, g(x)=x $\Rightarrow$ g'=1, por lo tanto, $L = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty}$ $\Rightarrow$ L $\rightarrow$ 0

3. Corte con los ejes de coordenados: corte con el eje x $\Rightarrow$ (y=0) $\Rightarrow$ lnx=0 $\Rightarrow$ x=1, como la función esta definida en el intervalo (0,∞), no corta al eje y

4. Primera derivada: f'(x)=$\frac{1-\ln x}{x^2}$.

5. Segunda derivada: f''(x)= $\frac{2\ln x - 3}{x^3}$

6. Puntos críticos de la primera derivada: f'(x)=0 $\Rightarrow$ 1-lnx=0 $\Rightarrow$ x=e

7. **Puntos críticos de la segunda derivada: $f''(x)=0 \Rightarrow 2\ln x - 3=0 \Rightarrow x= e^{\frac{2}{3}}$**

8. **Intervalos de crecimientos y decrecimientos:**

(0,e)	**(e,+∞)**
f'(1)>0	**f'(3)<0**
Crece	**Decrece**

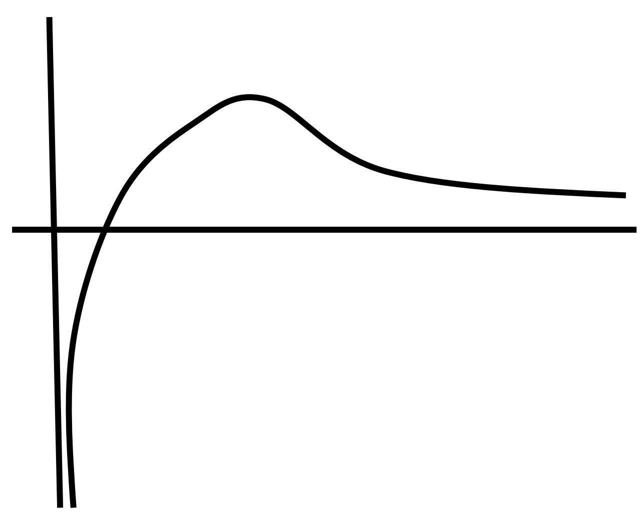
9. **Máximos y mínimos: $\exists$max $(e, \frac{1}{e})$**

10. **Intervalos de concavidad:**

$(0, e^{\frac{2}{3}})$	**$(e^{\frac{2}{3}}, +\infty)$**
f''(1)<0	**f''(5)>0**
Cóncava hacia abajo	**Cóncava hacia arriba**

11. **Puntos de inflexión: $\exists$ punto de inflexión en $\left(e^{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}\right)$.**

12. **Gráfica.**



13. Un hotel tiene 70 habitaciones. El gerente nota que cuando la tarifa por habitación es de Bs. 20.000 todas las habitaciones están ocupadas, y que por cada aumento de Bs. 2.000 se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de Bs. 4.000, ¿qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener máxima ganancia? ¿Cuántas habitaciones se ocupan con esta taifa?

<u>Solución:</u> 1. Si G(x) es la ganancia del hotel entonces:

G(x)=(habitaciones ocupadas)(tarifa por habitación) – 4.000(habitaciones ocupadas).

Sea x el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que $0 \leq x \leq 70$. además el número de habitaciones ocupadas es: 70 – x. El incremento en la tarifa es: 2.000x. la tarifa será de 20.000 + 2.000x. Sustituyendo en la función ganancia estos datos, tenemos:

$G(x)=(70 - x)(2.10^4 + 2.10^3x) - 4.10^3(70 - x) \Rightarrow$

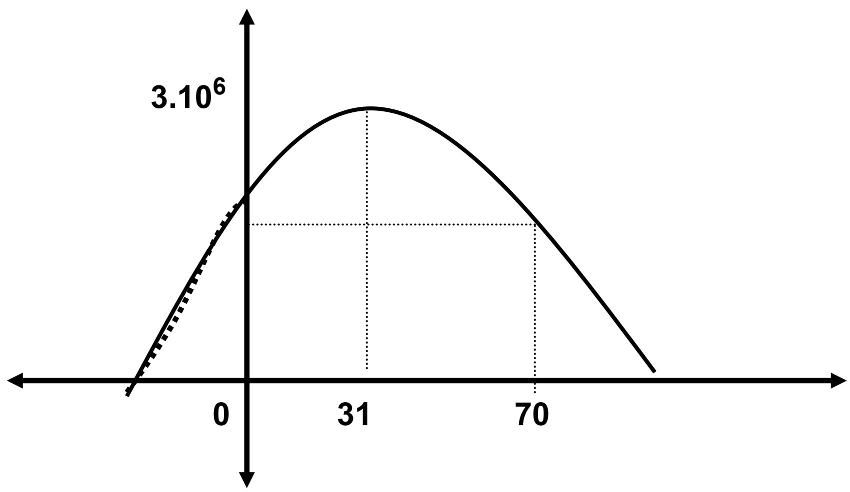
$G(x)=11210^4 + 124.10^3x - 2.10^3x^2$. Debemos hallar el máximo absoluto de g(x) sobre el intervalo [0,70]. Para ello buscamos primero el máximo relativo aplicando los pasos descritos anteriormente:

1. $G(x)=11210^4 + 124.10^3x - 2.10^3x^2$.
2. $G'(x)=124.10^3 - 4.10^3x$.
3. $G'(x)=-4.10^3$.

4. $G'(x)=0 \Rightarrow 124.10^3 - 4.10^3x=0 \Rightarrow x=31$

5. Como $G''(x)=-4.10^3<0$, estamos en presencia de un máximo en el punto x=31, que serán el número de habitaciones desocupadas. La grafica es: y la ganancia será de $G(31)= 11210^4 + 124.10^3(31) - 2.10^3(31)^2.=3.10^6$, es decir, de. 3.000.000. de bolívares.

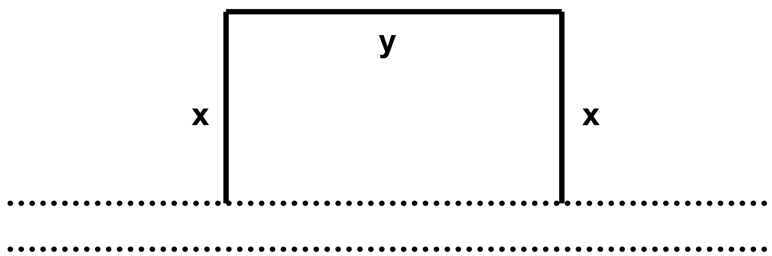
6. Gráfica:



14. Se quiere construir un potrero rectangular de 5.000mts.2 en un terreno que está a las orillas de un río. ¿Cuáles deben ser la longitud de los lados si se quiere que el costo sea mínimo?

<u>Solución:</u> El costo de la cerca será mínimo, si la longitud de la cerca es mínimo. Sea x las longitudes de los lados del rectángulo. Si P es el perímetro de la cerca, entonces $P(x,y)=x + 2y$, como el área de un rectángulo es $A(x,y)=xy=5.000 \Rightarrow y=\dfrac{5.000}{x}$, sustituyendo este valor de y en el perímetro tenemos que nuestro modelo será:

$P(x)=x+\dfrac{10.000}{x}$



1. $P(x)=x+\dfrac{10.000}{x}$

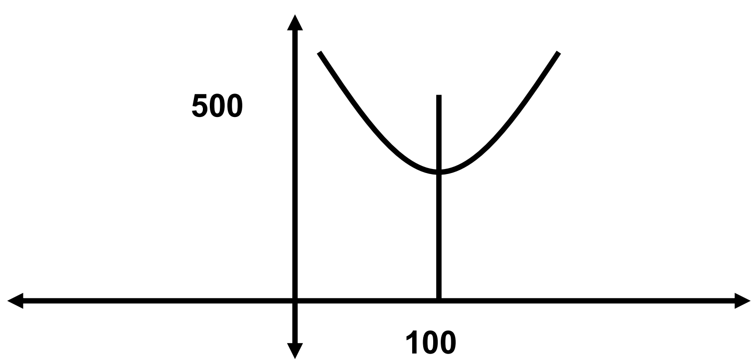
2. $P'(x)=1-\dfrac{10.000}{x^2}$

3. $P''(x)=\dfrac{20.000}{x^3}$.

4. $P'(x)=0 \Rightarrow 1-\dfrac{10.000}{x^2}=0 \Rightarrow x=x^2=10.000 \Rightarrow x=100$, como estamos trabajando con unidades de longitud no tomamos x=-100

5. Como $P''(100)=\dfrac{20.000}{100^3}.>0$, estamos en presencia de un máximo en el punto x=100, $\Rightarrow$ y=500, por lo tanto las longitudes que hacen un costo mínimo son de x=100mts. e y=500mts.

6. Grafica:



6. **Se desea construir una caja, abierta por arriba, cuyo volumen sea máximo, de una pieza de hojalata, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para forma las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud máxima del lado de los cuadrados cortados?**

Solución: 1. Sea x el del cuadrado más pequeño, entonces la altura y y la base z vendrá dado por: y=a – 2x, z=a – 2x y por lo tanto, el volumen que es igual a V=xyz ⇒ V=x(a – 2x)^2

3. $V'=a^2 - 8ax - 12x^2$

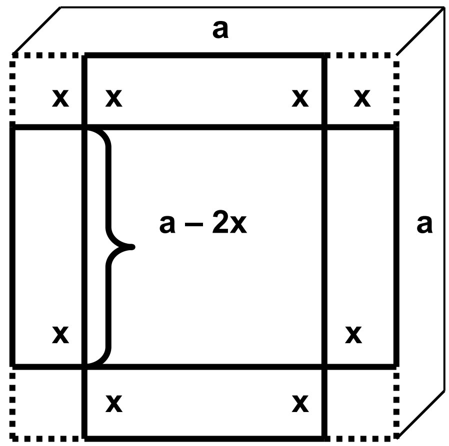
4. $V''=-8a - 24$

5. Los puntos criticos de la primera derivada : V'=0 ⇒

$$a^2 - 8ax - 12x^2=0 \Rightarrow (a - 2x)(a- 6x)=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2} \text{ y } x=\frac{a}{6}$$

6. Sustituyendo los puntos críticos de la primera derivada en la segunda derivada tenemos: para $x=\frac{a}{2}$ **V''=4a>0, por lo tanto, existe un mínimo, para** $x=\frac{a}{6}$ **V''=-4a<0 y en consecuencia este es el valor máximo que andamos buscando y el volumen será** $V=\frac{2}{27}a^3$

6. **Grafica**



7. **Hallar la altura de un cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r**

Solución: 1. el volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ **, donde** $x=\sqrt{BCxCD}$

$=y(2r - y) \Rightarrow V(y)= \frac{1}{3}\pi y^2(2r - y)$

2. $V'=y(\frac{4}{3}r - y)\pi$

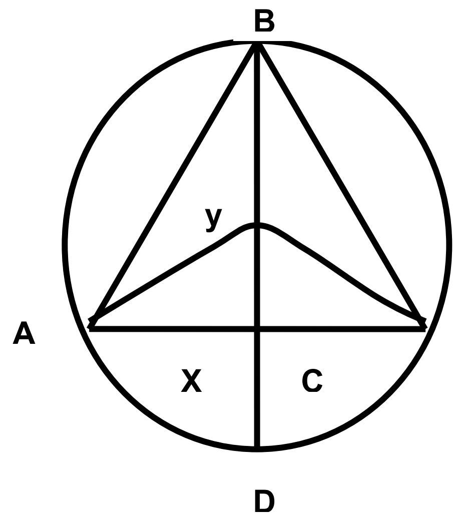
3. $V''=(\frac{4}{3}r - 2y)\pi$

4. Los puntos crítico de la primera derivada : $V'=0 \Rightarrow y(\frac{4}{3}r - y)\pi = 0 \Rightarrow$

$y=\frac{4}{3}r$

5. Sustituyendo el punto crítico $y=\frac{4}{3}r$ **de la primera derivada en la segunda derivada tenemos:** $V''=-2\pi r<0$**, por lo tanto, existe un máximo para este valor encontrado**

6. Grafica:



8. ¿Cual es el ancho del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un segmento dado de una parábola?

<u>Solución</u>: 1. Si OC=h, entonces BC=h – x y PP'=2y, por lo tanto, el área del rectángulo PDD'P' es: 2(h – x)y, pero P es un punto de la parábola y2=2px; por lo tanto, la función por estudiar es: $f(x) = 2(h-x)\sqrt{2px}$

3. $f' = (h-3x)\sqrt{\dfrac{2p}{x}}$

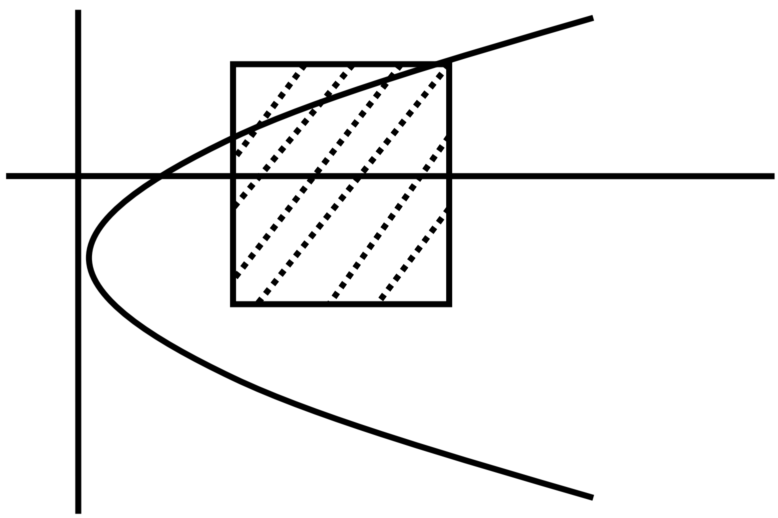
4. $f'' = -(3x+h)\sqrt{\dfrac{p}{2x^3}}$

5. Los puntos critico de la primera derivada: f'=0 $\Rightarrow$

$$(h-3x)\sqrt{\frac{2p}{x}} = 0 \Rightarrow h - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{h}{3}$$

5. Sustituyendo el punto critico $x=\frac{h}{3}$ de la primera derivada en la segunda derivada tenemos: $f''=-3\sqrt{\frac{6p}{h}}<0$, por lo tanto, existe un máximo para este valor encontrado

6. Grafica:



15. **Los extremos de una escalera de 5mts. de longitud están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que esta se aleje de la pared a razón de 20mts/seg. ¿Con qué rapidez baja el extremo superior cuando la base está a 3mts. de la pared?**

Solución: 1. Sea x la distancia de la base de la escalera a la pared. Sea y la distancia del extremo superior de la escalera al piso. Entonces nuestro modelo es: $x^2 + y^2=5^2$.

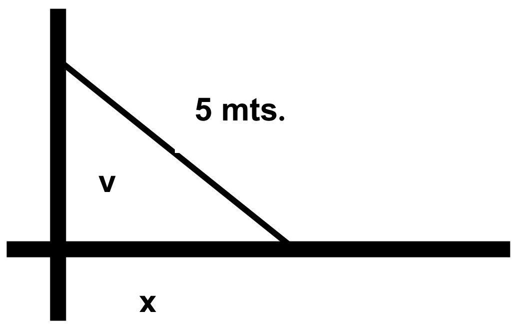
2. Derivando respecto al tiempo tenemos: $7\,2y\frac{dy}{dt}+2x\frac{dx}{dt}=0 \quad \Rightarrow$

$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$, pero, $\frac{dx}{dt}=20\ {}^{m}\!/_{seg}$ y cuando x=3 tenemos que:

$y=\sqrt{5^2-3^2}$ =4, luego, la velocidad con que baja el extremo superior

cuando la base está a 3 cm. es $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{5}(20\ {}^{m}\!/_{seg})$ =-12 ${}^{m}\!/_{seg}$

3. Grafica:



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **¿Qué ángulo α forman con el eje OX la tangente a la curva_**

   $y=3x^2 - 10x + 12$ cuyas abscisas son: $x=-1$ y $x= 1$

2. **Escribir la ecuación de la recta tangente y normal a la curva:**

   $y=x^3 - 4x^2 + 2$ en el punto (3,2)

1. **Escribir la ecuación de la recta tangente y normal a la curva: $y=$**

   $\dfrac{8a^2}{x^2 - 2ax + 5a^2}$ en el punto $x=2a$

2. **Hallar los puntos en que la tangente a la curva_**

3. **$y=5x^4 - 34x^3 + 84x^2 - 82x - 82$ sea paralela al eje de las abscisas.**

4. **En qué punto la tangente a la parábola: $y=3x^2 + 5x +13$ es paralela a la recta $x - 5y + 2=0$**

5. **En que punto la tangente a la parábola:**

   $y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 4x + 3y - 3=0$ y es perpendicular a la recta $3x - 4y - 4=0$

6. **Determinar el coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto p(2,1): $x^4 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 - y^4 + 5=0$**

7. **Escribir la ecuaciones de la tangente y normal a la curva en el punto $x=4$**

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{4} \\ t \\ y=\dfrac{5}{3t^{3}}-\dfrac{1}{2t^{4}} \end{cases}$$

8. Aplicando la regla de L'Hopital calcular los siguientes límites

a. $L=\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{3}-2x^{2}-x+2}{x^{2}-7x+6}$

b. $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-\ln(x+1)-1}{x^{2}}$

c. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{2}+x-1}{e^{x}+e^{-x}}$

d. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{k}}{\ln x}$

e. $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^{3}}$

f. $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-3e^{-x}+e^{-2x}}{2x^{2}}$

g. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}}$

h. $L=\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

l. $L=\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

j. $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4-3e^{x}-e^{-3x}}{4x^{2}}$

k. $L=\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^{3}-4x}{x^{2}-2x}$

m. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{3}}{e^{x}+x^{2}-2}$

n. $L=\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^{3}+27}{x+3}$

o. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^{2}+3x-6}{8x+2}$

p. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^{3}+6}{3x^{3}+2x}$

q. $L=\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$

r. $L=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{2}}{e^{x}-1}$

s.

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{ctg\frac{\pi x}{2}}$ t. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \operatorname{sen}x}{x^3}$ u. $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}$ v.

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x - 1}{1-\cos x}$ w. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \operatorname{sen}x}{x - \operatorname{sen}x}$ x. $L=\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\dfrac{a}{x}$ y. L=

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{x\sec^2 x - 2tgx}{1+\cos 4x}$ z. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{sen}(mx))}{\ln(\operatorname{sen}x)}$ aa. $L=\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$ ab.

$L=\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{sen}^{-1}(xctgx)$ ad. $L=\lim\limits_{x\to 1}((\ln x)\ln(x-1))$

ae. $L=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$ af. $L=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$

9. **Realizar la gráfica de las siguientes funciones, hallando el dominio, puntos de discontinuidad, corte con los ejes, puntos máximos y mínimos, y puntos de inflexión según sea el caso.**

a. $y=12 - 12x + x^3$ b. $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x$ c. $y=\dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$

d. $y=2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ e. $y=3x^4 - 4x^3$ f. $y=\sqrt[3]{x^2}$ g. $y=-\sqrt{4-x}-2$

h. $y=x^5 + 6$ i. $y=\dfrac{x}{x+1}$ j. $y=\dfrac{1}{x^2+4}$ k. $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$ l. $y=\dfrac{x+3}{x^2}$

m. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}$ n. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ ñ. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-8}}$ o. $y=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}}$

p. $y=x\sqrt{1-x^2}$ q. $y=\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}$ r. $y=e^{-x^2+8x-14}$ s. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

t. $y=\frac{x}{\ln x}$ u. $y=2 + x\ln x$ v. $y= 2e^{x} + e^{-x}$ w. $y=3x + 5 + \frac{6}{x}$

x. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ y. $y=\text{sen}^3 x + \cos^3 x$ z. $y=x + \text{sen}x$

10. Dividir un número positivo a en dos sumandos, de tal forma, que su producto sea el mayor posible

11. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

12. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividirlo en dos parcelas por otra valla paralela a uno de los lados. Si el área del campo es dada, hallar la razón de los lados para que la longitud total de las vallas sea la mínima

13. Una planta productora de acero puede producir por día x toneladas de acero de segunda clase, e y toneladas de diarias de primera clase, siendo $y=\frac{40-5x}{10-x}$**. Si el precio corriente de acero de segunda clase es la mitad del de primera, demostrar que el máximo beneficio se obtiene produciendo alrededor de 5.5 toneladas diarias de acero de segunda clase.**

14. Dado un punto del eje de la parábola $y^2=2px$ a una distancia a del vértice. Calcular la abscisa del punto de la curva más cercano al punto dado.

15. Se desea construir una pista de carrera de 400 mts. de perímetro. La pista debe estar formada por un rectángulo con dos semicírculos localizados en dos lados opuestos del rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de este sea máximo?

16. Una isla se encuentra a 800 metros de una playa recta. En la playa a 2.000 metros de distancia de un punto A que esta frente a la isla, funciona una planta eléctrica. Para dotar de luz a la isla, se tiende un cable desde la planta hasta un punto B de la playa y de allí hasta la isla. El costo del tendido del cable en tierra es de $ 300 por metro, y en el agua es de $ 500 por metro. ¿Dónde debe estar localizado el punto B para que el costo del tendido sea mínimo?

17. Un productor de tomate quiere cosechar su producto tan pronto comience el período de lluvias, para obtener el mejor precio. Si él cosecha el primer día de abril, puede recorrer 200 guacales de tomates, que los vende al precio de 9 $. el guacal. Si él espera, su cosecha en 10 guacales por cada semana que pasa, pero el precio baja a razón de 3 $. el guacal por semana. ¿Cuántas semanas debe esperar para obtener el máximo ingreso?

18. **Una compañía necesita potes cilíndricos de aluminio para evasor sus productos. Cada pote debe tener 128 πcm^3 de volumen. Si quiere usar la menor cantidad de aluminio posible (para bajar el costo) ¿Cuál debe ser el radio r y la altura del pote?**

19. **Una fabrica de licuadoras, cuando produce a lo más 100 aparatos por semana, obtiene una utilidad de Bs. 20.000 por unidad, pero esta utilidad decrece a razón de Bs. 200 por cada aparato que excede los 10.000. ¿Cuántas licuadoras debe producir semanalmente la fábrica para que su utilidad sea máxima?**

20. **Una bailarina de valet de 1.70 mts. de estatura se encuentra ensayando en una habitación que está alumbrada por un foco colocado en el centro a 4 mts. de altura si en determinado instante la bailarina se aleja del centro a razón de 45 mts. por min. ¿a razón de cuántos metros por minuto crece su sombra en este instante?**

21. **Los extremos de una escalera de 5 mts. de longitud están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que esta se aleje de la pared a razón de 20 mts/seg. ¿Con qué rapidez baja el extremo superior cuando la base está a 3 mts. de la pared?**

22. **Un barco navega con dirección Norte a razón de 12 Km/h. Otro barco navega con dirección Este a 16 Km/h. El primero pasa por la intersección de las trayectorias a las 3,30 pm, y el segundo a las 4**

pm. ¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos? a. A las 3.30 pm. b. A las 5 pm.

23. Un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 15 metros de altura y 5 metros de radio. Si se le está llenando de agua a razón de 6π metros cúbicos por minutos. ¿Con qué rapidez crece el nivel de agua cuando ésta tenga 6 metros de profundidad?

24. Los extremos de una escalera de 20 metros están apoyadas sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si el extremo interior inferior de la escalera se aleja de la pared a una velocidad de 6 $^{m}/_{min}$. ¿A qué velocidad se mueve el extremo superior cuando la pared inferior esta a 12 m. de la pared?

CAPÍTULO IV

DEFINICIONES Y PROPIEDADES Y TABLAS SOBRE INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Integral Indefinida, Propiedades de las Integrales Indefinidas, Tabla de Integración, Integración por Fracciones Parciales, Ejercicios Resuelto y Propuestos.

El signo integral proviene de la forma de una s alargada $\int$, que se empleo originalmente para indicar la suma, la integral tiene dos interpretaciones distintas:

1. Como procedimiento inverso de la derivada (antiderivada), esto es, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original, siempre y cuando se especifique en alguna forma la constante de integración; de otra manera el resultado puede diferir de la función original en una constante. La integración se considera la operación de obtener una función cuando se conoce su derivada (o tasa de cambio), y en este caso cuando la integral se interpreta como la antiderivada recibe el nombre de integral indefinida.

2. La integral como el proceso de encontrar el valor límite de una suma de términos cuando el número de estos crece indefinidamente ($n \to \infty$) y el valor numérico de cada término se aproxima a cero. En este caso cuando la integración se interpreta como la determinación del área bajo la curva recibe el nombre de integral definida.

INTEGRACIÓN INDEFINIDA

Definición 1: Si f(x) es una integral con respecto a x de la función f(x), la relación entre ellas se expresa de la siguiente manera: $\int f(x)dx = F(x) + C$, en la cual el primer miembro se lee "*integral de f con respecto a x*". El símbolo $\int$ es el signo integral; f(x) es el integrando, F(x) es una

integral particular, C es la constante de integración, y F(x) + C es la integral indefinida.

Puede demostrarse que dos funciones que tienen una misma derivada difieren a lo sumo en una constate; esto es, si F(x) es una integral de f(x), todas las integrales de f(x) están incluidas en el conjunto F(x) + C, donde C es una constante cualquiera en muchas aplicaciones del Calculo Integral, cierta información dada en el problema, que suela llamarse condiciones iniciales, determina inequívocamente la constante de integración.

Geométricamente, y=F(x) + C representa una familia de líneas, cada una de las cuales puede obtenerse desplazando la grafica de y=F(x) (que corresponde a C=0), una distancia vertical igual a C. Las líneas representadas por y=F(x) + C son paralelas entre si en el sentido de que la pendiente da la tangente a cualquiera de ellas en el punto de las abscisas x, es f(x). Así esta familia de líneas tiene la propiedad de que, dado cierto punto (x_0,y_0), hay solamente una de ellas que pasa por ese punto particular. Para que la línea en cuestión pase por dicho punto, debe ser satisfecha su ecuación por las coordenadas del punto. Esto especifica unívocamente el valor de C, pues entonces C=y_0 – F(x_0).

Habiendo sido C determinada en esta forma, se obtiene una función definida que expresa a y en función de x; es decir, la constante de integración se determina concluyentemente al especificar un punto

por el cual pase la línea o grafica que represente a la integral. Tal especificación se conoce como *condición inicial*, debido a que la evolución de la constante de integración se hizo primeramente con referencia a problemas físicos de mecánica, en los cuales se especifican velocidades o posiciones iniciales de cuerpos en movimiento; puesto que en tales casos el punto más probable a especificar es el origen o una integración en un eje. La condición inicial se denomina también *condición de frontera.*

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. **Si** $F'(x)=f(x) \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx + C$

2. **Si** $I=\int dx \Rightarrow I=x + C$

3. **Si** $I=\int \left[A_1 f(x) \pm A_2 g(x)\right]dx \Rightarrow I = A_1\int f(x)dx \pm A_2\int g(x)dx + C$

4. **Si** $I=\int f(x)dx$ **y** $x=\varphi(t) \Rightarrow dx=\varphi'(t)dt$ sustituyendo esta expresión en I, tenemos :

$I=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt + C$, (integración por sustitución)

5. **Si** $I=\int f(x)d[g(x)] \Rightarrow I = f(x)g(x) - \int g(x)d[f(x)] + C$, (integracion por parte)

TABLA DE INTEGRACIÓN

1. $I=\int x^n dx \Rightarrow I=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

Deducción: **Por la propiedad Nº 5, llámanos:** $f(x)=x^n \Rightarrow d(f(x))=nx^{n-1}dx$;

d(g(x))=dx $\Rightarrow$ g(x)=x $\Rightarrow$ $\int g(x)dx = x + C$ por la propiedad Nº 2, sustituyendo en la propiedad Nº 5,

I=$x^n x$ - $n\int x x^{n-1} dx$ $\Rightarrow$ $I = x^{n+1}$ - $n\int x^n dx$ $\Rightarrow$ $I(n+1) = x^{n+1}$

$\Rightarrow I = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, I=$\int x^n dx \Rightarrow$ $I = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, n$\neq$-1, si n=-1, entonces, I= $\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow I = Lnx + C$

<u>Deducción:</u> Por la propiedad Nº 4, x=e^t $\Rightarrow$ dx=e^tdt, sustituyendo tenemos, I=$\int \dfrac{e^t dt}{e^t}$ $\Rightarrow$ I=$\int dt$ $\Rightarrow$ I=t, como x=e^t $\Rightarrow$ lnx=t $\Rightarrow$ I=lnx, $\therefore$, I = $\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow I = Lnx + C$, e.i.

$$I=\int x^n dx \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n\neq -1 \\ \\ Lnx + C, \text{ si } n = -1, \text{ si } n=-1 \end{cases}$$

1. I=$\int a^x dx \Rightarrow I = \dfrac{a^x}{Lna} + C$

<u>Deducción:</u> **Por propiedad Nº 4,** $t=a^x \Rightarrow dt= a^x \ln a dx \Rightarrow a^x dx=\frac{dt}{\ln a}$,

sustituyendo nos queda, $I=\frac{1}{Lna}\int dt$, **por la propiedad Nº 2 tenemos**

que $I=t \Rightarrow I=\frac{1}{Lna}a^x$, $\therefore$, $I=\int a^x dx \Rightarrow I=\frac{a^x}{Lna}+C$

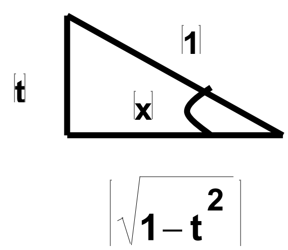
2. $I=\int e^x dx \Rightarrow I= e^x + C$

<u>Deducción:</u> **Ejercicio, es un caso particular de** $\int a^x dx \Rightarrow I=\frac{a^x}{Lna}+C$

3. $I=\int \operatorname{sen}x dx \Rightarrow I = -\cos x + C$

<u>Deducción:</u> **Por la propiedad Nº 4,** $t=\operatorname{sen}x \Rightarrow dt=\cos x dx \Rightarrow$

$dx=\frac{dt}{\cos x}$, **por el teorema de Pitágoras tenemos que:**



$\cos x=\sqrt{1-t^2} \Rightarrow dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, **sustituyendo nos resulta que** $I=\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$,

aplicando de nuevo la propiedad Nº 4, $u=1-t^2 \Rightarrow du=-2tdt \Rightarrow tdt=$

$-\frac{du}{2}$, **sustituyendo,** $I=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow$

$I=-\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du \Rightarrow I=-\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=-u^{1/2}$, volviendo el cambio I=-

$\sqrt{1-t^2} \Rightarrow$ I= $\sqrt{1-sen^2x} \Rightarrow$ I=-cosx, ∴, I= $\int senxdx \Rightarrow I=-cosx+C$

4. I= $\int cosxdx \Rightarrow I=senx+C$

Deducción: Ejercicio, se resuelve de manera semejante a $\int senxdx \Rightarrow I=-cosx+C$

5. I= $\int tgxdx \Rightarrow I=-Ln(cosx)+C \Rightarrow I=Ln(secx)$

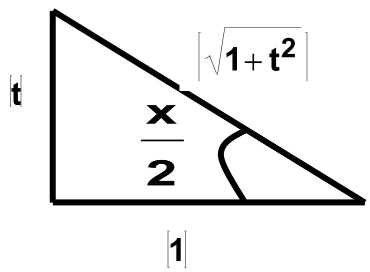
Deducción: I= $\int tgxdx \Rightarrow I=\int \frac{senx}{cosx}dx$, Por propiedad Nº 4, t=cosx ⇒ dt=-senxdx, sustituyendo tenemos: ⇒ I= $-\int \frac{dt}{t} \Rightarrow I=-Lnt$, volviendo el cambio tenemos, I=-lncosx ⇒ I=lnsecx, ∴, I= $\int tgxdx \Rightarrow I=-Ln(cosx)+C \Rightarrow I=Ln(secx)$

6. I= $\int ctgxdx \Rightarrow I=Ln(senx)+C$

Deducción: Ejercicio, se resuelve de manera semejante a $\int tgxdx \Rightarrow I=-Ln(cosx)+C \Rightarrow I=Ln(secx)$

7. I= $\int secxdx \Rightarrow I=Ln[secx+tgx]+C$

<u>Deducción:</u> $I=\int \sec x\,dx \Rightarrow I=\int \frac{dx}{\cos x}$, **aplicando la propiedad Nº 4,** $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\operatorname{tg}^{-1}t \Rightarrow x=2\operatorname{tg}^{-1}t \Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, **por el teorema de Pitagora tenemos:**



$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{Cos}x=\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Sustituyendo en I tenemos que:

$$I=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\frac{(1-t^2)}{1+t^2}} \Rightarrow I=2\int\frac{dt}{1-t^2} \Rightarrow I=2\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$

, por el método de las fracciones parciales tenemos: $I=2\left[A_1\int\frac{dt}{1-t}+A_2\int\frac{dt}{1+t}\right] \Rightarrow I= 2\left[A_1\ln(1-t)+A_2\ln(1+t)\right]$, **donde** $A_1=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}$ **y** $A_2=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{1-t}=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$I=-\operatorname{Ln}(1-t)+\operatorname{Ln}(1+t) \Rightarrow I=\operatorname{Ln}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$, **volviendo el cambio nos resulta:**

$$I=\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right) \Rightarrow I=\operatorname{Ln}\left(\frac{1+\frac{\operatorname{sen}x/2}{\cos x/2}}{1-\frac{\operatorname{sen}x/2}{\cos x/2}}\right) \Rightarrow I=\operatorname{Ln}\left(\frac{\cos x/2+\operatorname{sen}x/2}{\cos x/2-\operatorname{sen}x/2}\right) \Rightarrow$$

$$I = Ln\left(\frac{(\cos x/2 + sen x/2)^2}{\cos^2 x/2 - sen^2 x/2}\right) \Rightarrow$$

$$I = Ln\left(\frac{\cos^2 x/2 + 2sen x/2 \cos x/2 + sen^2 x/2}{\cos x}\right) \Rightarrow I = Ln\left(\frac{1 + senx}{\cos x}\right) \Rightarrow I=Ln$$

$$\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{senx}{\cos x}\right) \Rightarrow I = Ln|secx + tgx|, \quad \therefore, \quad I=$$

$$\int secxdx \Rightarrow I = Ln[secx + tgx] + C$$

8. $I = \int cscxdx \Rightarrow I = Ln[cscx - ctgx] + C$

Deducción: Ejercicio, se resuelve de manera semejante a $\int secxdx \Rightarrow I = Ln[secx + tgx] + C$

9. $I = \int sec^2 xdx \Rightarrow I = tgx + C$

Deducción: $I = \int sec^2 xdx \Rightarrow I = \int secxsecxdx$, aplicando la propiedad Nº 4, tenemos: $t=secx \Rightarrow dt=secxtgxdx \Rightarrow secxdx=\frac{dt}{tgx}$, como $tgx=\sqrt{sec^2x - 1} \Rightarrow secxdx=\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$, sustituyendo, $I = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}}$, aplicando nuevamente la propiedad Nº 4, tenemos: $u=t^2 - 1 \Rightarrow du=2tdt \Rightarrow tdt=\frac{du}{2}$, sustituyendo

$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} du \Rightarrow I = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2} \Rightarrow I = \sqrt{u}$, volviendo los cambio nos resulta: $I = \sqrt{t^2 - 1} \Rightarrow I = \sqrt{sec^2x - 1} \Rightarrow I = tgx$, $\therefore$, I = $\int sec^2 xdx \Rightarrow I = tgx + C$

10. I = $\int csc^2 xdx \Rightarrow I = -ctgx + C$

Deducción: Ejercicio, se deduce de manera semejante a $\int sec^2 xdx \Rightarrow I = tgx + C$

11. I = $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \Rightarrow I = tg^{-1} x + C$

Deducción: $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$, aplicando la propiedad Nº 4, x=atgt $\Rightarrow$ dx=asec^{2}tdt, sustituyendo tenemos: $I = a\int \frac{sec^2tdt}{a^2 + a^2tg^2t} \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{sec^2t}{sec^2t}dt$

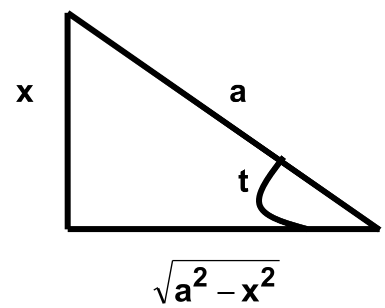
$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{a}\int dt \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{a}t$, como x=atgt $\Rightarrow$ t= $tg^{-1}\frac{x}{a}$ $\Rightarrow$ I= $\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{x}{a}$, $\therefore$,

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \Rightarrow I = tg^{-1} x + C$

12. I= $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a}Ln\frac{a + x}{a - x} + C$

<u>Deducción:</u> $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$, por la propiedad Nº 4, x=sent $\Rightarrow$ dx=acostdt

$$\Rightarrow I = a\int \frac{costdt}{a^2(1 - sen^2 t)} \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{cost} \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int sectdt \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln\left|secx + tgx\right|$$



$$I = \frac{1}{a}Ln\left|\frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| \Rightarrow \qquad I = \frac{1}{a}Ln\left|\left(\frac{(a + x)^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2}\right| \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{(a + x)^2}{(a - x)(a + x)}\right| \Rightarrow I = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|$$

$$\therefore, I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a}Ln\frac{a + x}{a - x} + C$$

13. $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a}Ln\frac{a - x}{a + x} + C$

<u>Deducción:</u> Ejercicio, hacer el cambio x=asect

14. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow I = Ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

<u>Deducción:</u> Ejercicio, hacer el cambio x=atgx

15. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow I = Ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$

Deducción: Ejercicio, hacer el cambio x=asecx

16. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow I = sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

Deducción: Ejercicio, hacer el cambio x=asenx

17. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}dx \Rightarrow I = Ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

Deducción: Ejercicio, hacer el cambio x=atgx

18. $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + C$

Deducción: Ejercicio, hacer el cambio x=asecx

19. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

Deducción: Ejercicio, hacer el cambio x=asenx

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES.

Definición 2: Por definición, una función algebraica racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Teóricamente, toda función racional tiene una integración que puede expresarse en términos de funciones elementales. Si una función integral no puede ser integrada directamente, con frecuencia el método de fracciones parciales es útil para transformar la fracción racional en una suma de funciones más sencillas que pueden integrarse por medio de las fórmulas normales. El

método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, esto es, aquellas en la que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador. Cualquier fracción impropia, es decir, aquella en la cual el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador, puede transformarse, por división, en la suma de un polinomio (integrable fácilmente) más una función propia (integrable por el medio de fracciones parciales). El método de integración por fracciones parciales consta de los siguientes pasos:

1. **La integral de la función F(x) puede ser expresada como la razón de dos polinomios f(x) y g(x). Considere que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendentes de la potencia de x, es decir,**

$$F(x)=\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x - a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 x + b_0}$$

En donde $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots a_m$, $b_0, b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots b_m$ son constantes reales.

El denominador g(x) puede factorizarse en factores de primer orden y cuadráticos con coeficientes reales de la manera:

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x-x_m)}$$

En donde x_1, x_2,......................x_n son las n raíces de la ecuación g(x)=0 y son llamadas ceros del polinomio g(x). F(x) puede ser entonces expresado como una serie de fracciones, es decir, $F(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$ **y se presentan varios casos dependiendo de las características del denominador.**

Caso 1 Las raíces x_1, x_2,.....x_n son distintas y el grado de g(x) es menor que el grado de f(x).

Las A's de la ecuación anterior son constantes y llamadas los residuos de F(x). Para determinar el valor de estos residuos, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_1 = \lim_{x \to x_1}(x-x_1)F(x);\quad A_2 = \lim_{x \to x_2}(x-x_2)F(x);\ \ldots\ldots A_n = \lim_{x \to x_n}(x-x_n)F(x)$$

Ejemplo: $F(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+3} = \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+3}$

$$A_1 = \lim_{x \to -1}\frac{3x+5}{x+3} = 1;\qquad A_2 = \lim_{x \to -3}\frac{3x+5}{x+1} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \frac{3x+5}{x^2+4x+3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3}$$

Caso 2: Las raíces son iguales y el grado de f(x) es menor que el de g(x).

Si una raíz, por ejemplo x_1, de g(x)=0 es de orden k y las otras raíces son simples con grado de f(x) menor que el grado de g(x), el desarrollo de F(X) es:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-x_1)r(x-x_2).....(x-x_n)}\Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{A_{11}}{(x-x_1)^r}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^{r-1}}+....\frac{A_{1(r-1)}}{(x-x_1)^2}+\frac{A_{1r}}{x-x_1}+$$

$$\frac{A_2}{x+x_2}+\frac{A_3}{x+x_3}+....+\frac{A_n}{x+x_n}$$

Los residuos A_2, A_3,..........A_n, pueden ser encontrados en la forma descrita anteriormente. Para evaluar a A_{11}, A_{12}, A_{13},...............A_{1r}, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_{11}=\lim_{x\to x_1}(x-x_1)F(x) \quad ; \qquad A_{12}=\frac{d}{dx}\left[(x-x_1)^r F(x)\right]_{x=x_1} ; \qquad A_{13}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx^2}\left[(x-x_1)^{r-1}F(x)\right]_{x=x_1} ,...........A_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}\frac{d}{dx^2}\left[(x-x_1)^{r-1}F(x)\right]_{x=x_1}$$

Ejemplo: $F(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{A_{11}}{(x+1)^3}+\frac{A_{12}}{(x+1)^2}+\frac{A_{13}}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+2)}$

$$A_{11}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+2}=2$$

$$A_{12}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x+2}\right]_{x=-1}=\frac{2x(x+2)-(x^2+1)}{(x+2)^2}=-4$$

$$A_{13}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx^2}\left[\frac{x^2+1}{x+2}\right]_{x=-1}=5$$

$$A_2=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{(x+1)^3}=-5$$

$$F(x)=\frac{x^2+1}{(x+1)^3(x+2)}=\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{5}{(x+1)}-\frac{5}{(x+2)}$$

Caso 3: El grado de f(x) es igual o mayor que el grado de g(x).

Si el grado de f(x) es igual o mayor que el grado de g(x), a la función F(x) se le llama impropia y el desarrollo en fracciones parciales se obtiene primero dividiendo f(x) entre g(x) hasta que el remanente sea de un grado menos que el grado de g(x). Dependiendo de si las raíces de g(x) sean simples o no, el desarrollo puede ser efectuado en la forma descrita en los casos 1 y 2.

Ejemplo: $F(x)=\dfrac{x^3+9x^2+28x+29}{x^2+7x+12}\Rightarrow F(x)=x+2+\dfrac{2x+5}{x^2+7x+12}\Rightarrow$

$$F(x)=x+2+\frac{2x+5}{(x+3)(x+4)}\Rightarrow$$

$$F(x) = x + 2 + \frac{A_1}{(x+3)} + \frac{A_2}{(x+4)}$$

$$A_1 = \lim_{x \to -3} \frac{2x+5}{x+4} = -1$$

$$A_2 = \lim_{x \to -4} \frac{2x+5}{x+3} = 3$$

$$F(x) = \frac{x^3 + 9x^2 + 28x + 29}{x^2 + 7x + 12} \Rightarrow F(x) = x + 2 - \frac{1}{(x+3)} + \frac{4}{(x+4)}$$

Caso 4 El denominador g(x) contiene factores cuadráticos irreducibles:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x^2 + b_n x + b_{n-1})(x^2 + b_{n-2} x + b_{n-3})........(x^2 + b_1 x + b_0)} \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + b_1 x + b_0)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + b_2 x + b_3)} + ... + \frac{A_n x + B_{n-1}}{(x^2 + b_n x + b_{n+1})}$$

Ejemplo: $F(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^2 - 3}{(x-2)(x^2+1)} \Rightarrow F(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2 + 1}$, **quitando denominadores por medio del método de los coeficientes indeterminados tenemos:** $x^2 - 3 = A_1(x^2 + 1) + (A_2 x + A_3)(x - 2)$, **para obtener A_1 aplicamos límite:** $A_1 = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{5}$, **derivando ambos miembro de la ecuación:** $x^2 - 3 = A_1(x^2$

+ 1) + $(A_2x + A_3)(x - 2)$ tenemos: $2x=2xA_1 + A_2(x - 2) + A_2x + A_3$ o $2x=2A_1x + 2A_2x - 2A_2 + A_3$ (1) Si x=0, se resulta que: $0=-2A_2 + A_3$, derivando (1) 0btenemos: $2=2A_1 + 2A_2$=, como $A_1=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ $2-\frac{2}{5}=2A_2 \Rightarrow A_2=\frac{4}{5}$, sustituyendo el valor de A_2 en $0=-2A_2 + A_3$, obtenemos que: $A_3=\frac{8}{5}$, $\therefore$, $\frac{x^2-3}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{\frac{4}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+1}$

Veamos un último ejemplo donde apliquemos todos los casos antes visto en el cual el lector completara los pasos intermedios:

$$F(x)=\frac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+21x^3+16x^2+7x+4}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2} \Rightarrow$$

$F(x)=\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{(x^2+x+1)^2}+\frac{A_5x+A_6}{x^2+2x+2}+\frac{A_7}{x-1}+\frac{A_8}{(x-1)^2}$, quitando denominadores y resolviendo respeto a A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 y A_8, resulta: $A_1=0$, A_2,=0, $A_3=0$, $A_4=1$, $A_5=1$, $A_6=3$, $A_7=1$ y $A_8=2$, $\therefore$,

$$\frac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+21x^3+16x^2+7x+4}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}=$$

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x+3}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Resolver las siguientes integrales indefinidas, aplicando para ello las propiedades de los números reales y las tablas de integración.

1. $I=\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

Solución: colocando el radical en forma de potencia y cambiándolo de miembro se obtiene que $I=\int x^{-\frac{1}{2}}dx$ **, por la tabla de integración se tiene que:** $I=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=2\sqrt{x}\ + C$

2. $I=\int \frac{x^2}{x^2+2}dx$

Solución: aplicando la propiedad del elemento neutro de la suma simple o adición se tiene que: $I=\int \frac{x^2+(2-2)}{x^2+2}dx \Rightarrow I=\int\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$**, por la propiedad N° 2, se tiene que:** $I=\int`dx\ -2\int\frac{dx}{x^2+2}$**, por las tablas de integración tenemos:** $I=x-\frac{2}{\sqrt{2}}tg^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow I=x-\sqrt{2}tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}x\ + C$

3. $I=\int\sqrt{\frac{sen^{-1}x}{1-x^2}}dx$

Solución: aplicando las propiedades de los números tenemos:

$I=\int \frac{\sqrt{sen^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, haciendo un cambio e variable, u=sen-1x $\Rightarrow$ du=$\frac{`dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

con lo que la integral se transforma en $I=\int \sqrt{u}du \Rightarrow I=\int u^{\frac{1}{2}}du$, por la tabla

de integración se tiene que: $I=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow I=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}$, volviendo el cambio a x,

nos resulta que $I=\frac{2}{3}\sqrt{u(sen^{-1}x)^3}$ + C

4. $I=\int \frac{(cosax+senax)^2}{senax}dx$,

Solución: resolviendo el producto notable en el numerador tenemos: $I=\int \frac{(cos^2ax+2cosaxsenax+sen^2ax)}{senax}dx \Rightarrow$ I= $\int \frac{1+2cosaxsenax}{senax}dx \Rightarrow I=\int\left(\frac{1}{senax}+2cosax\right)dx$, por la propiedad N° 2, tenemos: $I=\int cscaxdx + 2\int cosaxdx$, por la tabla de integración se tiene que: $I=-\frac{`1}{a}ln(cscax-ctgax)+\frac{`2}{a}senax \Rightarrow$

$I=\frac{`1}{a}(2senax - ln(cscax - ctgax) + C$

5. $I=\int sen^3 6xcos6xdx$

Solución: realizando un cambio de variable, u=sen6x $\Rightarrow$ du=6cos6xdx $\Rightarrow$ cos6xdx=$\frac{du}{6}$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\frac{1}{6}\int u^6du$

por la tabla de integración se tiene que: $I=\frac{1}{6}\frac{u^7}{7} \Rightarrow \frac{u^7}{42}$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=\frac{sen^7 6x}{42}$ + C

6. $I=\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable u=1 + Lnx $\Rightarrow$ $du=\frac{dx}{x}$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int \sqrt[3]{u}du \Rightarrow I=\int u^{\frac{1}{3}}du$, por la tabla de integración se tiene que: $I=\frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{u^4}$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{u(1+Lnx)^4}$ + C

$I=\int \frac{e^{tg^{-1}x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}$

Solución: aplicando la propiedad N° 2 de las integrales obtenemos:

7. $I=\int \frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2}dx + \int \frac{xLn(1+x^2)x}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$, considerando:

$I=I_1 + I_2 + I_3$, donde $I_1=\int \frac{e^{tg^{-1}x}}{1+x^2}dx$, haciendo el cambio de variable: u= $e^{tg^{-1}x} \Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$, sustituyendo en I_1, tenemos que: $I_1=\int e^u du$, por la tabla de integración se tiene que: $I_1=e^u$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I_1=e^{tg^{-1}x}$, para $I_2=\int \frac{xLn(1+x^2)x}{1+x^2}dx$, hacemos el cambio de variable: u=Ln(1 + x^2) $\Rightarrow$ du=$\frac{2xdx}{1+x^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{2}=\frac{xdx}{1+x^2}$, sustituyendo en I_2,

tenemos que: $I_2=\frac{1}{2}\int udu$, por la tabla de integración se tiene que: $I_2=$

$\frac{u^2}{2}$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I_2=\frac{Ln^2(1+x^2)}{2}$, para $I_3=\int\frac{dx}{1+x^2}$,

por la tabla de integración se tiene que: $I_3=tg^{-1}x$, por lo tanto, I=

$e^{tg^{-1}x}+\frac{Ln^2(1+x^2)}{2}$ + $tg^{-1}x$ + C

8. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=\frac{1}{u}$ $\Rightarrow$ $dx=-\frac{du}{u^2}$,

sustituyendo en I, tenemos que: $I=-\int\frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-2}}$ $\Rightarrow$ $I=-\int\frac{du}{\sqrt{1-2u^2}}$ $\Rightarrow$ I=-

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{2}-u^2}}$, por la tabla de integración se tiene que:

$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}sen^{-1}u$ $\Rightarrow$ I=-$sen^{-1}u$, volviendo el cambio a x nos resulta: I=sen^{-}

$^{1}\frac{1}{x}$ + C

9. $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=-Lnu \Rightarrow Lnu=-x \Rightarrow$ $u=e^{-x} \Rightarrow du=e^{-x}dx \Rightarrow dx=\frac{du}{e^{-x}} \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int\frac{du}{u(u+1)}$, aplicando fracciones parciales tenemos: $I=A_1\int\frac{du}{u} + A_2\int\frac{du}{u+1}$, donde $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{u+1} \Rightarrow A_1=1$ y $A_2=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{u}$ $A_2=1$, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int\frac{du}{u} + \int\frac{du}{u+1}$, por la tabla de integración se tiene que: $I=Lnu + Ln(u + 1)$, aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos que $I=Lnu(u + 1)$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=Lne^{-x}(e^{-x} + 1) + C$

10. $I=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Solución: $I=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}e^x dx$, haciendo el cambio de variable:

$u=e^x + 1 \Rightarrow e^x=u - 1 \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow I=\int\frac{u-1}{\sqrt{u}}du \Rightarrow I=\int(u^{1/2} - u^{-1/2})du \Rightarrow I=$ $\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} \Rightarrow I=\frac{2}{3}u^{1/2}(u-3) \Rightarrow I=\frac{2}{3}u\sqrt{e^x+1}(e^x-2) + C$

11. $I=\int\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}dx$

Solución: haciendo el cambio el variable u=x2 + 1 $\Rightarrow$ du=2xdx $\Rightarrow$

$xdx=\frac{du}{2} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+\sqrt{u}}$, haciendo el cambio de variable: u=t2 $\Rightarrow$ du=2tdt

$\Rightarrow I=\int\frac{t}{t`+1}dt \Rightarrow I=\int\frac{t+1-1}{t`+1}dt \Rightarrow I=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \Rightarrow$ I=t - Ln |1 + t | , volviendo

el cambio de t a u y de u a x, se tiene que I= $\sqrt{u}$ - $Ln\left|1+\sqrt{u}\right| \Rightarrow$

$I=\sqrt{x^2+1}-Ln\left|\sqrt{x^2+1}+1\right|$ + C

12. $I=\int\frac{cosx}{\sqrt{1+sen^2x}}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable: u=senx $\Rightarrow$ du=cosxdx, sustituyendo en I, tenemos que: $I=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}dx$ $\Rightarrow$ por la tabla de integración se tiene que: $I=Ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|$, volviendo el cambio a x nos resulta: $I=Ln\left|senx+\sqrt{1+sen^2x}\right|$ + C

13. $I=\int\frac{sen^3x}{\sqrt{cosx}}dx$

Solución: por las propiedades de los números reales tenemos que $I=\int\frac{sen^2xsenx}{\sqrt{cosx}}dx \Rightarrow I=\int\frac{(1-cos^2x)senx}{\sqrt{cosx}}dx$, haciendo el cambio de variable: u=cosx $\Rightarrow$ du=-senxdx, sustituyendo en I, tenemos que: I= $\int\frac{1-u^2}{\sqrt{u}}dx \Rightarrow I=\int(u^{-\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}})dx$, por la tabla de integración se tiene que:

$\text{I}=\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \text{I}=2\sqrt{u}-\dfrac{2\sqrt{u^5}}{5} \Rightarrow \text{I}=\dfrac{1}{5}(10-2\sqrt{u^3})\sqrt{u}$, volviendo el cambio a x nos resulta: $\text{I}=\dfrac{1}{5}(10-2\sqrt{\cos^3 x})\sqrt{\cos x}\; + C$

14. $\text{I}=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable: $x=\dfrac{1}{u} \;\Rightarrow\; dx=-\dfrac{du}{u^2}$, sustituyendo en I, tenemos que: $\text{I}=-\displaystyle\int\frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{4-\frac{1}{u^2}}} \Rightarrow \text{I}=-\int\frac{du}{\sqrt{4u^2-1}} \Rightarrow \text{I}=-\frac{1}{2}\int\frac{udu}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}}$, haciendo el cambio de variable $t=u^2-\dfrac{1}{4} \Rightarrow dt=2udu \Rightarrow udu=\dfrac{dt}{2}$, sustituyendo en I tenemos que $\text{I}=-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow \text{I}=-\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$, por la tabla de integración se tiene que: $\text{I}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{I}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{t}$, volviendo el cambio de t a u y de u a x nos resulta: $\text{I}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{u^2-\dfrac{1}{4}} \Rightarrow \text{I}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4}} \Rightarrow$

$\text{I}=-\dfrac{1}{4x}\sqrt{4-x^2}\; + C$

15. $\text{I}=\displaystyle\int \text{sen}^{-1}x\,dx$

Solución: aplicando la propiedad N° 5 de las integrales tenemos: $u=sen^{-1}x \Rightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y $dv=dx \Rightarrow v=x$, sustituyendo en I tenemos que $I=xsen^{-1}x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, haciendo un cambio de variables $u=1-x^2 \Rightarrow du=-2xdx \Rightarrow xdx=-\frac{du}{2}$, sustituyendo en I nos queda que $I=xsen^{-1}x - \int \frac{dx}{\sqrt{u}} \Rightarrow I=$ $I=xsen^{-1}x - \int u^{-\frac{1}{2}}du$, por las tablas de integración se tiene que $I=xsen^{-1}x - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow I=xsen^{-1}x - 2\sqrt{u}$, volviendo el cambio a la variable x, nos queda que

$I=xsen^{-1}x - 2\sqrt{1-x^2} + C$

16. $I= \int x2^{-x}dx$

Solución: Solución: aplicando la propiedad N° 5 de las integrales tenemos: $u=x \Rightarrow du=dx$ y $dv=2^{-x}dx \Rightarrow v=-\frac{2^{-x}}{Ln2}$, sustituyendo en I tenemos: $I=-x\frac{2^{-x}}{Ln2} + \frac{1}{Ln2}\int 2^{-x}dx$, por la tabla de integración se tiene que

$I=-x\frac{2^{-x}}{Ln2} - \frac{2^{-x}}{(Ln2)^2} \Rightarrow I=-\frac{2^{-x}}{Ln2}(xLn2 + 1) + C$

17. $I=\int \frac{Lnx}{\sqrt{x}}dx$

Solución: aplicando la propiedad N° 5 de las integrales tenemos: $u=Lnx \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ y $dv=\frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v=2\sqrt{x}$, sustituyendo en I tenemos:

I=2$\sqrt{x}$ Lnx - 2$\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx$ $\Rightarrow$ I=2$\sqrt{x}$ Lnx - 2$\int x^{-\frac{1}{2}}dx$ $\Rightarrow$ I=2$\sqrt{x}$ Lnx - $\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ I=$\sqrt{x}$

(2lnx – 1) + C

18. I=$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

Solución: completando cuadrado en el denominador se tiene que

I=$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 5 - 1}$ $\Rightarrow$ I=$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$, haciendo un cambio de variable u=x + 1 $\Rightarrow$ du=dx, sustituyendo en I, nos que I$\int \frac{du}{u^2 + 4}$, por la tabla de integración nos resulta que I=$\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{u}{2}$, volviendo el cambio a x, tenemos que I=$\frac{1}{2}tg^{-1}\frac{ux+1)}{2}$ + C

19. I=$\int \frac{senx}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}dx$

Solución: haciendo un cambio de variable u=cosx $\Rightarrow$ du=-senxdx, sustituyendo en I, tenemos que I=-$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4u + 1}}$, completando cuadrado se obtiene que I=-$\int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 + 1 - 4}}$ $\Rightarrow$

I=-$\int \frac{du}{\sqrt{(u+2)^2 + -3}}$, haciendo un cambio de variable t=u + 2 $\Rightarrow$ dt=du $\Rightarrow$

I=-$\int \frac{du}{\sqrt{t^2 - 3}}$, por las tablas de integración se tiene que:

I=Ln(t - $\sqrt{t^2-3}$), volviendo los cambios de t a u y de u a x se obtiene: I=Ln(u + 2 - $\sqrt{(u+2)^2-3}$) $\Rightarrow$ I=Ln(cosx + 2 - $\sqrt{(\cos x+2)^2-3}$)

20. I=$\int \frac{dx}{x^2+(a+b)x+ab}$

Solución: desarrollando el denominador se tiene que I= $\int \frac{dx}{x^2+ax+bx+ab}$ $\Rightarrow$ I=$\int \frac{dx}{(x+b)x+(x+b)}$ $\Rightarrow$ I=$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, aplicando fracciones parciales, tenemos que I=$A_1\int \frac{dx}{x+a}$ + $A_2\int \frac{dx}{x+b}$, donde:

$A_1=\lim_{x\to -a} \frac{1}{x+b}$ $\Rightarrow$ $A_1=\frac{1}{b-a}$ y $A_2=\lim_{x\to -b} \frac{1}{x+a}$ $\Rightarrow$ $A_2=-\frac{1}{b-a}$, sustituyendo estos valores en I, se tiene que: I=$\frac{1}{b-a}(\int \frac{dx}{x+a}$ - $\int \frac{dx}{x+b})$, por las tablas de integración se tiene que I=$\frac{1}{b-a}$(Ln(x + a) – Ln(x – b)), por las propiedades de los logaritmo nos queda que I=$\frac{1}{b-a}\mathrm{Ln}\frac{x+a}{x-b}$ + C

21. I=$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

Solución: haciendo un cambio de variable, u=x – 1, $\Rightarrow$ x=u + 1 $\Rightarrow$ du=dx, sustituyendo en I, tenemos que: I=$\int \frac{(u+1)^3}{\sqrt{u}}du$, realizando el producto notable en el numerador y aplicando las propiedades de los

números reales nos resulta que I= $\int(u^{\frac{5}{2}}+3u^{\frac{3}{2}}+3u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})du$**, resolviendo I por medio de las tablas de integración se tiene que I=** $\dfrac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+3\dfrac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+3\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\dfrac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow$

$$I=\frac{2}{7}\sqrt{u^7}+\frac{6}{5}\sqrt{u^5}+2\sqrt{u^3}+2\sqrt{u}\Rightarrow I=2\sqrt{u}\left(\frac{1}{7}\sqrt{u^5}+\frac{3}{5}\sqrt{u^3}+\sqrt{u}+1\right),$$

volviendo el cambio a x, se tiene que:

$$I=2\sqrt{(x+1)}\left(\frac{1}{7}\sqrt{(x+1)^5}+\frac{3}{5}\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x+1)}+1\right)+C$$

22. $I=\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable x=u2 $\Rightarrow$ **u=**$\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ **dx=2udu, sustituyendo en I, se tiene que:** $I=2\int\frac{u^2}{u^2+2}du$**, aplicando la propiedad del elemento neutro de la suma simple y la propiedad N° 2 de las integrales tenemos:** $I=2[\int du - 2\int\frac{du}{u^2+2}]$**, por la tabla de integración se tiene que** $I=2[u-\frac{2}{\sqrt{2}}tg^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}]\Rightarrow I=2[u-\sqrt{2}tg^{-1}\frac{\sqrt{2}u}{2}]$**, volviendo el cambio a la variable x, se tiene que:** $I=2[\sqrt{x}-\sqrt{2}tg^{-1}\frac{\sqrt{2x}}{2}]+C$

23. $I=\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Solución: haciendo el cambio de variable $x=u^6 \Rightarrow u=\sqrt[6]{x} \Rightarrow$ $dx=6u^5du$, sustituyendo en I, se tiene que $I=6\int\frac{(u^3+1)u^5}{u^2+1}du \Rightarrow I=6\int\frac{u^8+u^5}{u^2+1}du$, realizando la división, se tiene:

$$\frac{u^8+u^5}{u^2+1}=u^6 - u^4 - u^3 + u^2 + u - 1 - \frac{u-1}{u^2+1} \Rightarrow$$

$I=6\int\left(u^6-u^4-u^3+u^2+u-1-\frac{u}{u^2+1}+\frac{1}{u^2+1}\right)du$, **por las tablas de integración se tiene que:**

$I=6[\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)+tg^{-1}u]$, **volviendo el cambio a la variable x tenemos que:**

$$I=6[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x}+1)+tg^{-1}\sqrt[6]{x}] + C$$

24. $I=\int\frac{2x^2+41x-91}{x^3-2x^2-11x+12}dx$

Solución: factorizando el denominador, por el método de Ruffini,

1	-2	-11	12
1	1	-1	-12
1	-1	-12	0
-3	-3	12	
1	-4	0	

entonces se tiene que $x^3 – 2x^2 – 11x + 2=(x – 4)(x – 1)(x + 3)$, luego I se puede escribir como: $I=\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x-1)(x+3)}dx$, aplicando las fracciones parciales tenemos que $I=A_1\int \frac{dx}{x-4} + A_2\int \frac{dx}{x-1} + A_3\int \frac{dx}{x+3}$, donde:

$$A_1=\lim_{x \to 4} \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow A_1=5$$

$$A_2=\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x+3)} \Rightarrow A_2=4$$

$$A_3=\lim_{x \to -3} \frac{2x^2+41x-91}{(x-4)(x-1)} \Rightarrow A_3=-7$$

Sustituyendo estos valores en i, nos resulta: $I=5\int \frac{dx}{x-4} + 4\int \frac{dx}{x-1} - 7\int \frac{dx}{x+3}$, por medio de las tablas de integración se obtiene: $I=5Ln(x – 4) + 4Ln(x – 1) -7Ln(x + 3)$, aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene entonces que $I=\frac{(x-4)^5(x-1)^4}{(x+3)^7} + C$

25. $I=\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

Solución: como la función racional no es propia dividiremos el numerador entre le numerador para así trabajar con funciones propias, es decir,

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
\cline{2-2}
 & x \\
\underline{-x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad\qquad 8x + 6 &
\end{array}
$$

entonces, I= $\int \left(x + \dfrac{2(x+4)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \right) dx$, por la propiedad N° 2 de las integrales indefinidas, tenemos que I= $\int x dx +\ 2\int \dfrac{2(x+4)}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$, donde $I = I_1 + I_2$, para $I_1 = \int x dx$, implica por medio de las tablas de integración que $I_1 = \dfrac{x^2}{2}$, para I_2 aplicamos Ruffini en el numerador para factorizarlo

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -6 & 12 & -8 \\
2 & & 2 & -8 & 8 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

entonces se tiene que $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$, luego I_2 se puede escribir como: $I_2 = 2\int \dfrac{`4x`+3}{(x-2)^3} dx$, haciendo u n cambio de variable $u = x - 2 \Rightarrow x = u + 2 \Rightarrow du = dx$, sustituyendo en I_2, se tiene que $I_2 = 2\int \dfrac{`4(u+2)+3}{u^3} dx \Rightarrow I_2 = 2 \int \left(4u^{-2} + 11u^{-3}\right) du$, por medio de las tablas de integración se obtiene:

I_2=2[-4u^{-1} -11u^{-2}] $\Rightarrow$ I_2=-2[$\frac{4}{u}+\frac{11}{u^2}$], volviendo el cambio a x, se tiene que

I_2=-2[$\frac{4}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$], por lo tanto se tiene que:

I=$\frac{x^2}{2}$ - 2[$\frac{4}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}$] + C

26. I= $\int\frac{5x^2+6x+9}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9}dx$

Solución: factorizando el denominador, por el método de Ruffini,

	1	-4	- 2	12	9
-1		-1	5	-3	-9
	1	-5	3	9	0
-1		-1	6	-9	
	1	-6	9	0	
3		3	-9		
	1	-3	0		

Entonces, se tiene que x^4 – 4x^3 – 2x^2 + 12x + 9=$(x + 1)^2(x – 3)^2$, luego I se puede escribir como: I=$\int\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2(x-3)^2}dx$, aplicando las fracciones parciales tenemos que:

I=$A_{11}\int\frac{dx}{x+1}$ + $A_{11}\int\frac{dx}{(x+1)^2}$ + $A_{21}\int\frac{dx}{x-3}$ + $A_{22}\int\frac{dx}{(x-3)^2}$, donde:

A_{11}=$\underset{x \to = 1}{Lim}\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2}$ $\Rightarrow$ A_{11}=$\frac{1}{2}$

$$A_{12}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2}\right)_{x=-1} \Rightarrow$$

$$A_{12}=\left(\frac{(10x+6)(x-3)^2-2(x-3)(5x^2+6x+9)}{(x-3)^4}\right)_{x=-1} \Rightarrow A_{12}=\frac{5}{16}$$

$$A_{21}=\lim_{x \to 3}\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2} \Rightarrow A_{21}=\frac{9}{2}$$

$$A_{22}=\frac{d}{dx}\left(\frac{5x^2+6x+9}{(x+1)^2}\right)_{x=3} \Rightarrow$$

$$A_{22}=\left(\frac{(10x+6)(x+1)^2-2(x+1)(5x^2+6x+9)}{(x+1)^4}\right)_{x=3} \Rightarrow A_{22}=0$$

Sustituyendo estos valores en I, nos resulta: $I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{5}{16}\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-3}$**, por medio de las tablas de integración se obtiene:**

$I=\frac{1}{2}Ln(x+1) - \frac{5}{16(x+1)} - \frac{9}{2}Ln(x-3)$**, aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene:** $I=Ln\sqrt{(x+1)(x-1)^9} - \frac{5}{16(x+1)} + C$

27. $I=\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Solución: como la función racional no es propia dividiremos el numerador entre le numerador para así trabajar con funciones propias, es decir,

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & 4x^3 - x \\ \cline{2-2} & \frac{1}{4} \\ -x^3 + \frac{1}{4}x & \\ \hline \frac{1}{4}x \ -1 & \end{array}$$

Entonces, $I=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}x-1}{4x^3-x}\right)dx$ **, por la propiedad N° 2 de las integrales se tiene que** $I=\frac{1}{4}[\int dx + \frac{1}{16}\int\frac{x-4}{x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}dx]$**, donde** $I=\frac{1}{16}[4I_1 + I_2]$**,** $I_1=x$**, para** I_2 **aplicaremos las fracciones parciales: tenemos:**

$I=\int\frac{x-4}{x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}dx = A_1\int\frac{dx}{x} + A_2\int\frac{dx}{x-\frac{1}{2}} + A_3\int\frac{dx}{x+\frac{1}{2}}$**, donde**

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{x-4}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})} \Rightarrow A_1=-16$$

$$A_2=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{2})} \Rightarrow A_2=-7$$

$$A_3=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x-4}{x(x+\frac{1}{4})} \Rightarrow A_3=9$$

Sustituyendo estos valores, tenemos: $I_2=-16\int\frac{dx}{x}$ - $7\int\frac{dx}{x-1}$ + $9\int\frac{dx}{x+1}$, por las tablas de integración y las propiedades de los logaritmos, tenemos: $I_2=Ln\frac{(x+\frac{1}{2})^9}{x^{16}(x-\frac{1}{2})^7}$, luego tenemos que:

$$I=\frac{1}{4}[x+\frac{1}{4}Ln\frac{(x+\frac{1}{2})^9}{x^{16}(x-\frac{1}{2})^7}]+C$$

28. $I=\int cos^3xdx$

Solución: por las propiedades de los números reales, propiedad N°2 de las integrales y las identidades trigonométricas tenemos que I= $\int cos^2xcosxdx \Rightarrow I=\int(1-sen^2x)cosxdx \Rightarrow I=\int cosxdx - \int sen^2xcosxdx$, donde $I_1=\int cosxdx \Rightarrow I_1=senx$ y $I_2=\int sen^2xcosxdx$, haciendo el cambio $u=senx \Rightarrow du=cosxdx \Rightarrow I_2=\int u^2du$, por las tablas de integración se tiene que $I_2=\frac{u^3}{3}$, volviendo el cambio a la variable x, se tiene $I_2=\frac{sen^3x}{3} \Rightarrow$ $I=senx+\frac{sen^3x}{3}+C$

29. $I=\int cos^6 3xdx$

Solución: haciendo el cambio de variable $u=3x \Rightarrow du=3dx \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$, se tiene que $I=\int cos^6udu$, por las propiedades de los números reales, propiedad N°2 de las integrales y las identidades trigonométricas

tenemos que $I=\frac{1}{3}\int(\cos^2u)^3du \Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\frac{(1+\cos2u)^3}{8}du \Rightarrow I=\frac{1}{24}$

$\int(1+3\cos2u+3\cos^2 2u+\cos^3 2u)du \Rightarrow$

$I=\frac{1}{24}[\int du + 3\int\cos2udu + 3\int\cos^2 2udu + \int\cos^3 2udu]$**, donde** $I_1=\int du \Rightarrow$

$I=u$, $I_2=\int\cos2udu \Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\text{sen}2u$, $I_3=\int\cos^2 2udu \Rightarrow I_3=\int\frac{(1+\cos4u)}{2}du \Rightarrow$

$I_3=\frac{1}{2}[u + \frac{1}{4}\text{sen}4u]$ **y** $I_4=\int\cos^3 2udu \Rightarrow I_4=\int\cos^2 2u\cos2udu \Rightarrow I_4=$

$\int(1-\text{sen}^2 2u)\cos2udu$, $\Rightarrow I_4=\int\cos2udu - \int\text{sen}^2 2u\cos2udu \Rightarrow$

$I_4=\frac{1}{2}\text{sen}2u - \int\text{sen}^2 2u\cos2udu$**, haciendo el cambio de variable** $t=\text{sen}2u$

$\Rightarrow dt=2\cos2udu \Rightarrow \cos2udu=\frac{dt}{2} \Rightarrow I_4=\frac{1}{2}\text{sen}2u - \frac{1}{2}\int t^3dt \Rightarrow$

$I_4=\frac{1}{2}\text{sen}2u - \frac{1}{4}t^4$**, volviendo el cambio a la variable u nos queda:**

$I_4=\frac{1}{2}\text{sen}2u - \frac{1}{4}\text{sen}^4 2u$, $\therefore$,, **tenemos que:** $I=\frac{1}{24}[I_1 + 3I_2 + 3I_3 + I_4] \Rightarrow$

$I=\frac{1}{24}[u + \frac{3}{2}\text{sen}2u + \frac{3}{2}u + \frac{3}{8}\text{sen}4u + \frac{1}{2}\text{sen}2u - \frac{1}{4}\text{sen}^4 2u] \Rightarrow$

$I=\frac{1}{24}[\frac{5}{2}u + 2\text{sen}2u + \frac{3}{8}\text{sen}4u - \frac{1}{4}\text{sen}^4 2u]$**, volviendo el cambio a la variable x tenemos:** $I=\frac{1}{24}[\frac{15}{2}x + 2\text{sen}6x + \frac{3}{8}\text{sen}12x - \frac{1}{4}\text{sen}^4 6x] + C$

30. $I=\int\sec^4xdx$

Solución: por las propiedades de los números reales, propiedad N°2 de las integrales y las identidades trigonométricas tenemos que $I=\int sec^2xsec^2xdx \Rightarrow I=\int (1+tg^2x)sec^2xdx \Rightarrow I=\int sec^2xdx$ + $\int tg^2xsec^2xdx$, haciendo un cambio de variable u=tgx $\Rightarrow$ du=sec2xdx, sustituyendo en I, tenemos que: I=tgx + $\int u^2du \Rightarrow$ I=tgx + $\frac{u^3}{3}$, volviendo el cambio a la variable x se tiene que: I=tgx + $\frac{tg^3x}{3}$ + C

31. $I=\int sen^5xdx$

Solución: Solución: por las propiedades de los números reales, propiedad N°2 de las integrales y las identidades trigonométricas tenemos que $I=\int sen^4xsenxdx \Rightarrow I=\int (1-cos^2x)^2senxdx \Rightarrow$

$I=\int (1-2coscos^2x)^2senxdx \Rightarrow I=\int (1-2cos^2x+cos^4x)senxdx \Rightarrow$

$I=\int senxdx - 2\int cos^2xsenxdx + \int cos^4xsenxdx$, haciendo un cambio de variable u=cosx $\Rightarrow$ du=-senxdx, sustituyendo en I, se tiene que: I=- $\int du + 2\int u^2du - \int u^4du \Rightarrow$ I=-u + $\frac{2}{3}u^3$ - $\frac{1}{4}u^4$, volviendo el cambio a la variable x, se tiene que:

$$I=-cosx + \frac{2}{3}cos^3x - \frac{1}{4}cos^4x + C$$

32. $I=\int sen\frac{x}{3}xcos\frac{2x}{3}dx$

Solución: aplicando las identidades trigonométricas, las propiedades de las integrales y las tablas de integración se tiene que:

$$I=\frac{1}{2}\left(\int sen\left(\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}\right)dx+\int sen\left(\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}\right)dx\right) \Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\int senx\,dx-\int sen\frac{x}{3}dx\right) \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\left(-cosx + 3cos\frac{x}{3}\right) \Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(3cos\frac{x}{3} - cosx\right) + C$$

33. $I=\int cos(ax+b)cos(ax-b)dx$

Solución: haciendo un cambio de variable $u=ax \Rightarrow du=adx \Rightarrow dx=\frac{du}{a}$**, sustituyendo en I, se tiene que** $I=\int cos(u+b)cos(u-b)du$**, aplicando las propiedades de los números reales, las identidades trigonométricas, las propiedades de las integrales y las tablas de integración se tiene que:**

$$I=\int (cosbcosu - senbsenu)(cosbcosu+bsenbsenu)du \Rightarrow$$

$$I=\int (cos^2bcos^2u - sen^2bsen^2u)du \Rightarrow$$

$$I=cos^2b\int cos^2udu - sen^2b\int sen^2udu \Rightarrow$$

$$I=cos^2b\int \frac{1+cos2u}{2}du - sen^2b\int \frac{1-cos2u}{2}du \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}cos^2b\int (1+cos2u)du - \frac{1}{2}sen^2b\int (1-cos2u)du \Rightarrow$$

$I=\frac{1}{2}(cos^2b - sen^2b)(u + sen2u) \Rightarrow I=\frac{1}{2}cos2b(u + sen2u)$**, volviendo el cambio a la variable x, tenemos:** $I=\frac{1}{2}cos2b(ax + sen2ax) + C$

34. $\quad I=\int \cos x \cos^2 2x dx$

Solución: aplicando las propiedades de los números reales, las identidades trigonométricas, las propiedades de las integrales y las tablas de integración se tiene que: $I=\int \cos x \frac{1+\cos 4x}{2} dx \Rightarrow$

$$I=\frac{1}{2}[\int (\cos x dx + \cos x \cos 4x) dx \Rightarrow$$

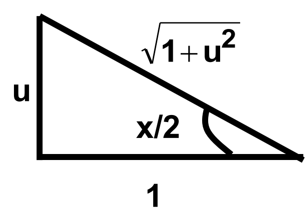
$$I=\frac{1}{2}[\int \cos x dx + \int \cos x \cos 4x dx\,] \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}[\int \cos x dx + \frac{1}{2}(\int \cos 3x dx + \int \cos 5x dx\ )] \Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}[\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x\ )]\ + C$$

35. $\quad I=\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

Solución: haciendo el cambio de variable $u=tg\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=tg^{-1}u \Rightarrow$ $x=2tg^{-1}x \Rightarrow dx=\frac{2du}{1+u^2}$, como $u=tg\frac{x}{2}$, aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:



Donde, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}$ - $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$; $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+u^2}$; $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{u^2}{1+u^2}$,

sustituyendo estos valores en I, se tiene que: $I=2\int \frac{du}{(1+u^2)(1+5\frac{1-u^2}{1+u^2})} \Rightarrow$

$I=2\int\frac{du}{1+u^2+5-5u^2} \Rightarrow I=2\int\frac{du}{6-4u^2} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\frac{3}{2}-4u^2}$, por la tabla de

integración tenemos: $I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}Ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+u}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-u}\right|\right] \Rightarrow I=\frac{\sqrt{6}}{12}\left[Ln\left|\frac{\sqrt{3}+u}{\sqrt{3}-u}\right|\right]$,

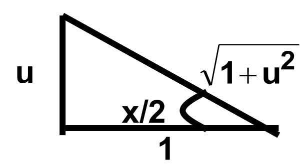
volviendo el cambio a x tenemos: $I=\frac{\sqrt{6}}{12}\left[Ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}tg\frac{x}{2}}\right|\right]+C$

36. $I=\int\frac{senx}{1-senx}dx$

Solución: Solución: haciendo el cambio de variable $u=tg\frac{x}{2} \Rightarrow$

$\frac{x}{2}=tg^{-1}u \Rightarrow x=2tg^{-1}x \Rightarrow dx=\frac{2du}{1+u^2}$, como $u=tg\frac{x}{2}$, aplicando el Teorema de

Pitágoras tenemos:



Donde, $senx=2cos\frac{x}{2}sen\frac{x}{2}$; $cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$; $sen\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\Rightarrow$

$senx=\frac{2u}{1+u^2}$ sustituyendo estos valores en I, se tiene que:

$I=\int\frac{(2u)(2u)}{(1+u^2)(1+u^2)(1-\frac{2u}{1+u^2})}du \Rightarrow I=4\int\frac{u^2}{(1+u^2)(1-2u+u^2)}du \Rightarrow$

$I=4\int\frac{u^2}{(1+u^2)(1-u)^2}du$, aplicando fracciones parciales se tiene que:

$$I=4\left[A_{11}\int\frac{du}{1-u}+A_{12}\int\frac{du}{(1-u)^2}+\int\frac{A_2u+A_3}{1+u^2}du\right]$$, donde,

$A_{11}=\lim\limits_{u\to 1}\frac{u^2}{1+u^2}\Rightarrow A_{11}=\frac{1}{2}$

$A_{12}=\frac{d}{du}\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)_{x=1}\Rightarrow A_{12}=\left(\frac{2u(1+u^2)-2u^3}{(1+u^2)^2}\right)_{x=1}\Rightarrow A_{12}=\frac{1}{2}$, para hallar a A_2 y A_3 aplicamos:

$A_{11}=(1-u)(1+u^2)+A_{12}(1+u^2)+(1-u)^2)(A_2u+A_3)=u^2$, sustituyendo los valores de $A_{11}=A_{12}=\frac{1}{2}$, tenemos que:

$\frac{1}{2}(1+u^2-u-u^3)+\frac{1}{2}(1+u^2)+(1-2u+u^2)(A_2u+A_3)=u^2\Rightarrow$

$(A_2-\frac{1}{2})u^3+(1-2A_2+A_3)u^2+(A_2-2A_3)u+A_3=u^2-1\Rightarrow A_3=-1$ y $(1-2A_2+1)=1\Rightarrow -2A_2=-1\Rightarrow A_2=\frac{1}{2}$, sustituyendo estos valores en I, se tiene que: $I=4\left[\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)^2}+\int\frac{\frac{1}{2}u-1}{1+u^2}du\right]\Rightarrow$ para $I_1=2\int\frac{du}{1-u}$, aplicando la tabla de integración tenemos que: $I_1=Ln(1-u)$, para $I_2=2\int\frac{du}{(1-u)^2}$, aplicando la tabla de integración, tenemos que: $I_2=\frac{1}{2(1-u)}$, para $I_3=2\int\frac{u}{1+u^2}du$, aplicando la tabla de integración, tenemos que:

$I_3=Ln(1+u^2)$ y para $I_4=-4\int\frac{1}{1+u^2}du$, aplicando la tabla de integración tenemos: $I_4=-4tg^{-1}u$, por lo tanto:

I=2Ln(1 – u) + $\frac{1}{2(1-u)}$ + Ln(1 + u^2) - 4tg^{-1}u, volviendo a la variable x, I=2Ln(1 – tg$\frac{x}{2}$) + $\frac{1}{2(1-g\frac{x}{2})}$ + Ln(1 + tg$^2\frac{x}{2}$) – 2x + C

37. **I=$\int\frac{dx}{senhx+3coshx}$**

Solución: sustituyendo el seno y el coseno hiperbólico por: senhx= $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ y coshx=$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, tenemos que:

$$I=\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}+3e^x+3e^{-x}} \Rightarrow I=\int\frac{dx}{4e^x+2e^{-x}} \Rightarrow I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{e^x+\frac{1}{2}e^{-x}},$$

aplicando las propiedades de los números reales I se transforma en I= $\frac{1}{4}\int\frac{e^x}{e^{2x}+\frac{1}{2}}dx$ o I=$\frac{1}{4}\int\frac{e^x}{(e^x)^2+\frac{1}{2}}dx$, haciendo el cambio de variable u=e^x $\Rightarrow$ du=e^{x}dx, sustituyendo estos valores en I, se tiene que: I=$\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+\frac{1}{2}}$, aplicando las tablas de integración tenemos: I=$\frac{\sqrt{2}}{4}tg^{-1}\sqrt{2}u$ volviendo el cambio a la variable x, tenemos que: I=$\frac{\sqrt{2}}{4}tg^{-1}\sqrt{2}e^x$ + C

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \frac{x^2-4}{x^2}dx$ **2.** $\int x^2\sqrt{x}dx$ **3.** $\int (x^2-\sqrt{x}+4)dx$ **4.** $\int \sqrt{2+5x}dx$ **5.**

$\int (x^2-\sqrt{x}+4)dx$ **6.** $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}dx$ **7.** $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **8.** $\int 2\sqrt{2x^2+1}dx$ **9.**

$\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **10.** $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}}$ **11.** $\int \frac{3(1-2x)^2dx}{\sqrt{2x}}$ **12.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ **13.**

$\int (x\sqrt{x}-5)^2dx$ **14.** $\int \frac{(x^3-1)}{x-1}dx$ **15.** $\int (2x+3)dx$ **16.** $\int (x^2-\sqrt{x})dx$ **17.**

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ **18.** $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ **19.** $\int xe^x dx$ **20.** $\int Lnx\,dx$ **21.** $\int x\sqrt{x+5}dx$ **22.**

$\int (2x+6)^{15}dx$ **23.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{ax+b}}$ **24.** $\int \frac{ax\,dx}{a-x}$ **25.** $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}dx$ **26.**

$\int \frac{2x+3}{2x+1}dx$ **27.** $\int e^x\cos x\,dx$ **28.** $\int \frac{Ln(x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$ **29.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ **30.**

$\int xe^{-x}dx$ **31.** $\int x^2e^xdx$ **32.** $\int xe^{2x}dx$ **33.** $\int xLnx\,dx$ **34.** $\int (\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})^2dx$ **35.**

$\int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+(a+1)^2}$ **36.** $\int (x+1)Lnx\,dx$ **37.** $\int (x^2+3x+4)^3(2x+3)dx$ **38.**

$\int (x+1)e^{3x^2+6x+10}dx$ **39.** $\int (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})^2dx$ **40.** $\int \frac{6x^2+8x+8}{x^3+2x^2+4x}dx$ **41.**

$\int \frac{(x^3+x)dx}{\sqrt[4]{x^4+2x^2+2}}$ **42.** $\int (\frac{1}{x}+x^2+6x)dx$ **43.** $\int \frac{x^3+2}{x^4+8x+10}dx$ **44.**

$\int \frac{x}{x^4+6x^2+5}dx$ 45. $\int \frac{(x+3)}{x^2+3x+2}dx$ 46. $\int \frac{x^3-2x}{x^4-81}dx$ 47. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ 48.

$\int \frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}dx$ 49. $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x}$ 50. $\int \frac{2x^2+6}{x^3+3x}dx$ 51. $\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx$ 52.

$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$ 53. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{4x^3-x}dx$ 54. $\int \frac{(x-2)}{x^3-x^2-2x}dx$ 55.

$\int \frac{2x^2-8x-8}{(x-2)(x^2-4)}dx$ 56. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$ 57. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$ 58. $\int \frac{(5x+9)dx}{(x-9)\sqrt{x^3}}$ 59.

$\int \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x^3}}$ 60. $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$ 61. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a+bx)^5}}$ 62. $\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$ 63.

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$ 64. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$ 65. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 66. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$ 67.

$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ 68. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}}$ 69. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 70. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x^2+a^2}}$ 71.

$\int \frac{\sqrt[3]{x^2-a^2}}{x^4}dx$ 72. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 73. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$ 74. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}}$ 75.

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-x^2}}$ 76. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}-\sqrt[4]{5-x}}$ 77. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}$ 78.

$\int x(x+2)(x+3)dx$ 79. $\int \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx$ 80. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$ 81.

$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ 82. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$ 83. $\int \frac{x}{(x+1)^n}dx$ 84.

$\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$ 85. $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2-x-1}$ 86. $\int \frac{3x^2-2x+2}{\sqrt{(x^3-x^2+2x-5)^{12}}}dx$ 87.

$\int \frac{\lg(2x+3)}{x}dx$ 88. $\int \frac{x+2}{(x-8)^7}dx$ 89. $\int (x+3)\sqrt{x+5}\,dx$ 90.

$\int \frac{(2x+11)dx}{3x^3-6x^2+3x}$ 91. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x-5)^9}}dx$ 92. $\int \frac{\lg 5x}{x}dx$ 93.

$\int \frac{x+3}{(x-4)^2}dx$ 94. $\int \frac{dx}{3x^2-6x}$ 95. $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}dx$ 96. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 97.

$\int xe^{x^2-1}dx$ 98. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$ 99. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ 100. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$ 101.

$\int \sqrt{e^x+1}\,dx$ 102. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 103. $\int tg^2x\,dx$ 104. $\int tgh^2x\,dx$ 105.

$\int ctg^2x\,dx$ 106. $\int ctgh^2x\,dx$ 107. $\int sen(a+bx)dx$ 108.

$\int (\cos ax+sen\,ax)^2dx$ 109. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 110. $\int sen(\lg x)\frac{dx}{x}$ 111.

$\int sen^2x\,dx$ 112. $\int \cos^2x\,dx$ 113. $\int \sec^2(ax+b)dx$ 114. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2x^2}$ 115.

$\int x\,ctg(x^2+1)dx$ 116. $\int \frac{\cos ax\,dx}{sen^5ax}$ 117. $\int \frac{sen\,x\cos x\,dx}{\sqrt{\cos^2x-sen^2x}}$ 118.

$\int \frac{dx}{senh\,x}$ 119. $\int (2senh5x-3\cosh 5x)dx$ 120. $\int senh^2x\,dx$ 121.

$\int \frac{dx}{senh\,x\cosh x}$ 122. $\int \frac{1-sen\,x}{x+\cos x}dx$ 123. $\int \frac{\sec^2x\,dx}{\sqrt{4-tg^2x}}$ 124.

$\int \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 125. $\int \frac{e^{tg^{-1}x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx$ 126. $\int \frac{\text{sen}x\cos x}{\sqrt{2-\text{sen}^2x}}dx$ 127.

$\int \frac{dx}{1+\cos^2x}$ 128. $\int \frac{3^{tghx}}{\cosh^2x}dx$ 129. $\int tg^{-1}x\,dx$ 130. $\int x\,\text{sen}x\,dx$ 131.

$\int x\,tg^{-1}x\,dx$ 132. $\int x\,\text{sen}x\cos x\,dx$ 133. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2x}dx$ 134. $\int e^x\text{sen}x\,dx$ 135.

$\int \text{sen}(\ln x)dx$ 136. $\int \text{sen}^3x\,dx$ 137. $\int \cos^5x\,dx$ 138. $\int \frac{\cos^5x}{\text{sen}^3x}dx$ 139.

$\int \text{sen}^4x\,dx$ 140. $\int \frac{dx}{\text{sen}^4x}$ 141. $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{sen}x\cos^3x}}$ 142. $\int \text{sen}3x\cos5x\,dx$ 143.

$\int \text{sen}10x\,\text{sen}15x\,dx$ 144. $\int \frac{dx}{5-3\text{sen}x}$ 145. $\int \cos\frac{x}{7}\cos\frac{x}{8}dx$ 146.

$\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$ 147. $\int \frac{dx}{\text{sen}x+\cos x}$ 148. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ 149.

$\int \frac{\text{sen}x}{1-2\cos x}dx$ 150. $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx$ 151. $\int \frac{\cos2x}{\cos^4x+\text{sen}^4x}dx$ 152. $\int \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$ 153.

$\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$ 154. $\int \frac{5x^2-x+2}{x^3+x^2+2x-4}dx$ 155. $\int 2^{-x}tgh2^{1-x}dx$ 156.

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+4)^3}}$ 157. $\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$ 158. $\int \frac{x^2}{(3+x^2)^2}dx$ 159. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$ 160.

$\int \frac{3-6x-x^2}{2x^3-3x^2-14x+15}dx$ 161. $\int \frac{dx}{e^{3x}+1}$ 162. $\int \frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3}dx$ 163.

$\int \ln(x^2+2)dx$ 164. $\int \text{sen}^4x\cos^7x\,dx$ 165. $\int \cos^2x\,\text{sen}^4x\,dx$ 166.

$\int \mathrm{tg}^2 x \sec^4 x\,dx$ 167. $\int \sec x\,\mathrm{tg}^3 x\,dx$ 168. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$ 169.

$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$ 170. $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$ 171. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 172.

$\int \mathrm{tg}x\sqrt{\sec x}\,dx$ 173. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 174. $\int \frac{2x^5}{x^2+3}dx$ 175.

$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ 176. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$ 177. $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ 178.

$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ 179. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ 180. $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$ 181.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$ 182. $\int \frac{dx}{2x+x^2}dx$ 183. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ 184.

$\int \frac{dx}{\cos x+2\,\mathrm{sen}x+3}$ 185. $\int x^2\cos^2 3x\,dx$ 186. $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$ 187.

$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ 188. $\int \frac{(x+3)dx}{x^2\sqrt{2x+3}}$ 189. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^3}}$ 190.

$\int \frac{dx}{\mathrm{sen}x\,\mathrm{sen}2x}$ 191. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ 192. $\int \csc^5 5x\,dx$ 193.

$\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$ 194. $\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ 195. $\int x^2 e^{3x}dx$ 196. $\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$ 197.

$\int \frac{xdx}{\cos^2 x}dx$ 198. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ 199. $\int \frac{dx}{\cos x+2\,\mathrm{sen}x+3}$ 200.

$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}dx$ 201. $\int \frac{\mathrm{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ 202. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ 203.

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ 204. $\int \frac{x(x-1)^2}{x^2+3x^2+4}dx$ 205. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 206.

$\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ 207. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 208. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+ex+1}}$ 209.

$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ 210. $\int \frac{dx}{\sqrt{\text{sen}x\cos^3 x}}$ 211. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x+1}dx$ 212.

$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ 213. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ 214. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$ 215. $\int \sec^3 x dx$ 2.16.

$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x-5\text{sen}x\cos x}$ 217. $\int (x^2-3x)\text{sen}5xdx$ 218. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 219.

$\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$ 220. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$ 221. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}dx$ 222.

$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$ 223. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$ 224. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^3}}$ 225.

$\int \cos^6 3xdx$ 226. $\int \frac{3\text{sen}x+2\cos x}{2\text{sen}x+3\cos x}dx$ 227. $\int e^x\text{sen}x\,\text{sen}3xdx$ 228.

$\int \cos^4 xdx$ 229. $\int \frac{dx}{x^2+7}$ 230. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ 231. $\int x(2x+5)^{10}dx$ 233.

$\int \text{arcttg}xdx$ 234. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$ 235. $\int \frac{dx}{x^2+(a+b)x+ab}dx$ 236.

$\int \cos^3 xdx$ 237. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$ 238. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)dx$ 239.

$\int \frac{(\text{sen}^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 240. $\int \frac{xdx}{e^x}$ 241. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ 242. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ 243.

$\int \frac{\cos^5 x}{\text{sen}^3 x}dx$ 244. $\int x^2\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ 245. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ 246.

$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$ 247. $\int \frac{dx}{sen^4x}$ 248. $\int e^{2x}sen^2xdxdx$ 249. $\int x^3 sen^{-1}\frac{1}{x}dx$ 250.

$\int (a+bx^3)^3dx$ 251. $\int \frac{x}{(x+1)^{25}}dx$ 252. $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$ 253. $\int x\cos 3x dx$ 254.

$\int \frac{2x^2+41x-91}{x^3+4x^2+x-6}dx$ 255. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 256. $\int \frac{sen x}{1-sen\, x}dx$ 257.

$\int sen^3\frac{x}{2}\cos^5\frac{x}{2}dx$ 258. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$ 259. $\int \csc^5 5x dx$ 260.

$\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ 261. $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$ 262. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}dx$ 263.

$\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}dx$ 264. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ctgx}}$ 265. $\int\frac{dx}{sen^2x\cos^4x}dx$ 266.

$\int sen5x\sqrt[3]{\cos x}dx$ 267. $\int (x^2+1)^2e^{2x}dx$ 268. $\int\frac{(x^m-x^n)^2dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ 269.

$\int\frac{dx}{x^4+10x^3+37x^2+60x+36}$ 270. $\int\frac{1-3x}{3+2x}dx$ 271 . $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ 272.

$\int(x^2+5x+6)\cos 2x dx$ 273. $\int\frac{dx}{3x^2-x+1}$ 274. $\int\frac{x^3+x+1}{x(1+x^2)}dx$ 275.

$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ 276. $\int\frac{dx}{\cos^6x}$ 277. $\int\frac{sen^3x}{\sqrt[5]{\cos^3x}}dx$ 278. $\int x sen x\cos 2x dx$ 279.

$\int\frac{xdx}{x^4-x^2+3}$ 280. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ 281. $\int x^2\ln x dx$ 282. $\int\frac{dx}{2x+x^2}dx$ 283.

$\int\frac{dx}{x^8+x^6}$ 284. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^4x+sen^4x}dx$ 285. $\int\frac{\cos^2x}{sen^6x}dx$ 286.

$\int x^2\cos^2 3xdx$ 287. $I=\int\frac{bx+1}{\sqrt{1-x}}dx$ 288. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 289.

$\int \frac{3x-6}{\sqrt{45-4x+x^2}}dx$ 290. $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}dx$ 291. $\int \frac{dx}{2x+x^2}dx$ 292.

$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ 293. $\int \text{sen}^2x\cos^3x\,dx$ 294. $\int x\cos^{-1}(5x-2)dx$ 295.

$\int x^2e^{x^3}x\,\text{sen}(x^3+1)dx$ 296. $\int \frac{(\cos x+\text{sen}x)}{\cos x-\text{sen}x}dx$ 297. $\int \frac{9x^3}{\sqrt{x^4-1}}dx$ 298.

$\int \frac{2x^2+5x-18}{x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18}dx$ 299. $\int x^7\sqrt{1-x^3}dx$ 300.

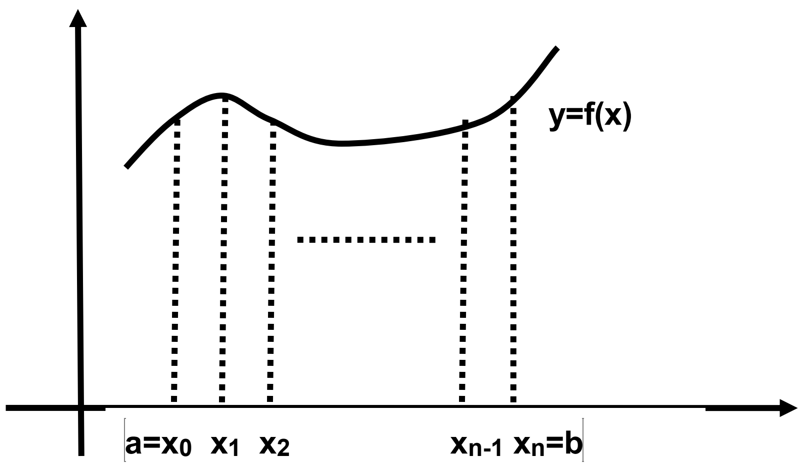
$\int \frac{\sec^2x}{1-4\text{tg}^4x}dx$

CAPÍTULO V

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE INTEGRALES DEFINIDAS E IMPROPIAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: LAS INTEGRALES DEFINIDAS: Integral Definida, Interpretación Geométrica de las Integrales definidas, La integral Definida vista como una Suma, Ejemplos de integrales Definidas Vistas como una Suma, Teorema Fundamental para las Integrales Definidas, Propiedades de las Integrales Definidas. Integrales Impropias. Ejercicios.

<u>Definición 1</u>: Sea F(x) una función definida en el intervalo [a,b] donde $a=x_0<x_1<x_2<.........<x_{n-1}<x_n<b$, una división arbitraria del intervalo [a,b] en n partes como se muestra en la gráfica N° 1



Graf. N° 1

Si consideramos el área bajo la curva de los distintos rectángulos: $A_1=\Delta x_1 f(x_1)=(x_1 - x_0)f(x_1)$, $A_2=\Delta x_2 f(x_2)=(x_2 - x_1)f(x_2)$, ..., $A_n=\Delta x_n f(x_n)=(x_n - x_n)f(x_{n-1})$,

Donde, el área total será: $A_t=A_1 + A_2 + ...+ A_n=s_n$ o $s_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\forall i\in Z^+$

y $\xi\in[x_i, x_{i-1}]$, la suma s_n recibe el nombre de <u>suma integral</u> de la función f(x) en el intervalo [a,b], donde s_n es la representación geométrica de estas suma algebraica de todas las áreas de los correspondientes paralelogramos, Teorema fundamental del calculo integral.

<u>Definición 2:</u> Si hacemos que Δx tienda a cero cuando n crece indefinidamente, es decir, $\Delta x \to 0$, cuando $n \to \infty$, s_n recibe el nombre de

<u>integral definida</u> de la función f(x) entre los límites formados por las rectas $x_0=a$ y $x_n=b$, es decir:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

, Si f(x) es continua en todo el intervalo [a,b], $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, existe y la función f(x) es integrable, independientemente del método que se aplique para dividir el segmento [a,b] y de la elección de ξ_i dentro de dicho intervalo.

Los valores de Δx_i y ξ_i, se obtienen en la forma siguiente: $\Delta x_i=\frac{x_1 - x_0}{n}$ $\Rightarrow \Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ y $\xi_i=x_i=a + i\Delta x_i \Rightarrow \xi_i=a + \frac{b-a}{n}i$, por lo tanto, $f(\xi_i)=f\left[a - \frac{b-a}{n}i\right]$ y en consecuencia, la integral vista como una suma se obtiene de la forma: $s_n= \sum_{i=1}^{n} f\left[a - \frac{b-a}{n}i\right]\left[\frac{b-a}{n}\right]$

<u>Ejemplo:</u> Hallar el área total de la función f(x)=2x + 3 en el segmento [1,8], dividiendo este en n partes.

<u>Solución:</u> Obtenemos $\Delta x_i=\frac{8-1}{n} \Rightarrow \Delta x_i=\frac{7}{n}$; $\xi_i=1 + \frac{7}{n}i, \Rightarrow \xi_i=\frac{n+7i}{n}$, por lo tanto, $f(\xi_i)=2\left[\frac{n+7i}{n}\right] + 3$ o $f(\xi_i)=\left[\frac{5n+14i}{n}\right]$, sustituyendo estos valores tenemos que:

$$s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{5n+4i}{n}\right]\frac{7}{n} \Rightarrow s_n = 7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(5n+14i) \Rightarrow s_n = 7\lim_{n\to\infty}\frac{12n-7}{n} \Rightarrow$$

$$s_n = 7x12 \Rightarrow s_n = 84$$

<u>Ejemplo:</u> Hallar el área total de la función f(x)=$x^2 + 2x + 3$, en el intervalo [2,5]

<u>Solución:</u> Obtenemos $\Delta x_i = \frac{5-2}{n} \Rightarrow \Delta x_i = \frac{3}{n}$; $\xi_i = 2 + \frac{3}{n}i$, $\Rightarrow \xi_i = \frac{2n+3i}{n}$,

por lo tanto, $f(\xi_i) = \left[\frac{2n+3i}{n}\right]^2 + 2\left[\frac{2n+3i}{n}\right] + 3$ **o**

$$f(\xi_i) = \frac{4n^2+12ni+9i^2}{n^2} + \frac{4n+6i}{3} + 3 \Rightarrow f(\xi_i) = \frac{4n^2+12ni+9i^2+4n^2+6ni+3n^2}{n^2}$$

$\Rightarrow f(\xi_i) = \frac{11n^2+18ni+9i^2}{n^2}$, **sustituyendo estos valores tenemos que:** $s_n =$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{11n^2+18ni+9i^2}{n^2}\right]\left[\frac{3}{n}\right] \Rightarrow$$

$$s_n = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(11n^2+18ni+9i^2) \Rightarrow$$

$$s_n = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[11n^3+19n^2(n+1)+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{2}\right] \Rightarrow s_n = 69$$

Propiedades de las Integrales Definidas:

1. **Si f es continua en el intervalo [a, b], entonces puede interpretarse a $\int_a^b f(x)dx$, como el área de la región limitada por la curva y=f(x), el eje X y las rectas x=a y x=b**

Demostración: Ver Teorema Fundamental del Cálculo Integral

2. $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A=-\int_b^a f(x)dx$

3. $A=\int_a^a f(x)dx\mathrm{a} \Rightarrow A=0$

4. $A=\int_a^b kf(x)dx \Rightarrow A=k\int_a^b f(x)dx$

5. $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A=\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ **con** $c\in[a,b]$

6. $A=\int_a^b [kf(x) \pm hf(x)]dx \Rightarrow A=k\int_a^b f(x)dx \pm h\int_a^b f(x)dx$, $\forall h,k\in\Re$

7. **Sea y=f(x), continua en el intervalo [a,b] y x=φ(t) ⇒ φ'(t)dt, continua conjuntamente con su derivada, φ(t) esta en el intervalo [α,β] donde a=φ(α) y b=φ(β) y la función f[φ(t)] esta definida y continua en el intervalo t∈[α,β] se tiene, entonces,** $A=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow A=$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

8. **Si** $A=\int_a^b f(x)d[g(x)] \Rightarrow A=f(x)g(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b g(x)d[f(x)]$

Ejemplo: **Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida:** $A=\int_{-1}^{3}(4x^2+5x+6)dx$

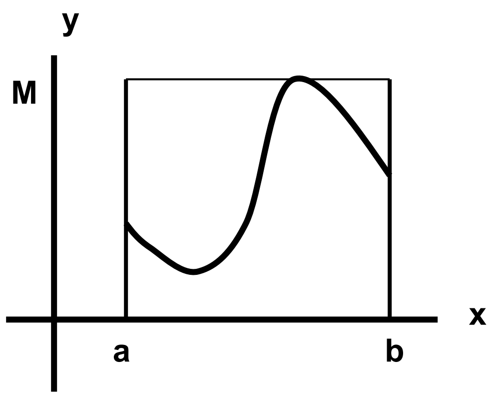
b. $A=\int_{-x}^{x} e^t dt$ **c.** $A=\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{x^3}$ **d.** $A=\int_{1}^{3} x(x^2-4)dx$ **e.** $A=\int_{0}^{\pi/4}\cos^2 x dx$ **f.** $A=\int_{0}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$ **g.** $A=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}$ **h.** $A=\int_{0}^{1}\frac{x dx}{x^2+3x+2}$ **i.** $A=\int_{0}^{\pi/2} x\cos x dx$ **j.** $\int_{0}^{1} xe^{2x}dt$

Solución: $A=\int_{-1}^{3}(4x^2+5x+6)dx$ **haremos el cálculo de la integral indefinida y luego la evaluamos en los límites, para ello aplicamos las propiedades y las tablas es decir:** $A=\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x\,\Big|_{-1}^{3} \Rightarrow$

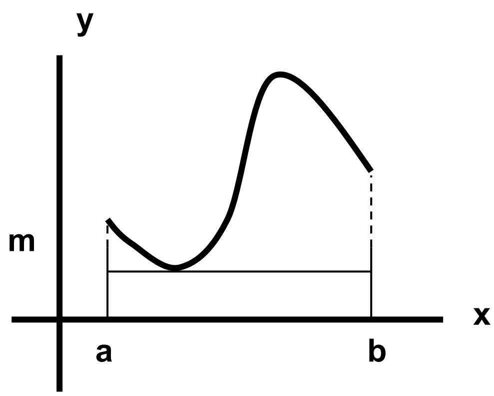
$$A=36 + \frac{45}{2} + 18 -(-\frac{4}{3} + \frac{5}{2} - 6) \Rightarrow A=\frac{244}{3}$$

Teorema Fundamental del Cálculo integral: **1. Sea f(x) definida por f(t) en el intervalo [a, b] y F una función real definida en [a, b] por** $F(x)=\int_a^x f(t)dt$**, con f continua en el intervalo [a, b] y F'(x)=f(x)** $\forall x\in[a, b]$

<u>Demostración</u>: como f es continua en todo el intervalo [a, b], entonces f alcanza un valor mínimo relativo y un máximo relativo en [a, b]. supongase que estos valores sean m y M respectivamente. Si hacemos una división del intervalo [a, b] en n subintervalos de longitud igual a $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $\forall i \in Z+$ y sea $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces se tiene que: $m(a - b) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ y $M(a - b) \geq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ y como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, se tiene que $m(a - b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a\ b)$ (1), las gráficas 2 y 3 ilustran estos resultados, para el caso en $f(x) \geq 0$, $\forall \in [a, b]$



Graf. N° 2



Graf. N° 3

Supongamos que $\Delta x > 0$, $\exists x \in (a, b) / F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$

$\Rightarrow F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \Rightarrow F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$, como f es continua en todo el intervalo [a, b], tiene que ser también continua en el intervalo $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$, entonces, f alcanza valores mínimo y máximo en

$[x, x + \Delta x]$. Si $m_{\Delta x}$ y $M_{\Delta x}$ denotan los valores mínimo y máximo respectivamente, entonces, por la ecuación (1), se cumple que: $\Delta x_x m_{\Delta x} \leq \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \leq \Delta x_x M_{\Delta x} \leq$, $\therefore$ $m_{\Delta x} \leq \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \leq M_{\Delta x}$ (2)

Consideremos ahora $\Delta x \leq 0$, se conforma el subintervalo $[x, x + \Delta x]$ y razonando de manera análoga se llega de nuevo a la ecuación (2), Como f es continua en $[x, x + \Delta x]$, cuando $\Delta x \to 0$ es $m_{\Delta x}=f(x)=M_{\Delta x}$, $\therefore$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$$ **, es decir, $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in (a, b)$**

Para x=a o x=b, el procedimiento es similar al ya hecho, por lo tanto, se deja al lector estos casos como ejercicios.

2. Sea f(x) continúa y derivable en el intervalo [a, b] y $F'(x)=f(x)$, entonces: $A_t = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

<u>Demostración</u>; definamos a $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, según la parte anterior del Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, por lo que F(x) y G(x) son ambas antiderivadas de f y se cumple que $G(x)=F(x) + C$, $\forall C \in \Re$, por lo tanto, $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, como, por definición se tiene que

$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0=F(a)+C \Rightarrow C=-F(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$ y $\therefore \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$, quedando esto demostrado

<u>Definición 3:</u> Si una función f(x) no está acotada en ningún entorno de un entorno del punto $c\in[a,b]$, donde f(x) es continua cuando $x\in[a,c)\cup(c,b]$, o la función esta definida en el intervalo $[a,b]-\{c\}$, entonces se supone que: $A=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx$, estas integrales reciben el nombre de <u>integrales impropias</u> y el área existe si los límites existen y son finitos, en este caso se dice que la integral converge, en caso contrario, si los límites no existen se dice que la integral diverge.

En el caso de que a=c, es decir, $x\in(a,b]$, la integral impropia viene expresada $A=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b f(x)dx$, la cual es convergente si el límite de la derecha existe.

Análogamente c=b, es decir, $x\in[a,b)$, la integral impropia viene expresada por: $A=\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^\varepsilon f(x)dx$, la cual es convergente si el límite de la derecha existe.

Si $|f(x)| \leq F(x)$ para $x \in [a,b]$ y $\int_a^b F(x)dx$ converge, entonces la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b f(x)dx \quad \text{ó}$$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^\varepsilon f(x)dx$ **también converge , esto por el criterio de comparación, es decir, si $f(x) \geq 0$ y $\lim_{x \to b}\{f(x)|b-x|^m\} = \beta \neq \infty,\ \beta \neq 0$, es decir, $f(x) \approx \frac{\beta}{|b-x|^m}$ cuando $x \to b$, diremos que 1. si $m<1$, entonces la integral converge, y 2. si $m \geq 1$, la integral diverge.**

<u>Definición 4:</u> Si la función $f(x)$ es continua en los intervalos: a. $(-\infty,b]$, ó b. $(-\infty,b)$ ó c. $[a,+\infty)$, ó d. $(a,+\infty)$, ó e. $(-\infty,+\infty)$, ó f. $(-\infty,+\infty) - \{c\}$ se definen las integrales impropias de la siguiente manera:

a. $A = \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$

b. $A = \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \varepsilon}} \int_a^b f(x)dx$

c. $A = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$

d. $A = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to \varepsilon \\ b \to +\infty}} \int_\varepsilon^b f(x)dx$

e. $\mathbf{A}=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} \mathbf{f(x)dx}$

f. $\mathbf{A}=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{a}^{-\varepsilon} \mathbf{f(x)dx} + \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ b \to \infty}} \int_{\eta}^{b} \mathbf{f(x)dx}$

Estas integrales convergen si las integrales de los miembros de la derecha convergen, en caso contrario divergen.

Ejemplos: Investigar si convergen o divergen la siguiente integral impropia: $\mathbf{A}=\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

<u>Solución:</u> como esta función está definida en el intervalo [-1,1] – {0}, tenemos que el área será: $\mathbf{A}=\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\eta \to 0} \int_{\eta}^{1} \frac{dx}{x^2} \Rightarrow$

$$\mathbf{A}=\lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{\varepsilon} - \lim_{\eta \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\eta}^{1} \Rightarrow \mathbf{A}=-\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\eta \to 0} \left(\frac{1}{\eta}-1\right) \Rightarrow \mathbf{A}=\infty,$$

por lo tanto, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ **diverge**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: A=** $\int_{-x}^{x} e^t dt$

Solución: **A=** $\int_{-x}^{x} e^t dt$**, haremos el cálculo de la integral indefinida y luego la evaluamos en los límites, para ello aplicamos las propiedades y las tablas es decir:**

A=$e^t \Big|_{-x}^{x} \Rightarrow$ **A=**$e^x - e^{-x}$**, aplicando las identidades hiperbólicas y las propiedades de los números reales, es decir multiplicamos y dividimos por 2 la expresión encontrada se tiene que: A=2senhx**

2. **Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: A=** $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3}$

Solución: **A=** $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^3}$**, haremos el cálculo de la integral indefinida y luego la evaluamos en los en los límites de integración, para ello aplicamos las propiedades y las tablas es decir: A=**$-\frac{1}{2x^2} \Big|_{-3}^{-1} \Rightarrow$

A=$-(-\frac{1}{2} - \frac{1}{18}) \Rightarrow$ **A=**$-\frac{4}{9}$**, el signo negativo significa que está en el tercer cuadrante, por lo tanto el área es: A=**$\frac{4}{9}$

3. **Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: $A=\int_{1}^{3} x(x^2-4)dx$**

<u>Solución:</u> $A=\int_{1}^{3} x(x^2-4)dx$, haremos el cálculo de la integral indefinida aplicando la propiedad número 7 y luego la evaluamos en los límites de integración, es decir:, tenemos: $t=x^2-4 \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$

, cuando $x \to 1 \Rightarrow t \to -3,\ x \to 3 \Rightarrow t \to 5 \Rightarrow A=\frac{1}{2}\int_{-3}^{5} t^2dt \Rightarrow$

$$A\frac{1}{2}\frac{t^3}{3} \Big|_{-3}^{5} \Rightarrow A=\frac{1}{6}(125+27) \Rightarrow A=\frac{76}{3}$$

4. **Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: $A=\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 x dx$**

<u>Solución:</u> $A=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}(1+\cos 2x)dx$, haremos el cálculo de la integral indefinida aplicando las propiedades y tablas de integración y luego la evaluamos en los límites de integración, es decir:

$$A=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\text{sen}2x) \Big|_{0}^{\pi/4} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow A=\frac{1}{8}(\pi+2)$$

5. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: A= $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$

Solución: A= $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}dx$, aplicando la propiedad número 7 y tablas de integración y luego la evaluamos en los límites de integración tenemos: $t=1 + x^5 \Rightarrow dt=5x^4dx \Rightarrow$ A=$x^4dx=\frac{dt}{5}$; cuando $x\to 0 \Rightarrow$

$t \to 1, x \to 1 \Rightarrow t \to 2 \Rightarrow$ A=$\frac{1}{5}\int_1^2 t^{-1/2}dt \Rightarrow$ A=$\frac{2}{5}t^{1/2} \Big|_1^2 \Rightarrow$ A=$\frac{2}{5}(\sqrt{2}-1)$

6. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: A=$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

Solución: A=$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, aplicando las tablas de integración y luego la evaluamos en los límites de integración tenemos: A= $\ln|1+x| \Big|_0^1 \Rightarrow$ A=ln2

7. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: A=$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$

Solución: A=$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$, aplicando las fracciones parciales, tablas de integración y luego la evaluamos en los límites de integración tenemos: $A=\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow A=A_1\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + A_2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} \Rightarrow A=\ln$

$|x+1|^{A_1}|x+2|^{A_2}$, donde $A_1=\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+2} \Rightarrow A_1=-1$ y $A_2=\lim_{x \to -2} \frac{x}{x+1} \Rightarrow A_2=2$

entonces $A=\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|_0^1 \Rightarrow A=\ln\frac{3}{2} - \ln 2 \Rightarrow A=\ln\frac{3}{4}$

8. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$

<u>Solución</u>: $A=\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$, aplicando la propiedad número 8 y luego la evaluamos en los límites de integración tenemos: $f(x)=x \Rightarrow d[f(x)]=dx$ y $[g(x)]=\cos x dx \Rightarrow g(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow A=x\operatorname{sen}x \mid_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}x dx \Rightarrow$

$A=\frac{1}{2}\pi + \cos x \mid_0^{\pi/2} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\pi - 1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}(\pi - 2)$

9. Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral y las propiedades evaluar la siguiente integral definida: $A=\int_1^e xe^{2x}dx$

<u>Solución</u>: aplicando la propiedad número 8 y luego la evaluamos en los límites de integración tenemos: f(x)=x $\Rightarrow$ d[f(x)]=dx y d[g(x)]=e^{2x} $\Rightarrow$

$$g(x)=\frac{1}{2}\,e^{2x}dx \Rightarrow A=\frac{1}{2}\,xe^{2x}\,\Big|_{1}^{e}-\frac{1}{2}\int_{1}^{e}e^{2x}dx \Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{2}\left[e.e^{2e}-e^{2}\right]-\frac{1}{4}e^{2x}\,\Big|_{1}^{e} \Rightarrow A=\frac{1}{4}\left[2.e^{2e+1}-2e^{2}-e^{2e}+e^{2}\right]\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{4}\left[e^{2e}(2-e)-e^{2}\right]$$

10. Investigar si convergen o divergen la siguiente integral impropia:

$$A=\int_{1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2}}$$

<u>Solución:</u> $A=\int_{1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2}}$, aplicaremos la definición de las integrales impropias, las tablas de integración y luego la evaluaremos en los límites de integración, como esta función está definida en el intervalo (-1,3], tenemos que el área será: $A=\lim_{\varepsilon\to 1}\int_{\varepsilon}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2}} \Rightarrow A=\lim_{\varepsilon\to 1}\left[-\frac{1}{x-1}\right]_{\varepsilon}^{3} \Rightarrow$

$A=-\lim_{\varepsilon\to 1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\varepsilon-1}\right) \Rightarrow A=\infty$, luego $\int_{1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2}}$ diverge

11. Investigar si convergen o divergen la siguiente integral impropia:

$$A=\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^{2}-9}$$

<u>Solución:</u> A=$\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$, aplicaremos la definición de las integrales impropias, las tablas de integración y luego la evaluaremos en los límites de integración, como esta función está definida en el intervalo (-1,3], tenemos que el área será:

$$A=\lim_{\eta\to 3}\int_{2}^{\eta}\frac{dx}{x^2-9}\Rightarrow A=\lim_{\eta\to 3}\frac{1}{6}\ln\left[\frac{x-3}{x+3}\right]_{2}^{\eta}\Rightarrow A=\frac{1}{6}\ln\lim_{\eta\to 3}\left(\frac{\eta-3}{\eta+3}-\frac{-1}{5}\right)$$

$\Rightarrow A=\frac{1}{6}\ln\frac{1}{5}$, en consecuencia $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-9}$ converge a $\frac{1}{6}\ln\frac{1}{5}$

12. Investigar si convergen o divergen la siguiente integral impropia:

$$A=\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

<u>Solución:</u> A=$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, aplicaremos la definición de las integrales impropias, las tablas de integración y luego la evaluaremos en los límites de integración, como esta función está definida en el intervalo [0,∞), el área será: $A=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow A=\lim_{b\to\infty}\left[tg^{-1}x\right]_{0}^{b}\Rightarrow A=\lim_{b\to\infty}$

$\left[tg^{-1}b-tg^{-1}0\right]\Rightarrow A=\frac{\pi}{2}$, entonces $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, converge a $\frac{\pi}{2}$

13. Investigar si convergen o divergen la siguiente integral impropia:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

<u>**Solución:**</u> **A=** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$**, aplicaremos la definición de las integrales impropias, las tablas de integración y luego la evaluaremos en los límites de integración, como la función está definida en todos los reales, tenemos que el área será:**

$$A=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2}\Rightarrow$$

$$A=\lim_{a\to\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}\Rightarrow$$

$$A=\lim_{a\to\infty}\left[tg^{-1}(x+1)\right]_a^0+\lim_{b\to\infty}\left[tg^{-1}(x+1)\right]_0^b\Rightarrow$$

$$A=\lim_{a\to\infty}\left[tg^{-1}1-tg^{-1}a)\right]+\lim_{b\to\infty}\left[tg^{-1}b-tg^{-1}0)\right]\Rightarrow A=\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow A=0,$$

por lo tanto, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$**, converge a 0.**

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Formar las sumas integrales s_n, para las siguientes funciones:

a. $f(x)=x^2$ en el intervalo [-2,1]

b. $f(x)=x^2$ en el eje 0X y la vertical x=a, $\forall a>0$

c. $f(x)=2^x$ en el intervalo [0,10]

d. $f(x)=x^3 + 2x + 3$ en el intervalo [1,5]

e. $f(x)=2x + 1$, para y=0 e x=1

f. $f(x)=x^2 – 2x -4$ en el intervalo [0,1]

g. $f(x)=4 - x^2$ en el intervalo [0,2]

h. $f(x)=3x - 2$ en el intervalo [4,8]

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $A=\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$ 2. $A=\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x}dx$ 3. $=\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

4. $A=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{25+2x}}$ 5. $A=\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$ 6. $A=\int_0^1 \frac{x^5}{x+2}dx$ 7. $A=\int_0^9 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

8. $A=\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx$ 9. $A=\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 x dx$ 10. $A=\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x2}}$

11. $=\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$ 12. $A=\int_0^{\pi/2} sen^3 x dx$ 13. $A=\int_1^e \frac{sen(lnx)dx}{x}$ 14. $A=\int_{\pi/6}^{\pi/4} ctg^4 x dx$

15. $A=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 16. $A=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{\cosh^2 x}dx$ 17. $A=\int_0^{\pi} \operatorname{senh}^2 x\,dx$

18. $A=\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$ 19. $A=\int_{3/4}^{4/3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 20. $A=\int_3^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{\sqrt[3]{x-2}+8}dx$

21. $A=\int_0^{\ln 2}(\sqrt{e^x-1})dx$ 22. $A=\int_0^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}dx$ 23. $A=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

24. $A=\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 25. $A=\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ 26. $A=\int_0^a(\sqrt{ax-x^2}\,dx$

27. $A=\int_0^e \ln x\,dx$ 28. $A=\int_0^1 x^3e^{2x}dx$ 29. $A=\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$ 30.

$A=\int_0^{\pi}\frac{dx}{4-3\cos x}dx$ 31. $A=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{12+13\cos x}$ 32. $A=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$ 33.

$A=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+5\operatorname{sen} x}$ 34. $A=\int_{1/3}^{1}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}dx$ 35. $A=\int_0^1\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ 36.

$A=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ 37. $A=\int_0^1\sqrt{2x+x^2}\,dx$ 38. $A=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$ 39. A=

$\int_0^{\pi/2}\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$ 40. $A=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)}$ 41. $A=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ 42.

$\int_0^3\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+16}}$ aq. $\int_0^1\frac{x^2dx}{x^{2}`+1}$ 43. $\int_{-1}^{2}\frac{x^2dx}{x`+2}$ 44. $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ 45.

$\int_0^{\sqrt{3}} x\,tg^{-1}x\,dx$ 46. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ 47. $\int_0^{\ln 3}\operatorname{sen}^4 x\,dx$ 48. $\int_0^1 x^{15}\sqrt[3]{1+3x^8}\,dx$ 49.

$\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ 50. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$ 51. $\int_{0}^{a}\sqrt{ax-x^2}\,dx$ 52. $\int_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

53. $\int_{-1}^{1}\frac{x^5dx}{x+2}$ 54. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ 55. $\int_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ 56. $\int_{1}^{6}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$

3. **Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:**

1. $\int_{4}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$ 2. $\int_{2}^{4}\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$ 3. $\int_{0}^{3}\frac{(x+1)dx}{x^3-2x^2-5x+6}$ 4.

$\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 5. $\int_{0}^{3a}\frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}$ 6. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ 7. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^x dx$ 8. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 9. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ 10.

$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$ 11. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 12. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}$ 13. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ 14. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ 15. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$ 16.

$\int_{0}^{\infty}\operatorname{sen}x\,dx$ 17. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln x}$ 18. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ 19. $\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ (a>1) 20.

$\int_{a}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ (a>1) 21. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}x\,dx$ 22. $\int_{0}^{\infty}e^{-hx}dx$ 23. $\int_{a}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x\,dx}{x^2+1}$ 24. $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^2}$ 25.

$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$ 26. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-5x^2}$ 27. $\int_{0}^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$ 28. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}+2x+5}$ 29.

$\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}+x^2}$ 30. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$ 31. $\int_{1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ 32. $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ 33.

$\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ 34. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ 35. $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ 36. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$ 37. $\int_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 38.

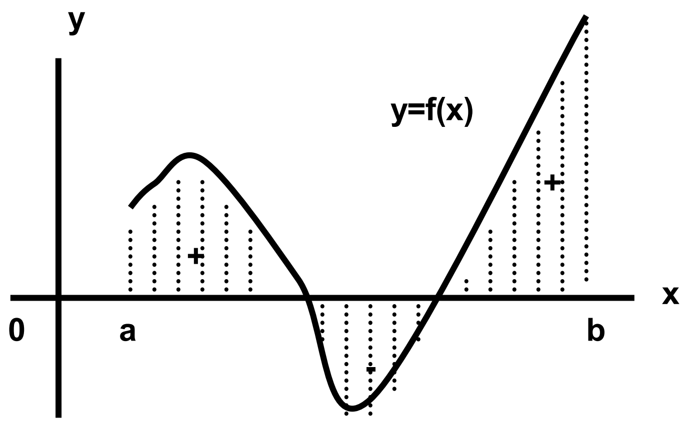
$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ 39. $\int_{-\infty}^{+\infty}(5-3x)dx$ 40. $\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{(x+1)^3}dx$

CAPÍTULO VI

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS AL CAMPO DE LA INGENIERÍA Y LA FÍSICA

En este capítulo se estudiara: Cálculo de Áreas, Función Promedio, Longitud de Arco, Volumen de un cuerpo de revolución. Ejercicios Resueltos y Propuestos.

<u>Definición 1:</u> Si la función $f(x) \geq 0$ está definida en el intervalo [a, b], entonces, *el área del trapecio curvilíneo* limitado por las curvas $y=f(x)$, el eje X y las rectas $x=a$ y $x=b$ es igual a: $\int_a^b f(x)dx$ (1), ver la gráfica



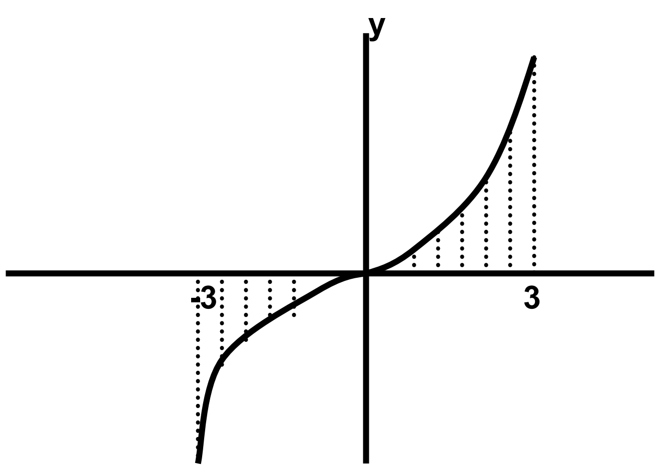
Si $f(x) \leq 0$ en el intervalo [a, b], la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es también menor o igual que cero (≤ 0). Su valor absoluto es igual al área A del trapecio curvilíneo correspondiente: $-A=\int_a^b f(x)dx$.

Si F(x) cambia de signo un número finito de veces en el intervalo [a, b], entonces podemos descomponer la integral en el intervalo [a, b] en suma de integrales en los intervalos parciales. La integral será positiva en los intervalos donde $f(x) \geq 0$, y negativa en aquellos intervalos en que $f(x) \leq 0$. La integral extendida a todo el intervalo dado representa la diferencia de las áreas dispuestas superior e inferiormente al eje X, ver la gráfica 1.

Para obtener, prescindiendo de su signo, la suma de las áreas, es preciso hallar la suma de los valores absolutos de las integrales en los intervalos parciales indicados o bien calcular la integral.

Ejemplo: Calcular el área de la regiones limitadas por las siguientes curvas: $f(x)=x^3$ en el intervalo [-3, 3]

Solución: $f(x)=x^3$ en el intervalo [-3, 3], En primer lugar realicemos la gráfica de esta función:



En este caso, resolvemos la integral definida de f(x), desde x=-3 hasta x=3, es decir, $A=\int_{-3}^{3} x^3dx$, por las tablas de integración se tiene que $A=\left|\frac{x^4}{4}\right|_{-3}^{3}$

$\Rightarrow A=\frac{3^4}{4}-\frac{-3^4}{4}$ =0, pero si observamos la gráfica 5 vemos que para poder calcular el área debemos hacer:

$$A=-\int_{-3}^{0} x^3dx + \int_{0}^{3} x^3dx \Rightarrow A= -\left(\frac{0^4}{4}-\frac{-(3)^4}{4}\right) + \left(\frac{3^4}{4}-\frac{-(0)^4}{4}\right) \Rightarrow A=\left(\frac{81}{4}+\frac{81}{4}\right)$$

entonces, $A=\frac{81}{2}$, por lo tanto el área buscada es de $\frac{81}{2}$ u^2, (unidades al cuadrado)

<u>Definición 2:</u> Sea la función real tal que $f: D \to \Re$, donde $D\subseteq\Re$ y sea el intervalo $[a, b]\subseteq D$, siendo f integrable en el intervalo [a, b], se define una <u>función media o valor medio o promedio ($\mu(x)$)</u> de f en el intervalo [a, b] a la función $\mu(x)$ de f(x), tal que $\mu(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, donde $\mu(x)$ es un número de todas las imágenes de la función f en el intervalo [a, b].

El teorema del valor medio para integrales definidas nos demuestra que siendo la función continua en el intervalo cerrado, ella alcanza su valor medio en algún punto intermedio de dicho intervalo. Enunciaremos el teorema del valor medio para integrales definida sin demostrarlo. Sea f una función real tal que $f: D \to \Re$ y f(x), donde $D\subseteq\Re$ y sea $[a, b]\subseteq D$, f continua en [a, b] $\Rightarrow$

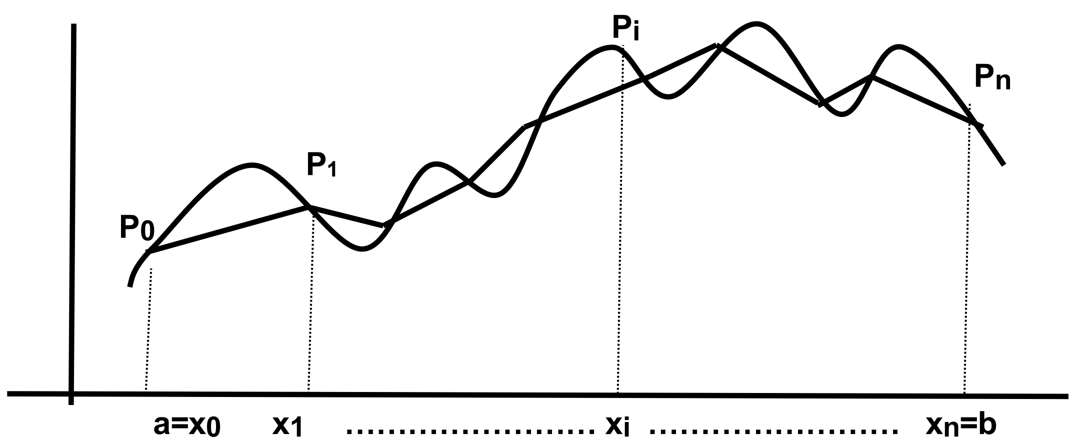
$\exists c\in(a, b)/ \int_a^b f(x)dx$ =f©(b – a); siendo $f(c)=\mu(x)$ en el intervalo [a, b]

<u>Ejemplo:</u> Hallar el valor medio de la función $f(x)=x^2 + 1$, en el intervalo [1,4].

Solución: $\mu(x)=\frac{1}{3}\int_1^4(x^2+1)dx \Rightarrow \mu(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 \Rightarrow$

$\mu(x)=\frac{1}{3}\left[(\frac{64}{3}+4)-(\frac{1}{3}+1)\right] \Rightarrow A=8$

Definición 3: Sea y=f(x) diferenciable en el intervalo $x\in[a, b]$, si consideramos la distancia de la función y=f(x) desde el punto (a, f(a)) hasta (b, f(b)) y dividimos el segmento [a, b] en n sub-intervalos iguales de longitud Δx y asignamos cada punto xi un punto ($P_i(x_i)$, $f(x_i)$) como se muestra en la figura más abajo, si obtenemos que las distancias de los segmentos $\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+........+\overline{P_{n-1}P_n}+\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$ que es la suma de las longitudes de los segmentos de la recta P_{i-1} y P_i, la cual nos resulta en una aproximación de la curva de la figura:



nos resulta por la definición de la distancia entre dos puntos que: $\overline{P_0P_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$ con $\Delta x=x_i - x_{i-1}$, por el teorema del valor medio se tiene $f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(x_j) = \Delta x f(x_j)$ para algún $x_j \in (x_i - x_{i-1})$, por lo tanto, $\overline{P_0P_i} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 (f'(x_i))^2} \Rightarrow \overline{P_0P_i} = \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\ \Delta x \Rightarrow$ $\overline{P_0P_i} = \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\ \Delta x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\ \Delta x$ y esta suma se puede aproximar a la integral definida L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ o L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ o L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ la cual se define como la longitud de Arco a una Curva.

Análogamente se obtiene L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy$ o L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(x')^2}\,dx$ o L= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$

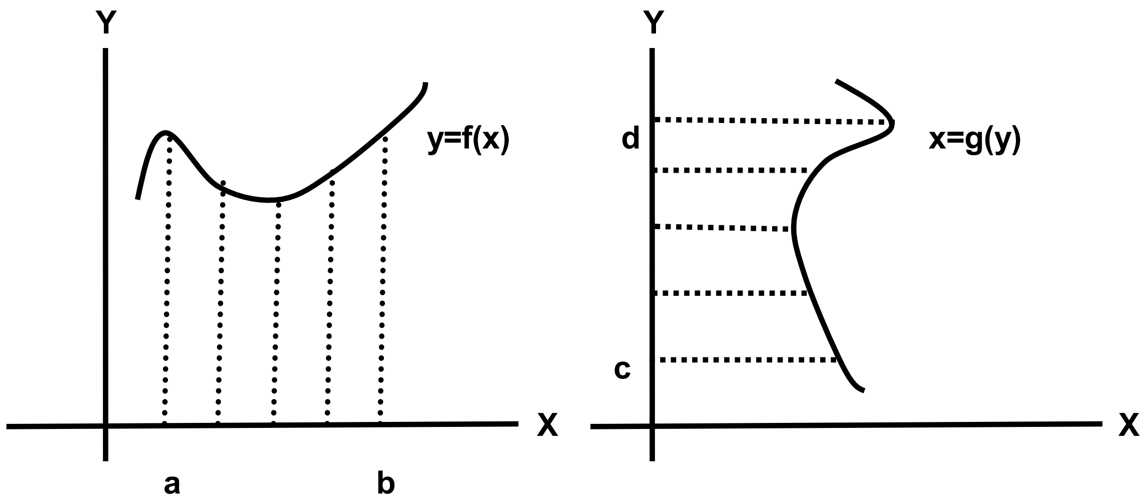
Ejemplo: Hallar la longitud de arco de la función $y = \sqrt{x^3}$ en el intervalo $x \in [1, 4]$

Solución: Derivando la función $y = \sqrt{x^3}$ y luego Aplicando la fórmula l= $\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, obtenemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ entonces, l= $\int_{1}^{4} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$ por la propiedad Nº 7 de las integrales definida se tiene: $t = 1+\frac{9}{4}x \Rightarrow dt = \frac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9}dt$, cuando $x \to 1 \Rightarrow t \to \frac{13}{4}$ y cuando $x \to 4 \Rightarrow t \to 10$, sustituyendo en I, se obtiene: $I=\frac{4}{9}\int_{\frac{13}{4}}^{10}\sqrt{t}dt$ por las tablas de integración tenemos:

$$I=\frac{8}{27}\sqrt{t^3}\ \Big|_{\frac{13}{4}}^{10}\Rightarrow\frac{8}{27}\left[\sqrt{1000}-\frac{\sqrt{2197}}{2}\right]\Rightarrow I=\frac{80\sqrt{10}-52\sqrt{13}}{27}$$

<u>Definición 4:</u> **Sea f una función tal que (f(x)≥0, g(x)≥0) definida en el intervalo x∈[a, b] (en el intervalo x∈[a, b]) por encima del eje X (por encima del eje Y), al girar la función f en torno al eje Y (al girar la función g en torno al eje X) se obtiene el <u>volumen de sólido de revolución</u> y se representan por las fórmulas: (Fórmula del Disco)**

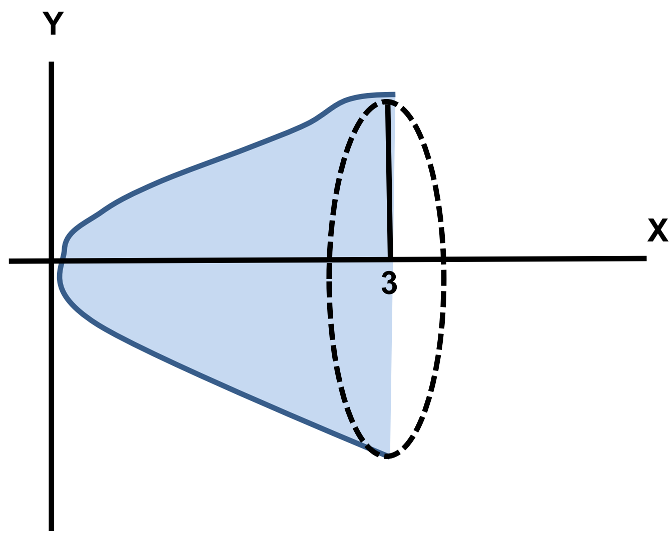
$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx=\pi\int_a^b[y]^2dx \text{ y } V=\pi\int_a^b[g(x)]^2dx=\pi\int_a^b[x]^2dx \text{ (ver graficas)}$$



<u>Ejemplo:</u> Hallar el volumen de sólido de revolución de la parábola $y = 3\sqrt{3x}$ y la recta $x = 3$

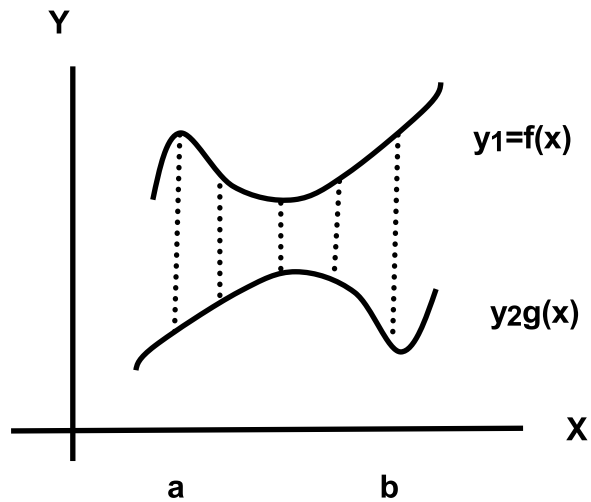
<u>Solución:</u> sustituyendo la función en la fórmula $\pi\int_a^b [y]^2 dx$ y aplicando la tabla de integración se tiene: $V=9\pi\int_0^3 x\,dx \Rightarrow V\frac{1}{2}\pi x^2\Big|_0^3 = \Rightarrow$

$V=\frac{27}{2}\pi$



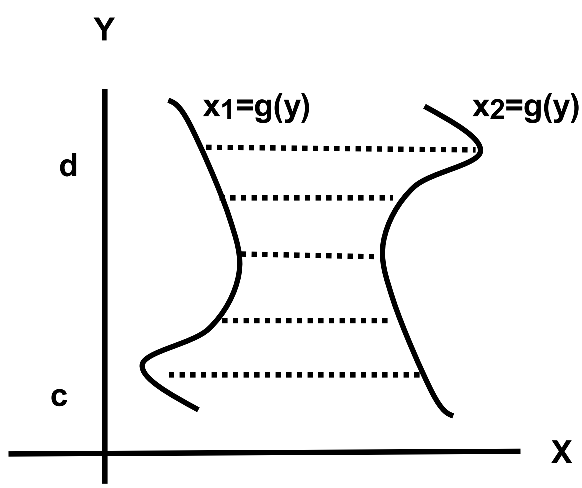
<u>Definición 5:</u> Supongamos ahora que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $x \in [a, b]$ y las funciones $y_1=f(x)$ e $y_2=g(x)$ están entre las rectas $x=a$ e $y=b$, entonces el volumen del solido de revolución se obtiene al girar esta región sobre el eje X se obtiene la fórmula: (Fórmula de la Arandela)

$$V = \pi\int_a^b \left[[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right] dx = \pi\int_a^b \left[[y_1]^2 - [y_2]^2\right] dx$$



Análogamente $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $x \in [c, d]$ y las funciones $x_1=f(y)$ e $x_2=g(y)$ están entre las rectas y=c y x=d, entonces el volumen del solido de revolución se obtiene al girar esta región sobre el eje Y se obtiene la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b \left[[f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right] dy = \pi \int_a^b \left[x_1^2 - x_2^2 \right]^2 dx$$



Ejemplo: Sea la función $f(x)=4x^2$ entre las rectas x=0 e y=16, hallar el volumen del solido de revolución obtenido al girarlo en torno al eje X

Solución: aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b \left[[f(y)]^2 - [g(y)]^2\right]dy$ se obtiene $V = \pi\int_0^2 \left[[16)]^2 - \left[(4x)^2\right]^2\right]dy \Rightarrow$

$$V = \pi\int_0^2 (216 - 16x^4)dx \Rightarrow V= \pi(256x - \frac{16}{5}x^5)\ |_0^2 \Rightarrow V = \frac{2048}{5}\pi$$

Definición 6: Si ahora se asume que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $x \in [a,b]$, $\forall a \geq 0$, si la región $\Re$ está n l primer cuadrante y entre las curvas y1=f(x) e y2=g(x) entre las rectas x=a y x=b, entonces, el volumen del solido de revolución es obtenido al girar $\Re$ en torno al eje Y está dado por la fórmula:

$V = \pi\int_a^b x[[f(x)] - [g(x)]]dx = \pi\int_a^b x[y_1 - y_2]dx$, análogamente en el eje X la formula viene dada por: $V = 2\pi\int_c^d y[[f(y)] - [g(yx)]]dy = 2\pi\int_a^b y[x_1 - x_2]dy$

Ejemplo: Sea la función $f(x)=x^2$ que está por debajo de la función $g(x)=x^3$, entre las rectas x=0 y x=1. Hallar el volumen cuando se gira la región en torno al eje Y.

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b x[[f(x)] - [g(x)]]dx = \pi\int_a^b x[y_1 - y_2]dx$ se tiene que: $V = 2\pi\int_a^b x[y_1 - y_2]dy$

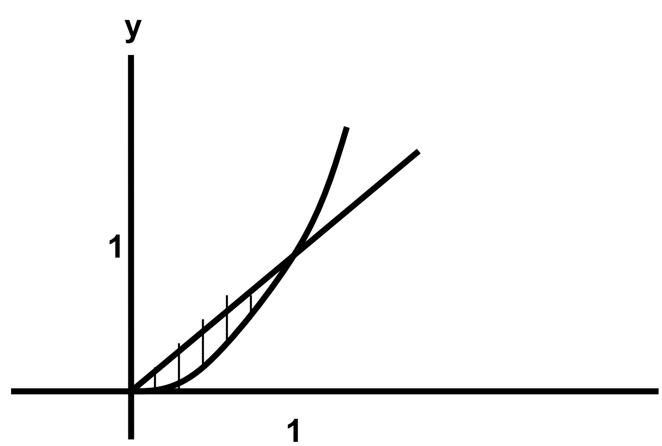
se tiene que; $V = 2\pi\int_0^1 x[x^2 - x^3]dx$, por las tablas de integración se tiene que: $2\pi(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 \Rightarrow V = \frac{\pi}{10}$

EJERCICIOS RESUELTOS

CALCULO DE AREA

1. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$

Solución: Realizando la grafica de las funciones: $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$, tenemos:



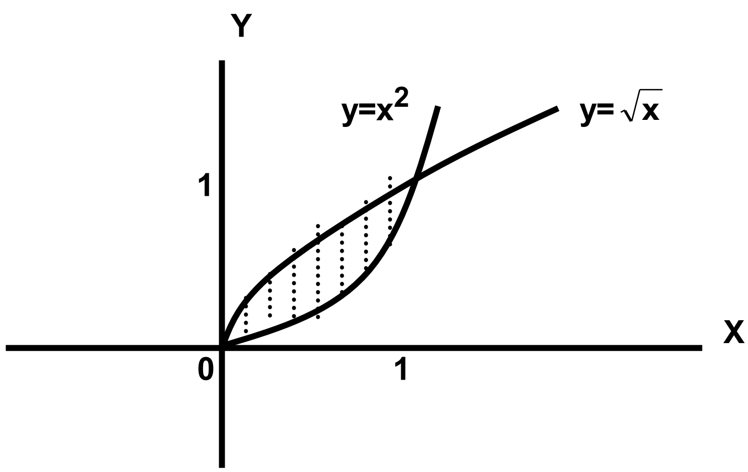
El área buscada es la sombreada en la gráfica, tenemos que hallar los puntos donde las dos líneas se interceptan, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2 - x=0 \Rightarrow x(x - 1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$, para $x=0$, se tiene que $y=0$ y para $x=1$ se tiene que $y=1$, es decir los puntos de intersección son $P(0, 0)$ y $P(1, 1)$, luego el área buscada será integral desde $x=0$ hasta $x=1$, $f(x)$ menos $g(x)$, es decir:

$A=\int_0^1 (x - x^2)dx$, aplicando las tablas de integración se obtiene: $A=\left|\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1$

$\Rightarrow A=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right| \Rightarrow A=\frac{1}{6}$, por lo tanto, el área es de $\frac{1}{6}$ u^2

2. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$

<u>Solución</u>: $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$, Primero buscaremos los puntos de intersecciones de las dos gráficas f(x) y g(x), luego graficamos las dos funciones y por último calculamos la integral definida para obtener el área buscada



Para hallar los puntos de intersección igualamos las dos graficas, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x - x^4=0 \Rightarrow x(1 - x^3)$, de donde x=0 y x=1, sustituyendo estos valores de x en una de las dos gráfica se tiene que: para x=0, y=0 y para x=1, y=1, luego estas gráficas se intersecan en los puntos P(0, 0) y P(1, 1), por lo tanto, el área es: $A=\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$, aplicando las tablas de integración se tiene que el área es: A= $\left|\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1$ $\Rightarrow$ A= $\left|\dfrac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\dfrac{1^3}{3}\right|$ $\Rightarrow$

A= $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ A= $\dfrac{1}{3}$, luego el área buscada es $\dfrac{1}{3}$ u^2

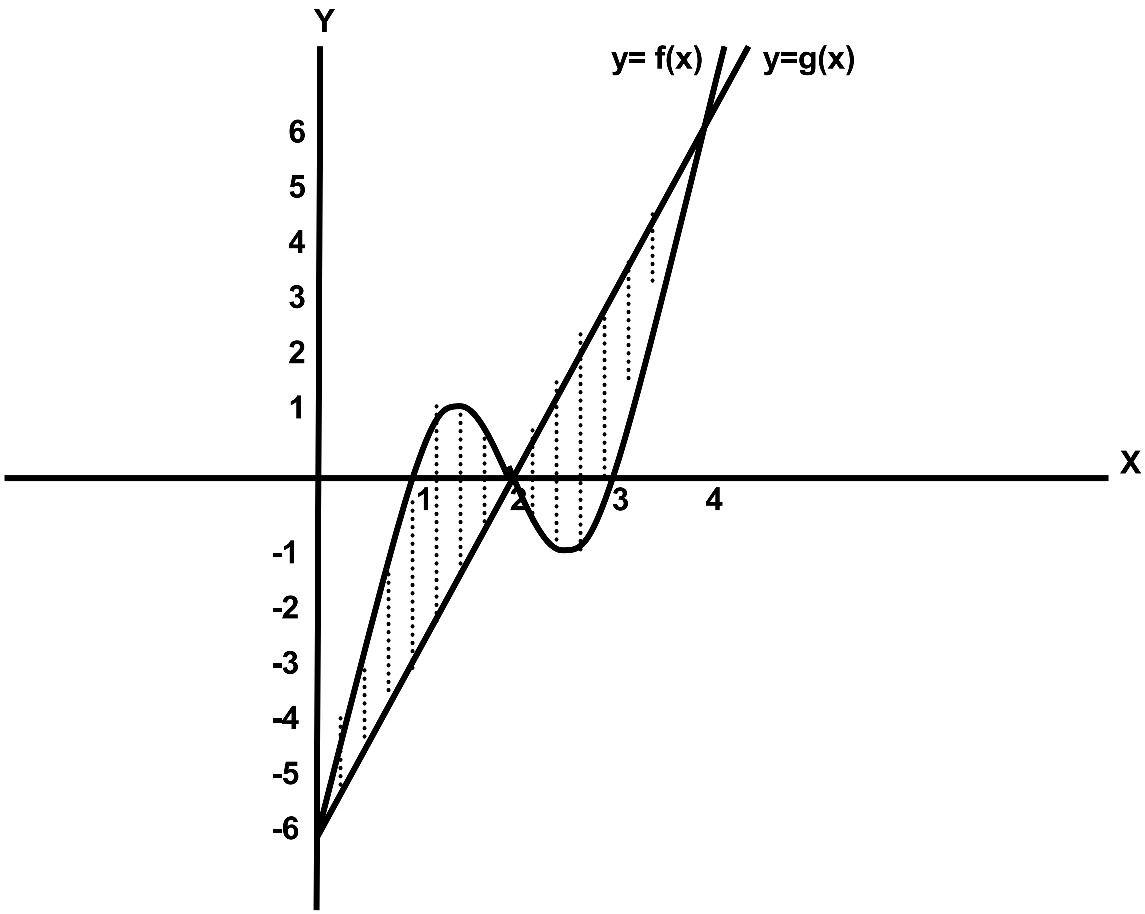
3. Calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)=x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $g(x)=3(x - 2)$

<u>Solución</u>: $f(x)=x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y $g(x)=3(x - 2)$ Lo primero que hacemos es buscar los puntos de intersección entre ambas gráfica, es decir, $f(x)=g(x) \Rightarrow 3x - 6=x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x=0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8)=0$, factorizando se tiene que $x(x^2 - 6x + 8)=x(x - 2)(x - 4)=0$, de donde se tiene que x=0, x=2 y x=4, sustituyendo estos valores en f(x) o en g(x) se obtienen los valores de y en este caso lo sustituiremos en f(x), obteniéndose: para x=0 $f(0)=3(0 -2) \Rightarrow y=-6$, para x=2, $f(2)=3(2 -2) \Rightarrow y=0$ y para x=4 $f(4)=3(4 -2) \Rightarrow y=6$, es decir los puntos de intersección son; P(0, -6), P(2, 0) y P(4, 6), así las gráficas de f(x) y g(x) limitan las regiones en los intervalos [0, 2] y [2, 4]

Para determinar las áreas correspondientes, debemos conocer si $f(x)\geq g(x)$ o $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[0, 2]$ y $\forall x\in[2, 4]$

Como f(x) y g(x) son continuas en estos intervalos, elegimos en cada uno de ellos un punto de prueba, es decir, en el intervalo [0, 2] elegimos al punto de prueba x=1 y evaluando la función se tiene que: $f(1)=1 - 6 + 11 -$

6 $\Rightarrow$ f(1)=0 y g(1)=3(1 – 2) $\Rightarrow$ g(1)=-3, por lo tanto, como f(1)>g(1), se concluye que f(x)≥g(x), ∀∈[0, 2], en el intervalo [2, 4] elegimos como punto de prueba a x=3 y evaluando la función se tiene que: f(3)=27 – 54 + 33 – 6 $\Rightarrow$ f(3)=0 y g(3)=3(3 – 2) $\Rightarrow$ g(1)=3, por lo tanto, como f(3)<g(3), se concluye que g(x)≥f(x), ∀∈[2, 4], ahora realizamos la gráficas de las funciones f(x) y g(x), es decir:

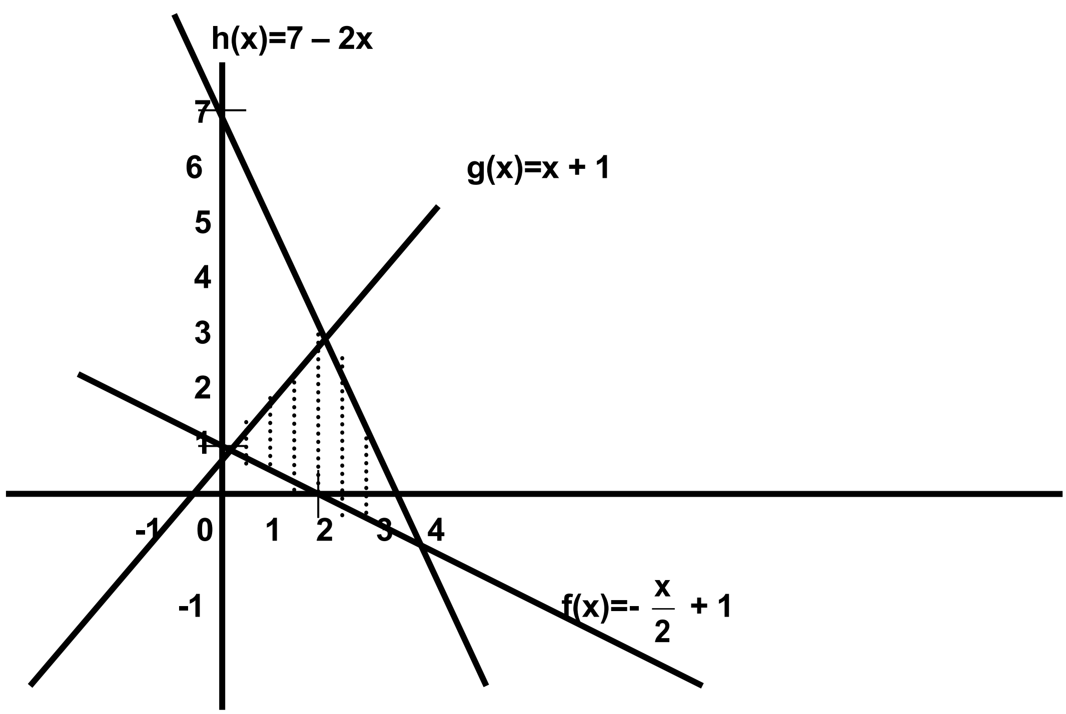


Por último el área se calcula mediante la integral:

$$A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx+\int_2^4\left(-x^3+6x^2-8x\right)dx$$, aplicando las tablas de integración se tiene que: $A=\left|\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right|_0^2+\left|-\frac{x^4}{4}+2x^3-4x^2\right|_2^4 \Rightarrow A=$ $\left|\frac{2^4}{4}-2(2)^3+4(2)^2\right|+\left|-\frac{(4)^4}{4}+2(4)^3-4(4)^2\right|-\left|-\frac{(2)^4}{4}+(2)^3-4(2)^2\right| \Rightarrow A=8\ u^2$, por lo tanto, el área buscada es de 8 unidades cuadradas.

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas $f(x)=-\frac{x}{2}+1$, $g(x)=x+1$ y $h(x)=-2x+7$

<u>Solución</u>: $f(x)=-\frac{x}{2}+1$, $g(x)=x+1$ y $h(x)=-2x+7$, lo primero que vamos hacer es realizar la gráfica de las tres rectas, es decir: f(x) corta al eje Y en el punto P(0, 1) y al eje X en el punto P(2, 0), g(x) corta al eje Y en el punto P(0, 1) y al eje X en el punto P(-1, 0) y la recta h(x) corta al eje Y en el punto P(0, 7) y al eje X en el punto P(3.5, 0), luego la gráfica es:



Como se puede observar en la gráfica la intersección entre f(x) y g(x) está en el punto P (0, 1) y la intersección entre f(x) y h(x) está en el punto P (4, -1) y la intersección entre g(x) y h(x) está en el punto P(2,3), por último calculamos el área por medio de las integrales:

$$A=\int_0^2 \left((x-1)-(-\frac{x}{2}+1) \right) dx + \int_2^4 \left((7-2x)-(-\frac{x}{2}+1) \right) dx \Rightarrow$$

$$A=\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x \right) dx + \int_2^4 \left(6-\frac{3}{2}x) \right) dx$$, por medio de las tablas de integración

se tiene $\Rightarrow A=\left| \frac{3x^2}{4} \right|_0^2 + \left| 6x - \frac{3x^2}{4} \right|_2^4 \Rightarrow A=\left| \frac{3(2)^2}{4} \right| + \left| 6(4) - \frac{3(4)^2}{4} \right| - \left| 6(2) - \frac{3(2)^2}{4} \right|$

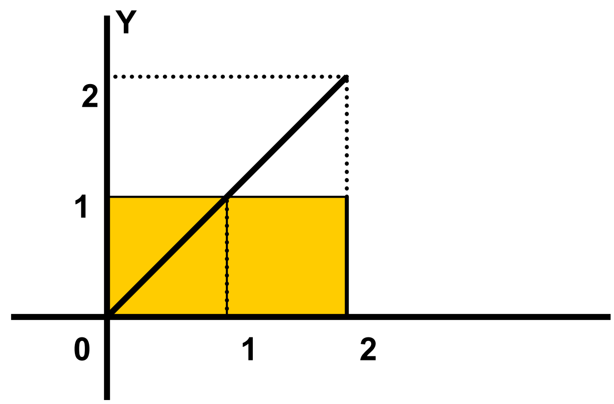
$\Rightarrow$ A=6 Por lo tanto el área buscada es de 6 unidades cuadradas.

VALOR MEDIO

5. Siendo f la función real definida por f(x)=x, encuentre el número c de [0, 2] que satisface para f el teorema del valor medio para las integrales definidas.

<u>Solución:</u> Como f es continua en el intervalo [0, 2], ella debe alcanzar su valor medio en algún numero c de (0, 2) que satisface que f(c)=(0 – 2)= $\int_0^2 f(x)dx$, aplicando la tabla de integración se tiene que $f(c)=\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Rightarrow f(c)=$ $\left[\frac{1}{2}\frac{2^2}{2} \right] \Rightarrow f(c)=1$, geométricamente, este resultado significa que el área del

triángulo rectángulo cuya base y altura es de dos unidades, es igual al área del rectángulo en el que un lado mide dos unidades y el otro lado mide una unidad, ver la gráfica N° 10



6. Pedro Pérez recién ha adquirido una máquina industrial, la cual disminuirá su valor durante los próximos 15 años según el modelo matemático dado por la ecuación f(t)=15000t – 150000, donde t esta dado en años. Sabiendo que Pedro Pérez compró la maquinaría en 1000000 $, determine su valor promedio durante el período de 15 años.

<u>Solución:</u> El valor de la máquina en función del tiempo está dado por la ecuación: f(t)= $\int(15000 - 150000)dt$, por medio de la tabla de integración se tiene que f(t)=7500t^2 – 150000t + C, como μ(0)=1000000, entonces tenemos que C=1000000, por lo tanto, f(t)= 7500t^2 – 150000t + 1000000, luego el valor promedio de la máquina, en el período de 15 años, lo obtendremos apoyándonos en la definición del valor medio, es decir, μ(t)=

$\frac{1}{15-0}\int_0^{15}(7500t^2 - 150000t + 10000009)dt$, aplicando las tablas de integración se tiene que $\mu(t)=\frac{1}{15}\left[2500t^3 - 75000t^2 + 1000000t\right]_0^{15} \Rightarrow \mu(t)=$ $\frac{1}{15}\left[2500(15)^3 - 75000(15)^2 + 1000000(15)\right] \Rightarrow \mu(t)=437500$, es decirle valor promedio de la máquina trascurrido 15 años es de 437500 $

7. Hallar la longitud de arco de la circunferencia en el origen de radio 2

Solución: La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2=4$, luego la derivada de esta función es: $y'=-\frac{x}{y}$ sustituyendo en la fórmula de longitud de arco se tiene: $l=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx \Rightarrow l=\int_0^2\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx \Rightarrow l=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx \Rightarrow 2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Por las tablas de integración se tiene: $l = 2sen^{-1}\frac{1}{2}x\ \Big|_0^2 \Rightarrow y = \pi$

8. Hallar la longitud de arco de la función $x=5\sqrt{(y-3)^3}$ en el intervalo $x\in[2, 4]$

Solución: Derivando la función $x=5(y-3)^{\frac{3}{2}}$ en función de y, se tiene $\frac{dx}{dy}=\frac{15}{2}(y-3)^{\frac{1}{2}}$, aplicando la fórmula $L=\int_\alpha^b\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy \Rightarrow$

$L=\int_2^4\sqrt{1+(\frac{15}{2}(y-3)^{\frac{1}{2}})^2}dy \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{1+\frac{225}{4}(y-3)}dy, \Rightarrow L=\frac{1}{2}\int_2^4\sqrt{225y-221}dy,$

por la tabla de integración nos resulta: $L=\frac{2}{750}\left[\sqrt{(225y-221)^3}\right]_2^4 \Rightarrow$

$L=\frac{2}{750}\left[\sqrt{(225(4)-221)^3}-\sqrt{(225(2)-221)^3}\right] \Rightarrow L=7.94$

9. Hallar la longitud de arco de la función $x^4 - 24xy + 48=0$ en el intervalo $x\in[2, 4]$

Solución: Despejando y, tenemos: $y=\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{x}$; derivando esta función se tiene: aplicando la fórmula: $L=\int_\alpha^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dy \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{1+(\frac{1}{8}x^2-\frac{2}{x^2})^2}dx \Rightarrow$

$L=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{2}+\frac{4}{x^4}}dx, \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{(\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{x^2})^2}dx, \Rightarrow L=\int_2^4\sqrt{\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{x^2}}dx,$

Po r la tabla de integración tenemos: $L=\left[\frac{1}{8}x^2-\frac{2}{x^2}\right]_2^4 \Rightarrow L=\left[\frac{64}{8}-\frac{1}{2}-\frac{8}{24}-1\right]$

$\Rightarrow L=\frac{17}{8}$

10. Hallar la longitud de arco de la función $y=\operatorname{senh}\frac{x}{2}$ en el intervalo $x\in[0, 1]$

Solución: Derivando la función $y=\operatorname{senh} y=\operatorname{senh}\frac{x}{2}$ con respecto a x se tiene: $y`=\cosh\frac{x}{2}$ sustituyendo en la fórmula: $L=\int_\alpha^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$ se tiene que $L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{2}\cosh\frac{x}{2})^2}dx \Rightarrow$ $L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2}dx \Rightarrow$

$L=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{1}{4}(e^x-2+e^{--x})^2}dx \Rightarrow$ $L=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{(e^x-e^{--x})^2}dx \Rightarrow$

$L=\frac{1}{2}\int_0^1(e^x-e^{--x})dx \Rightarrow$ $L=\int_0^1(\cosh x dx \Rightarrow$

$L=\operatorname{senh}x_0^1 \Rightarrow \operatorname{senh}1-\operatorname{senh}0 \Rightarrow e+e^{-1}$

11. Hallar la longitud de arco de la asteroide $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=\sqrt{a^3}$ en el intervalo $x\in[0, 4]$

Solución: Hallado la derivada de la función $\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=\sqrt{a^3}$ se tiene:

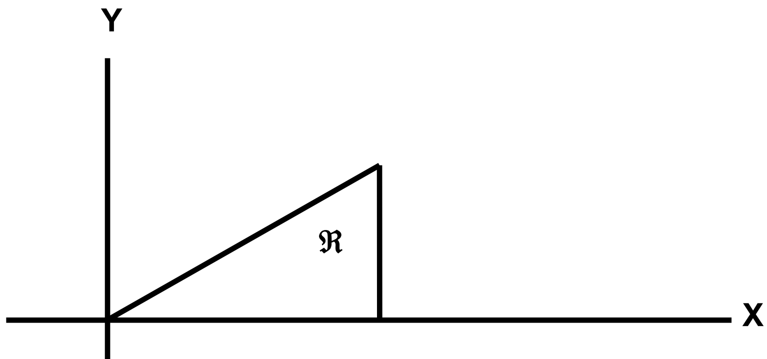
$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ como la curva es simétrica tomaremos una cuarta parte de ella y el resultado lo multiplicamos por 4, por lo tanto la longitud de arco será:

$I=4\int_0^4\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx \Rightarrow I=4a^{\frac{2}{3}}\int_0^4\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$, por la tabla de integración se tiene : $I=\frac{3}{2}a$

VOLUMEN

12. Hallar el volumen del cono de 10 cm. de altura y 32cm. de radio.

Solución: El cono lo genera la región que se encuentra en la recta $y=\frac{16}{5}$ y el eje X, entre x=0 y x=10, al girar en torno al eje X, aplicando la fórmula: $V=\pi\int_a^b[y]^2dx \Rightarrow$ $V=\frac{1024}{256}\pi\int_0^{10}[x]^2dx$, por las tablas de integración se tiene que: $V=\frac{1024}{256}\pi x^3\Big|_0^{10} \Rightarrow V=\frac{4000}{768}\pi$



13. Sea ℜ la región comprendida entre el eje X, la curva x=2

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b [y]^2 dx$ se tiene: $V = \pi\int_0^2 [x^3]^2 dx$, por la tabla de integración se tiene que: $V = \frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{128}{7}\pi$

14. Hallar el volumen del solido engendrado haciendo girar alrededor del eje de las X la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b [y]^2 dx$, donde $V= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces se tiene que: $V = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a \left[\sqrt{a^2 - x^2}\right]^2 dx$ por la tabla de integración se tiene que: $V = 2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2 \Rightarrow V = \frac{4}{3}ab^2\pi$

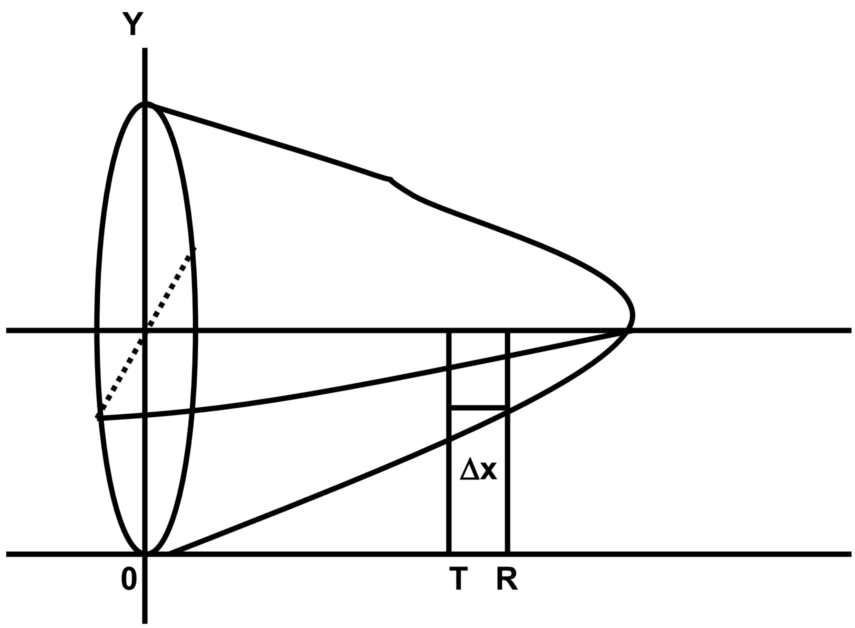
15. Hallar el volumen engendrado por la superficie limitada por la parábola cubica $ay^2=x^3$ en el eje de las Y y la recta AB (y=a) y gira alrededor de AB.

Solución: Aplicando la fórmula:

$V = \pi\int_a^b [y]^2 dx$, se tiene que: $V = \pi\int_0^a [a-y]^2 dx \Rightarrow V = \pi\int_0^a [a^2 - 2ay + y^2]^2 dx$,

como $y=\frac{\sqrt{a}}{a}x^{\frac{3}{2}}$ tenemos que: $V = \pi\int_0^a \left[a^2 - 2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a}x^3\right]dx \Rightarrow$ por la tabla

de integración se tiene que: $V = \pi(a^2x + \frac{2}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4a}x^3)\Big|_0^a \Rightarrow V = \frac{15}{4}\pi$



16. Hallar el volumen del toro, engendrado al girar el circulo $x^2(y - b)^2 \leq a^2$

Solución: Aplicando la fórmula:

$V = \pi \int_{a}^{b} x\left[y_1 - y_2\right]dx$, donde $y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ tiene que:

$V = \pi \int_{-a}^{a} x\left[b - \sqrt{a^2 - x^2} - b + \sqrt{a^2 - x^2}\right]dx \Rightarrow V = 4ab\pi \int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}dx$, por la tabla de integración se tiene que: $V = \left[4b\pi b\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right]\Big|_{-a}^{a} \Rightarrow$

$V = 2a^2b\pi^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

CALCULO DE AREA

1. Calcular el área de las regiones limitadas por las gráficas de las funciones definidas por:

a. $f(x)=\ln x$, el eje x y la recta $x=e$

b. $f(x)=4x - x^2$, y el eje de las abscisas

c. $f(x)=x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, la recta $x=4$ y el eje y

d. $f(x)=4 - x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$

e. $y^3=x$, y las rectas $y=1$ y $x=8$

f. $f(x)=x + x^2 + x^3$, los ejes de coordenadas y la recta $x=1$

g. $f(x)=4x(x - 1)(x - 2)$, el eje x y la recta $x=-1$

h. $f(x)=\dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

i. $f(x)=3x^2$ y $g(x)=1$, en $[1, 2]$

j. $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, el eje x y la recta $x=2$

k. $y^2=2px$ y $x^2=2py$

l. $f(x)=(x - 1)(x - 2)$ y $g(x)=(1 + x)(x + 2)$

m. $f(x)=3x^2$, $y=6$ y el eje y

n. $f(x)=x^2$, $y=\dfrac{x^2}{2}$ y la recta $y=2x$

o. $f(x)=x^3$, $y=8$ y el eje y

p. $xy=a^2$ y el eje x, en [a, 2a]

q. $f(x)=\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=4-\frac{2}{3}x^2$

r. $f(x)=-x^2+4x-3$ y las rectas tangentes trazadas a la gráfica de f en los puntos P(0, -3) y P(3, 0)

s. $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y la recta $x=1$

t. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}$

u. $f(x)=\ln x$, las rectas trazadas en $y=\ln a$ e $\ln b$ y el eje y

v. $f(x)=x^2+2x+3$ y $g(x)=x+5$

w. $f(x)=3+x-x^2$ y $g(x)=2x-3$ en [-2, 4]

x. $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ y $h(x)=2x$

y. $f(x)=x+6$, $g(x)x3$ y $h(x)=-\frac{x}{2}$

z. $f(x)=x$, $g(x)=3x$ y $h(x)=4-x$

aa. $y=x^3$, la recta $y=8$ y el eje OY

ab. De las dos partes en que la parábola $y^2=2x$ divide al círculo $x^2+y^2=8$

ac. Por la cisoide $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y su asíntota $x=2a$ $(a>0)$

ad. Comprendida entre la curva de Agnesi $y = \dfrac{a^2}{x^2 + a^2}$ y el eje de las abscisas

ae. De la figura comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$, el eje OX y la recta x=1 (x>1)

af. De la región limitadas por las curvas $y=8 + 4x - x^2$ e $y=x^2 - 2x$

ag. De la figura limitada por la parábola $y=2x - x^2$ y la línea recta $y=3 - 2x$

ah. De la figura limitada por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la línea recta x=1

VALOR PROMEDIO

5. Hallar el valor promedio de las siguientes funciones sobre el intervalo dado:

a. $f(x)=x^2$, en el intervalo [0, 4]

b. $f(x)=3x - 1$, en el intervalo [1, 2]

c. $f(x)=2 - 3x^2$, en el intervalo [-1, 2]

d. $f(x)=x^2 + x + 1$, en el intervalo [1, 3]

e. $f(x)=4x^3$, en el intervalo [-2, 2]

f. $f(x)=\sqrt{x}$, en el intervalo [1, 9]

g. $f(x)=x\sqrt{x^2 - 9}$, en el intervalo [0, 4]

h. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, en el intervalo [2, 4]

i. $f(x)=|x|$, en el intervalo [3, 5]

j. $\begin{cases} -x-2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

k. $\begin{cases} x+3 & \text{si } x<0 \\ x-3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

l. $\begin{cases} x+4 & \text{si } x<0 \\ x-4 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

m. $\begin{cases} x+6 & \text{si } z<0 \\ -x-6 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

6. Represente gráficamente todas las funciones anteriores e intérprete geométricamente los valores medios obtenidos.

7. Encuentre el valor medio, en el intervalo indicado en cada caso, de las funciones definidas por:

a. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en el intervalo [1, 4]

b. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ en el intervalo $[1, \dfrac{3}{2}3]$

8. Encuentre el valor de a, para el cual el valor medio de la función determinada por f(x)=lnx en el intervalo [1, a], es igual a la razón promedio de cambio de esa función en el intervalo indicado

9. **Suponiendo ahora que, después de producir 30 unidades, la función de aprendizaje está definida por: $f(x)=1272x^{-0.25}$, determine el número de horas necesarias para producir 50 unidades adicionales.**

LONGITUD DE ARCO

10. **Hallar la longitud de arco de las funciones:**

a. $y^3=8x^2$ **en el intervalo** $x\in[1, 8]$

b. $6xy=x^4 + 3$ **en el intervalo** $x\in[1, 2]$

c. $27y^2=4(x -2)$ **en el intervalo** $x\in[2,\ 6\sqrt{2}\,]$

d. $y=\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ \ln y$ **en el intervalo** $x\in[1, e]$

e. $y=\ln\cos x$ **en el intervalo** $x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

f. $y=x^3$, **en el intervalo** $x\in[1, 8]$

g. $x^2 - 6x + y=0$ y $x^2 - 2x - y=0$ **en el intervalo** $x\in[3, 7]$

h. $y=2x - x^2$, **en el intervalo** $x\in[0, 2]$

i. $y=\tan x$, **en el intervalo** $x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

j. $y=\sqrt[3]{x}$, **en el intervalo** $x\in[1, 2]$

k. $y=\cos x$, **en el intervalo** $x\in[0, \pi]$

l. $y=x\,\mathrm{sen}\,x$, **en el intervalo** $x\in[0, \pi]$

m. $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

n. $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}$, en el intervalo $x\in[1, 3]$

o. $y=\ln\sec x$, en el intervalo $x\in\left[\frac{\pi}{3}, \ln 2\right]$

p. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, en el intervalo $x\in[0, \ln 3]$

q. $y=e^{y}=\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ en el intervalo $x\in[a, b]$

r. $y=a\operatorname{coh}\frac{x}{a}$, en el intervalo $x\in[0, a]$

s. $y=e^{x}$, en el intervalo $x\in[1, e]$

t. $y=\ln x$, en el intervalo $x\in[\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

u. $y=\operatorname{sen}\text{-}1(e^{-x})$, en el intervalo $x\in[0, 1]$

v. $x=\ln\sec y$, en el intervalo $x\in\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

w. $x=\frac{1}{4}y^{2}-\frac{1}{2}\ln y$, en el intervalo $x\in[1, e]$

x. $9ay^{2}=x(x-3a)^{2}$, en la parte cerrada de esta.

y. $y=\ln(\operatorname{ctgh}\frac{x}{2})$, en el intervalo $x\in[a, b]$

11. **Se desea tender una cuerda entre dos postes distantes 20 mts. Si la cuerda toma la forma de la catenaria, $y = 4\left(e^{\frac{x}{30}} - e^{-\frac{x}{30}}\right)$ x∈{-10, 10}, calcule la longitud de la cuerda.**

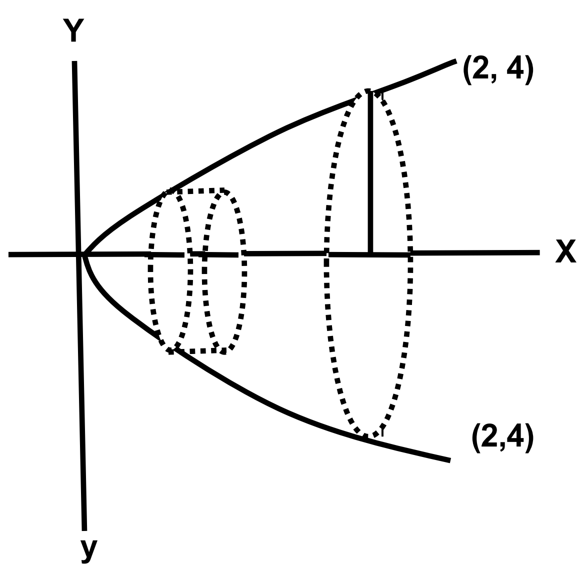
12. **Al patear un balón de fútbol, este sigue una trayectoria de $y=\frac{1}{15}x(60 - x)$ mts. Calcule la longitud de arco si el balón permanece 4 segundos en el aire.**

<u>VOLUMEN DE REVOLUCIÓN DE SOLIDOS</u>

13. **Considerar la región $\Re$ acotada por la parábola $y^2=8x$ y la recta x=2 (ver figura)**

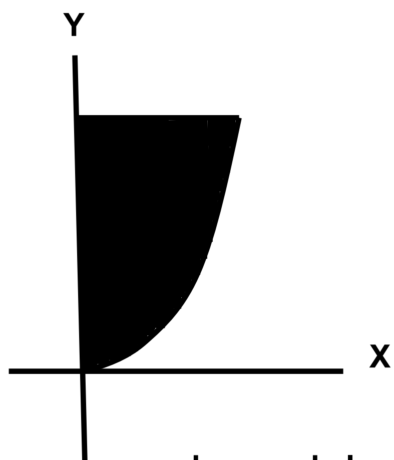
a. **Hallar el volumen del sólido generado por $\Re$ al girar en torno del eje Y**

b. **Hallar el volumen del sólido generado por $\Re$ al girar en torno a la recta x=2**



14. Hallar el volumen del solido generado por la región que está entre el eje X y la parábola $y=4 - x^2$ al girar en torno de la recta $y=6$

15. Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región acotada por $y=x^2$, $x=0$ e $y=16$, en torno a $y=16$, utilizar la fórmula del disco.



16. Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región dentro de la curva $y^2=x^4(1 - x^2)$, en torno al eje X, utilizar la fórmula del disco

17. Hallar el volumen generado cuando la región gira al torno de la región dentro de la parábola $x=9 - y^2$ y entre el eje Y, en torno al eje Y, utilizar la fórmula del disco.

18. Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^3$, $x=0$, e $y=8$, en torno de $x=2$, utilizar la fórmula de arandela.

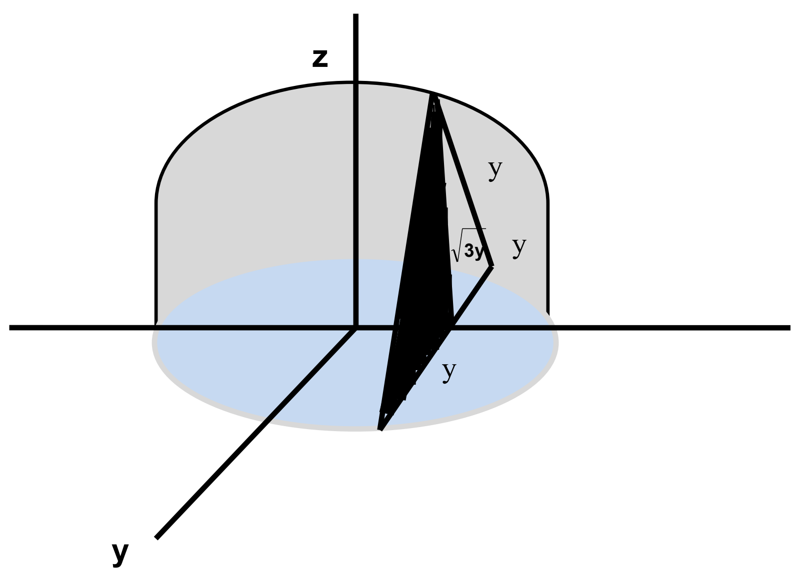
19. Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $x=9 - y^2$, $y=x - 7$, en torno de $x=4$, utilizar la fórmula de arandela.

20. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^3$, $y=4x-x^2$, en torno de $x=5$, utilizar la fórmula de capas cilíndricas.**

21. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=e^{x^2}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$, en torno al eje Y.**

22. **Hallar el volumen del sólido generado por el giro de la región acotada por $y=x^2$, $x=y^2$, en torno al eje X.**

23. **Un sólido tiene una base circular con radio de cuatro unidades, hallar el volumen del solido si todo plano perpendicular a un diámetro fijo (el eje de las X de la figura) es: a. un semicírculo, b. un cuadrado, c. un triangulo rectángulo isósceles con hipotenusa en el plano de la base.**



24. La base de un sólido es el circulo $x^2 + y^2=16x$, y toda sección plana circular al eje X es un rectángulo cuya altura es el doble de la distancia del plano de la sección al origen, hallar el volumen.

25. Se perfora un hoyo con radio de una unidad en una esfera cuyo radio equivale a tres unidades; el eje del hoyo es el diámetro de la esfera. Hallar el volumen de la parte restante de la esfera.

26. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del eje 0X, de la superficie limitada por el eje 0X y la parábola $y=ax - x^2$ $(a>0)$

27. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje 0X, la curva $y=\text{sen}2x$, en el intervalo $x\in[0, \pi]$

28. Hallar el volumen de los cuerpos engendrado al girar las superficies limitadas por las líneas y=ex, x=0, e y=0 alrededor: a. del eje 0X, b. del eje 0Y.

29. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor de la recta $y=-p$, la figura limitada por la parábola $y^2=2px$ y la recta $x=\frac{p}{2}$

30. Hallar el volumen del cuerpo que engendra al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ alrededor de su asíntota $x=2a$.

31. Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje 0Y, la parte de la parábola $y^2=4ax$, que intercepta la recta $x=a$

32. **Demostrar, que el volumen de la parte del cuerpo de revolución, engendrado al girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor del eje 0X, que intercepta el plano x=2a, es igual al de una esfera de radio a.**
33. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar, alrededor del eje 0X, la superficie comprendida entre las parábolas $y=x^2$ e $y = \sqrt{x}$**
34. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por la parábola semicùbica $y^2=x^3$, el eje 0X y la recta x=1, alrededor del eje 0X.**
35. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la astroide $x=a\cos^3 t$, $y=b\,\text{sen}^3 t$ alrededor del eje 0X.**
36. **Sobre las cuerdas de la astroide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, paralelas al eje 0X, sean construidos unos cuadrados, cuyos lados son iguales a las longitudes de las cuerdas y los planos que se encuentran son perpendiculares al plano X0Y, hallar el volumen del cuerpo que forman estos cuadrados.**
37. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y=x^2$, y=0, x=2, alrededor del eje X.**
38. **Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2 - Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2x, y=2 y, x=0 alrededor de la recta x=3.**

39. Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y=2, x=0, alrededor del eje Y.

40. Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=2x, y=2, y x=0, alrededor del eje Y.

41. Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por y=cosx, y=0, 01.

42. Calcule el volumen del solido formado al rotar la región limitada por $y=x^3$, y=02, y x=-1, alrededor del eje X.

43. Sea $\Re$ la región limitada por y=x, y=-x y x=1. Calcule el volumen del solido formado cuando $\Re$ gira alrededor de la recta x=-1
Suponga que el cuadrado definido por -1≤x≤1 y -1≤x≤1 gira alrededor del eje Y. Demuestre que el volumen del solido resultante es 2π.

44. Suponga que el triangulo cuyos vértices son (-1, -1); (0, 1) y (1, -1) gira alrededor del eje Y. Demuestre que el volumen del solido resultante es $2\frac{2}{3}\pi$.

45. Compruebe la fórmula para hallar el volumen de una esfera girando el circulo $x^2 - y^2=a^2$ alrededor del eje Y.

46. La base de un sólido tiene forma de una elipse con eje mayor de 20 unidades y eje mayor de 10 unidades. Hallar el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje es: un triangulo isósceles de 10 unidades de altura.

47. Un cilindro de 5 unidades de radio corta una cuña mediante dos planos: uno es perpendicular al eje del cilindro, y el otro pasa por un diámetro de la sección hecha en el primer plano y forma con este un ángulo de 45º. Hallar el volumen de la cuña.

48. Un triángulo equilátero variable se mueve de manera que su plano se mantiene perpendicular al eje de las X, mientras que los vértices de su base se apoya sobre las curvas $y^2=16ax$ e $y^2=4ax$, situadas por encima del eje de las X. hallar el volumen que el triangulo engendra cuando se mueve del origen a los puntos cuya abscisa es a.

49. Dada la elipse $9x^2 + 25y^2=225$, alrededor de esta curva se forma un sólido de manera que todas las secciones planas perpendiculares en el eje de las X son elipses cuyos focos están sobre la elipse dada. Los ejes mayor y menor son proporcionales a los de la elipse dada. Hallar el volumen del sólido.

50. La superficie limitada por la curva $y^2=(x + 4)^2$ y su tangente en el punto (12, 16) giran alrededor de las X. Hallar el volumen engendrado.

51. La sección de cierto solido cortado por un plano perpendicular al eje X es un cuadrado con extremos de una diagonal en las parábolas $y^2=4x$, $x^2=4y$, hallar el volumen.

CAPÍTULO VII

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

En Este Capítulo se Estudiara: FUNCIONES REALS DE VARIAS VARIABLES: Definición de Funciones de Varias Variables, Campos Escalares, Operaciones con Funciones, Grafico de un Campo Escalar, Límite de Funciones, Propiedades de los Límites, Limites Direccionales, Limites Iterados, Funciones Continuas, Funciones Discontinuas, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

<u>Definición 1:</u> Una magnitud variable z se denomina ***<u>función uniforme</u>*** de dos variables x e y, si a cada conjunto de valores de estos (x, y) del campo dado, corresponde un valor único y determinado de z. las variables x e y se llaman ***<u>argumentos o variables independientes</u>*** y la dependencia funcional se representa por:

$Z=f(x, y)$; $z=F(x, y)$, $f(x, y, z)=0$, etc.

Las funciones de tres o más variables se definen de forma análogo.

<u>Definición 2:</u> Por ***<u>campo de existencia o dominio</u>*** de la función $z=f(x, y)$ se entiende a el conjunto de puntos (x, y) del plano XOY que determinan la función dada, e.i, para los que la función toma valores reales determinados. El campo de existencia de la función representa una parte finita o infinita del plano XOY, limitado por una o varias curvas.

<u>Definición 3:</u> Sea f una función de varias variables reales en $\Re^n$, con n>1, la cual se define como;

$$f: W \to \Re,\ W \subseteq \Re^n$$

$$\bar{x} \to f(\bar{x})$$

Se dice que f es una función ya que $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ y es real porque $f(\bar{x}) \in \Re$

<u>Ejemplo:</u> $\| \| / \Re^n \to \Re$, Norma Euclidea:

$$\bar{x} \to \| \bar{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$\| \|_S / \Re^n \to \Re$, Norma del Supremo

$$\bar{x} \to \| \bar{x} \|_S = \sup\{|xi| / 1 \le i \le n\}$$

<u>Definición 4:</u> Se define la Función Proyección:

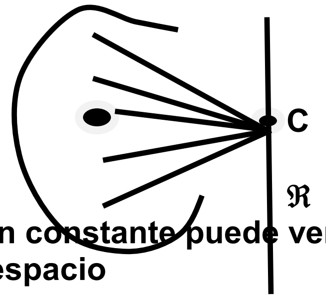
$$Pi: \Re^n \to \Re,\ \forall i \in [1, n]$$

$$\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \to xi$$

<u>Definición 5:</u> Se define la función constante:

$C: \Re^n \rightarrow \Re$

$\Re^n \rightarrow C$



La función constante puede verse como un canal en el cual se vierte todo el espacio

<u>Definición 6:</u> Sea $f: W \rightarrow \Re$, $W \subseteq \Re^n$ y $g: W \rightarrow \Re$, $W \subseteq \Re^n$ dos funciones de $\Re^n$ entonces se definen:

1. $(f + g)_x = f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \wedge W_f \cap W_g \rightarrow \Re$

2. $(f - g)_x = f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \wedge W_f \cap W_g \rightarrow \Re$

3. $(f_x g)_x = f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \wedge W_f \cap W_g \rightarrow \Re$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \wedge \; W_{\frac{f}{g}} = \left(\bar{x} \varepsilon Wf \cap Wg / g(\bar{x}) \neq (0,0,....0)\right)$

5. Si $g: W_g \rightarrow \Re$, donde $W_h \subseteq \Re$, es una función, se define ***<u>la composición</u>*** (gof) $(gof)_{\bar{x}} : W_{gof} \rightarrow \Re / \; (gof)_{\bar{x}} = g[f(\bar{x})]$,

donde $W_{gof} = \{x \in W_f / f(x) \in W_g\}$

<u>Definición 7:</u> Se definen las ***<u>Funciones Polinomiales</u>*** a aquellas funciones que se obtienen al combinar la función constante y la función proyección, aplicando para ello las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación un número finito de veces.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(x, y, z) = 5x^2y^3 - 3xy^2z + xz^2$, se define como una función polinomial ya que $f(x, y, z) = 5P_1P_1P_2P_2P_2 - 3P_1P_2P_2P_3 + P_1P_3P_3$ donde los coeficientes 5, -3 y 2 son funciones constantes.

__Definición 8:__ Se define la ***__Función Racional__*** como aquella función que se obtiene del cociente de funciones polinomiales combinados con la función constante y se denota por: $C(\bar{x}) = \frac{N(\bar{x})}{D(\bar{x})}$, es decir,

$W_C=\{\bar{x} \in \Re n/D(x)\neq 0\}$

__Definición 9:__ Se definen las ***__Funciones Algebraicas__*** como aquellas funciones que se pueden escribir como sumas, restas, multiplicaciones, cocientes, potencias y radicales de funciones polinomiales.

__Definición 10:__ Se definen las ***__Funciones Trascendentales__*** como todas aquellas funciones que no son algebraicas, entre ellas tenemos: las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, circulares, e hiperbólicas.

__Ejemplo:__ La función dada por: $f(x, y)=\text{sen}(x + y)e^{x + y}$, define una función trascendental

__Definición 11:__ Sea f un campo escalar de dominio W. definimos el ***__Grafico de f__*** por el conjunto de puntos G definidos por: $G=\{(x, y)/x\in W\}\subseteq\Re^{n+1}$ y es posible representar G sin $+ 1\leq 3$, e.i. $n\leq 2$.

En consecuencia solo se puede representar un grafico de una o dos variables.

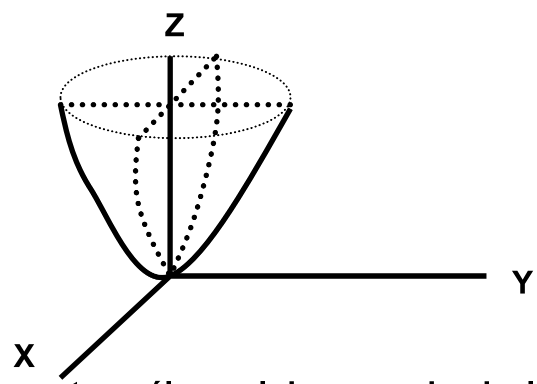
Si $f: W \rightarrow \Re$ con $W\subseteq\Re$, su grafico es el conjunto $G=\{(x, y)/x\in W, y=f(x)\subseteq\Re^2$ que en general es una curva en el plano.

Si $f: W \rightarrow \Re$ con $W\subseteq\Re$, su grafico es el conjunto $G=\{(x, y, z)\in\Re^3/(x, y)/x\in W, z=f(x,y)\}\subseteq\Re^3$, que en general es una superficie en el espacio que en general es una curva en el plano.

__Definición 12:__ Una ***__Curva de nivel k__*** está dada por la intersección del grafico G de f con el plano z=k, proyectada sobre el plano XY, e.i.es el conjunto: $\{(x, y)\in W/f(x, y)=k\}$, si k=0 la curva correspondiente se llama ***__traza__***.

En general, el conocer las curvas de nivel no basta para representar la grafica de una función G. la superficie $z=x^2 + y^2$, tiene curvas de nivel $x^2 + y^2=k$ t, que son circunferencias de centro en el origen. Una forma sencilla de distinguir los dos gráficos es obtener intersecciones de G. con planos paralelos a los otros planos coordenados (plano XZ, plano YZ). Nótese que lo que estamos hallando es otras curvas de nivel vista de lados.

A continuación se propone graficar una superficie para lo cual se sigue un procedimiento bastante general, que permite obtener información adicional, además de las curvas de nivel.



Definición 13: Un concepto análogo al de curva de nivel surge para funciones de tres variables, se trata del concepto de *nivel de frontera f.* que no es más que un conjunto de puntos del dominio de F, e.i. $\{(x, y)\in Wf/F(x, y, z\}=k$.

Si $u=f(x, y, z)$ la ecuación $f(x, y, z)=k$, $k\in\Re$ (k fijo), defina a las superficie de nivel de la frontera f.

Ejemplo: Sea $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Si hacemos u=k, $x^2+y^2+z^2=k^2$ son las superficies de nivel que representan esferas con centro en el origen y radio $|k|$.

Es bueno observar que si $z=f(x, y)$ define una superficie, esta puede expresarse como una superficie de nivel cero haciendo:

F(x, y, z)=f(x, y)=0

Representar una superficie de nivel cero, es el mismo problema de graficar z=(x, y), de manera que el procedimiento a seguir para representarlo es general.

Desde el punto de vista práctico es conveniente asociar el problema de graficar superficies al de representar la ecuación F(x,y,z)≠0.

<u>Definición 14:</u> un <u>*Cilindro*</u> es una superficie generada por una recta que se nueve lo largo de una curva dada, de manera que se mantiene paralela a la recta fija que no está en el plano de la curva. La recta que se mueve es una <u>*generatriz*</u> del cilindro y la curva se llama <u>*directriz.*</u>

<u>Teorema 1:</u> el grafico de una ecuación F(x, y)=k, en $\Re 3$, es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje z y la directriz es una curva en el plano XY.

<u>Definición 15:</u> Sea $f:\mu \to \Re^n$, $\mu \subseteq \Re^n$ y sea $\bar{x}_0$ un punto de acumulación de μ, decimos que el número L recibe el nombre de <u>*límite de f en*</u> $\bar{x}_0$ si $(\forall \varepsilon>0), (\exists \delta>0)/(\forall x \in \mu \wedge 0<\| \bar{x} - \bar{x}_0 \|<\delta \to |f(\bar{x}) - L|<\varepsilon)$ y se denota por $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y) = L$

<u>Propiedades:</u> Sea $k \in \Re$, $L_1 = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y)$ $L_2 = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(x,y)$

1. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} k = k$

2. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} kf(x,y) = k \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y) = kL_1$

3. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y) \pm \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(x,y) = L_1 \pm L_2$

4. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(x,y) \times g(x,y)] = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y) \times \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(x,y) = L_1 \times L_2$

5. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(x,y)/g(x,y)] = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y)/\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(x,y) = L_1/L_2,\ g(x,y) \neq 0$

6. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(x,y)]^n = \left[\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y)\right]^n = [L_1]^n$

7. $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(x,y)]^{g(x,y)} = \left[\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x,y)\right]^{\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(x,y)} = [L_1]^{L_2}$

<u>Ejemplo:</u> Hallar $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,0)} (x^2 + y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} (x^2 + y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy} \right) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{xy} = 0$

<u>Definición 14:</u> Sea $f:\mu \to \Re^n$, $\mu \subseteq \Re^2$, si $y=h(x)$ es una recta que pasa por el punto $\bar{x}_0$, $x_2=h(x_1)$ e $y=g(x)$ es otra recta que pasa por $x_0=x_2=h(x_1)$ y $\lim\limits_{x \to x_1} f(x,h(x)) \neq \lim\limits_{x \to x_1} f(x,g(x))$, entonces, $\lim\limits_{x \to x_1} f(\bar{x})$ no existe, en caso de la igualdad no nos da ninguna información, a los límites de la desigualdad anterior se les llama ***<u>límites direccionales</u>***

<u>Ejemplo:</u> Estudiar el $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

<u>Solución:</u> Como el Domf=$\Re^2$ – (0, 0)} y el $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,0)} f(x,y) = \dfrac{0}{0}$

consideraremos las rectas que pasan por el punto (0, 0), por ejemplo y=mx, luego, f(x,y)=f(x, mx)= $\dfrac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$, donde vemos que el límite depende de m, ∴, el límite no existe.

Definición 15: Si $\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y)$ y $\psi(y)=\lim\limits_{y\to y_1} f(x,y)$ se definen los limites iterados como: $\lim\limits_{\bar{x}\to(x,y)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_1}\left(\lim\limits_{y\to y_1} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to y_1}\left(\lim\limits_{x\to x_1} f(x,y)\right)$ si φ(x) y ψ(y) existen y son distinto entonces, el limite no existe, si son iguales no se puede decir nada sobre el límite

Ejemplo: Estudiar el límite: $\lim\limits_{\bar{x}\to(0,0)}\dfrac{x^2}{y^2+x^4}$

Solución: Si y≠0 el $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2}{y^2+x^4}\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2}{y^2}\right)=1$

Si x≠0 el $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2}{y^2+x^4}\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^4}\right)=0$

Como los límites son distintos el límite $\lim\limits_{\bar{x}\to(0,0)}\dfrac{x^2}{y^2+x^4}$ no existe

Definición 16: f:$\mu\to\Re^n$, $\mu\subseteq\Re^n$ y sea $\bar{x}_0\in\mu$ un punto de acumulación de μ, decimos que f es ***continua en*** $\bar{x}_0$ si (∀ε>0), (∃δ>0)/(∀x∈μ ∧ 0<‖ $\bar{x}$ - $\bar{x}_0$‖<δ → |f($\bar{x}$) – f($\bar{x}_0$)|<ε) e.i. una función es continua en el punto si cumple con las condiciones siguientes:

1. f($\bar{x}_0$) está definida
2. $\lim\limits_{\bar{x}\to \bar{x}_0} f(\bar{x})$ existe
3. $\lim\limits_{\bar{x}\to \bar{x}_0} f(\bar{x})$ =f($\bar{x}_0$)

La suma, la resta la multiplicación, la división y composición de funciones continuas resultan funciones continuas.

<u>Definición 17:</u> Decimos que f es discontinua en el punto si no se cumple algunas de las condiciones de continuidad mencionadas anteriormente.

Si falla la condición 2, decimos que existe una discontinuidad inevitable, si falla la condición 3 la condición 3 decimos que existe una discontinuidad evitable y la función se redefine dándole el valor a la función el valor al cual tiende el límite, por ejemplo una función es discontinua en, pero el limite tiende a L_1, entonces la función se redefine de la siguiente manera:

$$f(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } \bar{x} \neq \bar{x}_0 \\ L_1 & \text{si } \bar{x} = \bar{x}_0 \end{cases}$$

<u>Ejemplo:</u> Estudiar la función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y)\neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y)=0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u> Domf=$\Re^2$ – {0, 0}, estudiando los límites iterados:

Si $x\neq 0$, $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{xy}{y^2+x^2}\right)=0$

Si $y\neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{xy}{y^2+x^2}\right)=0$

Como $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{xy}{y^2+x^2}\right)=\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{xy}{y^2+x^2}\right)$ **no podemos afirmar nada sobre el límite, estudiaremos los límites direccionales:**

$f(x,mx)=\dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{m}{1+m^2}$, como el límite depende del valor de m, entonces el límite no existe y en consecuencia la discontinuidad es inevitable.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Expresar el volumen V del cono en función de la generatriz x y del radio de la base y.

Solución: Aplicando la definición del cono se tiene que:

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 h,\ h=\sqrt{x^2-y^2}\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2-y^2}$$

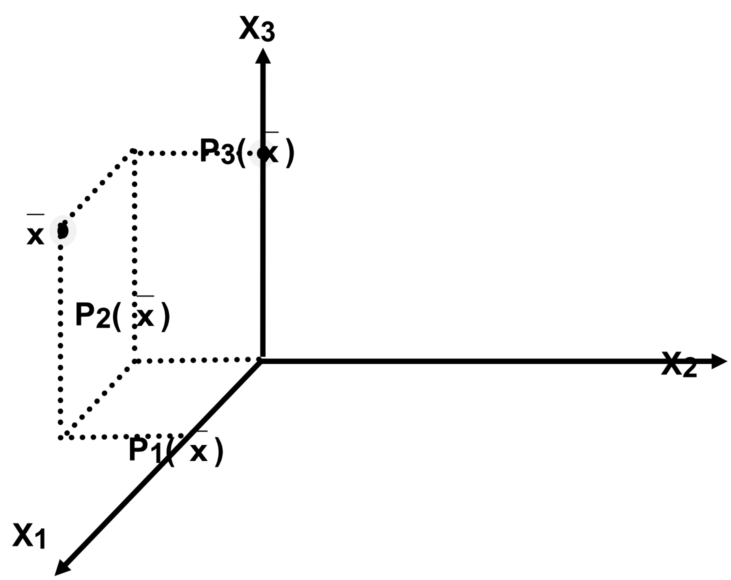
2. Hallar el campo de existencia de la función: $z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

Solución: Como lo que está dentro de la raíz tiene que ser mayor que cero, es decir, $4-x^2-y^2>0\Rightarrow x^2-y^2<4$, que representan círculos de radio 2, luego el campo de existencia de la función es: $x^2-y^2=4$

3. Representar en los ejes de coordenadas el punto $\bar{x}=(1,2,3)\in\Re^3$

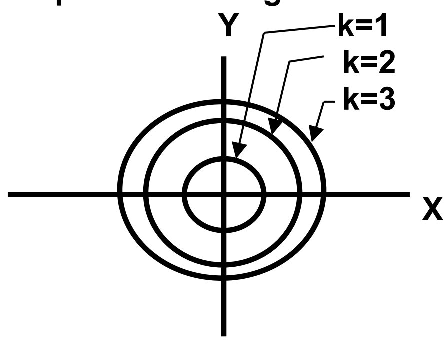
$e_i=1\Rightarrow P_2(\bar{x})=2$

Solución:



4. Represente gráficamente la superficie: $z=f(x, y)= \sqrt{x^2+y^2}$

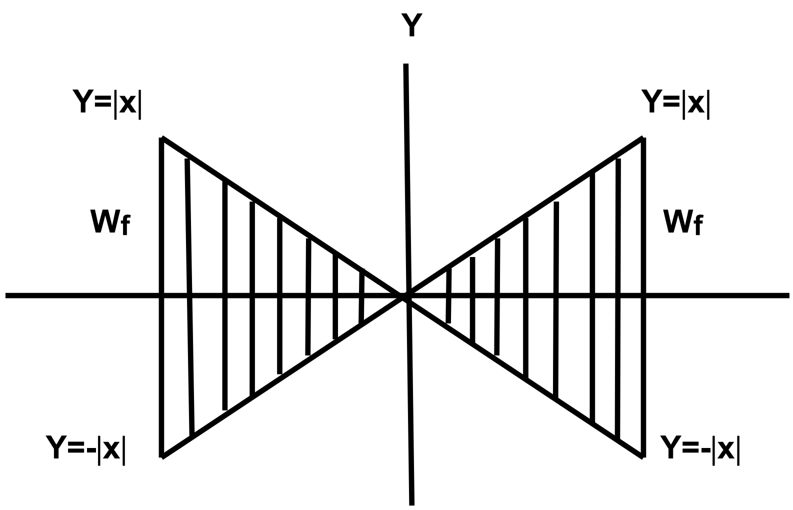
Solución: Haciendo $z=k$ obtenemos las curvas de nivel $x^2+y^2=k^2$ o $k=\sqrt{x^2+y^2}$ que son circunferencias de radio $|k|$ con la traza en el origen y su representación grafica es:



5. Represente gráficamente la superficie dada por:

$$f(x, y)=|y|\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

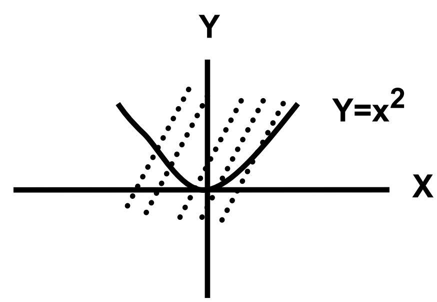
Solución: Es una función: $W_f\{(x, y)\in\Re^2/x^2\geq y^2,\ \ x^2 + y^2\neq 0\}$, la condición $x^2 + y^2\neq 0 \Rightarrow (0, 0)\notin W_f$. Por otra parte $x^2\geq y^2$ o $|y|\leq|x| \Rightarrow -|x|\leq y\leq|x|$, luego el grafico de W_f está limitado por las rectas $y=\pm|x|$. por lo tanto, se representara gráficamente como:



6. Represente gráficamente la superficie dada por: $C(\overline{x},y)=\dfrac{x^2+4y}{x^2-y}$

<u>Solución:</u> La función es racional ya que $C(\overline{x},y)=\dfrac{P_1P_1+4P_2}{2P_1P_1^{\,2}-P_2}$ con

W_C=f(x, y)$\in\Re^2/x^2-y\neq 0$

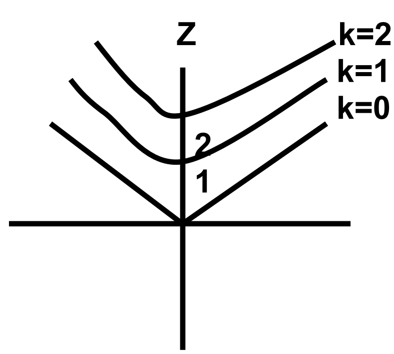


Nótese que W_C es abierto en $\Re^2$, no es acotado y su frontera es la parábola $Y=x^2$

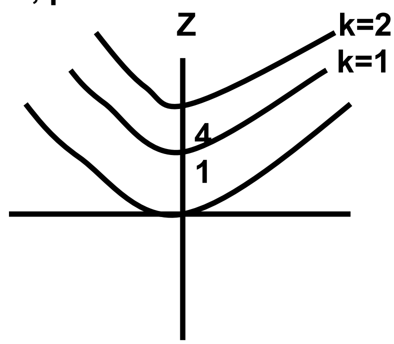
7. Represente gráficamente la superficie dada por: $z=\sqrt{x^2+y^2}$

<u>Solución:</u> buscamos los cortes por planos paralelos para los planos XZ serán $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (haciendo y=k) corresponde a una rama de hipérbolas situadas en los planos y=k, salvo el caso k=0 que corresponde a un par de rectas en el origen.

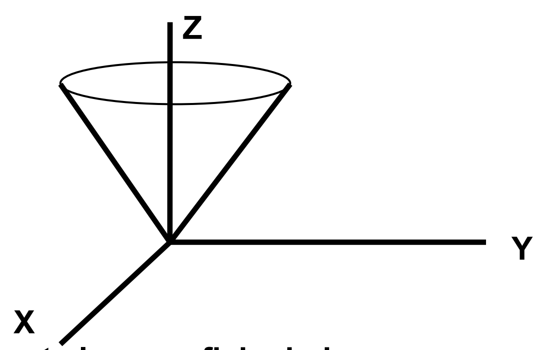
Análogamente, si cortamos los planos paralelos al plano YZ (haciendo z=k).



Ahora, si $x^2 + y^2$ y hacemos y=k, obtenemos $z=x^2 + k^2$ que corresponde a parábolas, para todo k.



Las diferentes vistas de los cortes de G con planos paralelos a los planos de coordenados nos permiten obtener una representación de G.



Represente gráficamente la superficie dada por: z=y

Solución: Hagamos una rotación de ejes con el fin de eliminar el termino y.

Sean X' e Y' los ejes rotados

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}:$$

$X=x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha$

$Y=x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$

$Z=(x')^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) - (y')2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$

Esta ecuación estará libre del termino xy si $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha=0 \Rightarrow$

$\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=45º$ o $\alpha=\frac{\pi}{4}$

Así, $2z=(x')^2 - (y')^2$, reconocemos la ecuación a la superficie paraboloide hiperbólico.

Estudio de la superficie:

1. Intersección con los ejes: él $y'=0 \Rightarrow x'=0$

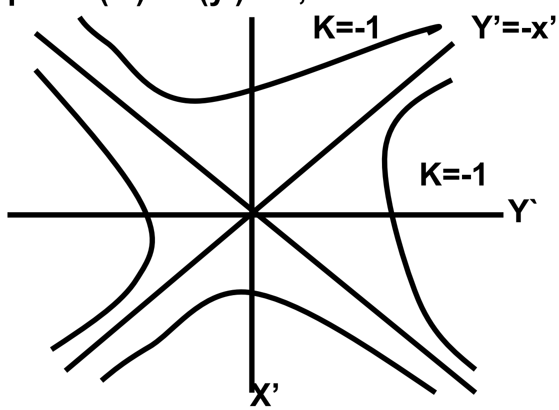
2. Simetría:

a. Con los ejes, solo hay simetría en el eje z

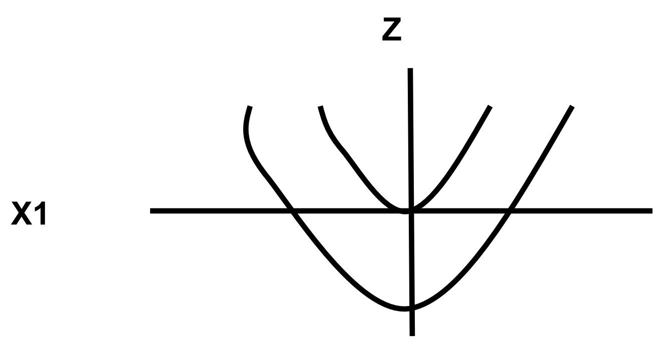
b. Con los planos, la ecuación se altera solo al cambiarse z por –z, entonces hay simetría respecto de los planos X'Z, Y'Z

3. Curvas de nivel: Haciendo 2z=k, tenemos que la ecuación $(x')^2 - (y')^2=k$, representa una familia de hipérbolas, salvo para k=0 (que es la traza o corte de la superficie con el plano X'Y').

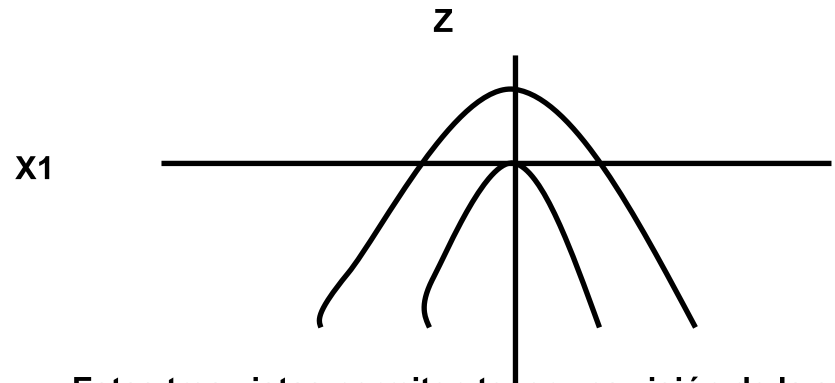
A partir $(x')^2 - (y')^2=0$, se obtiene las rectas $y'=\pm x'$.



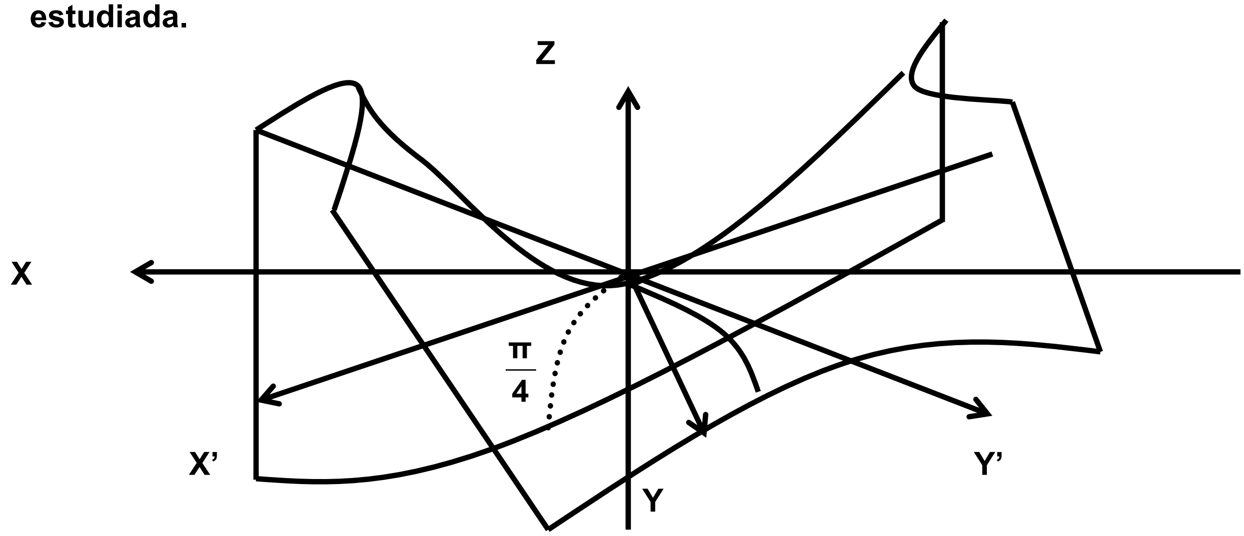
Generalmente ayuda a obtener curvas de nivel por planos paralelos a los otros planos coordenados. Así, si hacemos y=k, la ecuación $2z=(x')^2 - k^2$l que representa una familia de parábolas y si k=0, $2z=(x')^2$ en la traza con el plano X'Z.



Si hacemos x'=k, $2z=k^2 - (y')^2$, representa una familia de parábolas.

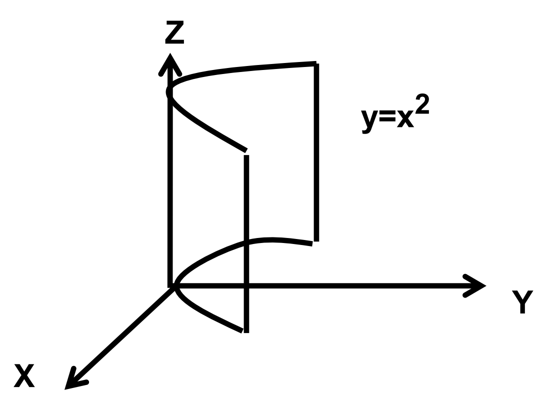


Estas tres vistas permiten tener una visión de la superficie estudiada.



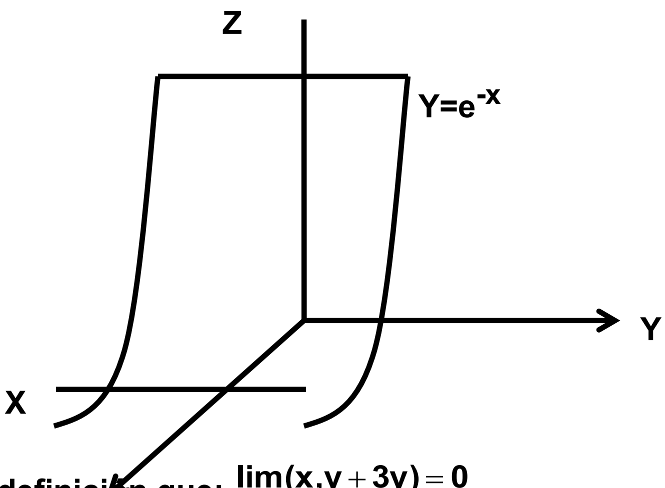
8. Representar la superficie dada por: $F(x, y)=y-x^2$

<u>Solución a:</u> La ecuación de la directriz es $y=x^2$, y por el teorema 1 se obtiene la representación.



9. Representar la superficie dada por: F(x, y)=z – e^{-x}

Solución b: En este caso la ecuación a considerar seria: F(x, y)=z – e^{-x} y aplicando en teorema se tiene:



10. Probar usando la definición que: $\lim_{\bar{x} \to (-3,2)} (x,y + 3y) = 0$

Solución: $(\forall \varepsilon>0), (\exists \delta>0)/(\forall x \in \mu \wedge 0<\|x + 3, y - 2\|<\delta<1 \Rightarrow |xy + y|<\varepsilon)$, como $|xy + y|=|y(x + 3|=y|x + 3|$, donde $|x + 3|<\delta$, $|y - 2|<\delta \Rightarrow$
$|y|=|y – 2 + 2|\leq|y - 2| + 2<\delta + 2 \Rightarrow |xy + 3y|=|x + 3||y|<\delta(\delta + 2)=\delta^2 + 2\delta$, si restringimos el δ, buscamos $\delta>0 \Rightarrow \delta^2 + 2\delta<3\delta$, así $\delta<\min(\frac{\varepsilon}{3})$ y obviamente el menor de los dos cumplen ambas. Así por ejemplo si $\varepsilon=2$ entonces $\frac{\varepsilon}{3}= \frac{2}{3}>1$ y tomamos $\delta< \frac{2}{3}$ si $\delta=4 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{3}= \frac{4}{3}>1$ y tomamos $\delta<1$ y así $\delta< \frac{\varepsilon}{3}$

11. Hallar por medio de las propiedades el límite: $L = \lim_{\bar{x} \to (1,2)} \left[\frac{\ln 2xy}{3x^2 - 5y^2}\right]^{xy}$

Solución: $\lim_{\bar{x} \to (1,2)} \left[\frac{\ln 2xy}{3x^2 - 5y^2}\right]^{xy} = \lim_{\bar{x} \to (1,2)} \left[\frac{\ln 2xy}{3x^2 - 5y^2}\right]^{\lim_{x \to (1,2)} xy} =$

$$\lim\left[\frac{\underset{x\to(1,2)}{\lim}2xy}{3(\underset{x\to(1,2)}{\lim}x)(\underset{x\to(1,2)}{\lim}x)-5[\underset{x\to(1,2)}{\lim}y]^2}\right]^{xy} = \lim\left[\frac{\ln 2.1.2}{3.1.1-5.1^2}\right]^{\underset{x\to(1,2)}{\lim}1.2} = \left[\frac{\ln 4}{3-20}\right]^2 = \frac{\ln 4}{289}$$

12. Hallar por medio de las propiedades el límite: $\underset{\bar{x}\to(-\frac{1}{2},2)}{\lim}\frac{\ln 2x^2y}{2x+\sqrt{5}y^2}$

Solución: Sustituyendo valores tenemos: $\underset{x\to(-1)}{\lim}\left[\underset{y\to 2.2}{\lim}\frac{\ln 2(-\frac{1}{2})^2\,2}{2(-\frac{1}{2})+\sqrt{5}4}\right]=0$

13. Estudiar el límite de la función f(x,y)= $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en el punto (0,0)

Solución: consideremos las rectas por el punto (0,0), de y=mx: luego

f(x,y)=f(x,mx)= $\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}$, como depende de m el límite no existe.

14. Estudiar el límite de la función f(x,y)= $\frac{y^2}{y^2+x^4}$ en el punto (0,0)

Solución: consideremos las rectas por el punto (0,0), de y=mx: luego f(x,y)=f(x,mx)= $\frac{m^2x^2}{(m^2+x^2)x^2}=\frac{m^2}{m^2+x^2}$, cuando x $\to$ 0, el límite tiende a 1, y si m=0 el limite tiende a o, por lo tanto el limite no existe

15. Estudiar el límite de la función f(x,y)= $\frac{xzy^2}{x^4+y^4+z^4}$ en el punto (0,0,0)

<u>Solución:</u> si consideramos los limites iterados $\lim_{x\to 0} f(x,y,z)\lim_{y\to 0}(x,y,z)\lim_{z\to 0}(x,y,z)=\lim_{x\to 0} f(x,y,z)\lim_{y\to 0}(x,y,z)\lim_{z\to 0}(x,y,z)=\ldots=0$ que no nos da ninguna información, si estudiamos el limite en las rectas x=y=z=t, nos resulta que el límite nos da $\frac{1}{3}$ por lo tanto, el límite no existe

16. Estudiar la continuidad de la función: f(x,y)= $\frac{xy}{x^2+y^2}$

<u>Solución:</u> Tenemos que ver si se cumplen las 3 condiciones, como la función no esta definida en el punto (0,0) existe un punto de discontinuidad en ese punto, veamos si el límite existe en ese punto, si estudiamos la función en la recta y=mx, vemos que el límite depende de m, es decir f(x,mx)= $\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2}$ por lo tanto, no se cumple la segunda condición y en consecuencia hay una discontinuidad inevitable en el punto (0,0)

17. Estudiar la continuidad de la función: f(x,y)= $\frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

<u>Solución:</u> Tenemos que ver si se cumplen las 3 condiciones, como la función no está definida en el punto (1,1) no se cumple la primera condición, es decir la función no está definida en el punto (1,1), veamos si se cumple la segunda condición, vemos que la función en este camino nos da si estudiamos la función en la recta y=mx, vemos que el límite depende de m, es decir f(x,mx)= $\frac{m(x-1)}{\sqrt{1+m^2}}$, que va hacer igual a o, para cualquier valor que tome m cuando $x \to 1$, por lo tanto, no nos da ninguna información, apliquemos la definición de límite, Sea (ε>0) (δ>0)/0< $\|x-1, y-1\|$ <δ $\Rightarrow$

$$\left|\frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right| = \frac{|x-1||y-1|}{\|(x-1, y-1\|} \leq \frac{\|x-1, y-1\|^2}{\|x-1, y-a\|} = \|x-1, y-1\|$$

basta tomar δ<ε y asi el limite tiende a 0 y en consecuencia hay una discontinuidad evitable en el punto (1,1) y la función se redefine de la siguiente forma:

$$f(x,y)= \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y)\neq(1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar $f(\frac{1}{2}, 3)$ y $f(1, -1)$, si $f(x, y)=xy + \frac{x}{y}$

2. Determine y represente gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x, y)=\sqrt{4x^2 - y}$ b. $f(x, y)=\sqrt{xy-2}$ c. $f(x, y)=\operatorname{sen}^{-1}\frac{2xy}{x+y}$

d. $f(x, y, z)=\dfrac{\sqrt{a^2 - z^2}}{b^2 - \sqrt{c^2 - (x+y)^2}}$ e. $f(x, y, z)=\operatorname{sen}^{-1}x + \operatorname{sen}^{-1}y + \operatorname{sen}^{-1}z$

f. $f(x, y)=\ln\sqrt{y^2 - 2x} + \dfrac{10}{\sqrt{x^2 - y}}$ g. $f(x, y)=\sqrt{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}$

3. Grafiar las superficies definidas por:

a. $z=x^2 + y^2$ b. $x^2 + y^2 – 16z^2=0$ c. $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2b^2c^2} = 1$

d. $\dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{a^2b^2c^2} = 1$ e. $\dfrac{x^2 + z^2}{p^2q^2} = 1$ f. $z=6 – (2x^2 + y^2)$ g. $x^2 + y^2=ax$, $a>0$

h. $x - y + 2z=4$

4. Grafique las superficies de nivel de las funciones:

a. $f(x, y, z)=\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ b. $f(x, y, z)=x^2 + y^2 – z^2$

5. Calcule los siguientes límites (use las propiedades de límites, si ello es posible)

a. $\lim\limits_{\bar{x} \to (-1,3)} x^3 y^2$ b. $\lim\limits_{\bar{x} \to (1,1)} (x^2 + 2x - y)$ c. $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,1)} x \dfrac{y\,\mathrm{sen}\,x}{x}$ d. $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

e. $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,0)} x \dfrac{y^2}{y^2 + x^4}$ f. $\lim\limits_{\bar{x} \to (0,1)} x \dfrac{x^3 + y + 1}{x^2 + (y+1)^2}$ g. $\lim\limits_{\bar{x} \to (1, \frac{\pi}{2})} x \dfrac{\ln \mathrm{sen}\,xy}{2x + y}$

6. Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ b. $z = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$ c. $z = \dfrac{1}{(x - y)^2}$ d. $z = \cos \dfrac{1}{xy}$

CAPÍTULO VIII

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

En este capítulo se estudiara: Derivadas Parciales, Incremento Total, Diferencial Total, Derivadas Paramétricas, Cambio de Variables En Derivadas de Primer Orden, Derivadas Parciales de Orden Superior, Diferenciales de Orden Superior, Diferenciales Exactas, Derivadas Dadas en Forma Implícitas, Jacobiano, Cambio de Variable que contienen Derivadas Ordinarias, Cambio de Variable que contienen Derivadas Parciales, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

Definición 1: Sea $\overline{x}$=(x_1, x_2, …..x_n) $\forall$i=1, 2, ….n, que es equivalente a considerar para n=2, x_1= x, x_2=y, para n=3, x_1=x, x_2=y, x_3=z, para n=4, x_1= x, x_2=y, x_3=z, x_4= u, … y así sucesivamente.

Definición 2: Si z=f(x, y) se define las derivadas parciales de z con respecto a x y z con respecto a y como:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \text{ y } \frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \Delta x + y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

, La cual se obtienen derivando a z con respecto a x manteniendo a y como una constante y a z con respecto a y manteniendo a x como una constante. Podemos cambiar a Δx por h y Δy por k con lo que las derivadas parciales quedan expresadas como: $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$ y

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, k+y) - f(x,y)}{k}$$

Definición 3: Se llama ***incremento total*** de una función z=f(x, y) a la diferencia Δz=Δf(x, y)=f(x + Δx, y +Δy) – f(x, y)

Definición 4: Recibe el nombre de ***diferencial total*** de una función z=f(x, y) a la parte principal del incremento total Δz lineal con respecto a los incrementos Δx=h y Δy=k. La función tiene diferencial total cuando sus diferenciales totales son continuas. Si la función tiene diferencial total se llama ***diferenciable*** y Δx=dx, Δy=dy y su ecuación es:

$dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$ que es la diferencial total de la función z=f(x, y).

Análogamente para una función con tres variables independientes se tiene que la diferencial total es: $du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz$

<u>Definición 5:</u> Cuando $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$ son suficientemente pequeños y por lo tanto, suficientemente $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ para la función diferenciable z=f(x, y) se verifica la igualdad aproximada $\Delta z \approx dz$ o sea

$$\Delta z=\frac{\delta u}{\delta x}\Delta x+\frac{\delta u}{\delta y}\Delta y$$

<u>Definición 6:</u> Si z=f(x, y) es una función diferenciable de los argumentos x e y, que son a su vez funciones diferenciables de una variable independiente t, es decir depende de un parámetro t, $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$, entonces la derivada compuesta (paramétrica) de $z=[\varphi(t), \psi(y)]$ se expresa por la fórmula: $\frac{dz}{dt}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta t}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t}$, en el caso particular que t coincida con uno de los argumentos x e y, por ejemplo con el argumento x, esta función se expresa por: $\frac{dz}{dx}=\frac{\delta z}{\delta x}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t}$

<u>Definición 7:</u> Si z una función compuesta de varias variables. Por ejemplo z=f(x, y), donde $x=\varphi(x, y)$ e $y=\psi(x, y)$ son variables independientes, f, φ, ψ son diferenciables, entonces las derivadas parciales de z con respecto a u y v se expresan por:

$$\frac{dz}{du}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta u}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta u}$$

$$\frac{dz}{dv}=\frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta v}+\frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta v}$$

En todos los casos examinamos que se verifica la formula:

$dz=\frac{\delta z}{\delta x}dx+\frac{\delta z}{\delta y}dy$ propiedad de invariabilidad de la diferencial total

<u>Definición 8:</u> Se define la <u>*derivadas parciales de orden superior*</u> de la función z=f(x, y) a las derivadas parciales de sus derivadas de primer

orden y se expresan: $\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$ **Derivada parcial de z con respecto a x, luego la volvemos a derivar con respecto a x**

$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$ **Derivada parcial de z con respecto a x, luego la volvemos a derivar con respecto a y**

$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)=\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$ **Derivada parcial de z con respecto a y, luego la volvemos a derivar con respecto a x**

$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)=\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ **Derivada parcial de z con respecto a y, luego la volvemos a derivar con respecto a y**

Definición 9: Recibe el nombre de *diferencial de segundo orden* de una función z=f(x, y) a la diferencial de la diferencial de primer orden de dicha función y se denota por $d^2z=d(dz)$, análogamente se determinan las diferenciales de orden mayor que dos, e.i. $d^3z=d(d^2z)$ … $d^nz=d(d^{n-1}z)$

Si z=f(x, y) donde x e y son variables independientes y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden de la función z se calcula mediante la fórmula: $d^2z=\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dx^2 + 2\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}dxdy+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dy^2$, **y en general cuando existen las correspondientes derivadas se verifica la fórmula simbólica:**

$$d^nz=\left(\frac{\delta}{\delta x}dx+\frac{\delta}{\delta y}dy\right)^n$$

Definición 10: *Diferenciales exactas*, puede suceder que la ecuación diferencial se escriba en la forma p(x, y)dx + q(x, y)dy=0, si esta ecuación es una diferencial exacta de cierta función u(x, y), es

decir, u(x,y)=p(x, y)dx + q(x, y)dy, donde du(x, y)=0, debe cumplirse la condición de Euler:

$\frac{\delta P(x,y)}{\delta y}=\frac{\delta Q(x,y)}{\delta x}$, si du(x, y)=p(x, y)dx + q(x, y)dy $\Rightarrow$

du(x, y)= $\frac{\delta P(x,y)}{\delta y}dx+\frac{\delta Q(x,y)}{\delta x}dy$, $\therefore$, $\frac{\delta P(x,y)}{\delta y}=p(x,y)$ y $\frac{\delta Q(x,y)}{\delta x}=q(x,y)$

Donde u(x, y)= $\int p(x,y)dx$ + ψ(y), al calcular $\int p(x,y)dx$, la magnitud y se considera constante, por eso ψ(y) es una función arbitraria de y.

Para determinar la función ψ(y), derivaremos u(x, y) con respecto a y, teniendo en cuenta que $\frac{\delta q(x,y)}{\delta y}=q(x,y)$, es decir, la función

$\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]+\frac{d\psi}{dy}$ =q(x,y), si despejamos $\frac{d\psi}{dy}$ nos queda:

$\frac{d\psi}{dy}$ =q(x,y) - $\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]$, ahora si integramos con respecto a y,

tenemos que ψ(y)= $\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]dy$ + C, por ultimo

sustituimos el valor de ψ(y) en la ecuación u(x, y), con lo cual encontramos la solución general de la ecuación diferencial exacta o de la diferencial total:

$$u(x,y)=\int\left[p(x,y)dx+\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]\right]dy + C$$

En conclusión para resolver una ecuación diferencial total seguiremos los siguientes pasos:

1. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir, que $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$

2. Se integra la función u(x, y) con respecto a x manteniendo a y constante
3. Se deriva la función que resulto de integra a la función u(x, y) con respecto a y, considerando a la constante de integración como una función estrictamente de y
4. Se iguala la derivada de u(x, y) a la función q(x, y) y se despeja la constante dependiente de y
5. Se integra con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y
6. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x, y) que se obtuvo al principio cuando integramos con respecto a x

Definición 11: Diferenciales exactas para el caso de tres variables independientes P(x, y, z)dx + Q(x. y, z)dy + R(x, y, z)dz tiene que cumplirse la condición : $\frac{\delta P(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta x}$, $\frac{\delta R(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta Q(x,y)}{\delta z}$, $\frac{\delta P(x,y)}{\delta Z} = \frac{\delta R(x,y)}{\delta x}$

Definición 12: Si una ecuación f(x, y)=0 donde f(x, y) es una ecuación diferenciable de las variables x e y, determina a y como una función de x, la derivada de esta función dada ***en forma implícita*** siempre que f'y(x, y)≠0 puede hallarse por la fórmula: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_x'(x,y)}$

Las derivadas de órdenes superiores se hallan por derivación sucesiva de la fórmula anterior.

Definición 13: Si la ecuación F(x, y, z)=0, donde F(x, y, z) es una función diferenciable de la variables x, e y, y z, determina z como función de las variables independientes x e y Fs.'(x, y, z)≠0, las derivadas parciales de esta función dada en forma implícitas vienen dada por las fórmulas:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{f_x'(x,y,z)}{f_z'(x,y,z)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{f_y'(x,y,z)}{f_z'(x,y,z)}$$

Otra forma para hallar las derivadas de las funciones de z es la siguiente: diferenciando la función F(x, y, z)=0, obteniéndose:

$\frac{\delta F}{\delta x}dx + \frac{\delta F}{\delta y}dx + \frac{\delta F}{\delta z}dx = 0$ de donde se puede determinar da y $\therefore$ $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$

<u>Definición 14:</u> Si en el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v)=0 \\ G(x, y, z, u, v)=0 \end{cases}$$

Se determina u y v como una función diferenciable de las variables x e y se resuelve obteniendo el jacobiano

$\frac{D(F;G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta u} & \frac{\delta F}{\delta v} \\ \frac{\delta G}{\delta u} & \frac{\delta G}{\delta v} \end{vmatrix} \neq 0$ las diferenciales de estas funciones se pueden hallar de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\delta F}{\delta x}dx + \frac{\delta F}{\delta y}dy + \frac{\delta F}{\delta u}du + \frac{\delta F}{\delta v}dv = 0 \\ \frac{\delta G}{\delta x}dx + \frac{\delta G}{\delta y}dy + \frac{\delta G}{\delta u}du + \frac{\delta G}{\delta v}dv = 0 \end{cases}$$

<u>Definición 15:</u> Si la función diferenciables z de las variables x e y se dan en forma paramétrica x(x(u, v)) e y=y(u, v) y z=z(u, v) y el

jacobiano f $\frac{D(F;G)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta F}{\delta u} & \frac{\delta F}{\delta v} \\ \frac{\delta G}{\delta u} & \frac{\delta G}{\delta v} \end{vmatrix} \neq 0$ la diferencial de esta función se puede hallar del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} dx = \frac{\delta x}{\delta u}du + \frac{\delta x}{\delta v}dv \\ dy = \frac{\delta y}{\delta u}du + \frac{\delta y}{\delta v}dv \\ dz = \frac{\delta z}{\delta u}du + \frac{\delta z}{\delta v}dv \end{cases}$$

Conociendo la diferencial dz=Pdx + Qdy hallamos las derivadas parciales $\frac{\delta z}{\delta x} = P$ f y $\frac{\delta z}{\delta y} = Q$

<u>Definición 16:</u> Cuando se cambian las variables en las expresiones diferenciales, las derivadas que entran en ellas deben expresarse por medio de derivadas con respecto a las nuevas variables, aplicando para ello la regla de diferenciación de funciones compuestas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dada la función $z(x, y)=xy^2 - 2xy + y^2$ hallar las derivadas parciales de z con respecto a x e y

<u>Solución:</u> $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)y^2 - 2(x+h)y + y^2 - xy^2 + 2xy - y^2}{h} \Rightarrow$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{xy^2 + hy^2 - 2x - 2yh + y^2 - xy^2 + 2xy - y^2}{h} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{hy^2 - 2yh}{h} \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{h(y^2 - 2y)}{h} \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x} = y^2 - 2y \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x} = y(y-2)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{x(y+k)^2 - 2x(y+k) + (y+k)^2 - xy^2 + 2xy - y^2}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{xy^2 + 2xyk + xk^2 - 2xy - 2xk + y^2 + 2yk + k^2 - xy^2 + 2xy - y^2}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{2xyk + xk^2 - 2xk + 2yk + k^2}{k} \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{k(2xy + xk - 2x + 2y + k)}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 2xy - 2x + 2y \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta y} = 2(xy - x + y)$$

2. **Hallar el incremento y la diferencial total de la función:**

$f(x, y)=x^2 + xy - y^2)$

<u>Solución:</u> $f(x + h, y + k)=(x + h)^2 + (x + h)(y + k) - (y + k)^2 \Rightarrow$
$f(x + h, y + k)=x^2 + 2xh + h^2 + xy + xk + hk - y^2 - 2yk - y^2 \Rightarrow$
$f(x + h, y + k)=x^2 + xy - y^2 + (2x + y)h + (x - 2y)k + (h^2 + hk - k^2)$

La diferencial total es: $df=(2x +y)h + (x - 2y)k$ y el incremento total es: $(h^2 + hk - k^2)$

3. **Hallar la diferencial total de la función: $f(x, y)= \sqrt{x^2 + y^2}$**

<u>Solución:</u> $dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. **La altura de un cono h=30 cm., el radio de la base 10 cm. ¿Cómo variará el volumen de dicho cono si la altura aumenta 3 mm. Y el radio disminuye 1 mm.**

<u>Solución:</u> Datos: h=30 cm. r=10 cm. Δh=3 mm.=0,03 cm. Δr=-1 mm.=0,01 cm., como el volumen del cono es:

$V_C=\frac{1}{3}\pi hr^2 \approx \Delta V_C=\frac{1}{3}\pi(\Delta hr^2=+2h\Delta r) \Rightarrow \Delta V_C=\frac{1}{3}\pi(100x0,3 - 2x30x10x0,1)$ cm^3. $\Rightarrow \Delta V_C=\frac{1}{3}\pi(30\text{-}60)$ cm^3. $\Rightarrow \Delta V_C=-10\pi$ cm^3.

5. **Hallar si $z=e^{3x + 2y}$, donde x=cost e y=t^2**

Solución: $\dfrac{\delta z}{\delta x} = 3e^{3x+2y}$, $\dfrac{\delta z}{\delta y} = 2e^{3x+2y}$, $\dfrac{\delta x}{\delta t} = -\text{sent}$, y $\dfrac{\delta x}{\delta t} = 2t \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dt} = -3\text{sent}e^{3x+2y} + 2te^{3x+2y} = (2t - \text{sent})e^{3x+2y}$$

6. **Hallar la derivada parcial $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ y la derivada total $\dfrac{dz}{dx}$ si $z=e^{xy}$ donde $y=\varphi(x)$**

Solución: $\dfrac{dz}{dx} = (y + x\varphi(x))e^{xy}$ y $\dfrac{\delta z}{\delta x} = ye^{xy}$

7. **Hallar $\dfrac{\delta z}{\delta u}$ y $\dfrac{\delta z}{\delta v}$ si $z=f(x, y)$ donde $x=uv$ e $y=\dfrac{u}{v}$**

Solución: $\dfrac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y); \dfrac{\delta z}{\delta y} = f_x(x,y)$

$$\frac{\delta z}{\delta u} = v; \quad \frac{\delta x}{\delta v} = u; \quad \frac{\delta y}{\delta u} = \frac{1}{v}; \quad \frac{\delta y}{\delta v} = -\frac{u}{v^2};$$

$$\frac{\delta z}{\delta u} = f_x(x,y)v + \frac{1}{v}f_y(x,y)$$

$$\frac{\delta z}{\delta v} = f_x(x,y)u - \frac{u}{v^2}f_y(x,y)$$

8. **Demostrar que la función $z=\varphi(x^2 + y^2)$ satisface a la ecuación $y\dfrac{\delta z}{\delta x} - x\dfrac{\delta z}{\delta y} = 0$**

Solución: $\dfrac{\delta z}{\delta x} = 2x\varphi'_x(x^2 + y^2)$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = 2y\varphi'_y(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\delta z}{\delta u} = f_x(x,y)v + \frac{1}{v}f_y(x,y)$$

$$2xy\varphi'x(x^2 + y^2) - 2\,xy\varphi'y(x^2 + y^2) = 2xy[\varphi'x(x^2 + y^2) - \varphi'y(x^2 + y^2)^* = 2xy.0 = 0$$

9. **Hallar todas las derivadas parciales de segundo orden de la función**

$$z = tg^{-1}\frac{x}{y} n$$

Solución: $\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+x^2)^2}$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+x^2)^2}$$

Nota: si la función es continua entonces se cumple la siguiente identidad como puede notarse en el ejemplo anterior d $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$

10. **Hallar las diferenciales totales de primer y segundo orden de la función:** $z = 2x^2 - 3xy - y^2$

Solución: $\frac{\delta z}{\delta x} = 4x - 3y$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -3x - 2y$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 4$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = -3$$

$dz=(4x -3y)dx - (3x + 2y)dy$
$d^2z=4dx^2 -6dxdy -2dy^2$

11. Hallar la solución de la diferencial total:

    $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy$, aplicando los pasos descritos anteriormente tenemos:
    Solución: Veamos que se cumple los pasos:

1. $p(x, y)=x + y + 1 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1$, $q(x, y)=x - y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler

2. $u(x ,y)=\int(x+y+1)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x, y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + x + \psi(y)$

3. Hallamos la derivada de u(x, y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x, y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=x + \frac{d\psi}{dy}=x - y^2 + 3 \Rightarrow$

   $\frac{d\psi}{dy}=-y^2 + 3$

4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int(3-y^2)dy$

   $\Rightarrow \psi(y)=3y - \frac{1}{3}y^3 + C$

5. Sustituimos el valor de $\psi(y)=3y - \frac{1}{3}y^3 + C$ en u(x, y), es decir,

   $u(x, y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + x + 3y - \frac{1}{3}y^3 + C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que $u(x, y)=0 \Rightarrow$

   $3x^2 + 6xy + 6x + 18y - 2y^3 + C=0$

12. Dada la expresión $(3x^2 + 3y+- 1)dx + (z^2 + 3x)dy + (2xz + 1)dz$ determine que es una diferencial exacta.

Solución: P=3x^2 + 3y+- 1, Q= z^2 + 3x y R=2xz + 1

$$\frac{\delta P}{\delta x}=0\,,\ \frac{\delta P}{\delta y}=3\,,\ \frac{\delta Q}{\delta x}=3\,,\ \frac{\delta Q}{\delta Z}=2z\,,\ \frac{\delta R}{\delta x}=0\,,\ \frac{\delta R}{\delta y}=2z\,,$$

se cumple la condiciones de Euler

1. $\dfrac{\delta P}{\delta x}=3x^2+3y-1$

2. u(x,y)=$\int(3x^2+3y-1)dx=x^3+3xy-x-\varphi(y,z)$

3. $\dfrac{\delta u(x,y)}{\delta y}=3x+\varphi_y{}'(y,z)=z^2$

4. $\int(3z^2)dy=z^2y+\varphi(z)$

5. $\dfrac{\delta\varphi}{\delta z}=2zy+\varphi_y{}'=2xz+1\Rightarrow\varphi_y{}'=1$

6. $\int(dz=z+C\Rightarrow\varphi(z)=z+C$

Es decir, u(x, y)= $x^3+3xy-x$ + z^{2}y + z + C

13. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si (x^2 + y^2)^2 – 3(x^2 + y^2) + 1=0

Solución: 2(2xdx + 2ydy)(x^2 + y^2) – 6xdx + 6ydy=0 $\Rightarrow$

[(4x(x^2 + y^2) – 6x]dx + [4x(x^2 + y^2) – 6y]dy=0 $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-4x(x^2+y^2)}{4y(x^2+y^2)-6y}=\frac{2x[3-2(x^2+y^2)]}{-2y[3-2(x^2+y^2)]}=-\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ydx-xdy}{y^2}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y+\dfrac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^2}$$

14. Hallar $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ y $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ si x^2 – 2y^2 + 3z^2 – yz + y=0

Solución: $f'_x=2x + 6y$, $f'_y=-4y - z + 1$ y $f'_x=6z - y \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x}=\frac{2x}{y-6z}$

$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{4y+x-1}{y-6z}$, otro procedimiento:

$2xdx + 4ydy + 6zdz - zdy - ydz + dy=0 \Rightarrow dz=\frac{-2xdx+(4y+z-1)dy}{y-6z}$ de donde $\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{2x}{y-6z}$ y $\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{2x}{y-6z}$

15. Dadas las siguientes ecuaciones $u + v=x + y$, $xu + yv=1$, se desea determinar u y v como funciones de x e y, hallar: $\frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, \frac{\delta v}{\delta x}$, y $\frac{\delta v}{\delta y}$

Solución: Derivando ambas ecuaciones con respecto a x se obtiene:

$$\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta v}{\delta x}=1$$

$$u+x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta v}{\delta x}=0$$ de donde

$$\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{u+y}{x-y},\ \frac{\delta v}{\delta x}=\frac{u+x}{x-y}$$, análogamente $$\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{v+y}{x-y},\ \frac{\delta v}{\delta y}=\frac{v+x}{x-y}$$

16. La función z de los argumentos x e y viene dada por la ecuación $x=u + v$, $y=u^2 + v^2$, $z=u^3 + v^3$ $(u\neq v)$, hallar: $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$

Solución: $dx=du + dv$

$Dy=2udu + 2vdv$

$3u^2du + 3v^2dv$

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{bmatrix}}{2v-2u}=\frac{1}{2v-2u}\begin{bmatrix} (2v-1)dx \\ (1-2u)dy \end{bmatrix}$$

$$du=\frac{2vdx-dy}{2v-2u}\quad dv=\frac{-2udx+dy}{2v-2u}$$

$$dz=\frac{6u^2vdx-3u^2dy-6uv^2dx+3v^2dy}{2(v-u)}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{6u^2v-6uv^2}{2(v-u)}=\frac{3uv(u-v)}{(v-u)}\Rightarrow\frac{\delta z}{\delta x}=-3uv$$

$$\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{-3u^2-6uv^2}{2(v-u)}\Rightarrow\frac{\delta z}{\delta x}=\frac{3}{2}(u+v)$$

17. Transformar la ecuación $bx\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx}=0$ tomando y como argumento y x como función

<u>Solución:</u>

como $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$

sustituyendo estos valores en la ecuación dada se tiene:

$$x=\left[-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}\right]+\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}-\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=0\Rightarrow x=\frac{d^2x}{dy^2}-1+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

18. Transformar la ecuación de las vibraciones de la cuerda $\frac{\delta^2u}{\delta t^2}=a^2\frac{\delta^2u}{\delta x^2}$ ($a\neq 0$) a unas nuevas variables independientes y w, donde y=x – at, w=x + at

<u>Solución</u>: buscamos las derivadas parciales de u con respecto a x y t por medio de derivaciones parciales de u con respecto a y w. aplicando las fórmulas de derivación de funciones compuestas.

$\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{\delta u}{\delta w}\frac{\delta w}{\delta t}$ y $\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta w}\frac{\delta w}{\delta x}$ obtenemos:

$$\frac{\delta u}{\delta t}=-a\frac{\delta u}{\delta y}+a\frac{\delta u}{\delta w}=a\left(\frac{\delta u}{\delta w}-\frac{\delta u}{\delta y}\right)$$

$u\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta y}.1+\frac{\delta u}{\delta w}.1=\frac{\delta u}{\delta y}+\frac{\delta u}{\delta w}$ I volvemos a derivar aplicando estas fórmulas:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)=\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)\frac{\delta y}{\delta t}+\frac{\delta}{\delta w}\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)\frac{\delta w}{\delta t}=a\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}-\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right)(-a)+\left(\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}-\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}\right)a$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}=a^2\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}-2\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}+\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)\frac{\delta y}{\delta x}+\frac{\delta}{\delta w}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)\frac{\delta w}{\delta x}=\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}\right).1+\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}+\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}\right)$$

$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}-2\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}+\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}$, sustituyendo en la ecuación dada tenemos:

$a^2\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}-2\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}+\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}\right)=a^2\left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+2\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}+\frac{\delta^2 u}{\delta w^2}\right)$ o bien $\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta w}=0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

7. Hallar las derivadas parciales de las funciones:

a. $z=x^3 + y^3 - 3axy$ b. $z=x^y$ c. $z=\dfrac{x - y}{x + y}$ d. $z=e^{\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$ e. $z=\sqrt{x^2 - y^2}$ f. $z=\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - x^2}}$ g. $z=\sqrt{x^2 - y^2}$ h. $z=\ln\operatorname{sen}\dfrac{x - a}{\sqrt{y}}$ i. $z=\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ j. $z=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$

8. Hallar $\dfrac{\delta f}{\delta x}(2,1)$ y $\dfrac{\delta f}{\delta y}(2,1)$, si $f(x, y)=\sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$

9. Calcular $\begin{vmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta r} & \dfrac{\delta x}{\delta \varphi} \\ \dfrac{\delta y}{\delta r} & \dfrac{\delta y}{\delta \varphi} \end{vmatrix}$, si $x=r\operatorname{sen}\varphi$ e $y=r\cos\varphi$

10. Demostrar, que $x\dfrac{\delta z}{\delta x} + y\dfrac{\delta z}{\delta y} = 2$, si $z=\ln(x^2 + xy+ y^2)$

11. Demostrar, que $x\dfrac{\delta z}{\delta x} + y\dfrac{\delta z}{\delta y} = 2xy + z$,, si $z=xy + xe^{\frac{y}{x}}$

12. Demostrar, que $\dfrac{\delta u}{\delta x} + \dfrac{\delta u}{\delta y} + \dfrac{\delta u}{\delta z} = 0$,, si $u=(x – y)(y – z)(z – x)$

13. Demostrar, que $\dfrac{\delta u}{\delta x} + \dfrac{\delta u}{\delta y} + \dfrac{\delta u}{\delta z} = 1$,, si $u=x + \dfrac{x - y}{y - z}$

14. Hallar las diferenciales totales de las siguientes funciones:

a. $z=x^3 + y^2 - 3xy$ b. $z=\ln(x^2 + y^2)$ c. $z=x^2y^3$ d. $f(x, y)=\ln(1 + \dfrac{x}{y})$

e. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ f. $z=ctg^{-1}\dfrac{y}{x}+tg^{-1}\dfrac{y}{x}$ g. $z=sen^2x+\cos^2y$ h. $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$

15. Hallar $\dfrac{du}{dt}$, si $u=\ln sen\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, donde $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$

16. Hallar $\dfrac{du}{dt}$, si $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, donde x=rcost, y=rsent, z=h

17. Hallar $\dfrac{\delta z}{\delta x}\ \dfrac{\delta z}{\delta y}$, si $z=,$, si $z=tg^{-1}\dfrac{y}{x}$, donde z=usenv e y=ucosv

18. Hallar $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}$, $\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}$, si z=ln(x2 + y)

19. Hallar $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x^2}(0,0)$, $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}(0,0)$, $\dfrac{\delta^2 z}{\delta y^2}(0,0)$, si $f(x, y)=(1 + x)^m(1\ y)^n$.

20. Demostrar, $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ que para la función con la condición complementaria de f(0, 0), tenemos $\dfrac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}(0,0)=-1$, $\dfrac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}(0,0)=+1$

21. Demostrar, que la función $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ satisface a la ecuación

$$x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}+\quad x^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0$$

22. Hallar d^3z, si $z=xe^x\cos y$

23. Después de comprobar que las expresiones que se dan abajo son diferenciables exactas de ciertas funciones, hallar estas funciones:

a. $(\cos x + 3x^2y)dx + (x^3 - y^2)dy$

b. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

c. $(2x + y + z)dx + (x + 2y + z)dy + (x + 2y + 2z)dz$

d. $\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy + \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{z^2}\right)dz$

24. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $y=x + \ln y$

25. Hallar $\dfrac{\delta z}{\delta x}$ y $\dfrac{\delta z}{\delta y}$, si $x\cos y + y\cos x + z\cos x=1$

26. Las funciones y $\wedge$ z de la variable independiente x se dan por el sistema de ecuaciones: $xyz=a$, $x + y + z=b$, hallar: dy, d^2y, d^2z

27. Transformar la ecuación $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx}=0$ poniendo $x=\cos t$

28. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes y de las normales a las siguientes superficie en los puntos que se indican:

a. Al paraboloide de revolución $z=x^2 + y^2$, en el punto (1, -2, 5)

b. Al cono $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{x^2}{8}=0$, en el punto (4, 3, 4)

c. A la esfera $x^2 + y^2 + z^2=2rz$ en el punto $(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\alpha, r)$

29. Demostrar, que la ecuación del plano tangente a la superficie central de 2ª orden $ax^2 + by^2 + cz^2=c$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ tiene la forma $ax_0x + by_0y + cz_0z =k$

30. Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2=21$, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z=0$

31. Hallar en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x=0$ los puntos en que los planos tangente a ella sea paralelo a los planos coordenados

32. Determinar los puntos máximos y mínimos local y los de silla, si existen, de las funciones definidas por:

a. $f(x, y)=2x - x^2y^2 - 2y - 3$

b. $f(x, y)= \dfrac{xy+1}{x+y}$

c. $f(x, y)=3x^2 + 2y^2 - 8x - 2xy + 6y$

d. $f(x, y)=2y^3 - 6xy - 2x^3$

e. $f(x, y)=50 - (x - 5)^2 - (y -5)^2$

f. $f(x, y)=x^3 - 27xy + y^3 - 15x^2$

g. $f(x, y)= \dfrac{x}{x+y}$

h. $f(x, y)= \dfrac{xy-4}{x-y}$

i. $f(x, y)=\dfrac{x^2+y}{y+1}$

j. $f(x, y)=4x^3 + 6x^2 + 2y^3 - 3y^2 - 24x + 7$

33. Demuestre que las funciones definida como sigue, tienen un mínimo local en los puntos señalado en cada caso:

a. $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ en $(5, 6)$

b. $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$ en $(a\sqrt[3]{3}\ , a\sqrt[3]{3})$

c. $x^4 + x^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ en $(\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}\ , -\sqrt{2})$

34. Determinar los puntos máximos y mínimos local, si existen, sometidos a las condiciones dados en cada caso, de las funciones definidas por:

a. $f(x, y)=2x + 3y$, sometido a $x^2 + y^2 = 4$

b. $f(x, y)=3(x^2 + y^2) + xy$ sujeto a $x + 2y=5$

c. $f(x, y)=4xy - x^2 - y^2$ sometido a $x^2 + y^2 = 8$

d. $f(x, y)=3x^2 - 3xy + 6y^2$ sujeto a $x + 3y=44$

e. $f(x, y)=x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x$ sometido a $2x - y=0$

f. $f(x, y, z)=xyz$ sometido a $x + 2y + 3z=18$

g. $f(x, y, z)=x + 2y + 3z$ sometido a $x^2 + y^2 + z^2=25$

h. $f(x, y, z)=x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x - y + z=1$

35. Sabiendo que la función definida por f(x, y, z)= alcanza un valor mínimo sometido a x + y=3 y e y – z=-2

CAPÍTULO IX

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS DE FUNCIONES VARIAS VARIABLES AL CAMPO DE LA INGENIERÍA

En este capítulo se estudiara: Plano Tangente y Normal a una Superficie, Máximo y Mínimos Absolutos, Máximo y Mínimos Locales o Relativos, Máximo y Mínimos Condicionados Matriz y Determinantes Herssiana, Matriz y Determinantes Herssianas Condicionadas, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

<u>Definición 1:</u> Se define el <u>*plano tangente de una superficie*</u> en el punto P (punto de contacto) el punto en que están situadas todas las tangentes en el punto P, a las curvas en dicha superficie que pasan por este punto.

<u>Definición 2:</u> Se define la <u>*normal a una superficie*</u> a las rectas perpendiculares al plano tangente en el punto de contacto P.

Si la ecuación de la superficie está dada de forma implícita en un sistema de coordenadas cartesianas z=f(x, y) donde f(x, y) es una función diferenciable, la ecuación del plano tangente en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a la superficie será:

$$z - z_0 = \frac{\delta z}{\delta x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\delta z}{\delta y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$ aquí y X, Y, Z son las coordenadas variables de los puntos del plano tangente.

La ecuación de la normal tiene forma:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\delta z}{\delta x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta z}{\delta y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$ donde x, y, z son las coordenadas variables de los puntos de la normal.

<u>Definición 3:</u> En el caso de que la ecuación del plano tangente de la superficie este dado en forma implícita F(x, y, z)=0 y $F(x_0, y_0, z_0)=0$ las ecuaciones anteriores tendrán las formas:

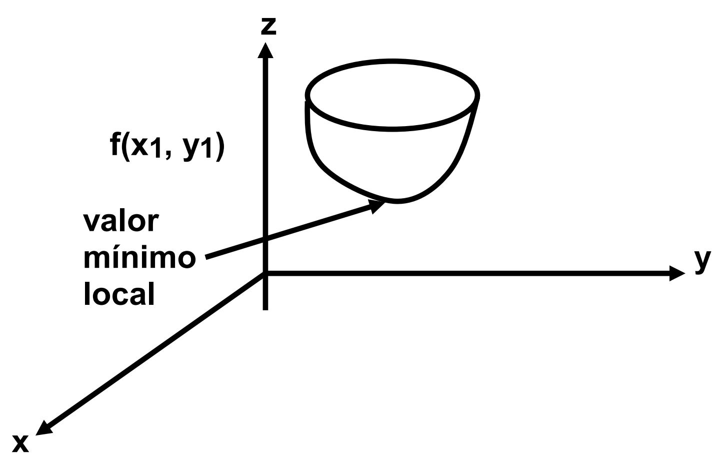
$$\frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) = 0$$ y

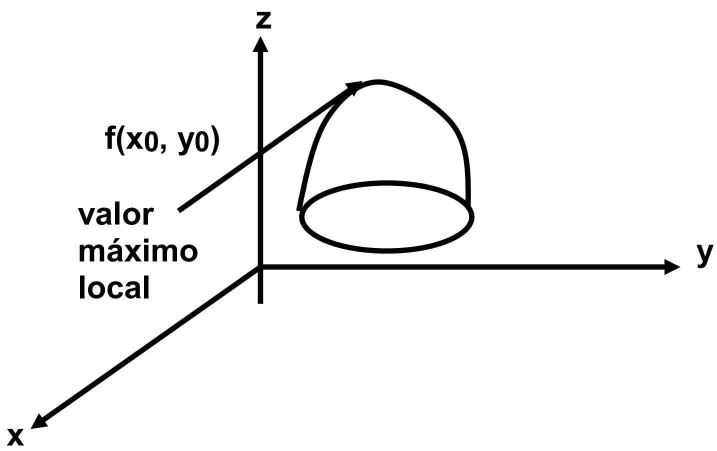
$$\frac{x - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0, z_0)}$$

<u>Definición 4:</u> Sea f una función tal que f: $U \rightarrow \Re \wedge z=(x, y)$, donde $U \subseteq \Re^2$ y sea D un conjunto tal que $D \subseteq U$, además sean los puntos

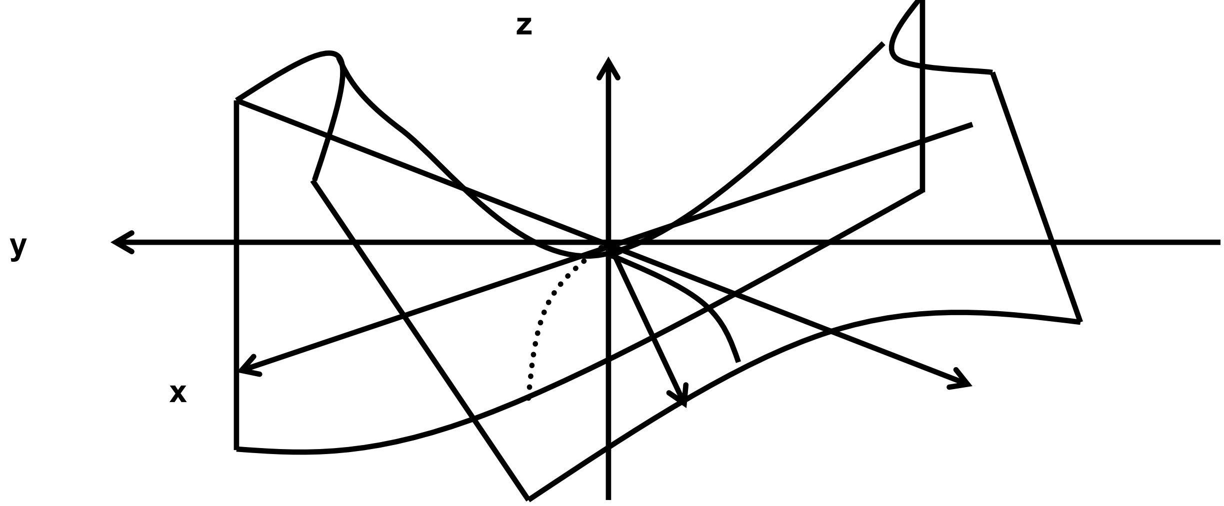
$P_0(x_0, y_0)$ $P_1(x_1, y_1)$, tales que $(x_0, y_0) \in D$ $(x_1, y_1) \in D$, decimos que (x_0, y_0) es un ***punto máximo absoluto*** de D en f si y solo si $\forall (x, y) \in D$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ y (x_1, y_1) es un ***punto mínimo absoluto*** de D en f si y solo si $\forall (x, y) \in D$, $f(x, y) \geq f(x_1, y_1)$

Definición 5: Sea f una función tal que $f: U \rightarrow \Re \wedge z=(x, y)$, donde $U \subseteq \Re^2$ y sea D un conjunto tal que $D \subseteq U$, además sean los puntos $P(x, y)$, $P_0(x_0, y_0)$ $P_1(x_1, y_1)$, tales que $(x, y) \in D$, $(x_0, y_0) \in D$ $(x_1, y_1) \in D$, decimos que (x_0, y_0) es un ***punto máximo local o relativo*** de D en f si y solo si $\exists \delta > 0$ talque $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$; $\forall (x, y) \in D$ tal que $d(P, P_0) < \delta$ y (x_1, y_1) es un ***punto mínimo local o relativo*** de D en f si y solo si $\exists \delta > 0$ talque $f(x, y) \geq f(x_1, y_1)$; $\forall (x, y) \in D$ tal que $d(P, P_1) < \delta$





Punto de silla.



Para hallar los mínimos y máximos locales o relativos y los puntos de silla seguiremos los siguientes pasos:

1. Se hallan las derivadas parciales de primer orden con respecto a x e y, e.i: $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ y $\dfrac{\delta f}{\delta y}$

2. Se la segunda derivada de x con respecto a x, de x con respecto a y, de y con respecto a x y de y con respecto a y, e.i: $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$

3. Se consigue los puntos críticos de la primera derivada, e.i: donde la primera derivada parcial se anula $\frac{\delta f}{\delta x} = 0$ y $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$

4. Se busca el herssiano, e.i, el siguiente determinante:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{vmatrix}$$

5. Se sustituyen los puntos críticos de las primeras derivadas parciales en las segundas derivadas parciales.

6. Si $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} < 0,\ \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0$ m y J(x, y)>0 entonces el punto (x_0, y_0) es un punto máximo, si $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} > 0,\ \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} > 0$ m y J(x, y)>0 entonces el punto (x_1, y_1) es un punto mínimo, si J(x, y)<0 hay un punto de silla.

7. Se sustituyen los puntos críticos en la función para así determinar los puntos máximos, mínimos y de silla según sea el caso.

<u>Definición 6:</u> Sea f la función de segundas derivadas parciales continuas tales que f: U $\rightarrow$ D $\wedge$ $\bar{x}$ =f(x_1, x_2, …. x_n) donde U$\subseteq\Re$n y sea (x_1, x_2,…. x_n)$\in$D.

La condición necesaria para que (a_1, a_2, …. a_n) sea un máximo o mínimo local o relativo de f, al igual que en el caso de varias variables, es que las primeras derivadas parciales existan y se anulen, simultáneamente, en dicho punto, e.i:

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_2}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

:

:

$$\frac{\delta f}{\delta x_n}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

La condición suficiente, al igual que en el caso de dos variables, es que el herssiano sea mayor que cero para que exista máximo o mínimo local o relativo, en este caso el herssiano se expresa por:

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & .f_{x_2x_2} & \ldots\ldots\ldots & f_{x_2x_n}. \\ : & : & & : \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

La matriz H se conoce como ***la matriz herssiana*** y es una matriz cuadrada de dimensión nxn y en ella podemos identificar n submatrices, y los determinantes de estas submatrices recibe el nombre ***menores principales*** de H, entonces tendremos n menores principales de dimensiones 1x1, 2x2, ……….(n-1)x(n-1),nxn respectivamente, e.i:

$$\text{Det.}H_1=\text{det.}\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det.}H_2=\text{det.}\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det.}H_3=\text{det.}\ H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{bmatrix}$$

Usando f definida como antes y siendo (a_1, a_2, …. a_n) un punto de su dominio, que satisface la condición necesaria de anular simultáneamente a todas las primeras derivadas parciales, tenemos que:

1. **Si los menores principales evaluados en (a_1, a_2, …. a_n), alternan su signo, siendo los impares negativos y los pares positivos, e.i, det.H_1<0, det. H_2>0, det. H_3<0, ………., entonces (a_1, a_2, …,,,. a_n) es un punto máximo local o relativo de f.**

2. **Si los menores principales evaluados en (a_1, a_2, …. a_n), son todos positivos, e.i, det.H_1>0, det. H_2>0, det. H_3>0, ….., entonces (a_1, a_2, …,,,. a_n) es un punto mínimo local o relativo de f.**

3. **Si no se cumple ninguna de las dos condiciones antes mencionadas no se puede extraer ninguna condición y se requiere un análisis adicional en la cercanía del punto en cuestión.**

<u>Definición 7:</u> Sea f la función definida por z=f(x, y), donde las variables x e y están sometidas a la condición dada por la ecuación: g(x, y)=0

Vamos a definir una función auxiliar L denominada *<u>función de Lagrange</u>* expresada por L(x, y, λ)=f(x, y) + λg(x, y).

En esta ecuación de Lagrange los máximos y mínimos locales o relativos si existen, sometidos a la condición g(x, y)=0, los cuales son pares (x, y) que se consiguen solo cuando el sistema de ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta y}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$

Como f está sometida a la restricción g(x, y)=0 y definida la función de Lagrange L, se definirá ahora la ***matriz herssiana condicionada por*** ***H_C*** de la manera siguiente:

$$H_c = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\delta g}{\delta x} & \frac{\delta g}{\delta y} \\ \frac{\delta g}{\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta g}{\delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta y^2} \end{vmatrix}$$

Así siendo $P_0=(x_0, y_0)$ un punto que se encuentra entre las soluciones del sistema de ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

Y evaluando H_C en $P_0=(x_0, y_0)$ se cumple que:

1. det. $H_C>0 \Rightarrow P_0=(x_0, y_0)$ es un punto máximo local o relativo.

2. det. $H_C<0 \Rightarrow P_0=(x_0, y_0)$ es un punto mínimo local o relativo.

3. De no cumplirse las condiciones anteriores, se requiere un análisis en una vecindad del punto.

<u>Definición 8:</u> Sea f la función definida por $\bar{x}=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ donde las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ están sometidas a la ecuación: $g(x_1, x_2, \ldots x_n)=0$

La función de Lagrange queda definida por la ecuación:

$L(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda)=f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots x_n)$

En estas condiciones, los máximos y mínimos locales o relativos, si existen, ocurren en el punto, que se encuentran entre las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\delta L}{\delta x_1}(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta x_2}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

:

:

$$\frac{\delta L}{\delta x_n}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda}(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n) = 0$$

En este caso, también puede hallar la matriz herssiana de dimensión (n + 1)x(n + 1) y se expresa:

$$H_c = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \ldots\ldots\ldots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \ldots\ldots\ldots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \ldots\ldots\ldots & L_{x_2x_n} \\ : & : & & : & \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \ldots\ldots\ldots & L_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Y los menores principales condicionados se determinan a partir de las submatrices Hi de dimensiones 3x3, 4x4, …..(n + 1)x(n + 1), y se denotan:

$$H_{3c} = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

$$H_c = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & L_{x_1x_3} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & L_{x_2x_3} \\ g_{x_3} & L_{x_3x_1} & L_{x_3x_2} & L_{x_3x_3} \end{bmatrix}$$

y deben cumplir las condiciones:

1. $\det.H_{3C}>0 \wedge \det.H_{4C}<0 \wedge \det.H_{5C}>0$ ………. entonces $(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ es un punto máximo local o relativo.

2. $\det.H_{3C}<0 \wedge \det.H_{4C}<0 \wedge \det.H_{5C}<0$ ………. entonces $(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ es un punto es un punto mínimo local o relativo.

3. De no cumplirse las condiciones anteriores, se requiere un análisis en una vecindad del punto.

EJERCICIOS RESUELTOS

19. Escribir la ecuación del plano tangente y normal a la superficie $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ en el punto P(2, -1, 1)

<u>Solución:</u> Hallamos las derivadas parciales $\frac{\delta z}{\delta x}_{(2,-1)} = x \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta x}_{(2,-1)} = 2y$, p $\frac{\delta z}{\delta y}_{(2,-1)} = -2y \Rightarrow \frac{\delta z}{\delta y}_{(2,-1)} = 2$ y $z - z_0 = z - 1$, $\therefore$, la ecuación a la plano tangente será: $z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ y la ecuación a la normal será: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

20. Escribir la ecuación del plano tangente y normal a la superficie $3xyz - z^3 = a^3$ en el punto P(0, a, a)

<u>Solución:</u> Hallamos las derivadas parciales de la función: $F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - a^3$, $\frac{\delta F}{\delta x}_{(0,a,a)} = 3yz \Rightarrow$

$\frac{\delta F}{\delta x}_{(0,a,a)}$=3a^2, $\frac{\delta F}{\delta y}_{(0,a,a)}$=3xz ⇒ $\frac{\delta F}{\delta y}_{(0,a,a)}$=0 y $\frac{\delta F}{\delta z}_{(0,a,a)}$=3xy - 3z^2 ⇒

$\frac{\delta F}{\delta z}_{(0,a,a)}$=-3a^2 ∴, la ecuación a la plano tangente será:

3a^{2}x – 3a^2(z - a)=0 ⇒ 3a^{2}x – 3a^{2}z + 3a^3=0 ⇒ x – z=a y la ecuación a la normal será: $\frac{x\ -\ 2}{3a^2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z\ -1}{3a^2}$

21. Escribir la ecuación del plano tangente y normal a la superficie

$z=\frac{x^2}{2}-y^2$ en el punto P(2, -1, 1)

Solución: Hallamos las derivadas parciales $\frac{\delta z}{\delta x}_{(2,-1)}$=x ⇒

$\frac{\delta z}{\delta x}_{(2,-1)}$=2y, p $\frac{\delta z}{\delta y}_{(2,-1)}$=-2y ⇒ $\frac{\delta z}{\delta y}_{(2,-1)}$=2 y z - z$_0$=z – 1, ∴, la ecuación a la plano tangente será: z – 1=2(x – 2) + 2(y + 1) y la ecuación a la normal será: $\frac{x\ -\ 2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z\ -1}{-1}$

22. Hallar si los hay los puntos máximos locales, mínimos locales y los puntos de silla de la función: f(x, y)=x^2 – xy + y^2 – x – y

Solución: Aplicando los pasos señalados anterior mente se tiene:

1. $\frac{\delta f}{\delta x}=2x - y - 1$, $\frac{\delta f}{\delta y}=-x+2y-1$

2. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=2$ $\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}=-1$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=2$

3. 2x – y – 1=0 y –x + 2y – 1=0, despejando el valor de y de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda se obtiene que los valores de x e y son respectivamente: x=1 e y=-1

4. El herssiano es $J(x,y)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3>0$

5. Como las derivadas nos dieron valores constantes pasamos directo al paso número 6

6. Como las derivadas de segundo orden con respecto a x e y nos dieron mayor que cero y el herssiano también nos dio mayor que cero deducimos que hay un punto mínimo local o relativo en f(1, -1)=-1

23. Determinar los puntos máximos y mínimos locales si existen de la función: $f(x, y, z)=-2x^3 + 6xz + 2y - y^2 - 6z^2 + 5$

<u>Solución:</u> Aplicando los pasos señalados anterior mente se tiene:

1. $\frac{\delta f}{\delta x}=6x^2+6z=0$, $\frac{\delta f}{\delta y}=2-2y=0$ y $\frac{\delta f}{\delta z}=6x-12z=0$

2. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=-12x$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=-2$, $\frac{\delta^2 f}{\delta z^2}=-12$, $\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}=0$,

$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta z}=\frac{\delta^2 f}{\delta z\delta x}=6$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta z}=\frac{\delta^2 f}{\delta z\delta y}=0$,

3. $6x^2 + 6z=0$, $2 - 2y=0$ y $6x - 12z=0$, resolviendo este sistema de ecuaciones nos resulta: $P_0(0, 1, 0)$ y $P_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$

4. El herssiano es $H(x,y,z)=\begin{vmatrix} -12x & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{vmatrix}$

5. Evaluando el punto $P_0(0, 1, 0)$ los menores principales resultan :

det.H_1=0, det.H_2=0 y det.H_3=72, en conclusión este punto no cumple con ninguna de las dos condiciones para la existencia de máximos y mínimos locales o relativos.

Para el punto $P_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$, se tiene que los menores principales son: det.H_1=-6<0, det.H_2=12>0 y det.H_3=72<0, donde vemos que los valores se alterna, en consecuencia existe un máximo local en el punto

$P_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ en $f(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - 2(1) - (1)^2 - 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5 = \frac{21}{8}$

24. Hallar el valor mínimo local o relativo de la función definida por $f(x, y)=(x + y)^2$, sujeto a la condición $2x + y=1$

Solución:

1. Creamos la función de Lagrange: $L(x, y, \lambda)=(x + y)^2 + \lambda(2x + y - 1)$

2. Hallamos las derivadas parciales de L con respecto a x, y, λ, de g con respecto a x e y, y las segundas derivadas de L con respecto a x y luego con respecto a x, L con respecto a x y luego con respecto a y, L con respecto a y, luego con respecto a y.

$$\frac{\delta L}{\delta x}(x, y, \lambda) = 2(x + 2y + \lambda)$$

$$\frac{\delta L}{\delta y}(x, y, \lambda) = (2x + 2y + \lambda)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,\lambda) = (2x + y - 1)$$

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x,y,\lambda) = 2$$

$$\frac{\delta g}{\delta y}(x,y,\lambda) = 1$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta x^2}(x,y,\lambda) = 2$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta x \delta y}(x,y,\lambda) = 2$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y^2}(x,y,\lambda) = 2$$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones constituida por las derivadas se tiene que x=1 e y=-1, luego el punto a estudiar será (1, -1)

4. Hallamos det.Hc

$$\text{det.}H_c = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

Luego concluimos que existe un punto mínimo de f en f(1, -1)=0

25. Hallar el valor mínimo local o relativo de la función definida por x^2 + y^2 + z^2 sujeto a x + y – z=3

Solución:

1. Creamos la función de Lagrange:

L(x, y, λ)= x^2 + y^2 + z^2 + λ(x + y – z – 3)

2. Hallamos las derivadas parciales de L con respecto a x, y λ, de g con respecto a x e y, y las segundas derivadas de L con respecto a x y luego con respecto a x, L con respecto a x y luego con respecto a y, L con respecto a y luego con respecto a y.

$$\frac{\delta L}{\delta x}(x,y,z,\lambda) = 2x + \lambda$$

$$\frac{\delta L}{\delta y}(x,y,z,\lambda) = 2y + \lambda$$

$$\frac{\delta L}{\delta z}(x,y,z,\lambda) = 2z - \lambda$$

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda}(x,y,z,\lambda) = x + y - z - 3$$

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x,y,z) = 1$$

$$\frac{\delta g}{\delta y}(x,y,z) = 1$$

$$\frac{\delta g}{\delta z}(x,y,z) = -1$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta x^2}(x,y,z,\lambda) = 2$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta x \delta y}(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta x \delta z}(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y \delta z}(x,y,z,\lambda) = 0$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta y^2}(x, y, z, \lambda) = 2$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta z^2}(x, y, z, \lambda) = 2$$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones constituida por las derivadas se tiene que x=1 e y=-1, luego el punto a estudiar será (1, 1, -1)

4. Hallamos det.Hc

$$\det.H_{4c} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

$$\det.H_{3c} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Luego concluimos que existe un punto mínimo de f en f(1, 1, -1)=3

EJERCICIOS PROPUESTOS

36. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes y de las normales a las siguientes superficie en los puntos que se indican:

d. Al paraboloide de revolución $z=x^2 + y^2$, en el punto (1, -2, 5)

e. Al cono $\frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^2}{8}=0$, en el punto (4, 3, 4)

f. A la esfera $x^2 + y^2 + z^2=2rz$ en el punto ($r\cos\alpha$, $r\,\mathrm{sen}\,\alpha$, r)

37. Demostrar, que la ecuación del plano tangente a la superficie central de 2ª orden $ax^2 + by^2 + cz^2=c$ en el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ tiene la forma $ax_0x + by_0y + cz_0z =k$

38. Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2=21$, trazar a ella planos tangentes que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z=0$

39. Hallar en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x=0$ los puntos en que los planos tangente a ella sea paralelo a los planos coordenados

40. Determinar los puntos máximos y mínimos local y los de silla, si existen, de las funciones definidas por:

k. $f(x, y)=2x – x^2y^2 – 2y – 3$

l. $f(x, y)=\frac{xy+1}{x+y}$

m. $f(x, y)=3x^2 + 2y^2 - 8x – 2xy + 6y$

n. $f(x, y)=2y^3 - 6xy - 2x^3$

o. $f(x, y)=50 - (x - 5)^2 - (y -5)^2$

p. $f(x, y)=x^3 - 27xy + y^3 - 15x^2$

q. $f(x, y)= \frac{x}{x+y}$

r. $f(x, y)= \frac{xy-4}{x-y}$

s. $f(x, y)= \frac{x^2+y}{y+1}$

t. $f(x, y)=4x^3 + 6x^2 + 2y^3 - 3y^2 -24x + 7$

41. Demuestre que las funciones definida como sigue, tienen un mínimo local en los puntos señalado en cada caso:

d. $x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ en $(5, 6)$

e. $x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ en $(a\sqrt[3]{3}\ ,a\sqrt[3]{3})$

f. $x^4 + x^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ en $(\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}\ , -\sqrt{2})$

42. Determinar los puntos máximos y mínimos local, si existen, sometidos a las condiciones dados en cada caso, de las funciones definidas por:

i. $f(x, y)=2x + 3y$, sometido a $x^2 + y^2 =4$

j. $f(x, y)=3(x^2 + y^2) + xy$ sujeto a $x + 2y=5$

k. $f(x, y)=4xy - x^2 - y^2$ sometido a $x^2 + y^2 = 8$

l. $f(x, y)=3x^2 - 3xy + 6y^2$ sujeto a $x + 3y=44$

m. $f(x, y)=x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x$ sometido a $2x - y=0$

n. $f(x, y, z)=xyz$ sometido a $x + 2y + 3z=18$

o. $f(x, y, z)=x + 2y + 3z$ sometido a $x^2 + y^2 + z^2=25$

p. $f(x, y, z)=x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x - y + z=1$

43. Sabiendo que la función definida por f(x, y, z)= alcanza un valor mínimo sometido a $x + y=3$ y e $y - z=-2$

CAPÍTULO X

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE INTEGRALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

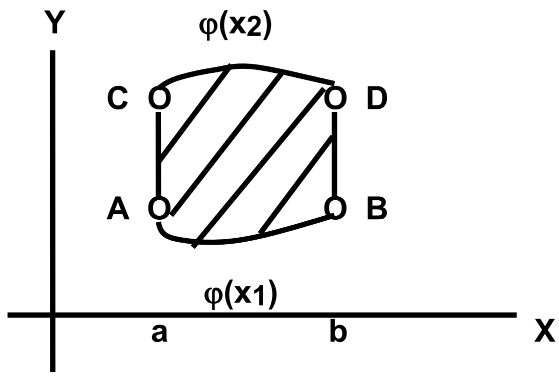
En este capítulo se estudiara: Integrales Múltiples: Integrales Dobles, Colocación de los Límites de Integración en la Integral Doble, Integrales Dobles en Coordenadas Polares, Integrales Dobles en Coordenadas Cilíndricas, Calculo de Áreas de figuras Planas, Áreas en Coordenadas Polares, Calculo de Volumen, Calculo de Áreas de Superficie, Masa y Momentos Estáticos de las láminas, Coordenadas del Centro de Gravedad de las Láminas, Momentos de Inercia de las Láminas, Integrales Triples, Cambio de Variables en la Integral Triple, Coordenadas Cilíndricas en las Integrales Triple, Coordenadas Esféricas en las Integrales Triples, Calculo de Volumen, Masa de un Cuerpo, Integrales Impropias Dependientes de un Parámetro, Integrales Impropias Múltiples, Derivación Respecto al Parámetro, integrales Dobles Impropias, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

<u>**Definición 1:**</u> **Se llama <u>Integral Doble</u> de una función z=f(x,y) continua sobre un recinto cerrado S del plano XOY, al límite de la suma integral dobles correspondiente** $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=0}^{i}\sum_{j=0}^{j}[f(x,y)]\Delta x_i \Delta y_j$ **(1)**

donde, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, **y la suma se extiende a aquellos valores de i,j para los que los puntos (,)∈S**

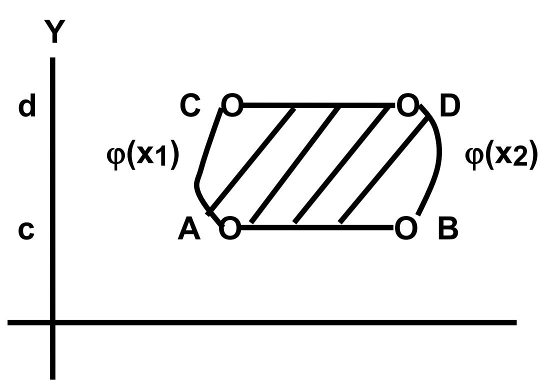
<u>**Definición 2:**</u> **El recinto de integración S está limitada de izquierda y derecha por las rectas x=a, x=b con x∈(a, b), mientras que por debajo está limitado por las curvas** $\varphi(x_1)$ **(AB) y** $\varphi(x_2)$ **(CD) con** $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$**, cada una de las cuales corta una vertical** $\bar{x}$ **con** $\bar{x} \in (a, b)$ **en un solo punto. En el recinto S la x varía desde a hasta b, e y cuando x se mantiene constante desde** $\varphi(x_1)$ **hasta** $\varphi(x_2)$ **el cálculo de la integral (1) puede realizarse:**

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} f(x,y)dy \right) \quad \text{o} \quad \iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} dy \int_a^b (f(x,y))dx$$



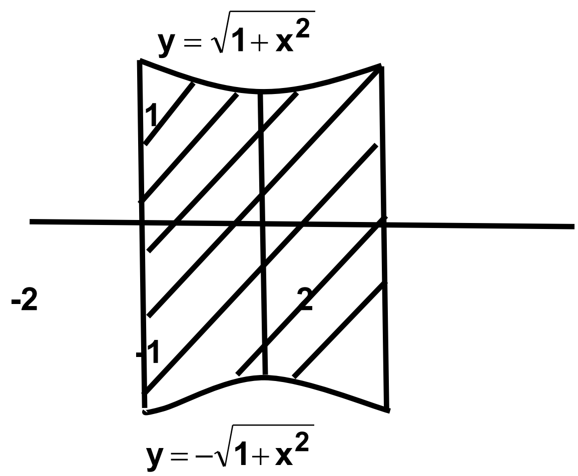
<u>Definición 3</u>: **El recinto de integración S, está limitado abajo y arriba por las curvas y=c e y=d con $y \in (c, d)$, mientras que de derecha a izquierda por las curvas por las curvas $\varphi(y_1)$ (AB) y $\varphi(y_2)$ (CD) con $\varphi(y_1)<\varphi(y_2)$, cada una de las cuales corta una vertical $\overline{y}$ con $\overline{y} \in (c, b)$ en un solo punto. En el recinto S la y varía desde a hasta b, e y cuando y se mantiene constante desde $\varphi(y_1)$ hasta $\varphi(y_2)$ el cálculo de la integral (1) puede realizarse:**

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy\left(\int_{\varphi(x_1)}^{\varphi(x_2)} f(x,y)\,dx\right) \quad \text{o} \quad \iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi(y_1)}^{\varphi(y_2)}\left(\int_c^d (f(x,y)\,dx\right)dy$$



Si el recinto de integración no pertenece a ninguna de las formas anteriores se procura dividirlo en parte, de manera que cada una de ellas corresponda a alguna de estas dos formas

Ejemplo: Determinar los límites de integración de la integral si el recinto de integración S de la figura que se muestra abajo está limitada por las hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por las rectas x=2 y x=-2, se considera el recinto que comprende los ejes de coordenados



Solución: Los límites con respecto a x está representado por las rectas x=-2 y x=2, mientras que en el eje y por las curvas $y=-\sqrt{1+x^2}$ y $y=\sqrt{1+x^2}$, en consecuencia se tiene: $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dx\right)dy$

Definición 4: Cuando la integral doble se pasa de las coordenadas rectangulares x e y a las coordenadas polares r, φ estas se relacionan mediante las identidades $x=r\cos\varphi$ e $y=r\,\mathrm{sen}\varphi$ y se verifica la fórmula:

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_S f(r\cos\varphi, r\,sen\varphi)|I|drd\varphi, \quad \text{donde} \quad |I| = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{vmatrix} \Rightarrow |I| =$$

$\begin{vmatrix} \cos\varphi & sen\varphi \\ -r\,sen\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow |I| = r$, **Si el recinto de integración S está limitado por los rayos r=α y r=β con $\alpha<\beta$ y por las curvas r=$r_1(\varphi)$ y r=$r_2(\varphi)$ donde $r_1(\varphi)<r_2(\varphi)$, la integral doble se puede calcular por:**

$$\iint_S f(r\cos\varphi, r\,sen\varphi)rdrd\varphi = \int_\alpha^\beta \left(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\,sen\varphi)rd\varphi \right) dr = \int_\alpha^\beta r \left(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)d\varphi \right) dr$$

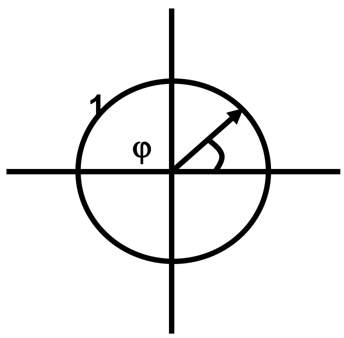
Análogamente que en las coordenadas rectangulares, si el recinto de integración no pertenece a ninguna de las formas anteriores se procura dividirlo en parte, de manera que cada una de ellas corresponda a alguna de estas dos formas

Definición 5: **Cuando la integral doble se pasa de las coordenadas rectangulares x e y a las coordenadas curvilineas u, v estas se relacionan mediante las identidades x=φ(u, v) e y=Ψ(u, v) que establezca una correspondencia biunívoca y continua en ambo sentidos, entre los puntos del recinto XOY, y los puntos del recinto determinado por S' del plano UO'V al mismo tiempo que él jacobiano** $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{vmatrix}$

conserva invariante su signo en el recinto, será valía la fórmula:

$\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{S'} f\left|(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right|\left|I\right|dudv$, **los limites d esta nueva integral se determina de acuerdo con las reglas generales, sobre la base de la forma que tenga el recinto S’**

<u>Ejemplo:</u> Calcular la siguiente integral $\iint\limits_{S}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$**, pasando a coordenadas polares, donde el recinto S es un circulo de radio R=1, con centro en el origen de coordenadas.**



<u>Solución:</u> Como $x=r\cos\varphi$, $y=r\,sen\varphi$ **y** $\left|I\right| = r$, **se tiene que:**

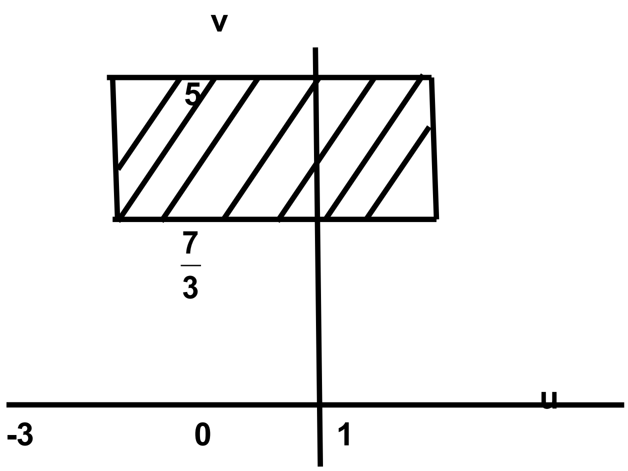
$$\iint\limits_{S}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2 sen^2\varphi}\,rdr\right)d\varphi \Rightarrow$$

$\iint\limits_{S}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr\right)d\varphi$, **haciendo el cambio de variable t=1 –** $r^2 \Rightarrow dt=-2rdr \Rightarrow rdr=-\left|\frac{dt}{2}\right|$**, cuando** $r \to 0 \Rightarrow t \to 1$ **y cuando** $r \to 1 \Rightarrow t \to 0$**, con lo que la integral se transforma en:**

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{t}\,dt\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big\|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

Ejemplo: Calcular la integral $\iint\limits_S (x - y)dxdy$ donde S es el dominio del plano OXY limitado por las rectas l_1:x – y + 1=0, l_2:x – y - 3=0, l_3:3x + 9y - 7=0 y l_4:x + 3y - 5=0

Solución: Utilizaremos las integrales curvilíneas, haciendo el cambio u=y – y, v=y + $\frac{1}{3}$x, se obtienen de las rectas: l_1:u=1, l_2:u=3, l_3:v=$\frac{7}{3}$ y l_4:v=5 y su representación gráfica es:



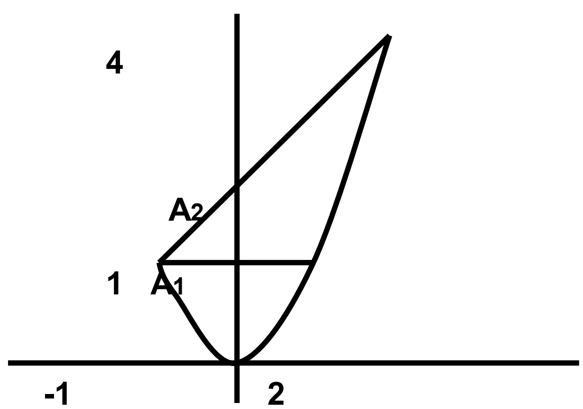
Calculando el jacobiano I=$\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} \Rightarrow$ I=$\frac{3}{4}$, sustituyendo estos valores en la integral se tiene:

$$\iint\limits_S (x - y)dxdy = \iint\limits_D \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]dudv = \frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5}\int_{-3}^{1} ududv = -8$$

<u>Definición 6:</u> Para calcular el área S de figuras planas en un recinto del plano S se obtiene mediante la integral S=$\iint\limits_{S} dx\,dy$, si el recinto S está determinado en los intervalo $x\in(a, b)$ e $y\in(\varphi(x), \Psi(x))$ esta área se calcula por la integral S=$\int_{\alpha}^{\beta} r\left(\int_{f(\varphi)}^{f(\psi)} r\,dr\right) d\varphi$

<u>Ejemplo:</u> Construir el recinto cuya área se expresa mediante: S=$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$, calcular esta área y cambiar el orden de integración.

<u>Solución:</u> Visualicemos esto mediante la gráfica.



Los puntos de intersección de la parábola y la recta se consiguen igualando las dos funciones es decir, x^2=x + 2, donde loa puntos son (-1, 1) y (2, 4), primero resolveremos la integral, luego cambiamos los límites de integración y la volvemos a resolver los resultados deben

coincidir $S=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2}dy\right)dx \Rightarrow S=\int_{-1}^{2}\left(y\Big|_{x^2}^{x+2}\right)dx \Rightarrow S=\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx \Rightarrow S=$

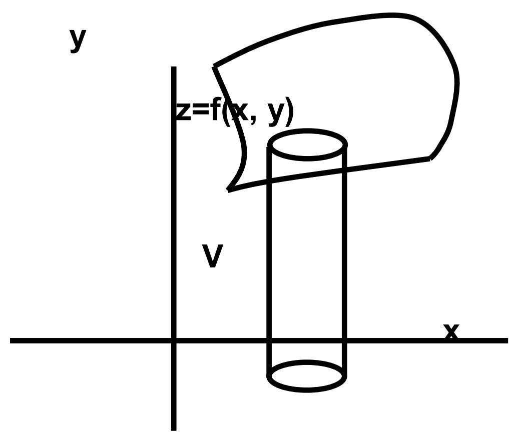
$$\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \Rightarrow S=\frac{9}{2}$$

Ahora cambiamos el orden de integración, observamos en la figura que tenemos dos áreas, la primera área de 0 a 1 con respecto Y y de $\sqrt{y}$ hasta $-\sqrt{y}$ con respecto X y la segunda, 1 a 4 con respecto al eje Y y de $\sqrt{y}$ hasta y - 2 con respecto al eje X, es decir:

$$S=\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx\right)dy+\int_{1}^{4}\left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}}dx\right)dy \Rightarrow S=\int_{0}^{1}\left(x\Big|_{--\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\right)dy+\int_{1}^{4}\left(x\Big|_{y-2}^{\sqrt{y}}\right)dy \Rightarrow$$

$$S=2\int_{0}^{1}\sqrt{y}dy+\int_{1}^{4}\sqrt{y}dy \Rightarrow S=2\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{1}+\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{4} \Rightarrow S=\frac{9}{2}$$

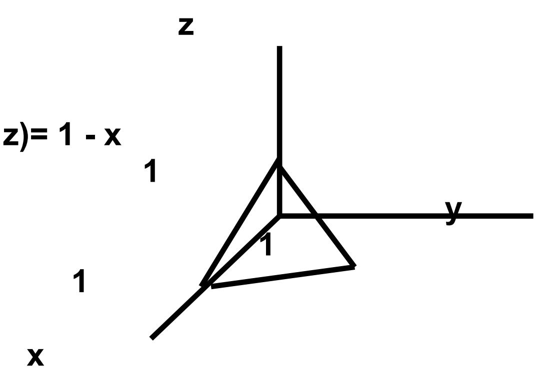
<u>Definición 7:</u> El volumen de un cilindioide, limitado por arriba por las superficies continuas z=f(x, y), por debajo por l plano z=0 y lateralmente por la superficie cilíndrica recta que corta al plano XOY el recinto S se calcula mediante la integral: $V=\iint_S f(x,y)dxdy$



<u>Ejemplo:</u> **Expresar, por medio de una integral doble, el volumen de una pirámide cuyos vértices son O(0, 0,0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0) y C(0, 0, 1), colocar loa límites de integración**

<u>Solución:</u> **Realizaremos la gráfica para visualizar los límites de integración y luego resolveremos la integral**

f(x, y, z)= 1 - x



$$V=\int_0^1\left(\int_0^x (1-x)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_y^1 (1-x)dx\right)dy \Rightarrow \int_0^1 (y-xy)\Big|_0^x dx=\int_0^1 (x-x^2)\Big|_y^1 dy \Rightarrow$$

$$V=yx-\frac{x^2}{2}y\Big|_0^1=yx-\frac{x^2}{2}y\Big|_0^1 \Rightarrow V=\frac{1}{6}$$

<u>Definición 8:</u> **Si S es un recinto del Plano XOY, ocupado por una lámina, y $\rho(x, y)$ es la densidad superficial de dicha lámina en el punto $P(x_o, y_o)$, la masa M de está y sus momentos estáticos Mx y My con respecto a los ejes OX y OY se expresan mediante las integrales:**

$M=\iint\limits_S \rho(x-y)dxdy$, $M_X=\iint\limits_S \rho y(x-y)dxdy$ y $M_Y=\iint\limits_S \rho x(x-y)dxdy$, si la lámina es homogénea $\rho(x, y)$ es igual a una constante, si $C(\overline{x}, \overline{y})$ es el centro de

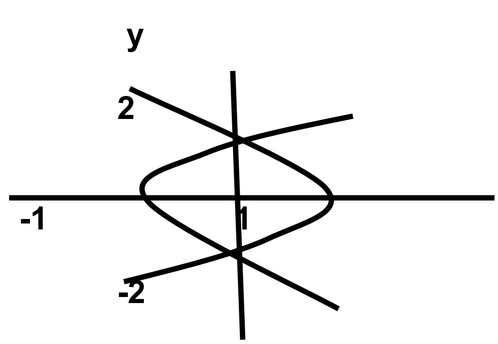
gravedad de una lámina se tiene que: $\bar{x} = \frac{M_x}{M}, \bar{y} = \frac{M_y}{M}$, donde M es la masa de las láminas y M_x, M_y sus momentos estáticos respecto a los ejes de coordenados.

<u>Definición 9:</u> Los momentos de inercia de dichas láminas con respecto a los ejes OX y OY se expresan como: $I_x = \iint_S y^2 \rho(x-y)dxdy$ $I_y = \iint_S x^2 \rho(x-y)dxdy$ el momento de inercia con respecto al origen de coordenados se expresa como:

$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x-y)dxdy = I_x + I_y$

<u>Ejemplo:</u> Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2=4x + 4$ e $y^2=-2x + 4$

<u>Solución:</u> Realicemos la gráfica para ello buscamos los puntos donde las parábolas se cortan igualando las dos funciones y obtenemos que se cortan en los puntos (0, -2) y (0, 2) y luego aplicamos las fórmulas integrales.



Como podemos observar en la gráfica vamos a integrar con respecto a y desde -2 hasta 2 y con respecto al eje x desde $\frac{4-y^2}{2}$ hasta $\frac{4-y^2}{4}$

$$M=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{4-y^2}{4}}dx\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{4}-\frac{4-y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}y^2dy=\frac{4}{3}$$

$$Mx=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{4-y^2}{4}}y\,dx\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{4}-\frac{4-y^2}{2}\right)y\,dy=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}y^3dy=2$$

$$My=\int_{-2}^{2}\left(\int_{\frac{4-y^2}{2}}^{\frac{4-y^2}{4}}x\,dx\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\left(\frac{4-y^2}{4}\right)^2-\left(\frac{4-y^2}{2}\right)^2\right)dy=\frac{1}{32}\int_{-2}^{2}3(4-y^2)^2dy=\frac{56}{5}$$

$$(\bar{x},\bar{y})=(\frac{3}{2},142)$$

<u>Definición 10:</u> Se llama una integral triple de una función u=f(x, y, z) en un recinto V, al límite de la correspondiente suma triple:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\substack{Max\Delta x_i\to 0\\ Max\Delta y_j\to 0\\ Max\Delta z_k\to 0}}\sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

el cálculo de la integral triple se reduce a calcular sucesivamente tres integrales ordinarias (simple) o a calcular una integral doble y una simple

Ejemplo: Calcular la integral: $\iiint\limits_V x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$ donde el recinto V se determina por las desigualdades 0≤x≤1, 0≤y≤x, 0≤z≤xy

Solución: Integraremos primero con respecto a z, luego con respecto a y por ultimo con respecto a x, donde los límites de integración los sacamos del recinto que nos dan:

$$V = \int_0^{xy}\left(\int_0^{xy}\left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\right)dy\right)dx \Rightarrow V = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x x^5y^4\,dy\right)dx \Rightarrow V = \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10}\,dx \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{550}$$

Definición 11: Si en la integral triple $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ hay que pasar de las variables x, y, z a las variables u, v, w que están relacionadas con las primeras por las igualdades x=φ(u,v,w), y=Ψ(u,v,w), Z=ρ(u, v, w), donde las funciones φ, Ψ, ρ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden, entonces se puede establecer una correspondencia biunívoca continua en ambos sentidos entre los puntos del recinto de integración de V del espacio OXYZ y los puntos del recinto determinado V' del espacio O'UVW y el determinante funcional o jacobiano se determina como:

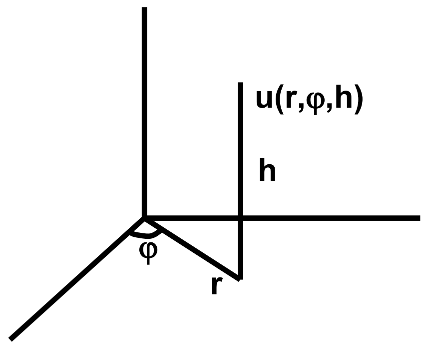
$$I=\frac{D(x,y,x)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u}\\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta u}\\ \frac{\delta x}{\delta w} & \frac{\delta y}{\delta w} & \frac{\delta z}{\delta w}\end{vmatrix}$$ **que conserva invariante su signo en el recinto**

V, con lo cual se hace valida la fórmula:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_V f(u,v,w)|I|dudvdw$$

<u>Definición 12:</u> Si en la integral triple $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ hay que pasar a las coordenadas cilíndricas r, φ, Ψ que están relacionadas con las primeras por las igualdades x=rcosφ, y=rsenΨ, Z=h, donde las funciones r, φ, Ψ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden, entonces se puede establecer una correspondencia biunívoca continua en ambos sentidos entre los puntos del recinto de integración de V del espacio OXYZ y los puntos del recinto determinado V' del espacio O'UVW y el determinante funcional o jacobiano se determina como:

$$I=\frac{D(x,y,x)}{D(r,\varphi,h)}=\begin{vmatrix}\frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta r}\\ \frac{\delta x}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta \varphi}\\ \frac{\delta x}{\delta h} & \frac{\delta y}{\delta h} & \frac{\delta z}{\delta h}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi & 0\\ -r\,\mathrm{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$



que conserva invariante su signo en el recinto V, con lo cual se hace valida la fórmula: $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r,\varphi,h)|I|drd\varphi dz$

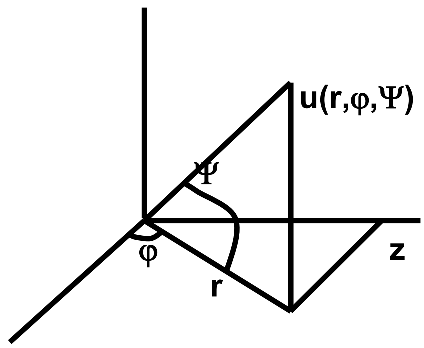
Definición 13: se definen las Coordenadas Esféricasφ, Ψ, r (φ es la longitud, Ψ es la latitud y r el radio vector) donde $x=r\cos\Psi\cos\varphi$, $y=r\cos\Psi \operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\Psi$ y el jacobiano I, como:

$$I=\frac{D(x,y,x)}{D(r,\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta r} \\ \frac{\delta x}{\delta \psi} & \frac{\delta y}{\delta \psi} & \frac{\delta y}{\delta \psi} \\ \frac{\delta x}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta z}{\delta \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\psi \\ -r\operatorname{sen}\psi\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi & r\cos\psi \\ -r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\cos\psi$$

Ejemplo: Calcular la siguiente integral:

$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ pasando a coordenadas esférica, donde V es una esfera de radio R con $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\leq\Psi\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq r\leq R$

Solución:



Sustituyendo los valores de x, y, z y el jacoviano en la integral se tiene:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+r^2\cos^2\psi\,\mathrm{sen}^2\varphi+r^2\mathrm{sen}^2\psi}=r \qquad \text{y}$$

$$I=\frac{D(x,y,x)}{D(r,\varphi,\psi)}=r^2\cos\psi\text{ , donde } I=\int_0^R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}r^3\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi=\pi R^4$$

Definición 14: **El volumen de un recinto del espacio tridimensional 0xyz es V=** $\iiint_V dx\,dy\,dz$

Definición 15: **La masa de un cuerpo que ocupa el recinto V, viene dada por: M=** $\iiint_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$**, donde** $\gamma(x,y,z)$ **es la densidad del cuerpo en el punto (x, y, z)**

Definición 16: **Los momentos estáticos de un cuerpo con respecto a los planos coordenados son:**

$M_{xy}=\iiint_V \gamma(x,y,z)\,z\,dx\,dy\,dz$

$$M_{xz}=\iiint\limits_{V}\gamma(x,y,z)y\,dx\,dy\,dz$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{V}\gamma(x,y,z)x\,dx\,dy\,dz$$

<u>Definición 17:</u> Las coordenadas del centro de gravedad se calculan mediante las fórmulas:

$\bar{x}=\dfrac{M_{yz}}{M},\ \bar{y}=\dfrac{M_{xz}}{M},\ \bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}$ Si los cuerpos son homogéneos =1, entonces los momentos de inercia se calculan mediante las integrales:

$$I_x=\iiint\limits_{V}(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$I_y=\iiint\limits_{V}(x^2+z^2)\gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$I_z=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

Poniendo en estas fórmulas, obtenemos los momentos de inercia del cuerpo.

<u>Ejercicios Resueltos</u>

1. Hallar la integral iterada de segundo orden $I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{2x^2-x}^{x+x^2}x\,dy\right)dx$.

<u>Solución:</u> $I=\int_{-1}^{2}\left(\int_{2x^2-x}^{x+x^2}x\,dy\right)dx \Rightarrow I=\int_{-1}^{2}\left(\left[xy\right]_{2x^2-x}^{x+x^2}\right)dx \Rightarrow I=\int_{-1}^{2}(2x+x^2-x^3)dx \Rightarrow I=\frac{9}{4}$

2. **Hallar la integral iterada de segundo orden** $I=\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2x^2-x}^{4\cos\varphi} r^3 dr\right)d\varphi$.

<u>**Solución:**</u> $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2}^{4\cos\varphi} r^3 dr\right)d\varphi \Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_2^{4\cos\varphi} d\varphi \Rightarrow I=$

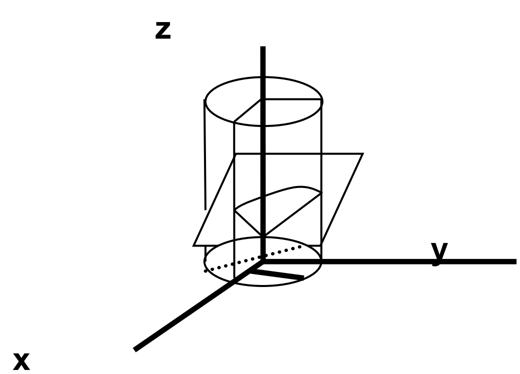
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(64\cos^4\varphi-4)d\varphi \Rightarrow I=\left[64\left(\frac{30}{8}+\frac{\text{sen}2\varphi}{4}+\frac{\text{sen}2\varphi}{4}\right)-4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I=10\pi$$

3. **Hallar el volumen en el primer octante entre los planos z=0 y z=x + y + 2, e interior al cilindro $x^2 + y^2=16$.**

<u>**Solución:**</u> $V=\iint_S z\,dx\,dy \Rightarrow V=\int_0^4\left(\int_0^{\sqrt{16-x^2}}(x+y+2)dy\right)dx \Rightarrow V=$

$$\int_0^4\left(x\sqrt{16-x^2}+8-\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{16-x^2}\right)dx \Rightarrow V=$$

$$\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(16-x^2)^3}+8x-\frac{x^3}{6}+x\sqrt{16-x^2}+16\text{sen}^{-1}\frac{1}{4}x\right]_0^4 \Rightarrow V=\left(\frac{128}{3}+8\pi\right)$$

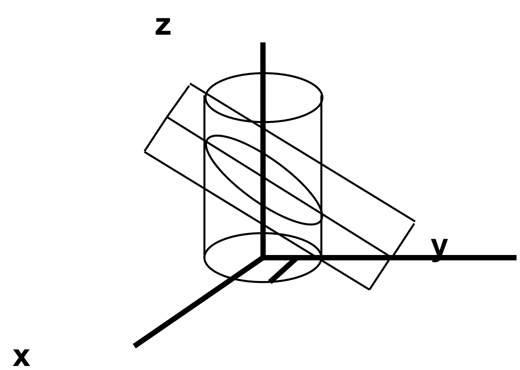


4. Hallar el volumen acotado por el cilindro $x^2 + y^2=4$ y los planos y + z=4 y z=0.

Solución: $V=\iint\limits_S z\,dx\,dy \Rightarrow V=\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)dx\right)dy \Rightarrow$

$$V=2\int_{-2}^{2}\left(\int_{-0}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)dx\right)dy \Rightarrow V=2\int_{-2}^{2}[(4-y)x]_0^{\sqrt{4-y^2}}\,dy \Rightarrow V=2\int_{-2}^{2}(4-y)\sqrt{4-y^2}\,dy \Rightarrow$$

$V=16\pi$



5. Calcular el momento de inercia de la figura material plana limitada por las líneas $y^2=1 - x$, x=0 e y=0, respecto al meje =y, si la densidad en cada punto es igual a y.

Solución: Aplicando la fórmula: $I_{yy}=\iint\limits_S x^2dxdy$, se tiene que:

$$I_{yy}=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x}}yx^2dy\right)dx \Rightarrow I_{yy}=\int_0^1\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{1-x}}dx \Rightarrow I_{yy}=\int_0^1 x^2(1-x)dx \Rightarrow I_{yy}=\frac{1}{24}$$

6. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

<u>Solución:</u> Aplicando la fórmula:

$$x_c=\frac{\iint\limits_S \gamma(x,y)x\,dx\,dy}{\iint\limits_S x\,dx\,dy} \quad y_c=\frac{\iint\limits_S \gamma(x,y)y\,dx\,dy}{\iint\limits_S x\,dx\,dy}$$ se obtiene:

$$x_c=\frac{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx}{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx} \Rightarrow x_c=\frac{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\frac{1}{4}ab\pi} \Rightarrow x_c=\frac{-\frac{b}{3a}\sqrt{(a^2-x^2)^3}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}ab\pi} \Rightarrow x_c=$$

$$\frac{4a}{3\pi}, \text{ luego } y_c=\frac{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\right)dx}{\frac{1}{4}ab\pi} \Rightarrow y_c=\frac{4b}{3\pi}$$

7. Calcular la integral triple $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left(\int_0^2 zr^2 \operatorname{sen}\varphi\,dz\right)dr\right)d\varphi$

Solución: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left[\frac{z^2}{2}r^2\operatorname{sen}\varphi\right]^2 dr\right)d\varphi \Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^2\operatorname{sen}\varphi dr\right)d\varphi \Rightarrow I=$

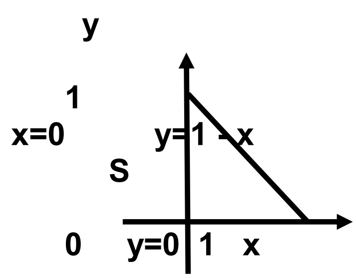
$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^3\right]_0^1\operatorname{sen}\varphi d\varphi \Rightarrow I=\frac{2}{3}\left[\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I=\frac{2}{3}$

8. **Calcular la integral triple** $I=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sec\varphi}\operatorname{sen}2\varphi dr\right)d\varphi\right)d\psi$

Solución: $I=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}\varphi d\varphi\right)d\psi \Rightarrow I=2\int_0^{\pi}\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right]d\psi \Rightarrow I=2(1-\sqrt{2})\pi$

9. **Calcular la integral iterada de tercer orden de la función f(x, y, z)=xyz, extendida por el dominio V limitado por los planos x=0, y=0, x + y + z=1.**

Solución: Ilustremos esto primero mediante la figura:



Este dominio es regular, puesto que está limitado por encima y por debajo por los planos z=0, z=1 – x – y, respectivamente y su proyección sob re el eje 0xy representa un dominio regular del plano S que es un

triángulo como se muestra en la figura, limitado por las rectas x=0, y=0,

y=1 – x, por lo tanto, su integral se calcula como: $I_V=\iint\limits_S\left[\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\right]d\sigma$,

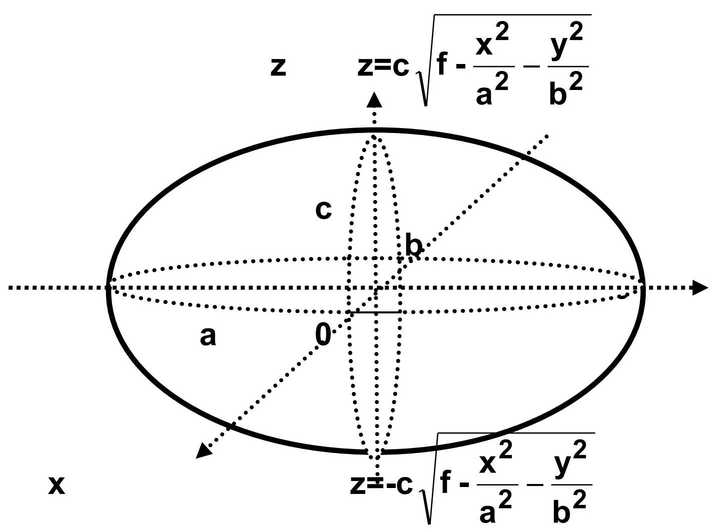
poniendo los límites en la integral iterada de segundo orden se obtiene:

$$I_V=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\int_0^{1-x-y} xyzdz\right]dy\right]dx \quad\Rightarrow\quad I_V=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left[\frac{xyz^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dy\right]dx \quad\Rightarrow\quad I_V=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2\right]dx \Rightarrow I_V=\frac{1}{24}\int_0^1 (x(1-x)^4 dx \Rightarrow I_V=\frac{1}{720}$$

10. Calcular el volumen de un elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

<u>Solución:</u> Ilustremos esto mediante la figura siguiente:



El elipsoide está limitado por debajo, con la superficie $z=-c\sqrt{f-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ y por encima, con la superficie $z=c\sqrt{f-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ la proyección de este elipsoide sobre el plano 0xy es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Por lo tanto, reduciendo a la integral de tercer orden, se obtiene: V=

$$\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\right)dy\right)dx \quad\Rightarrow\quad V=2c\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy\right)dx,$$

durante el cálculo de la integral interior consideremos x constante y hagamos la sustitución $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\text{sen}t \Rightarrow dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t$, donde la variable y varía desde $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ hasta $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, por lo que t varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, colocando los nuevos límites de integración se obtiene el volumen es: $V=2c\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\text{sen}^2t}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}b\cos t\,dt\right)dx \quad\Rightarrow$

$$V=2bc\int_{-a}^{a}\left(\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt\right)dx \Rightarrow V=\frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx \Rightarrow V=\frac{abc\pi}{3},$$ si

a=b=c se tiene que $V=\frac{a^3\pi}{3}$

11. **Determinar la masa M de una semiesfera de radio R y centro en el origen de las coordenadas, si la densidad F de su material en cada punto (x, y, z) es proporcional a la distancia entre este punto y la base, es decir, F=kz.**

Solución: La ecuación de la semiesfera superior está dada por:

$Z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, la que en coordenadas polares se transforma en: $Z=\sqrt{R^2-\rho^2}$, por lo tanto: $M=\iiint_V kz\rho d\vartheta d\rho dz \Rightarrow M=$

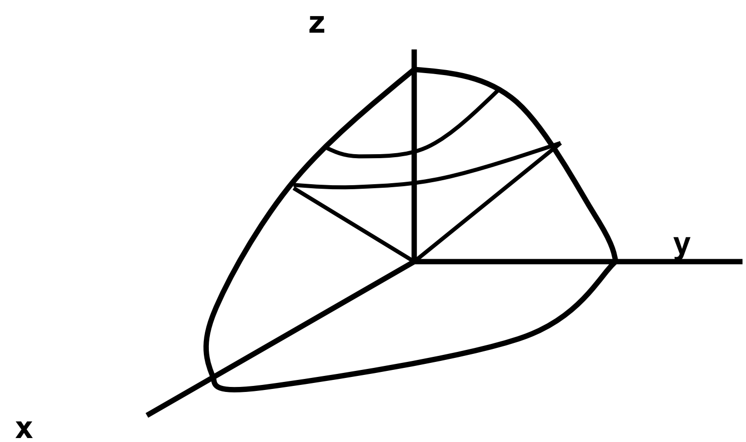
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}}kzdz\right)\rho dr\right)d\vartheta \Rightarrow M=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left[\frac{kz^2}{2}\right]_0^{\sqrt{16-\rho^2}}\rho dr\right)d\vartheta \Rightarrow M=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left[\frac{k}{2}\right](R^2-\rho^2)\rho dr\right)d\vartheta \Rightarrow M=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\vartheta \Rightarrow M=\frac{k\pi R^4}{4}$$

12. **Calcular la integral triple $F(r, \varphi, \Psi)=\frac{1}{r}$ sobre la región R en el primer octante acotado por los conos $\Psi=\frac{\pi}{2}$ y $\varphi=tg^{-1}2$ y la recta $r=\sqrt{6}$**

<u>Solución:</u> Vamos a integral primero respecto a r desde 0 hasta $\sqrt{6}$, luego con respecto a φ desde $\frac{\pi}{4}$ hasta $tg^{-1}2$ y por ultimo con respecto a Ψ desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, es decir, $V=\iiint_S \frac{1}{r} drd\varphi d\psi \Rightarrow V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}2}\left(\int_0^{\sqrt{6}}\frac{1}{r}r^2 sen\varphi dr\right)d\varphi\right)d\psi$

$$\Rightarrow V=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{tg^{-1}2} sen\varphi d\varphi\right)d\psi \Rightarrow V=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\psi \Rightarrow =\frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

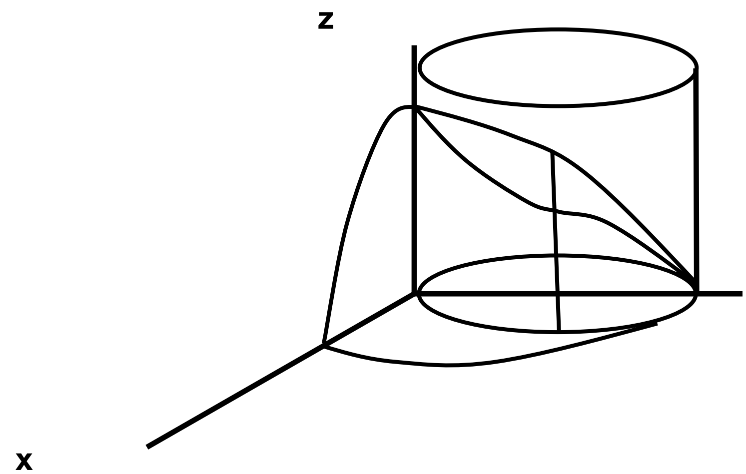


13. Hallar el volumen dentro del cilindro $r=4\cos\theta$ acotado arriba por la esfera $r^2 + z^2=16$ y abajo por el plano $z=0$

<u>Solución:</u> Vamos a integral primero respecto a z desde 0 hasta $\sqrt{16-r^2}$, luego con respecto a r desde 0 hasta 4 y por ultimo con respecto a φ desde 0 hastaπ, es decir:

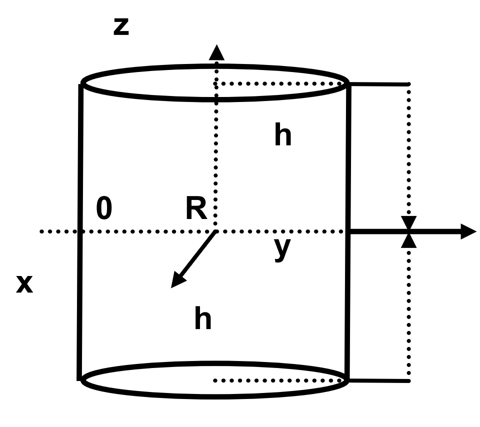
$$V=\iiint_S \frac{1}{r} dr d\varphi d\psi \Rightarrow V=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{4\cos\varphi}\left(\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz\right) dr\right) d\varphi \Rightarrow V=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{4\cos\varphi} r\sqrt{16-r^2} dr\right) d\varphi$$

$$\Rightarrow V=-\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(\mathrm{sen}^3\varphi-1)d\varphi \Rightarrow V=\frac{64}{9}(3\pi-4)$$



14. Calcular el momento de inercia de un cilindro recto circular de radio R y altura 2h respecto al diámetro de su sección media, la densidad es constante e igual a γ_0.

Solución: Ilustremos esto mediante la figura siguiente:



El problema se reduce al cálculo del momento de inercia del cilindro respecto al eje 0x: Ixx= $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\gamma_0 dxdydz$, pasando a coordenadas polares, se tiene que: $I_{xx} = \gamma_0 \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\left(\int_0^h (z^2+\rho^2 sen^2\vartheta)dz\right)\rho d\rho\right)d\vartheta \quad \Rightarrow$

$$I_{xx} = \gamma_0 \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R (\frac{2h^3}{3}+2h\rho^2 sen^2\vartheta)\rho d\rho\right)d\vartheta \quad \Rightarrow$$

$$I_{xx} = \gamma_0 \int_0^{2\pi}\left(\frac{2h^3}{3}\text{-}\frac{R^2}{2}+\frac{2hR^4}{4}sen^2\vartheta\right)d\vartheta \quad \Rightarrow$$

$$I_{xx} = \gamma_0\left[2\pi\frac{h^3R^2}{6}+\pi\frac{2hR^4}{4}\right]_0^{2\pi} \Rightarrow I_{xx} = \gamma_0\left[\frac{2h^2}{3}+\frac{R^2}{4}\right]\pi hR^2$$

Ejercicios Propuestos

1. **Calcular las integrales:**

a. $\int_0^1\left(\int_1^2 (x^2+y^2)dy\right)dx$ b. $\int_1^2\left(\int_x^{x\sqrt{3}} xy\,dy\right)dx$ c. $\int_3^4\left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}dy\right)dx$ d. $\int_0^{2\pi}\left(\int_{a\,sen\vartheta}^{a} r\,dr\right)d\vartheta$ e. $\int_0^a\left(\int_{\frac{x}{a}}^{x} \frac{x\,dy}{x^2+y^2}dy\right)dx$ f. $\int_0^a\left(\int_{y-a}^{2y} xy\,dx\right)dy$ g. $\int_{\frac{b}{2}}^{b}\left(\int_{a\,sen\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \rho\,d\vartheta\right)dr$ h. $\int_b^a\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xdy\right)dx$ i. $\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy\right)dx$ j. **I=** $\int_0^1\left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)dy\right)dx$.

2. **Verificar que:** $\int_b^{2b}\left(\int_0^a (a-y)x^2)dy\right)dx = \frac{7a^2b^3}{6}$

3. **Determinar los límites de integración para la integral** $\iint_S f(x,y)dxdy$ **donde el dominio de integración está limitado por las curvas:**

a. **x=2, x=3, y=-1 e y=5, b. y=1 – x^2 c. x^2 + y^2=a^2 d. y=x^2 e y=$\frac{2}{1+x^2}$ e. y=0, y=a, e y=0**

4. **Invertir el orden de integración en las integrales:**

a. $\int_1^2\left(\int_3^4 (f(x,y)dy\right)dx$ b. $\int_0^1\left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (f(x,y)dy\right)dx$ c. $\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} (f(x,y)dx\right)dy$ d. $\int_{-1}^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (f(x,y)dy\right)dx$ e. $\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} (f(x,y)dx\right)dy$

5. Calcular el área de la porción de superficie situada arriba de Ox y limitada por la parábola semipública $y^2=x^3$ y la recta $y=x$

6. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie $x=0$, $y=0$, $x + y + z=1$ y $z=0$

7. Calcular la integral doble $\iint_S e^{x+y}dxdy$, extendida por el dominio S, encerrado entre 2 cuadrados con el centro en el origen de coordenadas. Si cada lado del cuadrado interior es igual a 2 y el del exterior a 4

8. Calcular la integral doble $\iint_S e^{\frac{y}{x}}dxdy$, si el dominio S es un triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=0$ y $x=1$.

9. Calcular la integral doble de la función $f(x, y)=1 + x + y$, extendida por el dominio limitado por las líneas: $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$ y $x=0$

10. Hallar el área de la superficie situada en el primer cuadrante y limitada por el eje de las x y las curvas $x^2 + y^2=10$ e $y^2=9x$

11. **Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2=a^2$ la cual se recorta por otro cilindro $x^2 + z^2=a^2$**

12. **Calcular el área de un dominio limitado por las curvas $y=2 - x^2$ e $y=x$**

13. **Calcular el volumen V del cuerpo limitado por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2=4a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 - 2ay=0$**

14. **Determinar la masa de una placa redonda de radio 4, si la densidad superficial f(x, y) del material de cada punto P(x, y) es proporcional a la distancia del punto q(x, y) al centro de la placa, es decir si f(x. y)=$k\sqrt{x^2+y^2}$**

15. **Calcular el volumen V del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $4z=16 - 4x^2 - y^2$**

16. **Calcular el volumen del sólido por el paraboloide de revolución $x^2 + y^2 =az$**

17. **Calcular la integral doble $\iint\limits_S (4 - x^2 - y^2)dxdy$, si el dominio S está limitado por las rectas x=0, x=1, y=0 e y=$\frac{3}{2}$**

18. **Pasando a las coordenadas polares, calcular las integrales:**

a. $\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx$ b. $\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx\right)dy$ c. $\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dy\right)dx$ d. e. f. g. h.

19. Transformar las integrales dobles, introduciendo nuevas variables u y v, ligadas con x e y, mediante las formulas x=u – uv, e y=uv.

a. $\int_0^e\left(\int_{ax}^{bx}(f(x,y)dy\right)dx$ b. $\int_0^c\left(\int_0^b(f(x,y)dy\right)dx$

20. Calcular el área de las figuras limitadas por:

a. $y^2=2x$ y la recta $y=x$ b. $y^2=4ax$ y la recta $x+y=3a$ c. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $x+y=a$ d. $y=\operatorname{sen}x$, $y=\cos x$ y $x=0$ e. $\rho=a\operatorname{sen}2\theta$ f. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ g. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$ h. i. j. k.

21. Calcular el volumen de los cuerpos limitados por las superficies:

a. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$ b. $x^2+y^2=1$, $x+y+z=1$ c. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $xy=z$ y $z=0$ d. $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$, $x^2+y^2=z^2$ e. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$ y $z=12+y-x^2$ f. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$

i. $y^2 + z^2=x$, $x=y$ y $z=0$ j. $x^2 + y^2 + z^2=a^2$, $x^2 + y^2=R^3$ k. $az=x^2 + y^2$, $x^2 + y^2=2ax$

22. Calcular el área de las superficies por los planos de coordenadas, el plano $2x + 3y – 12=0$ y el cilindro $z=\frac{1}{2}x^2$

23. Calcular el área de las superficies por el cilindro circular de radio a y el eje que coincide con el eje 0z, los planos de coordenadas y el plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$

24. Calcular el área del cono $x^2 + y^2=z^2$, $x^2 + y^2=2ax$

25. Calcular el área de la parte del plano $x + y + z=2a$, que se encuentra en el primer octante y está limitada por el cilindro $x^2 + y^2=a^2$

26. Calcular el área de un segmento esférico (del menor), si el radio de la esfera es igual a *a* y el radio de la base del segmento es igual a b d. De una esfera $x^2 + y^2 + z^2=a^2$ separada por la superficie del cilindro $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (a>b)

27. Calcular el área de un cuerpo formado por la intersección de dos cilindro $x^2 + y^2 =a^2$, $x^2 + z^2=a^2$

28. Calcular el área Cilíndrica $x^2 + y^2=2ax$ comprendida entre el plano $z=0$ y el cono $x^2 + y^2=z^2$

29. **Determinar la masa de un disco circular de radio a, si la densidad en cualquier punto P es inversamente proporcional a la distancia entre P y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a K)**

30. **Hallar el centro de gravedad de la superficie situada en el primer cuadrante y limitada por la parábola semipública $y^2=x^3$ y la recta $y=x$**

31. **Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la superficie:**

  a. **De un triángulo equilátero, tomando el eje 0x por su altura, y el origen de coordenadas, por su vértice.**

  b. **De un sector circular de radio a, tomando el eje 0x por la bisectriz de su ángulo. El ángulo de abertura del sector es igual a 2a.**

  c. **De la mitad superior al circulo $x^2 + y^2=a^2$**

  d. **De un arco de cicloide $x=a(t – \text{sen}t)$, $y=a(1 – \cos t)$.**

  e. **Limitada por un lazo de la curva $\rho 2=a2\cos 2\theta$.**

  f. **De la cardioide $\rho=a(1 + \cos\theta)$**

32. **Calcular el momento de inercia de:**

  a. **Del área del rectángulo, limitado por las rectas $x=0$, $x=a$, $y=0$ e $y=b$, respecto al origen de coordenadas.**

  b. **De la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con respecto al eje 0x**

  c. **De la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con respecto al origen de coordenadas.**

d. Del circulo ρ=2scosθ respecto al polo

e. Del área del circulo $(x – a)^2 + (y – b)^2=2a^2$.

33. Hallar I_x, I_y y los radios giros correspondientes para la parábola semipública $y^2=x^3$ y la recta y=x

34. Calcular el momento de inercia del área del circulo S de radio R, respecto al centro 0

35. Calcular la integral triple:

a. $$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{2-x} xyzdz\right)dy\right)dx$$

b. $\iiint \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$, si el dominio de integración está limitado por los planos de coordenadas y el plano x + y + z=1.

c. $$\int_0^a\left(\int_0^x\left(\int_0^y xyzdz\right)dy\right)dx$$

d. $$\int_2^3\left(\int_1^2\left(\int_2^5 xy^2dz\right)dy\right)dx$$

36. Calcular el volumen de:

a. Un cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2=4$ y la superficie del paraboloide $x^2 + y^2=3z$

b. De un cuerpo limitado por la superficie de la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2)^2=a^3x$

37. Calcular el momento de inercia de un cono circular respecto al diámetro de su base.

38. Calcular las coordenadas del centro de gravedad y los momentos de inercia de la pirámide limitada por los planos: x=0, y=0, z=0, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

39. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio a y una superficie cónica, de ángulo en el vértice 2α, si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera.

40. Hallar la masa de una placa en forma de la mitad superior de la cardioide $r=2(1 + \cos\theta)$ si la densidad varia como la distancia al polo

41. Hallar la masa de una esfera de radio a si la densidad varia inversamente al cuadrado de la distancia al centro

42. Hallar el centro de masa de un cilindro circular recto de radio a y altura h si la densidad varia como la distancia a la base.

43. Determinar las coordenadas del centroide de volumen interior al cilindro $r=2\cos\varphi$, acotado arriba por el paraboloide $z=r^2$ y abajo por el plano z=0

44. Localizar el centroide del volumen cortado en la hoja de un cono de Angulo en el vértice de 60º por una esfera de radio 2 cuyo centro está en el vértice del cono.

45. Hallar la masa de una placa cuadrada de lado a si la densidad varia como el cuadrado de la distancia a un vértice.

CAPÍTULO XI

DEFINICIONES Y PROPIEDADES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

En este capítulo se estudiara: Ecuaciones Diferenciales: Tipos de Ecuaciones Diferenciales: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Orden de una Ecuación Diferencial, Grado de una Ecuación Diferencial, Solución de una Ecuación Diferencial: Solución General, Solución Particular, Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables, ecuaciones Diferenciales que se Reducen a Ecuaciones de Variables Separables: Ecuaciones Diferenciales del Tipo: $\varphi_1(x)\Psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\Psi_2(y)dx$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f(ax + by)$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$, Ecuaciones Diferenciales del Tipo $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, Ecuaciones Diferenciales Lineales, Ecuaciones Diferenciales Método de los Coeficientes Determinados, Ecuaciones Diferenciales Exactas o Ecuaciones Diferenciales Totales, Factor de Integración, Integrales Impropias.

<u>Definición 1</u>: Una ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada y=f(x) y sus derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}$ se llama <u>ecuación diferencial</u> (E.D).

Esta se escribe simbólicamente como: $F(x,y,\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n})$ o en forma explícita $\frac{d^ny}{dx^n}=F(x,y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} - 25x + 7=0 \qquad (1)$$

$$(\frac{d^2y}{dx^2} Lny)^2 + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 2=0 \qquad (2)$$

$$5\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} tgx + 2senx - 5xy=0 \qquad (3)$$

$$(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + 4y(\frac{dy}{dx})^5 + e^y(\frac{dy}{dx})^2 - 4xy=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta y} \qquad (5)$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \qquad (6)$$

<u>Definición 2</u>: Si la ecuación buscada y=f(x) es de una sola variable independiente, la (E.D) se llama <u>ecuación diferencial ordinaria</u> (E.D.O). Si la

ecuación buscada z=F(x,y) es de más de una variable independiente la (E.D) se llama <u>ecuación diferencial parcial</u> (E.D.P).

En el ejemplo anterior las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) son ecuaciones ordinarias y las ecuaciones (5) y (6) son ecuaciones parciales.

<u>Definición 3</u>: El orden de la derivada superior que entra en la (E.D) se llama <u>orden</u> de la (E.D).

Las ecuaciones (1) y (5) son ecuaciones de primer orden, la ecuación (2), (4) y (6) son ecuaciones de segundo orden, la ecuación (3) es una ecuación de tercer orden.

<u>Definición 4</u>: El <u>grado</u> de una (E.D), que puede escribirse como un polinomio desconocido y sus derivadas es la potencia a la cual está elevada su derivada de mayor orden.

Las ecuaciones (1), (3), (5) y (6) son de grado (1), la (2) de grado 2 y la ecuación (4) es de grado (3).

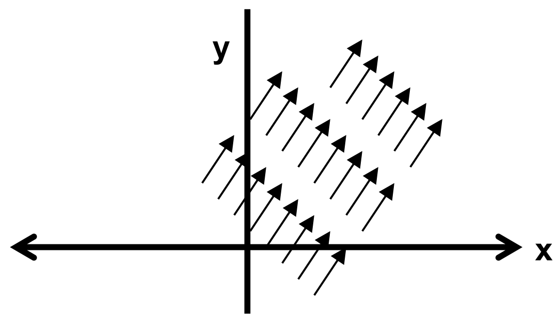
<u>Definición 5</u>: Toda función y=f(x) que introducida en la (E.D) la transforma en una identidad, se llama <u>solución o integral</u> de la (E.D).

<u>Ejemplo</u>: La función $y=e^{-x}\cos x$ es solución de la (E.D): $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$.

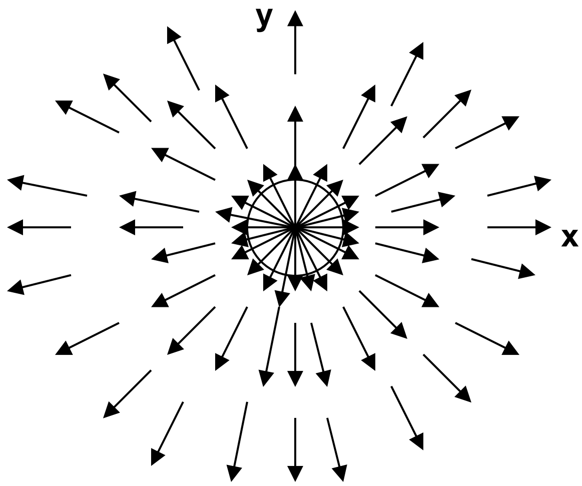
<u>INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA (E.D)</u>:

La (E.D) y=F(x,y) establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular de la tangente $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución en

ese punto. Conociendo a x e y, se puede calcular y por consiguiente, la (E.D) de la forma considerada determina un campo de direcciones y el problema de la integración de la (E.D) se reduce hallar las llamadas <u>curvas integrales</u> para las cuales las direcciones de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo.



Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$**, En cada punto diferente del punto (0,0), el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada es igual a la razón** $\frac{y}{x}$**, o sea, coincide con el coeficiente angular de la recta dirigida desde el origen de coordenadas al mismo punto (x,y) la cual está representado por flechas el campo de direcciones determinados por la ecuación estudiada. Es evidente que en este caso las curvas integrales serán las rectas y=cx, ya que las direcciones de estas rectas coinciden en todas partes con la dirección del campo.**



<u>Definición 6</u>: La (E.D) de primer orden tiene la forma: $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$, si esta ecuación se resuelve respecto a $\frac{dy}{dx}$, se puede escribir la forma: $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$, en este caso se dice que la (E.D) está solucionada con respecto a la derivada, por ejemplo: $\frac{dy}{dx}=2xy^2$.

<u>Definición 7</u>: Se llama <u>solución general de una (E.D) de primer orden</u> a la función $y=\varphi(x,c)$, que depende de una constante arbitraria C y satisface las condiciones siguientes:

a. Satisface la (E.D) para cualquier valor de la constante arbitraria C.
b. Cualquiera que sea la condición inicial $y=y_0$ para $x=x_0$, es decir, $y_{x=x0}=y_0$, se puede encontrar un valor $C=C_0$ tal que la función $y=\varphi(x,c)$ satisfaga la condición inicial dada.

Durante la búsqueda de la solución general de una (E.D) llegamos a menudo a una condición de la forma: φ(x,y,c)=0, no resuelta respecto a y. Al resolverla respecto a y, obtenemos la solución general. Aunque esto no siempre sea posible, pues queda implícitamente.

Una igualdad de la forma φ(x,y,c)=0 que da la solución en forma implícita, se llama integral general de la (E.D), por ejemplo: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ tiene como solución general a la familia de hipérbolas en el origen de coordenadas de la forma $y=\frac{C}{x}$

<u>Definición 8</u>: Toda función $y=\varphi(x,c_0)$ deducida de la solución general $y=\varphi(x,c)$, en el cual se le de valores arbitrarios a la constante C de un valor determinado $C=C_0$, se llama <u>solución particular</u>. En este caso la correlación φ(x,y,C)=0 se llama <u>integral particular</u> de la (E.D), por ejemplo en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, cuya solución general es $y=\frac{C}{x}$, tendrá como soluciones particulares a la familia de hipérbolas en el origen de coordenadas de la forma $\{\frac{1}{x}, \frac{2}{x},\ldots\ldots\ldots, \frac{n}{x}\}$

Eliminatoria de constantes arbitrarias de una ecuación diferencial, para ello seguiremos los siguientes pasos:

a. Se deriva la ecuación tantas veces como constantes arbitrarias se encuentren.

b. El sistema que se forma tiene que ser un sistema consistente, es decir compatible determinado.

Ejemplos: hallar las ecuaciones diferenciales si la solución general de esta ecuación es:

a. $(x – C)^2 + y^2=C^2$, como nada más hay una constantes arbitrarias tenemos que hallar la primera derivada, es decir, $2(x-C)+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x-C+y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow$ $C=x+y\frac{dy}{dx}$, sustituyendo este valor de C en la ecuación $(x – C)^2 + y^2=C^2$, obtenemos la ecuación diferencial $y^2=x^2+2xy\frac{dy}{dx}$

b. $y=C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$, como las constantes arbitrarias son dos, tenemos que hallar la primera y segunda derivada de la función dada, es decir,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 4C_1e^{-2x} + 9C_2e^{3x} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por dos (2) y sumándosela a la segunda se obtiene que el valor de $C_2=\frac{e^{-3x}}{15}\left(2\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ahora multiplicando la primera ecuación por menos tres (-3) y se la sumamos a la segunda ecuación se obtiene el valor de $C_1=\frac{e^{2x}}{10}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}\right)$, si se sustituyen los valores encontrados de C_1 y C_2 $y=c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, se obtiene que la ecuación diferencial es: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-6y=0$

Definición 9: Solucionar o, como se dice a menudo, integrar una (E.D) significa:

a. Encontrar la solución general o integral general (si no están dadas las condiciones iniciales).

b. Hallar la solución particular de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales (si existen).

Definición 10: Las (E.D) del tipo: $f_2(y)dy=f_1(x)dx$, se llaman ecuaciones con variables separadas. Consideremos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas, supongamos que y(x) es solución de esta ecuación; entonces, al sustituir y(x) en la ecuación dada obtenemos una identidad que al ser integrada resulta: $\int f_1(y)dy=\int f_2(x)dx+C$, donde C es una constante arbitraria. Si hay que obtener la resolución particular que satisfaga la condición $y(x_0)=y_0$, esta evidentemente se determina por la ecuación: $\int_{y_0}^{y} f_2(y)dy=\int_{x_0}^{x} f_1(x)dx+C$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. xdx + ydy=0, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int y\,dy = -\int x\,dx + C$ es una familia de circunferencias en el origen de coordenadas, $y^2=-x^2 + C$ ó $x^2 + y^2=C^2$.

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{4x}$, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int \frac{dy}{y} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \ln y=\frac{3}{4}\ln Cx \Rightarrow$ $\ln y=\ln C\,x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y=C\sqrt[4]{x^3}$

c. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$, es una ecuación diferencial de variables separables y su solución general la determinamos integrando $\int dy = \int \frac{dx}{x^2 - 1} + C \Rightarrow y=$ $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{C(x-1)}{x+1}\right]$

Muchas (E.D) pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separables mediante una sustitución de variables. A dicho grupo pertenecen las ecuaciones de la forma:

1º. Las ecuaciones del tipo: $\varphi_1(x)\Psi_1(y)dy=\varphi_2(x)\Psi_2(y)dx$, en las cuales los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores dependientes sólo de x o de y, también son <u>(E.D) con variables separables</u>, en este caso se multiplican cada miembro de la ecuación diferencial por el factor $\frac{1}{\psi_2(y)\varphi_1(x)}$ con lo que resulta:

$\int \frac{\Psi_1(y)}{\Psi_2(y)}dy = \int \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}dx + C$, que es una ecuación de variable separable.

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. Secxdy=xctgydx, multiplicando por el factor: $\frac{1}{\sec x \, ctgy}$, nos resulta:

$$\int \frac{dy}{ctgy} = \int \frac{x}{\sec x}dx + C \Rightarrow \int tgy\,dy = \int x\cos x\,dx + C \Rightarrow$$

$\ln\sec x = \cos x + x\,\mathrm{sen}x + C \Rightarrow y = Ce^{\cos x + x\,\mathrm{sen}x}$

b. $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$, multiplicando por el factor: $\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}$, nos resulta: $\int \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2} + C \Rightarrow \ln(1 + y^2) = \ln C(1 + x^2) \Rightarrow y = \sqrt{C(1+x^2)-1}$

c. $(4 + e^{2x})dy = ye^{2x}dx$, multiplicando por el factor: $\frac{1}{y(4+e^{2x})}$, nos resulta:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^{2x}dx}{4+e^{2x}} + C \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln C(4 + e^{2x}) \Rightarrow y = \sqrt{C(4+e^{2x})}$$

2º. Ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$, donde a y $b \in \Re$, las cuales se transforman en ecuaciones de variables separables por medio de la

sustitución z=ax + by $\Rightarrow \frac{dz}{dx}$=a + b$\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx}$=a + bf(z) $\Rightarrow$ dx=$\frac{dz}{a+bf(z)} \Rightarrow$ x= $\int \frac{dz}{a+bf(z)}$ + C

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx}$=2x + y, haciendo la transformación z=2x + y $\Rightarrow \frac{dz}{dx}$=2 + $\frac{dy}{dx}$, sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$=2x + y, tenemos que $\frac{dz}{dx}$=2 + z $\Rightarrow$ dx=$\frac{dz}{z+2} \Rightarrow$ x=$\int \frac{dz}{z+2}$ + C $\Rightarrow$ x=lnC(z + 2) $\Rightarrow$ z=Ce^{x} – 2, volviendo el cambio, nos resulta que 2x + y=Ce^{x} – 2 $\Rightarrow$ y=Ce^{x} – 2x – 2

b. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$, haciendo la transformación z=x + y + 1 $\Rightarrow \frac{dz}{dx}$=1 + $\frac{dy}{dx}$, sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$=x + y + 1, tenemos que $\frac{dz}{dx}$=1 + $\frac{1}{z} \Rightarrow$ dx=$\frac{zdz}{z+1}$ $\Rightarrow$ x=$\int \frac{zdz}{z+1}$ + C $\Rightarrow$ x=$\int \left(1-\frac{1}{z+1}\right)$dz $\Rightarrow$ x=z – lnC(z+ 1) $\Rightarrow$ z + 1=Ce$^{z\ -\ x}$ volviendo el cambio, nos resulta que y=Ce$^{y\ +\ 1}$ – x – 2 $\Rightarrow$ y=Ce^{x} – 2x – 2

c. $\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{x-y}$, haciendo la transformación $z=x-y \Rightarrow \frac{dz}{dx}=1-\frac{dy}{dx}$,

sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dx}$ tenemos que $\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z} \Rightarrow dx=-zdz \Rightarrow x=\int zdz + C$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}z^2 + C \Rightarrow 2x + z^2 + C=0$, volviendo el cambio, nos resulta que:

$2x + (x-y)^2 + C=0$

3º. Las (E.D) de la forma: $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ llamadas <u>(E.D) homogéneas</u> de grado cero (0), también se reducen a ecuaciones separables. En efecto si hacemos el cambio de variable $z=\frac{y}{x}$ ó $y=xz \Rightarrow \frac{dy}{dx}=z + x\frac{dz}{dx}$ sustituyendo este valor en la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ nos queda: $z + x\frac{dz}{dx}=f(z) \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z} + C \Rightarrow$ lnx=

$Ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$, haciendo la transformación $y=xz \Rightarrow \frac{dy}{dx}=z + x\frac{dz}{dx}$,

sustituyendo en el valor de $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$, tenemos que $z + x\frac{dz}{dx}=z + tgz \Rightarrow$

$\frac{dx}{x}=tgzdz \Rightarrow lnx=\int tgzdz + C \Rightarrow lnx=lnCsecz \Rightarrow z=Csecz$, volviendo el

cambio, nos resulta que $x=Csec\frac{y}{x}$

b. $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}$ dy, reordenando esta ecuación tenemos:

$xydx - (x^2 - y\sqrt{x^2+y^2})dy=0$, aplicando diferenciales a ambos miembros de la ecuación y=xz, tenemos que dy=zdy + xdz, sustituyendo este valor en la ecuación diferencial obtenemos: $(xz)x(zdy + xdz) - [(xz)^2 + x\sqrt{x^2+y^2}\,]=0 \Rightarrow$

$x^2z(zdx + xdz) - [x^2z^2 + x\sqrt{x^2+y^2}\,]=0 \Rightarrow$

$x^2z^2dx + x^3zdz - x^2y^2dx - y\sqrt{x^2(1+z^2)}\,dx=0 \Rightarrow x^3zdz - x^2\sqrt{1+z^2}\,dx=0 \Rightarrow x^3zdz=x^2\sqrt{1+z^2}\,dx \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}dz = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \sqrt{1+z^2} = \ln Cx \Rightarrow x=C$

$e^{\sqrt{1+z^2}}$, volviendo el cambio, nos resulta: $y=Ce^{\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}} \Rightarrow y=Ce^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}}$

c. $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-xy+y^2}$, haciendo la transformación

$y=xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, sustituyendo en el valor de $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-xy+y^2}$,

tenemos que:

$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{x^2z}{x^2-x^2z+x^2z^2} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z}{1-z-z^2} - z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z - z + z^2 - z^3}{1-z-z^2} \Rightarrow$

$\frac{dx}{x} = \frac{1-z-z^2}{z^2-z^3}dz \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{1-z-z^2}{z^2-z^3}dz + C$, aplicando fracciones parciales la integral de la derecha, tenemos: $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-1+z+z^2}{z^2(z-1)}dz + C \Rightarrow$ lnx=

$A_1\int \frac{dz}{z^2} + A_2\int \frac{dz}{z} + A_3\int \frac{dz}{z-1}$, donde los coeficientes de A_1, A_2 y A_3 los

hallamos aplicando límites y derivadas, $A_1 = \lim\limits_{z \to 0} \frac{-1+z+z^2}{z-1} \Rightarrow A_1=1$, $A_2=$

$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{-1+z+z^2}{z-1}\right)_{z\to 0} \Rightarrow A_2 = \left(\frac{(2z+1)(z-1)-(-1+z+z^2)}{(z-1)^2}\right)_{z\to 0} \Rightarrow A_2=0$, $A_3=$

$\lim\limits_{z \to 1} \frac{-1+z+z^2}{z^2} \Rightarrow A_3=1$, por lo tanto, $\ln x = \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dz}{z-1} + C \Rightarrow$

$\ln x = \frac{1}{z} + \ln(z-1) \Rightarrow \frac{1}{z} = \ln\frac{C(z-1)}{x} \Rightarrow \frac{C(z-1)}{x} = e^{\frac{1}{z}} \Rightarrow z - 1 = Cx^2e^{\frac{1}{z}}$, volviendo

el cambio, nos queda: $y=Cx^2e^{\frac{x}{y}} + 1$

4º. Las (E.D) de la forma: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, puede reducirse a una ecuación de variables separables, trasladando al origen de coordenadas el punto de intersección (x,y) de las rectas l_1: $a_1x + b_1y + c_1=0$ y l_2: $a_2x + b_2y + c_2=0$, las nuevas coordenadas serán: $X=x - x_1$ e $Y=y - y_1$, donde $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ y

la ecuación toma la forma: $\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$**, la cual es una ecuación homogénea de grado cero(0) y en consecuencia de variable separable, este método no se puede aplicar solamente en el caso de que las dos rectas resulten ser paralelas, es decir,** $l_1//l_2$**, pero en este caso los coeficientes de las coordenadas son proporcionales, es decir,** $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$**, con lo cual la ecuación se transforma en:** $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)\Rightarrow\frac{dy}{dx}$ $=f(a_1x+b_1y)$**, que ya se estudio en el segundo caso.**

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$**, resolviendo el sistema de ecuaciones, x – y=-1 y x + y=3,**

Obtenemos que x=1, e y=2, haciendo x=X + 1, e y=Y + 2, tenemos que:

$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$**, ahora hacemos el cambio Y=zX,** $\Rightarrow\frac{dY}{dX}=z+X\frac{dz}{dX}$**, que al sustituirla en la ecuación conduce a la ecuación** $\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}$**, se transforma en:** $z+X\frac{dz}{dX}=$

$$\frac{1-z}{1+z}\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2}\Rightarrow=\int\frac{dX}{X}=\int\frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2}\Rightarrow$$

$$\ln X=-\frac{1}{2}\ln(1-2z-z^2)+\frac{1}{2}\ln C\Rightarrow$$

$C=(1-2z-z^2)X^2\Rightarrow C=X^2-2Xz-X^2z^2\Rightarrow$ **volviendo el cambio Y=zX, nos queda:**

$C=x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 3}{4x - 2y - 5}$ resolviendo el sistema de ecuaciones, $2x - y=-3$ y $4x - 2y=5$,

Vemos que las rectas l_1: $2x - y + 3$ y l_2: $4x - 2y - 5$ son paralelas, entonces hacemos el cambio $z=2x - y$, con lo que nos queda $\frac{dz}{dx}=2 - \frac{dy}{dx}$ ó $\frac{dy}{dx}=2 - \frac{dz}{dx}$, sustituyendo esta en la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 3}{4x - 2y - 5}$, obtenemos que

$2 - \frac{dz}{dx} = \frac{z+3}{2z-5} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z+3}{2z-5} \Rightarrow dx=\frac{2z-5}{3z-13}dz \Rightarrow \int dx = \int \frac{2z-5}{3z-13}dz + C, \Rightarrow$

$x=\int\left(\frac{2}{3} - \frac{22}{9z-39}\right)dz + C \Rightarrow$

$x=\frac{2}{3}z - \frac{22}{13}\ln(3z - 13) + C$, sustituyendo a $z=2x - y$ en esta ecuación nos queda:

$x=\frac{2}{3}(2x - y) - \frac{22}{13}\ln(3(2x - y) - 13) + C$

<u>Definición 11</u>: Se llama (E.D) <u>lineal de primer orden</u> a una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada. Esta ecuación tiene la forma: $A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y=C(x)$, donde $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ se consideran en lo sucesivo funciones continuas de x en la región en que se exige integrar la ecuación. Si multiplicamos toda la ecuación por el factor $\frac{1}{A(x)}$, nos resulta: $\frac{dy}{dx}$

$+\dfrac{B(x)}{A(x)}y=\dfrac{C(x)}{A(x)}$, haciendo el cambio $p(x)=\dfrac{B(x)}{A(x)}$ y $q(x)=\dfrac{C(x)}{A(x)}$, la ecuación de Bernoulli se transforma en $\dfrac{dy}{dx}$ + p(x)=q(x), la cual resolveremos por el método de los <u>coeficientes indeterminados</u> para lo cual seguiremos los siguientes pasos:

i. Se obtiene la solución general de la ecuación diferencial homogénea, es decir, Se toma la ecuación $\dfrac{dy}{dx}$ + P(x)y=0 que se llama <u>lineal homogénea</u>, esta es una ecuación de variable separable, cuya solución es: $\dfrac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow$ $\ln y=-\int f(x)dx + C \Rightarrow y=Ce^{-\int xdx}$,

ii. Se considera la constante C, como una función que dependerá de la variable x, es decir: $y=C(x)e^{-\int xdx}$

iii. Se calcula la derivada de la función $y=C(x)e^{-\int xdx}$ con respecto a x, es decir, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx}-C(x)p(x)e^{-\int xdx}$

iv. Sustituimos los valores encontrados de $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx}-C(x)p(x)e^{-\int xdx}$ y $y=C(x)e^{-\int xdx}$ en la ecuación diferencial no homogénea $\dfrac{dy}{dx}$ + p(x)=q(x), es decir, $\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx}$ - $C(x)p(x)e^{-\int xdx}$ + $C(x)p(x)e^{-\int xdx}=q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int xdx}$ $=q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}=q(x)e^{\int xdx}$

v. Integramos $\frac{dC(x)}{dx}$, para obtener el valor de C(x), que en este caso es C(x)= $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$

vi. Sustituimos el valor de C(x) en la solución de la ecuación general encontrada $y=C(x)e^{-\int xdx} \Rightarrow y=(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C_1)e^{-\int xdx} \Rightarrow$ $y=C_1e^{-\int xdx} + e^{-\int xdx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}=x^2$, siguiendo los pasos mencionados tenemos:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, integrando ambos miembros obtenemos lny=lnCx $\Rightarrow$ y=xC(x)
2. y=C(x)
3. $\frac{dy}{dx}=C(x) + x\frac{dC(x)}{dx}$
4. $C(x) + x\frac{dC(x)}{dx} - x\frac{C(x)}{x}=x^2 \Rightarrow x\frac{dC(x)}{dx}=x^2 \Rightarrow dC(x)=xdx$
5. $\int dC(x) = \int xdx + C_1 \Rightarrow C(x)=\frac{x^2}{2} + C_1$

6. $y=\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)x \Rightarrow y=\frac{x^3}{2}+C_1x$

b. $\frac{dy}{dx}$ - $y=\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}}$

1. $\frac{dy}{dx}$ - $y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}$=dx, integrando ambos miembros obtenemos lny=x + C $\Rightarrow$

   $y=Ce^x$

2. $y=C(x)e^x$

3. $\frac{dy}{dx}=e^x\frac{dy}{dx}$ + $C(x)e^x$

4. $e^x\frac{dC(x)}{dx}$ + $C(x)e^x$ - $C(x)e^x=\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}} \Rightarrow e^x\frac{dC(x)}{dx}=\frac{11}{8}e^{-\frac{x}{3}} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}=\frac{11}{8}e^{-\frac{4}{3}x}$

5. $\int dC(x)=\frac{11}{8}\int xe^{-\frac{4}{3}x}dx \Rightarrow C(x)=-\frac{11}{6}e^{-\frac{4}{3}x}$ + C_1

6. $y=(-\frac{11}{6}e^{-\frac{4}{3}x}$ + $C_1)e^x \Rightarrow y=-\frac{11}{6}e^{-\frac{x}{3}}$ + C_1e^x

c. $\frac{dy}{dx}$ - yctgx=2xsenx

1. $\frac{dy}{dx}$ - yctgx=0 $\Rightarrow \frac{dy}{y}$=ctgxdx, integrando ambos miembros obtenemos

   lny=lnsenx + lnC $\Rightarrow$ y=Csenx

2. y=C(x)senx

3. $\frac{dy}{dx}=\text{senx}\frac{dC(x)}{dx}+C(x)\cos x$

4. $\text{senx}\frac{dC(x)}{dx}+C(x)\cos x-C(x)\text{senxctgx}=2x\text{senx}\Rightarrow\frac{dC(x)}{dx}=2x$

5. $\int dC(x)=2\int x dx+C_1\Rightarrow C(x)=x^2+C_1$

6. $y=(x^2+C_1)\text{senx}\Rightarrow y=x^2\text{senx}+\text{senx}C_1$

<u>Definición 12:</u> Ecuaciones diferenciales totales o diferenciales exactas, puede suceder que la ecuación diferencial se escriba en la forma p(x,y)dx + q(x,y)dy=0, si esta ecuación es una diferencial exacta de cierta función u(x,y), es decir, u(x,y)=p(x,y)dx + q(x,y)dy, donde du(x,y)=0, debe cumplirse la condición de Euler: $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, si du(x,y)=p(x,y)dx + q(x,y)dy $\Rightarrow$ du(x,y)=$\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}dx+\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}dy$, por lo tanto, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=p(x,y)$ y $\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=q(x,y)$

Donde u(x,y)=$\int p(x,y)dx$ + ψ(y), al calcular $\int p(x,y)dx$, la magnitud y se considera constante, por eso ψ(y) es una función arbitraria de y.

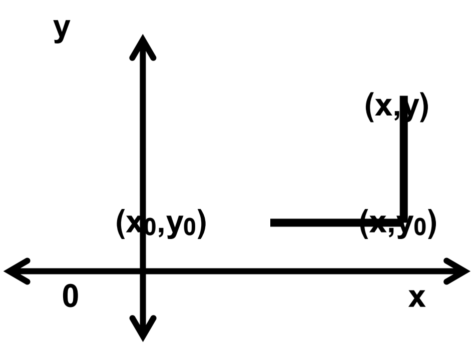
Para determinar la función ψ(y), derivaremos u(x,y) con respecto a y, teniendo en cuenta que $\frac{\delta q(x,y)}{\delta y}=q(x,y)$, es decir, la función $\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]+\frac{d\psi}{dy}$ =q(x,y), si despejamos $\frac{d\psi}{dy}$ nos queda:

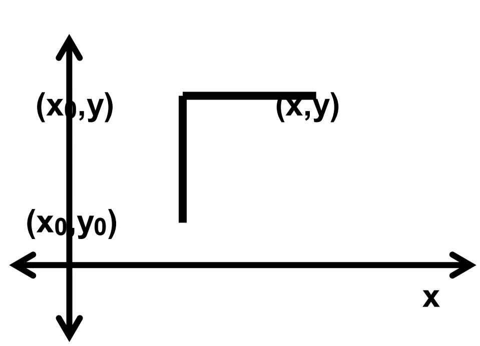
$\frac{d\psi}{dy}=q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]$, ahora si integramos con respecto a y, tenemos que

$\psi(y)=\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]dy+C$, por ultimo sustituimos el valor de $\psi(y)$ en la ecuación u(x,y), con lo cual encontramos la solución general de la ecuación diferencial exacta o de la diferencial total:

$$u(x,y)=\int\left[p(x,y)\,dx+\int\left[q(x,y)-\frac{\delta}{\delta y}\left[\int p(x,y)dx\right]\right]\right]dy+C$$

La función u(x,y) se puede determinar también tomando la integral curvilínea de p(x,y)dx + q(x,y)dy desde cierto punto fijo (x_0,y_0) hasta un punto con coordenada variable (x,y) por cualquier camino:





En este caso, $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} p(x,y)dx+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)} q(x,y)dy$ o bien

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} p(x,y)dx+\int_{(x_0,y)}^{(x,y)} q(x,y)dy$$

En conclusión para resolver una ecuación diferencial total seguiremos los siguientes pasos:

7. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir, que $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$
8. Se integra la función u(x,y) con respecto a x manteniendo a y constante
9. Se deriva la función que resulto de integral a la función u(x,y) con respecto a y, considerando a la constante de integración como una función estrictamente de y
10. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y
11. Se integra con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y
12. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y) que se obtuvo al principio cuando integramos con respecto a x

Ejemplos: Hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales totales:

a. $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy=0$, aplicando los pasos descritos anteriormente tenemos:

6. $p(x,y)=x + y + 1 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1$, $q(x,y)=x - y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler
7. $u(x,y)=\int (x+y+1)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + x + \psi(y)$

8. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}$ =x + $\frac{d\psi}{dy}$ =x – y^2 + 3 ⇒ $\frac{d\psi}{dy}$ =-y^2 + 3

9. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int(3-y^2)dy$ ⇒ $\psi(y)=3y-\frac{1}{3}y^3+C$

10. Sustituimos el valor de $\psi(y)=3y-\frac{1}{3}y^3+C$ en u(x,y), es decir, u(x,y)= $\frac{1}{2}x^2+xy+x+3y-\frac{1}{3}y^3+C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que u(x,y)=0 ⇒ $3x^2+6xy+6x+18y-2y^3+C=0$

Resolviendo esta ecuación diferencial como una integral de línea u(x,y)= $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$, escogiendo a ($x_0$,$y_0$) en el origen de coordenadas tenemos:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(x+1)dx+\int_{(0x,0)}^{(x,y)}(x-y^2+3)dy \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y+C,$$ como

u(x,y)=0 ⇒ $C=3x^2+6xy+6x+18y-2y^3$

b. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$, aplicando los pasos tenemos:

1. $p(x,y)=3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=12xy$, $q(x,y)=6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=12xy$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler
2. $u(x,y)=\int(3x^2+6xy^2)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=x^3 + 3x^2y^2 + \psi(y)$
3. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=6x^2y + \frac{d\psi}{dy}=6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{d\psi}{dy}=4y^3$
4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int 4y^3dy + C \Rightarrow \psi(y)=y^4 + C$
5. Sustituimos el valor de $\psi(y)$ en u(x,y), es decir, $u(x,y)=x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$, como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que $u(x,y)=0 \Rightarrow C=x^3 + 3x^2y^2 + y^4$

c. $(x + y)dx + (x + 2y)dy=0$

1. $p(x,y)=x + y \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1$, $q(x,y)=x + 2y \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, por lo tanto, se cumple la condiciones de Euler
2. $u(x,y)=\int(x+y)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y)$
3. Hallamos la derivada de u(x,y) con respecto a y, el cual lo igualamos a q(x,y), es decir, $\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=x + \frac{d\psi}{dy}=x + 2y \Rightarrow \frac{d\psi}{dy}=2y$

4. Integramos la función obtenida con respecto a y, $\psi(y)=\int 2y dy + C \Rightarrow$

   $\psi(y)=y^2 + C$

5. Sustituimos el valor de $\psi(y)$ en u(x,y), es decir, $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C$,

   como la función u(x,y) es una diferencial exacta tenemos que u(x,y)=0

   $\Rightarrow C=\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2$

<u>Definición 13:</u> Cuando en la ecuación p(x,y)dx + q(x,y)dy=0 no se satisface la condición de Euler, se tiene que escoger una función $\mu(x,y)$ que llamaremos factor integrante, el cual se multiplicara por la diferencial total, de tal manera que $\mu p(x,y)dx + \mu q(x,y)dy=0$ satisfagan las condiciones de Euler, es decir, $\frac{\delta \mu p(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta \mu q(x,y)}{\delta x} \Rightarrow$

$p(x,y)\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta y} + \mu(x,y)\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = q(x,y)\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta x} + \mu(x,y)\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}$ si multiplicamos toda esta expresión por el factor: $\frac{1}{\mu(x,y)}$, tenemos:

$$\frac{p(x,y)}{\mu(x,y)}\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta y} + \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = \frac{q(x,y)}{\mu(x,y)}\frac{\delta \mu(x,y)}{\delta x} + \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = p(x,y)\frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta y} - q(x,y)\frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta x}, \quad \text{si} \quad \frac{\delta \ln\mu(x,y)}{\delta y} = 0$$

$$\Rightarrow -q(x,y)\frac{d\mu(x,y)}{dx} = \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \Rightarrow \ln\mu(x,y) = \int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}dx + \ln C \Rightarrow$$

$\mu(x,y) = Ce^{\int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}dx}$, se puede considerar C=1, ya que es suficiente tener un solo factor integrante, es decir si la función es estrictamente de x tenemos que: $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}dx}$, si es una función estrictamente de y tenemos que $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)}dy}$, en caso contrario, no existe ningún factor integrante de de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$.

<u>Definición 14:</u> **La condición de existencia de un <u>factor integrante</u> que depende sólo de x, se cumple para la ecuación lineal:**

$\frac{dy}{dx} + p(x) = q(x)$ o bien $[p(x)y - f(x)]dx + dy = 0$, efectivamente $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}$ $= p(x)$, y por lo tanto, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, de manera análoga se puede hallar las condiciones de existencia de factores integrantes de la forma: $\mu(x \pm y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x^2 \pm y^2)$, $\mu(\frac{y}{x})$, $\mu(\frac{x}{y})$, etc.

Ejemplos: hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

a. $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy=0$,

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=4xy + 3y^2 - x \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}$ $=4x + 6y$, $q(x,y)=x(x + 2y) \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=2x + 2y$, como podemos observar no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante $\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} = \frac{4x + 6y - 2x - 2y}{x(x + 2y)} \Rightarrow \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} = \frac{2}{x}$, luego el factor integrante será $\mu(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx} \Rightarrow \mu(x)= e^{2\ln x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\ln x^2} \Rightarrow \mu(x)=x^2$, por lo tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial:

$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy=0$, por el factor $\mu(x)=x^2$ y probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir:

$(4x^3y + 3x^2y^2 - x^3)dx + x^3(x + 2y)dy=0$, $p\mu(x,y)=4x^3y + 3x^2y^2 - x^3 \Rightarrow \frac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}$ $=4x^3 + 6x^2y$, $q\mu(x,y)=x^4 + 2x^3y \Rightarrow \frac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}=4x^3 + 6x^2y$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, con lo cual decimos que es una ecuación diferencial total, encontramos el valor de:

$u[\mu(x,y)]=\int (4x^3y + 3x^2y^2 - y^3)dx + \varphi(y) \Rightarrow u[\mu(x,y)]=x^4y + x^3y^2 - xy^3 + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u\mu(x,y)$ con respecto a y, y la igualamos a $q\mu(x,y)$, es decir:

$\frac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}$=$x^4$ + $2x^3y$ – $3xy^2$ + $\frac{d\varphi(y)}{dy}$=x^4 + $2x^3y \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy}$=$-3xy^3$, integrando con respecto a y, tenemos que:

$\varphi(y)=-\frac{3}{4}xy^4$ + C, sustituyendo este valor en la función uμ(x,y), tenemos que:

$u[\mu(x,y)]=x^4y + x^3y^2 - xy^3 - \frac{3}{4}xy^4 + C$

b. $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0$

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=xy + y^2 - y \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}$ $=x + 2y$, $q(x,y)=x(x + 3y + 2) \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$=$2x + 3y + 2$, como podemos observar no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante:

$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)} = -\frac{(x+y+1)}{x(x+3y+2)}$, vemo que esta función no es exclusivamente de x, luego no es un factor integrante, probaremos ahora con $\frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)} = \frac{(x+y+1)}{y(x+y+1)} \Rightarrow \frac{\frac{\delta q(x,y)}{\delta x} - \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}}{p(x,y)} = \frac{1}{y}$, que si es una función exclusivamente de y, por lo tanto, podemos obtener el factor de integración como: $\mu(y)=e^{\int \frac{dy}{y}} \Rightarrow \mu(y)=e^{\ln y} \Rightarrow \mu(y)=y$, por lo tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0$, por el factor integrante $\mu(x)=y$, luego probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir, $(y^2x + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3y^2x + 2xy)dy=0$, $p\mu(x,y)=y^2x + y^3 + y^2 \Rightarrow$ $\frac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}=2xy + 3y^2 + 2y$, $q\mu(x,y)=x^2y + 3y^2x + 2xy \Rightarrow \frac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}=2xy + 3y^2 + 2y$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, y en consecuencia es una direfencial total, encontramos el valor de $u[\mu(x,y)]=\int(xy^2 + y^3 + y^2)dx + \varphi(y) \Rightarrow$ $u[\mu(x,y)]=\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u[\mu(x,y)]$ con respecto a y, y la igualamos a $q[\mu(x,y)]$, es decir, $\frac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}=x^2y + 3xy^2 + 2xy + \frac{d\varphi(y)}{dy} = x^2y + 3y^2x + 2xy \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy}=0$, integrando con respecto a y, tenemos que $\varphi(y)=C$, sustituyendo este valor en la función $u[\mu(x,y)]$, tenemos que: $u[\mu(x,y)]=\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + C$

c. $y(x + y)dx + (x + 2y – 1)dy=0$

Veamos si se cumple la condición de Euler: $p(x,y)=xy + y^2 \Rightarrow$ $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=x + 2y$, $q(x,y)=x + 2y - 1 \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=1$, como podemos ver no se cumple de Euler, es decir, $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$, buscaremos entonces un factor integrante $\dfrac{\dfrac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\dfrac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}$ =1, por lo tanto, podemos obtener el factor de integración como: $\mu(x,y)=e^{\int dx} \Rightarrow \mu(x,y)=e^{x}$, por l o tanto, multiplicamos a la ecuación diferencial y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy=0, por el factor integrante $\mu(x,y)=e^{x}$, luego probaremos de nuevo si se cumple la condición de Euler, es decir, $y(x + y)e^{x}dx + (x + 2y – 1)e^{x}dy=0$, $p[\mu(x,y)]=y^2x + y^3 + y^2 \Rightarrow \dfrac{\delta p\mu(x,y)}{\delta y}$ $=xe^{x} + 2ye^{x}$, $q[\mu(x,y)]=xe^{x} + 2ye^{x} - e^{x} \Rightarrow \dfrac{\delta q\mu(x,y)}{\delta x}= xe^{x} + 2ye^{x}$, por lo tanto, se cumple la condición de Euler, y entonces es una direfencial total, encontramos el valor de $u[\mu(x,y)]=\int(xye^{x}+y^2e^{x})dx+\varphi(y) \Rightarrow u[\mu(x,y)]=y(x – 1)$ $e^{x} + \varphi(y)$, ahora derivamos a $u[\mu(x,y)]$ con respecto a y, e igualamos a $q[\mu(x,y)]$, es decir: $\dfrac{\delta u\mu(x,y)}{\delta y}=(x – 1)e^{x}\ (x – 1)e^{x} + \dfrac{d\varphi(y)}{dy}=xe^{x} + 2ye^{x} \Rightarrow \dfrac{d\varphi(y)}{dy}=-e^{x} +$ $2ye^{x}$, integrando con respecto a y, tenemos que:

$\varphi(y)=-ye^{x} + y^2e^{x} + C$, sustituyendo este valor en la función $u[\mu(x,y)]$, tenemos que: $u[\mu(x,y)]=y(x – 1)e^{x} - ye^{x} + y^2e^{x} + C$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En cada uno de los siguientes ejercicios indique si la ecuación es ordinaria o parcial, lineal o no lineal, e indique su orden.

a. $$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 5t^2=0$$

b. $$3\frac{\delta^3 y}{\delta x^3}+5\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}=\frac{\delta y}{\delta x}$$

Solución: 1a. La ecuación $\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 5t^2=0$ es una ecuación diferencial ordinaria, de tercer orden y de primer grado

Solución: 1b. La ecuación $3\frac{\delta^3 y}{\delta x^3}+5\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}=\frac{\delta y}{\delta x}$ es una ecuación diferencial parcial, de tercer orden y de primer grado

2. En cada una de las igualdades que se indican a continuación, eliminar las constantes arbitrarias.

a. $$y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$$

b. $$y=C_1e^x + C_2xe^x$$

Solución: 2a. $y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$, como la función posee solamente una constante derivamos la función $y=\sqrt{2x\lg x-2x+C}$ una vez y obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[2\lg x-\frac{1}{\ln 10}-2\right]\frac{1}{\sqrt{2x\lg x-2x+C}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\ln 10\lg x-\ln 10-1}{\ln 10\sqrt{2x\lg x-2x+C}},$$

manipulando esta ecuación y despejando C se obtiene que:

$C=\left(\dfrac{\ln 10 \lg x - \ln 10 - 1}{\dfrac{dy}{dx}}\right)^2 - 2x\lg x + 2x$ sustituyendo el valor de C en la ecuación

y= $\sqrt{2x\lg x - 2x + C}$, se obtiene que: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln 10 \lg x - \ln 10 - 1}{\sqrt{2x\lg x - 2x + C}}$

Solución: 2b. y=$C_1e^x + C_2xe^x$, como la función posee dos constante derivamos la función y=$C_1e^x + C_2xe^x$ dos veces y obtenemos:

$C_1+(x+1)C_2 = e^{-x}\dfrac{dy}{dx}$ (1), derivando la ecuación (1) obtenemos:

$C_1+(x+2)C_2 = e^{-x}\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (2), restando (1) de (2) obtenemos el valor de

$C_2 = e^{-x}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}\right)$, sustituyendo el valor de C2 en (1) se obtiene que

$C_1 = e^{-x}\left((x+2)\dfrac{dy}{dx}-(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ y por ultimo sustituyendo los valores de C_1 y

C_2 en la ecuación y=$C_1e^x + C_2xe^x$ se obtiene: y=2 $\dfrac{dy}{dx}$ - $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. tgxsen^{2}ydx + cos^{2}xtgydy=0

b. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

c. (x – y)dx + (3x + y)dy=0,

Solución: 3a tgxsen^{2}ydx + cos^{2}xtgydy=0, Multiplicando la ecuación tgxsen^{2}ydx + cos^{2}xtgydy=0 por el factor $\dfrac{1}{sen^2y\cos^2x}$, nos queda:

$\frac{tgx}{\cos^2 x}dx + \frac{tgy}{sen^2 y}dy = 0$, aplicando las integrales trigonométricas e integración se obtiene que:

$\int \frac{dy}{senycosy} = -\int sec^2 xtgxdx \Rightarrow \int \frac{dy}{senycosy} = -\int sec^2 xtgxdx$, son dos intgrales inmediatas, ver tablas de integración en el anexo, entonces:

Ln(cotgy – cscy) + $\frac{tg^2 x}{2}$ =C

Solución: 3b: $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$, haciendo el cambio z=x + y en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$ tenemos que: $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$, sustituyendo estos valores en la E.D. y despejando tenemos: $\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 3z}{1 + z}$, reacomodando e integrando se tiene que: $\int \frac{1 + z}{1 - 3z}dz = \int dx$, aplicando las propiedades de los números reales, estas integrales se transforman en: $\frac{1}{3}\int dz + \frac{2}{3}\int \frac{1}{1 - 3z}dz = \int dx \Rightarrow \frac{1}{3}z - \frac{2}{9}$Ln(1 – 3z)=x + C, luego del cambio nos da:

$\frac{1}{3}$(x + y) - $\frac{2}{9}$Ln(1 – 3x -3y)=x + C

Solución: 3c: (x – y)dx + (3x + y)dy=0, Aplicando las propiedades de los números reales en la ecuación diferencial nos resulta: $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + 3x}$, como es una ecuación homogénea de grado cero, hacemos el cambio y=xz, derivando esta ecuación con respecto a x, sustituyendo este valor e integrando se obtiene $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1 - z}{3 + z} - z \Rightarrow \int \frac{z - 3}{z^2 - 4z + 1}dz = \int \frac{dx}{x}$, completando cuadrado y aplicando nuevamente las propiedades de los números reales se tiene: $\int \frac{z-3}{(z-2)^2-3}dz = \text{LnCx} \Rightarrow \int \frac{z-2}{(z-2)^2-3}dz - \int \frac{1}{(z-2)^2-3}dz = \text{LnCx}$, por las tablas de integración se tiene que: $\frac{1}{2}\text{Ln}\left|z^2-4z+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{z-2+\sqrt{3}}{z-2-\sqrt{3}}\right|$,

sustituyendo z=$\frac{y}{x}$ tenemos: $\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\frac{y}{x}+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{\frac{y}{x}-2+\sqrt{3}}{\frac{y}{x}-2-\sqrt{3}}\right|$=LnCx $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{x^2-4xy+y^2}{x}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right| = \text{LnCx} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\text{Ln}\left|\frac{(x-y)^2}{x}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right| = \text{LnCx} \Rightarrow \frac{1}{4}\text{Ln}\left|\frac{x-y}{\sqrt{x}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Ln}\left|\frac{y+(\sqrt{3}-2)x}{y-(\sqrt{3}+2)x}\right|$ =LnCx

4. **Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.**

a. $\frac{dy}{dx} = x\,e^{(y-x^2)}$, y(2)=8

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$ y(2)=1

<u>Solución: 4a:</u> $\frac{dy}{dx} = x\,e^{(y-x^2)}$, y(2)=8. Aplicando las propiedades de los números reales en la ecuación diferencial, nos resulta: $\frac{dy}{dx} = x\,e^{-x^2}\,e^{y}$, separando las variables e integrando se tiene que: $\int xe^{-x^2}dx = \int e^{y}dy$ y por las tablas de integración y las propiedades de los números reales obtenemos: $\frac{y}{x^2}$=C, ahora sustituyendo el punto (2,8) en esta ecuación hallamos el valor de C y lo sustituimos concluyendo el ejercicio, resultando $\frac{y}{x^2}$=2 o y=$2x^2$

<u>Solución: 4b:</u> $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$, y(2)=1. Operando la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1$, nos resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x}$ haciendo el cambio y=xz $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=z + x$\frac{dz}{dx}$, sustituyendo en en la ecuación diferencial e integrando nos resulta: $\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ Lnz=2Lnx + C, volviendo el cambio y aplicando las propiedades de los logaritmos nos resulta: $\frac{y}{x^3}=C$, ahora sustituyendo el punto (2,1) en esta ecuación hallamos el valor de C, que en este caso es $\frac{1}{8}$, con lo que la solución será: $\frac{y}{x^3}=8$

5. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.
   a. $\frac{dy}{dx}$ - 7x=5e^{7x}
   b. $\frac{dy}{dx}$ - $\frac{2y}{x+1}$=(x + 1)^3, en el punto (0,1)

c. $\frac{dy}{dx}$ + ycosx=cosx

Para la resolución de estos ejercicios utilizaremos los pasos a seguir descritos en la definición 11.

<u>Solución: 5a:</u> $\frac{dy}{dx}$ - 7x=5e^{7x} (1)

i. Se resuelve la ecuación homogénea para hallar el valor de la variable y.

$\frac{dy}{dx}$ - 7x=0

ii. Separamos variables e integramos.

$\int dy=7\int x dx$ $\Rightarrow$ y=$\frac{7}{2}$x^2 + C(x) (2)

iii. Derivamos la ecuación (2) con respecto a x para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=7x+\frac{dC(x)}{dx}$$

iv. Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ en (1) para hallar $\frac{dC(x)}{dx}$

$$7x+\frac{dC(x)}{dx}-7x=5e^{7x}\Rightarrow\frac{dC(x)}{dx}=5$$

v. Se separa variable y se integra para hallar el valor de C(x)

$$\int dC(x)=5\int e^{7x}dx\Rightarrow C(x)=\frac{7}{2}e^{7x}+C$$

vi. Se sustituye el valor de C(x) en la ecuación (2) y obtenemos la solución buscada

$$y=\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}e^{7x}+C$$

<u>Solución: 5b:</u> $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$ (1)

1. Se resuelve la ecuación homogénea para hallar el valor de la variable y.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0$$

2. Separamos variables e integramos.

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x+1}\Rightarrow Lny=Ln(x+1)^2C(X)\Rightarrow y=(x+1)^2C(x)\quad(2)$$

3. Derivamos la ecuación (2) con respecto a x para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=2(x+1)C(x)+(x+1)^2\frac{dC(x)}{dx}$$

4. Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ en (1) para hallar $\frac{dC(x)}{dx}$

$$2(x+1)C(x)+(x+1)^2\frac{dC(x)}{dx}-2(x+1)C(x)=(x+1)^3\Rightarrow\frac{dC(x)}{dx}=x+1$$

5. Se separa variable y se integra para hallar el valor de C(x)

$\int dC(x) = \int (x+1)dx \Rightarrow C(x)=\frac{1}{2}(x + 1)^2 + C \Rightarrow C(x)=\frac{(x+1)^2 + C}{2}$

6. Se sustituye el valor de C(x) en la ecuación (2)

$y=\frac{(x+1)^2 + C}{2}(x + 1)^2 \Rightarrow 2y=(x + 1)^2((x + 1)^2 + C)$ (3)

7. Sustituyendo el punto (0,1) en la ecuación (3) se halla el valor de C, que en este caso es igual a 1, por lo tanto, la solución es: $2y=(x + 1)^2(x^2\ 2x + 2)$

<u>Solución: 5c:</u> $\frac{dy}{dx}$ + ycosx=cosx. (1)

i. Se resuelve la ecuación homogénea para hallar el valor de la variable y.

$\frac{dy}{dx}$ + ycosx =0

ii. Separamos variables e integramos.

$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x dx \Rightarrow \text{Lny}=-\text{senx} + C(x) \Rightarrow y=C(x)e^{-\text{senx}}$ (2)

iii. Derivamos la ecuación (2) con respecto a x para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=- e^{-\text{senx}}C(x)\cos x + e^{-\text{senx}}\frac{dC(x)}{dx}$

iv. Se sustituyen los valores de $\frac{dy}{dx}$ en (1) para hallar $\frac{dC(x)}{dx}$

$- e^{-\text{senx}}C(x)\cos x + e^{-\text{senx}}\frac{dC(x)}{dx} + e^{-\text{senx}}C(x)\cos x=\cos x \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = e^{\text{senx}}\cos x$

v. Se separa variable y se integra para hallar el valor de C(x)

$\int dC(x) = \int \cos x\, e^{\text{senx}}dx \Rightarrow C(x)=e^{\text{senx}} + C$

vi. Se sustituye el valor de C(x) en la ecuación (2) y obtenemos la solución buscada

$y=(e^{\text{senx}} + C)e^{-\text{senx}} \Rightarrow y=1 + Ce^{-\text{senx}}$

6. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas, en caso de no ser exacta encontrar un factor integrante y luego resolver la ecuación.

a. $\frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \frac{2y}{x^3}dy = 0$

b. $e^{xy}(xy + 1)dx + (x^2e^{xy} + 2y)dy=0$

c. $(\text{sen}2x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy=0$

d. $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

e. $(y + xy^2)dx - xdy=0$

f. $(x\cos y - y\,\text{sen}y)dy + (x\,\text{sen}y + y\cos y)dx=0$

Para estos ejercicios aplicaremos los pasos descritos en la definición 12

<u>Solución: 6a:</u> $\frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \frac{2y}{x^3}dy = 0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir:

$p(x,y)=\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = -\frac{6y}{x^4}$ y $q(x,y)=\frac{2y}{x^3} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} = -\frac{6y}{x^4}$, luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y)=\int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=-\frac{2}{x^3} + 3\frac{y^2}{x^5} + \psi(y)$$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = \frac{6y}{x^5} + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$\frac{6y}{x^5}+\frac{\delta\psi}{\delta y}=\frac{2y}{x^3} \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y}=\frac{2y}{x^3} - \frac{6y}{x^5}$$

v. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y)=2\int\left(\frac{y}{x^3}-\frac{3y}{x^5}\right)dx \Rightarrow \psi(y)=\frac{y^2}{x^3} - 3\frac{y^2}{x^5} + C$$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y)=-\frac{2}{x^3} + 3\frac{y^2}{x^5} + \frac{y^2}{x^3} - 3\frac{y^2}{x^5} + C \Rightarrow \psi(y)=\frac{y^2-2}{x^3} + C$$

<u>Solución: 6b:</u> $e^{xy}(xy + 1)dx + (x^2e^{xy} + 2y)dy=0$

Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir:

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y)=e^{xy}(xy + 1) \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=xe^{xy}(xy + 2)$ y $q(x,y)=(x^2e^{xy} + 2y) \Rightarrow$

$\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}= xe^{xy}(xy + 2)$, luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$u(x,y)=\int e^{xy}(xy+1)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=y\int xe^{xy}dx + \int e^{xy}dx + \psi(y)$, integrando la primera integral por parte nos resulta: $u(x,y)=xe^{xy} + \psi(y)$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=x^2e^{xy} + \frac{\delta\psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$x^2e^{xy} + \frac{\delta\psi}{\delta y} = x^2e^{xy} + 2y \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y} = 2y$

v. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$\psi(y) = 2\int y dx \Rightarrow \psi(y) = y^2 + C$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$u(x,y) = xe^{xy} + y^2 + C$

Solución: 6c: $(sen2x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y) = sen2x - xy^2 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y} = -2xy$, $q(x,y) = y(1 - x^2) \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x} = -2xy$, luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$u(x,y) = \int (sen2x - xy^2)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{2}(cos2x + x^2y^2) + \psi(y)$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = -2x^2y + \frac{\delta\psi}{\delta y}$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$-2x^2y + \frac{\delta\psi}{\delta y} = y(1 - x^2) \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y} = y(1 + x^2)$

v. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$\psi(y)=(1+x^2)\int y dx \Rightarrow \psi(y)=\frac{1}{2}(1+x^2)y^2 + C$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$u(x,y)=-\frac{1}{2}(\cos 2x + x^2y^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)y^2 + C \Rightarrow u(x,y)=y^2 - \cos 2x + 2C$

<u>Solución 6d:</u> $\frac{y dx - x dy}{x^2+y^2}=0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

luego se cumple la condición de Euler

ii. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$u(x,y)=\int \frac{y}{x^2+y^2}dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=tg^{-1}\frac{y}{x} + \psi(y)$

iii. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y} \Rightarrow \frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=-\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y}$$

iv. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$-\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y}=-\frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y}=0$$

v. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$\psi(y)=\int 0dx \Rightarrow \psi(y)=C$

vi. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$u(x,y)=tg^{-1}\frac{y}{x} + C$

<u>Solución: 6e:</u> $(y + xy^2)dx - xdy=0$

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y)=y + xy^2 \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=1 + 2xy$, $q(x,y)=-x \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=-1$, luego no se cumple la condición de Euler ya que $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}\neq\frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$

ii. Buscamos el factor integrante, ver definiciones 13 y 14

$$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2} \Rightarrow \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{-2(1+2y)}{y(1+2xy)} \Rightarrow$$

$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{-2}{y^2}$, donde el factor integrante será: $\mu(y)=e^{\int\frac{-2}{y}dy} \Rightarrow \mu(y)=\frac{1}{y^2}$

iii. Multiplicamos la ecuación (1) por el factor $\frac{1}{y^2}$ y probamos si se cumple la condición de Euler, es decir:

$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy=0$ (2)

iv. Comprobemos ahora que se cumple la condición de Euler.

$p(x,y)=\frac{1}{y} + x \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=-\frac{1}{y^2}$ y $q(x,y)=-\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=-\frac{1}{y^2}$, luego se cumple la condición de Euler y en consecuencia (2) es una diferencial exacta.

v. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y)= \int\left(\frac{1}{y}+x\right)dx + \psi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \psi(y)$$

vi. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y}$$

vii. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta y} = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\delta\psi}{\delta y} = 0$$

viii. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y)=\int 0dx \Rightarrow \psi(y)=C$$

ix. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y)=\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C \text{ o } u(x,y)= x\left(\frac{1}{y}+\frac{x}{2}\right) + C$$

<u>Solución: 6f:</u> (xseny + ycosy)dx + (xcosy – yseny)dy =0

i. Verificamos que se cumpla la condición de Euler, es decir,

$p(x,y)=xseny + ycosy \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=xcosy + cosy – yseny$, $q(x,y)=xcosy – yseny$

$\Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=-cosy$, luego no se cumple la condición de Euler ya que $\frac{\delta p(x,y)}{\delta y} \neq \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}$

ii. Buscamos el factor integrante, ver definiciones 13 y 14

$$\frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=\frac{xcosy+cosy-yseny-cosy}{xcosy-yseny} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\delta p(x,y)}{\delta y}-\frac{\delta p(x,y)}{\delta x}}{q(x,y)}=1 \quad \Rightarrow,$$

donde el factor integrante será: $\mu(y)=e^{\int dx} \Rightarrow \mu(y)=e^x$

iii. Multiplicamos la ecuación (1) por el factor e^x y probamos si se cumple la condición de Euler, es decir:

$(xseny + ycosy)e^x dx + (xcosy – yseny)e^x dy =0$

iv. Comprobemos ahora que se cumple la condición de Euler.

$p(x,y)=(xcosy – yseny)e^x \Rightarrow \frac{\delta p(x,y)}{\delta y}=(xcosy + cosy - yseny)e^x$ y $q(x,y)=(xcosy – yseny)e^x \Rightarrow \frac{\delta q(x,y)}{\delta x}=(xcosy + cosy - yseny)e^x$, luego se cumple la condición de Euler y en consecuencia (2) es una diferencial exacta.

v. Se integra la función u(x,y) con respecto a x

$$u(x,y)=\int (xseny+ycosy)e^x dx + \psi(y) \Rightarrow$$

$$u(x,y)=\int xsenye^x dx + \int ycosye^x dx \; \frac{x}{y} + \psi(y) \Rightarrow$$

$$u(x,y)=seny(x – 1)e^x + ycosye^x + \psi(y) \Rightarrow$$

$$u(x,y)=(xseny + ycosy)e^x + \psi(y)$$

vi. Derivando u(x,y) con respecto con respecto a y se tiene:

$$\frac{\delta u(x,y)}{\delta y}=(xcosy + cosy - yseny)e^x + \frac{\delta \psi}{\delta y}$$

vii. Se iguala la derivada de u(x,y) a la función q(x,y) y se despeja la constante dependiente de y

$$(xcosy + cosy - yseny)e^x + \frac{\delta \psi}{\delta y}=(xcosy – yseny)e^x \Rightarrow \frac{\delta \psi}{\delta y}=-e^x cosy$$

viii. Se integra $\frac{\delta\psi}{\delta y}$ con respecto a y para obtener el valor de la constante que depende de y

$$\psi(y) = -\int e^{x}\cos y\,dy \Rightarrow \psi(y) = -e^{x}\operatorname{sen} y + C$$

ix. Se sustituye el valor de la constante en la función u(x,y)

$$u(x,y) = (x\operatorname{sen} y + y\cos y)e^{x} - e^{x}\operatorname{sen} y + C \Rightarrow$$

$$u(x,y) = (x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y + y\cos y)e^{x} + C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En cada uno de los siguientes ejercicios indique si la ecuación es ordinaria o parcial, lineal o no lineal, e indique su orden.

a. $\frac{d^2x}{dt^2}$ + k^2x=0, b. $\frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$, c. $(x^2 + y^2)$ + 2xydy=0, d. $\frac{dy}{dx}$ + p(x)y=q(x)

e. $\frac{d^3x}{dx^3}$ - $\frac{dy}{dx}$ 2y=0 f. $y\frac{d^2y}{dx^2}$ =x, g. $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 0$, h. $\frac{d^4y}{dx^4}$ =w(x)

i. $x\frac{d^2y}{dt^2}$ - $y\frac{d^2x}{dt^2}$ =C, j. $\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dw}{dx}\right)^4$ + yw=0

2. En cada una de las igualdades que se indican a continuación, eliminar las constantes arbitrarias.

a. xseny + x^2y=c, b. $xy^2 - 1$=cy, c. x=Csen(αt + β), d. y=cx + c^2 + 1,

e. $y = mx + \frac{2}{m}$, f. y^2=4ax, g. y=C_1 + C_2e^{3x}, h. y=x + C_1e^x + C_2e^{-x},

i. y=x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}, 10. y= C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}, 11. y= C_1x^2 + C_2e^{2x}

3. Averiguar, si son soluciones de las ecuaciones diferenciales que se dan, las funciones que se indican.

1. $x\frac{dy}{dx}$=2x, y=$5x^2$, b. $\frac{d^2y}{dx^2}$=x^2 + y^2, y=$\frac{1}{x}$, c. (x + y)dx + xdy=0, y=$\frac{C^2 - x^2}{2x}$

d. $\frac{d^2y}{dx^2}$ + y=0, y=3senx – 4cosx, e. $\frac{d^2y}{dt^2}$ + w^2x=0, x=C_1coswt + C_2senwt,

f. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $2\frac{dy}{dx}$ + y=0, y=xe^x, g. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $2\frac{dy}{dx}$ + y=0, y=x^{2}e^x,

h. $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $(h_1 - h_2)$ $\frac{dy}{dx}$ - h_1h_2y=0, $y = C_1e^{h_1x} + C_2e^{h_2x}$,

i. $(x - y + 1)\frac{dy}{dx}$=1, y=x + Ce^y, j. $(x - 2y)\frac{dy}{dx}$=2x – y, x^2 – xy + y^2=C^2,

k. $\frac{d^2y}{dx^2}$=y, y=coshx + senhx, l. $\frac{d^2y}{dx^2}$=y, y=cosx + senx,

m. $\frac{d^2y}{dx^2}$ + $2\frac{dy}{dx}$=0, y= C_1 + $\frac{C_2}{x}$, n. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ - $3x\frac{dy}{dx}$ + 4y=0, y=$\sqrt{x}$,

o. $\frac{dy}{dx}$ + 2xy + 1=0, $y = e^{-x^2}\int e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

4. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{y}}$, b. Secxdy=xctgydx, c. secy$\frac{dy}{dx}$=sen(x – y) + sen(x + y),

d. $x\sqrt{1-y^2}dx = dy$, e. $\frac{dy}{dx}$=1 + e$^{y - x + 5}$, f. $(1 - x)\frac{dy}{dx}$=y^2, g. $\frac{dy}{dx}$=xy^2,

h. senxsenydx + cosxcosydy=0, i. mydx=nxdy, j. ylnxlnydx + dy=0,

k. a^{2}dx=x$\sqrt{x^2 - a^2}$ dy, l. dr=b(cosθdr + senθdθ),

m. (1 + lnx)dx + (1 + lny)dy=0, n. (2x^2 + y^2)dx + (2xy + 3y^2)dy=0,

o. $y\frac{dy}{dx}$ - y=y^3, p. $xy\frac{dy}{dx}$=1 – x^2, q. y - $x\frac{dy}{dx}$=a(1 + $x^2\frac{dy}{dx}$),

r. $3e^x tgydx + (1 - e^x)sec^2ydy=0$, s. $\frac{dy}{dx}tgx=y$, t. $\frac{dy}{dx}=(x+y)2$,

u. $\frac{dy}{dx}=(8x + 2y + 1)2$, v. $(2x + 3y -1)dx + (2x + 6y -5)dy=0$,

w. $(2x - y)dx + (4x - 2y +3)dy=0$, x. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} - 1$, y. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y}{x}$,

z. $\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}$, aa. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx=0$, ab. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+3y}{2x+y}$,

ac. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$, ad. $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy=0$, ae. $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$

,

af. $x\frac{dy}{dx}=y + xe^{\frac{y}{x}}$, ag. $3x^3ydx + (x^4 + y^4)dy=0$, ah. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

5. Encuentre la solución particular de las siguientes ecuaciones de variables separables y que se transforman en variables separables.

a. $(1+e^x)y\frac{dy}{dx}=e^x$, $y(0)=1$ b. $xdy - ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$ $x=\frac{1}{2}$, $y=0$,

c. $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}$ $u(0)=1$,d, $2xy\frac{dy}{dx}=1 + y^2$, $y(3)=2$, e. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-4}{x-3}$, $y(1)=2$,

f. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}$, $y(2)=2$, g. $\frac{dy}{dx}=y^2 -1$, $y(0)=2$, h. $\frac{dy}{dx} + 2y=1$, $y(0)=\frac{2}{5}$,

i. $xy^2\frac{dy}{dx}=y^3 - x^3$, $y(1)=2$, j. $ydx + (y\cos\frac{x}{y} - x)dy = 0$, $y(0)=2$,

k. $(x+\sqrt{xy})\frac{dy}{dx}+x-y=\sqrt{\frac{y^3}{x}}$, y(1)=1, l. ydx + x(lnx – lny – 1)dy=0, y(e)=1,

m. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\cosh\frac{y}{x}$, n. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-3}{x+y-1}$, y(0)=1, o. $(2a^2 - r^2)dr=r^3\operatorname{sen}\theta d\theta$, $\theta=0$, r=a,

p. $xy^2dx + e^xdy=0$, $x \to \infty$, $y \to \frac{1}{2}$, q. $(x + y^2)dy=ydx$, x=2, y=1,

r. $(y - \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy=0$, $y(\sqrt{3})=1$, s. $[x\cos^2(\frac{y}{x}) - y]dx + xdy=0$, $y(1)=\frac{\pi}{4}$,

t. y(9x – 2y)dx – x(6x – y)dy=0, y(1)=1, u. $y(3x + 2y)dx - x^2dy=0$, y(1)=2,

v. $(3x^2 - 2y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$, y(0)=-1, w. $\sqrt{1-4x^2}dy+2\sqrt{1-y^2}dx=0$, y(1)=2,

x. $ydx + [y\cos(\frac{y}{x}) - x]dy=0$, y(0)=2, y. $(x+\sqrt{xy})\frac{dy}{dx}+x-y=\sqrt{\frac{y^3}{x}}$, y(1)=1,

z. ydx + x(lnx – lny -1)dy=0, y(1)=e, aa. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\cosh\frac{y}{x}$, y(1)=0,

ab. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy==$, y(2)=1, ac. $(x + y)\frac{dy}{dx}=xtg^{-1}\frac{y}{x}$, y(1)=1,

ad, $x\ln\frac{y}{x}dy - ydx=0$, y(e)=3 ae. $xy^2\frac{dy}{dx}=y^3 - x^3$, y(1)=2

6. Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

a. $(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3xy=6x$, b. $x^2\frac{dy}{dx} + xy=\operatorname{senx}$, c. $\frac{dy}{dx} + 2y=3e^{2x}$, d. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}=y^2$

e. $x\frac{dy}{dx} + 5y=7x^2$, g. $3x\frac{dy}{dx} + y=12x$, h. $x\frac{dy}{dx} + y=x$, i. $\frac{dy}{dx}=(1 - y)\cos x$,

j. $\frac{dy}{dx} + y\,\text{sen}x=\text{sen}x$, 10. $(1 + x)\frac{dy}{dx} + y=\cos x$, k. $(1 + x)\frac{dy}{dx} + y=\cos x$,

l. $\frac{dy}{dx}= 2xy + 3x^2 e^{x^2}$, 13. $\frac{dy}{dx} + y=e^x$, m. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}=x^3$, n. $x\frac{dy}{dx} + y - e^x=0$,

o. $(1 + y^2)dx=(\sqrt{1+y^2}\,\text{sen}y - xy)dy$, p. $y^2dx - (2xy + 3)dy=0$, q. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}=-$

xy^2,

r. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x=0$, s. $\frac{dy}{dx} - y\,\text{tg}x=\sec x$, t. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 +x=0$,

u. $ydx + (x -\frac{1}{2}x^3y)dy=0$, v. $3xdy=y(1 + x\,\text{sen}x - 3y^3\text{sen}x)dx$,

w. $(x^4 + 2y)dx - xdy=0$, x. $\frac{dy}{dx}=\csc x - y\,\text{ctg}x$, y. $dy=(x - 3y)dx$,

z. $\frac{dy}{dx}=x - 2y\,\text{ctg}2x$, 28. $\frac{dy}{dx}=1 + 3y\,\text{tg}x$, aa. $(3xy + 3y - 4)dx + (x + 1)^2dy=0$,

ab. $(y - \cos^2x)dx + \cos x dy=0$, ac. $3\frac{dy}{dx} - 5x=9e^{3x}$ ad. $x\frac{dy}{dx} + 2y=3x$

7. Verificar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resolverlas, en caso de no ser exacta encontrar un factor integrante y luego resolver la ecuación.

a. $(3x + 2y - 1)dx + (2x + 3y +7)dy=0$, b. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy=0$,

c. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$, d. $(x^3 – 3xy^2 + 2)dx – (3x^2y – y^2)dy=0$,

e. $xdx + ydy=\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, f. $(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy=0$, g. $(x + y^2)dx – 2xydy=0$,

h. $y(1 + xy)dx – xdy=0$, i. $\frac{y}{x}dx + (y^3 – \ln x)dy=0$, j. $(5y + 2x)\frac{dy}{dx} - 2y=0$,

k. $(x\cos y – y\operatorname{sen} y)dy + (x\operatorname{sen} y + y\cos y)dy=0$, l. $(2x + 4)dx + (3y – 1)dy=0$,

m. $(\operatorname{sen} y – y\operatorname{sen} x)dx + (\cos x + x\cos y – y)dy=0$.

n. $(y^3 - \frac{1}{x} + 2\cos 3x)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 2x^2 - 6y\operatorname{sen} 3x=0$, o. $(x^2 – y^2)dx + x(x – 2y)dy=0$,

p. $(1 + \ln y + y)dx=(1 – \ln x)dy$, q. $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2dy=0$,

r. $(y\ln y – e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x\ln y)dy=0$, s. $(\operatorname{sen} 2x – xy^2)dx + y(1 + y^2 - x^2)dy=0$,

t. $(e^{2y} – y\cos xy)dx + (2xe^{2y} – x\cos xy + 2y)=0$, u. $(x + 2y)dx + (2x +y)dy=0$,

v. $y(2xy + 1)dx – xdy=0$, w. $(1 + y^2)dx + (x^2y + y)dy=0$,

x. $y(x^4 – y^2)dx + x(x^4 + y^2)dy=0$, y . $(1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy=0$,

z. $y(x^3e^{xy} – y)dx + x(y + x^3e^{xy})dy=0$, aa. $(1 – xy)dx + [y^2 + x^2(1 – xy)^{-2}]dy=0$,

ab. $y(2x + y^2)dx + x(y^2 – x)dy=0$, ac. $(xy^2 + x – 2y)dx + x^2ydy=2(x + y)dy$,

ad. $(x^ny^{n+1} + ay)dx + (x^{n+1}y^n + bx)dy=0$, ae. $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy$

af. $\frac{x\,dx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$, ag. $(x^{n+1}y^n + bx)dy=0$

CAPITULO XII

INTRODUCCIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

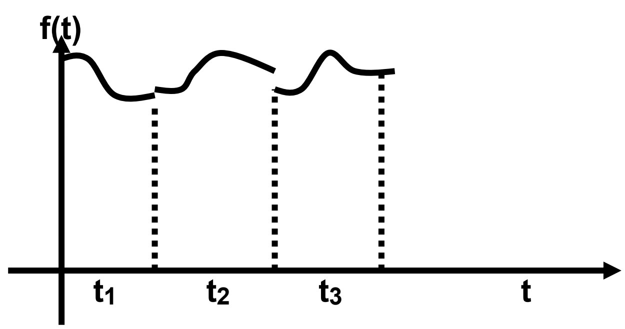
En este capítulo se estudiara: Definición: Transformada de Laplace, Función Seccionalmente Continua, Función de Orden Exponencial, Linealidad de la Transformada de Laplace, Función Escalón, Teoremas Básicos de la Transformada de Laplace: Linealidad, Diferenciación, Integración, Traslación Real, Traslación Compleja, Multiplicación por t, Valor Inicial, Valor Final, Tablas de Algunas Transformadas de Laplace, Multiplicación Compleja o Integral de Convolución, Fracciones Parciales, Transformada Inversa de Laplace, Ecuación de Estado, Polinomios Característicos y Vectores Característicos, Matriz Diagonal, Resolución de Una Ecuación de Estado por el Método de Diagonalización, Ejercicios Resueltos, Ejercicios Propuestos.

<u>**Definición 1:**</u> **La Transformada de Laplace es una herramienta matemática usada para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y que tienen las siguientes características:**

a. La ecuación diferencial se resuelve en una sola operación.

b. La Trasformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica en función de la frecuencia compleja S, luego se manipula esta ecuación para obtener la solución en el dominio de S, la solución final en el dominio del tiempo t, se obtiene buscando la transformada inversa de Laplace.

<u>**Definición 2:**</u> **Una función f(t) es <u>seccionalmente continua</u> en un intervalo finito, si este intervalo se puede subdividir en un número finito de partes, de manera que en cada uno de esos intervalos, la función f(t) sea continua y el límite en los extremos exista y sea finito.**

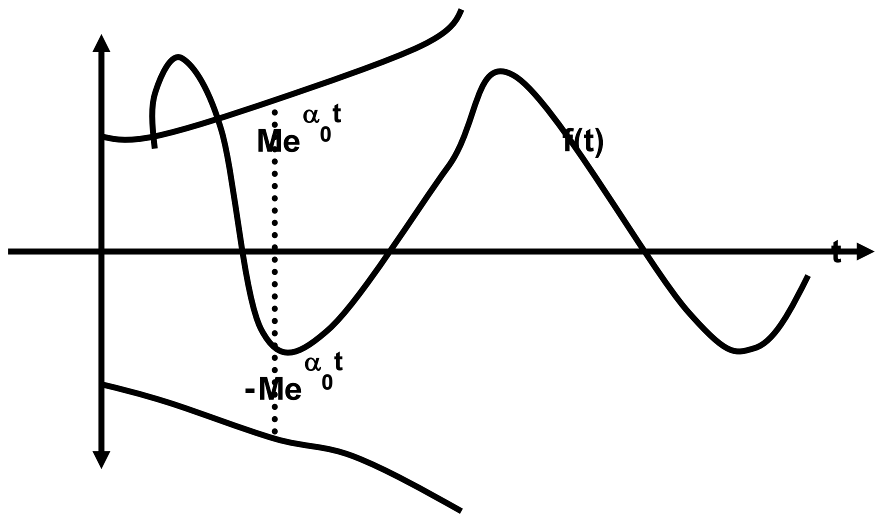


Esta función es seccionalmente continua en el intervalo $0 \leq t \leq t_3$, ya que en cada sub-intervalo de la función f(t) es continua y el límite en los extremos existe.

<u>**Definición 3:**</u> **Se dice que f(t) es seccionalmente continua en $[0,\infty)$, si lo es en cada intervalo finito [0,T].**

<u>Definición 4:</u> Una función f es de <u>orden exponencial</u> cuando t $\to \infty$, si existe una constante M>0, α_0 y t_0 tales que: $|f(t_0)| \le Me^{\alpha_0 t}$, $\forall t > t_0$.

Como podemos observar en la siguiente figura, la definición anterior significa que a partir de un cierto valor t_0, la función queda comprendida entre la función $Me^{\alpha_0 t}$ y su opuesta $-Me^{\alpha_0 t}$.



<u>Definición 5:</u> Una transformación T de una función f(t), T{f(t)}, es lineal, si para cualquier constantes c_1 y c_2 y para cada par de funciones $f_1(t)$ y f($_2$t) se satisface la relación: $T\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\}=c_1T\{f_1(t)\} + c_2T\{f_2(t)\}$.

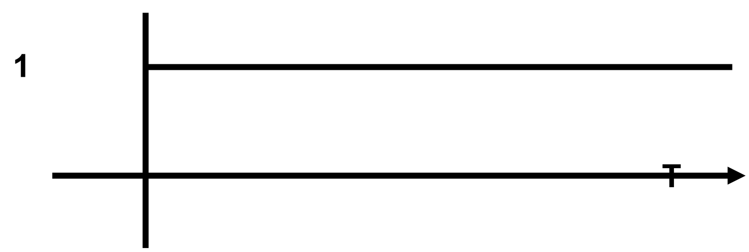
<u>Definición 6:</u> Se define la <u>Transformada de Laplace</u> de una función f(t), llamada F(s) como: $F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, donde s es una variable compleja expresada como: $s=\sigma + i\omega$, siendo σ la parte real y ω la parte imaginaria de s.

La Transformada de Laplace de una función existe si la función f(t) es seccionalmente continua en cada intervalo finito para t>0 y además es de orden exponencial cuando $t \to \infty$.

Ejemplo: Utilizando la definición hallar la Transformada de Laplace de la función escalón:

$$\mu(t)=\begin{cases} 1 \text{ para } t\geq 0 \\ 0 \text{ para } t<0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u> Realicemos la gráfica de la función escalon



$$F(s)=L\{\mu(t)\} \Rightarrow F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\mu(t)dt = \Rightarrow F(s)=-\left|\frac{1}{s}e^{-st}\mu(t)\right|_0^\infty \Rightarrow$$

$F(s)=\frac{1}{s}\left[\lim_{t\to\infty}(e^{-st}-1)\right]$, si la parte real de s, es decir, $\sigma\geq 0$, entonces,

$\lim_{t\to\infty} e^{-st}=0$, y por lo tanto, F(s) existe y es igual a $F(s)=\frac{1}{s}$, para $\sigma>0$.

<u>Teoremas Básicos de la Transformada de Laplace:</u>

<u>Teorema 1:</u> (Linealidad): La Transformada de Laplace es una transformación lineal. $L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\}=\int_0^\infty \{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}e^{-st}dt \Rightarrow$

$$L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\}=c_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + c_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt \Rightarrow$$

$L\{c_1f_1(t) + c_2f_2(t)\}=L\{c_1f_1(t)\} + L\{c_2f_2(t)\}$

Ejemplo: Hallar la Transformada de Laplace de $f(t)=2\mu(t) + 5e^{-4t}$

Solución: $f(t)=2\mu(t) + 5e^{-4t}$, Aplicando el teorema tenemos: $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{5}{s+4}$

$\Rightarrow F(s)=\frac{7s+8}{s(s+4)}$

Teorema 2: (Diferenciación): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), entonces, la Transformada de Laplace de la derivada de f(t) es: $L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=sF(s) - f(0) \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\int_0^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}dt \Rightarrow$

$L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=f(t)\,e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}(-s)dt \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=-f(0) + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \Rightarrow$

$L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=sF(s) - f(0)$

Ejemplo: Hallar la Transformada de Laplace de f(t)=senwt

Solución: f(t)=senwt, si f(t)=coswt $\Rightarrow F(s)=\frac{s}{s^2+w^2} \Rightarrow$

$L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=L\{-wsenwt\} \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=s\frac{s}{s^2+w^2} - \cos(0) \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=\frac{s^2}{s^2+w^2} - 1,$

entonces, $L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=-\frac{w^2}{s^2+w^2} \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt}\right\}=L\{senwt\}\left\{\frac{df}{dt}\right\}=-\frac{w^2}{s^2+w^2} \Rightarrow$

$L\{senwt\}=\frac{w}{s^2+w^2}$

La derivación de orden superior se realiza de forma análoga, es decir, $L\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\}=s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$

$$L\left\{\frac{d^3f}{dt^3}\right\}=s^3F(s) - s^2f(0) - s\frac{df(0)}{dt} - \frac{d^2f(0)}{dt^2}$$

: : : : :

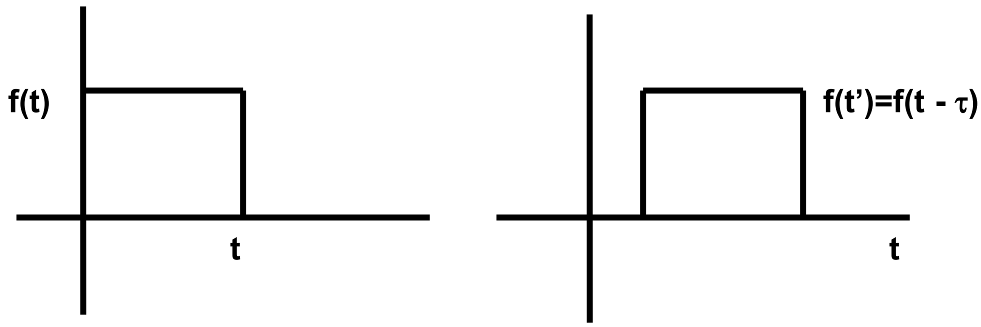
: : : : :

$$L\left\{\frac{d^nf}{dt^n}\right\}=s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) \,\ldots\ldots\ldots - s\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$$

<u>Teorema 3:</u> (Integración): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), entones, la Transformada de Laplace de la integral de f(t) es: $L\left\{\int_0^\infty f(t)dt\right\}=\frac{1}{s}\left\{F(s) + \int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right\}$, si la función f(t) es cero para t<0, se tiene que: $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt=0$ y $L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{1}{s}F(s)$

Demostración: sea $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$, derivando esta función con respecto a t, se tiene $\frac{dg}{dt}=f(t)$ y $L\{\frac{dg}{dt}\}=F\{f(t)\} \Rightarrow L\{\frac{dg}{dt}\}=sG(s) - g(0)$, pero $G(s)=L\{g(t)\} \Rightarrow G(s)=L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}$ y $g(0)=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$, se obtiene entonces que: $L\{f(t)\}=sL\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\} - \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ y despejando se tiene: $L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{1}{s}[L\{f(t) + \int_{-\infty}^{0} f(t)dt] \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{1}{s}[L\{F(s) + \int_{-\infty}^{0} f(t)dt]$

<u>Teorema 4:</u> (Traslación Real): Si F(s) es la Transformada de Laplace de $f(t)\mu(t)$, entonces, la Transformada de Laplace de la función: $f(t - \tau)\mu(t - \tau)$ es: $L\{f(t - \tau)\mu(t - \tau)e^{-st}F(s)$, considere a la siguiente función f(t) y a la misma función trasladada en τ unidades.



La transformada de $f(t - \tau)$ es $L\{f(t - \tau)\}=\int_0^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt \Rightarrow L\{f(t - \tau)\}=\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}dt$, haciendo $t'=t - \tau$, se tiene que:

$$L\{f(t - \tau)\}=\int_0^{\infty} f(t')e^{-s(t-\tau)}dt' \Rightarrow L\{f(t - \tau)\}=e^{-s\tau}\int_0^{\infty} f(t')e^{-(t-\tau)}dt' \Rightarrow$$

$$L\{f(t - \tau)\}=e^{-s\tau}L\{f(t)\} \Rightarrow L\{f(t - \tau)\}=e^{-s\tau}F(s)$$

<u>Teorema 5:</u> (Traslación Compleja): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), entonces, la Transformada de Laplace del producto $e^{-at}f(t)$ es: $L\{e^{-at}f(t)\}=F(s + a)$

<u>Demonstration:</u> $L\{e^{-at}f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)e^{-st}dt \Rightarrow$

$$L\{e^{-at}f(t)\}=\int_0^{\infty} f(t)e^{(s+a)t}dt = F(s + a)$$

Ejemplo: Obtener la Transformada de Laplace de la función:

$f(t)=te^{-3t}$

<u>Solución:</u> aplicando el teorema tenemos que: $L\{te^{-3t}f(t)\}=\dfrac{1}{(s+3)^2}$

<u>Teorema 6:</u> (Multiplicación por t): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), entonces, la Transformada de Laplace de tf(t) es: $L\{tf(t)\}=-\dfrac{d}{ds}F(s)$

<u>Demonstration:</u> $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Rightarrow \dfrac{d}{ds}[F(s)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}(-t)dt \Rightarrow \dfrac{d}{ds}$ $[F(s)]=-L\{tf(t)\}$

Ejemplo: Obtener las siguientes Transformadas de Laplace $L\{te^{-at}\}$

<u>Solución:</u> aplicando el teorema: $L\{te^{-at}\}=-\dfrac{d}{ds}\{\dfrac{1}{s+a}\} \Rightarrow$

$L\{te^{-at}\}=\dfrac{1}{(s+a)^2}$, En forma general tenemos que $L\{t^n e^{-at}\}=\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

<u>Teorema 7:</u> (Valor Inicial): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), y su límite $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$, existe, entonces: $\lim\limits_{t\to o} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

<u>Demostración:</u> $L\{\dfrac{df}{dt}\}=\int_0^\infty \dfrac{df}{dt}e^{-st}dt \Rightarrow L\{\dfrac{df}{dt}\}=sF(s) - f(0) \Rightarrow \lim\limits_{s\to\infty}$

$\int_0^\infty \dfrac{df}{dt}e^{-st}dt \Rightarrow L\{\dfrac{df}{dt}\}=\lim\limits_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]=0$, por lo tanto, $f(0)=\lim\limits_{t\to o} f(t)$, por lo que $\lim\limits_{t\to o} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

<u>Teorema 8:</u> **(Valor Final): Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t), y su límite $\lim\limits_{s \to \infty} f(t)$, existe, entonces: $\lim\limits_{b \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to o} sF(s)$**

<u>Demostración:</u> $\lim\limits_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim\limits_{s \to o} [sF(s) - f(0)] \Rightarrow$

$\lim\limits_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim\limits_{s \to 0} [sF(s) - f(0)]$**, por lo que puede ser escrito como:**

$\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ **-** $f(0) = \lim\limits_{s \to \infty} [sF(s) - f(0)]$ **y finalmente** $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to o} sF(s)$

Ejemplo: Encontrar los valores iniciales y finales de $f(t)=3e^{-2t} + 6e^{-t}$

<u>Solución:</u> $F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{6}{s+1} \Rightarrow F(s) = \frac{9s+15}{(s+2)(s+1)} \Rightarrow f(0) = \lim\limits_{s \to \infty} sF(s) \Rightarrow$

$f(0) = \lim\limits_{s \to \infty} \frac{s(9s+15)}{(s+2)(s+1)} \Rightarrow f(0)=9, \quad f(\infty) = \lim\limits_{s \to o} sF(s) \Rightarrow f(\infty) = \lim\limits_{s \to o}$

$\frac{s(9s+15)}{(s+2)(s+1)} \Rightarrow f(\infty)=0$**, luego el valor inicial es** $f(0)=9$ **y el valor final es** $f(\infty)=0$

Tabla de Algunas Trasformadas de Laplace:

	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	$F(s)=L\{f(t)\}$	
1	1	$\frac{1}{s}$	s>0
2	$K \quad \forall k \in \Re$	$\frac{k}{s}$	s>0
3	t	$\frac{1}{s^2}$	Re(s – a)>0
4	$t^n \quad (n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re(s)>0
5	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	$Re(s)>\lvert Im(s)\rvert$
7	e^{at}	$\frac{1}{s+a}$	Re(s – a)>0
8	$\mu(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	Re(s)>0
9	senat	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re(s)>\lvert Im(a)\rvert$
10	cosat	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re(s)>\lvert Im(a)\rvert$
11	Int	$\frac{-(\gamma - Ins)}{s}$	Re(s)>0
12	senhat	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$Re(s)>\lvert Re(a)\rvert$
13	cosat	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$Re(s)>\lvert Re(a)\rvert$

Donde $\Gamma(n)= \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$

<u>Teorema 9:</u> **Si $F_1(s)$ $F_2(s)$ son las Transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, entonces se define la <u>Multiplicación Compleja</u> como: $F_1(s)F_2(s)=L\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\}$ se dice entonces que las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ están convueltas y la integral correspondiente se llama <u>Integral de convolución</u>.**

<u>Demostración:</u> **Si $F(s)=F_1(s)F_2(s)=L\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\}$, la inversa de F(s) es**

$$f(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \cong f_1(t)f_2(t) \Rightarrow F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Rightarrow$$

$F(s)=\int_0^\infty f_2(\tau)\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)\mu(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau$, si hacemos el cambio $t'=t-\tau$, se tiene que: $F(s)=\int_0^\infty f_2(\tau)\left[\int_0^\infty f_1(t')\mu(t')e^{-s(t'+\tau)}dt'\right]d\tau$, pero $\mu(t')$ hace que el valor de la integral sea cero para $t'<0$, por lo que: $F(s)=\int_0^\infty f_2(\tau)\left[\int_0^\infty f_1(t')\mu(t')e^{-s(t'+\tau)}dt'\right]d\tau$, la cual puede ser separada como un producto de dos integrales:

$F(s)=\left[\int_0^\infty f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau'\right]\left[\int_0^\infty f_1(t')e^{-st'}dt'\right]$ o también $F(s)=F_1(s)F_2(s)=L\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\}$

Ejemplo: Conseguir la transformada inversa de $F(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}$

Solución: **Haciendo $F_1(s)=F_2(s)=\dfrac{1}{s+a}$, por lo tanto, $f_1(t)=f_2(t)=e^{-at}$**

entonces, $f(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \Rightarrow f(t)=\int_0^t e^{-a(t-\tau)}e^{-st}d\tau \Rightarrow f(t)=\int_0^t e^{-at}d\tau \Rightarrow$

$f(t)=te^{-at}$

Definición 7: (Fracciones Parciales): En muchos caso la transformada viene expresada como la razón de dos polinomios N(s) y D(s). Considérese que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendientes de las potencias de s, es decir, Por definición, una función algebraica racional puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Teóricamente, toda función racional tiene una trasformada que puede expresarse en términos de funciones elementales. Si una función transformada no puede ser Transformada directamente, con frecuencia el método de fracciones parciales es útil para transformar la fracción racional en una suma de funciones más sencillas que pueden transformar por medio de las fórmulas normales. El método de las fracciones parciales es adecuado únicamente para fracciones propias, esto es, aquellas en la que el polinomio del numerador [N(s)] es de menor grado que el polinomio del denominador [D(s)]. Cualquier fracción impropia, es decir, aquella en la cual el grado del polinomio de N(s) es igual o mayor que el grado del polinomio de D(s)

puede transformarse, por división, en la suma de un polinomio (funciones fácilmente transformables) más una función propia (transformable por el medio de fracciones parciales). El método de transformada de Laplace por fracciones parciales consta de los siguientes pasos:

La transformada de Laplace de F(s) se expresada como la razón de dos polinomios N(s) y D(s). Considere que estos polinomios son de grado m y n respectivamente y están ordenados en orden descendentes de la potencia de s, es decir,

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 s - a_o}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 s + b_0}$$

En donde $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots a_m$, $b_0, b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots b_m$ son constantes reales.

El denominador D(s) puede factorizarse en factores de primer orden y cuadráticos con coeficientes reales de la manera:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - s_1)(s - s_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(s - s_m)}$$

En donde s_1, $s_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s_n$ son las n raíces de la ecuación D(s)=0 y son llamadas ceros del polinomio D(s). F(s) puede ser entonces expresado como una serie de fracciones, es decir,

$F(s)=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+........+\frac{A_n}{s-s_n}$ y se presentan varios casos dependiendo de las características del denominador.

Caso 1: Las raíces s_1, s_2 ,..... s_n son distintas y el grado de D(s) es menor que el grado de N(s).

Las A's de la ecuación anterior son constantes y llamadas los residuos de F(s). Para determinar el valor de estos residuos, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_1=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)F(s)\ ;\ A_2=\lim_{s\to s_2}(s-s_2)F(s)\ ;......A_n=\lim_{s\to s_n}(s-s_n)F(s)$$

Caso 2: Las raíces son iguales y el grado de N(s) es menor que el de D(s).

Si una raíz, por ejemplo s_1, de D(s)=0 es de orden r y las otras raíces son simples con grado de N(s) menor que el grado de D(s), el desarrollo de F(s) es:

F(s)=

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-s_1)^r(s-s_2).....(s-s_n)}=\frac{A_{11}}{(s-s_1)^r}+\frac{A_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+....\frac{A_{1(r-1)}}{(s-s_1)^2}+$$

$$\frac{A_{1r}}{s-s_1}+\frac{A_2}{s+s_2}+\frac{A_3}{s+s_3}+...............+\frac{A_n}{s+s_n}$$

Los residuos A_2, A_3,..........A_n, pueden ser encontrados en la forma descrita anteriormente. Para evaluar a A_{11}, A_{12}, A_{13},..............A_{1r}, se aplica la siguiente fórmula:

$$A_{11}=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)F(s) \quad ; \quad A_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^r F(s)\right]_{s=s_1} \quad ;$$

$$A_{13}=\frac{1}{2}\frac{d}{ds^2}\left[(s-s_1)^{r-1} F(s)\right]_{s=s_1} ,........... \qquad A_{1r}=\frac{1}{(r-1)!}$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-s_1)^{r-1} F(s)\right]_{s=s_1}$$

Caso 3: El grado de D(s) es igual o mayor que el grado de D(s).

Si el grado de N(s) es igual o mayor que el grado de D(s), a la función F(s) se le llama impropia y el desarrollo en fracciones parciales se obtiene primero dividiendo N(s) entre D(s) hasta que el remanente sea de un grado menos que el grado de D(s). Dependiendo de si las raíces de D(s) sean simples o no, el desarrollo puede ser efectuado en la forma descrita en los casos 1 y 2.

Ejemplo: Encontrar la transformada inversa de las siguientes funciones: $F(s)=\frac{3s+5}{s^2+4s+3}$**, tenemos que encontrar las raíces del denominador, factorizando tenemos que** $s^2 + 4s + 3=(s + 1)(s + 3)$**, es decir**

$$F(s)=\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow F(s)=\frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}, \text{ donde } A_1=\lim_{s\to -1}\frac{3s+5}{s+3} \Rightarrow A_1=1,\ A_2=$$

$$\lim_{s\to -3}\frac{3s+5}{s+1} \Rightarrow A_1=2 \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3} \Rightarrow f(t)=e^{-t} + 2e^{-3t}$$

El proceso de la transformada con el denominador que contenga raíces complejas puede resolverse en una forma muy simplificada de la manera siguiente.

Sea la función $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow F(s)=\dfrac{N(s)}{s^2+bs+c} \Rightarrow F(s)=\dfrac{N(s)}{(s+\sigma-iw)(s+\sigma+iw)}$

$\Rightarrow F(s)=\dfrac{A_1}{(s+\sigma-iw)} + \dfrac{A_2}{(s+\sigma+iw)}$, **en donde** $\sigma=\dfrac{b}{2}$ **y** $w=\dfrac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$, **ya que las raíces de D(s) son complejas y siendo f(t) una cantidad real, los coeficientes** A_1 **y** A_2 **deben ser también complejos conjugados. La transformada inversa de F(s) puede escribirse entonces de la forma siguiente:** $f(t)=2|A_1|e^{-Tt}\operatorname{sen}(wt+\vartheta)$, **siendo** ϑ **el ángulo de** A_1 **más noventa grados, es decir,** $\vartheta=\text{ang}A_1+\dfrac{\pi}{2}$

Ejemplo: Conseguir la transformada inversa de las siguientes funciones:

a. $F(s)=\dfrac{s^2+1}{(s+1)^3(s+2)} \Rightarrow F(s)=\dfrac{A_{11}}{(s+1)^3}+\dfrac{A_{12}}{(s+1)^2}+\dfrac{A_{13}}{(s+1)}+\dfrac{A_2}{s+2}$,

donde:

$$A_{11}=\lim_{s\to -1}\frac{s^2+1}{s+2} \Rightarrow A_{11}=2$$

$$A_{12}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+1}{s+2}\right]_{s=-1} \Rightarrow A_{12}=\left[\frac{2s(s+2)-(s^2+1)}{(s+2)^2}\right]_{s=-1} \Rightarrow A_{12}=-4$$

$$A_{13}=\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^2+1}{s+2}\right]_{s=-1} \Rightarrow A_{13}=\left[\frac{s^2+4s-1}{(s+2)^2}\right]_{s=-1} \Rightarrow$$

$$A_{13}=\left[\frac{(2s-4)(s+2)-2(s^2+4s-1)}{(s+2)^3}\right]_{s=-1} \Rightarrow A_{13}=5$$

$$A_2=\lim_{s\to -2}\frac{s^2+1}{(s+1)^3} \Rightarrow A_2=-5$$

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{-4}{(s+1)^2}+\frac{5}{(s+1)}+\frac{-5}{s+2} \Rightarrow f(t)=t^2e^{-t}-4te^{-t}+5e^{-t}-5e^{-2t}$$

Veamos ahora un ejemplo de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, se obtiene la solución de una ecuación diferencial de segundo orden, mediante la aplicación directa de la transformada de Laplace, en el segundo se resolverá una ecuación diferencial de segundo orden convirtiéndola primero en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden (la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales se verán en detalle más adelante) y el tercero una ecuación diferencial de tercer orden por medio de las transformada de Laplace.

Para resolver una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales por medio de la transformada de Laplace se seguirán los siguientes pasos:

i. Obtenemos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial aplicando la ecuación: $L\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\}=s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0)$ ……… $- s\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0)$

ii. Sustituimos las condiciones iniciales en la ecuación diferencial dada

iii. Se expresa la función F(s) en forma de fracciones parciales

iv. Se obtiene la transformada inversa de Laplace

Ejemplo: Conseguir la solución de x(t) de la siguiente ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\mu(t)$, con $x(0)=1$ y $\frac{dx}{dt}(0)=1$,

Solución: $[s^2x(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0)] + 3[sx(s) - x(0)] + 2x(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow$

$[s^2x(s) - s - 1] + 3[sx(s) -1] + 2x(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow (s^2 + 3 + 2)x(s)=s + 4 + \frac{2}{s} \Rightarrow$

$x(s)=\frac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)} \Rightarrow x(s)=\frac{s^2+4s+2}{s(s+1)(s+2)} \Rightarrow x(s)=\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s+2}$,

donde:

$$A_1=\lim_{s \to 0}\frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow A_1=1$$

$$A_2=\lim_{s \to -1}\frac{s^2+4s+2}{s(s+2)} \Rightarrow A_2=1$$

$$A_3=\lim_{s \to -3} \frac{s^2+4s+2}{s(s+1)} \Rightarrow A_1=-1$$

Por lo tanto, $x(s)=\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$ $x(t)=1 + e^{-t} - e^{-2t}$

Definición 8: Se define la Ecuación de Estado como aquella ecuación que representa a un sistema físico dinámico y se expresa de la forma: $\dot{x}_i = f(x_1,x_2,\ldots x_n, \mu_1,\mu_2, \ldots \mu_n)$ $\forall i \in Z^+$, en donde x_i ($i \in Z^+$) son las variables de estado y μ_j ($j \in Z^+$) son las funciones de entrada de tiempo, si el sistema es lineal la ecuación se escribe en la forma: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ik}\mu_k$ $\forall i,j,k \in Z+$ o en forma matricial llamada también ecuación de estado $\dot{\underline{x}} = \underleftrightarrow{A}\underleftrightarrow{X} + \underleftrightarrow{B}\mu$, en donde:

x: vector de estado

μ: vector de entrada o vector de excitación

$\dot{x}$: derivada de la $\underleftrightarrow{X}$

$\underleftrightarrow{A}$: Matriz de dimensión nxn

Esta ecuación toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ : \\ : \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ : \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ : \\ : \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Si consideramos la ecuación diferencial $\frac{dx_1}{dt}$=ax(t) + bμ(t), en donde a, b∈ℜ y μ(t) es una función continua de t, si multiplicamos esta ecuación por el factor e^{-at} nos resulta: $e^{-at}\frac{dx_1}{dt}=ae^{-at}x(t)+be^{-at}\mu(t) \Rightarrow e^{-at}\frac{dx_1}{dt}-ae^{-at}x(t)=be^{-at}\mu(t)$, agrupando se tiene que $\frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)]= be^{-at}\mu(t)$, si integramos desde un punto inicial t_0 hasta un punto final t obtenemos: $\int \frac{d}{dt}\left[e^{-at}x(t)\right]dt = \int_{t_o}^{t} be^{-a\tau}\mu(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; \left[e^{-a\tau}x(\tau)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_o}^{t} be^{-a\tau}\mu(\tau)d\tau \;\Rightarrow e^{-at}x(t) - e^{-at_0}x(t_0)= \int_{t_o}^{t} be^{-a\tau}\mu(\tau)d\tau$, despejando x(t) nos resulta que: $x(t)=e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_o}^{t} be^{a(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$, si consideramos $t_0=0$ se tiene que: $x(t)=e^{at}x(0) + \int_{t_o}^{t} be^{a(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$.

Ejemplo: Resolver por medio de la ecuación de estado la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dx}{dt}+2x=5$, si x(0)=3

Como $\frac{dx}{dt}$=-2x + 5, entonces se tiene que a=-2 y b=5, por lo tanto, se tiene que: $x(t)=3e^{-2t} + 5\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau \Rightarrow x(t)=3e^{-2t} + \frac{5}{2}\left[e^{-2t}e^{2\tau}\right]_0^t \Rightarrow x(t)=\frac{1}{2}(5+e^{-2t})$

.

Como $x(t)=e^{at}x(0) + \int_{t_o}^{t} be^{a(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$, tenemos entonces por analogía que:

$$\underset{\leftrightarrow}{x}(t) = e^{\underset{\leftrightarrow}{A}t}\underset{\leftrightarrow}{x}(0) + \int_0^t \underset{\leftrightarrow}{B}e^{\underset{\leftrightarrow}{A}(t-\tau)}\underset{\leftrightarrow}{\mu}(\tau)d\tau\,.$$

<u>Definición 9:</u> Si la matriz $\underset{\leftrightarrow}{A}$ de la ecuación $\dot{\underline{x}} = \underset{\leftrightarrow}{A}\underset{\leftrightarrow}{X} + \underset{\leftrightarrow}{B}\mu$ esta diagonalizada, la solución de x se obtiene por integración separada de cada una de las variables.

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación de estado:

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix};\ x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, formando las ecuaciones por separado tenemos que:

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2\mu \Rightarrow x_1(t)=5e^{-t} + 2\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau \Rightarrow x(t)=5e^{-t} + 2\left[e^{-t}e^{\tau}\right]_0^t \Rightarrow$

$x_1(t)=2 + 3e^{-t}$

$\dot{x}_2 = -2x_2 + 3\mu \Rightarrow x_2(t)=e^{-2t} + 3\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau \Rightarrow x_2(t)=e^{-2t} + \frac{3}{2}\left[e^{-2t}e^{2\tau}\right]_0^t \Rightarrow$

$x_2(t)=e\text{-}2t - \frac{1}{2}e^{-2t}$

<u>Definición 10:</u> La transformada de Laplace de la ecuación $\dot{\underline{x}} = \underset{\leftrightarrow}{A}\underset{\leftrightarrow}{X} + \underset{\leftrightarrow}{B}\mu$ esta expresada por: $s\underset{\leftrightarrow}{X}(s) - \underset{\leftrightarrow}{x}(0) = \underset{\leftrightarrow}{A}\underset{\leftrightarrow}{X}(s) + \underset{\leftrightarrow}{B}\underset{\leftrightarrow}{U}(s)$ ó $\underset{\leftrightarrow}{X}(s)[s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1} = [\underset{\leftrightarrow}{x}(0) + \underset{\leftrightarrow}{B}\underset{\leftrightarrow}{U}(s)]$ $\Rightarrow$ $\underset{\leftrightarrow}{X}(s) = [s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1}[\underset{\leftrightarrow}{x}(0) + \underset{\leftrightarrow}{B}\underset{\leftrightarrow}{U}(s)]$ $\Rightarrow$ $\underset{\leftrightarrow}{X}(s) = \underset{\leftrightarrow}{\phi}(s)[\underset{\leftrightarrow}{x}(0) + \underset{\leftrightarrow}{B}\underset{\leftrightarrow}{U}(s)]$, por lo que, $\underset{\leftrightarrow}{x}(t) = L\left[[s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1}[\underset{\leftrightarrow}{x}(0) + \underset{\leftrightarrow}{B}\underset{\leftrightarrow}{U}(s)]\right]$, en donde:

$\underset{\times}{I}$: es la matriz unidad

$\phi(s) = [s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1}$: Es la matriz resolverte

<u>Ejemplo:</u> Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mu(t), \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}] = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{\phi}(s) = [s\underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1} = \frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mu(s)\right] \Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\\ \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \\ 2+\frac{1}{s}\end{bmatrix}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s^2+17s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \frac{2s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_1(s)=\frac{s^2+17s+6}{s(s+2)(s+3)}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}_1(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+2}+\frac{A_3}{s+3}\text{, donde:}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{s^2+17s+6}{(s+2)(s+3)}\Rightarrow A_1=1$$

$$A_2=\lim_{s\to -2}\frac{s^2+17s+6}{s(s+2)}\Rightarrow A_2=12$$

$$A_3=\lim_{s\to -3}\frac{s^2+17s+6}{s(s+2)}\Rightarrow A_3=-12\text{, entonces, }\underset{\leftrightarrow}{X}_1(s)=\frac{1}{s}+\frac{12}{s+2}-\frac{12}{s+3}\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_1(t)=1+12e^{-2t}-12e^{-3t}$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_2(s)=\frac{2s}{(s+2)(s+3)}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}_2(s)=\frac{A_1}{s+2}+\frac{A_2}{s+3}\text{, donde:}$$

$$A_1=\lim_{s\to -2}\frac{2s}{s+3}\Rightarrow A_1=-4$$

$$A_2=\lim_{s\to -3}\frac{2s}{s+2}\Rightarrow A_2=6\text{, entonces, }\underset{\leftrightarrow}{X}_2(s)=\frac{-4}{s+2}+\frac{6}{s+3}\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_2(t)=-4e^{-2t}+6e^{-3t}$$

<u>Definición 11:</u> En una gran gama de los problemas planteados en ingeniería se necesita obtener el valor de λ de manera que el sistema de ecuaciones que plantearemos en forma vectorial y matricial tenga solución que no sea la trivial, es decir, $(\lambda \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A})\underset{\leftrightarrow}{\mu} = \underset{\leftrightarrow}{0}$ ó

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11}) - a_{12}\mu_{12} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}\mu_n = 0 \\ -a_{21}\mu_1 + (\lambda - a_{22}) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}\mu_n = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_{n1}\mu_1 - a_{12}\mu_{12} - \ldots\ldots + (\lambda - a_{11})a_{nn}\mu_n = 0 \end{cases}$$

donde $\underset{\leftrightarrow}{\mu}$ es un vector de dimensión con las componentes μ_1, μ_2, …μ_n.

Para que $\underset{\leftrightarrow}{\mu}$ tenga una solución no trivial, es necesario y suficiente que $\det[\lambda \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]=0$, a lo cual se le llama <u>ecuación característico</u> de A, al polinomio $g(\lambda)=\det[\lambda \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]$, se le llama <u>polinomio característico</u> de $\underset{\leftrightarrow}{A}$, a λ se les laman <u>valores característico</u> y al vector $\underset{\leftrightarrow}{\mu}$ que satisfaga $[\lambda \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]\underset{\leftrightarrow}{\mu}$ se le llama <u>vector característico</u>.

Ejemplo: Determinar los valores y vectores característico de la matriz: $\underset{\leftrightarrow}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, el polinomio característico es:

$$g(\lambda)=\det[\lambda \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}]=\det\left[\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\right] \Rightarrow g(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda + 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$g(\lambda)=\lambda^2 + 5\lambda + 6=0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 3)=0$, **entonces los valores característicos son:** $\lambda_1=-2$ **y** $\lambda_2=-3$**, para determinar los vectores característicos** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{12}\end{bmatrix}$ **y** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\begin{bmatrix}\mu_{21}\\ \mu_{22}\end{bmatrix}$**, sean los vectores característicos de** $\underset{\leftrightarrow}{A}$ **asociados con** λ_1 **y** λ_2 **respectivamente.**

Para $\lambda_1=-2$**, tendremos que** $\left[\lambda_1 \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}\right]\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\underset{\leftrightarrow}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & -6\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$**,** **de donde** $\mu_{11}=-3\mu 12$ **ó** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\mu_{11}$ **siendo** μ_{11} **es una cantidad arbitraria.**

Para $\lambda_2=-3$**, tendremos que** $\left[\lambda_2 \underset{\times}{I} - \underset{\leftrightarrow}{A}\right]\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\underset{\leftrightarrow}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-3 & -6\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{21}\\ \mu_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$**, de donde** $\mu_{21}=-2\mu_{22}$ **ó** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\mu_{21}$ **siento** μ_{21} **también una cantidad arbitraria, si a** μ_{11} **y a** μ_{21} **se le asigna el valor de uno, se tiene que** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$ **y** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$**, con lo que** $\underset{\leftrightarrow}{\mu}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

<u>Definición 12:</u> Supongamos ahora que los valores característicos de una matriz $\underset{\leftrightarrow}{A}$**, son todos distintos; entonces podemos formar una matriz diagonal con esos valores característicos, de la siguiente manera:**

$\underset{\leftrightarrow}{A}$ =diagonal $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n]=\underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{A}\,\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots\ldots 0 \\ 0 & \lambda & \ldots\ldots 0 \\ & :::::::: & \\ & :::::::: & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\lambda \end{bmatrix}$, en donde $\underset{\leftrightarrow}{S}$ es una matriz formada tomando a los vectores característicos como sus columnas.

Ejemplo: Diagonalizar la siguiente matriz: $\underset{\leftrightarrow}{A}=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

<u>Solución:</u> como ya encontramos los vectores característico, tenemos que: $\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{A}\,\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{A}\,\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{A}\,\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a. $\underset{\leftrightarrow}{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, como ya encontramos los vectores característico, tenemos que $\underset{\leftrightarrow}{S}=\begin{bmatrix} -1 & -i & i \\ 3 & 1 & 1 \\ -9 & i & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}=\dfrac{1}{20i}\begin{bmatrix} -2i & 0 & -2i \\ -9+3i & 10i & 1+3i \\ 9+3i & 10i & -1+3i \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\underset{\leftrightarrow}{A}=\frac{1}{20i}\begin{bmatrix} -2i & 0 & -2i \\ -9+3i & 10i & 1+3i \\ 9+3i & 10i & -1+3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -i & i \\ 3 & 1 & 1 \\ -9 & i & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

<u>Definición 13:</u> Las ecuaciones de estado se resuelven también utilizando el método de diagonalización, el cual consiste en que por medio de una transformación lineal, conseguir una matriz diagonalizada,

resolverla en esta forma y luego aplicar la transformada inversa para conseguir la solución real.

Cambiemos el vector de estado $\dot{\underline{x}}$ al vector de estado $\dot{\underline{z}}$ por medio de una transformación lineal $\underset{\leftrightarrow}{S}$. De esta manera $\underset{\leftrightarrow}{x} = \underset{\leftrightarrow}{S}\underset{\leftrightarrow}{z}$ y $\dot{\underline{x}} = \underset{\leftrightarrow}{S}\dot{\underline{z}}$, sustituyendo en la ecuación $\dot{\underline{x}} = \underset{\leftrightarrow}{A}\underset{\leftrightarrow}{X} + \underset{\leftrightarrow}{B}\mu$, se tiene que: $\underset{\leftrightarrow}{S}\dot{\underline{z}} = \underset{\leftrightarrow}{A}\ \underset{\leftrightarrow}{S}\underset{\leftrightarrow}{z} + \underset{\leftrightarrow}{B}\ \underset{\leftrightarrow}{\mu}$, despejando a $\dot{\underline{z}}$, nos resulta: $\dot{\underline{z}} = \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{A}\ \underset{\leftrightarrow}{S}\ \underset{\leftrightarrow}{z} + \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\underset{\leftrightarrow}{B}\ \underset{\leftrightarrow}{\mu} \Rightarrow \dot{\underline{z}} = \underset{\leftrightarrow}{A}\ \underset{\leftrightarrow}{z} + \underset{\leftrightarrow}{E}\ \underset{\leftrightarrow}{B}\ \underset{\leftrightarrow}{\mu}$, evidentemente la transformación aplicada a $\underset{\leftrightarrow}{x}$ reduce el sistema original con variables de estado x_1, x_2, … x_n a un nuevo sistema en la cual las variables de estado z_1, z_2, … z_n están completamente acopladas. Estas nuevas variables de estado se consiguen por el método integración y luego se aplica a estas variables la transformación lineal $\underset{\leftrightarrow}{x} = \underset{\leftrightarrow}{S}\ \underset{\leftrightarrow}{z}$ para encontrar las variables originales x_1, x_2, … x_n.

Ejemplo: Resolver los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t), \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u> tenemos que encontrar a la matriz:

$\dot{\underline{z}} = \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1} \underset{\leftrightarrow}{A}\, \underset{\leftrightarrow}{S}\, \underline{z} \;+\; \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1} \underset{\leftrightarrow}{B}\, \underset{\leftrightarrow}{\mu}$, que ya en los ejemplos anteriores la diagonalizamos, es decir, $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mu(t) \;\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\mu(t),$$

$\underline{z}(0) = \underset{\leftrightarrow}{S}^{-1}\, \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$, por lo tanto, tenemos que:

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + 2\mu(t), \quad z_1 = 5$$

$$\dot{z}_2 = -3z_2 - 3\mu(t), \quad z_2 = -7$$

Aplicando la ecuación $x(t) = e^{at}\, x(0) + \int_{t_o}^{t} b e^{a(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$, tenemos que:

$$z_1 = 5e^{-2t} + 2\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau \Rightarrow z_1 = 5e^{-2t} + \left[e^{-2t}e^{2\tau}\right]_0^t \Rightarrow z_1 = 1 + 4e^{-2t}$$

$$z_2 = -7e^{-3t} - 3\int_0^t e^{-3(t-\tau)}d\tau \Rightarrow z_1 = -7e^{-3t} + \left[e^{-3t}e^{3\tau}\right]_0^t \Rightarrow z_2 = -1 - 6e^{-3t}$$

y por último nos queda $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 + 4e^{-2t} \\ -1 - 6e^{-3t} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 12e^{-2t} - 12e^{-3t} \\ -4e^{-2t} + 6e^{-3t} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. **Utilizando la definición hallar la Transformada de Laplace de la función $f(t)=e^{-\sigma t}$**

Solución: Aplicando la definición de la transfomadas tenemos: $F(s)=L\{e^{-\sigma t}\} \Rightarrow F(s)=\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt \Rightarrow F(s)=\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s+a}[0-1]$, entonces,

$F(s)=\frac{1}{s+a}$, $\sigma>-a$.

2. **Utilizando la definición hallar la Transformada de Laplace de la función f(t)=coswt**

Solución: f(t)=coswt, Aplicando la definición de la Transfomada tenemos:

Sea, entonces, $F(s)=L\{\cos wt\} \Rightarrow F(s)=\int_0^\infty \cos(wt)e^{-st}dt \Rightarrow F(s)=$

$\int_0^\infty \frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}e^{-st}dt \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-(s+iw)t}dt+\int_0^\infty e^{-(s-iw)t}dt\right] \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}$

$\left[\frac{e^{(iw-s)t}}{iw-s}+\frac{e^{-(iw-s)t}}{iw-s}\right]_0^\infty \Rightarrow F(s)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{iw-s}-\frac{1}{iiw-s}\right]_0^\infty \Rightarrow$

$F(s)=\frac{s}{s^2+w^2}$

3. **Utilizando la definición hallar la Transformada de Laplace de la función f(t)=t**

Solución: Aplicando la definición de la transfomada tenemos:

$$F(s)=\{t\} \Rightarrow F(s)=\int_0^{\infty} te^{-st}dt \;\Rightarrow\; F(s)=-\left[\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} \Rightarrow F(s)=-\left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^{\infty} \Rightarrow F(s)=$$

$$\frac{1}{s^2}$$

4. Hallar la Transformada de Laplace de f(t)=5t + cos2t

Solución: $f(t)=5t + \cos 2t \Rightarrow F(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{s}{s^2+4} \Rightarrow F(s)=\frac{s^3+5s^2+8}{s^2(s^2+4)}$

5. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{df}{dt}$ + 2f=0, con f(0)=6,

Solución: Aplicando el teorema tenemos:

$$L\left\{\frac{df}{dt} + 2\right\}=sF(s) - f(0) + 2F(s) \Rightarrow L\left\{\frac{df}{dt} + 2\right\}=(s + 2)F(s) -6=0 \;\Rightarrow F(s)=\frac{6}{s+2}$$

$\Rightarrow f(t)=6e^{-2t}$

6. Determinar la solución de la ecuación diferencial: $\frac{d^2y}{dx^2}$ + 4y=0, con y(0)=6 y $\frac{dy(0)}{dy}$=0

Solución: por la aplicación del teorema tenemos:

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2} + 4y\right\}=s^2y(s) - sy(0) - s\frac{dy(0)}{dy} + 4y(s) \Rightarrow y(s)=\frac{6s}{s^2+4} \Rightarrow y(x)=6\cos 2x$$

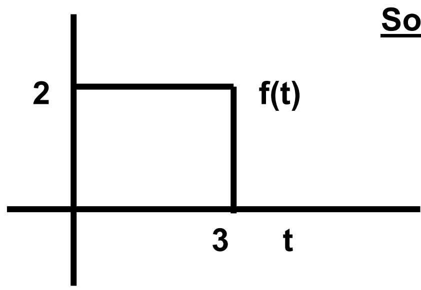
7. Hallar la Transformada de Laplace de la integral de la función escalón $L\{\int_0^t \mu(t)dt\}$

<u>Solución:</u> aplicando el teorema 3, $L\{\int_0^t \mu(t)dt\}=L\{t\mu(t)\}=\frac{1}{s}[L\{F(s) + 0] \Rightarrow L\{\int_0^t \mu(t)dt\}=\frac{1}{s}[\frac{1}{s}] \Rightarrow L\{\int_0^t \mu(t)dt\}=\frac{1}{s^2}$

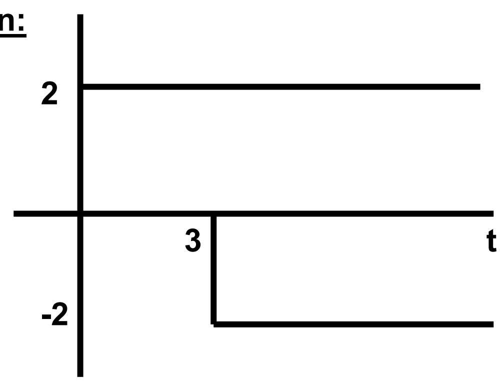
8. Conseguir la Transformada de Laplace de coswt, si f(t)=senwt

<u>Solución:</u> aplicando el teorema 3 a $F(s)=\frac{w}{s^2+w^2}$, entonces tenemos que $L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=L\{\int_{-\infty}^{\infty} senwtdt\} \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=L\{-\frac{1}{w}coswt\} \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{1}{s}[\frac{w}{s^2+w^2} + \int_{-\infty}^{0} f(t)dt] \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{1}{s}\left[\frac{w}{s^2+w^2}-\frac{1}{w}coswt\right]_{\infty}^{0} \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{1}{s}\left[\frac{w}{s^2+w^2}-\frac{1}{w}\right] \Rightarrow L\{\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\}=\frac{ws}{w(s^2+w^2)}$, por lo tanto, $L\{coswt\}=\frac{s}{s^2+w^2}$

9. Obtenga la Transformada de Laplace del pulso siguiente:

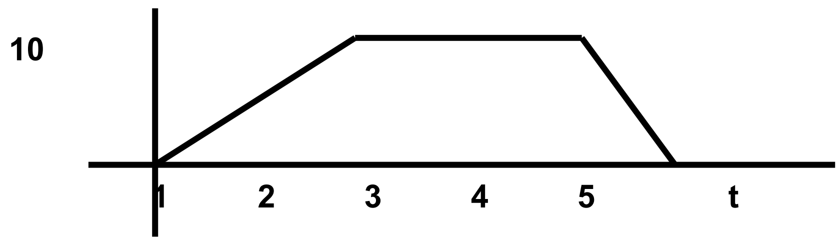


<u>Solución:</u>



Solución $f(t)=2\mu(t) - 2\mu(t-3) \Rightarrow F(s)=\frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-3s} \Rightarrow F(s)=\frac{2}{s}(1 - e^{-3s})$

10. Obtenga la Transformada de Laplace del Del trapecio regular



Solución: $f(t)=5t\mu(t) - 5(t-2)\mu(t-2) - 10(t-4)\mu(t-4) - 10(t-5)\mu(t-5)$,

entonces, $F(s)=\frac{5}{s^2} - \frac{5}{s^2}e^{-2s} - \frac{10}{s^2}e^{-4s} + \frac{10}{s^2}e^{-5s} \Rightarrow$

$F(s)=\frac{5}{s}(1 - e^{-2s} - 2e^{-4s} - 2e^{-5s})$

11. Obtener la Transformada de Laplace de la función $f(t)=te^{-3t}$

Solución: aplicando el teorema 6 tenemos que: $L\{te^{-3t}f(t)\}=\frac{1}{(s+3)^2}$

12. Obtener la Transformada de Laplace de la función $(t)=e^{-at}\mu(t)$,

Solución: aplicando el teorema 6 tenemos: $L\{e^{-at}\mu(t)\}=\frac{1}{s+a}$

13. Obtener la Transformada de Laplace de la función $f(t)=e^{-5t}\cos 2t$, **Solución:** aplicando el teorema 5 tenemos que:

$L\{e^{-5t}\cos 2t\}=\frac{s+5}{(s+5)^2+4} \Rightarrow L\{e^{-5t}\cos 2t\}=\frac{s+5}{s^2+10s+29}$

14. Encontrar los valores iniciales y finales de $f(t)=2 + 5e^{-3t}\cos t$

Solución: $F(s)=\frac{2}{s}+\frac{5(s+3)}{(s+3)^2+1} \Rightarrow F(s)=\frac{7s^2+27s+20}{s^3+6s^2+10s}$, entonces el valor inicial será: $f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \Rightarrow f(0)=\lim_{s\to\infty} \frac{s(7s^2+27s+20)}{s^3+6s^2+10s} \Rightarrow f(0)=7$ y el valor final $f(\infty)=\lim_{s\to o} sF(s) \Rightarrow f(\infty)=\lim_{s\to o} \frac{s(7s^2+27s+20)}{s^3+6s^2+10s} \Rightarrow f(\infty)=2$

15. Conseguir la transformada inversa de $F(s)=\frac{1}{s(s+2)}$

Solución: Aplicaramos el teorema 9, sean $F_1(s)=\frac{1}{s}$ y $F_2(s)=\frac{1}{s+2}$, entonces $f_1(t)=\mu(t)$ y $f_2(t)=e^{-2t} \Rightarrow f(t)=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}d\tau \Rightarrow f(t)=\left[\frac{e^{-2t}e^{-2\tau}}{2}\right]_0^t \Rightarrow f(t)= \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

16. Conseguir la transformada inversa de $F(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

Solución: Aplicaramos el teorema 9, sean sean $F_1(s)=\frac{1}{s+a}$ y $F_2(s)= \frac{1}{s+b} \Rightarrow f_1(t)=e^{-at}$ y $f_2(t)=e^{-bt} \Rightarrow f(t)=\int_0^t e^{-a(t-\tau)}e^{-b\tau}d\tau \Rightarrow$

$f(t)=e^{-at}\int_0^t e^{-(a-b)\tau}d\tau \Rightarrow f(t)=\left[\frac{e^{-at}e^{-(a-b)\tau}}{b-a}\right]_0^t \Rightarrow f(t)=\frac{e^{-at}(e^{-(a-b)t}-1)}{b-a} \Rightarrow f(t)= \frac{e^{-bt}-e^{-at}}{b-a}$

17. Conseguir la transformada inversa de $F(s)=\dfrac{4s}{s^3+2s^2+4s+8}$

<u>Solución:</u> aplicando Rufine en el denominador tenemos que:

	1	2	4	8
-2		-2	0	-8
	1	0	4	0

Luego $F(s)=\dfrac{4s}{(s+2)(s^2+4)}$, donde $F_1(s)=\dfrac{4}{(s+2)}$ y $F_2(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)}$ $\Rightarrow$

$f_1(t)=4e^{-2t}$ y $f_2(t)=\cos 2t \Rightarrow f(t)=4\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cos 2\tau d\tau \Rightarrow f(t)=4e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\cos 2\tau d\tau$

entonces, $f(t)=e^{-2t}\left[e^{2\tau}(\cos 2\tau+\operatorname{sen} 2\tau)\right]_0^t \Rightarrow f(t)=e^{-2t}\left[e^{2t}(\cos 2t+\operatorname{sen} 2t)-1\right]$

entonces, $f(t)=\cos 2t + \operatorname{sen} 2t - e^{-2t}$

18. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función:

$$F(s)=\frac{60s(s+2)}{s^4+5s^3+8s^2+20s+16}$$

<u>Solución:</u> aplicando Rufine en el denominador tenemos:

	1	5	8	20	16
-1		-1	-4	-4	-16
	1	4	4	16	0
-4		-4	0	-16	
	1	0	4	0	
-i2		i2	-4		
	1	-i2	0		

Por lo tanto, $s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 20s + 16 = (S + 1)(s + 4)(s + i2)(s - i2)$, es decir,

$$F(s)=\frac{60s(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+i2)(s-i2)} \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+4}+\frac{A_3}{s+i2}+\frac{A_4}{s-i2}\text{, donde:}$$

$$A_1=\lim_{s\to -1}\frac{60s(s+2)}{(s+4)(s^2+4)} \Rightarrow A_1=-4,$$

$$A_2=\lim_{s\to -4}\frac{60s(s+2)}{(s+1)(s^2+4)} \Rightarrow A_2=-8,$$

$$A_3=\lim_{s\to -i2}\frac{60s(s+2)}{(s+1)(s+4)(s-i2)} \Rightarrow A_3=6+i6$$

$$A_4=\lim_{s\to i2}\frac{60s(s+2)}{(s+1)(s+4)(s+i2)} \Rightarrow A_3=6-i6$$

$$F(s)=\frac{-4}{s+1}+\frac{-8}{s+4}+\frac{6+i6}{s+i2}+\frac{6-i6}{s-i2} \Rightarrow F(s)=\frac{-4}{s+1}+\frac{-8}{s+4}+\frac{12s+24}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{-4}{s+1}+\frac{-8}{s+4}+\frac{12s}{s^2+4}+\frac{24}{s^2+4} \Rightarrow f(t)=-4e^{-t}-8e^{-4t}+12\cos 2t+$$

$12\text{sen}2t \Rightarrow f(t)=-4e^{-t}-8e^{-4t}+16.97\text{sen}(2t+45^o)$

19. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función:

$$F(s)=\frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+5s}$$

<u>Solución:</u> factorizando el denominador tenemos que:

$s^3 - 2s^2 + 5s = s(s + 1 + i2)(s + 1 - i2) \Rightarrow F(s)= \dfrac{s^2 + s + 1}{s(s+1+i2)(s+1-i2)} \Rightarrow$

$F(s)= \dfrac{A_1}{s} + \dfrac{A_2}{s+1+i2} + \dfrac{A_3}{s+1-i2}$, donde:

$A_1 = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{s^2+3s+1}{s^2+2s+5} \Rightarrow A_1 = \dfrac{1}{5} \Rightarrow A_1 = 0.2$

$A_2 = \lim\limits_{s \to -1-i2} \dfrac{s^2+3s+1}{s(s+1-i2)} \Rightarrow A_2 = \dfrac{-2+i5}{4(1+i2)} \Rightarrow A_2 = 0.60 \underline{|48.32^o}$

$A_3 = \lim\limits_{s \to -1-i2} \dfrac{s^2+3s+1}{s(s+1-i2)} \Rightarrow A_3 = \dfrac{-2-i5}{4(1-i2)} \Rightarrow A_3 = 0.60 \underline{|-48.32^o}$

$F(s)= \dfrac{0.2}{s} + \dfrac{0.6e^{i48.32}}{s+1+i2} + \dfrac{0.6e^{-i48.32}}{s+1-i2} \Rightarrow$

$F(s) = 0.2 + 1.2e^{-t}sen(2t + 41.68^o)$

20. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función:

$F(s)= \dfrac{-12(s+1)}{(s^2+8s+25)^2}$

<u>Solución:</u> factorizando el denominador tenemos que:

$F(s)= \dfrac{-12(s+1)}{(s+4+i3)^2(s+4-i3)^2} \Rightarrow$

$F(s)= \dfrac{A_{11}}{(s+4+i3)^2} + \dfrac{A_{12}}{s+4+i3} + \dfrac{A_{21}}{(s+4-i3)^2} + \dfrac{A_{22}}{s+4-i3}$, donde:

$A_{11} = \lim\limits_{s \to -4-i3} \dfrac{-12(s+1)}{(s+4-i3)^2} \Rightarrow A_{11} = 1.414 \underline{|135^o} \Rightarrow A_{21} = 1.414 \underline{|-135^o}$

$$A_{12}=\frac{d}{ds}\left[\frac{-12(s+1)}{(s+4+3i)^2}\right]_{s=-4+i3} \Rightarrow A_{12}=0.33\angle\underline{-90^o} \Rightarrow A_{22}=0.33\angle\underline{90^o}$$

$F(t)=2.82te^{-4t}sen(3t + 225º) + 0{,}667e^{-4t}sen3t$

21. Encontrar la transformada inversa de la siguiente función:

$$F(s)=\frac{s^3+9s^2+28s+29}{s^2+7s+12}$$

Solución: realizando el cociente nos resulta que:

$$F(s)=s + 2 + \frac{2s+5}{s^2+7s+12} \Rightarrow F(s)=s + 2 + \frac{2s+5}{(s+3)(s+4)} \Rightarrow$$

$$F(s)=s + 2 + \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4},\ A_1=\lim_{s\to -3}\frac{2s+5}{s+4} \Rightarrow A_1=-1$$

$$A_2=\lim_{s\to -4}\frac{2s+5}{s+3} \Rightarrow A_2=3$$

$$F(s)=s + 2 + \frac{-1}{s+3} + \frac{3}{s+4} \Rightarrow f(t)=\gamma^2 + \gamma - e^{-3t} + 3e^{-4t}$$

22. Conseguir la solución x(t) de la siguiente ecuación diferencial mediante un sistema de ecuaciones de primer orden usando transformada de Laplace:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+5x=t,\ \text{con}\ \ x(0)=2\ \ y\ \ \frac{dx}{dt}(0)=3,$$

Solución: Haciendo el cambio $y=\frac{dx}{dt}$, entonces $y(0)=3 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dt}$ + 4y + 5x=t, x(0)=2 $\Rightarrow$ sy(s) – y(0) + 4y(s) + 5x(s)=$\frac{1}{s^2}$ y sx(s) – x(0)=y(s), sustituyendo las condiciones iniciales y colocando las ecuaciones en forma matricial, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 5 & s+4 \\ s & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2}+3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ s & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3s^2+1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} \frac{3s^2+1}{2}+2s+8 \\ \frac{3s^2+1}{2}-10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2s^3+11s^2+1}{s^2(s^2+4s+5)} \\ \frac{3s^2-10s+1}{s(s^2+4s+5)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x(s)=\frac{2s^3+11s^2+1}{s^2(s^2+4s+5)} \text{ e } y(s)=\frac{3s^2-10s+1}{s(s^2+4s+5)}$$

$$x(s)=\frac{2s^3+11s^2+1}{s^2(s+2-i)(s+2+i)} \Rightarrow x(s)=\frac{A_{11}}{s^2}+\frac{A_{12}}{s}+\frac{A_2}{s+2-i}+\frac{A_3}{s+2+i},$$

donde:

$$A_{11}=\lim_{s \to 0}\frac{3s^3+11s^2+1}{s^2+4s+5} \Rightarrow A_{11}=0.2$$

$$A_{12}=\frac{d}{ds}\left[\frac{3s^3+11s^2+1}{s^2+4s+5}\right]_{s=0} \Rightarrow A_{12}=-0.16$$

$$A_2=\lim_{s \to -2+i}\frac{3s^3+11s^2+1}{s^2} \Rightarrow A_2=1.08-3.56i \text{ ó } A_2=3.72\underline{|-73.13^o} \Rightarrow$$

$$A_3=1.08+3.56i \text{ ó } A_3=3.72\underline{|73.13^o}$$

Por lo tanto, x(s)=$\frac{0.1}{s^2}$ - $\frac{0.16}{s}$ - $\frac{1.08 - 3.56i}{s+2-i}$ + $\frac{1.08+3.56i}{s+2+i}$, aplicando la transformada inversa y utilizando la ecuación $f(t)=2|A|e^{\sigma}sen|wt+\theta|$, donde en este caso σ=0, w=1 A=3.72 y θ=90º - 73.13º $\Rightarrow$ θ=16.87º, por lo tanto,

x(t)=0.2t – 0.16 + 7.44sen(t + 16.88º)

23. Conseguir la solución de x(t) de la siguiente ecuación diferencial:

$\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+3x=3$, con x(0)=1, $\frac{dx}{dt}(0)$ =2 y $\frac{d^2x}{dt^2}(0)=0$

<u>Solución:</u> hallando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial tenemos:

$S^3x(s) – s^2x(0) – sx'(0) – x''(0) + 3s^2x(s) – 3sx(s) – 3x'(0) + sx(s) – 3x(s)=\frac{3}{s}$

, sacando factor común x(s) y sustituyendo los valores de las condiciones iniciales obtenemos:

$(s^3 + 3s^2 + s + 3)x(s)=\frac{3}{s} + 3s^2 + 4s + 4$, despejando x(s) tenemos: x(s)=

$\frac{3s^3+4s^2+4s+3}{s(s^3+3s^2+s+3)}$, factorizando el denominador aplicando Rufine tenemos: $s^3 + 3s^2 + s + 3=(s + 3)(s – i)(s + i)$, por lo tanto, tenemos que x(s) es: $x(s)=\dfrac{3s^3+4s^2+4s+3}{s(s+3)(s-i)(s+i)}$, aplicando el método de fracciones parciales obtenemos:

$x(s)=\dfrac{A_1}{s}+\dfrac{A_2}{s+3}+\dfrac{A_3}{s-i}+\dfrac{A_4}{s+i}$, donde,

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{s^3+4s^2+4s+3}{(s+3)(s^2+1)}\Rightarrow A_1=1$$

$$A_2=\lim_{s\to -3}\frac{s^3+4s^2+4s+3}{s(s^2+1)}\Rightarrow A_1=0$$

$$A_3=\lim_{s\to i}\frac{s^3+4s^2+4s+3}{s(s+3)}\Rightarrow A_3=-0{,}5i \text{ ó } A_3=0.5\underline{|270^o}\Rightarrow$$

$A_4=0{,}5i$ ó $A_4=0.5\underline{|-270^o}$, luego $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{0.5i}{s-i}-\dfrac{0.5i}{s+i}$, aplicando la transformada inversa y utilizando la ecuación $f(t)=2|A|e^{\sigma}\text{sen}|wt+\theta|$, donde en este caso $\sigma=0$, $w=1$, $A=0.5$ y $\theta=270^o+90^o\Rightarrow\theta=360^o$, por lo tanto, $x(t)=1+2\text{sen}(t+360^o)\Rightarrow x(t)=1+2\text{sen}t$

24. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\mu(t),\quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0)=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$

Solución: $[s\underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}]=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ \\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 6\\ \\ -1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & s-6\\ \\ s+1 & s+5\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$\underset{\leftrightarrow}{\phi}(s)=[s\underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}]^{-1}=\frac{1}{s^2+6s+10}\begin{bmatrix}s+2 & 2\\ \\ -1 & s+4\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s^2+6s+10} & \frac{2}{s^2+6s+10}\\ \frac{-1}{s^2+6s+10} & \frac{s+2}{s^2+6s+10}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}3\\ \\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \\ 2\end{bmatrix}\mu(s)\right]\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s^2+6s+10} & \frac{2}{s^2+6s+10}\\ \frac{-1}{s^2+6s+10} & \frac{s+2}{s^2+6s+10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ \\ 1+\frac{2}{s}\end{bmatrix}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}(s)=\begin{bmatrix}\frac{3s^2+8s+4}{s(s^2+6s+10)}\\ \frac{s^2+3s+8}{s(s^2+6s+10)}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_1(s)=\frac{3s^2+8s+4}{s(s^2+6s+10)}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}_1(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+3-i}+\frac{A_3}{s+3+i}\text{, donde:}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{3s^2+8s+4}{s^2+6s+10}\Rightarrow A_1=\frac{2}{5}$$

$$A_2=\lim_{s\to -3+i}\frac{3s^2+8s+10}{s(s-3+i)}\Rightarrow A_2=1.70\underline{|40.23^o}\ \Rightarrow A_3 1.70\underline{|-40.23^o}\text{, entonces,}$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_1(t)=\frac{2}{5}+3.41\mathrm{sen}(t+130.24^o)$$

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_2(s)=\frac{s^2+3s+8}{s(s^2+6s+10)}\Rightarrow \underset{\leftrightarrow}{X}_2(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+3-i}+\frac{A_3}{s+3+i}\text{, donde:}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{s^2+3s+8}{s^2+6s+10}\Rightarrow A_1=\frac{4}{5}$$

$$A_2=\lim_{s\to -3+i}\frac{s^2+3s+8}{s(s-3+i)}\Rightarrow A_2=1.20\underline{|85.24^o}\Rightarrow A_3 1.70\underline{|-85.24^o}$$, entonces,

$$\underset{\leftrightarrow}{X}_1(t)=\frac{4}{5}+2.41\text{sen}(t+175.24^o)$$

25. Determinar los valores y vectores característico de la matriz:

$$\underset{\leftrightarrow}{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-3&-1&-3\end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u> el polinomio característico es:

$$g(\lambda)=\det\left[\lambda \underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}\right]=\det\left[\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-3&-1&-3\end{bmatrix}\right]\Rightarrow g(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&1\\3&1&\lambda+3\end{bmatrix}$$

entonces, $g(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3=0\Rightarrow(\lambda+3)(\lambda^2+1)=0$, entonces, los valores característicos son: $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=i$ y $\lambda_3=-i$, para determinar los vectores característicos $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\end{bmatrix}$, $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\begin{bmatrix}\mu_{21}\\\mu_{22}\\\mu_{23}\end{bmatrix}$ y $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_3=\begin{bmatrix}\mu_{31}\\\mu_{32}\\\mu_{33}\end{bmatrix}$ sean los vectores característicos de $\underset{\leftrightarrow}{A}$ asociados con λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente. Para $\lambda_1=-3$, tendremos que $\left[\lambda_1\underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}\right]\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\underset{\leftrightarrow}{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&-1&0\\0&-3&-1\\3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, de donde

$3\mu_{11}=-\mu_{12}$ y $3\mu_{12}=-\mu_{13}$, si elegimos arbitrariamente a $\mu_{12}=3$, nos resulta que

$\mu_{11}=-1$ y $\mu_{13}=-9$ y $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_1=\begin{bmatrix}-1\\3\\-9\end{bmatrix}\mu_{11}$

Para $\lambda_2=i$, tendremos que $\lfloor\lambda_2\underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}\rfloor\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\underset{\leftrightarrow}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}i & -1 & 0\\0 & i & -1\\3 & 1 & 3+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{21}\\\mu_{22}\\\mu_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, de

donde $i\mu_{21}=\mu_{22}$ y $i\mu_{22}=\mu_{23}$, si le damos arbitrariamente el valor de 1 a μ_{22},

resulta que $\mu_{21}=-i$ $\mu_{23}=i$, por lo tanto, $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_2=\begin{bmatrix}-i\\1\\i\end{bmatrix}\mu_{21}$ Para $\lambda_3=-i$, tendremos

que $\lfloor\lambda_2\underset{\times}{I}-\underset{\leftrightarrow}{A}\rfloor\underset{\leftrightarrow}{\mu}_3=\underset{\leftrightarrow}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-i & -1 & 0\\0 & -i & -1\\3 & 1 & 3+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{31}\\\mu_{32}\\\mu_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, de donde:

$-i\mu_{31}=\mu_{32}$ y $-i\mu_{32}=\mu_{33}$, si hacemos arbitrariamente $\mu_{32}=1$, resulta que $\mu_{31}=i$

y $\mu_{33}=i$, por lo tanto, $\underset{\leftrightarrow}{\mu}_3=\begin{bmatrix}i\\1\\-i\end{bmatrix}\mu_{31}$, con lo que $\underset{\leftrightarrow}{\mu}=\begin{bmatrix}-1 & -i & i\\3 & 1 & 1\\-9 & i & -i\end{bmatrix}$,

<u>Nota:</u> Como podemos observar en este ejercicio, cuando los valores característicos son complejos, los vectores característicos correspondientes también son complejos, siendo uno de ellos el conjugado del otro.

26. Resolver los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \mu(t), \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u> tenemos que encontrar a la matriz como esta matriz ya fue diagonalizada en ejecicios anteriores tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{20i} \begin{bmatrix} -2i & 0 & -2i \\ -9+3i & 10i & 1+3i \\ 9+3i & 10i & -1+3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \mu(t) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.45 - 0.45i \\ 0.45 - 0.15i \end{bmatrix} \mu(t),$$

$$\underline{z}(0) = \begin{bmatrix} -2i & 0 & -2i \\ -9+3i & 10i & 1+3i \\ 9+3i & 10i & -1+3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1.15 + 0.45i \\ 1.45 - 0.14i \end{bmatrix},$$ **por lo tanto,**

tenemos que:

$$\dot{z}_1 = -3z_1 - 0.3\mu(t), \quad z_1(0) = 5$$

$$\dot{z}_2 = iz_2 - 0(045 - 0.15i)\mu(t), \quad z_2(0) = 1.15 + 0.45i$$

$$\dot{z}_3 = -iz_3 + 0(0.45 + 0.15i)\mu(t), \quad z_3(0) = 51.15 - 0.45i$$

Aplicando la ecuación $x(t)= e^{at}\,x(0) + \int_{t_o}^{t} be^{a(t-\tau)}\mu(\tau)d\tau$, tenemos que:

$$z_1 = --0.1\,e^{-3t} - 0.3\int_0^t e^{-3(t-\tau)}d\tau \Rightarrow z_1 = 0.1e^{-3t} + \left[-0.1e^{-3t}e^{3\tau}\right]_0^t \Rightarrow z_1 = 0.1$$

$$z_2 = (1.15 + 0.45i)\,e^{-it} + (1.15+0.45i)\int_0^t e^{-i(t-\tau)}d\tau \Rightarrow$$

$z_2=(1.15 + 0.45)e^{-it} + (0.15 + 0.45i)\left[e^{-it}e^{i\tau}\right]_0^t \Rightarrow z_2=0.15 + 0.45i + e^{-it}$, como son variables compleja, tenemos entonces que z_3 es la conjugada de z_2, es decir, $z_3=0.15 - 0.45i + e^{it}$

y por último nos queda $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -i & i \\ 3 & 1 & 1 \\ -9 & i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - ie^{it} + ie^{-it} \\ e^{it} + e^{-it} \\ ie^{it} - e^{-it} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{2(e^{it} - e^{-it})}{2i} \\ \dfrac{2(e^{it} + e^{it})}{2i} \\ -\dfrac{2(e^{it} + e^{it})}{2i} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\text{sent} \\ 2\cos t \\ 2\text{sent} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Conseguir la transformada de Laplace de las siguientes funciones:**

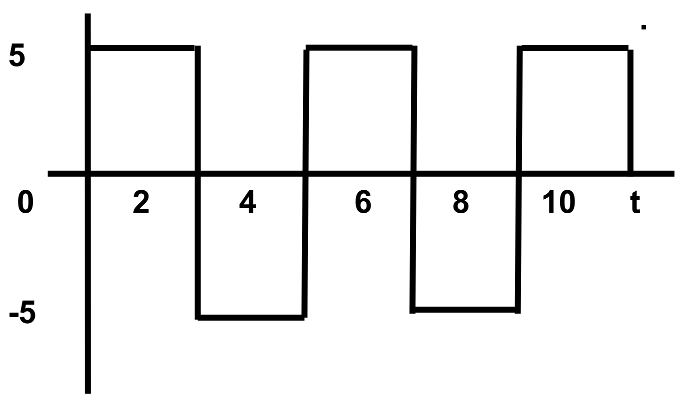
e. $f(t)=2sen0.5t$, **b.** $f(t)=3e^{-2t}sen3t$, **c.** $f(t)=4e^{-t}sen5t + t^2cos5t$, **d.** $f(t)=t3e^{-2t}senat$, **e.** $f(t)=t^2e^{3t}$, **f.** $f(t)=e^{-2t}sen4t$, **g.** $e^{4t}cosh5t$, **h.** $f(t)=3cos6t - 5sen6t$, **i.** $f(t)=5t - 3$ **j.** $e^{-t}cos2t$, **k.** $f(t)=(t + 2)^2e^t$, **l.** $f(t)=e^{2t}(3sen4t - 4cos4t)$, **m.** $e^{-t}(3senh2t - 5cosh2t)$

2. **Determinar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones usando la integral de convolución:**

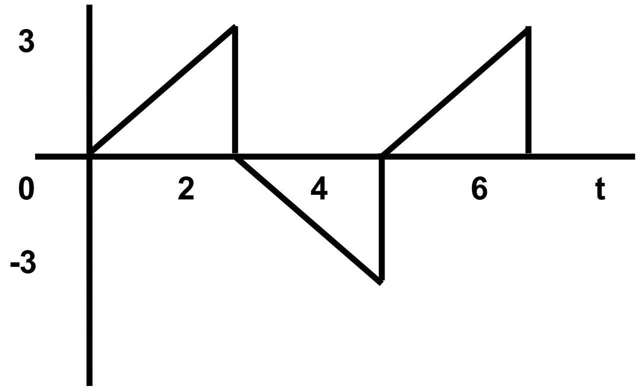
a. $F(s)=\dfrac{5}{s(s^2+4)}$ **b.** $F(s)=\dfrac{1}{s(s+4)^2}$ **c.** $F(s)=\dfrac{10s}{s^3+2s^2+4s+8}$

d. $F(s)=\dfrac{2}{s^3+6s^2+13s}$, **e.** $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$, **f.** $\dfrac{2}{(s^2(s+1)^2}$

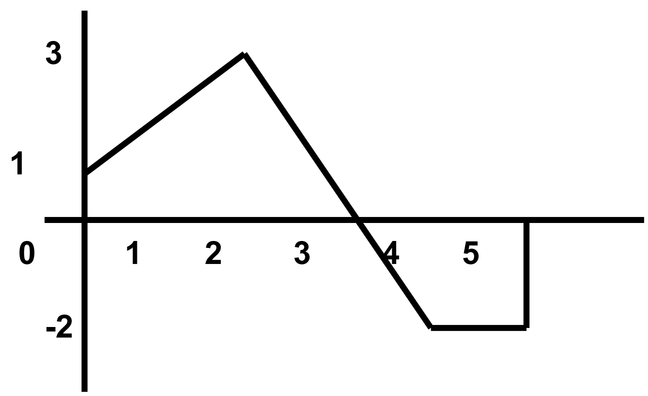
3. **Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función**



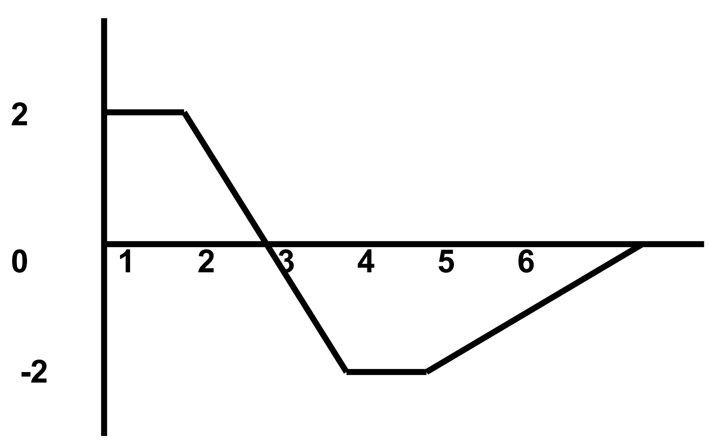
4. **Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función**



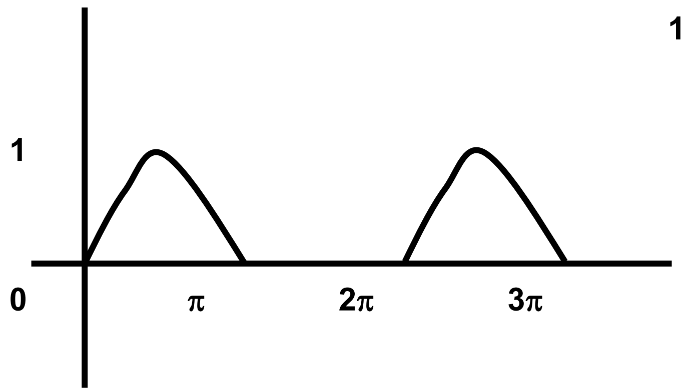
5. **Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función**



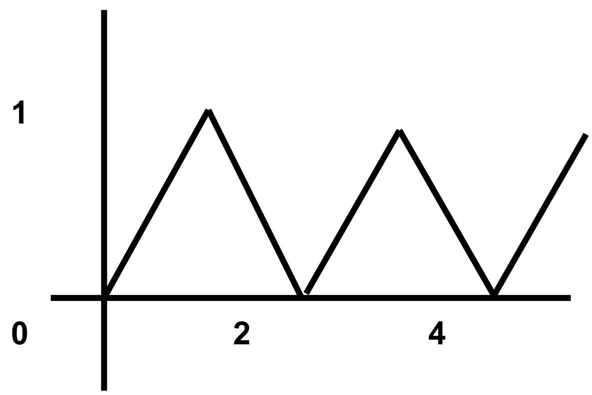
6. **Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función**



7. Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función



8. Determinar la transformada de Laplace de la siguiente función



9. Hallar la transformada inversa de las siguientes funciones:

a. $F(s)=\frac{1}{s^2+9}$, b. $F(s)=\frac{4}{s+2}$, c. $F(s)=\frac{1}{s^2}$, d. $F(s)=\frac{s}{s^2+16}$,

e. $F(s)=\frac{5s+4}{s^2}-\frac{2s+18}{s^2+9}+\frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}$, f. $F(s)=\frac{6}{2s-3}-\frac{3+4s}{9s^2-16}+\frac{8-6s}{16s^2+9}$,

g. $F(s)=\frac{6s-4}{s^2-4s+20}$, h. $F(s)=\frac{4s+12}{s^2+8s+10}$, i. $F(s)=\frac{3s+7}{s^2-2s-3}$,

j. $F(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}$, k. $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)}$, l. $F(s)=\frac{1}{\sqrt{2s+3}}$,

m. $F(s)=\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}$, n. $F(s)=\dfrac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}$, o. $F(s)=\dfrac{se^{-4-3s}}{(s+4)^{5/2}}$,

10. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante la aplicación directa de la transformada de Laplace:

a. $\dfrac{d^2x}{dx^2}+4\dfrac{dx}{dt}+5x=2t+6$, x(0)=2; x'(0)=1

b. $2\dfrac{d^2x}{dx^2}+12\dfrac{dx}{dt}+10x=6\cos 4t$, x(0)=2; x'(0)=8

c. $\dfrac{d^3x}{dx^3}+3\dfrac{d^2x}{dx^2}+\dfrac{dx}{dt}+3x=4$, x(0)=1; x'(0)=2; x''(0)=5

d. $\dfrac{d^3x}{dx^3}+7\dfrac{d^2x}{dx^2}+12\dfrac{dx}{dt}=2$, x(0)=3; x'(0)=1; x''(0)=2

11. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales convirtiéndolas primero en un sistema de ecuaciones de primer orden:

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+5x=2t+6$, x(0)=2; x'(0)=1

b. $2\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}+10x=6\cos 4t$, x(0)=2; x'(0)=8

c. $\dfrac{d^3x}{dt^3}+3\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+3x=4$, x(0)=1; x'(0)=2; x''(0)=5

d. $\dfrac{d^3x}{dt^3}+7\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}=2$, x(0)=3; x'(0)=1; x''(0)=2

e. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6\mu(t)$, x(0)=2; x'(0)=1

f. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 8\operatorname{sen}t$, x(0)=1; x'(0)=2

g. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 10e^{-2t}$, x(0)=2; x'(0)=3

h. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = t + 1$, x(0)=0; x'(0)=1

i. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4.25x = t^2 + 1$, x(0)=0; x'(0)=1

j. $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 42x = 2\operatorname{sen}3t + t$, x(0)=1; x'(0)=2

k. $3\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 6x = 5 + 9e^{-2t}$, x(0)=2; x'(0)=1

l. $2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 34x = t^2$, x(0)=2; x'(0)=-3

12. Encontrar la transformada inversa de las siguientes funciones por medio del desarrollo de las fracciones parciales:

a. F(s)= $\frac{7s + 7}{s^2 - 2s + 3}$, b. F(s)= $\frac{3s + 16}{s^2 - s - 6}$,

c. F(s)= $\frac{s + 1}{6s^2 + 7s + 2}$, d. F(s)= $\frac{2s - 1}{s^3 - s}$,

e. $F(s)=\dfrac{2s^2-4}{s^3-6s^2+11s-6}$ f. $F(s)=\dfrac{15s^2-15s-11}{s^3-s^2-s+1}$,

g. $F(s)=\dfrac{3s+1}{s^3-s^2+s-1}$ h. $F(s)=\dfrac{11s^2-2s+5}{2s^3-3s^2-3s+2}$,

i. $F(s)=\dfrac{3s+16}{s^3+4s^2+9s+36}$ j. $F(s)=\dfrac{s-1}{s^3+5s^2+8s+6}$,

k. $F(s)=\dfrac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^4+9s^2}$ l. $F(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$,

m. $F(s)=\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+5s+2)}$, n. $F(s)=\dfrac{s^2-2s+2}{s^4-2s^3+2s-1}$.

o. $F(s)=\dfrac{s^2+16s-24}{s^4+20s^3+64}$, p. $F(s)=\dfrac{s^2-3}{s^4+5s^3-3s^2-17s-30}$

q. $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+4}{s^3+5s^2+8s+4}$ r. $F(s)=\dfrac{6s^2+10s+4}{3s^3+24s+48}$,

s. $F(s)=\dfrac{4s^2+6s+10}{s^3+5s^2+8s+4}$ t. $F(s)=\dfrac{2s^2+6s+8}{(s^2+2s+5)^2}$,

u. $F(s)=\dfrac{2s^2+5s+4}{s^3+7s^2+16s+12}$ v. $F(s)=\dfrac{8(s+10)^2}{s(s^2+10s+20)}$

w. $F(s)=\dfrac{14s+42}{s^4+8s^3+14s^2+12s}$ x. $F(s)=\dfrac{12s+48}{s^4+6s^3+26s^2+56s+80}$

13. Resolver las siguientes ecuaciones de estado:

a. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

b. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -25 & -35 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

f. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -26 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

g. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

h. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

j. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

l. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

m. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

n. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

p. $$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x}_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 \\ \overset{\circ}{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \mu(t) \quad \underset{\leftrightarrow}{x}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales a través de las ecuaciones de estado

a. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 6\mu(t)$, x(0)=2; x’(0)=1

b. $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dx^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 4\mu(t)$, x(0)=1; x'(0)=3; x''(0)=5

c. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 2\mu(t)$, x(0)=1; x'(0)=-1

d. $\frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dx^2} = 10\mu(t)$, x(0)=1; x'(0)=2; x''(0)=-12, x'''(0)=6

e. $\frac{d^3x}{dt^3} + 7\frac{d^2x}{dx^2} + 19\frac{dx}{dt} + 13x = 5\mu(t)$, x(0)=0; x'(0)=2; x''(0)=-12

f. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 8\text{sent}$, x(0)=1; x'(0)=2

g. $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dx^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = t$, x(0)=2; x'(0)=-1; x''(0)=5

h. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 10e^{-2t}$, x(0)=2; x'(0)=3

i. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = t + 1$, x(0)=0; x'(0)=1

j. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4.25x = t^2 + 1$, x(0)=0; x'(0)=1

k. $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dx^2} + 5x = t^3$, x(0)=3; x'(0)=-5; x''(0)=2

l. $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} + x = e^{-3t}$, x(0)=5; x'(0)=6; x''(0)=2

m. $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 42x = 2\text{sen}3t + t$, x(0)=1; x'(0)=2

n. $\frac{d^3x}{dt^3} + 11\frac{d^2x}{dx^2} + 40\frac{dx}{dt} = \cos 2t + e^{-4t}$, x(0)=-1; x'(0)=-1; x''(0)=5

o. $3\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 6x = 5 + 9e^{-2t}$, x(0)=2; x'(0)=1

p. $2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 34x = t^2$, x(0)=2; x'(0)=-3

BIBLIOGRAFIA

ANGEL Oneto (2001). Números, Anillos y Cuerpos. D.R © Editorial de la Universidad del Zulia (EDILUZ) Maracaibo Estado Zulia.

BALDOR (1987). Algebra Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Aritmética. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

BALDOR (1987). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Ediciones y Distribuciones CODICE, S.A Madrid.

B. DEMIDOVICH (1993). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Undécima Edición Editorial Paraninfo España.

CARDENAS, Humberto, RAGGI Francisco & LLuis Emilio. (1974). Algebra Superior. Editorial Trillas. México D.F.

CESAR R. Gallo P. (2005). Matemáticas para Estudiantes de Administración y Economía. Segunda Reimpresión Universidad Central de Venezuela Caracas.

ERNEST F. Haessler & Jr/Richard S. Paul (1992). Matemáticas para Administración y Economía. Segunda Edición Editorial Iberoamericana Puebla, México

FRALEIGH, John B. (1980) Calculo con Geometría Analítica. Versión en Español de Gonzalo Prada. Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México. Fondo Interamericano.

FRAN Ayres, Jr & ELLIOTT Mendelson (2001). Calculo. Cuarta Edición. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

FUENMAYOR Euro (1978). Matemáticas 1111 Universidad del Zulia Facultad Experimental de Ciencias Estudio Universitario Supervisados EUS. L.U.Z Maracaibo Estado Zulia.

GRANVILLE (1995) Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Limusa, S.A de C.U Mexico D.F.

IGNACIO Bello (1998). Algebra Elemental. Editores Thomson Internacional (Universidad Abierta)

JEAN E. Weber (1982). Matemáticas para Administración y Economía. Cuarta Edición Editorial Harla de Venezuela C.A

LARSON, Roland & HOSTETLER Robert. (1989). Calculo y Geometría Analítica. Tercera Edición. Editorial McGraw-Hill.

LEITHOLD, Louis. (1992). El Cálculo con Geometría Analítica. Cuarta Edición. Editorial Harla. México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Harla México.

LEITHOLD, Louis. (1994). Matemáticas Previas al Cálculo. Editorial Harla. México.

LIPSCHUTZ, Seymour, P.hd. (1991). Algebra Lineal. Editorial McGraw-Hill.

MAX PETTERS, Wuilliam S. (1979). Algebra y Trigonometría. Primera Edición. Editorial Reverté S.A. México. D.F.

MUNEN M.A. & YIZZE J.P. Precálculus Introducción Funcional. Segunda Edición. Editorial Reverté S.A. México D.F.

NAYIT, E. Lopéz V. (1991). Fundamentos de Geometría Plana. D.R Editorial de la Universidad del Zulia Maracaibo Estado Zulia.

PALOMA Sanz, FRANCISCO José Vázquez & Pedro Ortega (1998). Problemas de Algebra Lineal Cuestiones, Ejercicios y Tratamientos en Derive. Editorial PRENTICE HALL España Madrid.

PISKUNOV, N.(1995). Calculo Diferencial e Integral. 6ta edición Tomo I. Editorial LIMUSA. S.A de C.V México D.F.

PURCELL, Edwin J. (1991). Calculo con Geometría Analítica. Sexta Edición Traducción M. en Ciencias Elena de Ortega. Facultad de Ciencias. UNAM. Editorial Hispanoamericana, S.A. México.

ROBERT C. Drede & Murria Spieel. (2004). Calculo Avavzado. Editorial Mc. Graw-Hill/Interamericana de España S.A.U.

ROBERT T. Smith & RONAND B. Minton (2000). Calculo Tomo I. Editorial McGraw-Hill/Interamericana S.A Bogota Colombia

TAYLOR, H. Wade Thomas (1.976). Matemática Básica con Vectores. Primera Edición. Editorial Limusa, México D.F.

APÉNDICES

.LISTA DE SIMBOLOS

$\in$	**Pertenece**
$\notin$	**No pertenece**
$\{\}$	**Conjunto**
$\subset$	**Es un sub-conjunto de, esta incluido en**
$\subseteq$	**Es un sub-conjunto propio de**
$\cup$	**Unión de conjunto**
$\cap$	**Intersección de conjunto**
-	**Diferencia de conjunto**
'	**Complemento de un conjunto**
Z^-	**Números enteros negativos**
$\{0\}$	**Número cero**
Z^+	**Números enteros positivos**
Z	**Números enteros**
N	**Números naturales**
Q^-	**Números Racionales o fraccionarios negativos**
Q^+	**Números Racionales o fraccionarios positivos**
Q	**Números Racionales o fraccionarios**
$\Re^-$	**Números reales negativos**
$\Re^+$	**Números reales positivos**
$\Re$	**Números reales**
$\Rightarrow$	**Implica, entonces, condición de suficiencia**
$\Leftarrow$	**Condición de necesaria**
$\Leftrightarrow$	**Si y sólo si, condición de necesario y suficiente**
sii	**Si y sólo si, condición de necesario y suficiente**
!	**Factorial de un número**
$\forall$	**Para todo**
#	**Número**
$\exists$	**Existe**
%	**Porcentaje**
*****	**Producto o multiplicación**

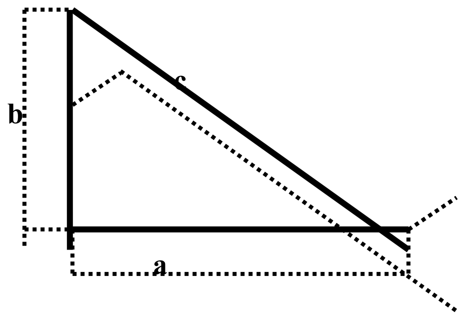
$+$	**Suma o adición**
$-$	**Resta o sustracción**
$/$	**División o cociente, tal que**
$\neq$	**Diferente a**
$:$	**Tal que**
$<$	**Menor que**
$=$	**igual que**
$\leq$	**Menor o igual que**
$>$	**Mayor que**
$\geq$	**Mayor o igual que**
$\equiv$	**Relación de equivalencia**
$\approx$	**Equivalente**
Δ	**Triangulo**
$\square$	**Cuadrado**
$\pm$	**Más o menos**
$\pm\infty$	**Más o menos infinito**
Π	**Producto**
Σ	**Sumatoria**
$\therefore$	**Por lo tanto**
e.i	**es decir**
$\perp$	**Perpendicularidad de rectas**
$//$	**Paralelismo de rectas**
$\rightarrow$	**Implica**
$\wedge$	**Disyunción (o)**
$\vee$	**Conjunción (y)**
ϕ	**Conjunto vacio**
$\blacksquare$	**Fin de la demostración**
P(..)	**Potencia de un conjunto**
n(..)	**Cardinal de un conjunto**

ALFABETO GRIEGO

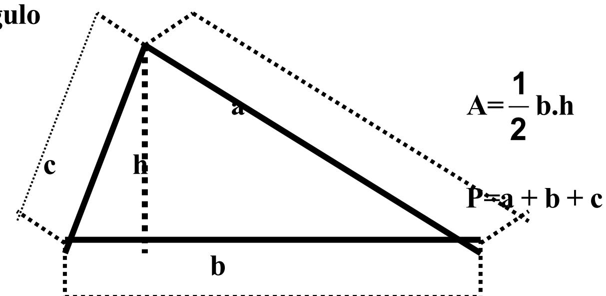
α	Α	a	A	Alfa
β	Β	b	B	Beta
χ	Χ	c	C	Ji
δ	Δ	d	D	Delta
ε	Ε	e	E	Epsilón
ϕ	Φ	f	F	Phi
γ	Γ	g	G	Gamma
η	Η	h	H	Eta
ι	Ι	i	I	Iota
φ	ϑ	j	J	Si
κ	Κ	k	K	Kapa
λ	Λ	l	L	Landa
μ	Μ	m	M	Mu
ν	Ν	n	N	Un
ο	Ο	o	O	Omicrón
π	Π	p	P	Pi
θ	Θ	q	Q	Teta
ρ	Ρ	r	R	Rho
σ	Σ	s	S	Sigma
τ	Τ	t	T	Tau
υ	Υ	u	U	Viu
ξ	Ξ	x	x	Omega
ψ	Ψ	y	Y	Fhi
ζ	Ζ	z	Z	Zeta

FIGURAS Y FORMULAS GEOMETRICAS

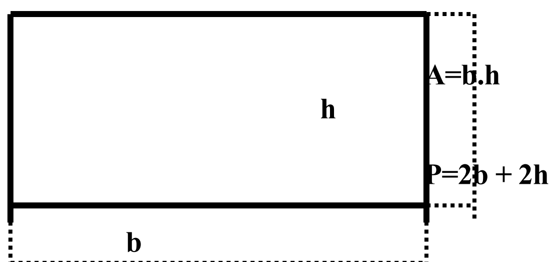
Triangulo rectángulo, Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$



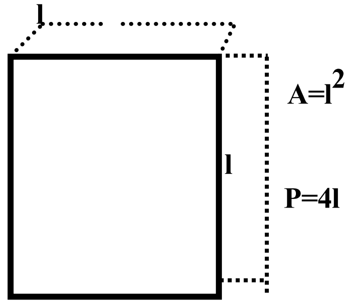
Triangulo



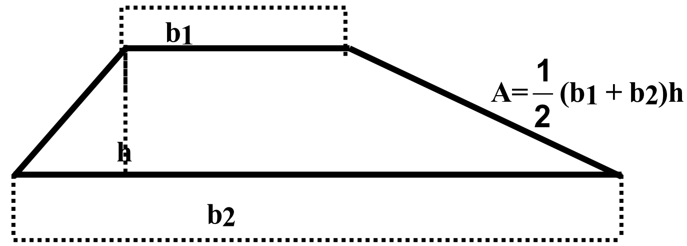
Rectángulo



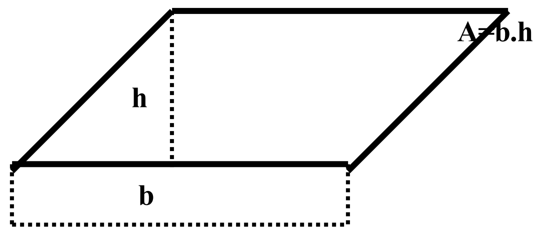
Cuadrado



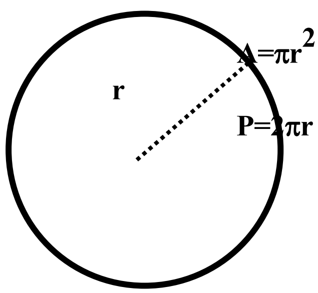
Trapezoide



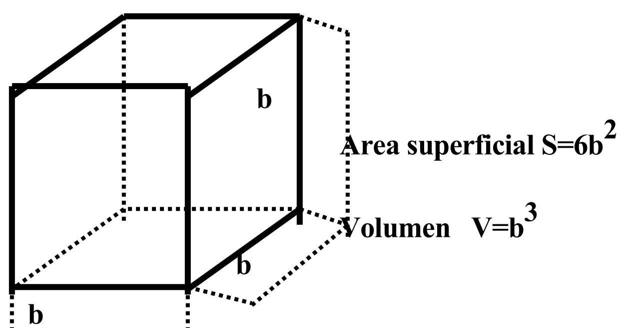
Paralelogramo



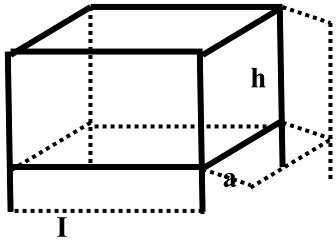
Circulo



Cubo



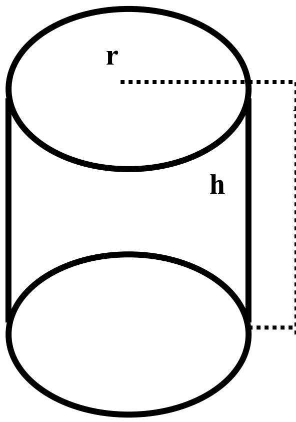
Solido Rectangular



Area superficial $S=2l + 2a + 2h$

Volumen $V=l.a.h$

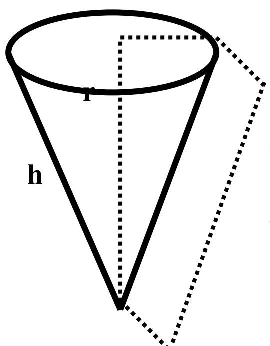
Cilindro



Area Superficial $S=2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen $V=\pi r^2 h$

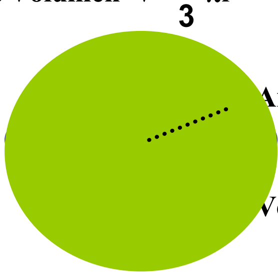
Cono



Área Superficial $S=\pi rl + \pi r^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Esfera Volumen $V=\frac{4}{3}\pi r^3$



Area Superficial $S=4\pi r^2$

Volumen $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN

1. ***Asociativa***: $\forall$a, b, c$\in\Re$ se tiene,(a + b) + c=a + (b + c)
2. ***Conmutativa***: $\forall$a, b$\in\Re$ se tiene, a + b=b + a
3. ***Elemento neutro o neutro aditivo***: $\forall$a$\in\Re$, $\exists$e$\in\Re$/a + e=e + a=a
4. ***Elemento simétrico o inverso aditivo***: $\forall$a$\in\Re$, $\exists$ $a^{-1}\in\Re$/a + a^{-1}=a^{-1} + a=e=0, $\Rightarrow$ a^{-1} + a=0 $\Rightarrow$ a^{-1}=-a

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

5. ***Asociativa***: $\forall$a, b, c$\in\Re$ se tiene, $(a_x b)c=a(b_x c)$
6. ***Conmutativa***: $\forall$a, b$\in\Re$ se tiene, $a_x b=b_x a$
7. ***Elemento neutro o neutro multiplicativo***: $\forall$a$\in\Re$, $\exists$e$\in\Re$/$a_x e=e_x a=a$ $\Rightarrow$ e=1
8. ***Elemento simétrico o Elemento inverso multiplicativo***: $\forall$a$\in\Re$, $\exists a^{-1}\in\Re$/a.a^{-1}=$a^{-1}{}_x a$=e=1 $\Rightarrow$ $a^{-1}{}_x a=1$ $\Rightarrow$ $a^{-1}=\frac{1}{a}$
9. ***Distributiva:*** $\forall$a, b, c$\in\Re$ se tiene: $a(b + c)=a_x b + a_x c=b_x a + c_x a=(b + c)a$
10. ***Elemento absorbente:*** $\forall$a$\in\Re$, $\exists$0$\in\Re$/0a=a0=0
11. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re$/ si a<b $\Rightarrow$ a + c<b + c
12. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re^+$/ si a<b $\Rightarrow$ $a_x c<b_x c$
13. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re^-$/ si a<b $\Rightarrow$ $a_x c>b.c$
14. $\forall$a, b$\in\Re$, $\exists$c$\in\Re$/, si a<b $\Rightarrow$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
15. $\forall$a$\in\Re$ se tiene que $a^2>0$ Si a=0 $\Rightarrow a^2=0$
16. $\forall$a, b$\in\Re$, se tiene que $(a + b)^2>a^2 + b^2$
17. $\forall$ a, b$\in\Re$ se tiene que si $a_x b=0$ $\Rightarrow$ a=0 o b=0

18. **$\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$ se tiene que si a$_x$b=0 $\Rightarrow$ a=0 o b=0**

19. **$\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$ se tiene que si a$_x$b<0 $\Rightarrow$ (a<0 $\wedge$ b>0) o (a>0 $\wedge$ b<0)**

20. **$\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists n\in\Re/(a_x b)^n = a^n{}_x b^n$ y $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$**

21. **$\forall$ a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists$n, m$\in\mathscr{R}/a^n{}_x a^m = a^{n+m}$ y $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}$**

22. **a, b$\in\mathscr{R}$, $\exists$n$\in\mathscr{R}/(a^n)^m = a^{n_x m}$**

23. **$y=a^x \Rightarrow x=lg_a x$**

24. **$lg_a 1=0$**

25. **$lg_a a=1$**

26. **$lg_a xy=lg_a x + lg_a y$**

27. **$lg_a \frac{x}{y} = lg_a x - lg_a y$**

28. **$lg_a x^y = y lg_a x$**

29. **Nota: Cuando la base es el número neperiano e, se escribe $lg_e x=\ln x$**

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1. Si $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow$ $a_x d=c_x x$ $\Rightarrow$ $x=\frac{a_x d}{c}$ o $c=\frac{a_x d}{x}$ o $a=\frac{c_x x}{d}$ o $d=\frac{c_x x}{a}$ $\forall$a, b, c y d$\in Z^+ U Z^-$ ($\Rightarrow$ se lee entonces, implica)

2. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

3. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$

4. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}$

PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS

1. $\sum_{i=1}^{n} k = nk$

2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$

3. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$,

5. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$

PROPIEDADES DE LA DISTACIA ENTRE DOS PUNTOS

1. $|x| \geq 0$ y $|x| = 0, \Leftrightarrow x = 0$

2. $|ay| = a|x|$

3. $|xy| = |x|\,|y|$

4. $|x/y| = |x|/|y|$

5. $|x| = a \Leftrightarrow -a = x = a \Rightarrow x = -a$ ó $x = a$

6. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ y $x \leq a, \Rightarrow x \in [-a, a]$

7. $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x \geq a \Rightarrow x \leq -a$ y $x \geq a, \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

8. $|x + y| \leq |x| + |y|$

9. $|x - y| \geq |x| - |y|$

10. $|x - y| \geq ||x| - |y||$

FACTORIZACION DE POLINOMIOS Y RADICALES

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $(x \pm y)^n$

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

$$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$$

$$(x \pm y)^n = \binom{n}{0}x^n \pm \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{1}x^{n-2}y^2 \pm \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots \pm \binom{n}{n}y^n,$$ donde

$\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n(m-n)!}$, número combinatorio, los cuales se pueden calcular con la ayuda del triangulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{n}{0} & & & & \\
 & & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{0} & & & \\
 & & \binom{n}{0} & & \binom{n}{2} & & \binom{n}{0} & & \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{3} & & \binom{n}{0} & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{6} & & \binom{n}{4} & & \binom{n}{0}
\end{array}$$

Este triangulo también toma la forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $X^n - Y^n$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

$\vdots \qquad \vdots$

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + y^{n-1})$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA: $x^n + y^n$

$x^2 + y^2 = (x - \sqrt{2xy} + y)(x + \sqrt{2xy} + y)$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^4 + y^4 = (x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)(x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2)$

$\vdots \qquad \vdots$

$$x^n + y^n = \begin{cases} (x^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}})(x^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2}x^{\frac{n}{4}}y^{\frac{n}{4}} + y^{\frac{n}{2}}) & \text{si n es par} \\ (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots\ldots + y^{n-1}) & \text{si n es impar} \end{cases}$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

$$x - y = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

FACTORIZACIÓN DE LA FORMA $\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}-\sqrt[4]{y^3}}$$

$\vdots$

$$\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-1}y}+\sqrt[4]{x^{n-2}y^2}-\ldots\ldots\ldots-\sqrt[n]{y^{n-1}}}$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS COMUNMENTE UTILIZADAS

1. $\text{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto al Angulo}}{\text{Hipótenusa}}$

2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto Adyasente al Angulo}}{\text{Hipótenusa}}$

3. $\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto al Angulo}}{\text{Cateto Adyasente al Angulo}}$

4. $\text{sen}\alpha\csc\alpha=1$

5. $\cos\alpha\sec\alpha=1$

6. $\text{tg}\alpha\,\text{ctg}\alpha=1$

7. $\text{sen}^2x + \cos^2x=1$

8. $\sec^2x - \text{tg}^2x=1$

9. $\csc^2x - \text{ctg}^2x=1$

10. $\text{sen}(x \pm y)=\text{sen}x\cos y \pm \text{sen}y\cos x$

11. $\cos(x \pm y)=\cos x\cos y \mp \text{sen}x\,\text{sen}y$

12. $\text{tg}(x \pm y)=\dfrac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 \pm \text{tg}x\,\text{tg}y}$

13. $\text{sen}2x=2\text{sen}x\cos x$

14. $\cos2x=\cos^2x - \text{sen}^2x$

15. $\text{tg}2x=\dfrac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x}$

16. $\text{sen}^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2}$

17. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

18. $tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

19. $sen(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\,[sen(\alpha + \beta)x + sen(\alpha - \beta)x]$

20. $sen(\alpha x)sen(nx) = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x]$

21. $\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$

FUNCIONES HIPERBOLICAS

1. $senhx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

2. $cosh = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

3. $tghx = \frac{senhx}{coshx}$

4. $sechx\cosh x = 1$

5. $cschxsenhx = 1$

6. $ctghxtghx = 1\cosh 2x = senh^2 x + conh^2 x$

7. $senh2x = 2senhx\cosh x$

8. $\cosh^2 x - senh^2 x = 1$

9. $tgh^2 x + sech^2 x = 1$

10. $\operatorname{ctgh}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

11. $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

12. $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sean $L_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $L_2 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ **y** $K \in \Re$, **se tiene que:**

6) $\lim\limits_{x \to x_0} K = K$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} Kf(x) = K \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = KL_1$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$

9) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_1.L_2$

10) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $g(x) \neq 0$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^n = (L_1)^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = (L_1)^{L_2}$

LIMITES ESPECIALES

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

TABLA DE DERIVACIÓN

17. $\frac{dku}{dx}=k\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d(u\pm v)}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$ donde v es también una función compuesta.

19. $\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{\frac{du}{dx}}{u^2}$

21. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=-\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{du}{dx}}{v^2}$

22. $(u^n)'=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

23. $\frac{d\,sen(\alpha u)}{dx}=\alpha\cos(\alpha u)\frac{du}{dx}$

24. $\frac{d\cos(\ \alpha u)}{dx}=-\alpha sen(\alpha u)\frac{du}{dx}$

25. $\frac{d\,tg(\ \alpha u)}{dx}=\alpha\sec^2 u\frac{du}{dx}$

26. $\frac{d\csc(c\ \ \alpha u)}{dx}=-\alpha\csc(\alpha u)ctg(\alpha u)\frac{du}{dx}$

27. $\frac{d\sec(\ \alpha u)}{dx}=\alpha secx(\alpha u)tg(\alpha u)\ \frac{du}{dx}$

28. $\frac{d\,ctg(\ \alpha u)}{dx}=\alpha\csc^2(\alpha u)\frac{du}{dx}$

29. $\dfrac{da^{\alpha u}}{dx} = \alpha \ln a \dfrac{du}{dx}$

30. $\dfrac{de^{\alpha u}}{dx} = \alpha e^{\alpha u} \dfrac{du}{dx}$

31. $\dfrac{d(\lg_a(\alpha u))}{dx} = \dfrac{\alpha}{u \lg_a e} \dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d(\ln_a(\alpha u))}{dx} = \dfrac{\alpha}{u} \dfrac{du}{dx}$

TABLA DE INTEGRACIÓN

1. $I = \int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \\ \dfrac{dx}{x} \end{cases}$

2. $I = \int (ax+b)^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \\ \\ \dfrac{1}{a} Ln(ax+b) \end{cases}$

3. $I = \int a^x dx \Rightarrow I = \dfrac{a^x}{Lna} + C$

4. $I = \int a^{bx+c} dx \Rightarrow I = \dfrac{a^{bx+c}}{bLna} + C$

5. $I=\int e^{x}dx \Rightarrow I = e^{x} + C$

6. $I=\int e^{ax+b}dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}e^{x} + C$

7. $I=\int senxdx \Rightarrow I = -cosx + C$

8. $I=\int sen(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}cosx + C$

9. $I=\int cosxdx \Rightarrow I = senx + C$

10. $I=\int cos(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}sen(ax+b) + C$

11. $I=\int tgxdx \Rightarrow I = -Ln(cosx) + C \Rightarrow I = Ln(secx)$

12. $I=\int tg(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}Ln(cos(ax+b) + C \Rightarrow I = \frac{1}{a}Lnsec(ax+b)$

13. $I=\int ctgxdx \Rightarrow I = Ln(senx) + C$

14. $I=\int ctg(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln(senx) + C$

15. $I=\int secxdx \Rightarrow I = Ln[secx + tgx] + C$

16. $I=\int sec(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln[sec(ax+b) + tg(ax+b)] + C$

17. $I=\int cscxdx \Rightarrow I = Ln[cscx - ctgx] + C$

18. $I=\int csc(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln[csc(ax+b) - ctg(ax+b)] + C$

19. $I=\int sec^{2}xdx \Rightarrow I = tgx + C$

20. I= $\int \sec^{2} x(ax+b)x \Rightarrow I = \frac{1}{a}tg(ax+b) + C$

21. I= $\int \csc^{2} xdx \Rightarrow I = -ctgx + C$

22. I= $\int \csc^{2} (ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}ctg(ax+b) + C$

23. I= $\int secxtgxdx \Rightarrow I = secx + C$

24. I= $\int sec(ax+b)tg(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}sec(ax+b) + C$

25. I= $\int cscxctgxdx \Rightarrow I = -cscx + C$

26. I= $\int csc(ax+b)ctg(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}csc(ax+b) + C$

27. I= $\int senhxdx \Rightarrow I = coshx + C$

28. I= $\int senh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}cosh(ax+b) + C$

29. I= $\int coshxdx \Rightarrow I = senhx + C$

30. I= $\int cosh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}senhx + C$

31. I= $\int tghxdx \Rightarrow I = Ln(coshx) + C$

32. I= $\int tgh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln(cosh(ax+b)) + C$

33. I= $\int ctghxdx \Rightarrow I = Ln(senhx) + C$

34. I= $\int ctgh(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}Ln(senh(ax+b)) + C$

35. $I=\int \operatorname{sechx} dx \Rightarrow I = tg^{-1}(\operatorname{senhx}) + C$

36. $I=\int \operatorname{sech}(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a} tg^{-1}(\operatorname{senh}(ax+b)) + C$

37. $I=\int \operatorname{cschx} dx \Rightarrow I = \operatorname{Lntgh}\frac{x}{2} + C$

38. $I=\int \operatorname{csch}(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}\operatorname{Lntgh}\frac{ax+b}{2} + C$

39. $I=\int \operatorname{sech}^2 x dx \Rightarrow I = \operatorname{tghx} + C$

40. $I=\int \operatorname{sech}^2(ax+b)dx \Rightarrow I = \frac{1}{a}\operatorname{tgh}(ax+b) + C$

41. $I=\int \operatorname{csc}^2 hx dx \Rightarrow I = -\operatorname{ctghx} + C$

42. $I=\int \operatorname{csc}^2 h(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}\operatorname{ctgh}(ax+b) + C$

43. $I=\int \operatorname{sechxtghx} dx \Rightarrow I = -\operatorname{sechx} + C$

44. $I=\int \operatorname{sech}(ax+b)\operatorname{tgh}(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}(ax+b) + C$

45. $I=\int \operatorname{cschxctghx} dx \Rightarrow I = -\operatorname{cschx} + C$

46. $I=\int \operatorname{csch}(ax+b)\operatorname{ctgh}(ax+b)dx \Rightarrow I = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}(ax+b) + C$

47. $I=\int \frac{dx}{a^2+x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{a} tg^{-1}\frac{x}{a} + C$

48. $I=\int \frac{dx}{a^2-x^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a}\operatorname{Ln}\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C$

49. $I=\int \frac{dx}{x^2 - a^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2a} Ln\left[\frac{x-a}{x+a}\right] + C$

50. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

51. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

52. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow I = sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

53. $I=\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + C$

54. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + C$

55. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sen^{-1}\frac{x}{a} + C$

Tabla de Algunas Trasformadas de Laplace:

	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	$F(s)=L\{f(t)\}$	
1	1	$\frac{1}{s}$	s>0
2	K $\forall k \in \Re$	$\frac{k}{s}$	s>0
3	t	$\frac{1}{s^2}$	Re(s – a)>0
4	t^n (n=1, 2, 3, ……)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re(s)>0
5	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$	Re(s)>$\lvert Im(s) \rvert$
7	e^{at}	$\frac{1}{s+a}$	Re(s – a)>0
8	$\mu(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	Re(s)>0
9	senat	$\frac{a}{s^2+a^2}$	Re(s)>$\lvert Im(a) \rvert$
10	cosat	$\frac{s}{s^2+a^2}$	Re(s)>$\lvert Im(a) \rvert$
11	lnt	$\frac{-(\gamma - \ln s)}{s}$	Re(s)>0
12	senhat	$\frac{a}{s^2-a^2}$	Re(s)>$\lvert Re(a) \rvert$
13	cosat	$\frac{s}{s^2-a^2}$	Re(s)>$\lvert Re(a) \rvert$

CÁLCULOS MATEMÁTICOS PARA INGENIEROS

El estudio del cálculo es fundamental para los ingenieros puesto que el mismo les brinda la oportunidad para adentrarse en el mundo de lo infinitamente pequeño, en el campo de los cambios infinitesimales, los cuales ofrecen al interesado una perspectiva totalmente diferente de una realidad que hasta no abordarse con los conocimientos básicos no es posible comprender ni mucho menos utilizar para generar resultados cónsonos con la solución de problemas con los que debe lidiar un profesional de la ingeniería. En tal sentido, en la presente obra, se parte del estudio del concepto de límite de una función, el cual es el soporte fundamental para comenzar el transitar por el camino del cálculo diferencial y del cálculo integral tanto univariable como bivariable, aspectos que son tratados de una manera amplia, con abundantes ejemplos y con numerosos ejercicios que permiten al lector comprobar sus progresos en esta área de la matemática. Se culmina el recorrido por el cálculo, con un capítulo en el cual se hace una introducción a la transformada de Laplace, de igual manera, se incluyen anexos que brindan apoyo a la hora de la resolución de los problemas planteados en el libro.

ISBN: 978-980-248-246-7

9 789802 482467