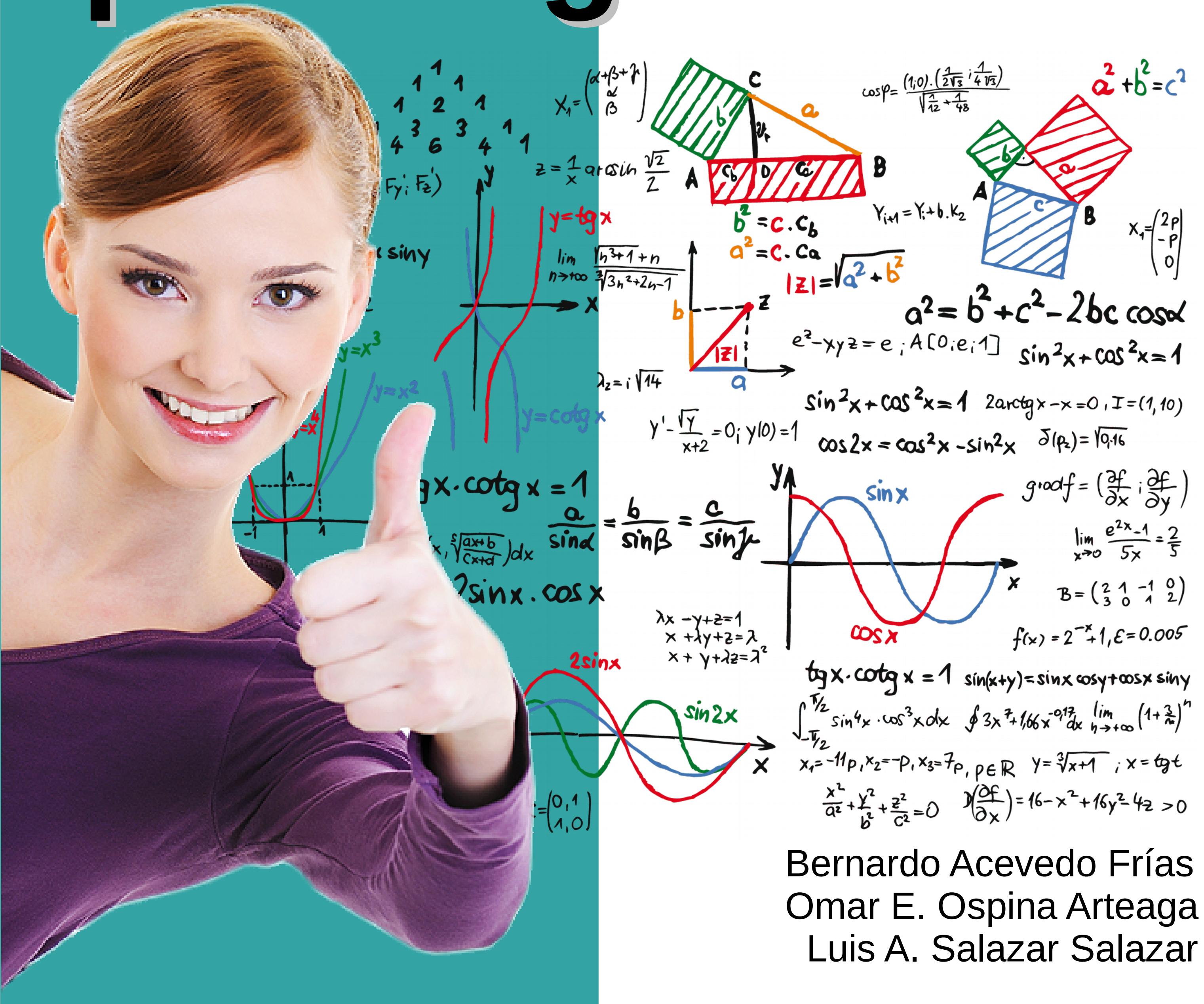
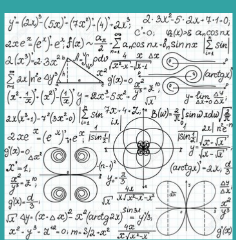
Matemáticas Fundamentales para Ingeniería



Bernardo Acevedo Frías
Omar E. Ospina Arteaga
Luis A. Salazar Salazar



EDICIÓN 2009

BERNARDO ACEVEDO FRIAS
OMAR EVELIO OSPINA ARTEAGA
LUIS ALVARO SALAZAR SALAZAR

MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES PARA INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

I.S.B.N 978-958-8280-24-0

AUTORES:
BERNARDO ACEVEDO FRIAS
Matemático
Ms.Sc. en Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

OMAR EVELIO OSPINA ARTEAGA
Matemático
Ms.Sc. en Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

LUIS ALVARO SALAZAR SALAZAR
Licenciado en Matemáticas
Ms.Sc. en Ciencias especialidad Matemáticas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

IMPRESO:
Sección de Publicaciones e Imagen
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

Octubre de 2009
Segunda Edición

Índice general

INTRODUCCIÓN PARA LA SEGUNDA EDICIÓN

El libro Matemáticas Fundamentales para Ingenieros que nos publicó en el año 2003 el Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales tuvo en la comunidad universitaria una gran acogida hasta el punto de romper el record de número de ejemplares vendidos en dicho centro. Fue así como semestre a semestre se hicieron secuencialmente reimpresiones del libro para poder atender la demanda para su utilización en los numerosos cursos de la asignatura Matemáticas I de las carreras de ingeniería de la Sede.

Esas reimpresiones debieron de suspenderse en el año 2007, entre otras razones porque ya se debía hacer una revisión y rediseño del texto y debido además a la aprobación e implementación de una nueva reforma académica para la Universidad Nacional de Colombia, enmarcada en el modelo de los "créditos" y la reestructuración de los planes de estudio de los pregrados.

Los autores nos dimos a tarea de la revisión y rediseño del libro buscando con la misma una presentación más ágil y amigable de los temas que, sin abandonar el rigor, les sirva de apoyo eficaz a los estudiantes para enfrentar, desde el primer semestre, las nuevas estrategias de aprendizaje demandadas por el modelo de los "créditos".

Mientras que realizamos la tarea de revisión y rediseño se formalizaron los nuevos currículos de las carreras de ingeniería de la Universidad y como consecuencia los contenidos de la asignatura Matemáticas I se redistribuyeron en dos asignaturas: Matemáticas Básicas y Cálculo I.

Como resultado de la revisión y rediseño del libro Matemáticas Fundamentales para Ingenieros, presentamos hoy el libro Matemáticas Fundamentales para Ingeniería, que bien puede llamarse la segunda edición del primero, y que estamos convencidos, satisface las exigencias de un buen texto para esas dos nuevas asignaturas: Matemáticas Básicas y Cálculo I. En esta nueva edición se cambio la presentación de Word a $\LaTeX$.

Agradecemos a todas las personas que nos brindaron su valiosa colaboración en esta dispendiosa tarea, entre las cuales destacamos a los docentes de la asignatura, que se llamó, Matemáticas I y que generosamente supieron valorar nuestro esfuerzo.

LOS AUTORES

Capítulo 1

NÚMEROS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental de este primer curso de matemáticas para los estudiantes de las carreras de ingeniería, es el estudio del cálculo diferencial de funciones de números reales. El logro de este objetivo exige sólidos conocimientos de los fundamentos del álgebra y teoría de funciones de números reales, razón por la cual el primer capítulo de este escrito se dedicará a hacer un juicioso repaso de los fundamentos del álgebra y números reales que los bachilleres trataron en sus cursos de secundaria.

1.1. TIPOS DE NÚMEROS

1.1.1. Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales son los que se emplean para contar : $1,2,3,4,\ldots$. De la construcción de este conjunto se pueden apreciar que tiene un primer elemento, el uno (algunos autores consideran al cero como el primer número natural); que cada elemento tiene un sucesor, (el sucesor del 1 es el 2, el sucesor del 30 es el $31,\ldots$), lo que implica que tiene infinitos elementos, no existe un número mayor e induce un orden natural entre ellos así:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\} \qquad \text{donde} \qquad 1<2<3<4<5\ldots$$

Aquí el símbolo $<$ se lee menor que.

Algunas Propiedades

Sean a, b, c números naturales.

1. Propiedad Clausurativa. $a+b$ y ab son números naturales.
2. Propiedad Conmutativa. $a+b=b+a \qquad ab=ba$
3. Propiedad Asociativa. $(a+b)+c=a+(b+c) \quad ; \quad (ab)c=a(bc)$

4. Propiedad Modulativa. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

5. Propiedad Distributiva. $n(a+b) = na + nb$.
   Llamando $na = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{\text{n veces}}$; $nb = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{\text{n veces}}$
   se tiene que: $na+nb = n(a+b)$ ya que
   $na+nb = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{\text{n veces}} + \underbrace{b+b+\ldots+b}_{\text{n veces}} = \underbrace{(a+b)+(a+b)+\ldots+(a+b)}_{\text{n veces}} = n(a+b)$

6. Llamando $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}$ se tiene que

   i. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, pues
   $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n+m veces}} = a^{n+m}$

   ii. $(ab)^n = a^n b^n$ ya que
   $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{\text{n veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n veces}} = a^n b^n$

   iii. $(a^n)^m = a^{nm}$ ya que
   $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{\text{m veces}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{\text{n veces}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}}}_{\text{m veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{nm veces}} = a^{nm}$

EJERCICIOS

1. ¿Es el cociente de dos números naturales un número natural?

2. ¿Todo subconjunto de números naturales tiene un primer elemento, un último elemento?

3. Considere $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de todos los subconjuntos de A.

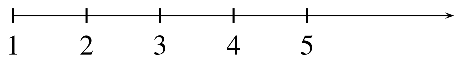
4. Sean b y d dos números naturales, si existe un número c natural tal que $b = dc$, entonces se dice que d es un factor o divisor de b, por ejemplo $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$ luego $1, 2$ y 5 son divisores de 10.
   Hallar todos los divisores de $2, 35, 40, 75, 90, 240$.

5. Un número natural es primo, si los únicos divisores son el mismo número y la unidad, por ejemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13. (El número 1 no se considera primo).

   i. Cuáles son los primeros 20 números primos?
   ii. Escribir 35, 64, 100, 246 como producto de números primos.
   iii. ¿Es la suma, producto, cociente de dos números primos, un número primo?

Representación Gráfica de los Números Naturales.

A los números naturales los representamos mediante puntos sobre una semirrecta que inicia con el número 1 y a su derecha se van colocando los correspondientes sucesores de cada número separados por la misma distancia como se observa en la figura.

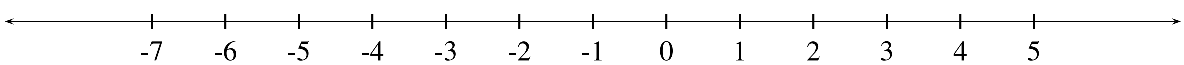


1.1.2. Números Enteros $(\mathbb{Z})$

Si con los números naturales se quieren representar la altura en metros sobre el nivel del mar (altitud), se necesita un número para representar la situación cuando se está a nivel del mar, este número se llama cero (0) y en general va a representar ausencia de la cantidad que se está considerando.
Pero es necesario también introducir números que representan la situación cuando se está bajo el nivel del mar, en este caso cuando se está a n metros bajo el nivel del mar se dice que la altitud es de menos n metros. De esto resulta que para cada número natural n existe un número menos n (que se simboliza por $(-n)$). Así el número 5 representara cinco metros sobre el nivel del mar y -5 representaría cinco metros bajo el nivel del mar, de esta forma el número -5 representa más altitud que el número -7, luego el orden de estos números será

$$\ldots - 7 < -6 < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 \ldots$$

y por consiguiente se pueden representar gráficamente en una recta donde a la derecha del cero están los naturales y a la izquierda los números negativos definidos como se ilustra en la figura siguiente



Es claro que si un número está a la derecha de otro, será más grande que él . Este conjunto numérico se llama el conjunto de los números enteros y se utiliza para describir situaciones físicas y practicas, y se nota por

$$\begin{aligned} Z &: \\ Z &= \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \end{aligned}$$

NOTA:

Recuerde que en la suma y producto de números enteros es necesario tener en cuenta los signos de los números así:

$$
\begin{aligned}
(3)+(-5) &= -2\\
(6)+(-4) &= 2\\
(7)+(-7) &= 0\\
(2)(3) &= 6\\
(-2)(4) &= -8\\
(-3)(-5) &= 15
\end{aligned}
$$

Algunas Propiedades

Sean a, b, c números enteros entonces

1. Propiedad Clausurativa. $a+b,\ a\cdot b$ son números enteros
2. Propiedad Conmutativa. $a+b=b+a \quad ; \quad ab=ba$
3. Propiedad Asociativa. $(a+b)+c=a+(b+c) \quad ; \quad (ab)c=a(bc)$
4. Elementos Neutros.
   El número entero 0 satisface que $a+0=0+a=a$ para todo a en $\mathbb{Z}$.
   El número entero 1 satisface que $a\cdot 1=1\cdot a=a$ para todo a en $\mathbb{Z}$.
5. Existencia de Opuestos. Para todo a en $\mathbb{Z}$ existe $-a\in\mathbb{Z}$, tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$
6. Propiedad cancelativa., Si $a+c=b+c$ entonces $a=b$
   Si $ab=ac$ entonces $b=c$ si $a\neq 0$
7. Propiedad distributiva. $a(b+c)=ab+ac$

EJERCICIOS

1. ¿ Es la resta, división de enteros un entero?
2. Todo subconjunto de números enteros tiene un primer elemento?
3. Un número entero se dice par, si es de la forma $2k$ para algún entero k y es impar si es de la forma $2k+1$ para algún entero k.
   Demuestre que:
   i. La suma y producto de 2 enteros pares es par.
   ii. La suma de 2 enteros impares es par.
   iii. a^2 es par si y sólo sí a es par y a^2 es impar si y sólo sí a es impar.
   iv. si a es múltiplo de 3 entonces a^2 es múltiplo de 3.
4. Revise los conocimientos de divisibilidad, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, y primos relativos.

1.1.3. Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

En las actividades del hombre, una necesidad además de contar objetos, es medirlos; por ejemplo, establecer que tamaño (medida) tiene una cuerda o determinar que cantidad (medida) de agua tiene una cubeta, etc. Es evidente que para dar solución a cualquiera de estos problemas es necesario partir de un patrón, por ejemplo un metro para la longitud de la cuerda o un litro para la cantidad de agua en la cubeta. Una vez determinado este patrón se establecerá cuantos de estos patrones caben en el objeto a medir y es claro que generalmente el número de veces que este patrón cabe en dicho objeto no será siempre exacto, sobrará en algunos casos una parte que no alcanza a medir un metro o un litro, sino una fracción de él; es decir, se hace necesario recurrir a números no enteros que representen una parte de un entero, estos números junto con los enteros se llaman números racionales ($\mathbb{Q}$).
Los números racionales se representan en la forma p/q, con p y q enteros y $q \neq 0$, donde si p y q son positivos, q indica el número de partes en que se partió la unidad (patrón) y p el número de estos pedazos que se están tomando.
Por ejemplo el número $1/2$ indica que el patrón o unidad se dividió en dos partes (denominador) y de ella se tomó una (numerador); el número $7/3$ indica que la unidad se dividió en tres pedazos (denominador) y se tomaron siete pedazos con ese tamaño (numerador).
Así:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p,\ q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0\}$$

Con el objeto de caracterizar de otra forma los números Racionales, se analizará el cociente que resulta de efectuar la división entre el numerador y el denominador observando los siguientes ejemplos:

i. $\dfrac{602}{125} = 4,81600\ldots$ ii. $\dfrac{1}{3} = 0,333\ldots$

iii. $\dfrac{338}{99} = 3,41414141\ldots$ iv. $\dfrac{451}{12} = 37,58333\ldots$

v. $\dfrac{1}{7} = 0,142857\,142857142857\ldots$

Se puede apreciar, que a partir de algún número después de la coma (parte decimal), se empieza a repetir indefinidamente un bloque de números: El cero en el primer ejemplo; el 3 en el segundo; el 41 en el tercero, el 3 en el cuarto y el 142857 en el quinto. Lo anterior sucederá siempre que se realice la división entre el numerador y el denominador de un número racional. A estos bloques de números que se repiten se llama la parte periódica del número racional y se dice que un número racional siempre tiene una representación decimal periódica.
Recíprocamente, siempre que se tenga una representación decimal periódica, ésta representa un número racional, es decir, se puede expresar de la forma p/q, con $p,q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. En una representación de-cimal, después de la parte entera puede figurar una coma o un punto con el mismo significado.
El proceso para conseguir esta representación es un poco artificioso y se ilustrará con el siguiente ejemplo:
Sea $a = 32.273535\ldots$ una representación decimal periódica dada.
Primero se cuentan los dígitos que aparecen en la parte decimal hasta donde termina la primera parte periódica, en este caso cuatro, y se toma el número $10^4 a = 322735,3535\ldots,$ luego se toma el número a multiplicado por 10 elevado a la potencia que indique el número de dígitos que hay en la parte deci-

mal antes de empezar el bloque periódico, en este caso 2. Por último se hace la diferencia entre estos dos resultados así:

$$\begin{array}{lcl} 10^4\, a & = & 322735,3535\ldots \\ 10^2\, a & = & 3227,3535\ldots \\ \hline 10^4\, a - 10^2\, a & = & 319508 \end{array}$$

Luego $a\left(10^4 - 10^2\right) = 319508$, así que

$$a = \frac{319508}{10^4 - 10^2} = \frac{319508}{9900}$$

que es un número de la forma p/q, con $p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$

El lector ya se encuentra familiarizado con las operaciones entre números racionales y recordará que la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales es un número racional y que el cociente de dos números racionales es un número racional siempre y cuando el número racional por el que se divide no sea cero.
Por lo tanto si α y β son dos números racionales distintos, con $\alpha < \beta$, el número $(\alpha+\beta)/2$ es también otro número racional y además se encuentra entre ellos, es decir $\alpha < (\alpha+\beta)/2 < \beta$, pues en efecto: como $\alpha < \beta$, si se suma α a los dos lados de la desigualdad se tiene que $\alpha+\alpha < \beta+\alpha$, es decir, $2\alpha < \beta+\alpha$, y así $\alpha < (\alpha+\beta)/2$; en forma análoga si se suma β se tiene que $\alpha+\beta < 2\beta$, luego $(\alpha+\beta)/2 < \beta$; por lo tanto $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$. Esto demuestra que *entre dos números racionales dados, siempre habrá otro número racional*.
Además aplicando este resultado sucesivamente entre el número racional hallado y uno de los números racionales dados, se puede concluir que *entre dos números racionales, no importa que tan cerca esté el uno del otro, hay infinitos números racionales.* Esto lleva a afirmar que los números racionales se encuentran suficientemente "amontonados". Cabe entonces la pregunta ¿llenarán los números racionales completamente la recta?
Recuerde como se suman y se multiplican números racionales, tenga en cuenta las situaciones siguientes con $a,\ b,\ c,\ d$ enteros

1. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$; $a,b,c,$ enteros, $b\neq 0$
2. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$; $b,d\neq 0$
3. $\dfrac{a}{b}+c=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{1}=\dfrac{a+bc}{b}$; $b\neq 0$
4. $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{ab}{bc}$
5. $\dfrac{a}{b}\cdot c=\dfrac{ac}{b}$
6. $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bc}$

7. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{1} = \dfrac{a}{bc}$

8. $c \div \dfrac{a}{b} = \dfrac{cb}{a}$

Algunas Propiedades

1. Propiedad Clausurativa
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad \text{es un número racional}$$

2. Propiedad Conmutativa
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

3. Propiedad Asociativa
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right)$$
$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right)$$

4. Elemento Neutro.
El número racional 0 satisface que $0 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$

El número racional 1 satisface que $1 \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$

5. Propiedad invertiva
para cada número racional a/b se tiene que
$$\left(\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

6. Propiedad distributiva
$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$$

EJERCICIOS

1. Expresar en forma decimal periódica los siguientes números racionales.
i. $2/3$ ii. $5/4$ iii. $8/3$ iv. $209/700$ v. $1/23$

2. Expresar en la forma p/q las siguientes expresiones decimales periódicas.
i. $2,345345\ldots$ ii. $13,023491491\ldots$ iii. $0.285714285714\ldots$

3. Si p y q son números enteros con $p > q$, $q \neq 0$,
¿Cómo hallaría números enteros r, s tales que $p = sq + r$ ó $p/q = s + r/q$. Ilustrarlo con un ejemplo.

4. ¿Qué significa que un número racional de la forma p/q sea irreducible? Ilustrar con ejemplos.

5. Escribir en la forma irreducible los números $\dfrac{240}{330}, \quad \dfrac{315}{985}, \quad \dfrac{1020}{235}$

6. Mostrar que el entero 2 se puede escribir en la forma a/d, enteros, $d \neq 0$, de infinitas formas.

7. Halle un número racional entre cada una de las parejas siguientes:
   i. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{7}{4}$ ii. $\dfrac{9}{10}, \dfrac{11}{10}$ iii. $\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}$

8. Dado un número racional α, ¿Puede encontrar un número racional que sea inmediatamente anterior de α? Que sea el siguiente de α?

1.1.4. Números Irracionales ($\mathbb{Q}^*$)

No siempre que se hace una medida, el resultado de ello es un número racional, por ejemplo, si se trata de medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos miden uno, de acuerdo al *Teorema de Pitágoras,* esta medida será $\sqrt{2}$ y como se demostrará a continuación, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

La demostración de este hecho se hizo originalmente por medio del método de demostración conocido como *demostración por el absurdo*, el cual consiste en asumir que lo que se va a demostrar no es cierto, en este caso que $\sqrt{2}$ es racional, y llegar a una situación absurda como conclusión.
Así al suponer que $\sqrt{2}$ es racional entonces $\sqrt{2} = p/q$, que siempre se puede tomar en su forma irreducible (p/q es irreducible, si p y q no tienen divisores comunes), si se elevan al cuadrado ambos términos de la igualdad $\sqrt{2} = p/q$, se tiene que, $2 = p^2/q^2$ y de esto se tiene que $2q^2 = p^2$, lo que implica que p^2 es par (por qué?), de donde se deduce que p es par (por qué?), es decir $p = 2k$ para algún k natural. Así que $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$, (pues $p^2 = 2q^2$) luego $2k^2 = q^2$, lo que indica que q^2 es par, por tanto q es par. Es decir tanto p como q son números pares, lo que implica que tienen al 2 como divisor común, conclusión absurda, pues se supuso al comienzo que p/q era irreducible. Por tanto $\sqrt{2}$ no puede ser racional.
Pero no es solamente $\sqrt{2}$, sino también es posible demostrar que existen otros números que no son racionales, por ejemplo $\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 3\sqrt{2},\ \pi,\ \pi/2,$ entre otros.
A estos números que no son racionales, se les llama *Números Irracionales*, al conjunto de estos números se les notara con $\mathbb{Q}^*$ y se caracterizan porque su representación decimal no es periódica, por ejemplo:

$$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots \qquad \pi = 3,141592654\ldots$$

$$6,25225222522225\ldots \qquad 3,01020304050607080910011012\ldots$$

números que por más que se presenten con muchas cifras decimales, éstas nunca se repetirán en forma periódica.
De igual forma que los números racionales, los números irracionales se encuentran también *amontonados*, en el sentido de que entre dos números irracionales cualesquiera existen infinitos números irracionales. También es posible demostrar que entre dos números irracionales hay infinitos números racionales y entre dos números racionales existen infinitos números irracionales.
Esto último responde la pregunta que se dejó al terminar el tratamiento de los números racionales en el

sentido de que los números racionales no llenan completamente la recta, pues los números irracionales también ocupan espacios en esta recta. Lo que sí se puede afirmar ahora es que los números racionales $(\mathbb{Q})$ e irracionales $(\mathbb{Q}^*)$ la llenan completamente. El conjunto formado por la reunión de estos dos conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}^*$ se llama el conjunto de los *Números Reales* $(\mathbb{R})$ y la recta que llenan se conoce como *recta real*, o sea que a cada punto de la recta real corresponde un número real, y recíprocamente cada número real ocupa un puesto en dicha recta.

Así: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^* = \{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha \text{ no tiene representación decimal periódica}\}$.

EJERCICIOS

1. Dé ejemplos de números irracionales.

2. ¿Es la suma, resta, multiplicación y división de números irracionales un número irracional?

3. Dado un número irracional α, ¿Puede existir un número irracional que sea el siguiente de α?

4. ¿Qué clase de número es la suma de un número racional con uno irracional?

1.1.5. Números Reales $(\mathbb{R})$

Ya definido este conjunto numérico $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, es importante resaltar la necesidad de manipularlo correctamente, no solo adquiriendo habilidad en su operatividad, sino asimilando las propiedades que lo caracterizan con todo los detalles que se desprenden de ellas, pues estos números constituyen la base de la llamada "matemática continua" a la cual se dedicará la mayor parte de esta asignatura y de las demás de matemáticas que posteriormente cursarán en su carrera.
Es por todos conocido desde los estudios básicos de Matemáticas la manera como estos números pueden relacionarse entre sí mediante las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división, y las operaciones de potenciación y radicación, pero resulta necesario destacar algunos detalles de ellas que permitan un mejor conocimiento de la estructura de estos números.

1.2. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BÁSICAS

1.2.1. Propiedad Clausurativa

La suma y el producto de números Reales siempre da como resultado un número real.
Es claro que la resta y el cociente (salvo una situación particular) de números reales también da un número real, pero estas dos operaciones como se podrá apreciar más adelante en las propiedades 1.2.5 y 1.2.6 se consideran como casos particulares de la suma y el producto respectivamente, razón por la cual no se hará mención de ellas por separado.

1.2.2. Propiedad Conmutativa

El orden en que se suman o multiplican dos números reales no afecta el resultado. Es decir si $a\,,b$ son números reales:

$$a+b=b+a \quad y \quad ab=ba$$

1.2.3. Propiedad Asociativa

Dados tres o más números reales, para sumarlos o multiplicarlos, se pueden asociar en grupos de dos como se desee y el resultado no cambia, es decir si a,b,c son números reales.

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{y} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

donde con el paréntesis se indica que primero se realizan las operaciones allí planteadas y en su lugar se coloca el resultado.

1.2.4. Propiedad Modulativa

Esta propiedad para el caso de la suma expresa simplemente el conocido hecho que si a un número se le suma el cero este número no varía, es decir no se le está adicionando nada nuevo. Lo que indica que el cero es un número real especial llamado *módulo* o *elemento neutro* para la suma que satisface, que para todo número real a

$$a+0=a \quad y \quad 0+a=a$$

Para el caso de la multiplicación recuérdese que al multiplicar un número real b por un número natural n su resultado nb representa la suma de "*n veces*" el número b. Por tanto si se multiplica un número real b por 1 su resultado es considerar la suma del número b una sola vez, lo que nos da el mismo b. Esto indica que el uno es un número real especial que no afecta a cualquier número que se multiplique por él. El "1" es llamado *módulo o elemento neutro para el producto*, y satisface que para todo número real b:

$$b\cdot 1=b \quad \text{y} \quad 1\cdot b=b$$

1.2.5. Propiedad Invertiva para la suma

Del concepto de resta de números reales resulta claro que $a-a=0$. Esto se puede representar como la suma de dos números reales, el número a y el número $(-a)$, y se puede expresar diciendo que dado un número real a siempre existirá otro número real notado $(-a)$ tal que:

$$a+(-a)=0 \quad y \quad (-a)+a=0$$

A ese número $(-a)$ se le llama *el inverso aditivo de a.* Esta propiedad permite que en general la resta de números reales se pueda considerar como una suma, ya que si se tiene $a-b$ esto es equivalente a $a+(-b)$, siendo $(-b)$ el inverso aditivo de b.
Obsérvese que el inverso aditivo de 5 es -5 , y que el inverso aditivo de -3 es $-(-3)=3$, o sea que el inverso aditivo de un número positivo es negativo, y el de un negativo es positivo. Por tanto si b es un número real (no se sabe si positivo, negativo o cero), $-b$ no necesariamente es negativo, pues lo será cuando b es positivo, pero $-b$ será positivo si b es negativo, y será cero sí $b=0$.

1.2.6. Propiedad Invertiva para el producto

Antes de enunciar la propiedad invertiva para el producto es necesario aclarar algunos aspectos sobre división de números reales.
Del concepto de producto de números naturales se desprende que si n es un número natural $(0 \cdot n)$ tendría que ser igual a cero, ya que esta expresión representaría sumar n veces el número cero, lo que daría cero.
Generalizando a números reales se tiene que si b es un número real cualquiera.

$$b \cdot 0 = 0 \quad \text{y} \quad 0 \cdot b = 0$$

Por otro lado la definición de cociente o división de dos números reales expresa que,
$a\,/\,b\, =\, c$ equivale a decir que $a = cb$ con la salvedad de que $b \neq 0$, pues en el caso en que $b = 0$ y $a \neq 0$, $\quad a\,/\,0\, =\, c\, \Leftrightarrow\, a\, =\, 0 \cdot c$ lo que resulta absurdo de acuerdo a lo que se acaba de plantear
Ahora si $b = 0$ y $a = 0$ entonces $0\,/\,0 = c$ equivale a decir que $0 = 0 \cdot c$ lo cual es correcto, pero ese último resultado se puede obtener para cualquier valor real de c lo que implicaría que $0/0$ es igual a cualquier número real, que no es precisamente lo que se espera cuando se define una operación entre dos números, pues es imperativo que el resultado sea único.
En resumen la división de cualquier número real entre cero no existe; pero "0" si puede ser dividido por cualquier número real diferente de "0" y su resultado es cero, ya que para $c \neq 0$

$0/c\, =\, 0$ equivale a $0 = 0 \cdot c$, por consiguiente $a/0$ no existe para cualquier a real y $0/c = 0$ para todo $c \neq 0$.

De este concepto de división resulta obvio que si c es un número real $c \neq 0$ entonces $c/c = 1$, pues esto es equivalente a decir que $c = 1 \cdot c$ que se tiene por ser "1" el módulo para el producto.
La propiedad invertiva para el producto afirma que para todo número real $a \neq 0$ existe otro número real notado a^{-1} que satisface:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad a^{-1} \cdot a = 1$$

este número a^{-1} se llama *inverso multiplicativo de a.*
Usualmente la expresión $a \cdot b^{-1} = c$ se representa por $a/b = c$ pues $a/b = c$ equivale a $a = cb$ es decir $a\ (1/b) = c$ equivale a $a = cb$.
Y por otro lado $a.b^{-1} = c$ equivale a $a \cdot b^{-1} b = cb$ lo que equivale $a1 = cb$ que es equivalente a $a = cb$

Esto indica que el número b^{-1} es el mismo número $1/b$ y que la división de dos números reales a/b con $b \neq 0$ se puede considerar como la multiplicación de a por b^{-1} o sea $a/b = a(1/b) = ab^{-1}$ si $b \neq 0$

1.2.7. Propiedad Distributiva

De acuerdo al concepto de producto de un número natural por un número real, si a,b son reales y n es natural entonces

$$\begin{aligned} na &= a + a + \ldots + a \quad \text{n veces} \\ nb &= b + b + \ldots + b \quad \text{n veces} \\ na + nb &= \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{n\,veces} + \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{n\,veces} \\ &= (a+b) + (a+b) + (a+b) + \ldots + (a+b) \quad \text{(n veces)} \\ &= n\,(a+b) \end{aligned}$$

Es decir

$$n\,(a+b) = na + nb$$

Al generalizar esta propiedad si se considera en lugar de n cualquier número real se tiene la llamada propiedad distributiva del producto respecto a la suma, de gran utilidad en procesos de factorización que se tratarán más adelante.

Si a, b, c son números reales entonces.

$$c\,(a+b) = ca + cb$$

1.2.8. Otras Propiedades

Las propiedades 1.2.1 a 1.2.7 son consideradas las propiedades fundamentales de los números reales relacionadas con las operaciones elementales, (estas propiedades se conocen con el nombre de “axio-mas de cuerpo de los números reales”) debido a que cualquier otra propiedad de los reales que tenga que ver con relaciones entre ellos a través de estas operaciones, es necesariamente deducible de las propiedades iniciales.
A manera de ejemplo se ilustrarán algunos resultados cuya frecuente aplicación amerita resaltarlos:

Propiedad Cancelativa

Para la suma: Si $a + b = c + b$ entonces $a = c$

En efecto si a los dos lados de la igualdad $a + b = c + b$ se suma el número real $(-b)$ (inverso aditivo de b) se tiene que.

$$\begin{aligned} (a+b)+(-b) &= (c+b)+(-b) \\ a+(b+(-b)) &= c+(b+(-b)) \\ a+0 &= c+0 \\ a &= c \end{aligned}$$

Para el producto: Si $ab = cb$ y $b \neq 0$ entonces $a = c$

En este caso los dos lados de la igualdad se multiplican por b^{-1} (el inverso multiplicativo de b) y así:

$$\begin{aligned}(ab)\left(b^{-1}\right) &= (cb)\left(b^{-1}\right)\\ a\left(bb^{-1}\right) &= c\left(bb^{-1}\right)\\ a1 &= c1\\ a &= c\end{aligned}$$

Propiedad Involutiva

Del concepto de inversos aditivos y multiplicativos resulta obvio que:

$$-(-a) = a \quad \text{y} \quad \left(a^{-1}\right)^{-1} = a \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

Inverso de productos

Las conocidas como "reglas de los signos" que establecen que el producto de dos números negativos es positivo y que el producto de un negativo por un positivo es negativo son deducibles también de estas propiedades iniciales.

i. $(-a)\,(b) = -\,(a\cdot b)$

tomando $(-a)\,(b) + (a\cdot b) = (-a+a)\cdot b = 0\cdot b = 0$

entonces $(-a)\,(b) + a\cdot b = 0$ de donde sumando $-\,(ab)$ a ambos lados se tiene:

$$\begin{aligned}(-a)(b)+a\cdot b+(-(a\cdot b)) &= -(a\cdot b)\\ (-a)(b)+0 &= -(a\cdot b)\\ (-a)(b) &= -(a\cdot b)\end{aligned}$$

ii. $(-a)\,(-b) = a\cdot b$

En forma análoga, como

$$\begin{aligned}(-a)(-b)+(-(a\cdot b)) &= (-a)(-b)+(-a)(b) \quad \text{pues} \quad -(ab) = (-a)(b)\\ &= -a(-b+b)\\ &= -a0\\ &= 0\end{aligned}$$

entonces $(-a)\,(-b) + (-\,(a\cdot b)) = 0$ de donde sumando ab a ambos lados se tiene:

$$\begin{aligned}(-a)(-b)+-(a.b)+(a\cdot b) &= a\cdot b\\ (-a)(-b)+0 &= a\cdot b\\ (-a)(-b) &= a\cdot b\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $a^2 \geq 0$ para todo a (por qué?)

Para el caso del producto se tiene:

iii. $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

En efecto

$$\begin{aligned}(a^{-1}b^{-1})(a \cdot b) &= (b^{-1}a^{-1})(a \cdot b)\\ &= b^{-1}(a^{-1}a)b\\ &= b^{-1}1b\\ &= b^{-1}b\\ &= 1\end{aligned}$$

entonces $\left(a^{-1}\, b^{-1}\right)\,(a \cdot b) = 1$ de donde multiplicando por $(a b)^{-1}$ a ambos lados se tiene:

$$\begin{aligned}\left(a^{-1}b^{-1}\right)(a \cdot b)(a \cdot b)^{-1} &= (a \cdot b)^{-1}\\ (a^{-1}b^{-1})\left[(a \cdot b)(a \cdot b)^{-1}\right] &= (a \cdot b)^{-1}\\ (a^{-1}b^{-1})(1) &= (a \cdot b)^{-1}\\ a^{-1}b^{-1} &= (a \cdot b)^{-1}\end{aligned}$$

No existencia de divisores de cero

Si $\quad a \cdot b = 0 \quad$ entonces $\quad a = 0 \quad$ ó $\quad b = 0$

Esta propiedad establece que siempre que aparezca el producto de dos o más números reales igual a cero necesariamente alguno de ellos debe ser igual a cero.
En otras palabras el producto de sólo números diferentes de cero nunca puede dar cero.

En efecto

Sea $\quad a \cdot b = 0 \quad$ y suponga que $\quad b \neq 0$,

Entonces existe b^{-1}, por tanto

$$\begin{aligned}(a \cdot b)\left(b^{-1}\right) &= 0b^{-1}\\ a\left(b \cdot b^{-1}\right) &= 0\\ a1 &= 0 \quad \text{por tanto} \quad a = 0\end{aligned}$$

Lo que concluye que si $b \neq 0$ entonces $a = 0$ y análogamente si se supone que $a \neq 0$ se concluirá que $b = 0$.

Inversos de sumas

El inverso aditivo de una suma de números reales es la suma de sus correspondientes inversos aditivos, es decir: Si a, b son números reales

$$\begin{aligned}
-(a+b) &= (-a)+(-b) = -a-b \\
\text{pues} \qquad (-a)+(-b)+(a+b) &= (-a+a)+(-b+b) \\
&= 0+0 = 0 \\
\text{entonces} \quad (-a)+(-b)+(a+b) &= 0 \quad \text{luego} \\
(-a)+(-b)+(a+b)-(a+b) &= -(a+b) \\
(-a)+(-b)+[(a+b)-(a+b)] &= -(a+b) \\
(-a)+(-b)+0 &= -(a+b) \\
(-a)+(-b) &= -(a+b)
\end{aligned}$$

Vale la pena tener en cuenta que esta propiedad no se satisface para el producto, en el sentido de que no es cierto que $(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$ es decir:

$$(a+b)^{-1} \neq a^{-1}+b^{-1}$$

pues por ejemplo si $a=1$ y $b=2$

$$(a+b)^{-1} = (1+2)^{-1} = (3)^{-1} = 1/3 \quad \text{pero por otro lado}$$

$$a^{-1}+b^{-1} = 1^{-1}+2^{-1} = 1+1/2 = 3/2$$

que son diferentes.

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de x tal que;

   a) $2x = 6$

   b) $2x+7 = 8x-10$

   c) $5x+\dfrac{2}{4}x = 30-2x$

   d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{6x+2}{3}$

   e) $\sqrt{7}x - \sqrt{5} = \sqrt{3}x$

   f) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}(x+5) = 6$

   g) $\dfrac{9(x-2)}{4} - \dfrac{7(x-1)}{3} = 6x+1$

2. Ilustrar con ejemplos todas las propiedades de las operaciones de números reales.

3. Cuál es el inverso multiplicativo y el inverso aditivo de cada uno de los siguientes números.
   $2,\quad 3/4,\quad 1/\sqrt{2},\quad 0,\quad -\sqrt{7},\quad 2\sqrt{3},\quad \sqrt{2}+\sqrt{5}$

4. Es verdadera alguna de las siguientes propiedades:

   $a \div (b+c) = (a \div b) + (a \div c)$

   $(a+b) \div c = (a \div c) + (b \div c)$

5. Efectuar la operación indicada

   a) $-2\,(3\,(4-2)+6) + 5\,(-2\,(-3+8)+9)$

   b) $-6\,(3\,(7+6)-4\,(3-8)) - 4\,((7-5)\,2-16)$

   c) $25-12-3+16-10$ (depende del orden que se efectúen?)

   d) $120 \div 4 \div 6 \div 5$ (depende del orden en que se efectúen?)

   e) $26-(3)\,(5) + 7 + (4)\,(6)$ (depende del orden en que se efectúen?)

6. $-\dfrac{a}{b}$ es igual a:

   i. $\dfrac{-a}{b}$?

   ii. $\dfrac{a}{-b}$?

   iii. $\dfrac{-a}{-b}$?

   Explique la respuesta.

7. Justificar la igualdad:

   i. $\left(\dfrac{bc}{d}\right) = b\left(\dfrac{ac}{d}\right)$

   ii. $\dfrac{ab}{cd} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{ab}{c}\right)$

   iii. $\dfrac{a}{a+b} = 1 + \dfrac{a}{b}$

   iv. $\dfrac{a+b}{-c} = -\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{-a}$

   v. $\dfrac{-ab}{c} = -\dfrac{a}{c}(b)$

   vi. $\dfrac{-ab}{c} = \left(\dfrac{-a}{c}\right)\left(-\dfrac{b}{c}\right)$

   $$\begin{aligned}\frac{-ab}{c} &= \frac{a}{c} - \left(\frac{b}{c}\right)\\ &= (-ab)\left(\frac{1}{c}\right)\\ &= (ab)\left(-\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

8. Simplificar

   a) $-(a-(-a+(a-b)-(-b+a)-3(-a-b)))$
   b) $(-x+y)-\{4x+2y+[-x-y-(x+y)]\}$
   c) $x^2-\left\{-7xy+\left[-y^2+\left(-x^2+3xy-2y^2\right)\right]\right\}$
   d) $-[x+\{-(x+y)-[-x+(y-z)-(-x+y)]-y\}]$
   e) $-[-a+\{-a+(a-b)-(a-b+c)-[-(-a)+b]\}]$

1.3. PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES Y RADICALES

1.3.1. Caso particular: base real y exponente natural

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define a^n como:

$$a^n = a \cdot a \ldots a \quad \text{(n veces)}$$

así $(-2)^3 = (-2)\,(-2)\,(-2) = -8$

$(3/7)^5 = (3/7)\,(3/7)\,(3/7)\,(3/7)\,(3/7) = 243/\,16807$

Propiedades

a) $a^n a^m = a^{n+m}$

pues $a^n a^m = \underbrace{a\ldots a}_{n\,veces}\underbrace{a\ldots a}_{m\,veces} = \underbrace{a\ldots a}_{(n+m)\,veces} = a^{n+m}$

así $3^8\,3^{15} = 3^{23}$ $\quad (2/7)^4\,(2/7)^6 = (2/7)^{10}$ $\quad \left(\sqrt{7}\right)^5\left(\sqrt{7}\right)^{21} = \left(\sqrt{7}\right)^{26}$

b) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$

pues $(a\,b)^n = \underbrace{(ab)\,(a\,b)\ldots(a\,b)}_{n\,veces}$

$$= \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\,veces}\,\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{n\,veces} = a^n\,b^n$$

así $[(3)\,(7/5)]^4 = (3)^4\,(7/5)^4$ $\quad [(-2/3)\,(\pi/11)]^{21} = (-2/3)^{21}\,(\pi/11)^{21}$

c) $(a/c)^n = a^n/c^n$ si $c \neq 0$

se obtiene de (b) para $b = 1/c$

Así $(7/3)^{11} = 7^{11}/3^{11}$

$(-2/5)^7 = (-1)^7\,2^7/5^7 = (-2)^7/5^7 = 2^7/(-5)^7$

d) $(a^n)^m = a^{nm}$

$$\begin{aligned}
\text{pues}\quad (a^n)^m &= \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{m\,veces} \\
&= \underbrace{\underbrace{(a\cdot a\ldots a)}_{n\,veces}\,\underbrace{(a.a\ldots a)}_{n\,veces}\ldots\underbrace{(a\cdot a\ldots a)}_{n\,veces}}_{m\,veces} \\
&= \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\cdot m\,veces} \\
&= a^{nm}
\end{aligned}$$

así $\left[\left(3\sqrt{2}\right)^2\right]^3 = \left(3\sqrt{2}\right)^6 \qquad \left(\left[-\dfrac{3}{5^3\sqrt{2+\pi}}\right]^3\right)^8 = \left(-\dfrac{3}{5^3\sqrt{2+\pi}}\right)^{24}$

1.3.2. Caso General

Si se pretende trabajar con a^b siendo a y b números reales, no se puede decir simplemente que $a^b = a\ldots a$ (b veces), pues si este b es por ejemplo el número $3/4$ ó $\sqrt{2}$ ó 0.375291, no tiene el mismo sentido decir que a se repite ese número b de veces, que cuando ese b es un número natural.

La definición de a^b para a y b reales se hará más adelante, pues para concretarla se requiere de conocimientos no adquiridos todavía. Sin embargo en el trabajo que se pretende hacer con álgebra, aparecerán con cierta frecuencia expresiones de este tipo. Para manipularlas se debe asumir que las propiedades planteadas para el caso particular, a número real y n número natural, se satisfacen para el caso general, así no se asimile aún el significado total de estas expresiones. Aceptando este hecho es posible dar interpretación para otros casos particulares:

a) $a^{-n} = 1/a^n$ si n es natural

pues $a^{-n} = a^{(-1)(n)} = \left(a^{-1}\right)^n = (1/a)^n = \underbrace{(1/a)\,(1/a)\ldots(1/a)}_{n\,veces} = 1/a^n$

así $3^{-7} = 1/3^7; \qquad \left(-2\big/\sqrt{5}\right)^{-3} = 1\Big/\left(-2\big/\sqrt{5}\right)^3$

b) Asumiendo esta interpretación para a^{-n} se puede generalizar la propiedad (a) del caso particular dado anteriormente así:

$$\left(a^n/a^m\right) = a^{n-m}$$

si n, m son números naturales a cualquier real $a \neq 0$

pues $\left(a^n/a^m\right) = a^n \cdot 1/a^m = a^n a^{-m} = a^{n-m}$

así $2^7/2^5 = 2^{7-5} = 2^2; \quad (-2)^2\Big/(-2)^6 = (-2)^{2-6} = (-2)^{-4}$

c) $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$

pues $1 = a^n/a^n = a^{n-n} = a^0$

así $7^0 = 1 \qquad (-8)^0 = 1 \qquad (\pi)^0 = 1$

d) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
para a > 0 si n es par y para todo $a \in \mathbb{R}$ si n impar.
Para comprender esta propiedad es necesario resaltar algunos aspectos relacionados con el concepto de raíz $n-$ésima de un número real.
Se ha definido $\quad y = \sqrt[n]{x} \quad$ si y solo si $\quad y^n = x$

así $\quad 4 = \sqrt[3]{64} \quad$ pues $\quad 4^3 = 64$
$\quad -2 = \sqrt[5]{-32} \quad$ pues $\quad (-2)^5 = -32$

Observe que por ejemplo, como $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$ entonces 2 y -2 son raíces cuadradas de 4.
Si se quiere hacer referencia a las dos raíces se nota $\pm\sqrt{4}$; si es solamente a la raíz 2 se escribe $\sqrt{4}$ ó $+\sqrt{4}$ y si es a la raíz -2 se nota $-\sqrt{4}$
De esta definición se puede apreciar que si a es un número negativo, por ejemplo $a = -9$ entonces si $\sqrt{-9} = b$ se tiene que $b^2 = -9$, lo cual es un absurdo pues todo número elevado al cuadrado debe ser mayor o igual a cero. (ver propiedad de los números reales). Lo mismo sucede por ejemplo si se trata de hallar la raíz cuarta de -13, $\sqrt[4]{-13} = c$ equivale a $c^4 = -13$, lo que es absurdo pues $c^4 \geq 0$ para todo c.
De este hecho se concluye que el cálculo de raíces n – ésimas con n un número par deba restringirse al caso en que la cantidad subradical sea positiva es decir:
Si n es par $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido si y sólo si $a \geq 0$
Obsérvese que para n impar no se presenta este inconveniente, por tanto $\sqrt{a}$ tiene sentido para todo a si n impar.
Volviendo a la propiedad $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, por lo dicho anteriormente, esta interpretación sólo tendrá sentido para valores de $a > 0$ en el caso que n sea par y lo tendrá para todo $a \in \mathbb{R}$ si n impar.
Esta interpretación surge de la definición de $\sqrt[n]{a}$, pues
$a = a^1 = a^{n/n} = \left(a^{1/n}\right)^n$
pero $a = \alpha^n$ equivale a decir $\sqrt[n]{a} = \alpha$
luego para $\alpha = a^{1/n}$
$a = (a^{1/n})^n$ equivale a decir $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
así por ejemplo
$(-3)^{1/7} = \sqrt[7]{-3} \qquad (-32)^{1/4}$ no tiene sentido.
$(2527)^{1/4} = \sqrt[4]{2527}$

e) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
para $a > 0$, si n es par y para todo $a \in \mathbb{R}$ si n es impar, en efecto
$a^{m/n} = a^{(1/n).m.} = \left(a^{1/n}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ ó
$a^{m/n} = a^{(1/n).m} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$
así por ejemplo
$8^{6/7} = \sqrt[7]{8^6} = \left(\sqrt[7]{8}\right)^6 \qquad (-3)^{7/2}$ no tiene sentido
$(2530)^{4/3} = \sqrt[3]{(2530)^4} = \left(\sqrt[3]{2530}\right)^4$

f) Con la interpretación de los exponentes racionales como radicales dados en (d) y (e), y aplicando adecuadamente las propiedades de los exponentes, resultan obvias las siguientes propiedades para todo n: con $a > 0$ y $b > 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n} &= a \\ \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[mn]{a} \end{aligned}$$

así por ejemplo

$$\sqrt[3]{2^3} = 2 \qquad \sqrt[6]{(9)\,(15)} = \sqrt[6]{9}\,\sqrt[6]{15} \qquad \sqrt[4]{\sqrt[2]{9}} = \sqrt[8]{9}$$

EJERCICIOS

1. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? Justificarlo con ejemplos.

2. Simplificar

   i. $\dfrac{75}{15}\,\dfrac{a^{-11}\cdot b^{-16}\cdot c^{-22}\,b\,c^2}{a^{-12}\,b^{-15}\,c^{-20}\,a}$

   ii. $\sqrt{81x^8y^4}$

   iii. $\dfrac{a^3\cdot\sqrt[4]{ab}\,\sqrt{ab}\,b^3}{\sqrt[5]{a^2\,b^4}\;a^{-1/2}\,b^{3/2}}$

   iv. $\sqrt[3]{625}$

   v. $\sqrt[10]{x^{70}\,y^{20}\,z^{30}}$

   vi. $\dfrac{\left(2^3\right)\,\left(3^2\right)\,\left(4^4\right)\,\left(27^3\right)\,\left(25^2\right)}{\left(8^2\right)\,\left(9^2\right)\,\left(5^4\right)}$

3. Efectúe las operaciones dadas

   i. $\left(4x^{5/2} - 2x^{-3/2}\right)\,x^{3/2}$

   ii. $\left(x^{-5/2} + y^{3/2}\right)\left(x^{-5/2} - y^{3/2}\right)$

   iii. $\left(x^2y + x^{-2}y^{-3}\right)\,\left(2x^{-2}y^2 + xy^2\right)$

   iv. $\dfrac{(-2)^3\,(2)^4\,(-3)^5\,(3)^6}{(8)\,(9)\,(27)}$

   v. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\,\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

   vi. $2\sqrt{700} - 15\sqrt{1/45} + 4\sqrt{5/16} - 56\sqrt{1/7}$

   vii. $7\sqrt{450} - 4\sqrt{320} + 3\sqrt{80} - 5\sqrt{800}$

viii. $\dfrac{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{a^{-2}}}}a^{8/5}b$

ix. $\left(\dfrac{a+b}{c-d}\right)^3\left(\dfrac{1}{a+b}\right)^2\left(\dfrac{c-d}{a+b}\right)^4$

x. $3\sqrt[3]{108}+\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{625}+\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{1715}-4\sqrt[3]{32}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{5}$

xi. $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+(2a-2b)\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$

xii. $\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}$

xiii. $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{a^2}\sqrt[n+1]{a^{-1}}}\right)^{n^2-1}$

xiv. $\left(x^{2/3}+2^{1/3}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4}\right)$

1.4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El álgebra se puede mirar como la generalización de la aritmética en la medida que permite formular propiedades de los números observados en casos particulares, para todos los elementos de un conjunto numérico. Por ejemplo, la suma y la multiplicación de números enteros permiten establecer que:

$$4+2=2+4 \qquad 7+3=3+7 \qquad 6\cdot 5=5\cdot 6$$

Algebraicamente esta propiedad se generaliza así:

Si m y n son números enteros, entonces se satisface que:

$$m+n=n+m \qquad m\cdot n=n\cdot m$$

La generalización anterior se establece haciendo uso de unos símbolos llamados variables que representan elementos arbitrarios de un conjunto numérico sin especificar ningún número en particular; y otros símbolos llamados constantes que representan elementos específicos o fijos de ese conjunto numérico, y haciendo uso también de las operaciones definidas en el conjunto.
Generalmente se utilizan las primeras letras del alfabeto a,b,c, etc, para simbolizar constantes y sus últimas letras *t, u, v, x, y, z* para simbolizar variables. También se acostumbra a representar tanto constantes como variables con letras sub-indizadas o super-indizadas, o con alfabeto griego especificando de antemano cuales son constantes y cuales variables, por ejemplo: x_1, x_2, y^1, z^3, α, β, δ.

Si se establece una colección de variables y constantes, y se aplican operaciones (suma, resta, multiplicación, división, etc) a los elementos de esa colección, se obtiene una *expresión algebraica*. Por ejemplo para la colección de variables y constantes:

$$\{x,\ y,\ z,\ w,\ 2,\ 4,\ 5,\ \pi,\ a,\ b\}$$

éstas son algunas expresiones algebraicas:

$$x^2 - y^2 + \frac{\pi \cdot w}{a \cdot z} \qquad \sqrt{\frac{5w+z}{ax+by}} \qquad \left(\frac{\sqrt{xy}}{bz} + \frac{w^2}{4\pi}\right)^a$$

Se supone que en las expresiones algebraicas las variables representan elementos de conjuntos que hacen que la expresión algebraica esté bien definida, es decir, no se presentan denominadores nulos, radicales con índice par y subradical negativo o logaritmos de números negativos. Así en la primera expresión algebraica dada arriba, se supone $a \neq 0$, $z \neq 0$, en la segunda expresión se supone $(5w+z)/(ax+by) \geq 0$, lo mismo que $ax+by \neq 0$, y en la tercera expresión se supone $bz \neq 0$, $yx \geq 0$, y tanto la base como el exponente no simultáneamente iguales a cero. En este repaso de álgebra se requiere particularmente recordar la simplificación de expresiones algebraicas.

Si las variables y las constantes en las expresiones algebraicas representan números reales y las operaciones están bien definidas, entonces las expresiones algebraicas también representan números reales y por consiguiente para la simplificación se pueden utilizar las propiedades de las operaciones fundamentales de los números reales, las propiedades de los exponentes, radicales y fracciones, y los llamados *productos notables, procesos de factorización y de racionalización.*

1.4.1. Productos Notables

1. Para realizar la multiplicación $(x+y)\,(x-y)$ se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación de números reales sobre la suma de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= (x+y)x - (x+y)y \\ &= x^2 + xy - xy - y^2 = x^2 - y^2\end{aligned}$$

es decir:

$$\boldsymbol{(x+y)\,(x-y) = x^2 - y^2}$$

resultado que se sintetiza por: *suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados*.

Ejemplos:

i. $\left(y^2 - 3y\right)\,\left(y^2 + 3y\right) = y^4 - 9y^2$

ii. $\left(a^{x+1} - 2b^{x-1}\right)\,\left(a^{x+1} + 2b^{x-1}\right) = \left(a^{x+1}\right)^2 - \left(2b^{x-1}\right)^2 = a^{2x+2} - 4b^{2x-2}$

iii. $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)\,\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}\right) = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{4}$

iv. $\left(a^2 + 3 - 2a\right)\,\left(a^2 + 3 + 2a\right) = \left(a^2 + 3\right)^2 - (2a)^2$

v. $\left(x^5 - y^5\right)\,\left(x^5 + y^5\right)\,\left(x^{10} + y^{10}\right) = \left(x^{10} - y^{10}\right)\,\left(x^{10} + y^{10}\right) = \left(x^{20} - y^{20}\right)$

2. Al utilizar nuevamente la propiedad distributiva de la multiplicación de números reales; para

realizar el producto $(x+a)\ (x+b)$ se sigue el procedimiento:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= (x+a)x+(x+a)b\\ &= x^2+ax+bx+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

es decir:

$$\boldsymbol{(x+a)\,(x+b) = x^2+(a+b)\,x+(ab)}$$

obteniéndose un polinomio de segundo grado en el que se observa que el coeficiente de x (constante que acompaña a x) es la suma $a+b$ y el término independiente es el producto ab.

Ejemplos:

i. $(x+3)\ (x+4)\ =\ x^2+(3+4)\,x+(3)\,(4)\ =\ x^2+7x+12$

ii. $(x-10/7)(x+5/2) = x^2+(-10/7+5/2)x+(-10/7)(5/2) = x^2+(15/14)x-25/7$

3. También a partir de la propiedad distributiva se tiene:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = (x+y)x+(x+y)y\\ &= x^2+xy+xy+y^2\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

Es decir:

$$\boldsymbol{(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2}$$

En forma análoga se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2}\\ &\boldsymbol{(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}.\\ &\boldsymbol{(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}.\end{aligned}$$

Ejemplos:

i. $\left(2x^2+3y\right)^2 = \left(2x^2\right)^2+2\left(2x^2\right)(3y)+(3y)^2$
$\quad = 4x^4+12x^2y+9y^2$

ii. $\left(x^{a+1}-2x^{a-2}\right)^2 = \left(x^{a+1}\right)^2-2\left(x^{a+1}\right)\left(2x^{a-2}\right)+\left(2x^{a-2}\right)^2$
$\quad = x^{2a+2}-4x^{2a-1}+4x^{2a-4}$

iii. $\left(\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2\sqrt[3]{2}\,2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2$
$\quad = \sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}\,\sqrt{2}+8$

iv. $$\begin{aligned}\left(2x^2-3y^2+2c\right)^2 &= \left(2x^2-3y^2\right)^2+2\left(2x^2-3y^2\right)(2c)+(2c)^2\\ &= \left(2x^2\right)^2-2\left(2x^2\right)\left(3y^2\right)+\left(3y^2\right)^2+2\left(2x^2-3y^2\right)(2c)+(2c)^2\\ &= 4x^4-12x^2y^2+9y^4+8x^2c-12y^2c+4c^2\end{aligned}$$

v. $$\begin{aligned}\left(2xy^2-a^2b\right)^3 &= \left(2xy^2\right)^3-3\left(2xy^2\right)^2\left(a^2b\right)+3\left(2xy^2\right)\left(a^2b\right)^2-\left(a^2b\right)^3\\ &= 8x^3y^6-12x^2y^4a^2b+6xy^2a^4b^2-a^6b^3\end{aligned}$$

vi. $$\begin{aligned}\left(2\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^3 &= \left(2\sqrt[4]{3}\right)^3+3\left(2\sqrt[4]{3}\right)^2\left(\sqrt[3]{2}\right)+3\left(2\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\\ &= 8\sqrt[4]{27}+12\sqrt[4]{9}\sqrt[3]{2}+6\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{4}+2\end{aligned}$$

4. Al realizar la multiplicación $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}(x-y)(x^2+xy+y^2) &= (x-y)x^2+(x-y)xy+(x-y)y^2\\ &= x^3-yx^2+x^2y-xy^2+xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3\end{aligned}$$

En resumen:

$$\boldsymbol{(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3}$$

Similarmente:

$$\boldsymbol{(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3}$$

Ejemplos:

i. $\left(a^2-b^3\right)\left(a^4+a^2b^3+b^6\right) = \left(a^2\right)^3-\left(b^3\right)^3 = a^6-b^9$

ii. $\left(a^3+b\right)\left(a^6-a^3b+b^2\right) = \left(a^3\right)^3+b^3 = a^9+b^3$

iii. $\left(1+5^{2/3}\right)\left(1-5^{2/3}+5^{4/3}\right) = \left(1+5^2\right)$

EJERCICIOS

Utilice los productos notables estudiados para hallar en cada expresión dada otra equivalente a ella.

1. $\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}\right)$
2. $\left(a^m-b^n\right)\left(a^m+b^n\right)$
3. $(x+y+1)\,(x-y-1)$
4. $\left(2^x-3^x\right)\left(2^x+3^x\right)$
5. $\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)\left(x^4+y^4\right)$
6. $\left(2y^{2/5}-3x^2\right)\left(2y^{2/5}+3x^2\right)$

7. $\left(3a^3 + 2b^4\right)^2$
8. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2$
9. $\left(3a^x + 2b^2\right)^3$
10. $\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{3}\right)^3$
11. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4}\right)^3$
12. $\left(3\sqrt{2} - 5\sqrt[3]{3}\right)^3$
13. $\left(2abc - \sqrt{abc}\right)^3$
14. $\left(2^{1/3} - 1\right)\left(2^{2/3} + 2^{1/3} + 1\right)$
15. $\left(4^{4/3} - 2^{2/3}\right)\left(4^{8/3} + 4^{4/3}.2^{2/3} + 2^{4/3}\right)$
16. $(1 + a)\left(1 - a + a^2\right)$
17. $(3a - 5b)\left(9a^2 + 15ab + 25b^2\right)$

1.4.2. Factorización

Factorizar una expresión algebraica, presentada como una suma, es escribirla o presentarla como multiplicación de varios factores:

1. **Reducción de términos semejantes.**

   Una de las expresiones más sencillas de factorizar es: $ax+bx+cx$, en la cual cada uno de los términos tiene a x como factor. En este caso al utilizar la propiedad distributiva de los números reales se obtiene:

   $$\boldsymbol{ax+bx+cx=(a+b+c)x}$$

   Ejemplos:

   a) $$\begin{aligned} 2x^2y + 3x^2y - 6x^2y &= (2+3-6)\,x^2y \\ &= -x^2y \end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned} a^2 + a - ab - b &= a\,(a+1) - b\,(a+1) \\ &= (a+1)\,(a-b) \end{aligned}$$

   c) $$\begin{aligned} a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2 &= x^2\left(a^2-3b\right) + y^2\left(a^2-3b\right) \\ &= \left(a^2-3b\right)\left(x^2+y^2\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d)\ a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y &= \left(a^2x - 2a^2y\right) - \left(ax^2 - 2axy\right) + \left(x^3 - 2x^2y\right) \\
&= a^2\,(x-2y) - ax\,(x-2y) + x^2\,(x-2y) \\
&= (x-2y)\,\left(a^2 - ax + x^2\right)
\end{aligned}
$$

Otras formas importantes de factorización son las que se obtienen de los productos notables tratados atrás, leídos "de derecha a izquierda":

2. **Factorización de cuadráticas**

Del producto notable $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$, leído "de derecha a izquierda" se obtiene la muy práctica fórmula de factorización:

$$\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)}$$

así ante la necesidad de factorizar la expresión: x^2+5x+6, según la fórmula se deben buscar dos números cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Esos dos números son 2 y 3, luego
$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

Ejemplos:

$a)$ $x^2 - 5x + 6 = (x-2)\,(x-3)$

$$
\begin{aligned}
b)\ 6x^2 + 7x - 3 &= \frac{(6x)^2 + 7\,(6x) - 18}{6} \\
&= \frac{(6x+9)\,(6x-2)}{(3)\,(2)} \\
&= (2x+3)\,(3x-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ 10a^2 - 17ab + 3b^2 &= \frac{(10a)^2 - 17\,(10ab) + 30b^2}{(2)\,(5)} \\
&= \frac{(10a - 2b)\,(10a - 15b)}{(2)\,(5)} \\
&= (5a - b)\,(2a - 3b)
\end{aligned}
$$

3. **Diferencia de cuadrados.**

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y)}$$

Es decir la diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia.

Ejemplos:

$a)$ $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)\,(2x + 3y)$

$b)$ $(a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b-(c+d))\,(a+b+c+d)$

$c)$ $x - y = (\sqrt{x})^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\,\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$

4. **Trinomio cuadrado perfecto.**

$$\boldsymbol{x^2+2xy+y^2=(x+y)^2}$$
$$\boldsymbol{x^2-2xy+y^2=(x-y)^2}$$

Ejemplos:

a) $9x^2 - 6xy + y^2 = (3x-y)^2$

b) $a^{2x+2} + 2a^{x+1}b^{x+2} + b^{2x+4} = \left(a^{x+1} + b^{x+2}\right)^2$

c) $4(a+b)^2 + 12(a+b)(c+d) + 9(c+d)^2 = (2(a+b) + 3(c+d))^2$

5. **Cubos perfectos**

$$\boldsymbol{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3} \quad \text{y}$$
$$\boldsymbol{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3}$$

Ejemplos:

a) $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3 = (2+3x)^3$

b) $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

c) $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15} = \left(5x^4 + 8y^5\right)^3$

6. **Suma y diferencia de cubos**.

$$\boldsymbol{x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)} \quad \text{y}$$
$$\boldsymbol{x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}$$

Ejemplos:

a) $x^6 - b^9 = \left(x^2 - b^3\right)\left(x^4 + x^2b^3 + b^6\right)$

b) $64 + a^6 = \left(4+a^2\right)\left(4^2 - 4a^2 + a^4\right)$

c) $27x^3 - (a+b)^3 = [3x - (a+b)]\left((3x)^2 + 3x(a+b) + (a+b)^2\right)$

d) $(x+1)^3 + (x-2)^3 = ((x+1) + (x-2))\left((x+1)^2 - (x+1)(x-2) + (x-2)^2\right)$
$= (2x-1)\left(x^2 - x + 7\right)$

EJERCICIOS

Factorize completamente las siguientes expresiones.

1. $x^4 + x - x^3y - y$
2. $x^3 - x - x^2y + y$
3. $6x^2 + xy - y^2$
4. $a^2 - b^3 + 2b^3x^2 - 2a^2x^2$
5. $a^2 + 9a + 20$
6. $a^2 - 7a + 12$
7. $a^2 - 6a + 9$
8. $6x^2 - x - 2$
9. $6x^2 + 7xy - 3y^2$
10. $m^4 + m^2n^2 + n^4$
11. $15 + 14x - 8x^2$
12. $x^6 + x^3 - 2$
13. $2\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[3]{x} + 2$
14. $4a^{2n} - b^2$
15. $\left(x^8 - y^8\right)$
16. $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$
17. $\left(m^2 + n^2\right)^2 - a^2$
18. $8x^3 - y^3$
19. $\left(x^3y^6 - 216y^{12}\right)$
20. $(m-2)^3 - (m-4)^3$
21. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$
22. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$
23. $\dfrac{9x^4 + 12x^2y^3 + 4y^6}{3x^2 + 2y^3}$

1.4.3. Racionalización

Racionalizar un numerador (o un denominador) es utilizar un procedimiento válido que haga desaparecer los radicales del numerador (o denominador) de una expresión algebraica fraccionaria. Un procedimiento válido es multiplicar numerador y denominador de la expresión por una expresión adecuada llamada *factor racionalizante*, que permita precisamente eliminar el radical deseado.

Ejemplos

i. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ii. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{2^{1/3}}\,\dfrac{2^{2/3}}{2^{2/3}} = \dfrac{2^{2/3}}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

iii. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{1\,(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)\,(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$

Observe que si aparece una expresión de la forma $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ el radical del denominador se elimi-na multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, ya que de esta forma en el denominador aparece $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ que es igual a la diferencia de cuadrados $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$ que elimina los radicales.

iv.
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} &= \frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}\,\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(x+2)-(x+1)}\\ &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{1}\end{aligned}$$

Observe que si aparece en el denominador $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, para eliminar el radical se debe obtener $(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3$ y este no se consigue multiplicando numerador y denominador por $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ pues $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right) = (\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{b})^2$ que no elimina los radicales.

Para conseguirlo recuerde que $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ por lo tanto si se tiene $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ y se multiplica por $\left((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right)$ se obtiene $(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3=a+b$ y se eliminan los radicales por ejemplo

v.
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} &= \frac{\left(1-2^{1/3}+2^{2/3}\right)}{\left(1+2^{1/3}\right)\left(1-2^{1/3}+2^{2/3}\right)}\\ &= \frac{1-2^{1/3}+2^{2/3}}{1+2}\\ &= \frac{1-2^{1/3}+2^{2/3}}{3}\end{aligned}$$

vi. $$\frac{1}{x^{2/3}-y^{1/3}} = \frac{\left(x^{4/3}+x^{2/3}y^{1/3}+y^{2/3}\right)}{\left(x^{2/3}-y^{1/3}\right)\left(x^{4/3}+x^{2/3}y^{1/3}+y^{2/3}\right)} = \frac{x^{4/3}+x^{2/3}y^{1/3}+y^{2/3}}{x^2-y}$$

EJERCICIOS

1. Racionalizar el denominador en las expresiones siguientes.

   i. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}}$

   ii. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$

   iii. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$

   iv. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$

   v. $\dfrac{1}{2-3\sqrt[3]{2}}$

   vi. $\dfrac{1}{5\sqrt{7}-2\sqrt{3}}$

   vii. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

   viii. $\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

   ix. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-x}$

   x. $\dfrac{6x+2}{x^3-\sqrt{2x-7}}$

   xi. $\dfrac{4x+1}{\sqrt[3]{x}+x^2+5}$

   xii. $\dfrac{2x-3}{\left(\sqrt{4x}+2\right)\left(\sqrt[3]{6x+1}-4\right)}$

   xiii. $\dfrac{4x}{x^2+2x-6\sqrt{x}}$

   xiv. $\dfrac{2x-3}{x^2+\sqrt{x+1}-2x}$

   xv. $\dfrac{3x^2}{x-9+\sqrt[3]{2x+5}}$

2. Racionalizar el numerador en las expresiones siguientes.

i. $\dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{h}$

ii. $\dfrac{\sqrt{(x+h)^3}-\sqrt{x^3}}{h}$

iii. $\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x}$

iv. $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3\sqrt{x^2+5}}$

v. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-5}}{4\sqrt[3]{x+1}}$

vi. $\dfrac{\sqrt[3]{2x}-4}{4x^2+3\sqrt{x}}$

vii. $\dfrac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x}+5}$

1.4.4. Simplificación de Expresiones Algebraicas

Simplificar una expresión algebraica significa encontrar una forma más simple o sencilla de escribirla y que sea equivalente a ella.

Ejemplos

i. $\sqrt{\dfrac{72a^9b^8}{x^4y^4}}$ se simplifica así:

$$\sqrt{\frac{72a^9b^8}{x^4y^4}} = \sqrt{\frac{(36)\,(2)\,\left(a^8\right)(a)\left(b^8\right)}{x^4y^4}} = \frac{6a^4b^4\sqrt{2a}}{x^2y^2}$$

ii. $\dfrac{a^{-1/2}x^{-2}}{3a^3x^2y^{-1}}\;\dfrac{x^{-2/3}y^{1/4}}{x^2yz^{-1/2}}\;\dfrac{3a^{7/2}x^4z^{1/2}}{x^{-8/3}y^{5/4}}$

$$= \frac{a^{-1/2}a^{7/2}}{a^3}\cdot\frac{x^{-2/3}x^{-2}x^4}{x^2x^2x^{-8/3}}\cdot\frac{y^{1/4}}{yy^{-1}.y^{5/4}}\;\frac{z^{1/2}}{z^{-1/2}}$$

$$= \frac{a^3}{a^3}\;\frac{x^{-8/3}}{x^{-8/3}}\;\frac{1}{y}\cdot z = \frac{z}{y}$$

iii. $\dfrac{\sqrt[6]{18x^3y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{(2)\,.3^2.x^3.y^4z^5}}{\sqrt[4]{3x^2y^2z^3}}$

$$= \frac{\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{3^2}\,\sqrt[6]{x^3}\,\sqrt[6]{y^4}\,\sqrt[6]{z^5}}{\sqrt[4]{3}\,\sqrt[4]{x^2}\,\sqrt[4]{y^2}\,\sqrt[4]{z^3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{1/6}\, 3^{2/6}\, x^{3/6}\, y^{4/6}\, z^{5/6}}{3^{1/4}\, x^{2/4}\, y^{2/4}\, z^{3/4}} \\
&= \left(2^{1/6}\, 3^{2/6}\, x^{3/6}\, y^{4/6}\, z^{5/6}\right)\ \left(3^{-1/4}\, x^{-2/4}\, y^{-2/4}\, z^{-3/4}\right) \\
&= 2^{1/6}\, 3^{1/12}\, x^{0}\, y^{2/12}\, z^{1/12} \\
&= \sqrt[12]{2^{2}(3)y^{2}z} \\
&= \sqrt[12]{12y^{2}z}
\end{aligned}
$$

iv. $\dfrac{x^3+1}{x^2\,(x+1) - x\,(x+1)\, +\, (x+1)}$ se simplifica así:

$$
\frac{x^3+1}{x^2\,(x+1) - x\,(x+1)\, +\, (x+1)} = \frac{(x+1)\,\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = 1 \qquad \text{si} \qquad x \neq -1
$$

v. $$
\begin{aligned}
\frac{x^4+x-x^3y-y}{x^3-x-x^2y+y} &= \frac{x^3\,(x-y)+(x-y)}{x^2\,(x-y)\, -\, (x-y)} \\
&= \frac{(x-y)\,\left(x^3+1\right)}{(x-y)\,(x^2-1)} \\
&= \frac{(x+1)\,\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)\,(x+1)} \\
&= \frac{x^2-x+1}{x-1}
\end{aligned}
$$

vi. $$\frac{\left(2a^2-14a+24\right)}{(a^2+5a)} \cdot \frac{(a-3)}{(4a-4)} \cdot \frac{\left(a^2+9a+20\right)}{(a^2-6a+9)} \div \frac{\left(a^2-16\right)}{(2a^2-2a)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\,\left(a^2-7a+12\right)}{a\,(a+5)}\ \frac{(a-3)}{4\,(a-1)}\ \frac{(a+5)\,(a+4)}{(a-3)^2}\ \frac{2a\,(a-1)}{(a-4)\,(a+4)} \\
&= \frac{2\,(a-3)\,(a-4)}{a\,(a+5)}\ \frac{(a-3)}{4\,(a-1)}\ \frac{(a+5)\,(a+4)}{(a-3)^2}\ \frac{2a\,(a-1)}{(a-4)\,(a+4)} = 1
\end{aligned}
$$

vii. $$\frac{\left(x^2-x-2\right)\,\left(x^2-9\right)}{(x^2-2x-3)\,(x^2+x-6)} = \frac{(x-2)\,(x+1)\,(x-3)\,(x+3)}{(x+1)\,(x-3)\,(x+3)\,(x-2)} = 1$$

viii. $$
\begin{aligned}
\frac{3m^2+5mn-8n^2}{(m^3-n^3)} &= \frac{3m^2-3mn+8mn-8n^2}{m^3-n^3} \\
&= \frac{3m\,(m-n)+8n\,(m-n)}{m^3-n^3} \\
&= \frac{(m-n)\,(3m+8n)}{(m-n)\,(m^2+mn+n^2)} = \frac{3m+8n}{m^2+mn+n^2}
\end{aligned}
$$

ix. $$\frac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}=\frac{1+\dfrac{1}{\dfrac{2+x}{1+x}}}{1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}}=\frac{1+\dfrac{1+x}{2+x}}{1+\dfrac{1-x}{x}}$$

$$=\frac{\dfrac{3+2x}{2+x}}{\dfrac{1}{x}}=\frac{(3+2x)\,x}{(2+x)}$$

$$=\frac{3x+2x^2}{2+x}$$

x. $$\frac{\dfrac{x+1-\dfrac{6x+12}{x+2}}{x-5}}{\dfrac{x-4+\dfrac{11x-22}{x-2}}{x+7}}=\frac{\dfrac{(x+1)\,(x+2)\,-\,(6x+12)}{(x+2)\,(x-5)}}{\dfrac{(x-4)\,(x-2)\,+\,(11x-22)}{(x-2)\,(x+7)}}$$

$$=\frac{\dfrac{(x+1)\,(x+2)\,-\,6\,(x+2)}{(x+2)\,(x-5)}}{\dfrac{(x-4)\,(x-2)\,+\,11\,(x-2)}{(x-2)\,(x+7)}}$$

$$=\frac{\dfrac{(x+2)\,(x+1-6)}{(x+2)\,(x-5)}}{\dfrac{(x-2)\,(x-4+11)}{(x-2)\,(x+7)}}$$

$$=\frac{\dfrac{(x+2)\,(x-5)}{(x+2)\,(x-5)}}{\dfrac{(x-2)\,(x+7)}{(x-2)\,(x+7)}}=1$$

EJERCICIOS

Simplificar las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{x+y}{xy}-\dfrac{x+2y}{xy+y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}$

2. $\dfrac{x+2}{3x-1}+\dfrac{x+1}{3-2x}+\dfrac{4x^2+6x+3}{6x^2-11x+3}$

3. $\dfrac{m-n}{mn}+\dfrac{n-a}{na}+\dfrac{2a-m}{ma}$

4. $\left(a^{2x}+a^{x+1}+a^{2}\right)\left(a^{x}-a\right)$

5. $\left(a^{m}-3\right)\left(a^{m}+3\right)\left(a^{2m}+9\right)$

6. $\dfrac{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}{6x^2+xy-y^2}$

7. $\dfrac{\left(x^3-3x\right)\left(x^3-1\right)}{\left(x^4+x^3+x^2\right)\left(x^2-1\right)}$

8. $\dfrac{x^4+x-x^3y-y}{x^3-x-x^2y+y}$

9. $\dfrac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2+x-6\right)}$

10. $\left(\dfrac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30}\cdot\dfrac{a^2-36}{a^2-1}\right)\div\dfrac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$

11. $\left(\dfrac{2a^2-14a+24}{a^2+5a}\cdot\dfrac{a-3}{4a-4}\cdot\dfrac{a^2+9a+20}{a^2-6a+9}\right)\div\dfrac{a^2-16}{2a^2-2a}$

12. $\dfrac{\dfrac{2}{1-a}+\dfrac{2}{1+a}}{\dfrac{2}{1+a}-\dfrac{2}{1-a}}$

13. $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{1-a}{a}-\dfrac{a}{1-a}}$

14. $\left[\dfrac{(m+n)^2-x^2}{(m+x)^2-n^2}\right]\left[\dfrac{(m-n)^2-x^2}{m^2+mn-mx}\right]$

15. $\left[\dfrac{(a+b)^2-c^2}{(a-b)^2-c^2}\cdot\dfrac{(a+c)^2-b^2}{a^2+ab-ac}\right]\div\dfrac{a+b+c}{a^2}$

16. $\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y}\div\dfrac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}$

17. $\left(\dfrac{12x^2-x-20}{6x^2+19x+15}\right)\left(\dfrac{2x+3}{4x+5}\right)$

Capítulo 2

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

2.1. PROPIEDADES DE ORDEN Y DESIGUALDADES

Como se había dicho anteriormente los números reales se pueden ubicar en una recta llenándola completamente, de tal forma que cada número real se identifica con un punto de la recta y cualquier punto de la recta representa un único número real. En la ubicación de los elementos de los diferentes sistemas numéricos en esta recta se ha tenido en cuenta ordenarlos de tal forma que al recorrer los puntos de la recta de izquierda a derecha se recorran los números que representan estos puntos, de menor a mayor.

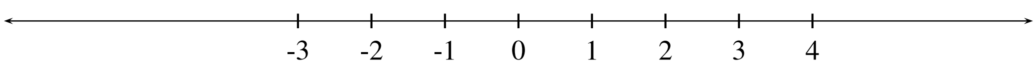


FIGURA Nº 2.1

Resulta muy práctico para el trabajo con números reales clasificarlos en tres grupos: un primer grupo formado por un solo elemento, *el cero*, un segundo grupo formado por todos los elementos a la derecha del cero, es decir de números mayores que cero que se llamarán *números reales positivos* y un tercer grupo de los que se encuentran a la izquierda del cero es decir menores que cero que se llamarán *números reales negativos.*
De esta clasificación resulta evidente que un número real sólo puede pertenecer a uno de estos tres grupos.
Otro hecho que se puede tomar como evidente a partir de la manipulación que se ha venido haciendo con los números positivos por medio de la suma y el producto en la aritmética elemental, es que la suma y producto de dos números positivos siempre son positivo.

Las propiedades de orden de los números reales tienen que ver con las relaciones entre ellos, considerando su ubicación en la recta real. El estudio de estas propiedades tiene como fundamento los dos hechos evidentes a los que se ha hecho referencia y que se conocen con el nombre de axiomas de orden, cuyo enunciado riguroso es:

2.1.1. Axiomas de orden

Si se nota por $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos se tiene:

i. **Ley de Tricotomía**. Si a es un número real, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
$$a = 0, \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad -a \in \mathbb{R}^+$$

ii. **Clausura para la suma y producto en** $\mathbb{R}^+$. Si a y b pertenecen a $\mathbb{R}^+$ entonces:
$$a+b \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad ab \in \mathbb{R}^+.$$

Ya se sabe que si un número a es mayor que b entonces a está a la derecha de b en la recta real, pero es necesario dar una definición de que a es mayor que b que sea manipulable sin necesidad de recurrir a ese objeto geométrico que es la recta. Para ello observe que si se toman dos números positivos 5 y 3 se sabe geométricamente que 5 es mayor que 3 y además $5-3=2$ que es positivo; si se toman uno positivo y uno negativo 7 y -2, 7 es mayor que -2 (7 está a la derecha de -2) y ; $7-(-2)=7+2=9$ que es positivo; si se toman dos negativos -8 y -3, es claro que como -3 está a la derecha de -8 entonces -3 es mayor que -8 y $-3-(-8)=-3+8=5$ que es positivo. Es decir que independientemente de si a y b son positivos o negativos y a es mayor que b, $a-b$ (el mayor menos el menor) es positivo. Es este precisamente el argumento que permite dar una definición de a mayor que b.

Definición

Dados a y b números reales entonces:

i. Se dice que a es mayor que b y se nota $a > b$ si y sólo si $a - b \in \mathbb{R}^+$. También se dice que b es menor que a y se nota $b < a$.

ii. Se dice que a es mayor o igual que b y se nota $a \geq b$ si y sólo si $a = b$ ó $a > b$. También se dice que $b \leq a$.
Las expresiones algebraicas que involucra los símbolos $>$ ó $<$, $\geq$ ó $\leq$ se conocen con el nombre de desigualdades o inecuaciones.

2.1.2. Otras propiedades de orden

Propiedad 1

Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ para todo real c.

Demostración

$a > b$ significa por definición que $(a-b) \in \mathbb{R}^+$, de donde $(a-b)+0 \in \mathbb{R}^+$ que se puede escribir como $(a-b)+(c-c) \in \mathbb{R}^+$, es decir $(a+c)-(b+c) \in \mathbb{R}^+$ que por definición de $>$ significa que $(a+c) > (b+c)$.

Esta propiedad establece que a los dos lados de una desigualdad se le puede sumar un número real sin que la desigualdad cambie de sentido.

Ejemplo

$4 > 3$ implica que $4+5 > 3+5$.

Ejemplo

Si $x+3 > 5$ entonces $x+3-3 > 5-3$, entonces $x > 2$

Propiedad 2 (*Transitiva*)

Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.

Demostración

Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a-b > 0$ y $b-c > 0$, luego $(a-b)+(b-c) > 0$ (axioma ii.), pero $(a-b)+(b-c) = a-c$ por tanto $a-c > 0$, luego por definición de $>$ se tiene que $a > c$

Ejemplo

$10 > 8$ y $8 > 4$ entonces $10 > 4$

Propiedad 3

Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$.

Demostración

Como $a > b$ entonces $a-b > 0$ y como $c > 0$ entonces $c(a-b) = ca-cb > 0$ (axioma ii.) por tanto $ac > bc$

Esta propiedad establece que los dos lados de una desigualdad se pueden multiplicar por un número real positivo cualquiera, sin que la desigualdad cambie de sentido.

Ejemplo

$5 > 3$ entonces $(5)(4) > (3)(4)$, pues $4 > 0$.

Ejemplo

Si $3x > 8$ entonces $\frac{3x}{3} > \frac{9}{3}$; pues $\frac{1}{3} > 0$ y por lo tanto $x > 3$.

Propiedad 4

Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.

Demostración

Adapte la demostración de la propiedad 3.

Esta propiedad establece que si los lados de una desigualdad se multiplican por un número real negativo cualquiera, entonces la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplo

$12 > 9$ entonces $12\ (-3) < 9\ (-3)$ pues $-3 < 0$.

Ejemplo

$4x > 12$ entonces $-\frac{4x}{4} < 12\left(-\frac{1}{4}\right)$ pues $-\frac{1}{4} < 0$, por tanto $-x < -3$.

Propiedad 5

$ab > 0$ si y sólo si $[(a > 0 \ y \ b > 0)$ ó $(a < 0 \ y \ b < 0)]$

Demostración

De las propiedades anteriores resulta claro que si $b > 0$ entonces $1/b > 0$ y si $b < 0$ entonces $1/b < 0$ (¿por qué?).

$\Rightarrow)$ Suponga que $ab > 0$
Si $b > 0$ entonces $1/b > 0$, por tanto $(ab)(1/b) > 0$ así $a(1) > 0$, luego $a > 0$.
En forma análoga si $b < 0$ entonces $a < 0$.

$\Leftarrow)$ Si $a > 0 \ y \ b > 0$ entonces $ab > 0$ (axioma ii.)
Ahora si $a < 0 \ y \ b < 0$ entonces $-a > 0 \ y \ -b > 0$ (por qué?).

Por tanto $(-a)\,(-b) > 0$ (axioma ii.), pero ya se había demostrado que $(-a)\,(-b) = ab$ de donde se concluye que $ab > 0$.

Ejemplo

$(x-3)\,(x+3) > 0$ si y sólo si $(x-3 > 0 \ y \ x+3 > 0)$ ó $(x-3 < 0 \ y \ x+3 < 0)$ es decir: $(x > 3 \ y \ x > -3)$ ó $(x < 3 \ y \ x < -3)$.

Propiedad 6

$ab < 0$ si y sólo sí $[(a < 0 \ y \ b > 0) \ \text{ó} \ (a > 0 \ y \ b < 0)]$

Demostración

Adapte la demostración de la propiedad 5.

Ejemplo

$x(x-1) < 0$ si y sólo si $(x > 0 \ \ y \ \ x-1 < 0)$ ó $(x < 0 \ \ y \ \ x-1 > 0)$, es decir, $(x > 0 \ \ y \ \ x < 1)$ ó $(x < 0 \ \ y \ \ x > 1)$.

Propiedad 7

Si $a > b \ \ y \ \ c > d$ entonces $a + c > b + d$.

Demostración

Como $a > b \ \ y \ \ c > d$ entonces $a - b > 0 \ \ y \ \ c - d > 0$

y por el axioma ii.)

$(a-b)+(c-d) > 0$ es decir $(a+c)-(b+d) > 0$ que por definición de $>$ equivale a: $a+c > b+d$.

Esta desigualdad establece que se pueden sumar miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, dando como resultado otra desigualdad del mismo sentido.

Ejemplo

$3 > -2$ y $6 > 5$ entonces $3 + 6 > -2 + 5$, es decir $9 > 3$.

Propiedad 8

Si $a > b, \ a > 0, \ b > 0$ entonces $1/a < 1/b$

Demostración

Sea $a > b$, como $a > 0$ entonces $1/a > 0$, por tanto $a(1/a) > b(1/a)$, por consiguiente $1 > b(1/a)$. Ahora como $b > 0$ entonces $1/b > 0$ y así $(1/b)\,1 > (1/b)\,(b)\,(1/a)$ es decir $(1/b) > (1)\,(1/a)$ luego $(1/b) > (1/a)$.

Esta propiedad afirma que al tomar los recíprocos (inverso para la multiplicación) a los dos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad cambia, siempre y cuando los dos términos de la desigualdad sean positivos. (esta propiedad también se cumple cuando tanto a como b son negativos).

Ejemplo

$12 > 8$ implica que $1/12 < 1/8$.

Ejemplo

$-3 > -5$ implica que $-1/3 < -1/5$.

INTERVALOS

Frecuentemente resulta necesario para desigualdades donde aparece una variable (o más de una) hallar todos los valores que puede tomar esta variable para que la desigualdad sea verdadera. El conjunto de estos valores se llama conjunto solución de la desigualdad y su presentación generalmente tiene la forma de reunión de unos subconjuntos particulares de R llamados intervalos; los cuales se definen a continuación.

Sean a y b números reales, con $a < b$

1. El conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b se nota por $[a,b]$, se llama intervalo cerrado, es decir:

$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

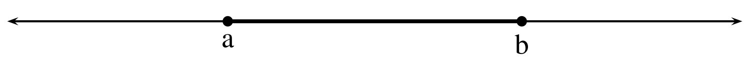


FIGURA N° 2.2

2. El conjunto de los números reales que son mayores que a y menores que b , se nota (a,b) , se llama intervalo abierto, es decir,

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

FIGURA N° 2.3

3. También se puede definir otro tipo de intervalo de uso frecuente como:

$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

FIGURA N° 2.4

$(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

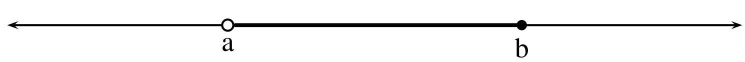


FIGURA N° 2.5

$[a,+\infty) = \{x \mid a \leq x\}$

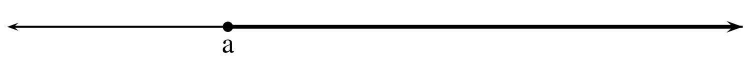


FIGURA N° 2.6

$(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$

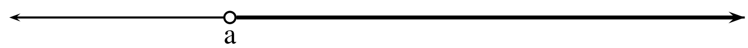


FIGURA N° 2.7

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

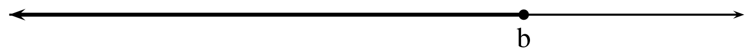


FIGURA N° 2.8

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

FIGURA N° 2.9

$(-\infty, +\infty) = R$

FIGURA N° 2.10

El uso adecuado de las propiedades de orden de los números reales es la base para hallar el conjunto solución de desigualdades. La forma de usarlas se ilustrará con algunos ejemplos típicos de las diferentes situaciones que se presentan frecuentemente.

Ejemplo

Determinar la solución de la desigualdad $-4x + 5 < -x + 8$.

Si se suma a cada lado de la desigualdad el número –5 se obtiene $-4x + 5 - 5 < -x + 8 - 5$ o sea $-4x < -x + 3$, y si ahora se suma a cada lado de la desigualdad x, se observa que $-4x + x < -x + x + 3$, es decir; $-3x < 3$, y multiplicando cada miembro de $-3x < 3$ por $-1/3$ se tiene que $x > -1$; y de aquí se concluye que la solución de la desigualdad es $\{x \mid x > -1\}$ es decir, el intervalo $(-1, +\infty)$. La solución se puede representar gráficamente por:

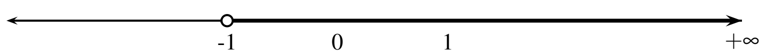


FIGURA N° 2.11

Observe que si se toma por ejemplo $x = 1$ y se reemplaza en la desigualdad $-4x + 5 < -x + 8$, se tiene que $(-4)(1) + 5 = 1 < -1 + 8 = 7$, es decir, x=1 es solución de esta desigualdad, pero si se tomara $x = -3$ y se reemplazara, se ve claramente que $x = -3$ no es solución de la desigualdad ya que $12 + 5 = 17$ no es menor que $3 + 8 = 11$.

Ejemplo

Halle los valores de x que satisfacen el sistema de desigualdades
$2x - 2 \leq 4$; $x - 1 \leq 3x - 5$; $-2x \leq -x + 1$.

En este caso se resuelve cada desigualdad por separado y la solución del sistema de desigualdades, es el conjunto formado por los elementos comunes de las tres soluciones:

i. $2x - 2 \leq 4$ implica que $2x \leq 6$, es decir $x \leq 3$, luego la solución de esta desigualdad es $(-\infty, 3] = S_1$

ii. $x - 1 \leq 3x - 5$ implica que $4 \leq 2x$, es decir $2 \leq x$, luego la solución de esta desigualdad es $[2, +\infty) = S_2$.

iii. $-2x \leq -x + 1$ implica que $-x \leq 1$, es decir $x \geq -1$, luego la solución de esta desigualdad es $[-1, +\infty) = S_3$

Así que la solución del sistema es:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (-\infty, 3] \cap [2, +\infty) \cap [-1, +\infty) = [2, 3]$$

gráficamente:

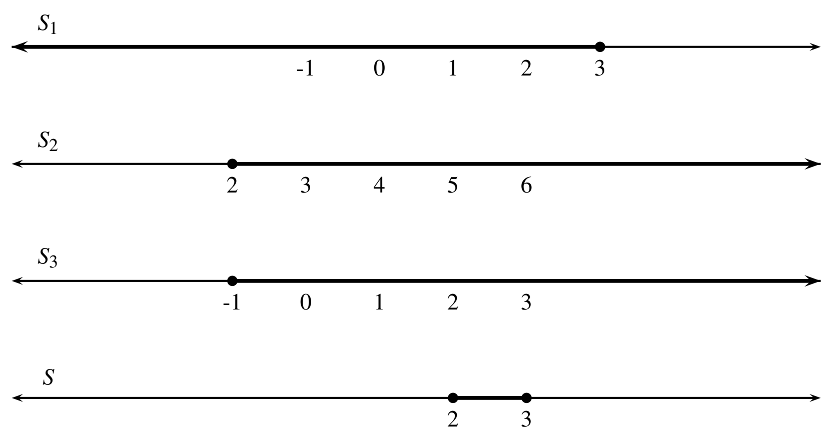


FIGURA N° 2.12

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la desigualdad $x - 2 \leq 2x - 3 < 2 + x$ es equivalente a hallar los valo-res de x que satisfacen el sistema $x - 2 \leq 2x - 3, \quad 2x - 3 < 2 + x.$ (cuál es la solución?).

Ejemplo

Halle el conjunto solución de la desigualdad $(x-1)(x+1) < 0$

$(x-1)(x+1) < 0$ si y sólo sí $(x - 1 > 0$ y $x + 1 < 0)$ ó $(x - 1 < 0$ y $x + 1 > 0)$

i. Como $x - 1 > 0$ y $x + 1 < 0,$ se tiene que $x > 1$ y $x < -1,$ cuya solución es $(1, +\infty) \cap (-\infty, -1) = \phi$

ii. La solución del sistema $x - 1 < 0$ y $x + 1 > 0$ es $(-1, 1)$, ya que $x < 1$ y $x > -1$ implica que $x \in (-\infty, 1)$ y $x \in (-1, \infty)$ es decir $x \in (-\infty, 1) \cap (-1, +\infty) = (-1, 1)$.

Luego la solución de la desigualdad $(x-1)(x+1)<0$ es $S=S_1\cup S_2=\phi\cup(-1,1)=(-1,1)$

La desigualdad anterior se puede resolver por un método más sencillo, que consiste en dividir R en determinados intervalos y analizar la desigualdad en cada uno de ellos.

Para hallar estos intervalos se buscan los valores de x para los cuales cada uno de los factores se anula. Los factores de la desigualdad $(x-1)(x+1)<0$ se anulan en $x=1$ y $x=-1$ respectivamente, se procede a localizarlos en la recta numérica.

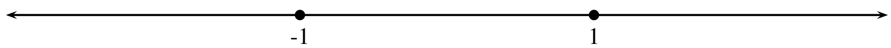


FIGURA N° 2.13

Así los intervalos a considerar son: $(-\infty,-1],(-1,1]$ y $(1,+\infty)$, cuya reunión es $\mathbb{R}$, por lo tanto el análisis de las soluciones en cada intervalo debe conducir a todas las soluciones posibles. El conjunto de solución de la desigualdad es la unión de todas las soluciones obtenidas al analizar cada intervalo por separado. El procedimiento es como sigue:

Sobre la recta numérica se ubican los puntos donde cada factor se anula. En cada uno de los intervalos en que se divide la recta se analiza cada factor por separado en el sentido de si allí es éste positivo o negativo, colocando + ó - según el caso. Luego de realizar este análisis para todos los factores en todos los intervalos, se hace en cada intervalo el producto de los signos de los factores dando como resultado + ó $-$; este intervalo será o no parte de la solución según la desigualdad sea de la forma producto de factores >0 ó <0. El siguiente ejemplo ilustrará este método.

Ejemplo

Para hallar el conjunto solución de la desigualdad $x(x-1)(x+1)<0$; primero se consideran los puntos donde los factores se anulan, en este caso $x=0$, $x=1$, $x=-1$. El factor x es positivo si $x>0$ y negativo si $x<0$, luego:

x - + + + + + + + + + + + + + + + + + +

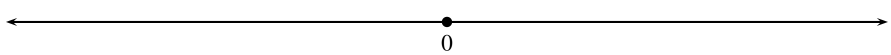


FIGURA N° 2.14

El factor $x-1$ es positivo si $x>1$ y negativo si $x<1$; luego:

$x-1$ - + + + + + + + + + + + + + + + + + +

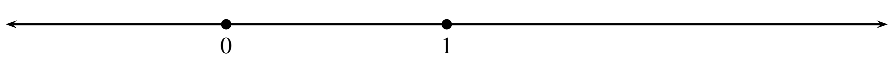


FIGURA N° 2.15

El factor $x+1$ es positivo si $x>-1$ y negativo si $x<-1$, luego:

$x+1$ - - - - - - - - - - - +

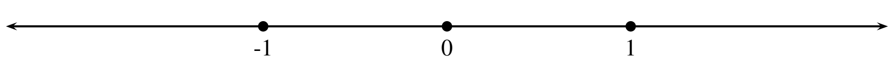


FIGURA N° 2.16

Los tres gráficos anteriores se representan en uno solo así:

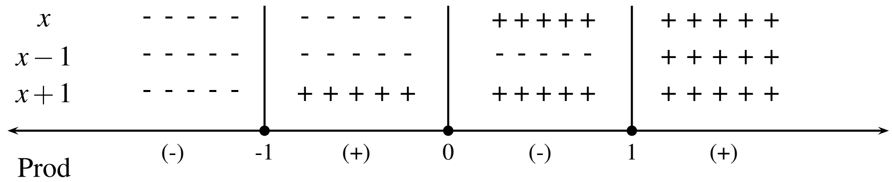


FIGURA N° 2.17

Los intervalos a considerar son: $(-\infty,-1],\ (-1,0],\ (0,1]$ y $(1,+\infty)$. Los puntos -1, 0 y 1 no son solución de la desigualdad, ya que si se reemplaza x por $+1$ ó por 0 ó por -1 en $x(x-1)(x+1)<0$, se obtiene que $0<0$.

Puesto que la desigualdad es con <0, el intervalo $(-\infty,-1)$ es solución ya que el producto de los tres factores es $(-)$, (<0); el intervalo $(-1,0)$ no es solución ya que el producto de los tres factores es $(+)$, (>0) el intervalo $(0,1)$ es solución, ya que el producto de los tres factores es $(-)$, (<0); el intervalo $(1,+\infty)$ no es solución, pues el producto de los tres factores es $(+)$, (>0).

Luego el conjunto solución de esta desigualdad es: $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Ejemplo

Para hallar la solución de la desigualdad $1/x<1$ hay varias formas de hacerlo:

1. Si $x>0$, se tiene que $1/x<1$ es equivalente a $x>1$, así se tiene, que la solución es $x>1$ si $x>0$, es decir $(1,+\infty)\cap(0,+\infty)=(1,+\infty)$, luego la solución es el intervalo $(1,+\infty)$ si $x>0$.

   Si $x<0$, se tiene que $1/x<1$ es equivalente a $1>x$, luego de $x<1$ y $x<0$, se concluye que $x<0$, así la solución es $(-\infty,0)$ si $x<0$.

   Por tanto la solución total de la desigualdad es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

2. $1/x<1$, equivale a $(1/x)-1<0$, que a su vez equivale a $(1-x)/x<0$; y esto se puede solucionar de tres formas diferentes:

   a) Si $x>0$, entonces $(1-x)/x<0$ equivale a es decir $x>1$, luego la solución es $(1,+\infty)\cap(0,+\infty)=(1,+\infty)$.

   Si $x<0$, $(1-x)/x<0$ es equivalente a $(1-x)>0$ (multiplicando por $x<0$, los dos lados de la desigualdad), así que $x<1$, luego la solución es $(-\infty,1)\cap(-\infty,0)=(-\infty,0)$.

   Por tanto la solución total es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

   b) $(1-x)/x<0$ si y sólo si $(1-x<0 \quad y \quad x>0)$ ó $(1-x>0 \quad y \quad x<0)$, es decir $(x>1 \quad y \quad x>0)$ ó $(x<1 \quad y \quad x<0)$, luego la solución total es

$$\{(1,\infty)\cap[0,+\infty)\}\cup\{(-\infty,1)\cap(-\infty,0)\}=(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$$

c) Por el método usado en el ejemplo anterior se tiene que:
$1-x>0$ si $x<1$ y $1-x<0$ si $x>1$, así que:

x	+ + + + + +		+ + + + + +		- - - - - - - -
$1-x$	- - - - - - -		+ + + + + +		+ + + + + + +
	(-)	0	(+)	1	(-)

FIGURA N° 2.18

La solución de la desigualdad $(1-x)/x<0$ es la unión de los intervalos $(-\infty,0)$ *y* $(1,+\infty)$, ya que en ellos el producto de los dos factores $(1-x)$ y $(1/x)$ son negativos, es decir $S=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. Los puntos 0 y 1 no pertenecen al conjunto solución, ya que no satisfacen la desigualdad $(1-x)/x<0$.

Ejemplo

Halle el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)}>0$$

teniendo en cuenta que si $a>0$ entonces $1/a>0$ y que si $a<0$ entonces $1/a<0$, resulta que las llamadas leyes de los signos para el producto son las mismas para el cociente, por lo tanto en lo que se refiere a analizar el signo de este cociente a través de los signos de los factores de numerados y denominador, es similar tratarlo como un producto asumiendo que los factores del denominador son factores pero en el numerador.

Esto se puede justificar también de otra forma: independientemente de los signos de x, (x^2+4), $(x+1)$ (siendo todos diferentes de cero), la expresión $x^2(x^2+4)^2(x+1)^2$ es mayor que cero, por tanto al multiplicar los dos lados de la desigualdad por esta expresión no se altera el sentido de la desigualdad, es decir,

$$\frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)}\left[(x)^2\left(x^2+4\right)^2(x+1)\right]>(0)(x)^2\left(x^2+4\right)^2(x+1)^2$$

que al simplificar queda

$$(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)(x)\left(x^2+4\right)(x+1)>0 \qquad x\neq 0, \quad x\neq 1$$

lo que indica que los valores de x que son la solución a la desigualdad inicial, son los mismos que dan solución a esta última. En consecuencia se procede a solucionarla:

$$\begin{array}{rlllllllll}
x-1=0 & \text{si} & x=1 & x-1>0 & \text{si} & x>1 & \text{y} & x-1<0 & \text{si} & x<1\\
x-4=0 & \text{si} & x=4 & x-4>0 & \text{si} & x>4 & \text{y} & x-4<0 & \text{si} & x<4\\
x-5=0 & \text{si} & x=5 & x-5>0 & \text{si} & x>5 & \text{y} & x-5<0 & \text{si} & x<5\\
x-10=0 & \text{si} & x=10 & x-10>0 & \text{si} & x>10 & \text{y} & x-10<0 & \text{si} & x<10\\
x+1=0 & \text{si} & x=-1 & x+1>0 & \text{si} & x>-1 & \text{y} & x+1<0 & \text{si} & x<-1
\end{array}$$

El factor x^2+4 no se tiene en cuenta ya que es siempre positivo para cualquier valor de x (o se coloca $+++\ldots$ en todo $\mathbb{R}$ en caso que se desee tenerlo en cuenta).

$x+1$	- - -	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
x	- - -	- - -	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$x-1$	- - -	- - -	- - -	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$x-4$	- - -	- - -	- - -	- - -	+ + +	+ + +	+ + +
$x-5$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	+ + +	+ + +
$x-10$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	+ + +
x^2+4	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
	$(-\infty,-1)$		$(0,1)$		$(4,5)$		$(10,+\infty)$

-1 0 1 4 5 10

FIGURA N° 2.18

Luego la solución total es $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(4,5)\cup(10,+\infty)$.

Utilizando este mismo diagrama se pueden obtener de inmediato los siguientes resultados:

La solución de la desigualdad $\dfrac{(x-1)(x-4)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)}\geq 0$ es $(-\infty,-1)\cup(0,1]\cup[4,5]\cup[10,+\infty)$

Y la solución de la desigualdad $\dfrac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-10)}{x(x^2+4)(x+1)}<0$ es $(-1,0)\cup(1,4)\cup(5,10)$.

EJERCICIOS

Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

1. $0\leq 2x-6\leq 4$
2. $-x^3-2x^2+8x<0$
3. $2x-2\geq 3+x$
4. $\dfrac{x+4}{x-2}\leq 1$
5. $\dfrac{2x+5}{x+1}>\dfrac{x+1}{x+1}$
6. $\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{x+1}{2}<1-\dfrac{x}{7}$
7. $\dfrac{x-2}{x+2}\geq\dfrac{2x-3}{x-1}$
8. $4<\dfrac{3x-10}{x+7}<24$
9. $\left(\sqrt[3]{x-3}\right)\left(\sqrt[4]{x-2}\right)\geq 0$

10. $x < x^2 - 12 < 4x$

11. $1 - x - 2x^2 \geq 0$

12. $\dfrac{(x^2 + x - 6)(x^2 - 1)}{x^3 + x^2 - 2x} \geq 0$

13. $\dfrac{(x^2 + 4x + 5)(x^4 + 1)}{(x^4 + 2x^2 + 2)(x^3 + 1)} \leq 0$

2.2. VALOR ABSOLUTO

Se define el valor absoluto de un número real x, como la distancia del punto que en la recta real representa al número x, al punto que en la recta real representa al número cero y se simboliza con $|x|$. Como la distancia es un número real positivo, si x es positivo entonces distancia de x a cero es x, es decir $|x| = x$; si x es negativo, entonces la distancia de x a cero ya no es x, porque x es negativo, sino que $-x$ que es positivo, es decir $|x| = -x$.

Se sintetiza esta definición así:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Se ha motivado esta definición de valor absoluto de un número real x, con la noción de distancia entre dos puntos de la recta real, pero en realidad la recta real no puede estar separada del plano cartesiano, en el cual a cada punto P del mismo se le hace corresponder una pareja de números reales (a,b), llamados sus coordenadas, obtenidos al proyectar P sobre el eje x y sobre el eje y respectivamente (a es la proyección de P sobre el eje x , b es la proyección de P sobre el eje y).

La noción de distancia entre dos puntos en la recta es un caso particular de la noción de distancia entre dos puntos en el plano toda vez que la recta está en el plano. De cualquier manera la distancia entre dos puntos P y Q del plano es la longitud del segmento de recta cuyos extremos son P y Q. Si las coordenadas de P son (x_0, y_0) y las coordenadas de Q son (x_1, y_1) por una aplicación directa del Teorema de Pitágoras se encuentra que la distancia de P y Q , se simboliza con $d(P,Q)$, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

como se muestra en la figura 2.19

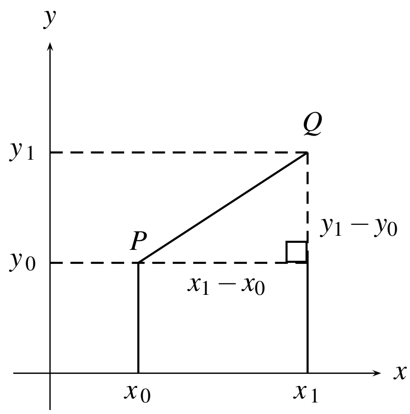


FIGURA N° 2.19

Si se aplica esta fórmula de distancia entre dos puntos del plano a los dos puntos $(x, 0)$ y $(0, 0)$, que también son puntos de la recta real (que corresponden al número x y al número cero), se obtiene:

$$d\,(x,0) \;=\; d\,((x,0),\,(0,0)) \;=\; \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} \;=\; \sqrt{x^2}$$

Pero como $d\,(x\,,0) = |x|$, se tiene entonces un resultado muy interesante y de alguna manera sorprendente para el lector:

$$\sqrt{x^2} \;=\; |x|$$

Este resultado se puede utilizar como definición de valor absoluto de x, por cuanto que si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ y si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, toda vez que el símbolo $\sqrt{x^2}$ representa la raíz cuadrada positiva de x^2.

Ejemplo

$|2| = 2$ ya que $2 \geq 0$

$|-4| = -(-4) = 4$ ya que $-4 < 0$

2.2.1. Propiedades del valor absoluto

Propiedad 1

$|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si por definición el valor absoluto de x es la distancia del número real x al número cero, y toda distancia es no negativa, entonces valor absoluto de x es positivo o cero.

Propiedad 2

$|x|^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \geq 0$, la distancia de x a cero es x, y la distancia de x a cero es $|x|$, luego $|x| = x$, y $|x|^2 = x^2$.

Si $x < 0$, la distancia de x a cero es $-x$, y la distancia de x a cero es $|x|$, luego $|x| = -x$, y $|x|^2 = (-x)(-x) = x^2$.

Lo que se acaba de exponer corresponde a una explicación de la propiedad, lo que se hará con las propiedades siguientes, pero adicionalmente se presentará la demostración rigurosa de cada propiedad.

Demostración

Por definición $|x| = \sqrt{x^2}$, luego al elevar al cuadrado se obtiene $|x|^2 = x^2$

Ejemplo

$|5|^2 = 5^2 = 25; \quad |-3|^2 = (-3)^2 = 9$

Propiedad 3

$|x| = y$ es equivalente a $[(y \geq 0) \ y \ (x = y \ \text{ó} \ x = -y)]$

Como $|x| \geq 0$, si $|x| = y$, entonces $y \geq 0$.

ahora, si $|x| = y$, entonces la distancia de x a cero es y, así que si x y y están al lado derecho del cero, $x = y$, ó si por lo contrario x y y están a lados opuestos del cero pero a la misma distancia, $x = -y$.

Demostración

Si $|x| = y$, entonces $\sqrt{x^2} = y$, luego $y \geq 0$. Por otro lado, si $|x| = y$, entonces $x^2 = y^2$, es decir $x^2 - y^2 = 0$, equivalente a $(x - y)(x + y) = 0$, lo que significa que $x - y = 0$ ó $x + y = 0$. Si $x - y = 0$, entonces $x = y$, si $x + y = 0$, entonces $x = -y$

Ejemplo

Halle los valores de x que satisfacen la ecuación $|x - 2| = 3x - 9$.

$$|x-2| = 3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 9 \geq 0 \\ \quad y \\ x - 2 = 3x - 9 \text{ ó } x - 2 = -(3x - 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \ y \\ x = 7/2 \text{ ó } x = 11/4 \end{cases}$$

por lo tanto puesto que $11/4$ no es mayor que 3 entonces
$\{x \mid |x - 2| = 3x - 9\} = \{7/2\}$ es el conjunto solución.

Propiedad 4

$|x| = |y|$ equivale a $x = y$ ó $x = -y$.

Si $|x| = |y|$, entonces la distancia de x a cero es igual a la distancia de y a cero. Si x y y están del mismo lado del cero, entonces $x = y$. Si x y y están a lados opuestos del cero, entonces $x = -y$.

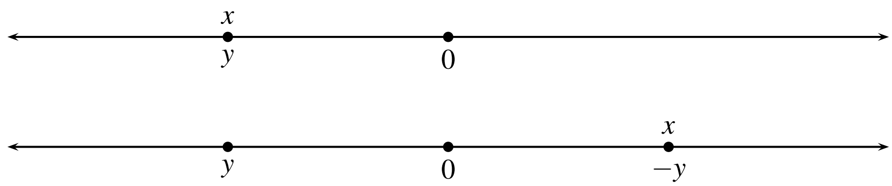


FIGURA N° 2.20

Demostración

Si $|x| = |y|$, entonces $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, luego $x^2 = y^2$, y así $x^2 - y^2 = 0$, que al factorizar lleva a $(x - y)(x + y) = 0$, por tanto $x - y = 0$ ó $x + y = 0$, es decir, $x = y$ ó $x = -y$.

Propiedad 5

$|x| = 0$, si y solo si $x = 0$

Si $|x| = 0$, entonces la distancia de x a cero es cero.

Para que la distancia entre dos puntos sea cero se requiere que los dos puntos sean iguales, luego si $|x| = 0$, entonces x debe ser cero. Recíprocamente, si $x = 0$, entonces la distancia de x a cero es cero, luego $|x| = 0$.

Demostración

$|x| = 0$, entonces $\sqrt{x^2} = 0$, luego $x^2 = 0$, de donde se deduce que $x = 0$.

Ejemplo

i. $|x - 2| = 0$ equivale a $x - 2 = 0$, es decir, $x = 2$.

ii. $\left|x^2 - 5x + 6\right| = 0$ equivalente a $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0$ es decir $x = 2$ ó $x = 3 \Leftrightarrow x \in \{2, 3\}$.

Propiedad 6

Si $k \geq 0$; $|x| \leq k$ es equivalente a $-k \leq x \leq k$.

Si $|x| \leq k$, entonces la distancia de x a cero es menor o igual que k. La distancia del número k al número cero es k. La distancia del número $-k$ al número cero es k. Luego los números x que están a una distancia de cero menor o igual que k son todos los del intervalo cerrado $[-k, k]$, es decir los x tales que $-k \leq x \leq k$, como se ilustra con la gráfica.

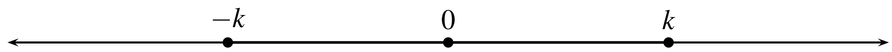


FIGURA N° 2.21

Demostración

Si $k \geq 0$ y $|x| \leq k$, entonces $\sqrt{x^2} \leq k$, luego al elevar al cuadrado $x^2 \leq k^2$ equivalente a $x^2 - k^2 \leq 0$. Si se factoriza el miembro izquierdo se obtiene $(x-k)(x+k) \leq 0$, resolviendo esta desigualdad por los métodos conocidos se tiene:

	$-k$	k	
$x-k$	- - - - - - - -	- - - - - - - -	+ + + + +
$x+k$	- - - - - - - -	+ + + + + + + +	+ + + + +
$(x-k)(x+k)$	+ + + + + + + +	- - - - - - - -	+ + + + +

FIGURA N° 2.22

la solución de la desigualdad es el intervalo $[-k, k]$, es decir el conjunto de los valores x tales que $-k \leq x \leq k$.

Ejemplo

i. $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ ó sea $x \in [-3, 3]$

ii. $|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 2-1 < x < 2+1$ ó sea $x \in (1, 3)$.

Propiedad 7

$-|x| \leq x \leq |x|$.

Como $|x| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces sobre la recta real $|x|$ debe estar a la derecha del cero y evidentemente $-|x|$ debe estar a la izquierda del cero, luego inicialmente $-|x| \leq |x|$.

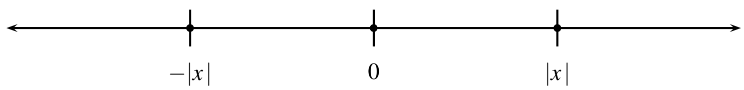


FIGURA N° 2.23

ahora si $x \geq 0$, gráficamente se tiene:

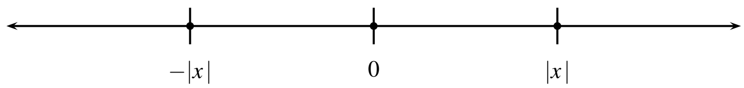


FIGURA N° 2.24

$-|x| \leq |x| = x$ ó $|x| \leq x = |x|$, equivalente a $-|x| \leq x \leq |x|$.

Similarmente si $x < 0$, gráficamente se tiene:

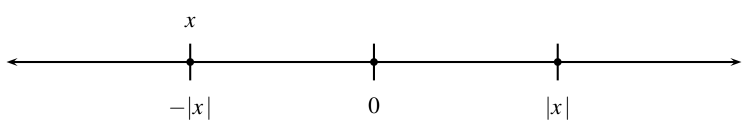


FIGURA N° 2.25

$-|x| = x \leq |x|$, equivalente a $-|x| \leq x \leq |x|$.

Demostración

$|x| = |x|$, entonces $|x| \leq |x|$. Como $|x| \geq 0$, la propiedad (6) permite interpretar que si $|x| \leq |x|$, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$. (tomando como k el $|x|$ del lado derecho de la desigualdad).

Ejemplos

i. $-|5| \leq 5 \leq |5|$;

ii. $-|-3| \leq -3 \leq |-3|$.

Propiedad 8

$|xy| = |x|\,|y|$.

Demostración

Aplicada la definición a xy se obtiene $|xy| = \sqrt{(xy)^2}$, luego

$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\,|y|$.

Ejemplos

i. $|(5)\,(4)| = |5|\,|4|\,;\quad |(5)\,(-3)| = |5|\,|-3|\,;\quad |(-3)\,(-6)| = |-3|\,|-6|\,.$

ii. $\left|x^2\right| = |(x)\,(x)| = |x|\,|x| = |x|^2 = x^2$

iii. $|-x| = |(-1)\,(x)| = |-1|\,|x| = |x|$

iv. $|a-b| = |(-1)\,(b-a)| = |-1|\,|b-a| = |b-a|$

Propiedad 9

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \mathbb{R}\quad y \neq 0$.

Demostración

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}.$$

Propiedad 10

Si $k \geq 0$; $|x| \geq k$ es equivalente a $x \leq -k$ ó $x \geq k$.

Si $k \geq 0$ y $|x| \geq k$, entonces la distancia de x a cero es mayor o igual que k. La distancia de k a cero es k, y la distancia de $-k$ a cero también es k, luego los x cuya distancia a cero es mayor o igual a k son los que están a la derecha de k o el mismo k ó los que están a la izquierda de $-k$ o el mismo $-k$, como se ilustra en la gráfica.

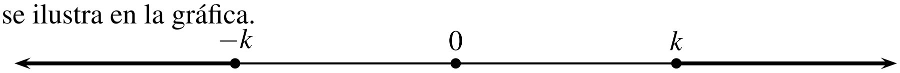


FIGURA N° 2.26

y así $|x| \geq k$ es equivalente a $x \leq -k$ ó $x \geq k$

Demostración

Si $|x| \geq k$, entonces $\sqrt{x^2} \geq k$, luego $x^2 \geq k^2$, es decir $x^2 - k^2 \geq 0$, que se puede expresar también como $(x-k)\,(x+k) \geq 0$ cuya solución es:

$x \leq -k$ ó $x \geq k$ (ver demostración de propiedad (6)).

Ejemplos

i. $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4$ ó $x \leq -4$ o sea $x \in [4, +\infty) \cup (-\infty, -4]$

ii. $|x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 > 1$ ó $x-2 < -1$ o sea $x > 3$ ó $x < 1$, es decir, $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

NOTA

Observe la diferencia entre los ejemplos de las propiedades 6 y 10; mientras que en los ejemplos de la propiedad 6 se trabajó con la intersección, en los ejemplos de la propiedad 10 se trabajó con la unión.

Propiedad 11

$|x+y| \leq |x|+|y|.$

Se podría pensar que similarmente a las propiedades 8 y 9, también se deba tener que $|x+y| = |x|+|y|$, pero en general eso es falso, por ejemplo si $x = 8$ y $y = -3$, entonces, $|x+y| = |8+(-3)| = |5| = 5$, mientras que $|x|+|y| = |8|+|-3| = 8+3 = 11$

Demostración

De la propiedad (7) se concluye que $-|x| \leq x \leq |x|$; $-|y| \leq y \leq |y|$, al sumar las dos desigualdades, se obtiene:

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$ equivalente $|x+y| \leq (|x|+|y|)$. (Propiedad (6)).

Ejemplos

i. $|5+3| \leq |5|+|3|$

ii. $|-2-3| \leq |-2|+|-3|$

iii. $|-3+5| \leq |-3|+|5|$

Propiedad 12

$|x| = |-x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Como el opuesto de x es $-x$, la distancia de $-x$ a cero es la misma distancia de x a cero, luego $|x| = |-x|$.

Demostración

$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$

Propiedad 13

$|x-y| \leq |x|+|y|.$

Demostración

$|x-y| = |x+(-y)|$

$\leq |x| + |-y\,| \;=\; |x| + |\,y\,|$, luego

$$|\,x-y\,| \;\leq\; |x| + |\,y\,|$$

Propiedad 14

$|x| - |y| \;\leq\; |x-y\,|$

Demostración

$|\,x\,| \;=\; |x+y-y\,| \;=\; |(x-y)+y\,| \;\leq\; |\,x-y\,| + |\,y\,|$

es decir $|x\,| \;\leq\; |x-y\,| + |y\,|$, por tanto

$$|x-y\,| \;\geq\; |x\,| - |y\,|$$

Ejemplos

$|5-2| \;\geq\; |5| - |2|$
$|5-2| \;\geq\; |2| - |5|$

2.2.2. Aplicaciones de las propiedades

En los siguientes ejemplos se ilustrará como se utilizan estas propiedades y el concepto de valor absoluto en la solución de algunas ecuaciones y desigualdades.

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la ecuación $|x-7| \;=\; 10$
$|x-7| \;=\; \pm\,(x-7) \;=\; 10$; luego $x-7 \;=\; 10$ ó $-(x-7) \;=\; 10$, es decir $x=17$ ó $x=-3$.
luego el conjunto solución es $\{17\,,-3\}$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de $|\,x-4\,| \;\leq\; 1$.

$|\,x-4\,| \;\leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1 \;\leq x-4 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 3 \leq x \leq 5$, es decir $x \in [3\,,5]$.

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la desigualdad $\left|x^2-4\right| \;\leq 1$.

Sea $y \;=\; x^{\,2}$, luego $\left|x^{\,2}-4\right| \;=\; |\,y-4\,| \;\leq 1 \;\Leftrightarrow\; 3 \leq y \leq 5$. (ejemplo anterior). Como $y \;=\; x^{\,2}$ se tiene que $3 \leq x^{\,2} \leq 5$, y así $x^{\,2} \;\geq\; 3$ y $x^{\,2} \;\leq\; 5$, cuyos conjuntos solución son $\left(-\infty,-\sqrt{3}\,\right] \cup \left[\sqrt{3}\,,+\infty\right)$ y $\left[-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\right]$ respectivamente, y así la solución de la desigualdad $\left|x^{\,2}-4\right| \;\leq\; 1$ es el conjunto
$\left\{\left(-\infty,-\sqrt{3}\right] \cup \left(\sqrt{3}\,,+\infty\right)\right\} \cap \left[-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\right] \;=\; \left[-\sqrt{5}\,,-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,,\sqrt{5}\right]$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0$.

i. Si $x \geq 0$, $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)\,(x+1) = 0$ entonces $x = 3$ ó $x = -1$ como $x \geq 0$, se tiene que $x = 3$ es una solución.

ii. Si $x < 0$; $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)\,(x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$ ó $x = 1$ como $x < 0$, se tiene que $x = -3$ es otra solución.

   Así, la solución total es $\{-3\,,3\}$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la desigualdad

$$|x-2| - |x+6| \leq 3.$$

En desigualdades de este tipo, primero se divide la recta en intervalos determinados por los valores de x donde $|x-2| = 0$ y $|x+6| = 0$, luego se analiza la desigualdad en cada intervalo.

Como $|x-2| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$ y $|x+6| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -6$; los intervalos son $(-\infty\,,-6]\,,(-6\,,2]\,,\;[2\,,+\infty)$.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases} \qquad y \qquad |x+6| = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \geq -6 \\ -x-6 & \text{si } x < -6 \end{cases}$$

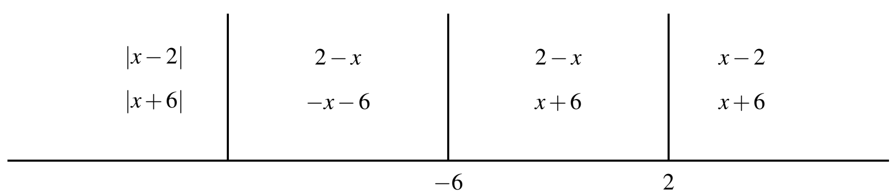


FIGURA N° 2.27

i. Si $x < -6$, $|x-2| - |x+6| = (2-x) + x + 6 \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 8 \leq 3$ (absurdo),

   luego no hay solución en este intervalo.

ii. Si $-6 < x < 2$,
   $|x-2| - |x+6| = 2 - x - (x+6) = -2x - 4 \leq 3 \;\Leftrightarrow\; -7 \leq 2x \;\Leftrightarrow\; x \geq -7/2$

   así que la solución es $(-6\,,2) \cap [-7/2\,,+\infty) = [-7/2\,,2)$, pues hay que considerar el hecho de que $-6 < x < 2$, es decir, $x \in (-6\,,2)$.

iii. Si $x > 2$, $|x-2| - |x+6| = (x-2) - (x+6) = -8 \leq 3$, que es una desigualdad verdadera para todo $\mathbb{R}$, así, la solución en este intervalo es $(2\,,+\infty) \cap (-\infty\,,+\infty) = (2\,,+\infty)$.

Faltaría por analizar si $x = -6,\ x = 2$ son soluciones, y para ello se reemplaza en la ecuación $|x-2| - |x+6| \leq 3$,

así: para $x = -6;\ |-6-2| = 8 \leq 3$ (absurdo),
y para $x = 2 \quad |2-2| - |2+6| = -8 \leq 3$ verdadero, luego $x = 2$ es solución.
La solución total es $[-7/2,\, 2) \cup (2\,, +\infty) \cup \{2\} = [-7/2\,, +\infty)$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la desigualdad $(|x| - 2)\,(|x-1| - 3) \geq 0$

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases} \qquad y \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x < 1 \end{cases}$$

$$|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad y \quad |x-1| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1.$$

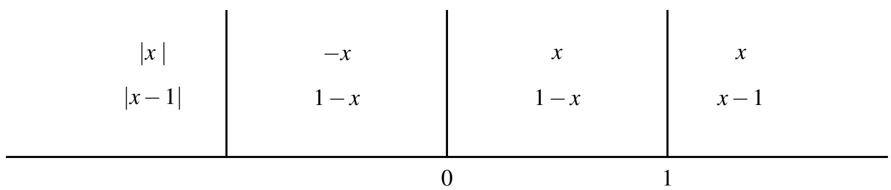


FIGURA N° 2.28

i. Si $x < 0$
$(|x| - 2)\,(|x-1| - 3) = (-x-2)\,(1-x-3) = (-x-2)\,(-x-2) \geq 0 \;\Leftrightarrow$
$(-1)^2\,(x+2)^2 \geq 0$,

que se cumple para todo número real, luego la solución en i) es

$(-\infty, 0) \cap (-\infty\,, +\infty) = (-\infty\,, 0)$

ii. Si $0 < x < 1;\ (|x| - 2)\,(|x-1| - 3) = (x-2)\,(1-x-3) = (x-2)\,(-x-2) \geq 0$

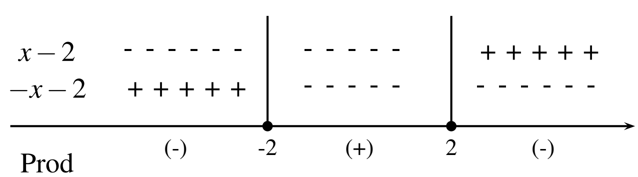


FIGURA N° 2.29

y así el producto es positivo en el intervalo $(-2\,, 2\,)$, luego la solución en ii) es
$(0,1) \cap (-2,2) = (0,1)$

iii. Si $x > 1;\ (|x| - 2)\,(|x-1| - 3) = (x-2)\,(x-1-3) = (x-2)\,(x-4) \geq 0$

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x-2$	- - - - - -		+ + + + +		+ + + + +
$x-3$	- - - - - -		- - - - - -		+ + + + +
Prod	(+)		(-)		(+)

FIGURA N° 2.30

y el producto es positivo en $\{(-\infty, 2) \cup (4\,,+\infty)\}$, así que la solución en iii) es $\{(-\infty, 2) \cup (4\,,+\infty)\} \cap (1\,,+\infty) \;=\; (1\,,2) \,\cup\, (4\,,+\infty)\,.$

Además se puede verificar que en los extremos de los intervalos: 0,1,2,4, también se satisface la desigualdad por tanto la solución total es: $(-\infty.\ 0] \,\cup\, [0\,,2] \,\cup\, [4\,,+\infty)$.

Ejemplo

El conjunto solución de la desigualdad $\left|x^{18}\right| + x^2 + 4 \geq 0$ es el conjunto de los números reales y el conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{|x+3|+5}{x^4+1} \;<\; 0$ es vacía. (Por qué).

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la desigualdad $|x| - |x-1| + |x+2| \;\geq 0$

Como

$$|x| = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ \ x \geq 1 \\ -(x-1) & si\ \ x < 1 \end{cases} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2 & si\ \ x \geq -2 \\ -(x+2) & si\ \ x < -2 \end{cases}$$

se tiene que

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$		x		x
$\lvert x-1\rvert$	$-(x-1)$		$-(x-1)$		$-(x-1)$		$(x-1)$
$\lvert x+2\rvert$	$-(x+2)$		$(x+2)$		$(x+2)$		$-(x+2)$

FIGURA N° 2.31

los intervalos a considerar son $(-\infty, -2]\,;\;\; (-2\,,0]\,;\;\; (0\,,1]\;\; y\;\; (1\,,+\infty)$

i. Si $x < -2\,,\;\; |x| - |x-1| + |x+2| \;=\; -x + (x-1) - (x+2) \;\geq 0\,;$ si y sólo si $-x-3 \geq 0$ si y sólo si $x \leq -3\,,$ así que la solución en este intervalo es $(-\infty, -3] \cap (-\infty, -2) \;=\; (-\infty, -3]$

ii. Si $-2 < x < 0\,,\;\; |x| - |x-1| + |x+2| \;=\; -x + (x-1) + x + 2 \geq 0$ si y sólo si $x+1 \geq 0$ si y sólo si $x \geq -1$ y la solución en este intervalo es $[-1\,,+\infty) \cap (-2\,,0) \;=\; [-1\,,0)$

iii. Si $0 \,<\, x \,<\, 1\,;\;\; |x| - |x-1| + |x+2| \;=\; x + (x-1) + x + 2 \;=\; 3x + 1 \geq 0$ si y sólo si $x \geq\; -1/3$ y así la solución en este intervalo es $\left[-1/3\,,+\infty\right) \cap (0\,,1) = (0\,,1)$

iv. Si $x > 1$; $|x| - |x-1| + |x+2| = x - (x-1) + x + 2 = x + 3 \geq 0$ si y sólo si $x \geq -3$, y así la solución en este intervalo es $[-3, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$

Faltaría por analizar si $x = 0$; $x = -2$; $x = 1$ son soluciones y para ello se reemplaza en la inecuación $|x| - |x-1| + |x+2| \geq 0$, así

Si $x = -2$; $|-2| - |-2-1| + |-2+2| = 2 - 3 + 0 \geq 0$ absurdo
Si $x = 0$; $|0| - |-1| + |2| = -1 + 2 = 1 \geq 0$, luego $x = 0$ es solución
Si $x = 1$; $|1| - |0| + |3| = 1 + 3 = 4 \geq 0$, luego $x = 1$ es solución

Luego la solución total es

$$(-\infty, -3] \cup [-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} \cup \{1\} = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty).$$

y por consiguiente la solución de $|x| - |x-1| + |x+2| < 0$ es el intervalo $(-3, -1)$.

Ejemplo

Halle el conjunto solución de la desigualdad $|x + 1 - |x-2|| \leq 1$

i. Si $x - 2 \geq 0$, es decir si $x \geq 2$ entonces

$|x + 1 - |x-2|| = |x + 1 - (x-2)| = |x + 1 - x + 2| = 3 \leq 1$ absurdo, luego no hay solución en este caso.

ii. Si $x - 2 < 0$, es decir, si $x < 2$ entonces
$|x + 1 - |x-2|| = |x + 1 + x - 2| = |2x - 1| \leq 1$ si y sólo si $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$ si y sólo si $0 \leq 2x \leq 2$ si y sólo si $0 \leq x \leq 1$, y la solución en este caso es $[0, 1] \cap (-\infty, 2) = [0, 1]$ y así la solución total es $[0, 1] \cup \phi = [0, 1]$

EJERCICIOS

Hallar el conjunto solución de las siguientes expresiones.

1. $|3x - 2| = 7$
2. $|3 - x| = |8 - x|$
3. $\left|x^2 - 1\right| + \left|x^2 - 16\right| = 2$
4. $\left|\dfrac{2x}{3} - 4\right| \leq 1$
5. $|3x - 5| \geq 4$
6. $|x + 1| \geq \dfrac{x-1}{3}$

7. $||x-2|+4| = 3$

8. $||x|-4| = 1$

9. $\left|\dfrac{x-1}{x-4}\right| \geq 7$

10. $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| \geq x$

11. $\left|5-x^{-1}\right| \leq 4$

12. $\left|x^2-4x+3\right| > x$

13. $||x-2|-|x+4|-x| \geq 3$

14. $\dfrac{(x+1)\,(x-2)\,(x-3)}{|x+4|\,x} \geq 0$

15. $||x|-|x-1|| \leq 4$

16. $\left(\sqrt{|x+4|^2}-25\right)\left(\sqrt{x^2}-9\right) \leq 0$

17. Demostrar que la distancia entre dos números reales x, e y es $|x-y|$

18. Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas.

    a) $|x^n| = |x|^n$
    b) $|x+y+z| \geq |x|+|y|+|z|$
    c) $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$
    d) $\sqrt{(x-5)^2} = (x-5)$

Capítulo 3

PLANO CARTESIANO Y NÚMEROS COMPLEJOS

3.1. El PLANO CARTESIANO

Una pareja ordenada de números reales es una expresión de la forma (a,b) con a y b números reales, con la propiedad de que

$$(a\,,b) \;=\; (c\,,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a=c \quad \text{y} \quad b=d$$

Así por ejemplo $\quad (1\,,2) \;\neq\; (2\,,1)$

Al conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales se llama producto cartesiano de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ y se nota $\quad \mathbb{R}\cdot\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;=\; \{(x\,,y) \mid x\in\mathbb{R} \;\; y \;\; y\in\mathbb{R}\} \;=\; \mathbb{R}^2.$$

Este conjunto es de gran importancia en la representación gráfica de curvas planas y en la interpretación geométrica de los números complejos.
Gráficamente el conjunto $\mathbb{R}^2$ representa el conjunto de todos los puntos de un plano, llamado plano cartesiano. Esa representación se logra asociando unívocamente a cada una de las parejas de $\mathbb{R}^2$ un punto del plano, y recíprocamente a cada punto del plano una pareja de $\mathbb{R}^2$, como se explica a continuación.
En el plano se consideran dos rectas reales (metrizadas), una horizontal llamada *eje x* y otra vertical llamada *eje y,* que se cortan perpendicularmente en un punto llamado *origen* y al cual se le asigna la pareja (0,0) de $\mathbb{R}^2$. (Ver figura 3.1)

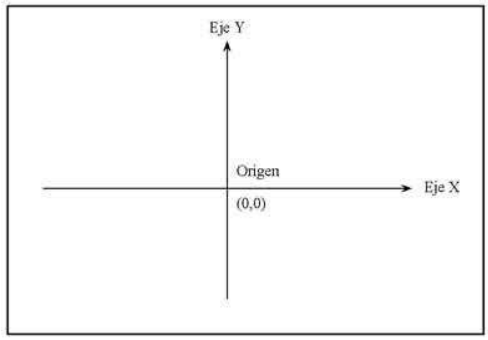


FIGURA N° 3.1

Sobre la recta horizontal o *eje x* se ubican los elementos de la forma $(a, 0)$ de tal manera que si $a > 0$ el punto esté a la derecha del origen, y si $a < 0$ el punto esté a su izquierda (*Ver figura 3.2*). Sobre la recta vertical o *eje y* se ubican las parejas de la forma $(0, b)$ de tal manera que si $b > 0$ el punto esté por encima del origen, y si $b < 0$ el punto esté por debajo del origen.

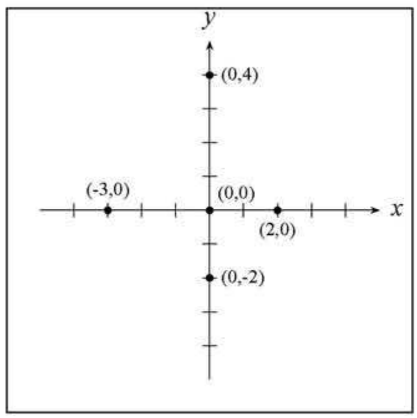


FIGURA N° 3.2

Ahora para representar cualquier pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $x \neq 0$, $y \neq 0$, se localizan los puntos correspondientes a las parejas $(x, 0)$ y $(0, y)$ y se trazan por estos puntos rectas paralelas a los *ejes y* y *x* respectivamente, y al punto Q de corte de estas dos rectas se le asigna la pareja (x, y) de $\mathbb{R}^2$. (Ver figura 3.3).

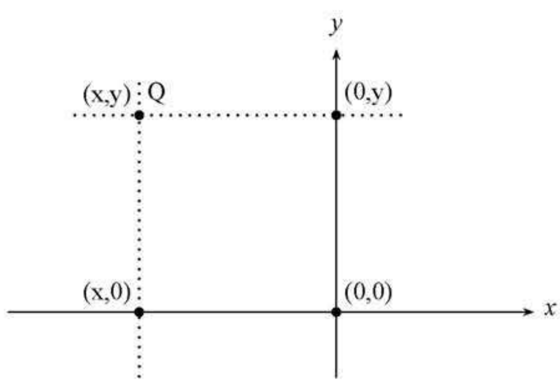


FIGURA N° 3.3

A los dos números que conforman la pareja (x, y) representada por el punto Q, se les llama coordenadas del punto Q, o también se dice que Q tiene coordenadas x y y.
Para el procedimiento recíproco, dado un punto P cualquiera del plano se trazan por ese punto rectas perpendiculares a los *ejes* x y y respectivamente, determinando así dos puntos, uno sobre el *eje* x con coordenadas $(\alpha, 0)$ y otro sobre el *eje* y con coordenadas $(0, \beta)$. (*Ver figura 3.4*). Al punto P se le asigna la pareja (α, β), es decir, las coordenadas del punto P son α y β.

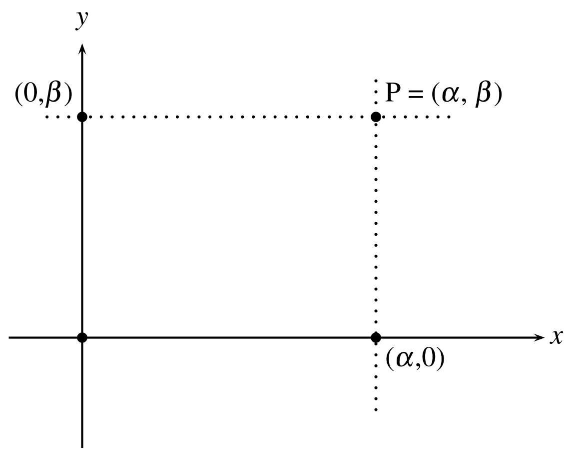


FIGURA N° 3.4

Ejemplos

1. Localizar en el plano cartesiano las siguientes parejas ordenadas.

   $(0, 4) \quad (-1, 2) \quad (-3, 0) \quad (0, -3) \quad y \quad (4, 0)$.

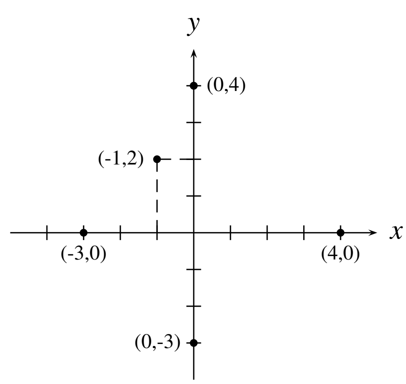


FIGURA N° 3.5

2. Represente gráficamente el siguiente sub-conjunto de $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 2\}$.

Se pide que la coordenada x de los puntos sea mayor o igual que -1 y menor o igual que 2, es decir que esos puntos estén entre la recta vertical que pasa por el punto $(-1,0)$ y la recta vertical que pasa por $(2,0)$.

Similarmente si $0 \leq y \leq 2$, esos puntos deben estar entre el eje x y la recta horizontal que pasa por el punto $(0,2)$. (*Ver figura 3.6*).

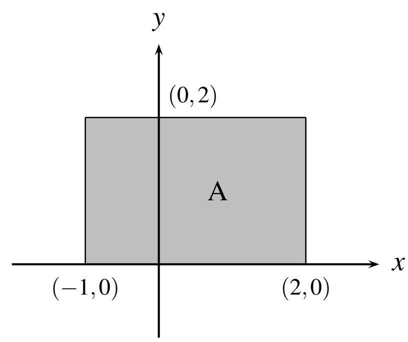


FIGURA N° 3.6

3. Represente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(x,y) \mid x = -4 \quad \text{ó}, \quad y = 5\}$.

   Se pide que la coordenada x de esos puntos sea -4 o que la coordenada y sea 5. Los puntos del plano cartesiano con coordenada $x = -4$ son todos los de la recta vertical que pasa por $(-4,0)$ y los puntos del plano con coordenada $y = 5$ son los de la recta horizontal que pasa por $(0,5)$. Así la representación que se pide está constituida por las dos rectas señaladas. (*Ver figura 3.7*).

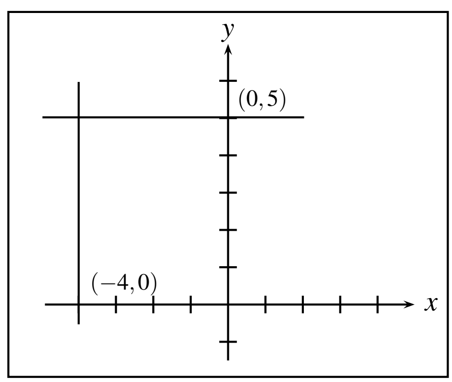


FIGURA N° 3.7

4. Represente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $C = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 4 \quad y = 3\}$

   Este conjunto está constituido por todos los puntos de la recta horizontal que pasa por $(0,3)$ y con coordenadas x entre 1 y 4. (*Ver figura 3.8*).

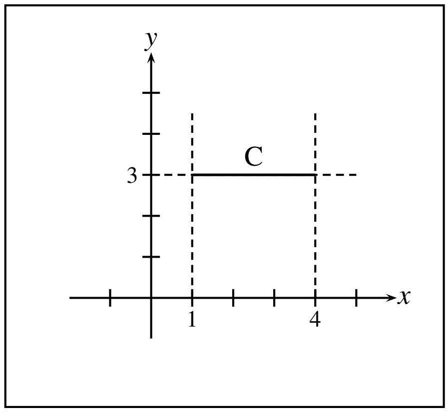


FIGURA N° 3.8

5. Represente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $D = \{(x, y) \mid x < 0 \quad ó \quad y < 0\}$

   Este conjunto está constituido por todos los puntos del plano cartesiano que están a la izquierda del eje y o bajo el eje x. (*Ver figura 3.9*).

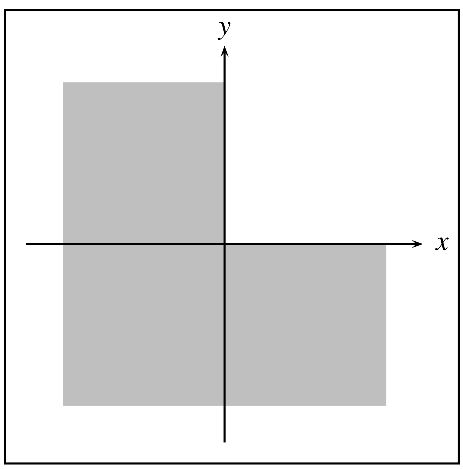


FIGURA N° 3.9

6. Represente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $\quad E = \{(x,y) \mid y > x^2\}$

   Se procede primero a construir la gráfica de la ecuación $\quad y = x^2$

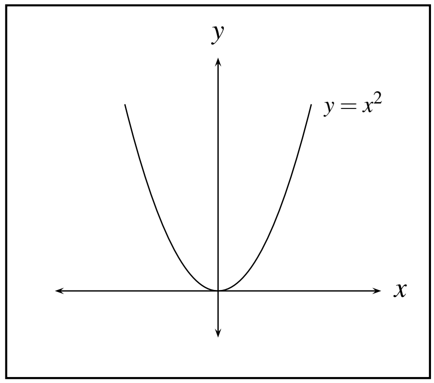


FIGURA N° 3.10

Se observa que esta gráfica divide el plano en 3 conjuntos de puntos: los que están sobre la curva, que son los que satisfacen la ecuación $y = x^2$, los que están en la parte superior de la curva y los que están en la parte inferior. Uno de los dos últimos conjuntos de puntos es el que satisface la desigualdad $y > x^2$ y el otro la desigualdad $y < x^2$, ¿ Cómo saber cual de ellos satisface una u otra desigualdad? Una forma de determinar esto es tomar un punto cualquiera (a,b) en una de estas regiones, y observar haciendo $x = a$ y $y = b$ cual de las dos desigualdades se satisface. La desigualdad que se cumple para ese punto, se cumple para toda la región donde está el punto.
Así por ejemplo si se toma como punto $(a,b) = (2,0)$ que está en la región inferior se observa que haciendo $x = 2$ y $y = 0$ se tiene que $0 < 4$ es decir $y < x^2$, luego en toda la región donde está ese punto (región inferior de la gráfica) se satisface esta desigualdad y en consecuencia entre la otra región (la superior) se satisface la desigualdad $y > x^2$, luego la solución al problema esta representada por la parte sombreada.

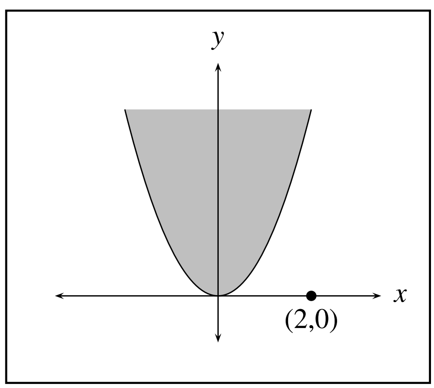


FIGURA N° 3.11

7. Represente el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ $F = \{\ (x,y) \mid y > x^2 \quad y \quad y - x \leq 4\ \}$

   La solución de este problema corresponde a la intersección (puntos en común) de dos zonas lo que corresponde a $y > x^2$ que se determino en el ejemplo anterior y la de $y - x \leq 4$ que aplicando el mismo procedimiento del ejercicio anterior corresponde gráficamente a

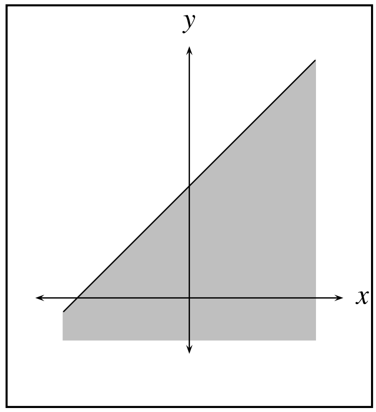


FIGURA N° 3.12

Superpuestas las dos gráficas se observa que los puntos comunes están representados por la región sombreada de la figura

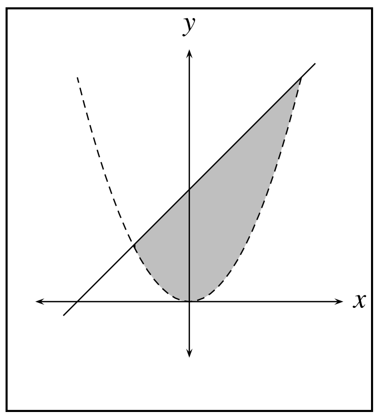


FIGURA N° 3.13

¿El pedazo de la gráfica de $y = x^2$ que aparece punteada hace parte de la solución?
¿El pedazo de la recta $y - x = 4$

EJERCICIOS

Represente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en el plano cartesiano.

1. $\{(x, y) \mid x = -10 \text{ y } y = 5\}$
2. $\{(x, y) \mid y \leq 1\}$
3. $\{(x, y) \mid x \leq 1 \text{ y } y \leq 0\}$
4. $\{(x, y) \mid x \leq 0\}$
5. $\{(x, y) \mid x + y \geq 0\}$

6. $\left\{ (x, y) \mid y \leq x^2 \right\}$
7. $\left\{ (x, y) \mid y > x^2 + 3x - 2 \right\}$
8. $\{ (x, y) \mid y = 2x + 3 \quad -2 \leq x \leq 6 \}$
9. $\left\{ (x, y) \mid (x - 2y + 3) \left(y - x^2 \right) = 0 \right\}$
10. $\{ (x, y) \mid |x| = |y| \}$
11. $\left\{ (x, y) \mid y \geq \left| x^2 - 1 \right| \right\}$
12. $\{ (x, y) \mid y = -|x| + 1 \}$
13. $\{ (x, y) \mid |x| + |y| \leq 4 \}$
14. Localizar todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ cuya distancia al origen sea una constante R_O.
15. Localizar todos los puntos cuya distancia al eje x sea una constante k.

3.2. NÚMEROS COMPLEJOS. ($\mathbb{C}$)

3.2.1. Construcción y Operaciones

Una de las características que tienen los números reales es que todo número real elevado al cuadrado es siempre mayor o igual que cero, o sea que expresiones como $x^2 = -1$ ó $x^2 = -9$ no tienen sentido si se está trabajando con los números reales como universo. Si se quiere trabajar en un universo donde esto tenga sentido, necesariamente debe ser diferente al de los números reales. Para "construir" este universo inicialmente se debe crear un número cuyo cuadrado sea igual a -1, el cual se llamará unidad imaginaria y se notará por la letra i (este "número" no puede ser real) y según esto $i^2 = -1$.
Se desea también que los números reales formen parte de este nuevo universo ya que no se pretende dejar a un lado lo que se ha conseguido en el trabajo con números reales, sino al contrario, extender estas ideas a ese conjunto más grande sin que los reales pierdan como parte de él su estructura y propiedades. Así hasta el momento de ese nuevo conjunto se conocen los reales y la unidad imaginaria i.
Pero es preciso que se trate de conservar en este universo, si no todas, por lo menos una buena parte de las propiedades fundamentales que se conocen de los números, una de ellas por ejemplo, la propiedad clausurativa para el producto nos "obliga" a considerar también como elemento de este conjunto, los que resultan de multiplicar los números reales por el nuevo número i; es decir; números de la forma bi con $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, que se llamarán ***imaginarios puros*** y se caracterizan porque al elevarlos al cuadrado siempre dan un número menor o igual que cero, ya que respetando ciertas propiedades conocidas del producto, $(bi)^2 = b^2 i^2 = b^2 (-1) = -b^2$. Con esto se pueden hallar números cuyo cuadrado sea igual a $-c$, con $c > 0$, éstos serán $\sqrt{c}\,i$ y $-\sqrt{c}\,i$ (es evidente que estos imaginarios puros no son reales). ¿Pero cómo se sumarian esos números entre sí? Lo más natural para sumar $ai + ci$ seria factorizar la i y realizar la suma de los reales a y c que resultaran en la factorización , es decir, $ai + ci = (a + c)i$. Si se quiere mantener en este nuevo conjunto la propiedad clausurativa para la suma, se deben aceptar en él, "números" que se obtengan al sumar cualquier número real "a" con cualquier

número imaginario puro bi, es decir se introduce a este conjunto, números de la forma $a + bi$.
Realmente todos los números que se han aceptado en este nuevo conjunto se pueden expresar en la forma $z = a + bi$ con a, b números reales (a "a" se le llama la ***parte real*** de z y a "b" la ***parte imaginaria***), ya que si a es real, es de la forma $a = a + 0i$ y si es imaginario puro βi es de la forma $\beta i = 0 + \beta i$. A este conjunto así construido se llamará el conjunto de ***los números complejos*** y se nota $\mathbb{C}$, o sea que $\mathbb{C}$ estará formado por los ***números reales*** $a + 0i$ y por los números $a + bi, \; b \neq 0$ llamados ***números imaginarios.***, es decir,

$$C = \{ \quad a+bi \quad | \quad a \quad \text{y} \quad b \quad \in \mathbb{R} \quad \}$$

Se desprende de esta construcción, que para respetar el concepto de igualdad de números reales, se debe definir la igualdad de números complejos en la forma más natural, es decir, dos números complejos son iguales si lo son sus partes reales entre si y sus partes imaginarias, es decir,

$$a + bi = c + di \qquad \text{si y sólo si} \qquad a = c \quad y \quad b = d$$

Ejemplos

i. Si $z = 2 + 7i \quad$ y $\quad w = 7 + 2i$

$$z \neq w \quad \text{pues} \quad \begin{array}{ll} Re(z) = 2 & Re(w) = 7 \\ Im(z) = 7 & Im(w) = 2 \end{array}$$

así $Re(z) \neq Re(w) \quad$ y $\quad Im(z) \neq Im(w)$

ii. Si $z = x + iy = 9 + 14i \quad$ entonces debe ser

$x = 9 \quad$ y $\quad y = 14$, es decir $\quad z = 9 + 14i$

Suma y producto de números complejos

Es preciso también, para que se cumpla la propiedad clausurativa de la suma y producto en todo C, definir de alguna forma adecuada la suma y producto de cualquier par de números de la forma $a + bi$, como se procederá a continuación: La forma más natural de definir la ***suma*** de dos números complejos $a + bi, \; c + di$, teniendo en cuenta que se desea que la suma de dos números reales es un número real y que la suma de dos imaginarios puros, sea un número imaginario puro, es sumando las partes reales, que será la parte real de la suma y sumando las partes imaginarias que será la parte imaginaria de la suma, es decir:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$$

Ejemplos

i. $(3 + 5i) + (2 - 8i) = (3 + 2) + (5 - 8)\, i = 5 - 3i$

ii. $5 + (3 - i) = (5 + 3) - i = 8 - i$

iii. $(i) + (14i) = 15i$

iv. Hallar x, y tal que $(2 - 3i) + (x + iy) = 4 + 3i$

$(2-3i)+(x+yi) = (2+x)+(y-3)\,i = 4+3i$
entonces $\quad 2+x=4 \quad$ y $\quad y-3=3,$
así que $x = 4-2=2 \quad$ y $\quad y = 3+3=6.$

Para definir el ***producto*** en este nuevo conjunto, es necesario tener en cuenta que cuando éste se efectúe entre números reales debe coincidir en resultados y propiedades con los ya conocidos con el producto usual en $\mathbb{R}$, y que cuando se efectúe entre números imaginarios se respete lo que motivó la construcción de este conjunto es decir el hecho de que $(i)\,(i) = i^2 = -1$. Estas razones hacen que no se pueda definir el producto en su forma más natural $(a+bi)\,(c+di) = ac+bdi$, sino que sea necesario dar una definición aparentemente un poco extraña pero que se acopla a los objetivos buscados:

$$(a+bi)\,(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)\,i.$$

Esta definición se puede justificar realizando directamente el producto, utilizando la propiedad distributiva de números reales, y el hecho de que $i^2 = -1$ así:

$$\begin{aligned}(a+bi)\,(c+di) = ac+adi+bci+bidi &= ac+(ad+bc)\,i-bd\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)\,i \qquad \text{luego}\\ (a+bi)\,(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)\,i.\end{aligned}$$

Observe que con esta definición si

$z=0+i \quad$ entonces $\quad z^2 = (0+i)\,(0+i) = (0-1)+(0+0)\,i = -1$

Además utilizando en forma consecutiva el producto de i por si mismo se obtiene:
$i^2=-1 \qquad i^3 = \left(i^2\right)(i) = (-1)\,(i) = -i \qquad i^4 = (i)^2\,(i)^2 = (-1)\,(-1) = 1$

y a partir del exponente 5 el ciclo se sigue repitiendo, es decir

$i^5 = (i)^4\,(i) = i \qquad i^6 = (i)^4\,(i)^2 = (1)\,(-1) = -1$
$i^7 = (i)^4\,(i)^3 = (1)\,(-i) = -i$ etc.

Más general si se quiere calcular i elevado a cualquier número natural, por ejemplo i^{501} se puede proceder de la siguiente forma:

$i^{501} = i^{4(125)+1} = \left(i^4\right)^{125} i = (1)^{125}\,i = (1)\,(i) = i$ y así
$i^{7523} = i^{(1880)\,(4)+3} = \left(i^4\right)^{1880} i^3 = (1)^{1880}\,i^3 = (1)\left(i^3\right) = -i$

es decir para calcular i^p se representa el exponente p en la forma $p = 4n+r$ donde $r=0,1,2$ ó 3, entonces $i^p = i^{4n+r} = \left(i^4\right)^n i^r = (1)\,(i^r) = i^r$ que ya es conocido.

Observe también que el producto de dos números imaginarios no siempre es imaginario, como se vio con $(i)\,(i)$, o también en el muy utilizado resultado:

$$(a+bi)\,(a-bi) = \left(a^2+b^2\right)+(ab-ab)\,i = a^2+b^2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos

i. $(2+3i)\,(3-5i) = (6+15) + (9-10)\,i = 21-i$

ii. $(2i)\,(3+4i) = (0+2i)\,(3+4i) = (0-8) + (6+0)\,i = -8+6i$

iii. $(4+2i)\,(4-2i) = (4)^2 + (2)^2 = 16+4 = 20$

iv. $\dfrac{9-7i}{4} = \dfrac{1}{4}\,(9-7i) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{7}{4}\,i$

v. Escribir el complejo $(1+i)/i$ en la forma $a+bi$

$i^2 = -1$ es decir $(i)\,(i) = -1$ por tanto $i = -\dfrac{1}{i}$, es decir $\dfrac{1}{i} = -i$

luego $(1+i)/i = -i\,(1-+i) = (0-i)\,(1+i) = -1-i.$

Esta suma y este producto satisfacen las mismas propiedades algebraicas fundamentales que satisfacen los números reales. (Conmutativa, asociativa, ..., etc), teniendo en cuenta que los números reales 0 y 1 (que también son complejos), seguirán siendo los módulos para la suma y el producto respectivamente.

El inverso aditivo de $z = a+bi$ es el complejo $w = -z = -a-bi$,
pues $w+z = (-a-bi) + (a+bi) = (-a+a) + (-b+b)\,i = 0+0i = 0.$

El inverso para el producto de $z = a+bi$, para $z \neq 0$ es $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i$

ya que $z.w = (a+bi)\left(\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\,i\right)$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) i = 1+0i = 1.$$

Es evidente, teniendo en cuenta como se construyó el conjunto C, que propiedades de orden en $\mathbb{R}$, como el que todo número elevado al cuadrado sea mayor o igual que cero, no se satisfarán en C, ya que se partió del hecho de que $i^2 = -1 < 0$, por tanto no se "considerará" orden en C como se hizo en R. Aquí no tiene sentido decir que $a+bi$ es mayor que $c+di$ (a menos que $a+bi$ y $c+di$ sean números reales); así, es absurdo decir que $5i > 3i$ ó $1+i < 20+3i$. **¡Entre números imaginarios no tiene sentido el signo de desigualdad!**

3.2.2. Representación Gráfica de Números Complejos

Hay dos números reales que caracterizan un número complejo $a+bi$, su parte real a notada $Re\,(z)$ y su parte imaginaria b, notada $Im\,(z)$ las cuales, de acuerdo al concepto de igualdad en $\mathbb{C}$ si se intercambian entre sí, alteran al número complejo z, pues $a+bi \neq b+ai$ por tanto los números complejos tienen la misma característica que las parejas ordenadas en el sentido de que:

$$a+bi = c+di \;\Leftrightarrow\; a=c \text{ y } b=d \quad \text{y}$$

$$(a,b) = (c,d) \;\Leftrightarrow\; a=c \text{ y } b=d$$

Esto motiva a representar cada número complejo $a + bi$ como la pareja (a, b) donde la primera componente "*a*" corresponde a la parte real del número complejo y se ubicará sobre el eje de las *x*, que se llamará *eje real* y la segunda componente "*b*" representará la parte imaginaria del número complejo y se ubicará sobre el eje y, que se llamará *eje imaginario.*

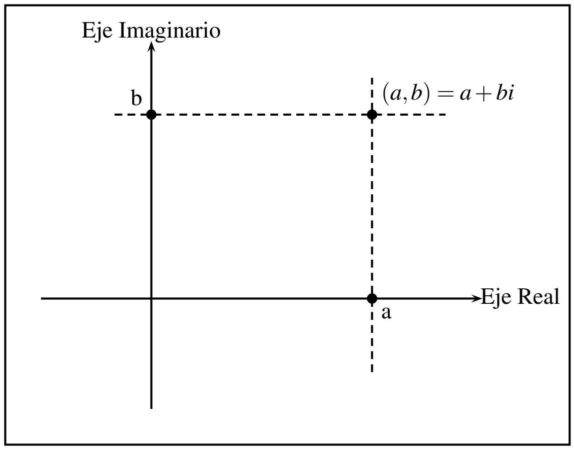


FIGURA N° 3.14

Ejemplos

i. El conjunto de todos los números reales como subconjunto de $\mathbb{C}$ se representa mediante el eje real.

ii. El conjunto de todos los números imaginarios puros se representa por el eje imaginario sin el origen.

iii. El conjunto de todos los números complejos z con $Im(z) = 3$ se representa por la recta horizontal que pasa por $3i$.

iv. El conjunto de todos los números complejos z tales que $Re(z) > 5$ se representa por la zona sombreada en la figura.

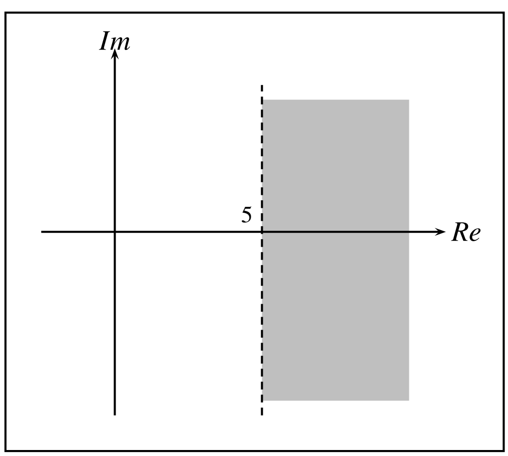


FIGURA N° 3.15

v. El conjunto de todos los números complejos z tales que $Im(z) \leq 8$ se representa por la zona sombreada; incluyendo la recta horizontal que pasa por 8.

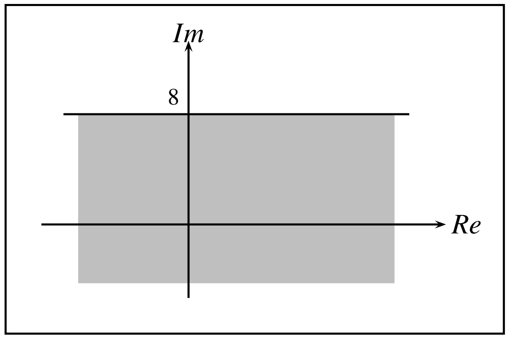


FIGURA N° 3.16

NOTA

Observe que el signo de desigualdad en iv. y v. no es realmente entre números imaginarios, sino entre números reales, pues $R(z)$ e $Im(z)$ son números reales para todo $z \in \mathbb{C}$

3.2.3. Valor Absoluto de Números Complejos

Teniendo en cuenta la representación gráfica de los números complejos que se acaba de conocer, geométricamente el valor absoluto de un número complejo se define lo mismo que en el caso real, como la distancia del punto que representa el número complejo, al origen, es decir la longitud del segmento de recta que va del punto al origen.

Si $z = x + iy$ se puede apreciar en la siguiente gráfica que haciendo uso del teorema de Pitágoras.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

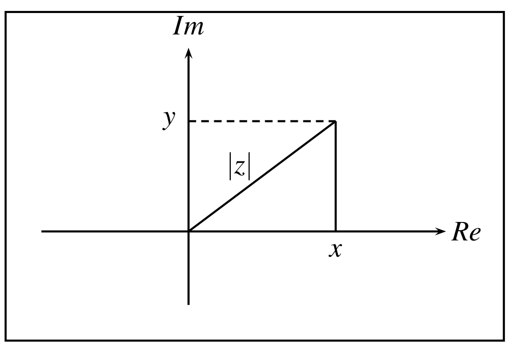


FIGURA N° 3.17

o de otra forma

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

recordando que la parte imaginaria de $z = a + bi$ es b y no bi. Observe que el valor absoluto de un número complejo así definido es siempre un número real no negativo.

Ejemplos

i. Si $z = -8 + 11\,i$ entonces $|z| = \sqrt{(-8)^2 + (11)^2} = \sqrt{64 + 121} = \sqrt{185}$

ii. Si $z = -3$ entonces $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

Observe que en general si $z \in \mathbb{R}$ el valor absoluto de z como número complejo corresponde al mismo valor absoluto de z como número real.

iii. Si $z = -15\,i$ entonces $|z| = \sqrt{0^2 + (-15)^2} = \sqrt{(15)^2} = 15$

iv. Halle el conjunto de todos los números complejos tales que su valor absoluto sea igual a 3, es decir halle todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales $|z| = 3$.

si se hace $z = x + i\,y$ entonces

$|z| = 3 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 9$

que representa una circunferencia con centro en el origen y radio 3. Resultado que era de esperarse pues la distancia de cualquier punto de dicha circunferencia al origen (su centro) es 3 (su radio) y esto coincide con la definición del valor absoluto.

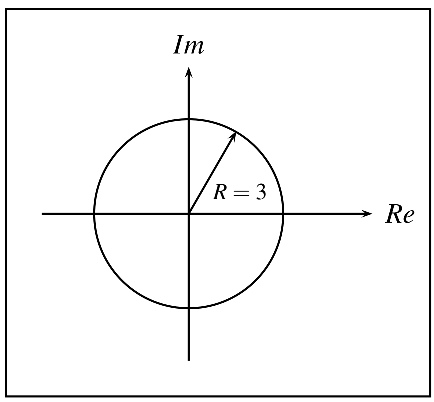


FIGURA N° 3.18

v. Si en el ejemplo anterior se pidiese hallar todos los números complejos tales que su valor absoluto sea menor que 3, el resultado sería el interior de la circunferencia con centro en el origen y radio 3 (por qué?). Cuáles serían los números complejos para los cuales $|z| > 3$?

Observe que aquí también ese símbolo de desigualdad no es entre imaginarios sino entre reales.

vi. El conjunto de todos los números complejos tales que $|z - (6 - 5\,i)| = 7$ está representado por la circunferencia con centro en $(6\,,-5)$ y radio 7 (por qué? Haga un desarrollo análogo al del ejemplo iv.

3.2.4. Conjugado de Números Complejos y División

Si se trata de efectuar la división de números complejos:

$$\frac{w}{z} = \frac{a+bi}{c+di}$$

hasta el momento se realiza como el producto $w.z^{-1} = (a+bi)\,(c+di)^{-1}$. Pero si se tiene en cuenta que siempre el producto $(\alpha + \beta i)\,(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ es un número real, es posible efectuar esta división multiplicando numerador y denominador por $c - di$, con lo que se obtiene:

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)\,(c-di)}{c^2+d^2} \quad ,$$

es decir, la división se reduce a una multiplicación de números complejos, dividiendo su resultado por un número real $\left(c^2 + d^2\right)$.

Dado el número $z = c + di$, al número $c - di$, se llama el ***conjugado*** *de z* y se nota por $\overline{z}$ es decir; si

$$z = c + di, \quad \text{entonces} \quad \overline{z} = c - di.$$

Gráficamente, el punto que representa $\overline{z}$ es simétrico respecto al eje real, al punto que representa z.

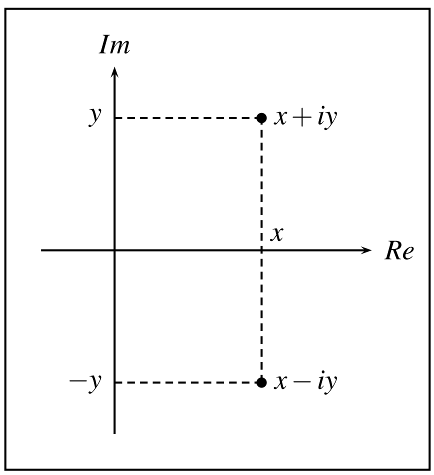


FIGURA N° 3.19

Ejemplos

i. Si $z_1 = 3 + 5i$; $\overline{z_1} = \overline{3+5i} = 3 - 5i$.

ii. Si $z_2 = -3 - 5i$; $\overline{z_2} = \overline{-3-5i} = -3 + 5i$.

iii. Si $z_3 = i$; $\overline{z_3} = \overline{0+i} = -i$.

iv. Si $z_4 = 3$; $\overline{z_4} = \overline{3+0i} = 3$

v. Divida $z = 8 - i$ entre $w = 2 + 3i$

$$\frac{z}{w} = \frac{8-i}{2+3i} = \frac{8-i}{2+3i}\,\frac{\overline{2+3i}}{\overline{2+3i}} = \frac{(8-i)\,(2-3i)}{(2+3i)\,(2-3i)}$$
$$= \frac{(16-3)\,+\,(-24-2)\,i}{(2)^2+(3)^2} = \frac{13-26i}{13} = \frac{13}{13} - \frac{26}{13}\,i = 1-2i$$

vi. Se había visto que si $z = a + bi$ entonces

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}$$

de dónde sale esto?

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{a-bi}{(a+bi)\,(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i$$

por tanto:

$$\frac{1}{4-3i} = \frac{4}{16+9} - \frac{-3}{16+9}\,i = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,i$$

vii. $1/i = -i$ pues

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\,\frac{\overline{i}}{i} = \frac{-i}{(i)\,(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

por tanto:

$$\frac{2}{7i} = \frac{2}{7}\,\frac{1}{i} = \frac{2}{7}\,(-i) = -\frac{2}{7}\,i$$

Propiedades del valor absoluto y conjugado de números complejos

Como las demostraciones de las propiedades que se enunciarán a continuación son casi inmediatas utilizando las definiciones, se dejarán en su mayoría como ejercicio, y se realizarán algunas a manera de ilustración.

1. $|z| = |\overline{z}|$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$.
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

   Demostración

   Sea $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces

   $$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)\,i \qquad \text{luego}$$
   $$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)\,i} = (a+c) - (d+b)\,i = a+c-bi-di$$
   $$= (a-bi) + (c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \text{luego}$$

   $$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

4. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

   Demostración

   Si $z_1 = x_1 + i y_1$ y $z_2 = x_2 + i y_2$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i \\
|z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1 x_1 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2 x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2\,(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2\,(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(x_2^2 + y_2^2)\,(x_1^2 + y_1^2)} \\
&= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1|\,|z_2| \quad \text{luego}
\end{aligned}
$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

6. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

7. $\dfrac{z + \overline{z}}{2}$ = parte real de z.

8. $\dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ = parte imaginaria de z.

9. $z\,.\,\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ si $z = a + bi$

   Demostración

   Si $z = a + bi$, entonces

   $z\,.\,\overline{z} = (a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2.$

10. $Re\,(z) \leq |Re\,(z)| \leq |z|$

    $Im\,(z) \leq |Im\,(z)| \leq |z|.$

11. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

Demostración (justifique todos los pasos)

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\,\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\,(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\,(\overline{z_1}+\overline{z_2})+z_2\,(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\
&= z_1\,\overline{z_1}+z_1\,\overline{z_2}+z_2\,\overline{z_1}+z_2\,\overline{z_2} = |z_1|^2+z_1\,\overline{z_2}+z_2\,\overline{z_1}+|z_2|^2\\
&= |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2\\
&= |z_1|^2+2Re\,(z_1\,\overline{z_2})+|z_2|^2\\
&\le |z_1|^2+2\,|z_1\,\overline{z_2}|+|z_2|^2\\
&= |z_1|^2+2\,|z_1|\,|\overline{z_2}|+|z_2|^2 = |z_1|^2+2\,|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2,
\end{aligned}$$

En conclusión $|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$ y extrayendo raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad se tiene

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

Ejemplos

i. *Si* $z = 2-3i$ entonces $\overline{z} = 2+3i$, así

$$|z| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = |\overline{z}|.$$

ii. Si $z = -3-2i,\ \bar{z} = -3+2i\ \ y\ \ \overline{\overline{z}} = -3-2i$, así que $\overline{\overline{z}} = z$.

iii. $\overline{(6-i)\,(2+8i)} = \overline{(6-i)}\,\overline{(2+8i)}$ pues

$$\overline{(6-i)\,(2+8i)} = \overline{(12+8)+(48-2)\,i} = \overline{20+46i} = 20-46i$$

y por otro lado

$$\overline{(6-i)}\,\overline{(2+8i)} = (6+i)\,(2-8i) = (12+8)+(-48+2)\,i = 20-46i$$

iv. $\overline{\left(\frac{i}{2+i}\right)} = \frac{\bar{i}}{\overline{(2+i)}}$ pues

$$\overline{\left(\frac{i}{2+i}\right)} = \overline{\left(\frac{i\,(2-i)}{(2+i)\,(2-i)}\right)} = \overline{\left(\frac{2i+1}{4+1}\right)} = \overline{\left(\frac{1+2i}{5}\right)} = \overline{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\,i} = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}\,i$$

y por otro lado

$$\frac{\overline{i}}{\overline{(2+i)}} = \frac{-i}{2-i} = \frac{-i\,(2+i)}{(2-i)\,(2+i)} = \frac{-2i+1}{4+1} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5}-\frac{2}{5}\,i$$

v. $|5+12i+4-3i| \le |5+12i|+|4-3i|$ ya que

$|5+12i+4-3i| = |9+9i| = \sqrt{81+81} = 9\sqrt{2}$

$|5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$; $|4-3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

y es evidente que $9\sqrt{2} \le 13+5 = 18 = 9\cdot 2$ pues $\sqrt{2} < 2$

EJERCICIOS

1. Si $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 + 3i$; $z_3 = 5i$,

   Efectuar las operaciones indicadas

   $a)\ 2z_1 - 3z_2 + z_3$ $\quad b) z_1 z_2$ $\quad c) \dfrac{z_1}{z_2 z_3}$ $\quad d)\ (z_1 z_2 z_3)^{-1}$

2. Escribir el complejo dado en la forma $a + ib$ con a y b reales, para:

   $a)\ 3\,\dfrac{i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$ $\quad b)\ (1+i)^{100}$ $\quad c)\ \dfrac{i^6 + i^3 - i^5}{2 - i^3 + i^4}$

   $d)\ \dfrac{6 - i}{(1+i)^2}$ $\quad e)\ \dfrac{1+i}{(2-3i)\,(4+i)}$ $\quad f)\ \dfrac{i}{3 - 2i}$

3. Hallar x y y tales que

   $a)\ (x - iy)^2 = -8 - 6i$ $\quad b)\ 2x - y + (3y - 2x)\, i = 2 - 2i$

   $c)\ (3 + 5i)\,(x + iy) = 1$ $\quad d)\ (2 + 3i)\,(x - iy) = 1 - 2i$

   $e)\ 3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$

4. Hallar el valor de cada una de las expresiones siguientes.

   Si $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$

   $a)\ |3z_1 + \overline{z}_2|$ $\quad b)\ |z_1 z_2 \overline{z}_3|^2$ $\quad c)\ |\overline{z}_3|^2$ $\quad d)\ \left|\dfrac{1}{z_1 \overline{z}_1}\right|$

   $e)\ \left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{z_1 + 2z_2 - 3 + i}\right|^2$ $\quad f)\ \left|\overline{z}_1{}^2 + \overline{z}_2{}^2\right|^2$ $\quad g)\ |Im\,(z_1 \overline{z}_2)|$

   $h)\ \left|Re\left(\dfrac{z_1 - z_2}{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}\right)\right|$ $\quad i)\ |\overline{z_1\, z_2}|$

5. Describa y construya la gráfica de la región del plano representado por cada una de las ecuaciones siguientes.

   $a)\ |z - 3| = 4$ $\quad b)\ |z - 3i| = 4$ $\quad c)\ |z - 2| = |z + 4|$

   $d)\ |z - 3| + |z + 3| = 1o$ $\quad e)\ |i - z| = 1$ $\quad f) \overline{z} = 2 - z$

   $g)\ \overline{z} = z$ $\quad h)\ Im\left(z^2\right) = 4$ $\quad i) z + \overline{z} = 4$

6. Halle los números complejos z que satisfacen:

   $a)\ 1 \leq |z| \leq 3$ $\quad b)\ 1 \leq |z - 2i| \leq 5$ $\quad c)\ |z + 1| \geq 3$

   $d)\ |z - i| > 1$ $\quad e)\ Im\left(z^2\right) \geq 1$ $\quad f)\ Re\left(z^2\right) > 1$

7. Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

   a) $Re\,(z_1 + z_2) = Re\,(z_1) + Re\,(z_2)$

   b) $Im\,(z_1 + z_2) = Imz_1 + Imz_2$

   c) $Re\,(z_1 z_2) = Re\,(z_1)\,Re\,(z_2) - Im\,(z_1)\,Imz_2$

   d) $Im\,(z_1 z_2) = Re\,(z_1)\,Imz_2 + Imz_1\,Re\,(z_2)$

Capítulo 4

TEMAS ADICIONALES CON NÚMEROS NATURALES

4.1. DOS SUMAS FINITAS IMPORTANTES

Suponga que se desea hallar la suma de los *n primeros números naturales* para n fijo. Si bien es cierto el proceso es sencillo, pues consiste simplemente en realizar un número finito de sumas, resulta un poco engorroso si se pretende hacerlo manualmente para un número n suficientemente grande. Sin embargo es posible hallar una fórmula sencilla que permite realizar este cálculo sin efectuar sumas.

Sea S_n el resultado buscado para un n fijo, es decir sea.

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

el cual se puede representar también como:

$$S_n = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$

sumando estas expresiones se tiene:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
S_n = & n & + & (n-1) & + & n-2 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

y puesto que son n sumandos entonces

$$2S_n = n(n+1), \quad \text{por tanto} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplos

i. $$1+2+3+4+5+6=\frac{6(6+1)}{2}=\frac{(6)(7)}{2}=21$$

resultado que se puede verificar fácilmente en forma manual al realizar la suma.

ii. $$1+2+3+\ldots+100.000=\frac{(100.000)(100.001)}{2}$$

resultado demasiado engorroso de verificar manualmente.

iii. $$a+2a+3a+\ldots+na=a(1+2+3+\ldots+n)=a\,\frac{n(n+1)}{2}$$

iv. $$70+71+\ldots+5000=(1+2+\ldots+5000)-(1+2+\ldots+69)$$

$$=\frac{(5000)(5001)}{2}-\frac{(69)(70)}{2}=12502500-2415=12500085$$

v. (Serie aritmética finita)

$$\begin{aligned} a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+(n-1)d) &= \underbrace{a_1+a_1+\ldots+a_1}_{n\ veces}+d+2d+\ldots+(n-1)d \\ &= na_1+d(1+2+\ldots+(n-1)) \\ &= na_1+d\frac{(n-1)n}{2} \\ &= n(a_1+\frac{d(n-1)}{2}) \\ &= \frac{n}{2}(2a_1+d(n-1)) \end{aligned}$$

vi. Para hallar $A_n=7+(7+20)+(7+40)+(7+60)+\ldots+(7+(29)(20))$ se aplica el resultado de v. para $a_1=7 \quad d=7 \quad n-1=29 \quad n=30$ por tanto:

$$A_n=\frac{30}{2}(2(7)+20(29))=8910$$

Otro resultado de gran importancia en estudios posteriores de matemáticas es la llamada *serie geométrica finita* que consiste en sumar los n resultados de elevar un número fijo $r(r\neq 0,\ r\neq 1)$ a las $(n+1)$ primeras potencias: $0,1,2,\ldots,n$. Para ello sea G_n el resultado buscado:

$$\begin{aligned} G_n &= r^0+r^1+r^2+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}+r^n \\ G_n &= 1\ +r\ +r^2+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}+r^n \end{aligned}$$

por tanto

$$rG_n = r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}+r^n+r^{n+1}$$

y restando (G_n-rG_n) estas dos expresiones se tiene:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
G_n = & 1 & + & r & + & r^2 & + & \ldots & + & r^{n-2} & + & r^{n-1} & + & r^n \\
rG_n = & r & + & r^2 & + & r^3 & + & \ldots & + & r^{n-1} & + & r^n & + & r^{n+1} \\
\hline
G_n - rG_n = & 1 & - & r^{n+1} & & & & & & & & & &
\end{array}$$

y así

$$G_n(1-r) = 1 - r^{n+1} \quad \text{es decir}$$
$$G_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad \text{para} \quad r \neq 1$$

Ejemplos

i. $G_n = 1+3+9+27+81+243+729 = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6$
Aquí $r = 3$ *y* $n = 6$ entonces

$$G_n = \frac{1-3^7}{1-3} = \frac{1-2187}{1-3} = 1093$$

ii. $6+6(1/2)+6(1/4)+6(1/8)+\ldots+6(1/2^{2n})$

$$\begin{aligned}
&= 6(1+(1/2)+(1/2)^2+(1/2)^3+\ldots+(1/2)^n) \\
&= 6\,\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}
\end{aligned}$$

iii. $(\sqrt{2})^{20}+(\sqrt{2})^{21}+(\sqrt{2})^{22}+\ldots+(\sqrt{2})^{31}$

$$\begin{aligned}
&= [(\sqrt{2})^0+(\sqrt{2})^1+\ldots+(\sqrt{2})^{31}]-[(\sqrt{2})^0+\ldots+(\sqrt{2})^{19}] \\
&= \frac{1-(\sqrt{2})^{32}}{1-\sqrt{2}} - \frac{1-(\sqrt{2})^{20}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2^{16}-1+2^{10}}{1-\sqrt{2}} \\
&= \frac{2^{10}-2^{16}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-64512}{1-\sqrt{2}} = 155750.84
\end{aligned}$$

iv. Utilice procedimiento similar a (iii.) para mostrar que para $k \in N \quad k \leq n$

$$r^k+\ldots+r^n = \frac{r^k(1-r^{n-k+1})}{1-r}$$

4.2. SÍMBOLO DE SUMATORIA

Dada una fórmula que contenga una variable k, con el fin de comprimir la suma de un número finito de términos que se generan el reemplazar en esa fórmula la variable por números naturales sucesivos $1,2,\ldots n$, se usa frecuentemente un símbolo que se llamará símbolo de sumatoria, que se nota con la letra griega sigma mayúscula $\sum$ y que está definido así:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

donde a_k es la fórmula que genera los números $a_1, \ldots, a_n$ al reemplazar en ella la k por los números $1, 2, \ldots, n$ respectivamente.

Generalizando, una expresión de la forma $\sum\limits_{k=p}^{n} a_k$, para $p \in N,\ p \leq n$, tendrá el significado de

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$$

Ejemplos

i. $\sum\limits_{k=1}^{4} (2k+1) = (2(1)+1) + (2(2)+1) + (2(3)+1) + (2(4)+1) = 3+5+7+9 = 24$

ii. $\sum\limits_{k=3}^{5} k\,Sen\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 3\,Sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 4\,Sen\left(\frac{4\pi}{2}\right) + 5\,Sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (3)(-1) + 4(0) + 5(1) = 2$

iii. Los resultados de la sección anterior con el símbolo $\sum$ quedaran:

$$1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{y}$$

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \quad \text{con } r \neq 1$$

iv. $\sum\limits_{k=3}^{7} \frac{k^2+1}{2-k} = \frac{9+1}{2-3} + \frac{16+1}{2-4} + \frac{25+1}{2-5} + \frac{36+1}{2-6} + \frac{49+1}{2-7}$

v. La expresión $(-1)^k$, a medida que k toma los valores $1, 2, 3, 4 \ldots$ representa los números $-1, 1, -1, 1, \ldots$ respectivamente, es decir esa expresión multiplicando una fórmula de sólo términos positivos o sólo negativos hace que los términos de ésta se alternen entre negativos y positivos. Así por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{6}{9} + \frac{8}{16} + \frac{10}{25} + \frac{12}{36} + \frac{14}{49} + \frac{16}{64} \quad \text{pero}$$

$$\sum_{k=1}^{8} (-1)^k \frac{2k}{k^2} = -\frac{2}{1} + \frac{4}{4} - \frac{6}{9} + \frac{8}{16} - \frac{10}{25} + \frac{12}{36} - \frac{14}{49} + \frac{16}{64} \quad \text{y}$$

$$\sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{1} - \frac{4}{4} + \frac{6}{9} - \frac{8}{16} + \frac{10}{25} - \frac{12}{36} + \frac{14}{49} - \frac{16}{64}$$

Cuando se trabaja con el símbolo de sumatoria es necesario conocer algunas propiedades de él, las cuales facilitarán su manipulación:

1. **Propiedad de cambio de variable**

   Al cambiar el símbolo k en toda parte donde se presente una sumatoria, por otro símbolo, el valor de la sumatoria no varía, es decir.

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j$$

   Ejemplo

$$\sum_{k=2}^{5} 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 360 = \sum_{i=2}^{5} 3^i = \sum_{j=2}^{5} 3^j$$

2. **Propiedad homogénea**

$$\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   donde c es una constante. En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{3} 2k^2 = 2 \sum_{k=1}^{3} k^2 = 2(1 + 2^2 + 3^2) = (2)(14) = 28$$

3. **Propiedad aditiva**

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

   En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k}+6k=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k}+\sum_{k=1}^{4}6k=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k}+6\sum_{k=1}^{4}k$$

4. **Propiedad de suma de constantes iguales**

$$\sum_{k=1}^{n}1=n \quad \text{en efecto:}$$

$$\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\ veces}=n \quad \text{y así}$$

$$\sum_{k=1}^{n}=n$$

Ejemplo

i. $\sum\limits_{k=1}^{6}1=1+1+1+1+1+1=6$

ii. $\sum\limits_{k=1}^{10}3=3\sum_{k=1}^{10}1=3(10)=30$

5. **Propiedad de cambio de límite**

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1+p}^{n+p}a_{k-p}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{n+p}a_{k-p} &= a_{p+1-p}+a_{p+2-p}+a_{p+3-p}+\ldots+a_{n+p-p}\\ &= a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

Ejemplo

i. $\sum\limits_{k=1}^{5}\left(k^2+\dfrac{1}{2k+3}\right)=\sum\limits_{k=4}^{8}\left((k-3)^2+\dfrac{1}{2(k-3)+3}\right)=\sum\limits_{k=8}^{12}\left((k-7)^2+\dfrac{1}{2(k-7)+3}\right)$

ii. $\sum\limits_{k=5}^{10}3k=\sum\limits_{k=1}^{6}3(k+4)$

6. **Propiedad aditiva para los límites**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \quad p < n \quad p > 1$$

Para su demostración use la definición de sumatoria y la propiedad asociativa de la suma de números reales.

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=6}^{10} k^2$$

7. **Propiedad telescópica**

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

En la anterior expresión se puede observar que los primeros términos de cada paréntesis, se cancelan con los segundos términos de los paréntesis siguientes, por tanto sólo quedan, el segundo término del primer paréntesis y el primer término del último paréntesis es decir:
$-a_0 + a_n = a_n - a_0$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Ejemplo

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{230} 2^k - 2^{k-1} = 2^{230} - 2^{1-1} = 2^{230} - 1$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{3(k+1)} - \frac{1}{3k} = \frac{1}{3(100+1)} - \frac{1}{(3)(1)}$

$$a_k = \frac{1}{3(k+1)} \quad \text{y no} \quad \frac{1}{3k}$$

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de

   a) $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{k} + k\right)$

b) $\sum_{k=3}^{5} k^2 - 2k$

c) $\sum_{k=2}^{6} Sen(2k)$

d) $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k\, 7^k$

2. Expresar cada una de las sumas siguientes usando la notación de sumatoria.

   a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + 100^4$

   b) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 101$

   c) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{80}{81}$

   e) $7 + 12 + 17 + \ldots + (2 + 5n)$

   f) $2 + 4 + 6 + \ldots + 1040$

3. Cuál de las expresiones siguientes es verdadera.

   a) $\sum_{k=3}^{100} 2k + 5 = \sum_{k=2}^{9} 2k + 7$

   b) $\sum_{k=50}^{1020} 3 = \sum_{k=30}^{1000} 3$

   c) $\sum_{k=1}^{40} 3k^2 - 2k + 5 = \sum_{k=0}^{39} 3k^2 - 2k + 6$

   d) $\sum_{k=1}^{20} k^2 + 1 = \sum_{k=1}^{10} k^2 + 1 + \sum_{11}^{20} k^2 + 1$

   e) Si $\quad a \neq 1$
   $\sum_{k=2}^{n} a^k = \sum_{k=2}^{n} \frac{a^{k+1} - a^k}{a - 1}$

4. Hallar el valor de las sumas

   a) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1$

   b) $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k$

   c) $\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$

   d) $\sum_{k=10}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}}$

   e) $\sum_{k=4}^{40} (2k+1)^2 - (2k-1)^2$

f) $\sum_{k=3}^{100} \frac{1}{(3k)^2} - \frac{1}{(3k-3)^2}$

g) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

Sugerencia: despeje k^2 de $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$

5. Cuáles de las siguientes sumas se pueden expresar como telescópicas.

a) $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - a_k$

b) $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} a_{k+4} - a_{k+3}$

d) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{4^{k-1}}$

e) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}$

6. Hallar a_k tal que cada una de las sumas siguientes se pueda transformar en una telescópica y halle el valor de la suma

a) $\sum_{k=1}^{20} a_k - 5k$

b) $\sum_{k=1}^{28} a_k - Sen(2^k)$

c) $\sum_{k=3}^{15} a_k - (2k-3)^3$

d) $\sum_{k=1}^{100} a_k - (k^2 + 2k - 1)$

e) $\sum_{k=20}^{100} a_k - 1$

4.3. FACTORIAL (!)

Se plantea el siguiente problema: ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas?. Para sentarse la primera persona tiene 5 opciones; por cada opción de esta persona, la segunda persona tiene solamente cuatro opciones, (pues ya hay una silla ocupada); por cada opción anterior la tercera persona tiene 3 opciones (pues ya hay 2 sillas ocupadas); por cada opción anterior, la cuarta persona tiene dos opciones y por cada opción anterior, la quinta tiene una sola opción, por lo tanto en total el número de formas en que se pueden sentar las cinco personas en cinco sillas es $(5)(4)(3)(2)(1)$.

En la solución de problemas análogos al anterior y otros tipos de problemas, aparece el producto de un número natural por todos los que le preceden. Este producto de llama el factorial de dicho número natural y se nota $n!$ es decir:

$$n! = (n)(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

De esta definición se puede concluir que:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1) = n[(n-1)(n-2)\dots(2)(1)] = n(n-1)!$$

Ejemplo

$$8! = (8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 8[(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)] = 8(7)! = 40320$$

Obsérvese como el factorial de un número crece rápidamente, pues si se tuviera solamente 8 personas para sentarlas en 8 sillas, existirían 40320 formas posibles de hacerlo.

Resulta conveniente en la condensación de algunas expresiones, definir el factorial del número cero, el cual se define como 1, es decir

$$0! = 1$$

esto se justifica si se tiene en cuenta que de $n! = n(n-1)!$, para $n = 1$ se tiene $1! = 0!\,1$ entonces $1 = 0!$

Ejemplo

Para simplificar la expresión:

$$\frac{(10!)(6!)(3!)}{(7!)(5!)(6)(2)}$$

se procede a descomponer los factoriales de los numeros mas grandes en términos del factorial de los numeros mas pequeños con el objeto de cancelarlos así:

$$\frac{(10!)(6!)(3!)}{(7!)(5!)(6)(2)} = \frac{(10)(9)(8)(7!)(6)(5!)(3)(2!)}{(7!)(5!)(6)(2)} = (10)(9)(8)(3) = 2160$$

4.4. NÚMEROS COMBINATORIOS

Considérese un conjunto A con 7 elementos, se trata de hallar el número de subconjuntos diferentes de 3 elementos que tiene A. Para el primer elemento se tienen siete opciones; para el segundo elemento se tienen seis opciones por cada opción del primero. Para el tercer elemento se tienen cinco opciones por cada opción anterior y por lo tanto el número de subconjuntos con tres sería $(7)(6)(5)$. Pero estos subconjuntos no son todos diferentes, ya que aparece por ejemplo el subconjunto $\{a,b,c\}$ y también los subconjuntos $\{b,c,a\}$, $\{a,c,b\}$, $\{c,b,a\}$, $\{c,a,b\}$ y $\{b,a,c\}$ que son iguales como conjuntos; es decir, cada subconjunto de tres elementos aparece 3! veces, (pues el número de opciones distintas de acomodar tres elementos diferentes en un conjunto es 3!); luego el número de subconjuntos diferentes de tres elementos es

$$\frac{(7)(6)(5)}{3!}$$

lo cual se puede expresar así:

$$\frac{(7)(6)(5)}{3!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{3!(4)(3)(2)(1)} = \frac{7!}{3!(4!)} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Generalizando, se tiene que el número de subconjuntos diferentes con k elementos que se pueden extraer de un conjunto con n elementos $(n \geq k)$ es

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esta expresión aparece en algunos problemas similares y se llama el número combinatorio n, k el cual se nota por $\binom{n}{k}$ es decir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ejemplo

i. ¿De cuántas formas diferentes le pueden repartir a una persona siete fichas de un dominó (28 piezas)?
   Este problema es equivalente a hallar el número de subconjuntos con siete elementos que se puede extraer con 28 elementos, luego la solución es:

$$\begin{aligned}\binom{28}{7} &= \frac{28!}{(7)!\,(28-7)!} = \frac{28!}{(7)!(21)!}\\ &= \frac{(28)(27)(26)(25)(24)(23)(22)(21!)}{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)(21!)}\\ &= (9)(26)(23)(11)(5)(4)\\ &= 1184040\end{aligned}$$

ii. Hallar el valor de: $\binom{7}{5}$ y $\binom{7}{2}$

$$\begin{aligned}\binom{7}{5} &= \frac{7!}{5!\,2!} = 21 \quad \text{y}\\ \binom{7}{2} &= \frac{7!}{2!\,5!} = 21 \quad \text{luego}\\ \binom{7}{5} &= \binom{7}{2}\end{aligned}$$

   Este es un caso particular de la siguiente propiedad:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{ya que :}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

iii. Hallar el valor de $\binom{n}{0}$ y $\binom{n}{n}$

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$ y

$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

iv. La siguiente propiedad resulta útil en el trabajo con números combinatorios, por ejemplo en la construcción del conocido triángulo de Pascal, como se vera mas adelante:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} \\ &= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. ¿De cuántas formas acomodaría 10 personas en una fila?
2. Simplificar $\frac{9!\,6!\,3!}{8!\,5!\,2!}$
3. ¿Cuál de los enunciados siguientes es válido?
   a) $(ab)! = a!b!$
   b) $\left(\frac{a}{b}\right)! = \frac{a!}{b!}$
   c) $(a+b)! = a! + b!$
4. Tomando $A = \{2,3,5\}$, muestre que hay 3 subconjuntos diferentes de 2 elementos.
5. Dar una interpretación a $\binom{n}{n} = 1$

6. ¿De cuántas formas es posible extraer de un grupo de 15 personas, una comisión de 7 personas?
7. ¿Dado un conjunto con 5 elementos, cuántos subconjuntos tiene sin elementos?, ¿cuántos con 1,2,3,4,5? y ¿cuántos subconjuntos tiene el conjunto?
8. Hallar n tal que $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$
9. Hallar k tal que $\binom{14}{k} = \binom{14}{k-4}$

4.5. TEOREMA DEL BINOMIO

Uno de los problemas que se presenta al usar el triángulo de Pascal es que para desarrollar $(a+b)^n$ es necesario construir todas las n primeras filas de dicho triángulo, lo que se hace muy dispendioso para un n grande. Para obviar este problema se presenta a continuación una version de este triángulo usando números combinatorios.

Puesto que $\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$, las dos primeras filas del triángulo se van a expresar como:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \end{array}$$

por consiguiente los elementos de la tercera fila serán

$$1 \quad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \quad 1$$

los cuales teniendo en cuenta que $\quad 1 = \binom{2}{0} \qquad \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1} \qquad 1 = \binom{2}{2}$

se presentarán como:

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

Análogamente los elementos de la cuarta fila serán:

$$1 \qquad \binom{2}{0} + \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \qquad 1$$

los cuales son iguales a:

$$1 = \binom{3}{0} \qquad \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1} \qquad \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2} \qquad 1 = \binom{3}{3}$$

quedando la cuarta fila en la forma:

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

continuando de esta forma se concluye que la nueva presentación del triángulo será:

$$\begin{array}{ll}
(a+b)^0 & ---------------------\quad \binom{0}{0} \\
(a+b)^1 & -------------------\quad \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
(a+b)^2 & -----------------\quad \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
(a+b)^3 & ----------------\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
(a+b)^4 & --------------\quad \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
(a+b)^5 & ------------\quad \binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}
\end{array}$$

así sucesivamente.

De donde se puede intuir que la $(n+1)$ fila del triángulo o sea la que corresponda a los coeficientes de $(a+b)^n$ tiene como elementos:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

En resumen la expresión $(a+b)^n$ se puede expandir como:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

que condensada por medio del símbolo de sumatoria es:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

resultado que es conocido con el nombre de ***Teorema del Binomio***

Ejemplos

i.

$$
\begin{aligned}
(a+3b)^2 &= \sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}a^{2-i}(3b)^i\\
&=\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}a(3b)+\binom{2}{2}(3b)^2\\
&=a^2+6ab+9b^2
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
(x-y^2)^5 &= \sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}x^{5-i}(-y^2)^i\\
&=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4(-y^2)^1+\binom{5}{2}x^3(-y^2)^2+\binom{5}{3}x^2(-y^2)^3+\binom{5}{4}x(-y^2)^4+\binom{5}{5}(-y^2)^5\\
&=x^5-5x^4y^2+10x^3y^4-10x^2y^6+5xy^5-y^{10}
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS

1. Halle el desarrollo de:
   a) $(\sqrt{2}ab+\sqrt{3}a^2b^2)^3$
   b) $(x^2y-xy^3)^4$
2. Halle el cuarto termino de $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^8$, el termino independiente y el coeficiente de $x^{-2}y^2$
3. Halle el coeficiente de x^{18} en $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^{15}$, el noveno termino y el termino independiente.
4. Halle el coeficiente de x^5 en $(x^{3/2}+x^{-1/3})^m$, si la suma de todos los coeficientes es 128.
5. Halle el termino independiente en $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^9$, el coeficiente de x^6
6. Halle el valor de:
   a) $\sum\limits_{k=0}^{20}\binom{20}{k}$
   b) $\sum\limits_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(-1)^k$
   c) $\sum\limits_{k=0}^{500}\binom{500}{k}3^{500-k}5^k$

7. Hallar el termino independiente

$$\left(\frac{a+1}{a^{2/3}-a^{1/3}+1}-\frac{a-1}{a-a^{1/2}}\right)^{10}$$

4.6. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Otra de las características importantes de los números reales es el llamado *"principio de inducción matemática"* el cual permite demostrar rigurosamente proposiciones que satisfacen los números naturales. Debido a que para los objetivos de este libro este tema se puede obviar, se presenta como un apéndice, para que sea consultado por el lector interesado en él.

Capítulo 5

GEOMETRÍA ANALÍTICA

En este capítulo se estudiarán algunas curvas en el plano, pero no solamente considerando su gráfica, sino que gracias a la representación de puntos en el plano por medio de pares ordenados de números reales, estas curvas se pueden representar mediante ciertas ecuaciones. El estudio de estas curvas mediante este tratamiento, mezcla de la representación gráfica y la representación algebraica, es lo que se conoce como geometría analítica.

5.1. LÍNEA RECTA

Se conoce, desde la secundaria, que dos triángulos se dicen semejantes si “sus lados correspondientes son proporcionales”, es decir, los dos triángulos tienen la misma forma aunque no tengan el mismo tamaño. Para que se pueda cambiar el tamaño sin cambiar la forma se pueden cambiar las longitudes de los lados pero no se deben cambiar las medidas de los ángulos, como se puede observar en la figura 5.1.

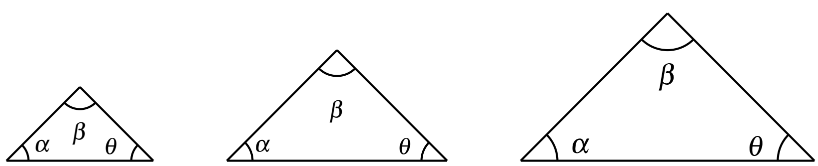


FIGURA N° 5.1

Esta observación permite concluir que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

Una aplicación inmediata de este concepto de triángulos semejantes se encuentra en la solución del problema de buscar el punto medio de un segmento de recta que une dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$. En la figura 5.2 el triángulo $A\,B\,C$ es semejante al triángulo $A\,M\,N$, entonces si el lado $A\,M$ es la mitad del lado $A\,B$, por semejanza de triángulos, el lado $A\,N$ es la mitad del lado $A\,C$. La coordenada x del punto M es entonces:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1) &= a_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 \\ &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \end{aligned}$$

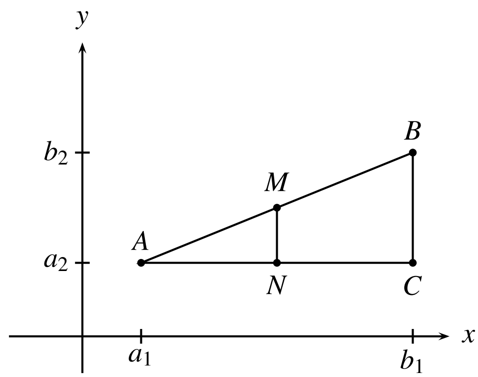


FIGURA N° 5.2

Por otro lado también, por la semejanza de los triángulos $A\,B\,C$ y $A\,M\,N$, si $A\,M$ esta mitad de $A\,B$ entonces $M\,N$ es la mitad de $B\,C$ y así la coordenada y del punto M es:

$$\begin{aligned} a_2 + \frac{1}{2}(b_2 - a_2) &= a_2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 \\ &= \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto M (punto medio del segmento $A\,B$) son:

$$\left(\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \frac{1}{2}(a_2 + b_2)\right)$$

Ejemplo 1

Hallar el punto medio del segmento de recta que une los puntos $(2,4)$ y $(6,8)$.

El punto medio es $(x,y) = \left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+8}{2}\right) = (4,6)$

Para acercarse intuitivamente al concepto de recta se compara una linea recta con otra curva que no es recta. Considérese la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(4,8)$ y la parábola $y = x^2$ que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, y otro punto.

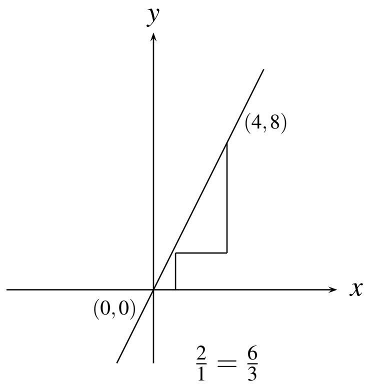
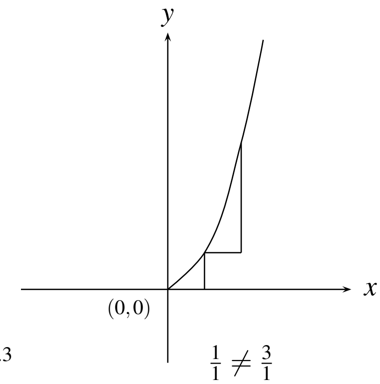


FIGURA N° 5.3



Para localizar en el plano esos puntos de la parábola se debe avanzar una distancia horizontalmente y avanzar otra distancia verticalmente; así estando en el punto $(0,0)$ se avanza horizontalmente 1 y se avanza verticalmente 1 y se llega al punto $(1,1)$, estando aquí si se avanza horizontalmente 1 se debe avanzar verticalmente 3 para llegar al punto $(2,4)$, si se avanza de aquí horizontalmente 1 se debe avanzar verticalmente 5 para llegar al punto $(3,9)$. Se observa que la relación entre lo que se avanza verticalmente y lo que se avanza horizontalmente para ir de un punto a otro de la curva no se conserva mientras que para la recta esa relación si se conserva, porque para ir de $(0,0)$ a $(1,2)$ lo que se avanza verticalmente es el doble de lo que se avanza horizontalmente lo mismo que para ir de $(1,2)$ a $(2,4)$, o para ir de $(2,4)$ a $(3,6)$ lo que se avanza verticalmente es el doble de lo que se avanza horizontalmente.

La invarianza de esa relación es la principal característica de las rectas. A la relación de lo que se debe avanzar verticalmente con respecto a lo que se avanza horizontalmente para ir de un punto A de una recta a otro punto B de la misma, se conoce como pendiente de la recta usualmente notada por m. Para la recta que se ha tomado como ejemplo, la pendiente es 2 ya que lo que se debe avanzar verticalmente es el doble de lo que se debe avanzar horizontalmente para ir de cualquier punto A a cualquier punto B de la misma recta.

Para una recta L no vertical cualquiera, si el punto A tiene coordenadas (a_1, a_2) y el punto B tiene coordenadas (b_1, b_2) la pendiente de la recta será, de acuerdo con lo que muestra la figura 5.4:

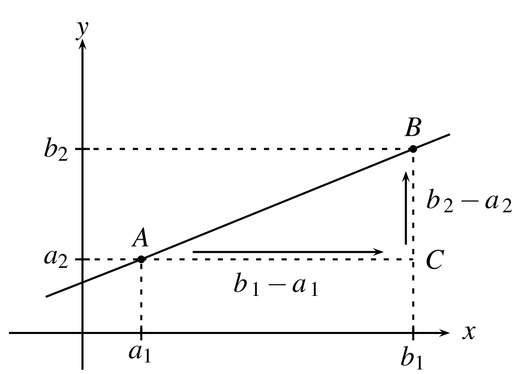


FIGURA N° 5.4

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Claramente las rectas horizontales tienen pendiente $m = 0$. Para las rectas verticales la definición de pendiente presenta el inconveniente de la "división por cero"por lo que se dice que las rectas verticales no tienen pendiente o tienen pendiente infinita.

Para la determinación de la pendiente de la recta L de la figura 5.4, implícitamente se consideró el triángulo rectángulo $A\,B\,C$, en el cual la relación $m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$, corresponde a la tangente del ángulo $\widehat{B\,A\,C}$ (cateto opuesto sobre cateto adyacente), que es el mismo independiente de la elección que se haga de los puntos A y B sobre la recta. A este ángulo se le llama "ángulo de inclinación de la recta L".
Se observa entonces que la pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación; por lo que rectas con ángulo de inclinación agudo tienen pendiente positiva y rectas con ángulo de inclinación obtuso, tienen pendiente negativa y recíprocamente.

1. Supongamos que la recta está inclinada a la derecha. (Fig. 5.5)

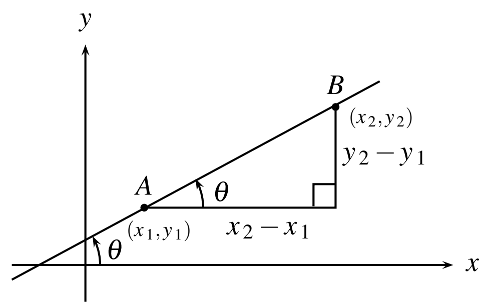


FIGURA N° 5.5

Pendiente $= Tan\ \theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2. Supongamos que la recta está inclinada a la izquierda. (Fig. 5.6)

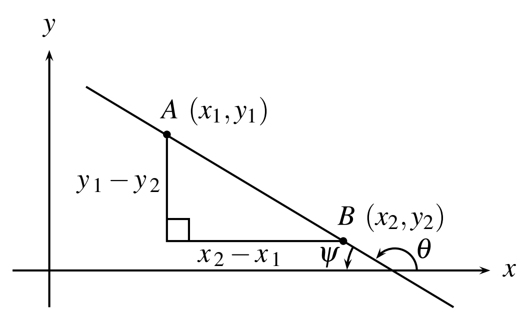


FIGURA N° 5.6

$$\begin{aligned}
\text{Pendiente} &= Tan\ \theta = Tan\ (\pi - \psi) \\
&= \frac{Tan\ \pi - Tan\ \psi}{1 + Tan\ \pi\ Tan\ \psi} \\
&= -Tan\ \psi = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

El ángulo de inclinación de una recta debe ser mayor o igual a cero y menor o igual a 180°.

Ejemplo 2

Hallar la pendiente m y el ángulo de inclinación θ del segmento de recta que une

a) Los puntos $(-8,-4)$, $(5,9)$
b) Los puntos $(8,-2)$, $(12,-6)$
c) Los puntos $(12,6)$, $(12,10)$
d) Los puntos $(2,5)$, $(10,5)$

Solución

a) La pendiente viene dada por $m = \frac{9-(-4)}{5-(-8)} = \frac{13}{13} = 1$ y el ángulo de inclinación es 45° pues $Tan\ \theta = 1$, luego $\theta = 45°$.

b) $m = \dfrac{-6-(-2)}{12-8} = \dfrac{-4}{4} = -1 \quad ; \quad Tan\ \theta = -1,$ entonces $\theta = 135°$

c) $m = \dfrac{10-6}{12-12} = \dfrac{4}{0},$ luego m es infinita y $Tan\ \theta = \infty$ y así $\theta = 90°$.

d) $m = \dfrac{5-5}{10-2} = \dfrac{0}{8} = 0;$ y $Tan\ \theta = 0,$ Por tanto $\theta = 0°$.

La manipulación algebraica de la recta requiere que se puedan representar los puntos de una recta por medio de una ecuación que solo sea satisfecha por las coordenadas de los puntos de esa recta.
Para encontrar la ecuación de una recta L que pasa por un punto $A = (a_1, a_2)$ y tiene pendiente m, se considera un punto cualquiera $P(x,y)$ de la recta, diferente del punto A, y se calcula la pendiente de la recta en términos de las coordenadas de P y de A, es decir, se establece que:

$$m = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

expresión que ya puede considerarse como ecuación de la recta que pasa por A y tiene pendiente m.
Se acostumbra la siguiente presentación equivalente para esa ecuación:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

y se le llama forma Punto-pendiente de la ecuación de una recta.
De esta expresión se puede deducir una forma mas conocida de la ecuación de la recta, así:

$$\begin{aligned} y-a_2 &= m(x-a_1) \\ y &= mx-ma_1+a_2 \\ y &= mx+b, \quad \text{donde} \quad b=-ma_1+a_2 \end{aligned}$$

aquí b es el corte de la recta con el eje y que se obtiene haciendo en la ecuación $x=0$ Figura 5.7.

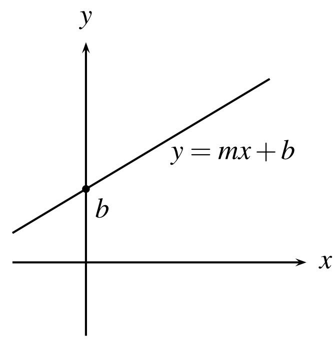


FIGURA N° 5.7

Ejemplo 3

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,2)$ y tiene pendiente $\dfrac{2}{5}$.

Como $\quad m=\dfrac{y-a_2}{x-a_1} \quad$ entonces $\quad \dfrac{2}{5}=\dfrac{y-2}{x-2}, \quad$ por tanto $\quad y-2=\dfrac{2}{5}(x-2) \quad$ es la ecuación de la recta.

Ejemplo 4

Hallar la pendiente, los interceptos con los ejes coordenados y 3 puntos de la recta que tiene por ecuación $y+4x=7$.

Como $\quad y+4x=7, \quad$ entonces $\quad y=-4x+7, \quad$ y así la pendiente es -4.
Para hallar el intercepto de la recta con el eje y, se hace $x=0$ en la ecuación de la recta $y=-4x+7$ para obtener $y=7$.
Para hallar el intercepto con el eje x, se hace $y=0$, en la ecuación de la recta $y=-4x+7$ para obtener $-4x+7=0$, es decir $x=7/4$.
Para hallar 3 puntos de la recta se le dan a x 3 valores distintos (o a y) por ejemplo $x=0$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{4}$ en la ecuación de la recta para obtener los puntos $(0,7)$, $(1,3)$, $(1/4,6)$.

Como la característica fundamental de una recta no vertical es que la pendiente es una constante m, cualquier par de puntos determinan la recta y por consiguiente su ecuación.

Sean $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ dos puntos diferentes de una recta L, como ya se estableció la pendiente m de la recta L, se calcula así:

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

y por consiguiente la ecuación de la recta es:

$$\begin{aligned} y - a_2 &= m(x - a_1); \quad \text{es decir,} \\ y - a_2 &= \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)(x - a_1) \end{aligned}$$

que es la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$.

Ejemplo 5

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,0)$ y $(0,4)$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,0)$ y $(0,4)$ viene dado por

$y - 0 = \dfrac{(4-0)}{(0-4)}(x-4)$, es decir,

$y = -(x-4)$, es decir $x + y = 4$, por tanto

$x + y - 4 = 0$ es la ecuación pedida.

Como una recta vertical no tiene pendiente, su ecuación no es de la forma punto-pendiente. Al ser una recta vertical todos sus puntos tienen la misma coordenada x ($x = a$, si la recta corta al eje x en el punto $(a,0)$) y la coordenada y es cualquier número real. La ecuación de esa recta vertical se expresará entonces como:

$$x = a; \quad \text{donde se entiende que} \quad y \quad \text{es cualquier número real.}$$

La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta L que pasa por el punto (a_1, a_2):

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

se puede cambiar así:

$$\begin{aligned} mx - y - ma_1 + a_2 &= 0 \\ mx - y + (a_2 - ma_1) &= 0 \end{aligned}$$

se hace $m = A$; $B = -1$ y $C = a_2 - ma_1$ para obtener $Ax + By + C = 0$ que se conoce como ecuación general de la recta y que tiene la propiedad de recoger todo tipo de rectas: horizontales, verticales y oblicuas.

Ejemplo 6

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $60°$.

Como el ángulo de inclinación es de $60°$, su pendiente es $m = Tan\ 60° = \sqrt{3}$, y así la ecuación de la recta es $y+3 = \sqrt{3}(x-2)$

Ejemplo 7

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(6,0)$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,3)$ y $(6,0)$ es
$y-0 = \dfrac{0-3}{6-0}(x-6)$; es decir $y = -\dfrac{1}{2}(x-6)$, es decir $2y = -x+6$, por lo tanto $x+2y-6 = 0$.

Ejemplo 8

Dada la ecuación de la recta $3x+2y = 12$, Hallar la pendiente y el intercepto con el eje y.

Como $3x+2y = 12$, entonces $2y = -3x+12$, luego $y = -\dfrac{3}{2}x+6$, y así la pendiente es $-\dfrac{3}{2}$ y el intercepto con el eje y es 6 (cuando $x = 0$).

5.1.1. Ángulo entre dos rectas

Es claro que si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas tienen el mismo ángulo de inclinación y por consiguiente la misma pendiente. Ahora si las dos rectas no son paralelas se deben intersectar en algún punto y formar necesariamente un ángulo agudo entre ellas, el cual se llama "ángulo entre dos rectas".
¿Cómo se calcula ese ángulo?
Consideremos dos rectas L_1 y L_2 con inclinaciones θ_1 y θ_2 respectivamente, ninguna de las dos rectas es horizontal o vertical.

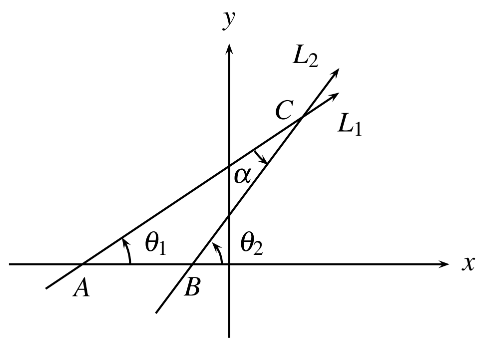


FIGURA N° 5.8

De la gráfica (Fig. 5.8) se observa que el ángulo θ_2 es un ángulo externo al $\triangle ABC$, entonces

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha, \qquad \text{luego} \qquad \alpha = \theta_2 - \theta_1$$

$$\text{Ahora} \qquad Tan\ \alpha = Tan\ (\theta_2 - \theta_1) = \frac{Tan\ \theta_2 - Tan\ \theta_1}{1 + Tan\ \theta_2 Tan\ \theta_1}$$
$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

donde m_1 es la pendiente de L_1 y m_2 es la pendiente de L_2.

Luego el ángulo α entre las dos rectas es aquel cuya tangente esta dada por

$$Tan\ \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.$$

Si L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $\alpha = 90°$ y $Tan\ 90°$ es infinito, lo cual sucede si el denominador de la expresión de arriba es cero, es decir, si

$$1 + m_2 m_1 = 0 \qquad \text{o sea, si}$$
$$m_2 m_1 = -1$$

lo que indica que dada una recta con pendiente $m_1 \neq 0$, cualquier recta perpendicular a ella tiene pendiente

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejemplo 9

Hallar el ángulo entre las rectas $\quad y = \sqrt{3}x\ ; \quad y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x. \quad$ (Figura 5.9)

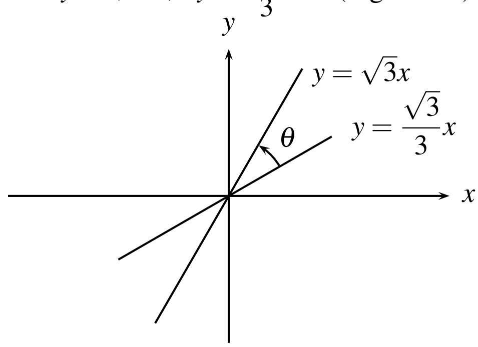


FIGURA 5.9

$$Tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{entonces } \theta = 30° \quad \left(\text{pues } Tan\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ejemplo 10

Sabiendo que el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 es de $45°$ y que la pendiente de L_1 es $2/3$, hallar la pendiente m_2 de L_2

Como $Tan\,45° = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, es decir, $1 = \dfrac{m_2 - 2/3}{1 + (2/3)m_2}$, entonces $1 + \dfrac{2}{3}m_2 = m_2 - 2/3$, luego $m_2 - \dfrac{2}{3}m_2 = 1 + 2/3$, es decir $\dfrac{m_2}{3} = 5/3$, luego $m_2 = 5$.

Ejemplo 11

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0,0)$ y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $y = x$.

Como la recta que pasa por $(0,0)$ es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $y = x$, entonces su pendiente es $m = -\dfrac{1}{1} = -1$ y por tanto su ecuación es $y - 0 = -1(x - 0)$, es decir $y = -x$.

Ejemplo 12

Las rectas $x + 2y = 8$ y $2x + 4y = 1$ son paralelas ya que sus pendientes son iguales, pues de $x + 2y = 8$ se tiene que $2y = 8 - x$, entonces, $y = 4 - \dfrac{x}{2}$ y $\left(m = -\dfrac{1}{2}\right)$, y de $2x + 4y = 1$, se tiene que $4y = 1 - 2x$, es decir, $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{4}x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{2}$ $\left(m = -\dfrac{1}{2}\right)$

Ejemplo 13

Las rectas $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 5)$, $y - 5 = 2(x - 1)$ son perpendiculares ya que el producto de sus pendientes es -1; pues $m_2 \cdot m_1 = -\dfrac{1}{2}(2) = -1$

Ejemplo 14

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y es paralela a la recta que tiene por ecuación $x + 2y = 6$.

Como la recta es paralela a la recta que tiene por ecuación $x + 2y = 6$, es decir, $y = -\dfrac{x}{2} + 3$, entonces su pendiente es $-\dfrac{1}{2}$ y así su ecuación es $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$.

Ejemplo 15

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x + y = 1$, $-x + y = 1$ y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $3x + 2y = 2$.

El punto de intersección de las rectas es $(0,1)$ y como $3x + 2y = 2$, entonces $2y = -3y + 2$, es decir, $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$ y así la pendiente es $\dfrac{2}{3}$, luego su ecuación es $y - 1 = \dfrac{2}{3}(x - 0)$.

Ejemplo 16

Hallar el valor de a de tal forma que la recta que pase por los puntos $(2,a)$ y $(5,-2)$.

$a)$ Sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0,-4)$ y $(-6,3)$.

$b)$ Sea perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(0,-4)$ y $(-6,3)$.

$a)$ En efecto, como las rectas son paralelas, entonces las pendientes deben ser iguales, es decir,

$\dfrac{-2-a}{5-2}=\dfrac{3-(-4)}{-6-0}$, entonces $-2-a=\dfrac{3(7)}{-6}=-\dfrac{7}{2}$, luego $a=-2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{3}{2}$, por tanto $a=\dfrac{3}{2}$

$b)$ Para que las rectas sean perpendiculares debe cumplirse que

$-\dfrac{2-a}{5-2}=-\left(\dfrac{-6-0}{3-(-4)}\right)=\dfrac{6}{7}$, por tanto $-2-a=\dfrac{18}{7}$; luego $-2-\dfrac{18}{7}=a$, luego $a=-\dfrac{32}{7}$

Ejemplo 17

Hallar la distancia del punto $(0,0)$ a la recta que tiene por ecuación $x+2y=4$
Para hallar la distancia del punto $(0,0)$ a la recta, se halla la ecuación de la recta que pasa por $(0,0)$ y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $x+2y=4$, se halla el punto de intersección de las dos rectas y se aplica la fórmula de la distancia entre los dos puntos.
Como $x+2y=4$, entonces $2y=4-x$, es decir $y=2-\dfrac{x}{2}$, luego $m=-\dfrac{1}{2}$ y así la pendiente de la recta perpendicular es $m_1=2$, luego su ecuación es $y-0=2(x-0)$, es decir $y=2x$.
Para hallar el punto de intersección de las dos rectas se iguala y en ambas, es decir, $2x=2-\dfrac{x}{2}$, es decir, $2x+\dfrac{x}{2}=2$, por tanto $\dfrac{5x}{2}=2$ y así $x=\dfrac{4}{5}$, por tanto $y=2\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{8}{5}$, entonces el punto de intersección de las dos rectas es $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$, y así la distancia del punto $(0,0)$ a la recta que tiene por ecuación $x+2y=4$ es

$$d=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-0\right)^2+\left(\frac{8}{5}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{5^2}+\frac{64}{5^2}}=\sqrt{\frac{80}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Se puede demostrar que la distancia del punto (x_0,y_0) a la recta que tiene por ecuación $Ax+By+C=0$ es

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

en el ejemplo anterior $(x_0, y_0) = (0,0)$ $x + 2y - 4 = 0$ entonces si se aplica esta fórmula se tiene que

$$d = \frac{|1 \times 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Ejemplo 18

Dado el triángulo de vértices $A(-1,4)$, $B(1,2)$, $C(3,-2)$. (Fig. 5.10)

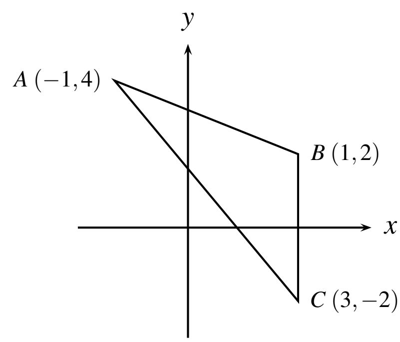


FIGURA 5.10

Hallar

$a)$ La ecuación de la mediana del lado AB del triángulo

$b)$ La ecuación de la mediatriz del lado BC

$c)$ La altura del triángulo considerando a AB como base

$d)$ El área del triángulo

$a)$ La mediana es el segmento de recta que une el punto medio del lado con el vértice opuesto. El punto medio del lado $AB = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (0,3)$ y la pendiente de la recta que pasa por $(0,3)$ y $(3,-2)$ es $m = \frac{-2-3}{3-0} = -\frac{5}{3}$, por tanto la ecuación de la mediana es $y - 3 = -\frac{5}{3}(x-0)$, es decir, $3y + 5x - 9 = 0$.

$b)$ La mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento de recta, luego el punto medio del segmento BC es $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (2,0)$ y la pendiente de la recta que pasa por $(3,-2)$ y $(1,2)$ es $m = \frac{+4}{-2} = -2$ luego la ecuación de la mediatriz es $y - 0 = +\frac{1}{2}(x-2)$, es decir, $2y - x + 2 = 0$.

c) La pendiente de la recta que pasa por $(-1,4)$ y $(1,2)$ es $\dfrac{4-2}{-1-1}=\dfrac{2}{-2}=-1$, luego su ecuación es $y-2=-1(x-1)$; es decir, $y-2=-x+1$, luego $x+y-3=0$. La altura del triángulo es la distancia del punto $(3,-2)$ a $x+y-3=0$, que es $\dfrac{|3-2-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, luego la altura del triángulo es $\sqrt{2}$.

d) El área del triángulo es la longitud del lado AB por la altura dividido por 2. La longitud del lado $AB=\sqrt{(4-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$ y así el área del triángulo es $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

Ejemplo 19

Hallar el valor de m tal que las rectas que tienen por ecuaciones $mx+8y-1=0$; $2x+my-1=0$ son paralelas.

Despejando y de las ecuaciones $mx+8y-1=0$ y $2x+my-1=0$ se satisface $y=-\dfrac{m}{8}x+\dfrac{1}{8}$; $y=\dfrac{-2x}{m}+\dfrac{1}{m}$ y por tanto $-\dfrac{m}{8}=-\dfrac{2}{m}$, entonces $m^2=16$, así $m=\pm 4$.

Ejemplo 20

Hallar el valor de m para que las rectas que tienen por ecuación $2x+my-5=0$; $x+y-1=0$, sean perpendiculares.

Despejando y en las ecuaciones se obtiene $y=-\dfrac{2}{m}x+\dfrac{5}{m}$; y $y=-x+1$ y como son perpendiculares el producto de sus pendientes en -1, es decir $-\dfrac{2}{m}\cdot(-1)=-1$, luego $m=-2$.

Ejemplo 21

Hallar el valor de k tal que la recta que tiene por ecuación $4x-ky-7=0$, tenga pendiente 3.

De la ecuación $4x-ky-7=0$, despejando y se obtiene $y=\dfrac{4}{k}x-\dfrac{7}{k}$ y como la pendiente de $4x-ky-7=0$ es 3 entonces se tiene que $\dfrac{4}{k}=3$, por tanto $k=12$.

Ejemplo 22

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(3,5)$ y no intercepta al eje x.

Como la recta pasa por $(3,5)$ y no intercepta al eje x, debe ser paralela al eje x, luego su pendiente debe ser 0, por tanto su ecuación es $y-5=0(x-3)$, es decir $y=5$.

Ejemplo 23

Hallar el valor de k tal que la recta que tiene por ecuación $3kx+5y+k-2=0$, pase por el punto $(-1,4)$.

Como la recta pasa por el punto $(-1,4)$, entonces el punto $(-1,4)$ satisface su ecuación, es decir, $-3k+20+k-2=0$, luego $-2k+18=0$ y así $k=9$.

EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por:

   a) $(2\,,2)\,,\ (5\,,4)$ *b)* $(1\,,2)\,,\ (-2\,,2)$ *c)* $(4\,,0)\,,\ (5\,,4)$

2. Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto dado y sea i) paralela ii) perpendicular a la recta indicada:

   a) $(2\,,1)\,;\ 4x-2y=3$
   b) $(2\,,5)\,;\ \ x=4$
   c) $(-1\,,0)\,;\ \ y=-3.$

3. Verificar si los 3 puntos dados son colineales, es decir si están sobre la misma recta, o si no lo son.

   a) $(0\,,4)\,,\ \ (2\,,0)\,,\ \ (3\,,2)$
   b) $(0\,,4)\,,\ \ (7\,,-6)\,,\ \ (-5\,,11)$
   c) $(-2\,,1)\,,\ \ (-1\,,0)\,,\ \ (2\,,-2)$

4. Considere la figura 5.11. y halle:

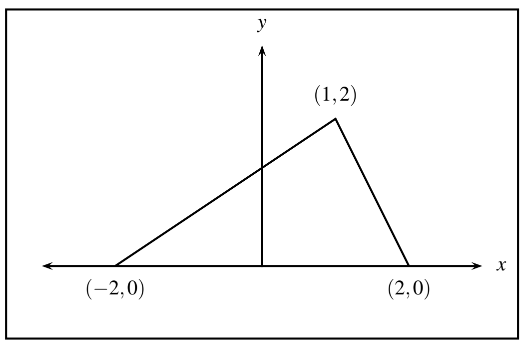


FIGURA 5.11

   a) El punto de intersección de las medianas y sus ecuaciones.
   b) El punto de intersección de la mediatriz y su ecuación.
   c) El punto de intersección de las alturas y sus ecuaciones.
   d) ¿Son colineales estos tres puntos?.

5. Hallar la distancia del punto $(2\,,3)$ a la recta $4x+3y=10.$

6. Hallar la distancia entre las rectas $x+y=1$ y $x+y=5.$

7. Determinar para que valor de a la recta

$$(a+2)\,x+\left(a^2-9\right)y+3a^2-8a+5=0$$

a) Es paralela al eje x.

b) Es paralela al eje y.

c) Pasa por el origen de coordenadas.

8. Demostrar que los puntos $(-3,1)$, $(0,2)$, $(-2,-2)$, $(1,-1)$ son los vértices de un rectángulo.

9. Hallar 3 puntos de la recta que tiene por ecuación $x+2y=16$.

10. Hallar el área del triángulo que tiene por vértices $(3,6)$, $(2,1)$, $(8,2)$.

11. Hallar el valor de a para que la recta que pasa por los puntos $(2,5)$ y $(-4,a)$ tenga pendiente 2.

12. Hallar el valor de k, tal que la recta que tiene por ecuación $kx-y=3k-36$ corte al eje de las x en $x=5$.

13. Demostrar que los puntos $(4,0)$, $(0,4)$, $(0,0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, halle sus 3 ángulos y las ecuaciones de sus lados.

14. Halle el conjunto solución de $x+3y\geq 2$ y $y\geq 1$ $x\leq 0$

15. Dos vértices de un triángulo equilátero son $(-4,0)$ y $(0,0)$, halle el tercer vértice y las ecuaciones de sus lados.

16. Se dan las ecuaciones de dos lados de un rectángulo $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ y la ecuación de una de sus diagonales $3x+7y-10=0$. Hallar las ecuaciones de los otros dos lados y de la otra diagonal.

17. Hallar el ángulo entre las rectas $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

18. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2,5)$ y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $x-3y+6=0$.

19. Hallar la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la recta que pasa por los puntos $(2,-1)$ y $(5,3)$.

20. Hallar la ecuación de la recta

    a) paralela al eje y y que corte al eje x cinco unidades a la derecha del origen

    b) que pase por $(-4,5)$ y cuya pendiente sea $\dfrac{2}{3}$

    c) que pase por $(2,-1)$ y perpendiculares a la recta que pase por $(4,3)$, $(-2,5)$

    d) pase por el punto $(-4,1)$ y sea paralela a la recta que pase por los puntos $(2,3)$, $(-5,0)$.

5.2. LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es un conjunto de puntos en el plano, cuya distancia a un punto fijo, llamado ***centro*** de la circunferencia, es siempre igual a una constante r, llamada el ***radio*** de la circunferencia.

Así, si $p = (x, y)$ es un punto cualquiera sobre una circunferencia con centro en $Q = (h, k)$ y radio r entonces $d\,(P, Q) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$, es decir

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

que se llama, ***Ecuación de la circunferencia de radio r y centro*** (h, k)**.** Fig 5.12.

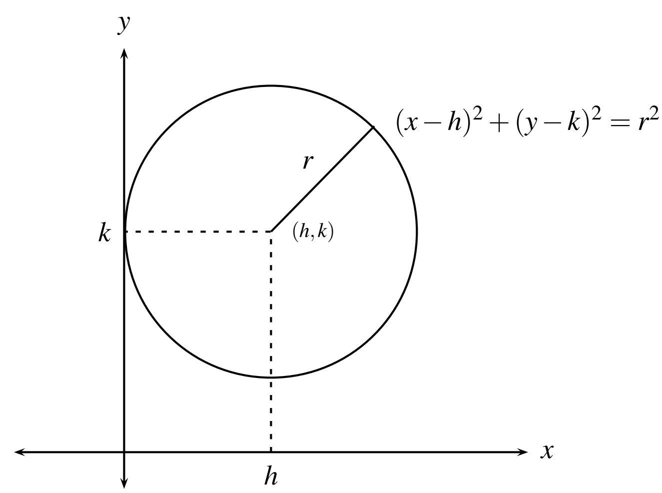


FIGURA 5.12

Ejemplo 1

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es
$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$, es decir, $x^2 + y^2 = r^2$.
Así la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 7 es $x^2+y^2=49$.

Ejemplo 2

La ecuación de la circunferencia con centro $(1, 2)$ y radio 2 es
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ó $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - 4 = 0$; es decir
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Ejemplo 3

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y su centro coincide con el punto $(6, -8)$.

Como la circunferencia pasa por el origen el punto $(0,0)$ esta sobre la circunferencia, luego satisface su ecuación para $x=0$, y $y=0$, y teniendo en cuenta que su centro es $(6\,,-8)$ se tiene que:

$$(0-6)^2+(0+8)^2=r^2 \;\Leftrightarrow\; 36+64=r^2 \;\Leftrightarrow\; 100=r^2 \;\Leftrightarrow\; r=10$$

y así, la ecuación pedida es $(x-6)^2+(y+8)^2=100.$

Es claro que dada la ecuación de una circunferencia con centro en (h,k) y radio r:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

desarrollando se tiene:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

es decir:

$$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0$$

llamando $\quad A=-2h \quad B=-2k \quad C=h^2+k^2-r^2$

entonces la ecuación de la circunferencia siempre se puede expresar como:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

y recíprocamente: ¿ Cuándo una ecuación de esta forma representa una circunferencia ?

No siempre, pues completando cuadrados se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4} &= 0\\ (x+A/2)^2+(y+B/2)^2 &= \frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C\\ (x+A/2)^2+(y+B/2)^2 &= \frac{1}{4}\left(A^2+B^2-4C\right)\end{aligned}$$

Es decir será una circunferencia con centro en $(-A/2,-B/2)$ y radio $r=\sqrt{\frac{1}{4}(A^2+B^2-4C)}$ siempre que $A^2+B^2-4C>0$.

Ejemplo 4

Representa la ecuación $x^2+y^2-4x+2y=76$ una circunferencia? Cuál es su centro y su radio?

Para responder esta pregunta llevamos la ecuación dada a su forma canónica, es decir a la forma

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

completando cuadrados perfectos en x e y en la ecuación original.
Si esto es posible el (h,k) representa el centro y $r > 0$ el radio, si no, esta ecuación no representa una circunferencia.

$$\begin{aligned} \left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right) &= 76 \\ \left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right) &= 76+4+1 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 &= 81 \end{aligned}$$

luego la ecuación representa una circunferencia con centro en $(2,-1)$ y radio 9.

Ejemplo 5

Representa la ecuación $x^2+y^2-6y+14=0$ una circunferencia ? ¿Cuál es su centro? ¿Cuál es su radio?

Completando cuadrados solamente en y, pues en x no es necesario, ya que solamente aparece el x^2, se tiene:

$$\begin{aligned} x^2+\left(y^2-6y+9\right)+14 &= 9 \\ x^2+(y-3)^2 &= 9-14 \\ x^2+(y-3)^2 &= -5 \end{aligned}$$

absurdo pues suma de dos cantidades elevadas al cuadrado es suma de dos cantidades no negativas, las cuales no pueden dar como resultado el número negativo -5.
Es decir esta ecuación no representa gráfica alguna, luego no representa una circunferencia.

Ejemplo 6

Halle la ecuación de la circunferencia con centro en $P=(1,-3)$ y que pasa por el punto $Q=(5,-6)$.
Es claro que el radio de la circunferencia será la distancia entre el centro y este punto, por tanto

$$r = d(P,Q) = \sqrt{(1-5)^2+(-3+6)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Así la ecuación de esta circunferencia está dada por:

$$(x-1)^2+(y+3)^2 = 25$$

Ejemplo 7

Halle la ecuación de la circunferencia de radio 10, que pasa por el punto $(2,-1)$, si su centro está sobre la recta $y=2x$
Como el centro es $(h,2h)$, pues está sobre la recta $y=2x$, es decir, si $x=h$, y debe ser $2h$,

luego

$$\begin{aligned} d\left((h,2h),(2,-1)\right) &= 10 \\ \sqrt{(h-2)^2+(2h+1)^2} &= 10 \\ (h-2)^2+(2h+1)^2 &= 100 \\ h^2-4h+4+4h^2+4h+1 &= 100 \quad \text{luego} \end{aligned}$$

$$5h^2+5=100 \quad \text{entonces} \qquad 5h^2=95 \quad \text{y asi} \qquad h^2=\frac{95}{5}=19 \quad \text{por tanto} \qquad h=\pm\sqrt{19}$$

la ecuación sera:

$$\left(x-\sqrt{19}\right)^2+\left(y-2\sqrt{19}\right)^2=100 \qquad \text{ó} \qquad \left(x+\sqrt{19}\right)^2+\left(y+2\sqrt{19}\right)^2=100$$

verificamos con el punto $(2,-1)$ en las dos ecuaciones para ver cual sirve:
$\left(2-\sqrt{19}\right)^2+\left(-1-2\sqrt{19}\right)^2=4-4\sqrt{19}+19+1+4\sqrt{19}+(4)(19)=100$
$\left(2+\sqrt{19}\right)^2+\left(-1+2\sqrt{19}\right)^2=4+4\sqrt{19}+19+1-4\sqrt{19}+(4)(19)=100$
luego las dos respuestas son validas.
Muestre gráficamente la validez de las dos respuestas!

Ejemplo 8

Halle la ecuación de la circunferencia de radio 5 cuya recta tangente en el punto $(1,6)$ de la circunferencia tiene pendiente 2.

Suponga que el centro está en el punto (h,k)
Como el segmento de recta que va del punto (h,k) al punto $(1,6)$ sobre la circunferencia debe ser perpendicular a la recta tangente a la curva en este punto, entonces la pendiente de este segmento debe ser $-\frac{1}{2}$ sobre la pendiente de la recta tangente, es decir:

$$\text{pendiente del segmento} = \frac{k-6}{h-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; 2(k-6)=1-h \;\Rightarrow\; 2k+h=13 \;\Rightarrow\; h=13-2k$$

Por otro lado, la distancia del centro (h,k) al punto $(1,6)$ es igual al radio 5, es decir:

$$\begin{aligned} d\left((h,k),(1,6)\right) &= 5 \\ \sqrt{(h-1)^2+(k-6)^2} &= 5 \\ (h-1)^2+(k-6)^2 &= 25 \qquad \text{pero} \quad h=13-2k, \quad \text{entonces} \\ (13-2k-1)^2+(k-6)^2 &= 25 \\ (12-2k)^2+(k-6)^2 &= 25 \\ 144-48k+4k^2+k^2-12k+36 &= 25 \\ k^2-12k+31 &= 0 \qquad \text{es decir} \end{aligned}$$

$$k = \frac{12 \pm \sqrt{144-4(31)}}{2} = 6 \pm \sqrt{5}$$

Así para $k = 6+\sqrt{5} \quad \Rightarrow h = 13-2k = 13-2(6+\sqrt{5}) = 1-2\sqrt{5}$ y el centro es $\left((1-2\sqrt{5}),(6+\sqrt{5})\right)$ y la ecuación será:

$$\left(x-(1-2\sqrt{5})\right)^2 + \left(y-(6+\sqrt{5})\right)^2 = 25$$

para $k = 6-\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad h = 13-2k = 13-2(6-\sqrt{5}) = 1+2\sqrt{5}$ y la ecuación será:

$$\left(x-(1+2\sqrt{5})\right)^2 + \left(y-(6-\sqrt{5})\right)^2 = 25$$

Ilustre gráficamente por qué dos respuestas!

EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(4\,,0)$ y radio 5.
2. Hallar la ecuación de la circunferencia, que pasa por el origen y tiene su centro en $(0\,,5)$.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro $(0,5)$ y radio 5.
4. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(4,-1)$ y que pase por $(-1,3)$
5. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro $(-4,3)$ y tangente al eje y
6. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(3,-4)$ y que pase por el origen.
7. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a los dos ejes coordenados y con centro en el primer cuadrante
8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que tiene por ecuación $x^2+y^2=13$ en el punto $(3,2)$
9. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que tiene por ecuación $(x-3)^2+(y+1)^2=50$ en el punto $(-2,4)$
10. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro $\overline{AB}$ siendo $A=(2\,,4)$ y $B=(6\,,8)$ y encontrar los puntos de intersección de la recta $y-x-2=0$ con dicha circunferencia.
11. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(1\,,1)$, $(1\,,-1)$ y $(-1\,,1)$.
12. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(4,5)$, $(3,-2)$, $(1,-4)$
13. ¿Cuáles de las ecuaciones siguientes representan circunferencias. Hallar centro y radio:

    a) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$
    b) $x^2+y^2-6x-4y+13=0$
    c) $x^2+y^2-x=0$

d) $x^2 + y^2 - y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 26 = 0$

f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

g) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0.$

14. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $(1, -1)$ y tangente a la recta $5x - 12y + 9 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-1, 3)$ y su centro está situado en la recta $3x - y - 2 = 0$.

16. Hallar la ecuación de la recta que corta diametralmente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ y que es perpendicular a la recta $5x + 2y - 13 = 0$.

17. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $7x - y + 12 = 0$ y la circunferencia $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro en $(-2,3)$ y que sea tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(-3,2)$ y $(4,1)$ y que sea tangente al eje x

20. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 2y + 4 = 0$, $2x - y - 8 = 0$ y que pase por $(4,-1)$

21. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $x - 3y + 9 = 0$; $3x + y - 3 = 0$ y que tenga centro en $7x + 12y - 32 = 0$

22. Hallar los puntos comunes a $x^2 + y^2 = 25$ y $y = x$

5.3. PARÁBOLA

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado ***Foco*** y de una recta fija llamada ***Directriz***. La ecuación que representa los puntos de una parábola, depende de la posición del foco (F) y de la directriz (d). Inicialmente se deducirá esta ecuación para un caso simple en el cual el foco se encuentra sobre el eje y, la directriz es paralela al eje x y el punto $(0, 0)$ pertenece a la parábola como se puede apreciar en la figura 5.13.

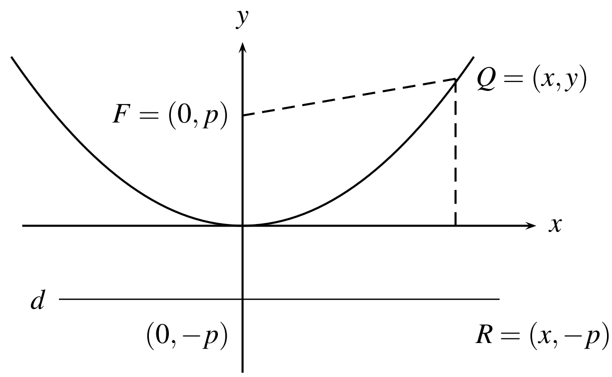


FIGURA 5.13

Como $(0\,,0)$ es un punto de la parábola, entonces su distancia al foco debe ser igual a su distancia a la directriz, por tanto si la coordenada del foco F es por ejemplo $(0\,,p)$ con $p>0$, este esta en el eje y arriba del eje x, y por consiguiente la ecuación de la directriz es $y=-p$. $(-p<0)$ que se encuentra bajo el eje x

Sea $Q=(x\,,y)$ un punto sobre la parábola, entonces de acuerdo a su definición,

$d\,(F\,,Q)=d\,(Q\,,R)$, es decir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+(y-p)^2} &= y+p \Leftrightarrow \\
x^2+(y-p)^2 &= (y+p)^2 \Leftrightarrow \\
x^2+y^2-2py+p^2 &= y^2+2yp+p^2 \Leftrightarrow \\
x^2 &= 4py \Leftrightarrow \\
4py &= x^2
\end{aligned}$$

dándole valores a x y obteniendo los respectivos valores para y, se puede apreciar que su correspondiente gráfico es (figura 5.14a)

Ahora si el foco es $F=(0,p)$ con $p<0$, entonces éste estaría en el eje y debajo del eje x, y su directriz sería $y=-p$, aquí $-p>0$ luego se encuentra sobre el eje x. Con el mismo desarrollo dado arriba se puede apreciar que se obtiene la misma ecuación $x^2=4py$ solo que aquí $p<0$. Su gráfico se puede apreciar en la figura 5.14b.

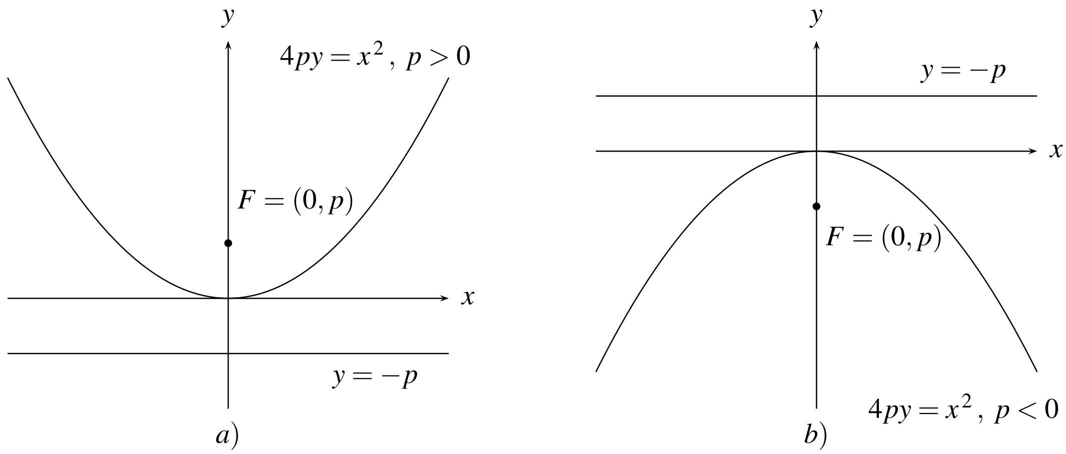


FIGURA N° 5.14

En forma análoga se puede deducir la ecuación de la parábola que pasa por el origen con foco sobre el eje x y con directriz paralela al eje y.

$$y^2 = 4px$$

donde $(p\,,0)$ es la coordenada del foco (Fig. 5.15a) para $p > 0$ y (Fig. 5.15b) para $p < 0$ y su directriz tendrá como ecuación $x = p$

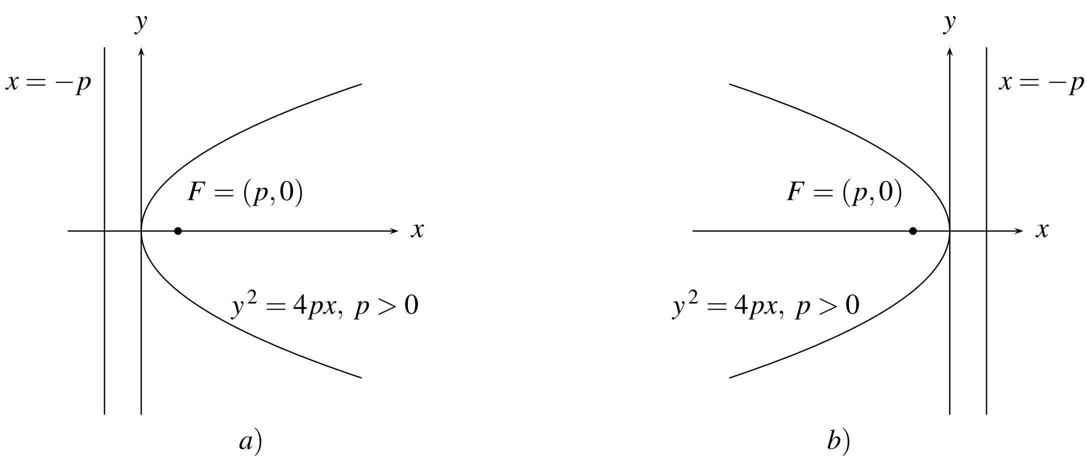


FIGURA N° 5.15

NOTA

El punto de la parábola que está más cerca de la directriz se llama ***Vértice*** de la parábola (el $(0\,,0)$ en estos casos) y la recta que contiene al vértice y al foco se llama *Eje* de la parábola (eje x y eje y respectivamente, en los dos casos anteriores).

Ejemplo 1

En la parábola $y^2 = -6x$; su vértice está en el origen y su directriz es paralela al eje y, además $4p = -6 \Rightarrow p = -6/4 = -3/2$, luego su foco $F = \left(-3/2, 0\right)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$ o sea $x = -\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ es decir $x = 3/2$ (figura 5.16)

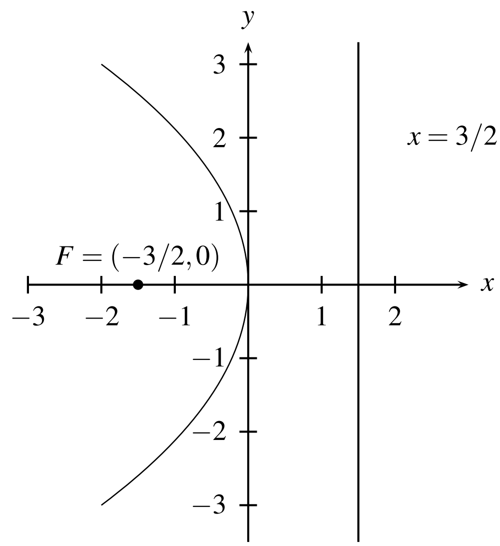


FIGURA N° 5.16

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la parábola que tiene vértice en el origen, se abre hacia arriba, y pasa por $(-3, 7)$.

La ecuación es de la forma $x^2 = 4py$. Como $(-3, 7)$ está en la parábola, satisface su ecuación, es decir, $9 = 4p\,(7) \Rightarrow p = 9/28$ luego su ecuación será $x^2 = 4\left(9/28\right)y$ o sea $x^2 = \dfrac{9}{7}y$

Para hallar la ecuación de una parábola con eje paralelo al eje y o al eje x, y con vértice en un punto (h, k) distinto del origen, es necesario conocer el proceso de relacionar puntos en dos sistemas de coordenadas diferentes con ejes paralelos, lo que se conoce como ***Traslación de un sistema***. Así, si las coordenadas de un punto P respecto a un sistema rectangular xy son (x, y), y (x', y') son las coordenadas del mismo punto P pero referido a un nuevo sistema coordenado $x'y'$, que tiene su origen en el punto (h, k) del sistema original xy. Cuál sera la relación entre las coordenadas del punto P en los dos sistemas?.

Para resolver este interrogante obsérvese la figura 5.17

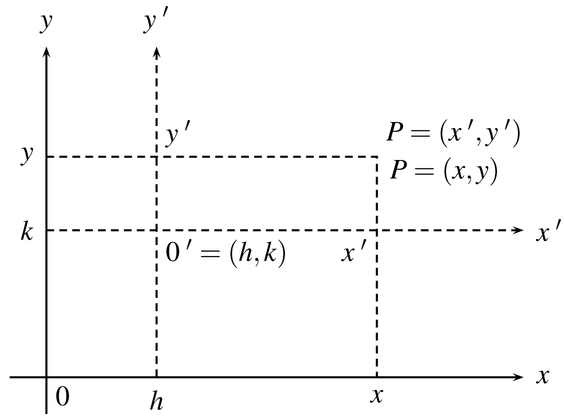


FIGURA 5.17

aquí: $x = h + x'$ y $y = k + y'$ ó $x' = x - h$ y $y' = y - k$.

Considérese la parábola con vértice en $(h, k) \neq (0, 0)$, con directriz paralela al eje x en un sistema xy. Para hallar la ecuación de esta parábola en este sistema, se construye un sistema $x'y'$ con origen $0'$ en (h, k) y con ejes x', y' paralelos a los ejes x, y respectivamente. En este sistema la parábola tiene vértice en el origen $0'$ y su directriz es paralela al eje x' por tanto su ecuación es $4py' = (x')^2$, donde $(0, p)$ es la coordenada del foco en el sistema $x'y'$ (Fig. 5.18 *a*). Trasladar al sistema original, es hacer $x' = x - h$, $y' = y - k$, lo que convierte esta ecuación en

$$4p\,(y-k) = (x-h)^2$$

que es la ecuación de la parábola buscada en el sistema *xy,* donde $(h, p+k)$ son las coordenadas del foco, pues el punto $(0, p)$ en el sistema $x'y'$ es el punto $(0+h, p+k) = (h, p+k)$ en el sistema xy (figura 5.18 *b*)

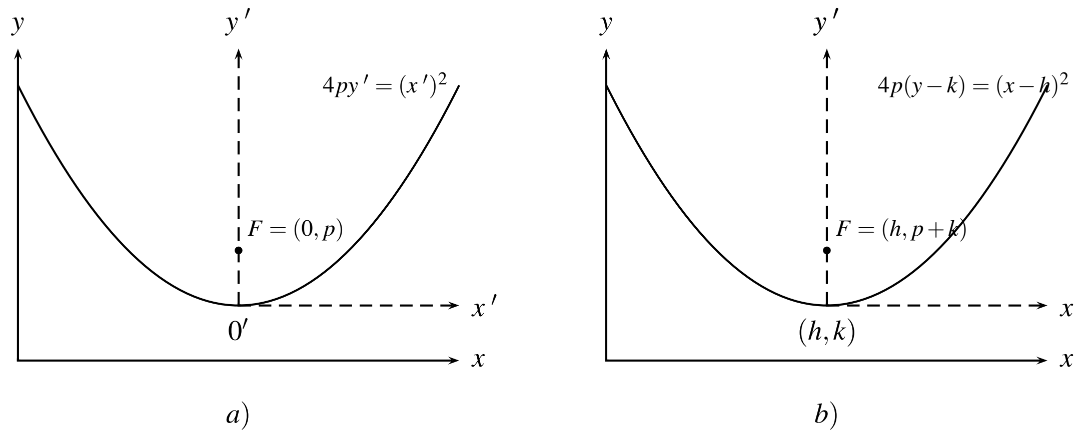


FIGURA 5.18

Observe que la ecuación de la directriz en el sistema $x'y'$ es $y' = -p$, luego en el sistema xy es $y - k = -p$, es decir,

$$y = k - p$$

Análogamente una ecuación de la forma

$$4\,p\,(x-h) = (y-k)^2$$

representa una parábola con vértice en $(h\,,k)$, con directriz paralela al eje y, y con foco en el punto $(h+p\,,k)$ y cuya directriz tiene ecuación

$$x = h - p$$

Ejemplo 3

La ecuación de la parábola con vértice en $(2\,,4)$ y con directriz paralela al eje x con ecuación $y=10$ está dada por $4\,p\,(y-4) = (x-2)^2$, pues $h=2$ y $k=4$. Ahora para hallar p, recuerde que la directriz en este caso esta dada por $y=k-p$, es decir, $y=4-p$. Así que $10=4-p$ entonces $p=-6$, luego la ecuación de la parábola pedida es $4(-6)(y-4)=(x-2)^2$, es decir,

$$-24(y-4) = (x-2)^2$$

¿Cuál seria la ecuación de la parábola con el mismo vértice y directriz paralela al eje y y con ecuación de la directriz $x=10$?

Ejemplo 4

La ecuación $y = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, siempre representa una parábola abierta arriba si $a > 0$ o abierta hacia abajo si $a < 0$.

Para verificarlo se completa un cuadrado perfecto utilizando los términos en x^2 y x, es decir:

$$\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right) + a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}$$

entonces

$$y - \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

entonces

$$\frac{1}{a}\left(y-\frac{(4ac-b^2)}{4a}\right) = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

que comparado con la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ se ve que corresponde a la parábola con vértice en $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$, con directriz paralela al eje x, y con

$$4p = \frac{1}{a};$$

lo que indica que si $a > 0$, entonces p es mayor que cero y la parábola se abre hacia arriba y si $a < 0$, entonces p es menor que cero y se abre hacia abajo.
Además, puesto que el vértice tiene abscisa $-\dfrac{b}{2a}$ a este valor de x corresponde el máximo de la parábola (para $a < 0$) ó el mínimo (para $a > 0$), y este valor máximo o mínimo está dado por: $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Ejemplo 5

Dada $y = 2x^2 + 4x + 5$ entonces
$y = 2\left(x^2 + 2x + 5/2\right) = 2\left(x^2 + 2x + 1 + 3/2\right) = 2(x+1)^2 + 3$, luego $y - 3 = 2(x+1)^2$, es decir, la ecuación $y = 2x^2 + 4x + 5$ representa una parábola con vértice en $(-1, 3)$, con directriz paralela al eje x, con $4p = 1/2$ o sea $p = 1/8$, lo que implica que las coordenadas de su foco son $\left(-1, 3 + 1/8\right) = \left(-1, 25/8\right)$ y que está abierta hacia arriba (pues $a = 2 > 0$).

Además el mínimo se encuentra en su vértice, es decir, el punto con abscisa $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2\cdot 2} = -1$, y con ordenada $\dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{4\cdot 2\cdot 5 - 16}{4\cdot 2} = 3$ o sea el punto $(-1, 3)$ (figura 5.19)

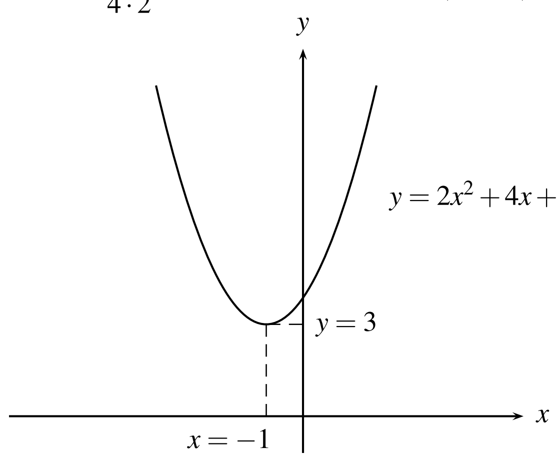


FIGURA N° 5.19

Ejemplo 6

Analice y trace la gráfica de $y = 2x^2 - 6x + 4$.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 4 = 2\left(x^2 - 3x + 2\right) = 2\left(x^2 - 3x + 9/4 - 9/4 + 2\right) \\ &= 2\left(x^2 - 3x + 9/4\right) - \left(9/2\right) + 4 = 2\left(x - 3/2\right)^2 - 1/2 \end{aligned}$$

entonces $y + 1/2 = 2\left(x - 3/2\right)^2$, es decir, $1/2\left(y + 1/2\right) = \left(x - 3/2\right)^2$, que representa una parabola abierta hacia arriba con su vértice en $(h, k) = \left(3/2, -1/2\right)$, y como $4p = 1/2 \Rightarrow p = 1/8$, es decir, el foco está en $F = \left(3/2, -1/2 + 1/8\right) = \left(3/2, -3/8\right)$ y la ecuación de la directriz es $y = \left(-1/2\right) - \left(1/8\right) = -5/8$ o sea $y = -5/8$ (figura 5.20).

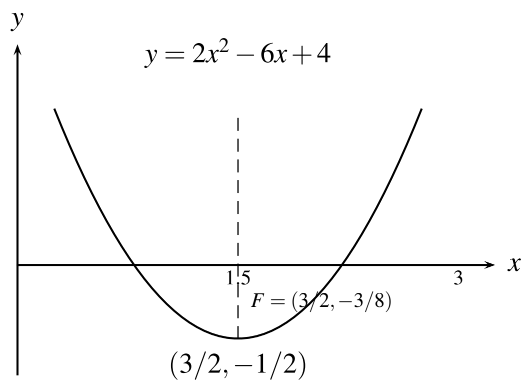


FIGURA 5.20

Ejemplo 7

Trazar la gráfica de la parábola $x^2 - 2x - 8y = 23$.

Como $x^2 - 2x - 8y = 23$; completando cuadrados se tiene que

$x^2 - 2x = 8y + 23$

$x^2 - 2x + 1 = 8y + 23 + 1$

$(x-1)^2 = 8(y+3)$ así que el vértice de la parábola es $(h,k) = (1,-3)$ y como $4p = 8$, entonces $p = 2$, el eje de simetría es la recta $x = 1$ y la coordenada del foco se encuentra moviéndose 2 unidades en forma vertical hacia arriba partiendo del vértice $(1,-3)$ para obtener $(-1,-3+2) = (-1,-1)$ que son las coordenadas del foco, y la directriz es la recta horizontal que esta 2 unidades abajo del vértice $(1,-3)$ es decir $y = -5$ (Figura 5.21)

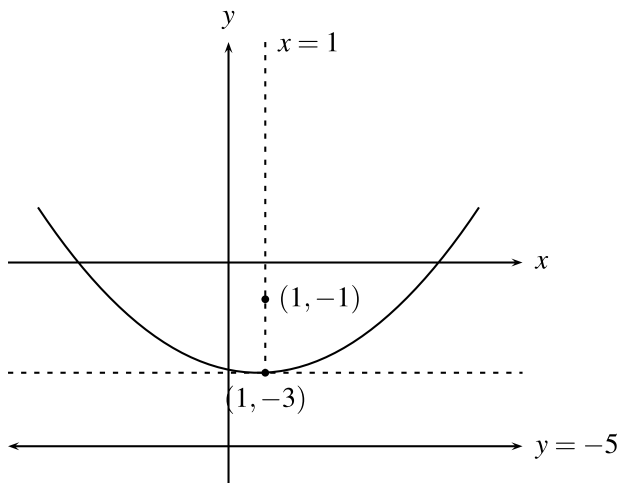


FIGURA N° 5.21

Ejemplo 8

Hallar la ecuación de la parábola cuyo esta en $(2,0)$ y su vértice esta en $(-4,0)$.

La ecuación de la parábola es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ que en este caso corresponde a $(y-0)^2 = 4p(x+4)$. Como la distancia entre el vértice $(-4,0)$ y el foco $(2,0)$ es 6 entonces $p = 6$, luego la ecuación es $y^2 = 24(x+4)$.

Ejemplo 9

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice esta en $(3,2)$ y foco en $(5,2)$.

Como el vértice esta en el punto $(3,2)$ y el foco en el punto $(5,2)$ entonces $p = 2$ y así la ecuación de la parabola será $(y-2)^2 = (4)\cdot 2(x-3)$ la ecuación de su directriz sera $x = 3-2 = 1$ (Figura 5.22)

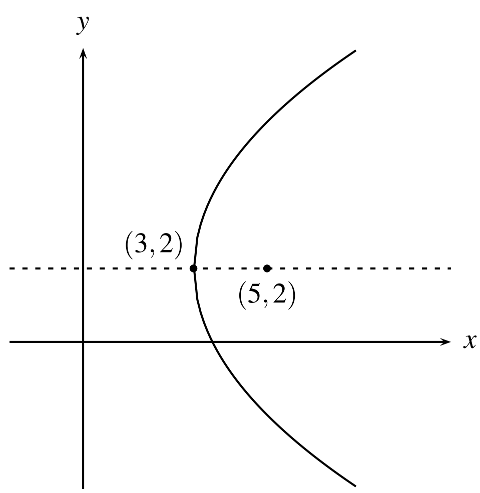


FIGURA N° 5.22

Ejemplo 10

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice esta en el punto $(2,3)$ su eje es paralelo al eje y y que pasa por el punto $(4,5)$.

La ecuación tiene la forma $(x-2)^2 = 4p(y-3)$ y como la curva pasa por $(4,5)$ entonces este punto debe satisfacer la ecuación, es decir $(4-2)^2 = 4p(5-3)$; luego, $4 = 4p\cdot(2) \rightarrow p = 1/2$ y así la ecuación es $(x-2)^2 = 2(y-3)$.

Ejemplo 11

Dada la parábola de ecuación $y^2+8y-6x+4=0$
Hallar las coordenadas del vértice y del foco, y la ecuación de su directriz.

Como $y^2+8y-6x+4=0$ completando cuadrados se tiene

$y^2+8y+16-16-6x+4=0$
$(y+4)^2 = 6x+12 = 6(x+2)$, luego

$(y+4)^2 = 6(x+2)$, por tanto las coordenadas del vértice son $(-2,-4)$ y como $4p=6$, $p = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, las coordenadas del foco son $\left(-2+\dfrac{3}{2},-4\right) = \left(-\dfrac{1}{2},-4\right)$ y la ecuación de la directriz es $x = -2-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{7}{2}$.

Ejemplo 12

Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco esta en $(2,-1)$ y directriz $x=6$

La ecuación de la parábola tiene la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ y como la ecuación de la directriz es $x = h-p = 6$ entonces $h-p=6$ y como el foco esta en $(2,-1)$, entonces $h+p=2$ al resolver este sistema en variables h y p se obtiene $h=4$ y $p=-2$. Como $k=-1$ $(\text{foco}(2,-1))$ entonces la ecuación es $(y+1)^2 = -8(x-4)$.

EJERCICIOS

1. Hallar las coordenadas del vértice, foco y la ecuación de la directriz para las parábolas.

   a) $y^2 = 2x$ *b*) $y^2 = -x$ *c*) $y = 4x^2$ *d*) $y = -3x^2$

2. Hallar la ecuación de la parábola tal que:

   a) Su vértice está en el origen y las coordenadas del foco son $(3,0)$.
   b) Su vértice está en el origen y las coordenadas del foco son $(-5,0)$.
   c) Su vértice está en el origen y la ecuación de la directriz es $y+4=0$.
   d) Su vértice está en el origen y las coordenadas del foco son $\big(0,-1/3\big)$.

3. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje a lo largo del eje de las x, si la parábola pasa por $(3\,,-1)$.

4. Hacer un estudio detallado de la ecuación $x = ay^2 + by + c\,,\quad a \neq 0$, hallando, ecuaciones de las directrices, coordenadas del vértice, coordenadas del foco y gráficos.

5. En las ecuaciones de las parábolas trasladadas:

   i) $(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \quad p > 0$
   ii) $(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \quad p > 0$
   iii) $(x-2)^2 = 8(y+2)$
   iv) $(y+5)^2 = 16(x-4)$

   hallar:

   a) Las coordenadas del vértice.
   b) La ecuación del eje.
   c) Las coordenadas del foco.
   d) La ecuación de la directriz.

6. Obtener una ecuación de la parábola con vértice en $(2\,,-3)$ y directriz $y = 4$.

7. Hallar el vértice, el foco, la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8y = 4x - 8$.

8. Hallar el vértice, el foco, la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es

   a) $6x^2 + 24x - 8y + 19 = 0$
   b) $x^2 + 4x + 6y + 4 = 0$
   c) $y^2 + 8y + 6x + 16 = 0$
   d) $-y^2 - 8x - 2y + 2 = 0$
   e) $y^2 - 8y = 4x - 8$

9. La ecuación $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$. ¿Siempre representa una parábola?.

10. Hallar la ecuación de una recta horizontal que corte a la parábola $y = (x-2)^2$ en un sólo punto.

11. Hallar el punto de intersección de la recta $y = x - 1$ con la parábola $x = y^2$.

12. Halle la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas

   a) Vértice en $(3,-2)$, foco en $(3,-8)$
   b) Vértice en $(4,1)$, directriz $x = 2$
   c) Foco en $(2,-3)$, directriz $x = 6$
   d) Foco en $(-2,2)$, directriz $y = 4$
   e) Vértice en $(3,-4)$, eje horizontal, y pasa por $(2,-5)$
   f) Foco en $(2,4)$, vértice en $(5,4)$

5.4. ELIPSE

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados *Focos* es una constante.

Para hallar su ecuación se considera inicialmente el caso en que los dos focos se encuentran sobre el eje x a igual distancia del origen; llámese por tanto $F_1 = (c,0)$, $F_2 = (-c,0)$ a sus coordenadas. (Figura 5.23)

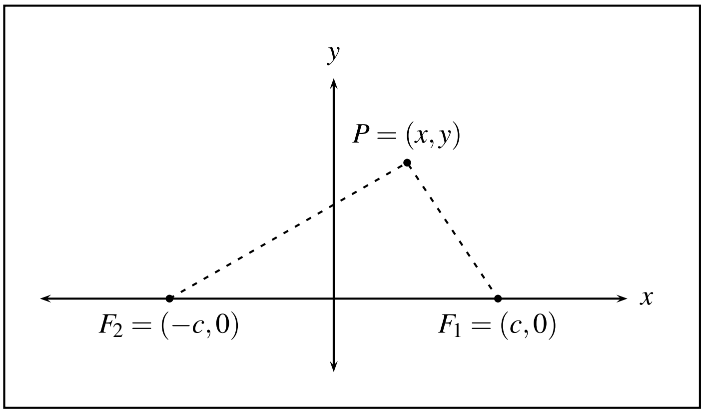


FIGURA N° 5.23

Si $P = (x,y)$ es un punto sobre la elipse, llamando $2a$ a la constante a la que se refiere la definición, se tiene:

$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ y considerando sus coordenadas:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\
\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \\
\Leftrightarrow x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2 \\
\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 4cx+4a^2 \\
\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= cx+a^2 \\
\Leftrightarrow a^2\left((x+c)^2+y^2\right) &= \left(cx+a^2\right)^2 \\
\Leftrightarrow a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 &= c^2x^2+2a^2cx+a^4 \\
\Leftrightarrow x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right) \\
\Leftrightarrow b^2x^2+a^2y^2 &= a^2b^2 \quad \text{(haciendo } a^2-c^2=b^2\text{)}
\end{aligned}$$

y dividiendo entre a^2b^2 se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que se conoce como la ecuación de la elipse en forma canónica, observe que en ella $a>b$.
Gráficamente, $\pm a$ representa los cortes de la elipse con el eje x , pues si
$y=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$ y análogamente $\pm b$ representa los cortes de la misma con el eje y.
A $2a$ se le llama ***Eje mayor*** de la elipse y a $2b$ el ***Eje menor***; al eje donde se encuentran los focos, ***Eje principal de la elipse***; a los puntos $(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$ es decir, los extremos de los ejes se les llama ***Vértices de la elipse*** y al punto sobre el eje principal, equidistante a los focos, ***Centro de la elipse*** (Figura 5.24)

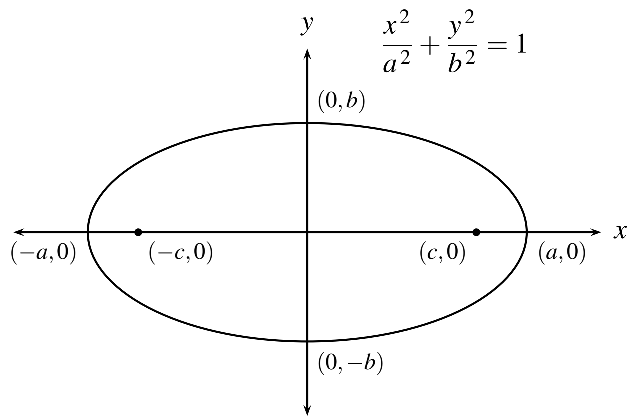


FIGURA N° 5.24

En forma análoga se deduce la ecuación de la elipse con focos sobre el eje y a igual distancia del origen, es decir, $F_1=(0,c)$, $F_2=(0,-c)$ la cual está dada por

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

donde $2a$ es el eje mayor y $2b$ es el eje menor, y $a^2-b^2=c^2$. (Figura 5.25)

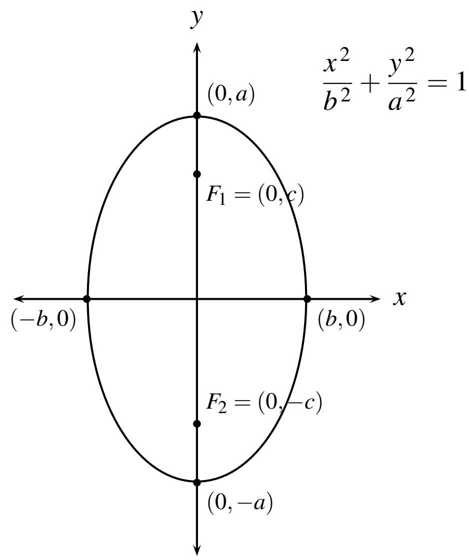


FIGURA N° 5.25

Ejemplo 1

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, hallar las coordenadas de los vértices, focos y la longitud de los ejes.
La longitud del eje mayor es $2a=6$, y la longitud del eje menor es $2b=4$, y los focos deben estar en el eje x. Ahora por la forma de la ecuación

Si $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{9}=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

Si $x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

luego las coordenadas de los vértices de la elipse son $(\pm 3,0)$ y $(0,\pm 2)$

Como $c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$

y en consecuencia las coordenadas de los focos son $(\pm\sqrt{5},0)$ (Figura 5.26)

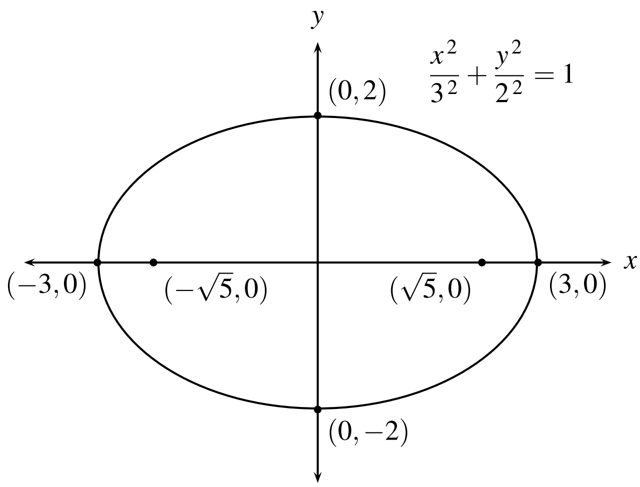


FIGURA Nº 5.26

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la elipse con vértices en $(\pm 5,0)$ y focos en $(\pm 3,0)$, como las ordenadas de los vértices y focos son las mismas entonces $a=5$ y $c=3$, como $b^2=a^2-c^2=25-9=16$ y así la ecuación es:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Ejemplo 3

Dada la ecuación de la elipse $25x^2+4y^2=100$, hallar las coordenadas de sus focos, sus vértices y trace su gráfico.

La ecuación $25x^2+4y^2=100$ se puede escribir como $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$, es decir, como $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ que corresponde a una elipse con centro en el origen cuyo semieje mayor es $a=5$ y semieje menor $b=2$ y con focos localizados sobre el eje y. Como $c^2=a^2-b^2=25-4=21$, entonces $c=\pm\sqrt{21}$, luego las coordenadas de los focos son los puntos $(0,\sqrt{21})$, $(0,-\sqrt{21})$. Como $b^2=4$, $b=\pm 2$ y $a^2=25$, $a=\pm 5$ entonces las coordenadas de los vértices son los puntos $(2,0)$, $(-2,0)$ y $(0,5)$, $(0,-5)$ (Figura 5.27)

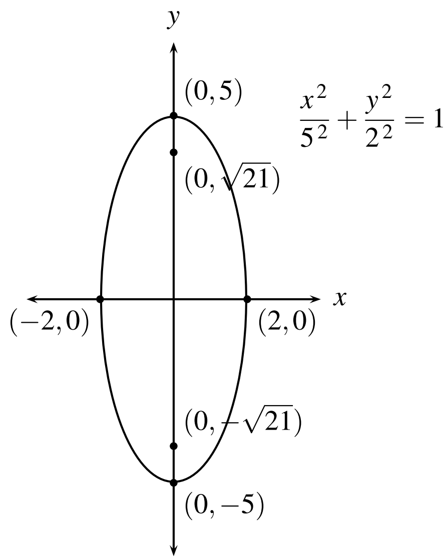


FIGURA Nº 5.27

En forma similar al tratamiento hecho con la parábola es posible , utilizando traslaciones, hallar ecuaciones de elipses con eje paralelo al eje x o eje y y con centro en un punto $(h,k) \neq (0,0)$, las cuales están dadas por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

cuando el eje mayor $2a$ es paralelo al eje x, en cuyo caso, las coordenadas de los vértices son $(h+a,k)\,,(h-a,k)\,,(h,k+b)\,,(h,k-b)$ las coordenadas de los focos son $(h+c,k)$ y $(h-c,k)$ (Figura 5.28a) y

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

cuando el eje mayor $2a$ es paralelo al eje y, en cuyo caso, las coordenadas de los vértices son $(h+b,k)\,,(h-b,k)\,,(h,k+a)\,,(h,k-a)$ y las coordenadas de los focos $(h,k+c)$ y $(h,k-c)$ (Figura 5.28b)

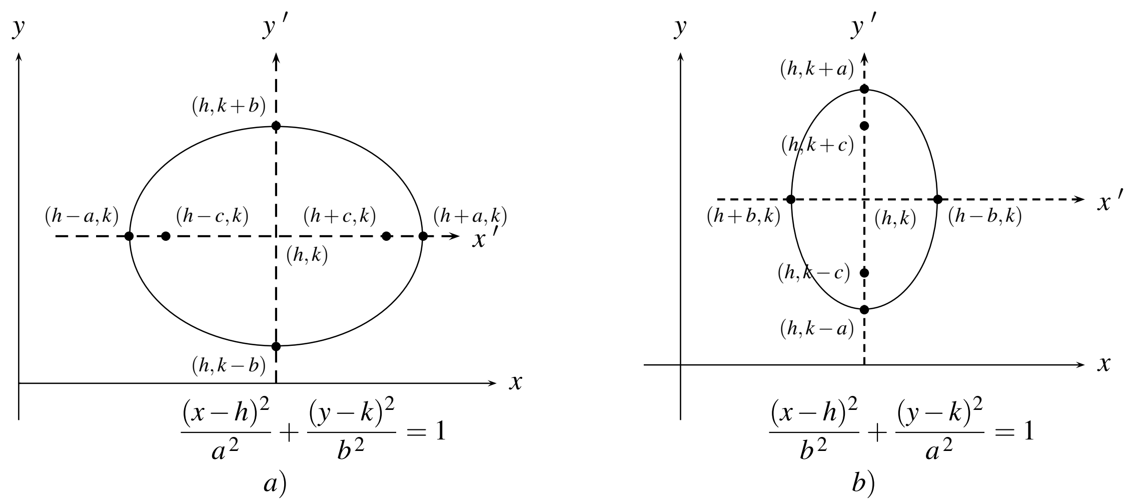


FIGURA Nº 5.28

Ejemplo 4

Determinar las coordenadas del centro, vértices, focos y gráfico de la ecuación

$$(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

Como la ecuación $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ corresponde a una elipse, su centro es $(h,k)=(2,-1)$; y como $a^2=4$; $a=2$ y $b^2=1$, $b=1$ y como $a>b$ el eje mayor es paralelo al eje y y tiene por ecuación $x=2$. Como el centro de la elipse es $(h,k)=(2,-1)$, para hallar los vértices, como $b=1$, nos movemos una unidad en forma horizontal a la derecha y a la izquierda del centro $(2,-1)$ para obtener $(2+1,-1)=(3,-1)$ y $(2-1,1)=(1,-1)$ y así se determinan los vértices $(3,-1)$ y $(1,-1)$; y como $a=2$ nos movemos dos unidades en forma vertical hacia arriba y hacia abajo del centro $(2,-1)$ para obtener $(2,-1+2)=(2,1)$ y $(2,-1-2)=(2,-3)$ los otros vértices.
Como $c^2=a^2-b^2=4-1=3$; $c=\pm\sqrt{3}$. Para obtener las coordenadas del foco nos movemos en forma vertical hacia arriba y hacia abajo del centro $(2,-1)$ $\sqrt{3}$ unidades para obtener $(2,-1+\sqrt{3})$, $(2,-1-\sqrt{3})$ las coordenadas de los focos.
Ahora las coordenadas de los vértices de la elipse $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ también se pueden calcular así:

Si se hace $x=2$ en la ecuación $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ se tiene $\frac{(y+1)^2}{4}=1$, es decir, $(y+1)^2=4$; luego $y+1=\pm 2$ y por tanto $y=-1\pm 2$, luego $(2,-1-2)=(2,-3)$ y $(2,-1+2)=(2,1)$, son las coordenadas de los vértices. Y se hace $y=-1$ en la ecuación $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ se tiene que $(x-2)^2=1$, luego $x-2=\pm 1$, así que $x=2\pm 1$, por tanto
$(2+1,-1)=(3,-1)$ y $(2-1,-1)=(1,-1)$ las coordenadas de los otros vértices. (Fig. 5.29)

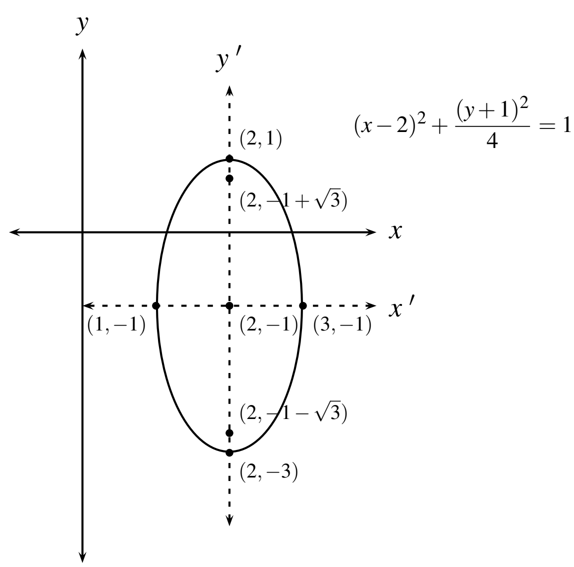


FIGURA N° 5.29

Ejemplo 5

Dada la ecuación de la elipse $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{4}=1$ hallar las coordenadas del centro, vértices, focos y trace su gráfico. El centro es el punto $(3,-4)$. $a^2=16$, entonces $a=\pm4$ y $b^2=4$, entonces $b=\pm2$.
Como el centro tiene coordenadas $(3,-4)$, el eje mayor está en la recta $y=-4$ y como $a=4$, para hallar las coordenadas de uno de los vértices se mueven 4 unidades en forma horizontal a la derecha y a la izquierda del centro para obtener $(3+4,-4)=(7,-4)$ y $(3-4,-4)=(-1,-4)$ y como $b=2$, nos movemos en forma vertical hacia arriba y hacia abajo del centro $(3,-4)$ para obtener $(3,-4+2)=(3,-2)$ y $(3,-4-2)=(3,-6)$ que son las coordenadas de los otros vértices.
Como $c^2=a^2-b^2=16-4=12$ entonces $c=\pm\sqrt{12}$ y las coordenadas de los focos los determinamos moviendo $\sqrt{12}$ unidades a la derecha e izquierda del centro $(3,-4)$, para obtener $(3+\sqrt{12},-4)$ y $(3-\sqrt{12},4)$. (Fig. 5.30)

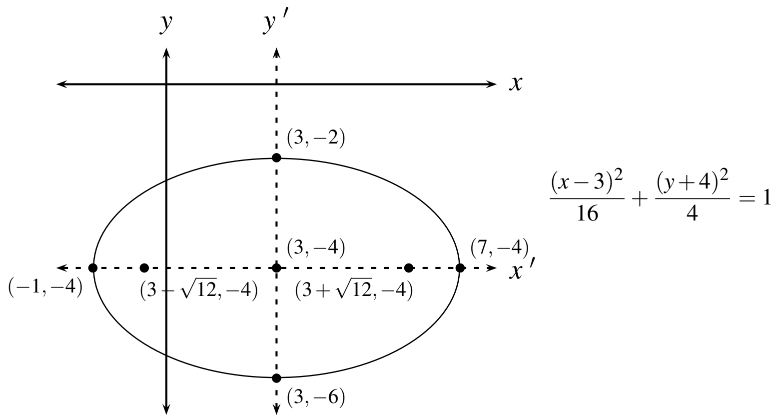


FIGURA N° 5.30

Ejemplo 6

Dada la ecuación $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$ hallar las coordenadas del centro, vértices, focos. Como $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$ complementando cuadrados se tiene que

$$\begin{aligned}
(4x^2-48x)+(9y^2+72y)+144 &= 0\\
4(x^2-12x)+9(y^2+8y)+144 &= 0\\
4(x^2-12x+36-36)+9(y^2+8y+16-16)+144 &= 0\\
4(x-6)^2+9(y+4)^2 &= 144+144-144=144\\
\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16} &= 1, \qquad \text{por tanto}
\end{aligned}$$

las coordenadas del centro de la elipse son $(h,k)=(6,-4)$ y como $a^2=36$ entonces $a=6$ y como $b^2=16$ entonces $b=4$ además $c^2=36-16=20$ entonces $c=\pm\sqrt{20}$. Las coordenadas de los vértices son $(6+6,-4)=(12,-4)$ y $(6-6,-4)=(0,-4)$; $(6,-4+4)=(6,0)$; $(6,-4-4)=(6,-8)$ y las coordenadas de los focos son $(6+\sqrt{20},-4)$ y $(6-\sqrt{20},-4)$. (Fig. 5.31)

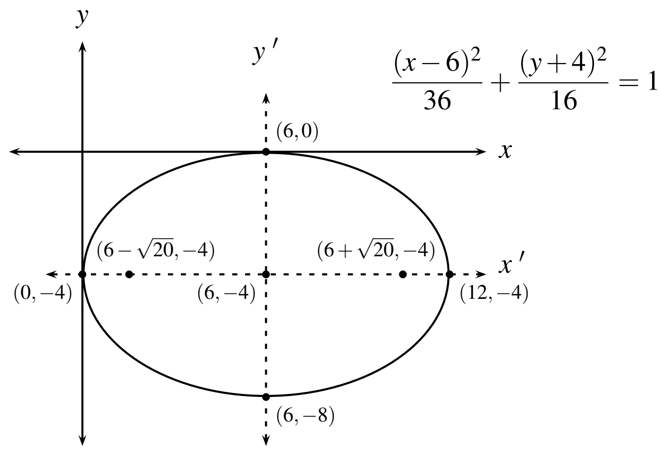


FIGURA N° 5.31

Ejemplo 7

Dada la ecuación $16x^2+9y^2-32x+54y=47$ hallar las coordenadas del centro, vértices, focos y trazar su gráfico.
Como $16x^2+9y^2-32x+54y=47$ entonces

$$\begin{aligned}16x^2-32x+9y^2+54y &= 47\\ 16\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2+6y\right) &= 47 \quad \text{completando cuadrados}\\ 16\left(x^2-2x+1-1\right)+9\left(y^2+6y+9-9\right) &= 47\\ 16\left(x-1\right)^2+9\left(y+3\right)^2 &= 47+16+81=144\end{aligned}$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1\,,\ \text{por tanto}$$

las coordenadas del centro son $(h,k)=(1,-3)$.
Como $a^2=16$ entonces $a=4$ y como $b^2=9$ entonces $b=3$ además $c^2=16-9=7$, $c=\sqrt{7}$; luego las coordenadas de los vértices son $(1+3,-3)=(4,-3)$ y $(1-3,-3)=(-2,-3)$ y $(1,-3+4)=(1,1)$ y $(1,-3-4)=(1,-7)$ y las coordenadas de los focos son $(1,-3+\sqrt{7})$, $(1,-3-\sqrt{7})$. (Fig. 5.32)

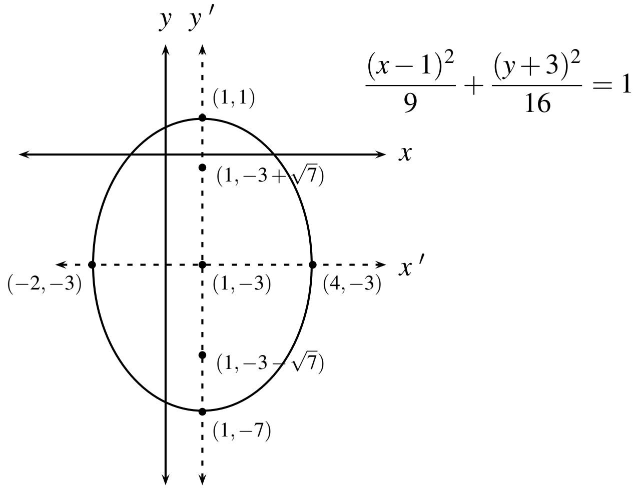


FIGURA N° 5.32

Ejemplo 8

Hallar la ecuación de la elipse con centro en $(1,2)$, uno de los focos en $(6,2)$ y que pasa por $(4,6)$.

La ecuación es de la forma $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$ y como $(4,6)$ pertenece a la curva, entonces $\frac{(4-1)^2}{a^2}+\frac{(6-2)^2}{b^2}=1$, es decir $\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$ y como $c=5$ entonces $b^2=a^2-c^2=a^2-25$, luego $\frac{9}{a^2}+\frac{16}{a^2-25}=1$ si y solo si $\frac{9(a^2-25)+16a^2}{a^2(a^2-25)}=1$, entonces
$9a^2-9(25)+16a^2=a^2-25a^2$, luego $50a^2=a^4+9(25)$ y así
$a^4-50a^2+225=0 \Rightarrow \left(a^2-45\right)\left(a^2-5\right)=0$ y de aquí $a^2=45$ ($a^2=5$ No, pues $b^2=a^2-25$ absurdo) por lo tanto la ecuación es $\frac{(x-1)^2}{45}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$

Ejemplo 9

La ecuación $\frac{(x-1)^2}{13^2}+\frac{(y+4)^2}{12^2}=1$ tiene por coordenadas del centro $(h,k)=(1,-4)$ longitud del eje mayor $2a=26$ y del eje menor $2b=24$ por tanto el eje mayor de la elipse, que es donde se encuentran los focos, está sobre la recta $y=-4$; y puesto que
$b^2=a^2-c^2 \Rightarrow c^2=(13)^2-(12)^2=25 \Rightarrow c=\pm 5$, es decir la distancia del centro de la elipse al foco es 5, por tanto las coordenadas de los focos son $F_1=(1+5,-4)=(6,-4)$ y
$F_2=(-5+1,-4)=(-4,-4)$. Los vértices son $(-12,-4)$, $(14,-4)$, $(1,8)$, $(1,-16)$. (Figura 5.33)

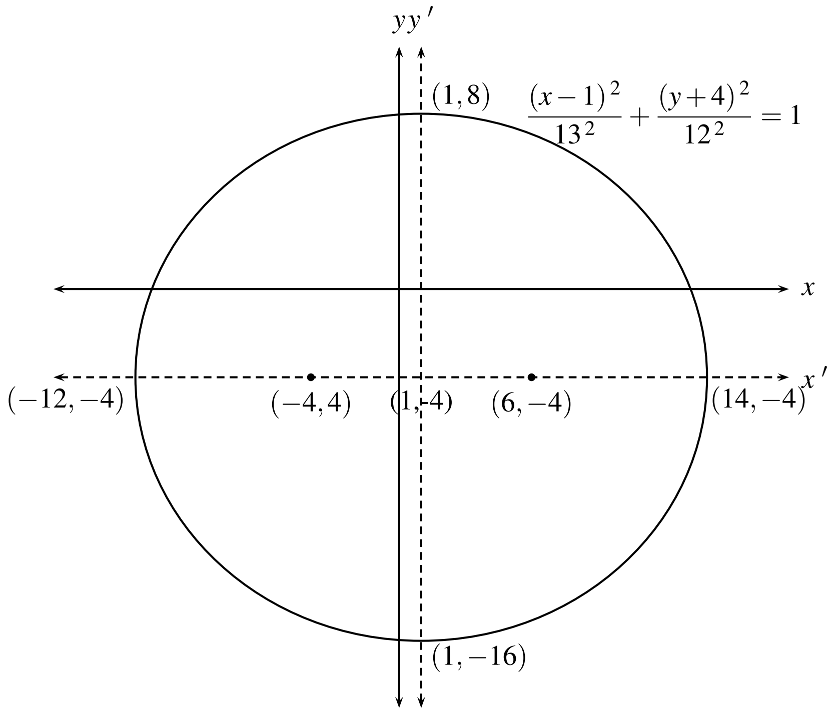


FIGURA Nº 5.33

Observe que la gráfica es casi una circunferencia porque a es casi igual a b.

EJERCICIOS

1. Hallar las coordenadas de los vértices y de los focos y trace la gráfica, para:

   a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ *b*) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$

   c) $4x^2+y^2=1$ *d*) $x^2+4y^2=4$

2. Hallar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas:

   a) Coordenadas de vértices y focos $(\pm 8,0)$, $(\pm 5,0)$ respectivamente.
   b) Coordenadas de vértices y focos $(0,\pm 5)$, $(0,\pm 2)$ respectivamente.
   c) Coordenadas de los vértices $(0,\pm 5)$ y la longitud del eje menos 3.
   d) Las coordenadas de los vértices $(0,\pm 6)$ (eje mayor) y pasa por $(3,2)$.
   e) Las coordenadas de los focos $(\pm 1,0)$ y la longitud del eje mayor 6.

3. Para la ecuación de la elipse $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ hallar:

   a) El centro
   b) Las coordenadas de los focos

c) Las coordenadas de los vértices.

4. Para las elipses: i) $\dfrac{(x-1)^2}{49}+\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$ y ii) $16x^2+9y^2+64x-18y-71=0$. Hallar:
   a) Las coordenadas de los focos
   b) Las coordenadas de los vértices
   c) Longitud de los ejes mayor y menor
   d) Gráfica

5. Hallar la ecuación de las elipses que satisfacen las condiciones dadas:
   a) Coordenadas de los focos $(1,3)\,,(1,9)$ longitud del eje menor 8.
   b) Centro en $(2,1)$; coordenadas de los vértices $(2,6)$ y $(1,1)$ respectivamente.

6. La ecuación $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0,\quad A,B,C,D\in R,$ ¿ representa siempre una elipse ? ¿Cuándo no?

7. Dada la ecuación, hallar coordenadas del centro, vértices y focos
   a) $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0$
   b) $16x^2+25y^2-64x-50y-311=0$
   c) $16x^2+9y^2-32x+54y=47$
   d) $x^2+4y^2-2x-24y=-29$
   e) $\dfrac{(x-3)^2}{16}+\dfrac{(y+4)^2}{4}=1$
   f) $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{8}=1$

8. Hallar la ecuación de la elipse si
   a) Centro $(4,-1)$, foco $(1,-1)$, pasa por $(8,0)$
   b) Vértice en $(6,3)$ focos en $(-4,3)\,,(4,3)$
   c) Vértices en $(-1,3)$, $(5,3)$ longitud eje menor 4
   d) Centro en $(3,2)$, foco en $(3,7)$ y un vértice en $(3,-5)$
   e) Tiene focos en $(1,4)\,,(5,4)$ y vértices en $(0,4)$ y $(6,4)$

5.5. HIPÉRBOLA

Una hipérbola, es el conjunto de todos los puntos en un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados *Focos* es constante.

Inicialmente se hallará la ecuación en el caso en que los focos se encuentran sobre el eje x, con coordenadas $F_1 = (c,0)$ y $F_2 = (-c,0)$. (Figura 5.34)

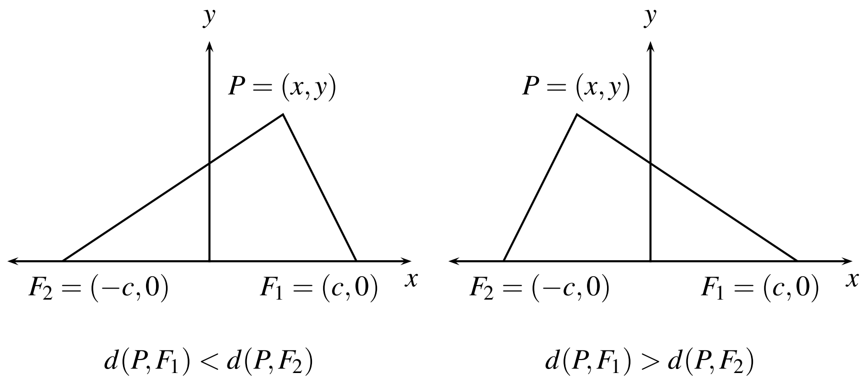


FIGURA N° 5.34

Si $P = (x,y)$ es un punto sobre la hipérbola y si $2a$ es la constante a la que se refiere la definición, entonces:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a, \qquad \text{es decir}$$
$$\left|\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$$

Procediendo en forma análoga a como se hizo en la deducción de la ecuación de la elipse se llega a la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

llamando $b^2 = c^2 - a^2$, donde $b > 0$ y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es llamada *ecuación en forma canónica o ecuación de la hipérbola con centro en* $(0,0)$ y vértice en $(a,0)$, $(-a,0)$. (Figura 5.35)

Aquí como en el caso de la elipse se llama centro de la hipérbola al punto medio del segmento que une los 2 focos; eje principal de la hipérbola a la recta que pasa por los 2 focos y vértices a los puntos de intersección de la hipérbola con su eje principal.

Despejando y de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ se obtiene $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ lo que indica:

Primero que no hay puntos (x,y) en la gráfica cuando $x^2-a^2<0$, es decir cuando $-a<x<a$ y segundo que para $x=\pm a$ la gráfica corta al eje x.

La recta $y=\frac{b}{a}x$ es una asíntota de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, en el sentido de que a medida que x tiende a ∞ la distancia $d(x)$ entre el punto (x,y) de la hipérbola y el punto correspondiente (x,y_1) de la recta tiende a cero sin que se toquen la recta y la curva. Puesto que esta distancia es igual a

$$\begin{aligned} d(x)=y_1-y &= \frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)} \\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{x^2-\left(x^2-a^2\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \end{aligned}$$

La cual evidentemente tiende a cero a medida que x se hace muy grande.

Análogamente, $d(x)$ tiende a cero cuando x tiende a $-\infty$.

Observe que estas ecuaciones se pueden obtener de la ecuación de la hipérbola al reemplazar el uno por el cero. $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\right)$

Puede demostrarse además que también la recta, $y=-\frac{b}{a}x$ es asíntota de esta hipérbola. (Fig. 5.35)

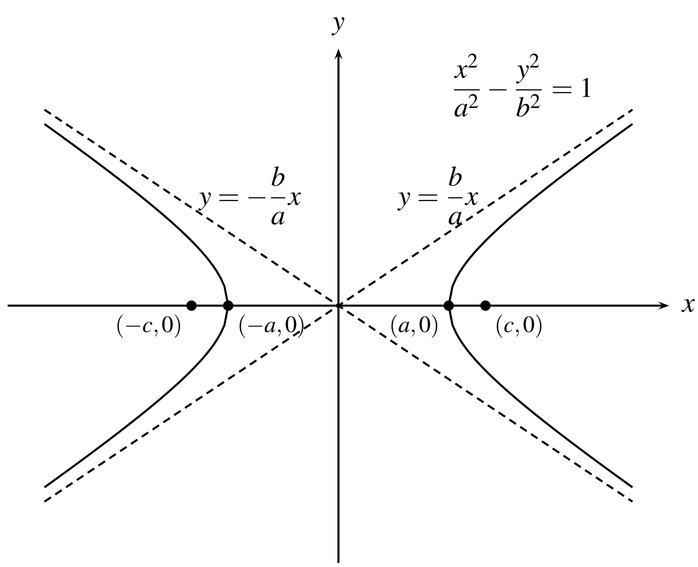


FIGURA N° 5.35

Si los focos de la hipérbola están ubicados en los puntos $(0,\pm c)$ sobre el eje y, se puede demostrar que $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ es su ecuación, donde nuevamente $b^2=c^2-a^2$; su centro en el origen y $(0,\pm a)$ son las coordenadas de sus vértices y sus asíntotas tienen ecuación $y=\pm\frac{a}{b}x$. (Fig.5.36)

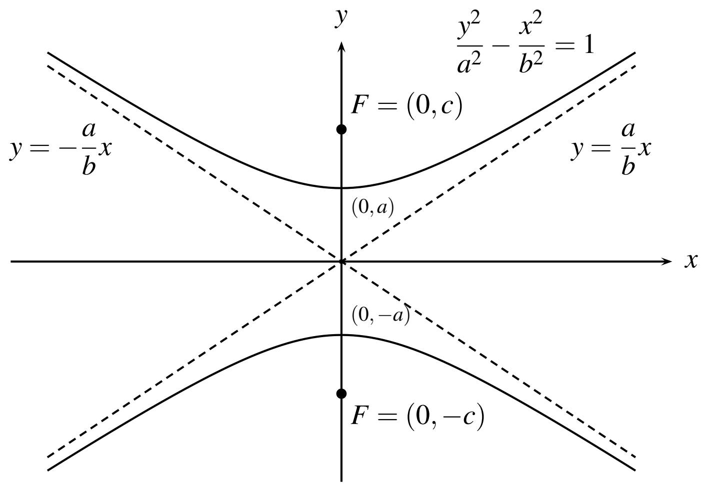


FIGURA N° 5.36

Ejemplo 1

La ecuación $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, representa una hipérbola abierta hacia los lados, en ella $a^2 = 4$ y por tanto $a = \pm 2$ y entonces sus vértices tienen coordenadas $(\pm 2, 0)$. Además $b^2 = 9$, por tanto $b = \pm 3$ y como $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$, las coordenadas de los focos son $\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$. Las ecuaciones de sus asíntotas son $y = \pm(3/2)x$ (fig 5.37).

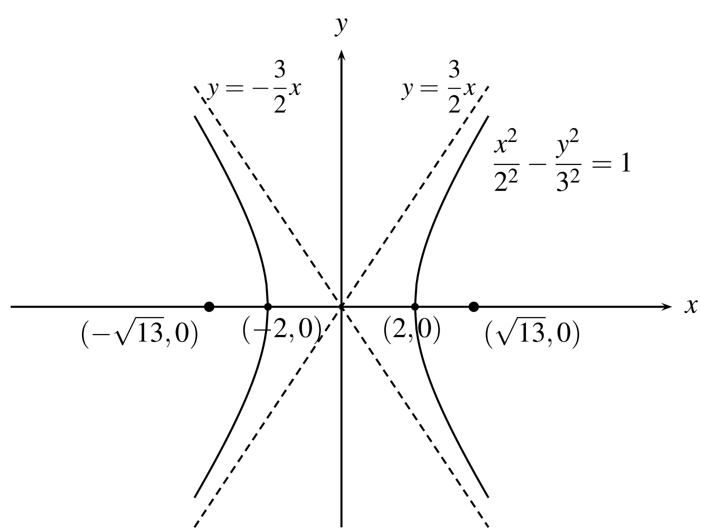


FIGURA N° 5.37

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación, los focos y las asíntotas de una hipérbola cuyos vértices son $(\pm 3, 0)$ y que pasa por $(5, 2)$.

$a = 3$, entonces $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y como $(5,2)$ es solución de esta ecuación entonces: $\dfrac{25}{9} - \dfrac{4}{b^2} = 1$, es decir, $b^2 = \dfrac{9}{4}$, por tanto la ecuación buscada es $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4y^2}{9} = 1$

Como $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{45}{4}$ entonces $c = \pm\sqrt{\dfrac{45}{4}}$ y así las coordenadas de los focos son $\left(\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{5}, 0\right)$. Y como $a = 3$ y $b = \dfrac{3}{2}$ entonces $y = \pm\dfrac{x}{2}$ son las ecuaciones de las asíntotas.

Ejemplo 3

Los focos y los vértices de una hipérbola son los puntos $(5,0)$, $(-5,0)$, $(4,0)$, $(-4,0)$ respectivamente. Hallar la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas.

Como los focos están sobre el eje x, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y así $a = 4$, $c = 5$, $b = \sqrt{25-16} = 3$, en consecuencia la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ahora $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 0$ *si y solo si* $\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3}\right)\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3}\right) = 0$ entonces $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 0$ ó $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 0$, por tanto $y = \dfrac{3}{4}x$ ó $y = -\dfrac{3}{4}x$ son las ecuaciones de las asíntotas. (Fig. 5.38)

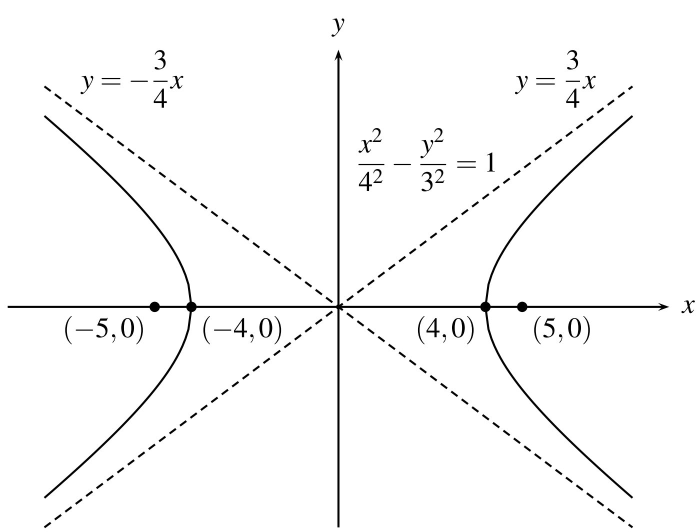


FIGURA N° 5.38

Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen, un vértice en $(6,0)$ y una de sus asíntotas es la recta $4x - 3y = 0$

Como el centro es $(0,0)$ y un vértice esta en $(6,0)$, entonces la hipérbola debe estar abierta hacia los lados, por tanto su ecuación debe ser de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a=6$ y la ecuación de sus asíntotas debe ser de la forma $y=\pm\frac{b}{a}x$, como $a=6$; y $y=\frac{4}{3}x$ es una asíntota entonces $\frac{4}{3}=\frac{b}{6}$, de donde $b=8$.
Así la ecuación de la hipérbola sera $\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$, o sea $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

La ecuación de la hipérbola con centro en $(h,k)\neq(0,0)$ abierta hacia los lados haciendo traslación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Aquí el centro tiene por coordenadas (h,k), las coordenadas de los vértices son $(h+a,k)$, $(h-a,k)$ y las coordenadas de los focos $(h+c,k)$, $(h-c,k)$. (Fig. 5.39a).
Si la hipérbola abre hacia arriba y hacia abajo y su centro esta en (h,k) su ecuación sera:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Aquí el centro tiene por coordenadas (h,k), las coordenadas de los vértices son $(h,k+a)$, $(h,k-a)$ y las coordenadas de los focos $(h,k+c)$, $(h,k-c)$. (Fig. 5.39b)

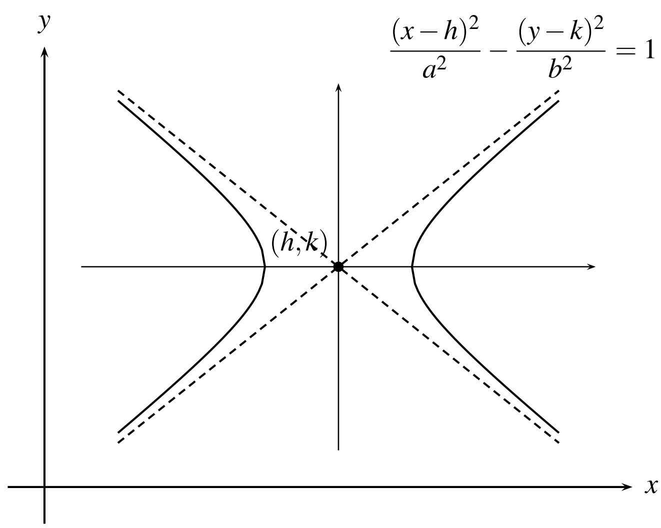


FIGURA N° 5.39(A)

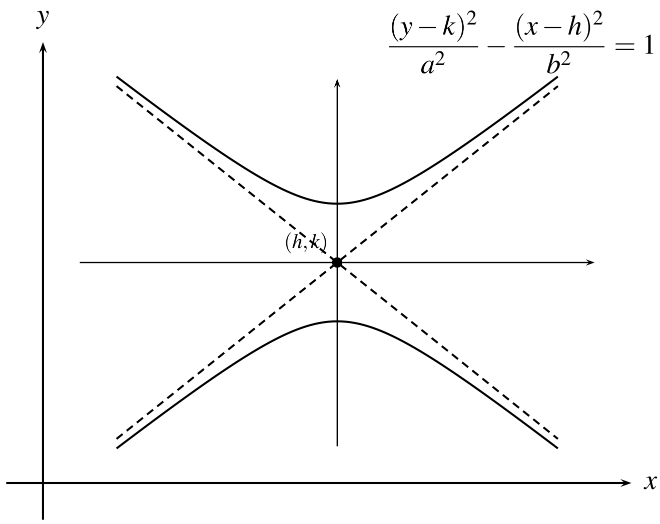


FIGURA N° 5.39(B)

Ejemplo 5

Dada la ecuación de la hipérbola $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ hallar las coordenadas del centro, vértices, focos, asíntotas.
Como $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ organizando cuadrados perfectos se tiene que

$$(9x^2-18x)-(16y^2+64y)-199=0$$
$$9(x^2-2x)-16(y^2+4y)-199=0$$
$$9(x^2-2x+1-1)-16(y^2+4y+4-4)-199=0$$
$$9(x-1)^2-16(y+2)^2=199+9-64=144$$
$$\text{luego}\quad \frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

luego las coordenadas del centro son $(1,-2)$.

Como $a^2=16$ entonces $a=4$ y como $b^2=9$ entonces $b=3$, luego $c^2=a^2+b^2=25$ entonces $c=5$. Para hallar las coordenadas de los vértices, como $a=4$, entonces a partir del centro nos movemos 4 unidades a la derecha y a la izquierda en forma horizontal para obtener
$(1+4,-2)=(5,-2)$,$(1-4,-2)=(-3,-2)$.
También si se hace $y=-2$ en la ecuación $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$,
se tiene que $\dfrac{(x-1)^2}{16}=1$, entonces $(x-1)^2=16$ y así $x-1=\pm 4$; $x=1\pm 4$, entonces $x=5$ o $x=-3$ luego las coordenadas de los vértices $(5,-2)$ y $(-3,-2)$ Como $c=5$ para hallar las coordenadas de los focos a partir del centro nos movemos 5 unidades en forma horizontal a la derecha e izquierda para obtener $(1+5,-2)=(6,-2)$ y $(1-5,-2)=(-4,-2)$, las coordenadas de los

focos. Para hallar las asíntotas se cambia el uno por el cero en la ecuación $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ para obtener $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 0$, es decir $\left(\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{y+2}{3}\right)\left(\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+2}{3}\right) = 0$ entonces las ecuaciones de las asíntotas son $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{y+2}{3} = 0$ y $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{y+2}{3} = 0$ es decir $y+2 = \pm\dfrac{3}{4}(x-1)$. (Fig. 5.40)

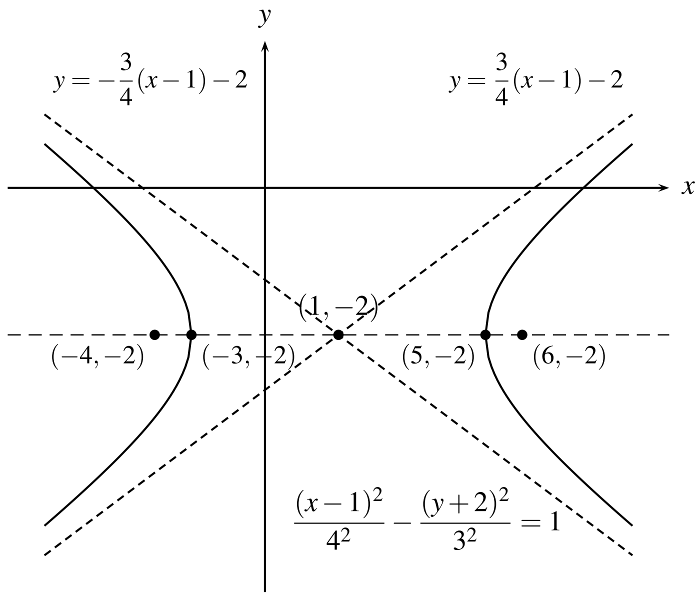


FIGURA N° 5.40

Ejemplo 6

Dada la ecuación de la hipérbola $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$ hallar las coordenadas del centro, vértices y asíntotas.
Como $a^2 = 9$, entonces $a = \pm 3$; el centro de la hipérbola tiene por coordenadas $(h,k) = (-2,4)$ y por tanto el eje está en la recta horizontal $y = 4$ y para hallar los vértices de la hipérbola nos movemos 3 unidades a la derecha y a la izquierda de su centro $(-2,4)$ para obtener $(-2+3,4) = (1,4)$ y $(-2-3,4) = (-5,4)$
También haciendo $y = 4$ en la ecuación $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 1$ se tiene que $\dfrac{(x+2)^2}{9} = 1$, así que $(x+2)^2 = 9$, luego $x+2 = \pm 3$ y así $x = -2 \pm 3$ es decir $x = -5$ o $x) = 1$, y así las coordenadas de los vértices son $(-5,4)$, $(1,4)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son las soluciones de $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-4)^2}{36} = 0$,
es decir, $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-4}{6} = 0$ y $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-4}{6} = 0$, es decir, $y = -2x$ y $y = 2x+8$.
Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, luego las coordenadas de los focos son $(-2-\sqrt{45},4)\,(-2+\sqrt{45},4)$. (Fig. 5.41)

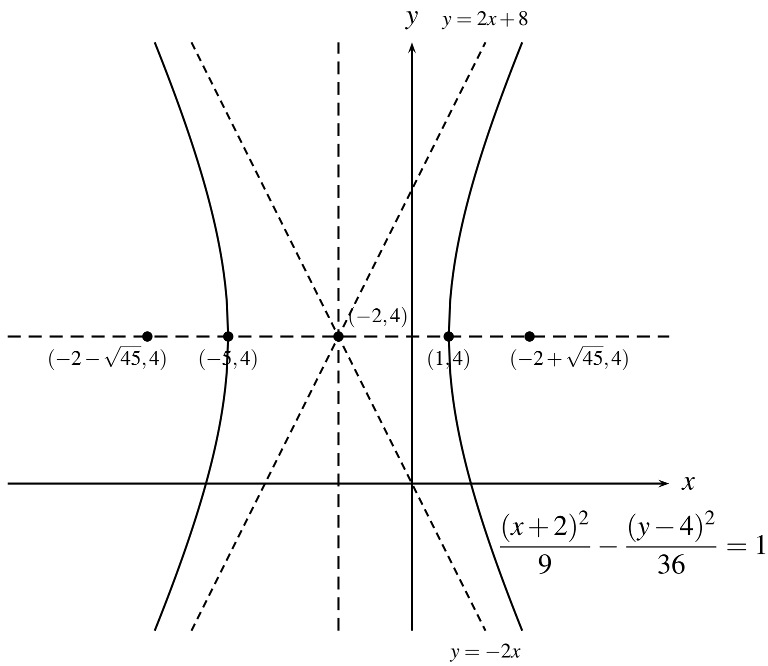


FIGURA N° 5.41

Ejemplo 7

Dada la ecuación de la hipérbola $3y^2 - x^2 + 4x - 6y - 13 = 0$, hallar coordenadas del centro, focos, vértices y ecuaciones de las asíntotas.

La ecuación $3y^2 - x^2 + 4x - 6y - 13 = 0$, se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\left(3y^2 - 6y\right) - \left(x^2 - 4x\right) &= 13 \\
3\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) - \left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) &= 13 \\
3\,(y-1)^2 - (x-2)^2 &= 12 \text{, luego} \\
\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} &= 1 \,,
\end{aligned}$$

luego el centro es $(2,1)$, su eje focal es una recta paralela al eje y y que pasa por $(2,1)$, es decir $x = 2$.
Como $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$ entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$, luego las coordenadas de los focos son $x = 2$, $y = 1 \pm 4$, es decir $(2,5)$, $(2,-3)$

Las coordenadas de los vértices son $x = 2$; $y = 1 \pm 2$; es decir, los vertices están en los puntos $(2,3)$, $(2,-1)$ y las ecuaciones de las asíntotas son $\dfrac{y-1}{2} - \dfrac{x-2}{\sqrt{12}} = 0$ y $\dfrac{y-1}{2} + \dfrac{x-2}{\sqrt{12}} = 0$

EJERCICIOS

1. Hallar los vértices, focos, asíntotas y gráfica de las hipérbolas cuyas ecuaciones se indican:

a) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ b) $\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ c) $2x^2-y^2=4$

d) $y^2-x^2+10=0$ e) $4y^2-9x^2=1$

2. Hallar una ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas
   - *a*) Centro en $(0,0)$, vértice en $(\pm 3,0)$ y un foco en $(5,0)$.
   - *b*) Focos en $(0,\pm 3)$ y un vértice en $(0,1)$.
   - *c*) Foco en $(13,0)$ y asíntotas las rectas $12y=\pm 5x$.
3. Las ecuaciones de la hipérbola con centro en (h,k) son:

$$a)\ \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad y \quad b)\ \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

   hallar sus focos, sus vértices, sus asíntotas y gráficas.
4. Hallar la ecuación de una hipérbola que satisface:
   - *a*) Centro en $(3,5)$, vértice en $(7,5)$ y un foco en $(8,-5)$.
   - *b*) Centro en $(2,4)$, un vértice en $(2,5)$, una asíntota $2y-x-6=0$
   - *c*) Vértices en $(1,1)$ y $(1,5)$, y un foco en $(1,-2)$.
   - *d*) Focos en $(5,0)$, $(5,8)$ y un vértice en $(5,5)$.
5. Hallar vértices, focos, asíntotas y gráficas de:
   - *a*) $\dfrac{(y-2)^2}{4}-\dfrac{(x+2)^2}{4}=1$
   - *b*) $x^2-y^2-x+y=1/2$
   - *c*) $x^2-4y^2-4x+24y-36=0$
   - *d*) $\dfrac{(x+4)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$
6. En qué casos la ecuación $ax^2+b^2+cx+dy+f=0$, representa una hipérbola?

Capítulo 6

FUNCIONES

6.1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS

En la vida cotidiana y en el estudio científico, no siempre basta con números para describir matemáticamente fenómenos o resultados del análisis de estos, sino que para ello se hace necesario frecuentemente establecer correspondencias entre elementos de dos conjuntos, de tal forma que elementos de un conjunto estén relacionados de alguna forma con uno o más elementos de otro conjunto. Este tipo de correspondencia es parte fundamental de la matemática en general y a él se asocian los conceptos de función y relación, cuyos elementos característicos se presentarán inicialmente mediante unos ejemplos.

Ejemplo 1

Considere un experimento que consiste en tomar la temperatura de determinada sustancia, la cual se puede medir en los tiempos 0, 1, 2, ... hasta 30 segundos, pero solamente se realizarán 10 mediciones y para ello se dispone de un termómetro que marca temperaturas de 0°C hasta 70°C. El experimentador hizo las siguientes mediciones:

En el primer segundo el termómetro marcó 20°C, en el cuarto segundo 22°C, en el quinto 23°C, y en los segundos 6, 8, 10, 12, 18, 23, 29 marcó 25°C, 26°C, 28.5°C, 27°C, 25°C, 24.3°C y 22.2°C respectivamente.

Como se puede apreciar, existen inicialmente dos conjuntos numéricos, un conjunto A formado por los tiempos posibles en los que se pueden efectuar mediciones, es decir $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\}$ y un conjunto B que indica el rango de temperaturas en que puede estar la sustancia, es decir, $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 70\} = [0, 70]$, y existe además una forma de hacer corresponder, para algunos elementos de A (los tiempos que seleccionó el experimentador), a cada uno de ellos un único elemento de B (la temperatura que marcó en esos tiempos). También se puede observar que hay algunos elementos de A a los que según la selección no se les asoció una temperatura y otros a los cuales si. En forma análoga hay unos elementos de B que representan la temperatura de la sustancia en alguno de los tiempos seleccionados y otros no.

A correspondencias de este tipo entre dos conjuntos A y B se le llaman *Funciones de A en B* (en este orden) las cuales en general se definen así:

Una función de un conjunto A distinto de vacío (llamado conjunto de partida) en un conjunto B distinto de vacío (llamado conjunto de llegada) en este orden, es una correspondencia entre algunos elementos de A y algunos elementos de B, de tal forma que a cada elemento de A corresponda un único elemento de B o ninguno.

Haciendo referencia al ejemplo anterior, el conjunto de partida es $A = \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$, el conjunto de llegada es $B = [0, 70]$ y la correspondencia de la que habla la definición es la que se realiza entre algunos elementos de A y otros de B, según la cual, a cada tiempo seleccionado corresponde una única temperatura.

Al conjunto de los elementos de A, que según la correspondencia están relacionados con algún elemento de B, se llamará ***Dominio de la función*** (D_f) y obviamente es un subconjunto de A; en el ejemplo éste corresponde a los tiempos seleccionados, es decir,
$D_f = \{1,4,5,6,8,10,12,18,23,29\} \subset A$. Al conjunto de elementos de B a los que les correspondió asociarse con algún elemento de A, se llama ***Recorrido o rango de la función*** (R_f), el cual evidentemente es un subconjunto de B; en el ejemplo

$$R_f = \{20, 22, 23, 25, 26, 28.5, 27, 24.3, 22.2\} \subset B.$$

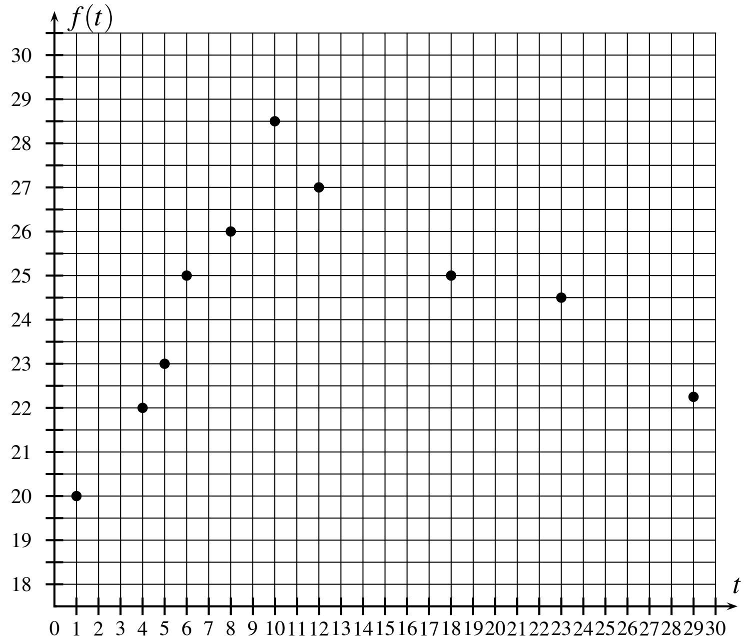
La expresión $f : A \to B$ indica, que la función se llama f, que el conjunto de partida es A y el conjunto de llegada es B y puesto que a elementos de A corresponde un único elemento de B entonces con una variable genérica $(x,\ t,\ p,\ v,\ n, \ldots, etc)$, que se supone toma valores en A, se expresa de qué modo se está estableciendo esta correspondencia f. Para el ejemplo $f : \{0, 1 \ldots, 30\} \to [0, 70]$ con $f(t) =$ temperatura de la sustancia en el tiempo t (lógicamente $t \in \{0,1,2,\ldots,30\}$)

En general las funciones se pueden representar gráficamente plasmando visualmente la correspondencia entre dos conjuntos.

Para el ejemplo tratado las figuras 6.1 (a). y 6.1 (b) ilustran diferentes representaciones gráficas.

$1 \longrightarrow 20$
$4 \longrightarrow 22$
$5 \longrightarrow 23$
$6 \longrightarrow 25$
$8 \longrightarrow 26$
$10 \longrightarrow 28.5$
$12 \longrightarrow 27$
$18 \longrightarrow 25$
$23 \longrightarrow 24.3$
$29 \longrightarrow 22.2$

(A)



(B)

FIGURA N° 6.1

Generalmente cuando A y B son subconjuntos de los números reales, se prefiere trabajar con gráficas como la de la figura 6.1 (b), las cuales se construyen ubicando en el eje x del plano cartesiano, el conjunto de partida de la función f y en el eje y el conjunto de llegada, y considerando que si $x \in D_f$ y $y = f\,(x)$ es el elemento del conjunto de llegada al cual está asociado x, entonces la pareja $(x\,,\,f\,(x))$ forma parte de la gráfica de la función. Así una función f se puede considerar *como un conjunto de parejas ordenadas* en las cuales las primeras componentes corresponden al dominio de la función y las segundas componentes a sus respectivas imágenes y donde lógicamente no podrán existir dos parejas diferentes que tengan la misma primera componente, ya que en una función la imagen de un elemento es única. A la variable que representa los elementos del dominio se le llama ***Variable independiente*** y a la que representa los elementos del recorrido, ***Variable dependiente***, indicando con estos nombres la dependencia de los elementos del recorrido de los del dominio. Es evidente que no todo conjunto de parejas ordenadas es una función, pues podría darse el caso que él contenga parejas diferentes con el mismo primer elemento. Si un conjunto de este tipo se representa gráficamente en el plano xy, como se hizo con las funciones, necesariamente debe existir al menos una recta vertical (paralela al eje y) que contenga dos o más puntos de su gráfica (por qué). En general a cualquier conjunto no vacío de parejas ordenadas se le llama una ***Relación***, por tanto existirán relaciones que son funciones y otras que no lo son. En la figura 6.2 (a) se aprecia la gráfica de una relación que no es función, pues a cualquier punto del intervalo $(-3\,,\,3)$ corresponden dos imágenes. En la figura 6.2 (b) aunque solamente hay un punto que tiene dos imágenes, (al punto 1 corresponde el 0 y el 5, pues el punto de coordenadas $(1\,,\,0)$ también forma parte de la gráfica), esto es suficiente para que esta gráfica represente una relación que tampoco es función. La figura 6.2 (c) representa una relación que si es una función.

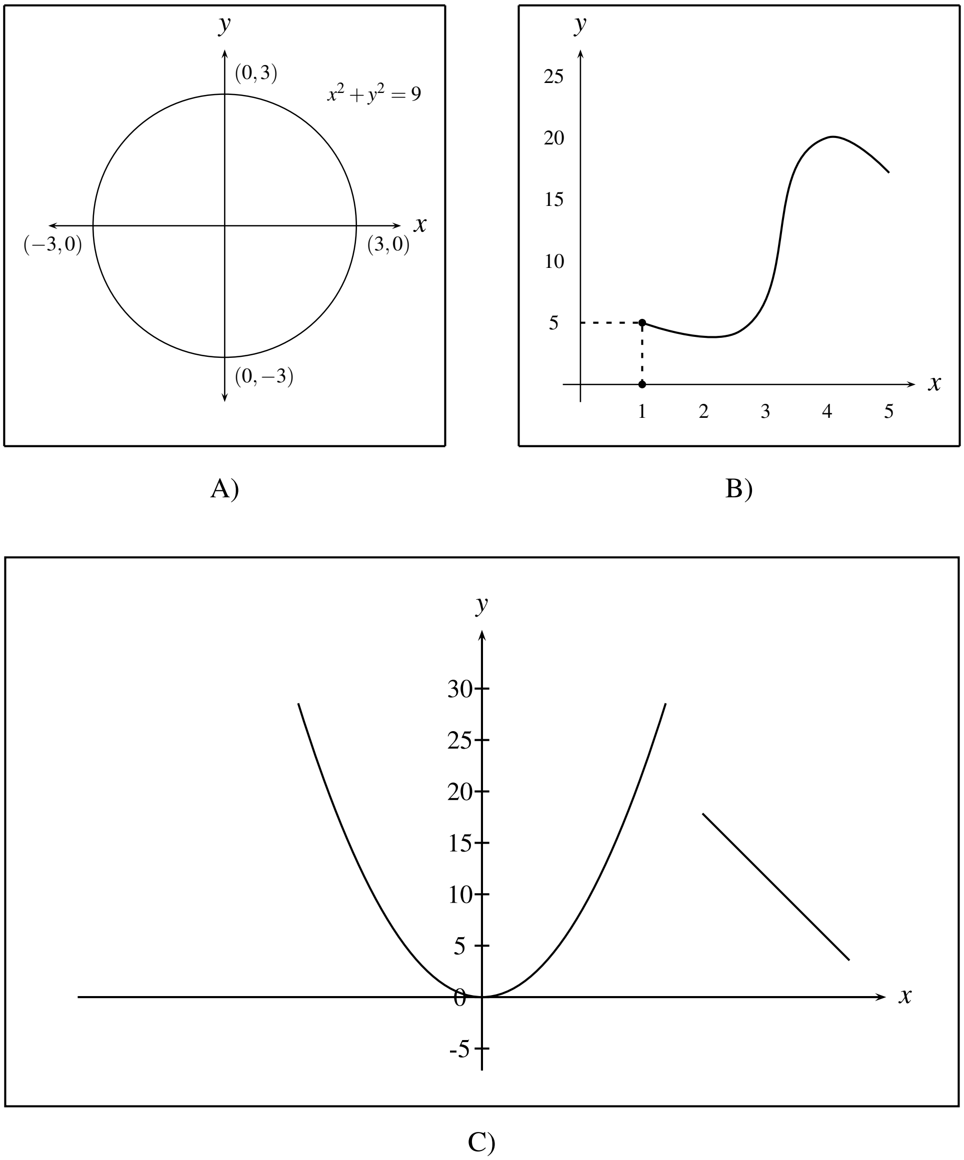


FIGURA N°6.2

Con los siguientes ejemplos se pretende hacer claridad sobre aspectos relacionados con funciones, como sus gráficas, su dominio y su recorrido.

Ejemplo 2

Considere la correspondencia tal que a cada número real x se le asocia su cuadrado; como éste es único, entonces analíticamente se puede representar por $y = f(x) = x^2$.
Como el cuadrado de un número real siempre es real, y a todo número real x se le está asociando un único real que representa su cuadrado, entonces esta correspondencia es una función representada por f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales $(D_f = R)$. Los valores que toma y para cada uno

de estos valores de x forman el recorrido de f,en este caso al variar x en R, y toma todos los valores reales no negativos o sea $R_f = [0 + \infty)$.
Con algunos valores arbitrarios dados a x, se encuentran los correspondientes de y por medio de f , lo cual nos permite ubicar en el plano xy unas parejas que nos dan una idea aproximada (no siempre muy buena) de cómo es la gráfica de la función. Figura 6.3

x	0	1	$\sqrt{2}$	3.5	5	$-1/2$	-1	-3
f(x)	0	1	2	12.25	25	$1/4$	1	9

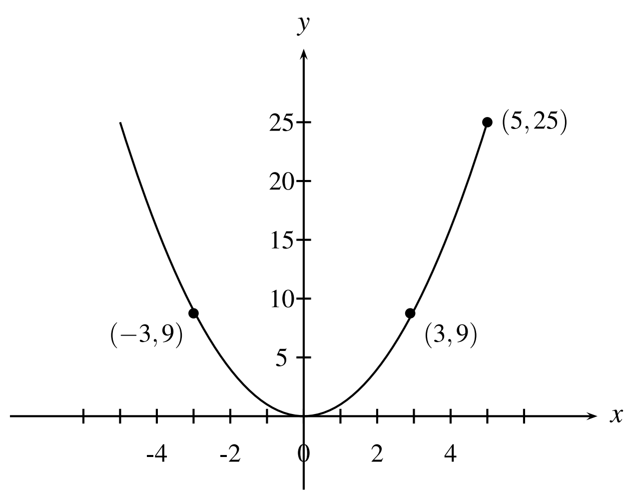


FIGURA N° 6.3

Ejemplo 3

Con $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ se está representando la función que hace corresponder a valores de x en R, los números $y = \sqrt{x^2 - 1}$.
Para que y sea un número real es necesario que $x^2 - 1 \geq 0$, es decir el dominio de la función estará formado solamente por aquellos valores de x que satisfacen esta desigualdad o sea
$D_f = \left\{ x \middle| x^2 - 1 \geq 0 \right\} = (-\infty, -1] \cup [1 + \infty)$; por tanto encima y bajo del intervalo $(-1, 1)$ no debe existir gráfica de la función.
Para estos valores de x (los del dominio de f), la expresión $y = \sqrt{x^2 - 1}$ siempre es mayor o igual a cero (por qué?) y como $\sqrt{x^2 - 1}$ toma todos los valores desde 0 hasta infinito, cuando x varía en $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ entonces $R_f = [0, +\infty)$.
Haciendo una tabla análoga a la del ejemplo anterior y representando las parejas resultantes en el plano cartesiano, se obtiene una aproximación de su gráfica. Figura 6.4.

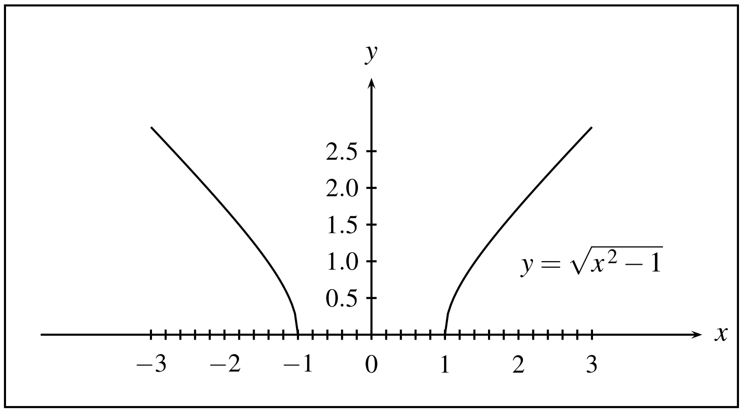


FIGURA N° 6.4

Ejemplo 4

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x\in(-\infty,-2] \\ x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

De la definición de la función, resulta evidente que para todo valor de $x \in (-2,0)$ no hay imagen por medio de f, mientras que para valores de x en $(-\infty,-2]$, $[0,4]$ y $(4,+\infty)$ la función siempre está definida, a pesar de que lo esté mediante expresiones diferentes, por tanto

$$D_f = (-\infty,-2] \cup [0,4] \cup (4,+\infty) = (-\infty,-2] \cup [0,+\infty).$$

Observe que si $x \in (-\infty,-2]$, la expresión que define a $f(x)$ allí o sea $y=-x+1$ está entre 3 y $+\infty$, ya que si $y=-x+1 \Rightarrow 1-y=x\le -2 \Rightarrow 3\le y$. Análogamente cuando $0\le x\le 4$, $0\le x^2=y\le 16$ luego $0\le y\le 16$ y para $x>4$ y toma siempre el valor 5.

Por tanto $R_f=[3,+\infty)\cup[0,16]\cup\{5\}=[0,+\infty)$.

En la construcción del gráfico (Fig 6.5) es necesario tener en cuenta, en qué intervalo está definida la función mediante cada una de las tres expresiones de que consta:

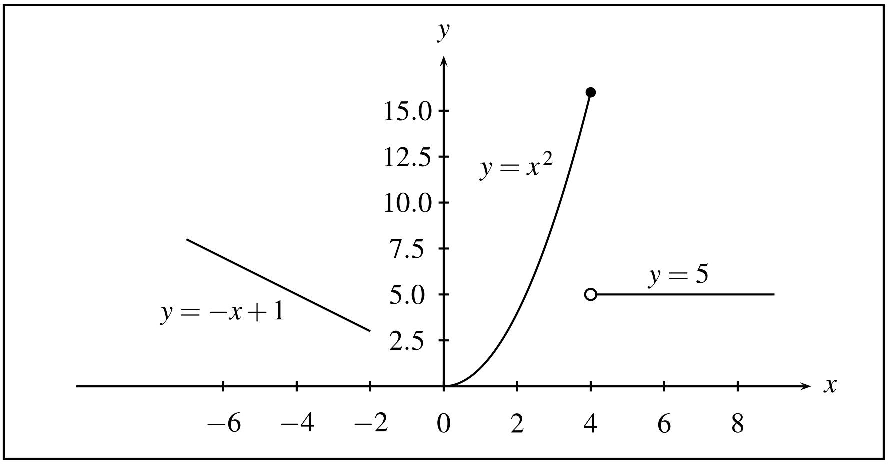


FIGURA N° 6.5

Ejemplo 5

$f(x) = [x]$ con $-2 \leq x \leq 3$, donde $[x]$ indica que a cada número real x se le asocia el mayor entero menor o igual que x.

Observe que según esta definición se tiene por ejemplo que:

$[0.1] = [0.02] = [0.4] = [1/2] = [0.99] = [0] = 0$ y en general si $x \in R$ entonces:

Si $0 \leq x < 1$ entonces $[x] = 0$
Si $1 \leq x < 2$ entonces $[x] = 1$
Si $2 \leq x < 3$ entonces $[x] = 2$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
Si $n \leq x < n+1$ entonces $[x] = n$

Además:

$[-1.5] = [-1.2] = [-1.99] = [-2] = -2$ y así:

Si $-1 \leq x < 0$ entonces $[x] = -1$
Si $-2 \leq x < -1$ entonces $[x] = -2$, etc.

Por tanto el $D_f = [-2, 3]$ y $R_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y su gráfica se puede apreciar en la figura 6.6

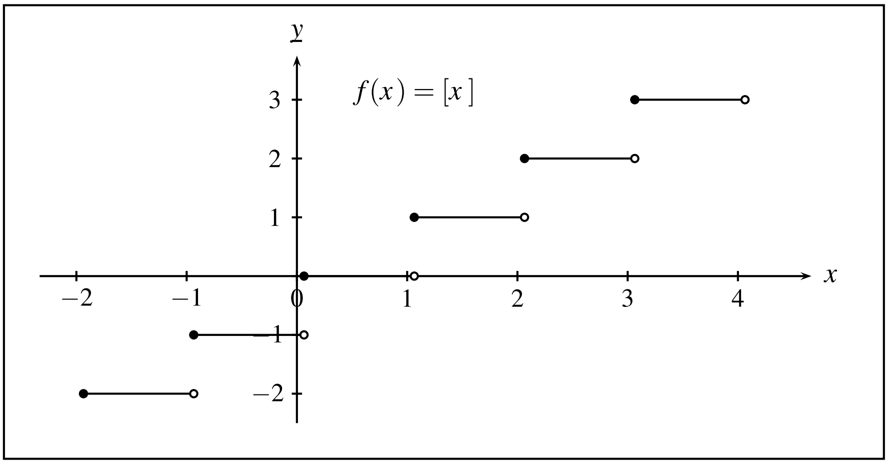


FIGURA N° 6.6

Ejemplo 6

$y = mx + b$ con $m \in \mathbb{R}$, siempre representa una línea recta no vertical, por tanto siempre representa una función con dominio $\mathbb{R}$. Su recorrido será también $\mathbb{R}$ salvo el caso en que la recta sea horizontal, pues allí $m = 0$, por tanto la ecuación será $y = b$, y su recorrido será {b}. Si la recta es vertical o sea de la forma $x = k$ ésta representa una relación no funcional con dominio $\{k\}$ y recorrido $\mathbb{R}$ (por qué?). (Fig. 6.7)

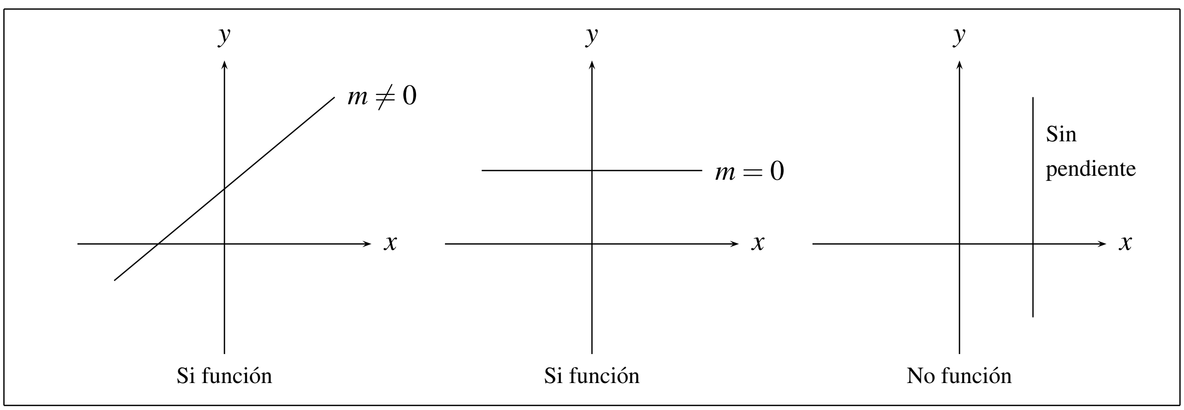


FIGURA N° 6.7

Ejemplo 7

Las parábolas de la forma $y = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$, siempre representan funciones con dominio $\mathbb{R}$.

Para hallar su recorrido se debe recordar que su vértice tiene como ordenada $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$, por tanto si $a > 0$ el recorrido será el intervalo $\left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}\ ,\ \infty\right)$ pues la parábola está abierta hacia arriba, y si $a < 0$ el recorrido será $\left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$ pues en este caso estará abierta hacia abajo.

Si la parábola está abierta a derecha o izquierda, es decir si es de la forma $x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0)$, evidentemente no representa una función, pues toda recta vertical que corte la parábola lo hará en dos puntos. (Fig. 6.8)

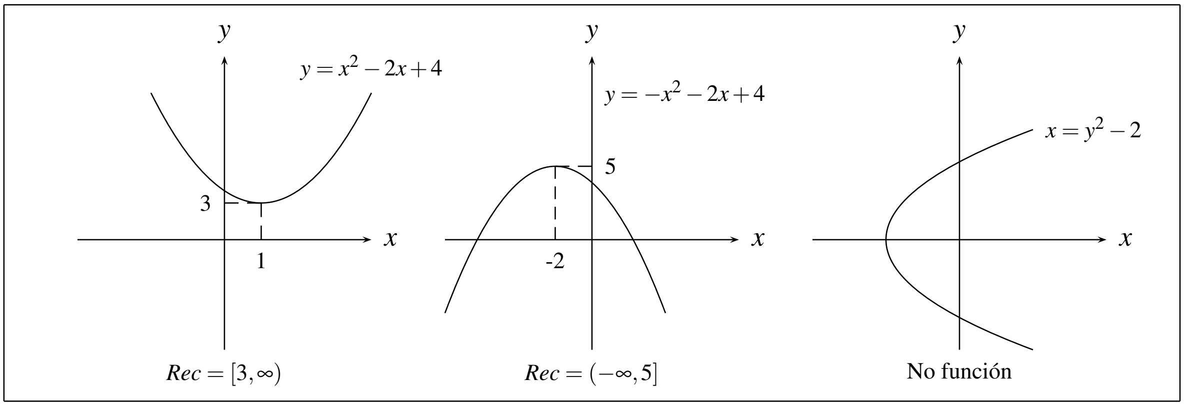


FIGURA N° 6.8

Ejemplo 8

La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no representa una función como se puede apreciar de su gráfica, pero si en ésta se considera solamente la parte sobre el eje x o solamente la parte bajo él, cada una de ellas por separado representa una función, analíticamente esta se obtiene de la ecuación de la elipse despejando y, y así, puesto que $y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, al tomar esta expresión solamente con signo positivo o negativo, representa respectivamente la parte superior e inferior de la elipse. Figura 6.9

Observe que en los dos casos su dominio es $[-a, a]$ y su recorrido $[0, b]$ para la parte superior y $[-b, 0]$ para la inferior.

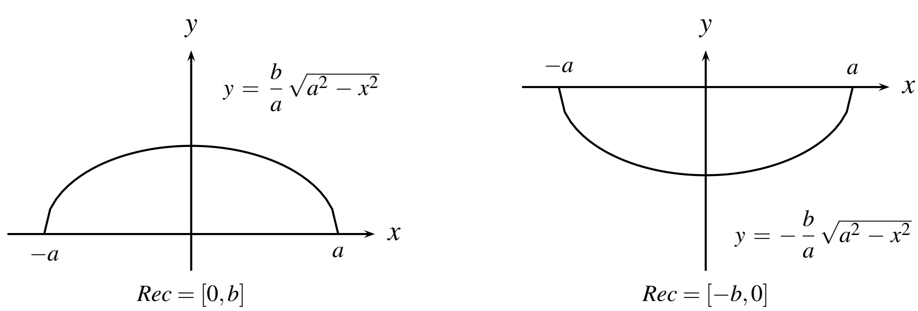


FIGURA N° 6.9

Es claro que cualquier elipse trasladada tampoco será una función, pero de ella se pueden extraer dos funciones procediendo en forma análoga al caso de la elipse con centro en el origen. En este caso cuáles serán sus ecuaciones? Cuáles sus dominios? Cuáles sus recorridos?.

Además puesto que una circunferencia se puede considerar como una elipse con los dos ejes iguales, cuya longitud será su diámetro, entonces tampoco representará una función; pero de ella se pueden extraer dos funciones; así si su ecuación es $x^2 + y^2 = a^2$, las expresiones $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ tienen por gráfica la parte superior e inferior de la circunferencia respectivamente, las cuales representan funciones con dominio $[-a, a]$ y recorrido $[0, a]$ y $[-a, 0]$ según el caso.

Ejemplo 9

La hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no representa una función, observe que en este caso si despejamos y se obtienen dos ecuaciones: $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ y $y = -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ y cada una de ellas representa una función con dominio $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ y recorrido $[0, \infty)$ y $(-\infty, 0]$ respectivamente. (Figura 6.10)

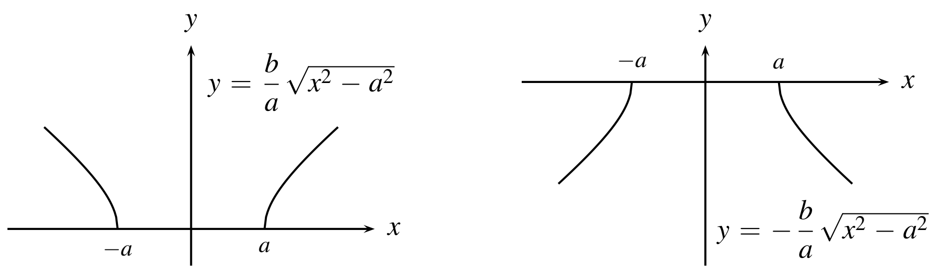


FIGURA N° 6.10

Ejemplo 10

Sea $f(x) = |x^2 - 4|$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x^2 - 4 \geq 0, \quad \text{es decir, si} \quad x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ -(x^2 - 4) & \text{si} \quad x^2 - 4 < 0, \quad \text{es decir, si} \quad x \in (-2, 2) \end{cases}$$

Verifique que su gráfico corresponde a la curva continua en la figura 6.11, y que $D_f = R$ y $R_f = [0, +\infty)$.

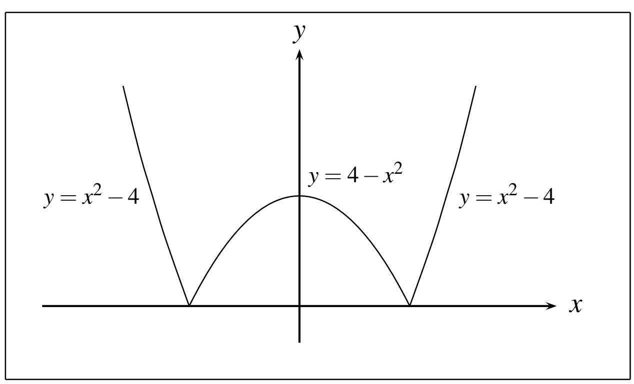


FIGURA N° 6.11

Ejemplo 11

$f(x) = |x+1| + x$

$$|x+1|+x = \begin{cases} x+1+x & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1)+x & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

$D_f = R$ y $R_f = [-1, +\infty)$.

Un bosquejo de su gráfico se puede apreciar en la figura 6.12

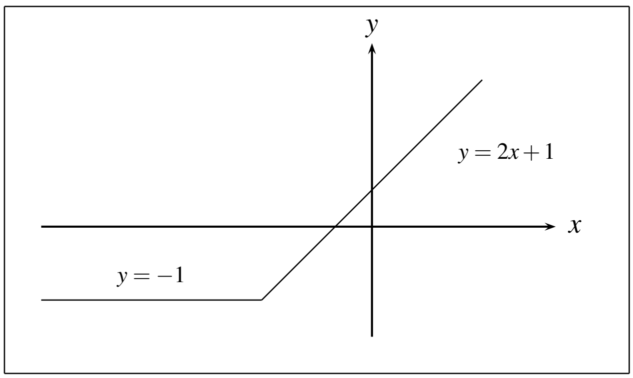


FIGURA N° 6.12

EJERCICIOS

1. Ilustre el concepto de función con dos situaciones cotidianas y dos situaciones de la física, y dé sus correspondientes dominios y recorridos.

2. Si $f(x) = \sqrt{2x+3}$, halle:

   a) $f(10)$
   b) $f\left(3x^2\right)$
   c) $f\left(ax^3+b\right)$
   d) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
   e) $f(x) - f(h)$
   f) $f(-x)$

3. De los puntos (x,y) que satisfacen las siguientes expresiones, diga cuáles son funciones y cuáles son relaciones no funcionales, halle su dominio, su recorrido y represéntelas gráficamente.

   a) $y^2 - x = 0$

b) $x - y - 5 = 0$

c) $y = 0$

d) $x = 6$

e) $y = [x - 2]$

f) $y = [x/2]$ con $-1 \leq x \leq 10$

g) $y = [3x]$ con $-1 \leq x \leq 2$

h) $y \leq x$

i) $\{(x, y) \mid y = 6\}$

j) $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$

l) $f(x) = [x] + 1$

m) $y = \sqrt{x}$

4. ¿Cuáles de las siguientes gráficas de la figura 6.13 corresponden a funciones y cuáles a relaciones no funcionales?. Hallar sus dominios y recorridos.

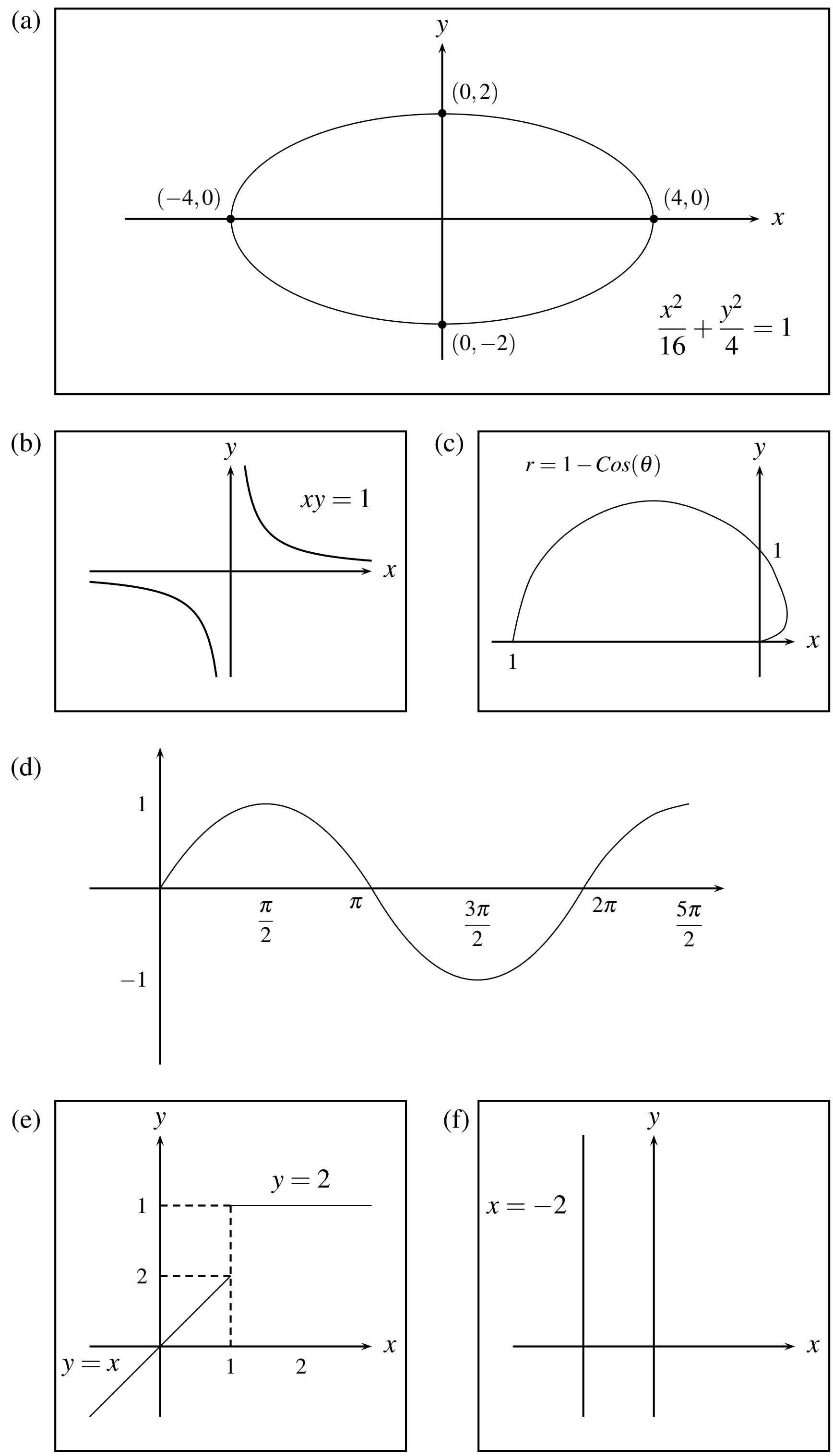

(a)
y
(0,2)
(−4,0)
(4,0)
x
(0,−2)
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
(b)
y
$xy=1$
x
(c)
$r=1-Cos(\theta)$
y
1
x
1
(d)
1
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
−1
(e)
y
$y=2$
1
2
x
$y=x$
1
2
(f)
y
$x=-2$
x

FIGURA N° 6.13

5. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

   a) $y = \sqrt{-x}$
   b) $y = \sqrt{-x^2}$
   c) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$
   d) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{2+x}}$
   e) $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$
   f) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}$
   g) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{4+x^2}}$
   h) $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
   i) $y = \sqrt[3]{-x}$

6. Si el gráfico de $y = f(x) = x^2$ es el que se observa en la figura 6.14.

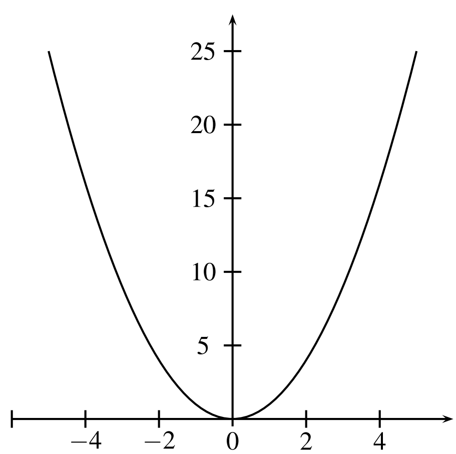


FIGURA N° 6.14

7. En el mismo sistema de coordenadas acompañe por separado esta gráfica con la de cada una de las siguientes modificaciones. Compare y saque conclusiones.

   a) $y = f(x) - 3$
   b) $y = f(x) + 3$
   c) $y = f(x-3)$

d) $y = f\,(x+3)$

e) $y = f\,(x-3)+2$

f) $y = f\,(3x)$

g) $y = 3f\,(x)$

h) $y = \frac{1}{2}f\,(x)$

i) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

8. Dada la gráfica de $f(x) = x^3$, sobre el mismo sistema de coordenadas trace la de $g(x) = |f(x)| = \left|x^3\right|$. Compare las dos gráficas y saque conclusiones.

9. Resuelva el mismo ejercicio 7 para:

a) $f(x) = x-3$

b) $f(x) = -2x+5$

c) $f(x) = x^2-2x-3$

d) $f(x) = -x^2+11x-28$

6.2. OPERACIONES ENTRE FUNCIONES

Al igual que los números, las funciones se pueden sumar, multiplicar o dividir y el proceso de efectuar estas operaciones entre funciones se hace puntualmente, es decir, si f y g son funciones:

$$\begin{aligned}
h_1(x) = (f+g)\,(x) &= f\,(x) + g\,(x)\\
h_2(x) = (f-g)\,(x) &= f\,(x) - g\,(x)\\
h_3(x) = (fg)\,(x) &= f\,(x)\,g\,(x)\\
h_4(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f\,(x)}{g\,(x)}
\end{aligned}$$

En la representación gráfica de estas nuevas funciones, es necesario tener en cuenta que su definición se hizo punto a punto; así por ejemplo, si se tienen las funciones $f\,(x) = x+1$ y $g\,(x) = x^2$ la imagen que corresponde por ejemplo al punto $x = 2$ por medio de $f+g$, $f-g$, fg y f/g será:

$$\begin{aligned}
h_1(2) = (f+g)\,(2) &= f\,(2) + g\,(2) = (2+1)+4 = 7\\
h_2(2) = (f-g)\,(2) &= f\,(2) - g\,(2) = (2+1)-4 = -1\\
h_3(2) = (fg)\,(2) &= f\,(2)\,g\,(2) = (2+1)\,4 = 12\\
h_4(2) = (f/g)\,(2) &= f(2)/g(2) = (2+)/4 = 3/4
\end{aligned}$$

De la construcción de $f+g$, $f-g$, fg y f/g, resulta evidente que para calcularlas en un punto x, es necesario calcular tanto f como g en este punto, es decir, x debe pertenecer tanto al dominio de f, como al dominio de g, luego el dominio de estas funciones debe ser la intersección de los dominios de f y g, exceptuando lógicamente, para el caso del cociente, aquellos puntos donde el denominador se anula. Así:

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ D_{fg} &= D_f \cap D_g \\ D_{(f/g)} &= (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \end{aligned}$$

Luego, procediendo en forma análoga con todos los puntos comunes de los dominios, se encuentran las parejas de $\mathbb{R}^2$ que conforman las gráficas correspondientes a $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ y $h_4(x)$.

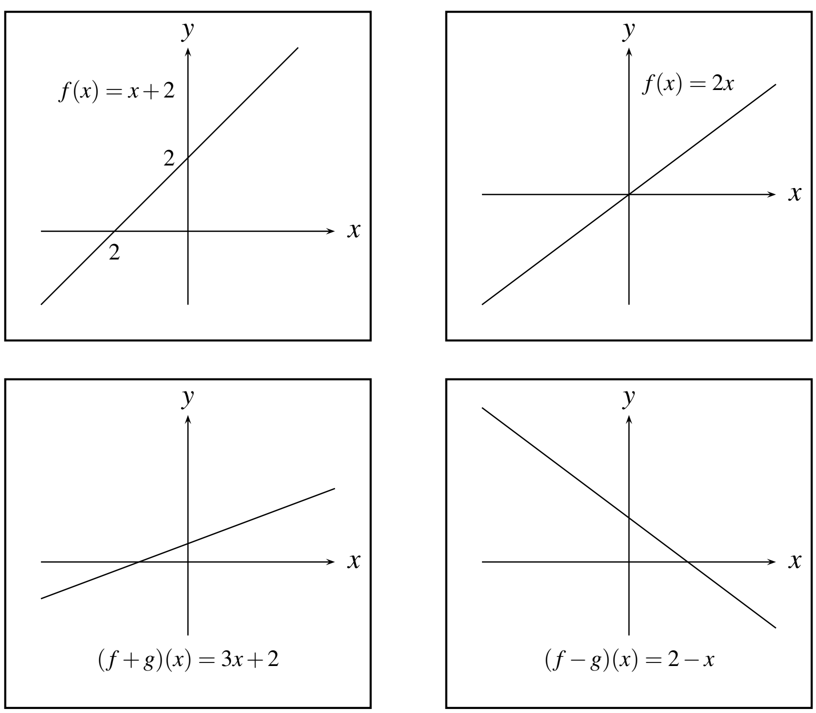
Ejemplo

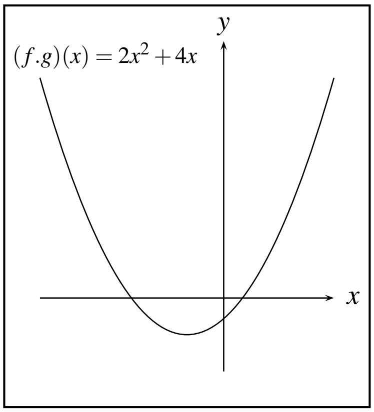
Sean $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 2x$ entonces

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x+2) + 2x = 3x + 2 \\ h_2(x) &= (f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x+2) - 2x = -x + 2 \\ h_3(x) &= (fg)(x) = f(x)\,g(x) = (x+2)\,2x = 2x^2 + 4x \\ h_4(x) &= (f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x+2)/2x \end{aligned}$$

Como $D_f = R$ y $D_g = R$ entonces: $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = R$ y $D_{f/g} = R - \{0\}$.

Las gráficas de estas funciones serán: (Figura 6.15).





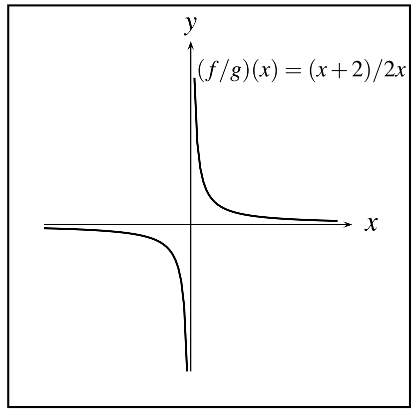


FIGURA N° 6.15

EJERCICIOS

1. Dada $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x + 1$, hallar:

   a) $f(2 + h)$
   b) $g(3 - h)$
   c) $(f + g)(x + h)$
   d) $(f + g)(5)$
   e) $f\left(x^2\right)$
   f) $(f - g)(x)$
   g) $(f/g)(x)$
   h) $(fg)(x)$
   i) D_{f+g}, D_{f-g}, D_{fg}, $D_{f/g}$

2. Si $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = 2x$, hallar:

   a) $(f + g)(2 - h)$
   b) $(f - g)\left(x^2\right)$
   c) $(fg)(x + 1)$
   d) $g\left(a^4\right)$
   e) $g\left(a^2 - 1\right)$
   f) $(fg)(x + 1)$
   g) $(f/g)(2 - 3h)$
   h) D_{fg}, $D_{f/g}$

3. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{1 - x}$ hallar :

a) $D_f\,,\;\; D_g\,,\;\; D_h$

b) $D_{f+g+h}\,,\;\; D_{h/g}\,,\;\; D_{(f+g)/h}$

c) $(f+g+h)\,(3)\,,\;\; (f+g+h)\,(-2)$

6.3. FUNCIÓN COMPUESTA

Dadas dos funciones $f\,(x)$ y $g\,(x)$, si existen algunos valores del dominio de g para los cuales $g\,(x)$ pertenece al dominio de f, entonces es posible para estos valores calcular $f\,(g\,(x))$, y por tanto a partir de estas dos funciones se puede construir una nueva función llamada la *Compuesta de* f y g notada por $f_o\,g$, la cual asigna a algunos puntos x del dominio de g el valor $f\,(g\,(x))$ o sea

$$(f_o\,g)\,(x) \;=\; f\,(g\,(x))$$

Al componer dos funciones f, g comenzamos con un valor de entrada x en el dominio de g y obtenemos un valor único de salida $g(x)$ en el recorrido de g y este valor de salida se utiliza como valor de entrada para f, para dar un único valor de salida $f(g(x))$, así que $g(x)$ debe estar en el dominio de f, por ejemplo suponga, que se obtienen las funciones que se observan en la figura siguiente

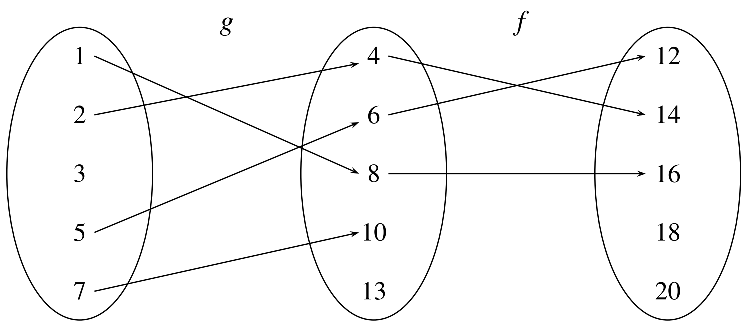


FIGURA Nº 6.16

entonces

$$\begin{aligned} f(g(1)) &= f(8) = 16\\ f(g(2)) &= f(4) = 14\\ f(g(5)) &= f(6) = 12\\ f(g(7)) &= f(10) \quad \text{no esta definida} \end{aligned}$$

Luego la compuesta $f_o\,g$ existe en los puntos donde $R_g \eta D_f \neq \phi$, que son $1, 2, 5$.

Ejemplo

Si $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+1$ entonces

$$\begin{aligned}
(f_o\, g)(3) &= f(g(3)) = f(10) = \sqrt{10}\\
(f_o\, g)(-2) &= f(g(-2)) = f(5) = \sqrt{10}\\
(f_o\, g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}\\
(g_o f)(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2+1\\
(g_o f)(3) &= g(f(3)) = g(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2+1\\
(g_o f)(-2) &= g(f(-2) \quad \text{no existe, pues } f(-2) \text{ no existe}
\end{aligned}$$

De la construcción de la función compuesta $f_o\, g$ se puede apreciar:

i. Esta función existirá solamente cuando $R_g \cap D_f \neq \phi$.

ii. Su dominio es $\left\{x \,\middle|\, x \in D_g \;\; y \;\; g\,(x) \in D_f\right\}$.

iii. En general $g_o f \neq f_o\, g$. Para ilustrar el iii. observe el siguiente ejemplo:

$f(x)=x^2\,;\quad g(x)=Cos\,x$

$$\begin{aligned}
(f_o\, g)\,(x) &= f(g(x)) = f(Cos\,x) = (Cos\,x)^2 = Cos^2 x\\
(g_o f)\,(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = Cos\,x^2
\end{aligned}$$

Luego $(f_o\, g)\,(x) \neq (g_o f)\,(x)$

pues $Cos^2 x \neq Cos\,x^2$

Uno de los aspectos importantes de la composición de funciones es el hecho de que nos permite expresar una función dada en términos de funciones mas simples por ejemplo si:

$h(x)=\sqrt{x^4+x+1}$, se tiene que $h(x)=(f_o\, g)(x)=f(g(x))$ donde $g(x)=x^4+x+1,\ f(x)=\sqrt{x}$, pues $f(g(x))=f(x^4+x+1)=\sqrt{x^4+x+1}$

Ejemplo

Si $h(x)=\text{Sen}^3(x^2+1)=\left[Sen(x^2+1)\right]^3$, luego $h(x)=f(g(p(x)))$, donde $f(x)=x^3\,;\ g(x)=Sen\,x$ y $p(x)=x^2+1$, pues $h(x)=f(g(x^2+1))=f(Sen(x^2+1))=Sen^3(x^2+1)$

Para una mejor comprensión de la operación composición entre funciones se puede establecer la siguiente analogía:

Una miniempresa de alimentos posee dos máquinas: Una máquina f que manufactura mermelada, y una máquina g que empaca la mermelada en frascos para luego llevarla a los supermercados. Así si la máquina f recibe como materia prima piña produce mermelada de piña o f (piña). Esa mermelada de piña o f (piña) la recibe g y entrega frascos de mermelada de piña o g(f (piña)).

Similarmente si al empezar el proceso f es surtida con naranja, el proceso termina con g(f (naranja)), es decir con frascos de mermelada de naranja. En general si f recibe una fruta x, produce $f\,(x)$ (mermelada de x) y al recibir g esa $f\,(x)$, produce $g\,(\,f\,(x))$ (frascos de mermelada de x). (Ver figura 6.17).

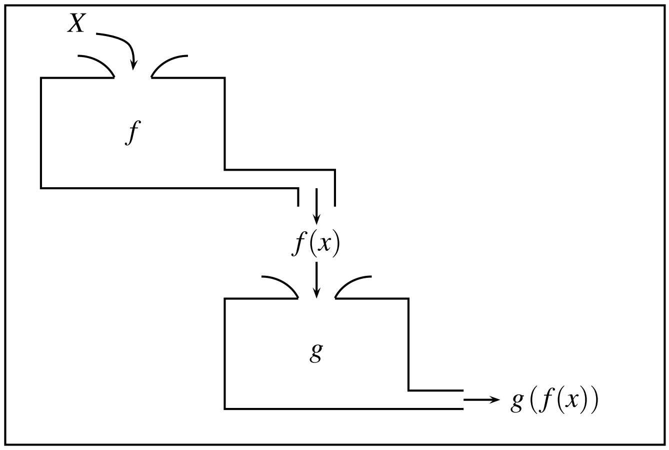


FIGURA Nº 6.17

Ejemplo 1

Sean $f\,(x) \;=\; x + 3\,,\quad g\,(x) \;=\; 4x^2$ entonces

i. Puesto que $R_g \cap D_f \;=\; [0\,,+\infty) \,\cap\, (-\infty\,,+\infty) \;=\; [0\,,+\infty) \;\neq\; \phi$, existe $(f_o\, g)\,(x)$ y está dada por:

$$(f_o\, g)\,(x) \;=\; f\,(g\,(x)) \;=\; f\left(4x^2\right) \;=\; 4x^2 + 3.$$

ii. Como también $R_f \cap D_g \;=\; (-\infty\,,+\infty) \,\cap\, (-\infty\,,+\infty) \;=\; (-\infty\,,+\infty) \;\neq\; \phi$, existe $(g_o\, f)\,(x)$ y $(g_o\, f)\,(x) \;=\; g\,(f\,(x)) \;=\; g\,(x+3) \;=\; 4\,(x+3)^2$.

Observe que aquí:

$$D_{g_0 f} \;=\; \left\{x \in D_f \,|\, f\,(x) \in D_g\right\} = (-\infty\,,+\infty) \cap \{x\,|\,x+3 \in (-\infty\,,+\infty)\} = (-\infty\,,+\infty)$$

Ejemplo 2

Sean $f\,(x) = \sqrt{2-x}$ y $g\,(x) = x^2 - 4$ entonces

i. Puesto que $R_g \cap D_f = [-4\,,+\infty) \cap (-\infty\,,2] = [-4\,,2] \;\neq \phi$ existe $(f_o\, g)\,(x)$ y está dada por $(f_o\, g)\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\left(x^2-4\right) \;=\; \sqrt{2-(x^2-4)} \;=\; \sqrt{6-x^2}$

ii. Como $R_f \cap D_g = [0\,,+\infty) \cap (-\infty\,,+\infty) = [0\,,+\infty) \;\neq \phi$, existe $(g_o\, f)\,(x)$ y está dada por

$$(g_o\, f)\,(x) = g\,(f\,(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right) \;=\; \left(\sqrt{2-x}\right)^2 - 4.$$

EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$, hallar, si existen:

   a) $f(f(x))$
   b) $g(g(x))$
   c) $f(g(f(x)))$

2. Dada $f(x) = \dfrac{x+3}{1-x^2}$; $g(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x}}$; $h(x) = Sen\, x$, dé expresiones para:

   $$f(f(x)), \quad f(h(g(x))), \quad h(g(g(x))), \quad h(h(f(g(x)))), \quad f(g(g(x))).$$

3. Suponga que f es una función y que a es un número tal que $f(f(a)) = a$. Cuál es el valor de $f(f(f(\ldots f(a))))$ (40 veces).

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas?.

   a) $(f_o\, g)_o\, h = f_o\, (g_o\, h)$
   b) $f_o\, (g+h) = f_o\, g + f_o\, h$
   c) $\dfrac{1}{f_o\, g} = \dfrac{1}{f}\, _o\, g$
   d) $\dfrac{1}{f_o\, g} = \left(\dfrac{1}{f}\right)_o \left(\dfrac{1}{g}\right)$

5. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2 - x$ indique cuál de las siguientes funciones compuestas es incorrecta:

   a) $f(g(x)) = \sqrt{2-x}$ *b*) $g(f(x)) = 2 - \sqrt{x}$
   c) $g(f(25)) = -3$ *d*) $g(g(x)) = x$

6. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -x^2$ si $x < 0$. Halle $f_o\, g$ y $g_o\, f$ si existen, y sus respectivos dominios y recorridos.

7. Sea $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $h(x) = x + 3$
   Hallar si existen $g_o\, f$, $f_o\, g$, $f_o\, h$, $g_o\, h$. ¿Cuáles son sus dominios?

8. Si $s(x) = Sen\,(x)$, $r(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = 3x^2 + 1$, $q(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ represente las siguientes funciones en términos de s, r, p y q usando la composición:

   i. $f(x) = Sen\sqrt{3x^2+1}$
   ii. $f(x) = \dfrac{Sen\sqrt{x} + 1}{Sen\sqrt{x} - 3}$
   iii. $f(x) = \sqrt{3\, Sen^2\,(x) + 1}$
   iv. $f(x) = 3\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2 + 1.$

9. Dada una función $y = h(x)$ descomponerla en varias funciones.

   a) $h(x) = Sen\, x^2$ *b*) $h(x) = Sen^2 x$ *c*) $h(x) = \dfrac{(x^2+x)^{1/2}}{(x^3+3)}$

   d) $h(x) = Sen\left(Cos^2(x^2+x+1)\right)$

Capítulo 7

POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINOMIALES

7.1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS

Una expresión de la forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in N$ y $a_n \neq 0$ se llama un ***polinomio con coeficientes reales, en variable*** x ***de grado*** n y se nota $p(x)$, $q(x)$, $r(x) \ldots$ etc. En lo sucesivo grado de $P(x) = n$ se notará $gr(P(x)) = n$. La relación que hace corresponder a cada número real x, el número real $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ se llama ***función polinomial*** asociada al polinomio $p(x)$. Si todos los a_i son iguales a cero, es decir, si $p(x) = 0$, este se llama el polinomio cero y a ese polinomio no se le asigna ningún grado. El polinomio constante $p(x) = a_0$ con $a_0 \neq 0$ se le asigna como grado: cero.

Ejemplo 1

1. $x^3 + 6x + 1$ es un polinomio con coeficientes reales en variable x y de grado 3, y $p(x) = x^3 + 6x + 1$ es su correspondiente función polinomial.

2. $6t^4 + 5$ es un polinomio con coeficientes reales en variable t de grado 4, y $g(t) = 6t^4 + 5$ su función polinomial asociada.

3. $4(x+5)^{10} - 3(x+5)^2 + 2(x+5) - 6$ es un polinomio con coeficientes reales en variable $x + 5$, de grado 10, y $h(x) = 4(x+5)^{10} - 3(x+5)^2 + 2(x+5) - 6$, su correspondiente función polinomial.

4. $2t^5 - it^2 + i - 2$, es un polinomio con coeficientes complejos, en variable t y de grado 5. Su función polinomial $q(t) = 2t^5 - it^2 + i - 2$, es de valor complejo puesto que $q(t) \in C$, y de variable real si $t \in R$, o de variable compleja si t puede tomar valores en C.

5. No son polinomios $x^{-2} + x^3$; $1/t + t^5 + 5$; $, z^{-3/2} + i z^4 + 2$ ¿ por qué?

Un número a ($a \in C$ ó $a \in R$)se dice que es un ***cero de un polinomio*** $p(x)$ ó ***raíz*** *de* $p(x) = 0$ si $p(a) = 0$. Gráficamente, las raíces de la ecuación polinomial $p(x) = 0$, cuando son reales, representan los valores de x para los cuales esta función es cero, o sea los valores de x en los cuales la gráfica de $y = p(x)$ corta al eje de las x o hace contacto con él. Cuando son imaginarias, allí no hay corte ni contacto con el eje x, por tanto, si una función polinomial no tiene raíces reales, su gráfica está toda sobre o bajo el eje de las x.

Ejemplo 2

1. $p(x) = x^2 - 4$ se anula cuando $x = \pm 2$, es decir, 2 y -2 son ceros de $x^2 - 4$ ó raíces de $x^2 - 4 = 0$ y gráficamente (Figura 7.1) indica que $y = x^2 - 4$ corta al eje x en $x = 2$ y $x = -2$.

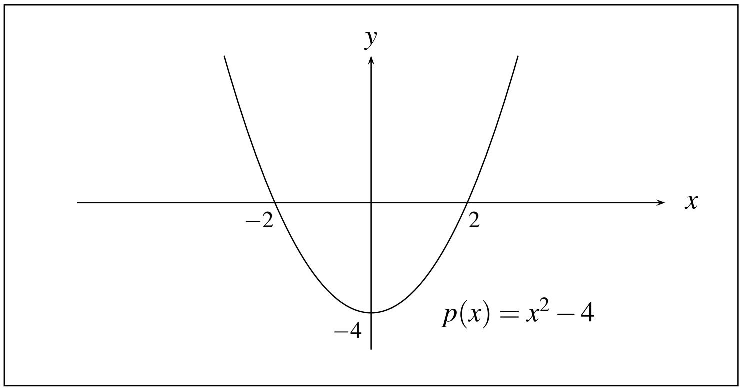


FIGURA N° 7.1

2. $q(x) = x^2 + 1$, no se anula para ningún valor real, pues solamente lo hace para $x = i$, $x = -i$, o sea aquí las raíces de $q(x) = 0$ son i y $-i$ que son números imaginarios, por tanto la gráfica de $y = x^2 + 1$ no se intercepta con el eje x (Figura 7.2).

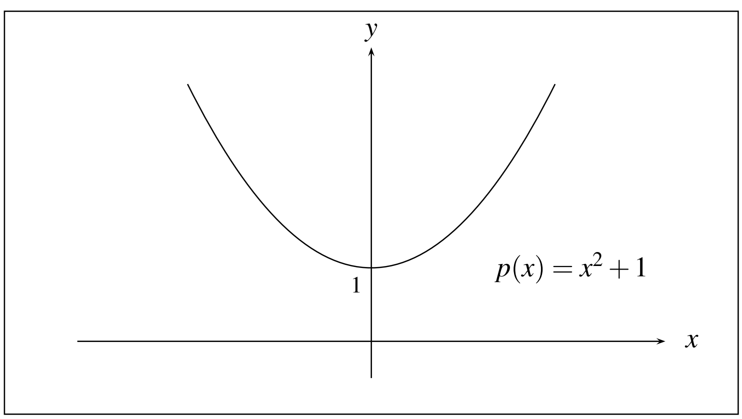


FIGURA N° 7.2

3. $r(x) = x^4 + x^2 = x^2\left(x^2 + 1\right)$, se anula en $x = 0$, $x = i$ y $x = -i$, entonces, como entre las raíces de $r(x) = 0$, el cero es la única real, allí la gráfica o corta al eje o hace contacto con él. (Figura 7.3).

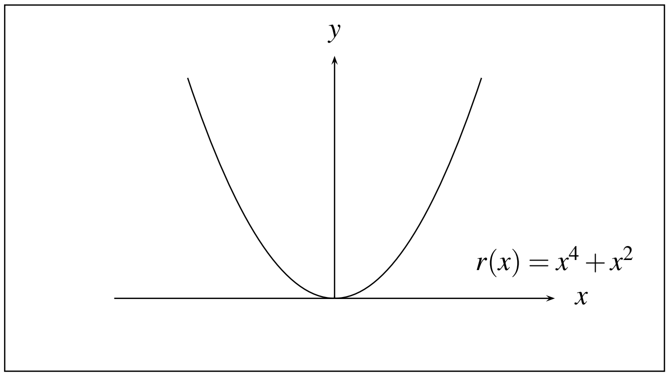


FIGURA N° 7.3

Como se puede apreciar, para elaborar la gráfica de una función polinomial, resulta conveniente hallar los ceros de su polinomio asociado, para lo cual es necesario conocer algunos resultados que serán útiles en este proceso.

7.2. ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre otro polinomio $Q(x)$, $gr(P(x)) \geq gr(Q(x))$, existen polinomios $D(x)$ y $r(x)$ tales que:
$P(x) = Q(x)\, D(x) + r(x)$ con $gr(r(x)) < gr(Q(x))$.

Observe que este resultado es consecuencia inmediata de realizar la división de $P(x)$ entre $Q(x)$, siendo $D(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo.

Ejemplo

Dados $p(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ y $q(x) = x^2 + x$, al dividir $p(x)$ entre $q(x)$ se obtiene:

$$\begin{array}{rl} x^3 + 2x^2 + 1 & \big| \underline{x^2 + x} \\ \underline{-x^3 - x^2 \qquad} & \quad x + 1 \\ x^2 + 1 & \\ \underline{-x^2 - x} & \\ -x + 1 & \end{array}$$

Por tanto $D(x) = x + 1$, $r(x) = -x + 1$ y por consiguiente:

$$x^3 + 2x^2 + 1 = (x+1)\left(x^2 + x\right) - x + 1.$$

Recuerde que si $q(x) = x - a$, la división de $p(x)$ entre $x - a$ se puede simplificar mediante la llamada *División Sintética*,que se realiza solamente con los coeficientes de las variables, colocados estos en orden descendente, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea $p(x) = x^4 - x^3 + 7x - 12$ y $q(x) = x + 4 = x - (-4)$ entonces:

División de Polinomios

$$
\begin{array}{rrrrl}
x^4 & -\ x^3 & + 7x & - 12 & \ \ |\underline{x+4\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{-x^4} & \underline{-4x^3} & & & \ \ x^3 - 5x^2 + 20x - 73 \\
 & -\ 5x^3 & + 7x & - 12 & \\
 & \underline{+\ 5x^3} & \underline{+20x^2} & & \\
 & & 20x^2 + & 7x - 12 & \\
 & & \underline{-20x^2} & \underline{-\ 80x} & \\
 & & & -\ 73x - 12 & \\
 & & & \underline{73x + 292} & \\
 & & & 280 &
\end{array}
$$

División Sintética

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1 & -1 & 0 & 7 & -12 & \ \ |\underline{-4} \\
 & -4 & 20 & -80 & 292 & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{\underbrace{1 \quad -5 \quad 20 \quad -73}_{Coeficiente\ de\ D(x)}} & \underbrace{280}_{Residuo} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x+4)(x^3 - 5x^2 + 20x - 73) + 280 \\
&= q(x)D(x) + R
\end{aligned}
$$

Observe en la división sintética, que el primer término de la tercera fila, es el primer término de la primera fila, y seguidamente cada elemento de la segunda fila, se obtiene multiplicando el elemento anterior de la tercera fila por a, y los elementos de la tercera fila se obtienen sumando los correspondientes elementos de la primera y segunda fila.

El último término de la tercera fila corresponde al residuo de la división, y los términos anteriores corresponden a los coeficientes del polinomio cociente $D(x)$ de grado $n - 1$ en orden descendente. (De izquierda a derecha).

7.3. TEOREMA DEL RESIDUO

El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ entre $x - a$ es $p(a)$.

Demostración

Por el algoritmo de la división $p(x) = (x - a)\ q(x) + R$

(R es un número, pues $gr(R(x)) < gr((x - a)) = 1$, por tanto:

$$p(a) = (a - a)\ q(a) + R = R$$

Ejemplo

El residuo de dividir $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 20$ entre $x - 2$ es

$$p(2) = 2\left(2^3\right) + 3\left(2^2\right) - 20 = 8.$$

Ejemplo

El residuo al dividir $p(x) = 2x^4 + 3x^2 - 20$ entre $x + 2i$ es

$$p(-2i) = 2(-2i)^4 + 3(-2i)^2 - 20 = 32 - 12 - 20 = 0.$$

7.4. TEOREMA DEL FACTOR

Sea $y = p(x)$ una función polinomial. Un número complejo a es raíz de $p(x) = 0$ si sólo si $x - a$ es un factor de $p(x)$.

Demostración

$\Rightarrow$) Sea a raíz de $p(x) = 0$ entonces $p(a) = 0$, pero $p(x) = (x-a)\,q(x) + R$ y como $R = p(a) = 0 \ \Rightarrow \ (x-a)$ es factor de $p(x)$.

$\Leftarrow$) Si $(x-a)$ es factor de $p(x)$ entonces $p(x) = q(x)\,(x-a)$ entonces $p(a) = 0 = R$

NOTA

Si $x - a$ es un factor de $p(x)$, pero $(x-a)^2$ no lo es, se dice que a es una raíz simple de $p(x)$. Si $(x-a)^m$ es factor de $p(x)$, pero $(x-a)^{m+1}$ no lo es, se dice que a es una raíz de $p(x) = 0$ de multiplicidad m, así por ejemplo si $p(x) = x\,(x-2)\,(x+5)^3$ entonces $p(x) = 0$ tiene a 2 y a 0 como raíces simples y a – 5 como raíz múltiple de multiplicidad 3.

Ejemplo

Si $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, se puede verificar que $p(1) = 0,\ p(-1) = 0,\ p(3) = 0$ es decir, 1, -1 y 3 son raíces de $p(x) = 0$, por consiguiente $x - 1,\ x + 1$ y $x - 3$ son factores de $p(x)$, o sea:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)\,(x+1)\,(x-3)$$

NOTA

Según éste teorema, el problema de factorizar un polinomio $p(x)$, es equivalente al problema de hallar sus ceros.

Ejemplo

Sea $p(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)^2 (x-1)$

Se puede verificar que $p(1) = 0;\ p(1-i) = 0$ y $p(1+i) = 0$, es decir $1,\ 1-i,\ 1+i$ son raíces de $p(x) = 0$ y $1+i,\ 1-i$ son raíces de multiplicidad 2, luego

$$p(x) = (x-(1-i))^2\,(x-(1+i))^2\,(x-1).$$

7.5. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Si $p(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos entonces $p(x) = 0$ tiene exactamente n raíces, contando cada raíz de multiplicidad p, como p raíces.

Ejemplo

Si $p(x) = (x-3)^4 (x-2)\left(x^2+1\right) x^2$ entonces, $p(x) = 0$ tiene a $x = 3$ como raíz de multiplicidad 4, a $x = 2$ como raíz simple, a $x = 0$ como raíz de multiplicidad 2 y a $x = i$, $x = -i$ como raíces imaginarias simples, es decir, $p(x) = 0$ tiene 9 raíces, pues el grado de $p(x)$ es 9.

Teorema

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$.
Si $\alpha = a + ib$ es una raíz de $p(x) = 0$, entonces $\overline{\alpha} = \overline{a + ib} = a - ib$ también lo es.

Demostración

Como α es raíz de $p(x) = 0$ entonces $p(\alpha) = 0$, es decir

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$$

$$\begin{array}{ll}
\Rightarrow \overline{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n} = \overline{0} & \text{(Conjugado a los dos lados)} \\
\Rightarrow \overline{a_0} + \overline{a_1\alpha} + \overline{a_2\alpha^2} + \ldots + \overline{a_n\alpha^n} = 0 & \text{(Conjugado de la suma = suma de conjugados)} \\
\Rightarrow \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_2}\,\overline{\alpha^2} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} = 0 & \text{(Conjugado de producto = producto de conjugados)} \\
\Rightarrow a_0 + a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\alpha^2} + \ldots + a_n\overline{\alpha^n} = 0 & (\text{ Si } a \in R \Rightarrow \overline{a} = a)
\end{array}$$

es decir, $p(\overline{\alpha}) = 0 \Rightarrow \overline{\alpha}$ es raíz de $p(x) = 0$

Ejemplo

$p(x) = x^2 + 1$; $p(i) = 0$, luego i es raíz, y por el teorema anterior $-i$ también es raíz.

Ejemplo

$q(x) = x^2 + (1-i)x - i$; $q(i) = 0$; $q(-1) = 0$, es decir, i y -1 son raíces de $q(x) = 0$.

¿Contradice el último teorema el hecho que $-i$ no es raíz de $q(x) = 0$?.

Ejemplo

Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$, el número complejo $x_1 = 1 - 2i$ es raíz de $p(x) = 0$ (verifíquese), por tanto $x_2 = \overline{x_1} = 1 + 2i$ también lo es, por tanto $(x - x_1)$ y $(x - x_2)$ son factores de $p(x)$, es decir,

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - (1-2i))\,(x - (1+2i)) \quad = x^2 - 2x + 5 \text{ es factor de } p(x).$$

Puesto que ya se tienen dos ceros de este polinomio y por el teorema fundamental del álgebra deben ser tres, el tercero, que necesariamente debe ser real (¿por qué?), se puede hallar dividiendo $p(x)$ entre $x^2 - 2x + 5$, de lo que se obtiene cero como residuo y $x - 3$ como cociente (verifíquese), lo que indica que $(x - 3)$ es factor de $p(x)$, por tanto $x_3 = 3$ es el otro cero de $p(x)$.

7.6. TEOREMA DE LAS RAÍCES RACIONALES

Sea $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\,, \quad a_n \neq 0$, un polinomio con coeficientes enteros. Si $\dfrac{p}{q}$ es raíz racional de $s(x) = 0$ (reducida a su mínima expresión) entonces p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n $(p, q$ enteros).

Ejemplo

Hallar las raíces de $s(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$.

Si $\dfrac{p}{q}$ es raíz de $s(x) = 0$ entonces p es un divisor o factor de $a_0 = -3$, luego los posibles valores de p son $\pm 1\,,\ \pm 3$ y q es un divisor de $a_n = 2$, luego los posibles valores de q son $\pm 1\,,\ \pm 2$, por tanto las posibilidades de $\dfrac{p}{q}$ son:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{-1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{-2},\ \frac{-1}{1},\ \frac{-1}{-1},\ \frac{-1}{2},\ \frac{-1}{-2},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{-1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{-2},\ \frac{-3}{-1},\ \frac{3}{-1},\ \frac{-3}{2},\ \frac{-3}{-2}$$

lista que contiene solamente ocho números distintos: $\pm 1\,,\ \pm\frac{1}{2}\,,\ \pm 3\,,\ \pm\frac{3}{2}$, de los cuales únicamente, $1\,,\ 1/2\,,\ 3$ son raíces de $s(x) = 0$, ya que:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1} \\ & 2 & -7 & 3 & \\ \hline 2 & -7 & 3 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{3} \\ & 6 & -9 & 3 & \\ \hline 2 & -3 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1/2} \\ & 1 & -4 & 3 & \\ \hline 2 & -8 & 6 & 0 & \end{array}$$

y para todos los otros casos el residuo de la división no es cero, por ejemplo para -3:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{-3} \\ & -6 & 45 & -165 & \\ \hline 2 & -15 & 55 & -168 \neq 0 & \end{array}$$

También se había podido proceder de la siguiente forma:

Una vez hallada la primera raíz, por ejemplo 1;

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -9 & 10 & -3 & \underline{1} \\ & 2 & -7 & 3 & \\ \hline 2 & -7 & 3 & 0 & \end{array}$$

Se factoriza el polinomio $s(x)$ como $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = \left(2x^2 - 7x + 3\right)(x - 1)$, y se continúan buscando las raíces de $D(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0$ por el mismo método:

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -7 & 3 & \underline{3} \\ & 6 & -3 & \\ \hline 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

Por tanto $s(x) = (x-1)\left(2x^2 - 7x + 3\right) = (x-1)(x-3)(2x-1)$.

Ejemplo

Hallar las raíces de la ecuación

$$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 = 0$$

Las posibilidades de las raíces racionales de $p(x) = 0$ son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24.$$

De estos únicamente $x = 4$ y $x = -2$ son raíces racionales, pues

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -7 & -14 & -24 & \underline{4} \\ & 4 & 12 & 20 & 24 & \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & 5 & 6 & \underline{-2} \\ & -2 & -2 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

Y los residuos de las divisiones para los otros casos no son cero, por tanto $p(x)$ se puede factorizar como:

$p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 - 14x - 24 = (x+2)(x-4)\left(x^2 + x + 3\right)$, donde el polinomio $x^2 + x + 3$, como se verá en la sección siguiente, no se puede factorizar más como producto de polinomios con coeficientes reales.

EJERCICIOS

1. Hallar los ceros de las funciones polinomiales (raíces de $p(x) = 0$), indicando su multiplicidad y el grado del polinomio:

   a) $p(x) = (x+8)^3 (x-6)^2$.

   b) $p(x) = (x-i)^4 (x+i)^4 (x-2)^8$.

   c) $p(x) = \left(x^2+9\right)^8 (x-3)^3 x^4$

2. Factorizar los polinomios siguientes:

   a) $p(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 16$, si $x = -1$ es un cero

   b) $p(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, si $x = 3$ es un cero de multiplicidad 2.

   c) $p(x) = x^4 - 1$, si $x = \pm 1$ son ceros

   d) $p(x) = 2x^3 - 17x^2 + 90x - 41$, si $x = 1/2$ es un cero.

3. Si $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 10 = 0$ tiene a $x = 3 - i$ como raíz; hallar las demás raíces.

4. Ilustrar el algoritmo de la división con tres ejemplos diferentes.

5. ¿ Es $x-1$ un factor de $p(x) = x^8 - 1$?.

6. ¿Es $x-3$ un factor de $p(x) = x^3 - 2x + 1$?.

7. Usar división sintética y el teorema del residuo para hallar:

   a) $P(-2)$, si $P(x) = 3x^2 - x - 10$
   b) $P(5)$, si $P(x) = 2x^3 - 12x^2 - x + 30$
   c) $P(i)$, si $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

8. Usar división sintética para encontrar el cociente y el residuo que resulta de dividir

   a) $P(x) = 4x^5 - 30x^3 - 50x$ entre $x+3$
   b) $P(x) = 3x^4 - 11x^3 - 18x + 8$ entre $x-4$
   c) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ entre $x - 2i$

9. Dividir $p(x) = 5 + 4x^3 - 3x$ entre $2x-3$. ¿Puede aplicar división sintética?. ¿Cómo?

10. Dada la función polinomial $p(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)$:

    a) Halle las raíces de $p(x) = 0$
    b) Halle el conjunto de los x tales que $p(x) \geq 0$ y $p(x) < 0$
    c) Halle su intersección con el eje y
    d) Halle sus intersecciones con el eje x
    e) Trace el gráfico de la función.

11. Resuelva el problema 10 para la función $f(x) = x^5 - x$.

12. Hallar el valor de b tal que $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + bx - 8$ sea divisible por $x-2$.

13. Hallar el valor de las constantes a, b, c tales que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sea divisible por $x+1$ *y* $x+2$, y que al dividirlo por $x+3$ su residuo sea 20.

14. Hallar el valor de las constantes a, b tales que $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$.

15. Halle los ceros de los polinomios siguientes y factorícelos

    a) $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 77x - 60$
    b) $q(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
    c) $r(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

7.7. FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función polinomial de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se conoce con el nombre de ***Función Cuadrática*** y como se vio anteriormente se representa gráficamente por una parábola, abierta hacia arriba si $a > 0$, ó abierta hacia abajo si $a < 0$.

De la teoría vista en la sección anterior $f(x) = 0$ tiene dos raíces, las cuales se hallan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Rightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \\
&\Rightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

A la expresión $b^2 - 4ac$ se le llama ***Discriminante*** de la ecuación, y su signo caracteriza las raíces de $f(x) = 0$ así:

i. Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces la expresión $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ toma dos valores reales diferentes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

lo que indica que el gráfico de $y = f(x)$ corta el eje x en dos puntos x_1 y x_2, como se ilustra en la figura 7.4.

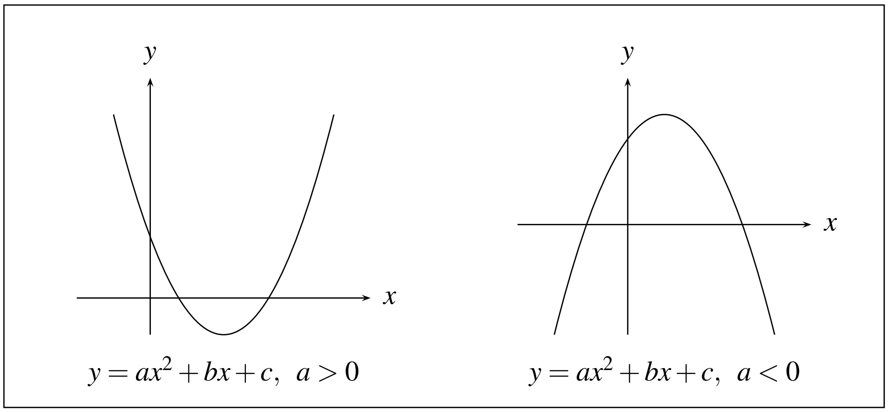


FIGURA N° 7.4

ii. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la expresión $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ toma un único valor $x_1 = -b\big/2a$, o sea que $f(x) = 0$ tiene una raíz real de multiplicidad dos, por tanto $y = f(x)$ toca al eje x solamente en un punto. (Figura 7.5).

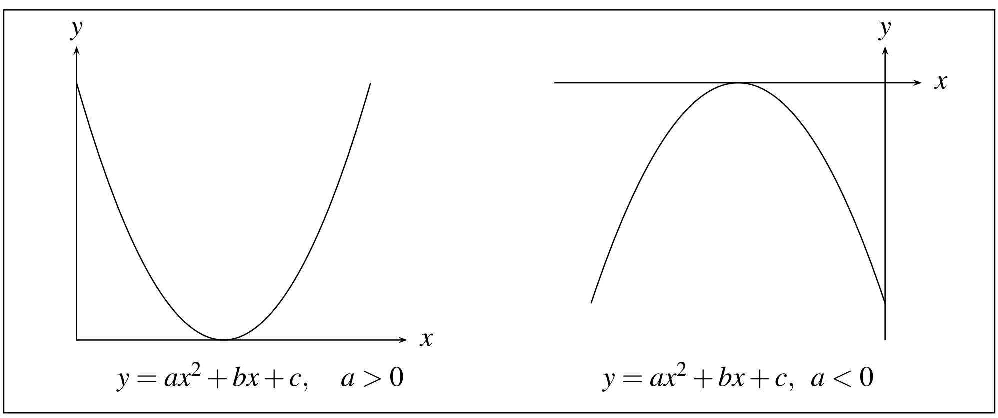


FIGURA N° 7.5

iii Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la expresión $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ toma dos valores imaginarios. $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, por tanto la gráfica de $y = f(x)$ no corta ni toca al eje x (Figura 7.6).

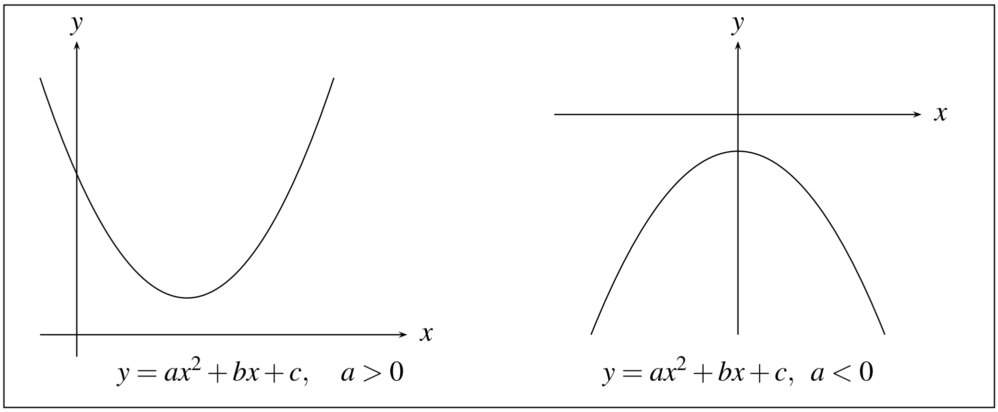


FIGURA N° 7.6

Ejemplo 1

Trazar el gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$.

Discriminante: $b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$, por tanto su gráfico no corta al eje x, y como $a = 1 > 0$ la parábola se abre hacia arriba.

Para hallar el mínimo de la función, completando cuadrados se expresa la ecuación $y = x^2 - 2x + 3$ en la forma: $y - 2 = (x - 1)^2$, como el mínimo valor de una expresión elevada al cuadrado se da cuando ésta vale cero, entonces $y - 2$ será mínimo cuando $x - 1 = 0$, es decir, para $x = 1$; y para este valor, se obtiene el mínimo de la función que es $y = 2$, por tanto $(1, 2)$ es el punto mínimo del gráfico de $y = f(x)$. (Figura 7.7.).

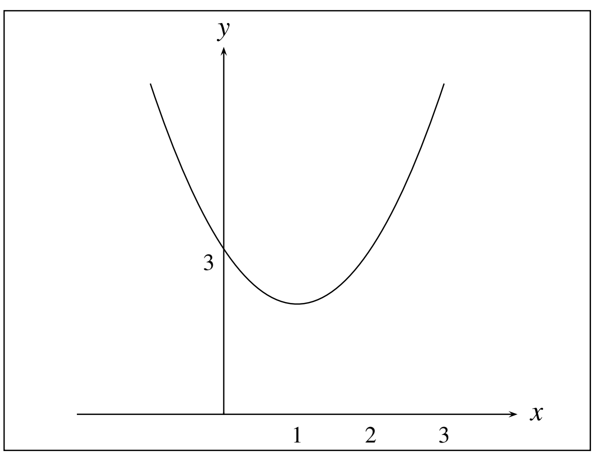


FIGURA N° 7.7

Ejemplo 2

Hallar los valores de x tales que $f(x) = x^2 + x - 6 \leq 0$.

Como $b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 \geq 0$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces reales diferentes 2 y -3, por tanto se puede factorizar como$f(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, por consiguiente $x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+3) \leq 0$, es decir, $x \in [-3, 2]$. (Figura 7.8).

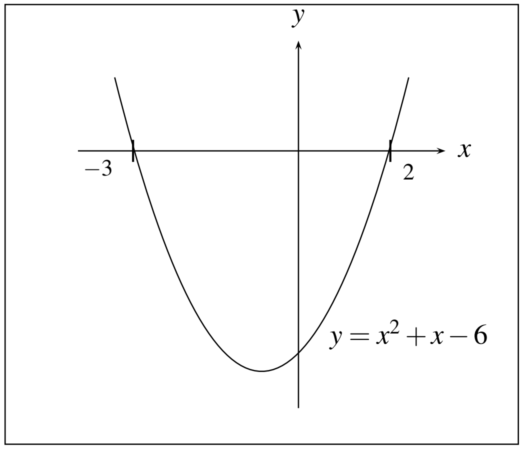


FIGURA N° 7.8

Ejemplo 3

Hallar el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$.

Para que $f(x)$ sea real $x^2 + x - 6$ debe ser mayor o igual a cero, y de la gráfica del ejercicio anterior se deduce que $x \in (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$.

EJERCICIOS

1. Usar la fórmula cuadrática y el teorema del factor para factorizar:

   a) $p(x) = x^2 - 3x + 1$ *c*) $p(x) = -x^2 - 4x - 2$

   b) $p(x) = x^2 - 6x + 1$ *d*) $p(x) = 3x^2 - 5x + 4$

2. Escriba las funciones siguientes de la forma $a(y-k) = b(x-h)^2$ y halle su punto máximo o mínimo.

   a) $y = 3x^2 - 5x$ *c*) $y = 4x^2 + 5x - 1$

   b) $y = -x^2 - x - 1$ *d*) $y = x^2 - 5x + 1$

3. Hallar los valores de x tales que

   a) $y = -x^2 - x + 1 \leq 0$ *b*) $y = 2x^2 + 5x + 1 \geq 0$ *c*) $y = 4x^2 - x \leq 0$

4. Trace las gráficas de:

   a) $y = x^2 - |x| + 6$ *b*) $y = \left|x^2 - x + 6\right|$ *c*) $|y| = x^2 - x + 6$

7.8. FUNCIONES RACIONALES

La función $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, se llama ***función racional***,su dominio es el conjunto de todos los números reales, a excepción de aquellos que anulen el denominador. En estos puntos donde el denominador se anula, la función puede presentar en su gráfica un hueco o puede tender a $+\infty$ ó a $-\infty$, aspectos estos que se tratarán en forma detallada cuando se introduzca más adelante el concepto de límite de una función. Por lo pronto se analizará tabulando, las gráficas de algunas funciones racionales.

Ejemplo 1

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}.$$
$$D_f = R - \{2\}$$

En la construcción de su gráfico se debe tener en cuenta que:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)\,(x+2)}{x-2} = x+2 \quad si \quad x \neq 2. \quad \text{(Figura 7.9).}$$

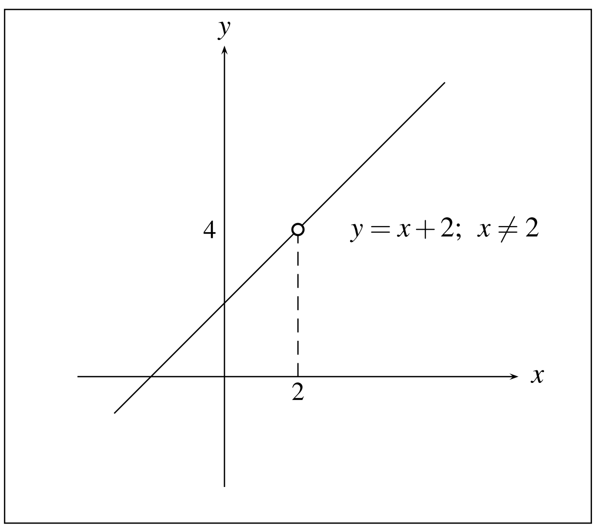


FIGURA N° 7.9

Ejemplo 2

$$f(x) = \frac{1}{x};$$

$D_f = R - \{0\}$. (Figura 7.11)

Tabulando para algunos valores próximos a cero positivos y negativos se observa que cuando x se acerca a cero, $f(x)$ tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$, según se acerque por la derecha o por la izquierda. La recta $x = 0$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica y la recta $y = 0$ se llama asíntota horizontal de la gráfica.

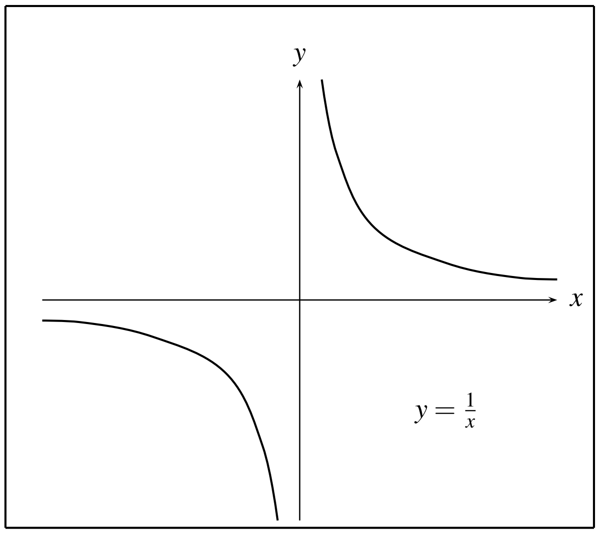


FIGURA N° 7.10

Ejemplo 3

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)} \quad ;$$

$$D_f = R - \{1, -2\}.$$

Al determinar donde es $f(x)$ positivo y donde negativo se obtiene $f(x) \geq 0$ si $x \in (-2,0) \bigcup (1,\infty)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty,-2) \bigcup (0,1)$ puesto que en $x = 1$ y $x = -2$ el denominador se anula.
Observando que para valores cercanos a -2 y de 1 por la izquierda el valor de la función se hace muy grande pero negativo y para valores cercanos a -2 y a 1 por la derecha el valor de la función se hace muy grande, se concluye que el gráfico de la función tiende a pegarse a las rectas verticales $x = -2$ y $x = 1$ tanto a derecha como a izquierda (Figura 7.11)

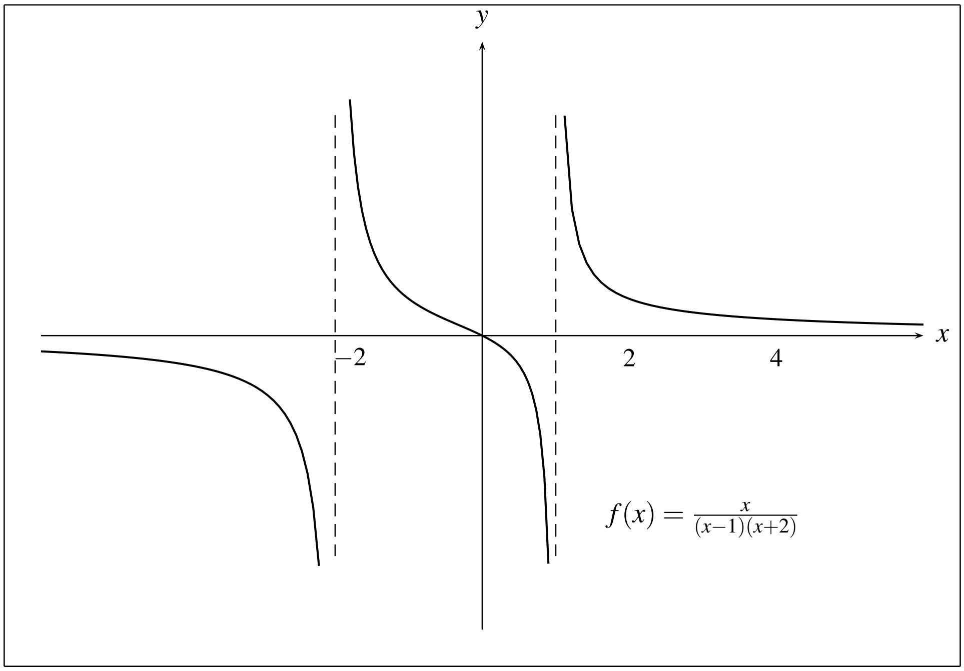


FIGURA N° 7.11

Esto indica que las rectas $x = -2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

EJERCICIOS

1. Halle el dominio de las siguientes funciones racionales:

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3x+5}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-3x+5}$

   c) $f(x) = \dfrac{x^4+2}{x^3+3x^2-8x}$

2. Tabulando, trace un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones racionales, e intuya cuáles son sus asíntotas verticales si las hay, o dónde hay agujeros.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ *b*) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

   c) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-8x}{x+2}$ *d*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

   e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

7.9. DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ con coeficientes reales, con grado de $p(x)$ menor que el grado de $q(x)$, es posible demostrar que $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se puede expresar como:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)$$

donde cada $F_i(x)$ para $i = 1, \ldots, n$ tiene una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A}{(ax+b)^m} \quad \text{ó} \quad \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

con $n, m \in N,\ \ a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c$, no factorizable en R o sea con $b^2 - 4ac < 0$.

A esta representación de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se le llama ***descomposición en fracciones parciales o fracciones simples*** y es de gran utilidad para simplificar expresiones matemáticas de este tipo que aparecen por ejemplo, en el cálculo de ciertas integrales y de algunas transformadas de Laplace. El número de sumandos $F_i(x)$ y la forma de ellos, depende de la naturaleza de los ceros del polinomio $q(x)$, es decir, depende de si las raíces de $q(x) = 0$ son reales simples, reales múltiples, imaginarios simples ó imaginarios múltiples. Para mayor sencillez se considerarán inicialmente estas diferentes situaciones en forma aislada.

Caso 1

Si $q(x) = 0$ tiene solamente raíces reales simples entonces con ellas es posible factorizar $q(x)$ en la forma:

$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots (a_nx + b_n), \quad (gr(q(x)) = n)$ y se puede demostrar que existen constantes reales únicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

donde $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ se pueden calcular utilizando la igualdad de polinomios, como se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}$ entonces

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

Para hallar A, B, C se busca el mínimo común denominador en la expresión del lado derecho de la igualdad, denominador que coincide con el del lado izquierdo, lo cual permite cancelarlos e igualar los respectivos numeradores, de modo que queda una igualdad de polinomios:

$$5x+3 = A\,(x-3)\,(x+1) + Bx\,(x-3) + Cx\,(x+1)$$

Y como ésta se satisface para todo x, en particular lo hace para los ceros de $q\,(x)$, es decir, $x = 0$, $x = -1,\ x = 3$. Dando a x estos valores se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x = 0; & 3 = A\,(0-3)\,(0+1) \;\Rightarrow\; 3 = -3A \;\Rightarrow\; A = -1 \\ x = -1; & -5+3 = B\,(-1)\,(-4) \;\Rightarrow\; -2 = 4B \;\Rightarrow\; B = -2/4 = -1/2 \\ x = 3; & 15+3 = C\,(3)\,(4) \;\Rightarrow\; 18 = 12C \;\Rightarrow\; C = 18/12 = 3/2 \end{array}$$

y así:

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = \frac{-1}{x} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{3/2}{x+3}$$

Caso 2

Si $q\,(x) = 0$ tiene solamente una raíz real de multiplicidad $n,\ n \geq 2$, se puede expresar $q\,(x)$ de la forma: $q\,(x) = (ax+b)^n, \quad (gr\,(q\,(x)) = n)$ y se puede demostrar que su descomposición asume la forma:

$$\frac{p\,(x)}{q\,(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se calculan en forma análoga al caso 1.

Ejemplo 2

Expresar en fracciones parciales $f\,(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{x^3+3x^2+3x+1}$

Observe que $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$, luego $q\,(x) = (x+1)^3 = 0$ tiene a $x = -1$ como raíz real de multiplicidad 3, entonces

$$f\,(x) = \frac{x^2+2x+4}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

formando mínimo común denominador en la expresión de la derecha y cancelando denominadores se tiene:

$$x^2+2x+4 = A\,(x+1)^2 + B\,(x+1) + C$$

Como en este caso $q\,(x)$ no tiene sino un cero y aparecen tres constantes por determinar, para hallar A, B, C, se asigna a x tres valores arbitrarios para obtener un sistema de tres ecuaciones en tres variables, cuya solución las determina:

$$\begin{array}{ll} x = 0; & 4 = A+B+C \\ x = 1; & 7 = 4A+2B+C \\ x = -1; & 3 = C \end{array}$$

Sistema que tiene como solución: $C = 3\,,\ A = 1\,,\ B = 0$ y así:

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{0}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3}$$

Caso 3

Si $q\,(x) = 0$ tiene solamente raíces imaginarias simples. En este caso puesto que cuando $(\alpha_k + i\,\beta_k)$ es raíz de $q\,(x) = 0$, también lo es $(\alpha_k - i\,\beta_k)$ entonces $q\,(x)$ se puede factorizar en la forma:

$$q\,(x) = (x - (\alpha_1 + i\,\beta_1))\,(x - (\alpha_1 - i\,\beta_1))\,\ldots\,(x - (\alpha_n + i\,\beta_n))\,(x - (\alpha_n - i\,\beta_n))\,, \quad (gr\,(q\,(x)) = 2n)\,,$$

expresión que se puede reducir a sólo factores cuadráticos reales, pues:

$$(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) = x^2 - 2\,\alpha\,x + \alpha^2 + \beta^2$$

por tanto $q\,(x)$ se puede factorizar como:

$$q\,(x) = \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)\,\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)\,\ldots\,\left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)$$

y se puede demostrar que existen constantes $A_1\,,\ B_1,\ A_2\,,\ B_2\,,\ \ldots\,,\ A_n\,,\ B_n$, tales que:

$$\frac{p\,(x)}{q\,(x)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \ldots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

Ejemplo 3

Expresar en fracciones parciales

$$f\,(x) = \frac{4x}{(x^2+1)\,(x^2+2x+3)}$$

El denominador $q\,(x)$ tiene sólo raíces imaginarias simples, entonces

$$\frac{4x}{(x^2+1)\,(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

y en forma análoga al caso anterior:

$$4x = (Ax+B)\left(x^2+2x+3\right) + (Cx+D)\left(x^2+1\right).$$

Y puesto que hay 4 constantes por determinar, se dan 4 valores arbitrarios a x:

$$\begin{array}{ll}
x = 0; & 0 = B\,(3) + D\,(1) \\
x = 1; & 4 = (A+B)\,(6) + (C+D)\,(2) \\
x = -1; & -4 = (-A+B)\,(2) + (-C+D)\,(2) \\
x = 2; & 8 = (2A+B)\,(11) + (2C+D)\,(5)
\end{array}$$

obteniendo el sistema:

$$\begin{aligned} 3B + D &= 0 \\ 6A + 6B + 2C + 2D &= 4 \\ -2A + 2B - 2C + 2D &= -4 \\ 22A + 11B + 10C + 5D &= 8 \end{aligned}$$

Cuya solución es $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$, $D = -3$, luego

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{(x+1)}{(x^2+1)} + \frac{-x-3}{x^2+2x+3}$$

Caso 4

Si $q(x) = 0$ tiene como raíces, una imaginaria de multiplicidad n, y por consiguiente también su conjugada de multiplicidad n, $q(x)$ se puede expresar en la forma:

$$q(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)^n, \quad (gr(q(x)) = 2n).$$

Se puede verificar que la representación en fracciones parciales de $\frac{p(x)}{q(x)}$ está dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo 4

Expresar en fracciones parciales $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}$

Las raíces de $q(x) = \left(x^2+4\right)^2 = 0$ son $\pm 2i$ de multiplicidad 2; entonces

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

Luego $x^2 = (Ax+B)\left(x^2+4\right) + (Cx+D)$.

Desarrollando la expresión de la derecha y agrupando términos semejantes, se obtiene un polinomio, en este caso de grado tres, el cual al igualarlo con el de la izquierda, genera un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pues la igualdad de dos polinomios implica igualdad de los coeficientes de potencias iguales, así:

$x^2 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)\,x + (4B + D)$ lo que implica que:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 1 \\ 4A + C &= 0 \\ 4B + D &= 0 \end{aligned}$$

sistema cuya solución es: $A = 0\,,\ B = 1\,,\ C = 0\,,\ D = -4$, luego

$$\frac{x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{x^2+4} - \frac{4}{(x^2+4)^2}$$

Caso 5

Los casos anteriores se pueden combinar en uno sólo, cuando $q\,(x) = 0$ tenga raíces de diferentes tipos:

Ejemplo 5

Expresar en fracciones parciales la función:

$$f\,(x) = \frac{x^2}{(x-3)\,(x-1)^2\,(x^2+9)\,(x^2+1)^3}$$

Las raíces de $q\,(x) = (x-3)\,(x-1)^2\left(x^2+9\right)\left(x^2+1\right)^3 = 0$ son 3 y $\pm 3\,i$ simples, 1 de multiplicidad 2 y $\pm\,i$ de multiplicidad 3. Por tanto:

$$\frac{x^2}{(x-3)\,(x-1)^2\,(x^2+9)\,(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+9} + \frac{Fx+G}{x^2+1} + \frac{Hx+L}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^3}$$

Haciendo mínimo común denominador en la expresión de la derecha, e igualando los polinomios que resultan después de cancelar los denominadores, se genera un sistema de 11 ecuaciones con 11 incógnitas cuya solución determina las constantes.

Caso 6

Si el grado del denominador es mayor o igual que el grado del numerador. En este caso por el algoritmo de la división se tiene que:

$$\frac{p\,(x)}{q\,(x)} = D\,(x) + \frac{R\,(x)}{q\,(x)}$$

Y como $gr\,(R\,(x)) < gr\,(q\,(x))$ entonces es posible representar $\dfrac{R\,(x)}{q\,(x)}$ en fracciones parciales.

Ejemplo 6

Expresar en fracciones parciales $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Como el grado de $p(x)$ es mayor que el grado de $q(x)$ se efectúa la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & -2x & & x^2+3x+2 \\ \cline{5-5} -x^3 & -3x^2 & -2x & & x-3 \\ \cline{1-4} & -3x^2 & -4x & & \\ & 3x^2 & +9x & +6 & \\ \cline{2-4} & & -5x & +6 & \end{array}$$

y así:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (x-3) + \frac{5x+6}{x^2+3x+2} = (x-3) + \frac{5x+6}{(x+1)(x+2)}$$

Ahora como:

$$\frac{5x+6}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{4}{(x+2)} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} = (x-3) + \frac{1}{(x+1)} + \frac{4}{(x+2)}$$

EJERCICIOS

I. Verificar por medio de fracciones parciales que:

1. $\dfrac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/6}{x-2} + \dfrac{-2/3}{x+1}$

2. $\dfrac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} = \dfrac{1/8}{x^2} + \dfrac{3/16}{x} + \dfrac{7/4}{(x-2)^3} + \dfrac{5/4}{(x-2)^2} + \dfrac{-3/16}{x-2}$

3. $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \dfrac{(9/5)x+7/5}{x^2+2x+2} + \dfrac{-4/5}{x-1}$

4. $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

5. $\dfrac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \dfrac{1/3}{(x-1)} + \dfrac{(2/3)x-1/3}{x^2+2} + \dfrac{-x}{(x^2+2)^2}$

6. $\dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \dfrac{1/3}{x^2+2x+2} + \dfrac{2/3}{x^2+2x+5}$

7. $\dfrac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1-2x}{x^2+1}$

II. Expresar en fracciones parciales:

1. $p(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x}$
2. $p(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$
3. $p(x) = \dfrac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}$
4. $p(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$
5. $p(x) = \dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$
6. $p(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$
7. $p(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$
8. $p(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$

Capítulo 8

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

8.1. MEDIDA DE ÁNGULOS

Existen varias formas para medir ángulos; una primera forma consiste en dividir la circunferencia con centro en el vértice del ángulo en 360 partes, cada una de las cuales se llamará un *Grado* (grado sexagesimal), el número de grados contenido en el arco comprendido por los dos lados del ángulo es la medida de éste; positivo si se está midiendo en sentido antihorario y negativo si se hace en sentido horario. (Figuras 8.1).

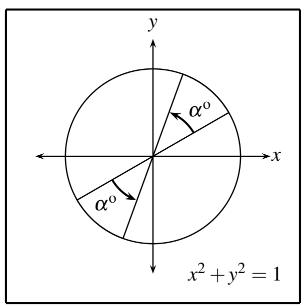


FIGURA N° 8.1 (A)

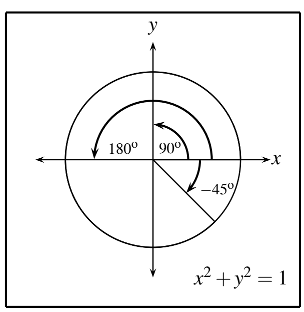


FIGURA N° 8.1 (B)

Otra forma muy usada de medir ángulos, se da tomando la circunferencia unitaria con centro en el vértice del ángulo, entonces este ángulo medirá α *radianes* $(\alpha \in R^+)$ si la longitud del arco de esta circunferencia comprendida entre los dos lados del ángulo es α y α se considera en sentido antihorario, y medirá $-\alpha$ si se considera en sentido horario.

Así como la longitud de esta circunferencia es 2π (pues $r = 1$), el ángulo que corresponde a toda la circunferencia mide 2π radianes, el que corresponde a media, mide π radianes y así sucesivamente. (Figuras 8.2).

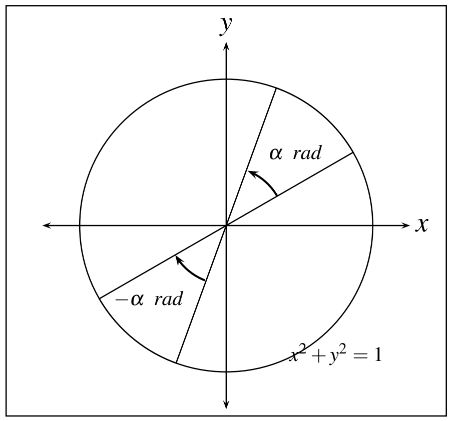


FIGURA N° 8.2 (A)

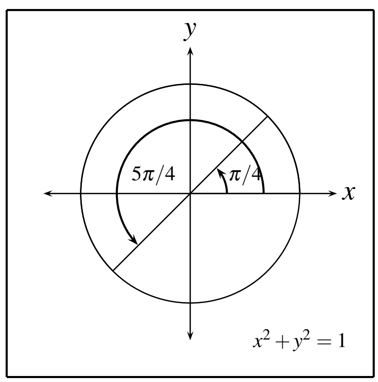


FIGURA N° 8.2 (B)

Así el ángulo que recorre la circunferencia completa, es decir, 360^o, equivale a la longitud de la circunferencia unitaria que es 2π.
Por consiguiente el ángulo que recorre media circunferencia, es decir, 180^o, equivale a π (longitud de media circunferencia unitaria). Y así:

$$90^o \longrightarrow \pi/2$$
$$60^o \longrightarrow \pi/3$$
$$45^o \longrightarrow \pi/4$$

En general dado un ángulo que mide α^{o} , su equivalente en radianes se puede encontrar al resolver una regla de tres simple, teniendo en cuenta que 360° es equivalente a 2π radianes así:

$$\begin{aligned} 360^{o} &\longrightarrow 2\pi \\ \alpha^{o} &\longrightarrow x \end{aligned}$$

entonces

$$x = \frac{2\pi\ \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi\ \alpha}{360} \quad \text{radianes}$$

y recíprocamente, dado un ángulo que mide α radianes su equivalente en grados se toma de:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longrightarrow 2\pi \\ x^\circ &\longrightarrow \alpha \end{aligned}$$

entonces

$$x = \frac{360^\circ \alpha}{2\pi} \quad \text{grados}$$

Ejemplo 1

Representar $\dfrac{\pi}{6}$ en grados

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\longrightarrow 45^\circ \\ \frac{\pi}{6} &\longrightarrow x \end{aligned}$$

entonces

$$x = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{45^\circ}{\pi/4}\right) = \frac{(4)(45)}{6} = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

Ejemplo 2

Representar 42° en radianes

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longrightarrow 2\pi \\ 42^\circ &\longrightarrow x \end{aligned}$$

entonces

$$x = \frac{2\pi \times 42^{o}}{360^{o}} = \frac{7}{30}\pi$$

EJERCICIOS

1. Convertir a radianes los ángulos:

$$\pm 30^\circ \qquad \pm 120^\circ \qquad \pm 150^\circ \qquad \pm 710^\circ \qquad \pm 315^\circ \qquad \pm 910^\circ$$

2. Convertir a grados los ángulos:

$$\pm\frac{2\pi}{3} \qquad \pm\frac{5\pi}{6} \qquad \pm\frac{3\pi}{4} \qquad \pm\frac{7\pi}{2} \qquad \pm\frac{8\pi}{3}$$

3. ¿Si un ángulo mide 2 radianes, cuanto mide en grados?. Y si un ángulo mide 2 grados, ¿Cuanto mide en radianes? (Observe el resultado gráficamente)

4. Repita el ejercicio 3 si en lugar de 2 se tiene:

   a) 3

   b) -7

   c) 30

   d) -3.5

8.2. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

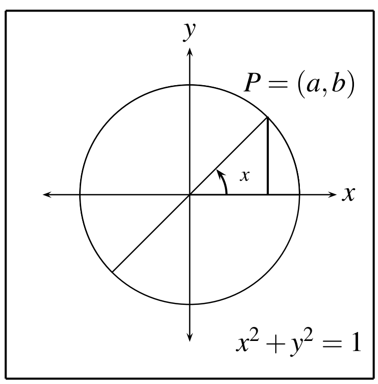


FIGURA N° 8.3

Como se puede apreciar en la figura 8.3, dado un ángulo x con vértice en $(0,0)$ y lado inicial sobre el eje positivo de las x, y dada la circunferencia $x^2+y^2=1$, existe un único punto de corte entre esta circunferencia y el lado final del ángulo.

De esta forma, a un ángulo x se le asocia una única pareja (a,b) que depende de x. A la abscisa de esta pareja se le llama coseno de x: $Cos\ (x)$ y a su ordenada seno de x: $Sen\ (x)$; es decir, $Cos\, x = a$ y $Sen\, x = b$. (Figura 8.4).

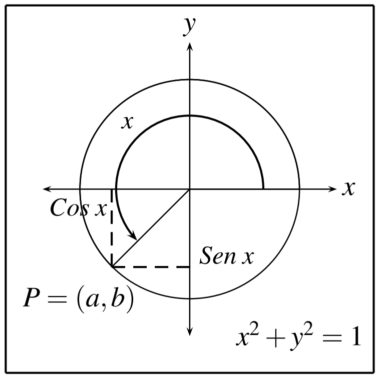


FIGURA N° 8.4 (A)

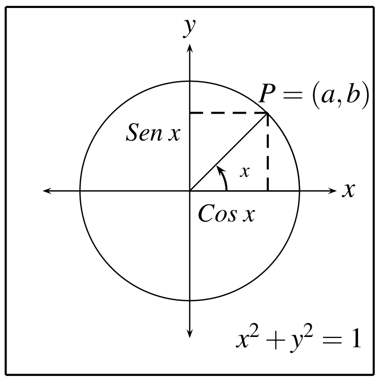


FIGURA N° 8.4 (B)

Así por ejemplo de la figura 8.5 se puede concluir:

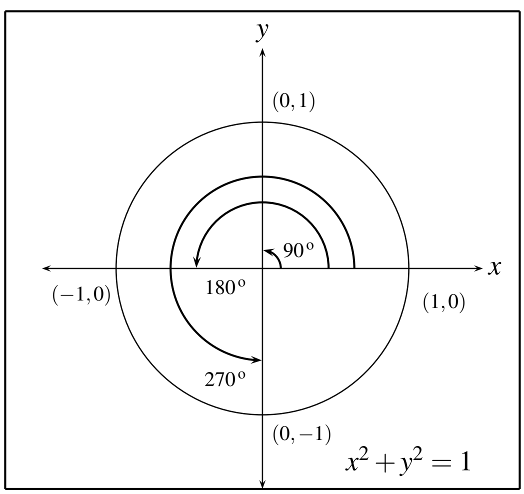


FIGURA N° 8.5

Grados	Punto	Radianes	Sen x	Cos x
0 º	(1,0)	0	0	1
90 º	(0,1)	$\pi/2$	1	0
180 º	(-1,0)	π	0	-1
270 º	(0,-1)	$3\pi/2$	-1	0
360 º	(1,0)	2π	0	1

De esta forma se han definido dos funciones de reales en reales que asocian a cada número real x (medida del ángulo en radianes), una el número $Cos\,x$ y otra el número $Sen\,x$; por tanto estas funciones $g(x) = Sen\,x$ y $f(x) = Cos\,x$ tendrán como dominio todo R y puesto que las abscisas y ordenadas de los puntos sobre la circunferencia unitaria están entre -1 y 1 entonces el recorrido de estas funciones $Sen\,x$ y $Cos\,x$ es el intervalo $[-1, 1]$.

Existe otra forma de definir el seno y el coseno de un ángulo agudo x, que consiste en considerar cualquier triángulo rectángulo con uno de sus ángulos x y llamar.

$$Sen\,x = \frac{\text{Cateto opuesto a } x}{\text{hipotenusa}} \qquad y \qquad Cos\,x = \frac{\text{Cateto adyacente a } x}{\text{hipotenusa}}$$

definición que coincide con la que se dio inicialmente, pues de la figura 8.6, considerando las circunferencias concéntricas en el origen y radios 1 y r ($r \in R$, dado) y el triángulo con ángulo agudo x; por semejanza de triángulos se tiene:

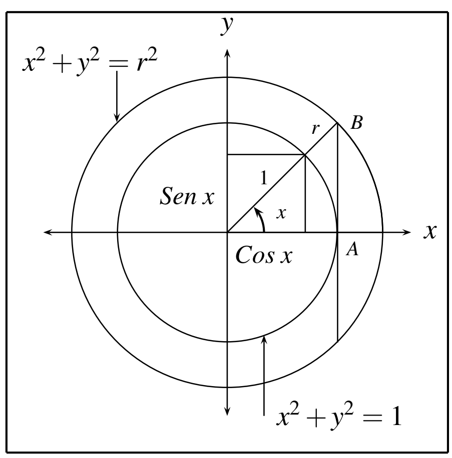


FIGURA N° 8.6

Siendo:
OA = Cateto adyacente a x en el triángulo OAB
AB = Cateto opuesto a x en el mismo triángulo.

$$\frac{r}{1} = \frac{AB}{Sen\,x} \Leftrightarrow Sen\,x = \frac{AB}{r} = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$
$$\frac{r}{1} = \frac{OA}{Cos\,x} \Leftrightarrow Cos\,x = \frac{OA}{r} = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Existe una forma de ampliar esta ultima presentación para ángulos que no sean agudos, pero en general para estos casos se trabajará con la presentación dada inicialmente o utilizando expresiones que permitan reducir su calculo a senos y cosenos de ángulo agudos como se vera mas adelante.

Ejemplo

Usando esta representación las funciones trigonométricas de 45°, 30°, 60° también se pueden calcular por medio de los triángulos representado en las figuras 8.7, donde el primero es la mitad de un cuadrado de lado 1 y el segundo la mitad de un triángulo equilátero de lado 2.

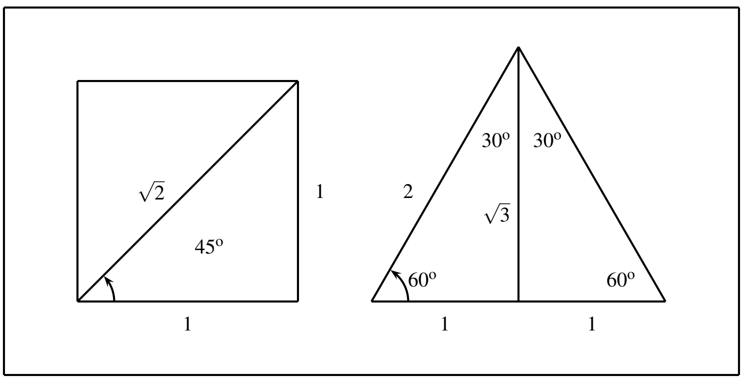


FIGURA N° 8.7

Así:

$$Cos\ 45^{o} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$Sen\ 45^{o} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$Cos\ 60^{o} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$
$$Sen\ 60^{o} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Cos\ 30^{o} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Sen\ 30^{o} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{2}$$

Con el fin de representar gráficamente las funciones $Sen\,x$ y $Cos\,x$ se considerarán primero algunas propiedades que caracterizan sus gráficas.

Inicialmente, de la figura 8.8. se puede concluir que:

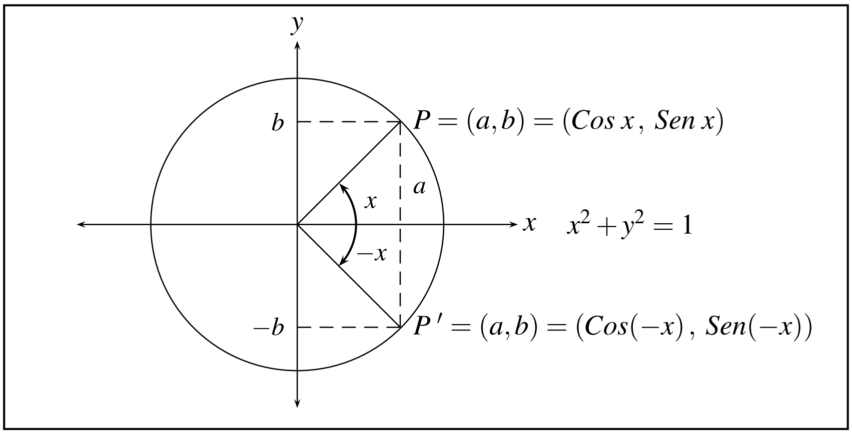


FIGURA Nº 8.8

$Cos\,(-x) = a = Cos\,(x)$
$Sen\,(-x) = -b = -Sen\,(x)$

Este tipo de simetrías no solamente se cumplen para las funciones $Sen\,x$ y $Cos\,x$, sino para muchas otras funciones y reciben el nombre de:

Función par. Si $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in D_f$
Función impar. Si $f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in D_f$

La característica principal de las funciones pares es que si el punto (x,y) pertenece a la gráfica de la función, entonces el punto $(-x,y)$ también debe pertenecer; es decir, la curva es simétrica respecto al eje y. En caso de las funciones impares, si un punto (x,y) pertenece a la gráfica de la función, el punto $(-x,-y)$ también pertenece, lo que se puede expresar diciendo que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

Ejemplo

$f(x) = x^2; \qquad g(x) = |x|; \qquad h(x) = c$ son funciones pares, ya que:
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
$g(-x) = |-x| = |x| = g(x)$
$h(-x) = c = h(x)$

observe en la figura 8.9. su simetría respecto al eje y.

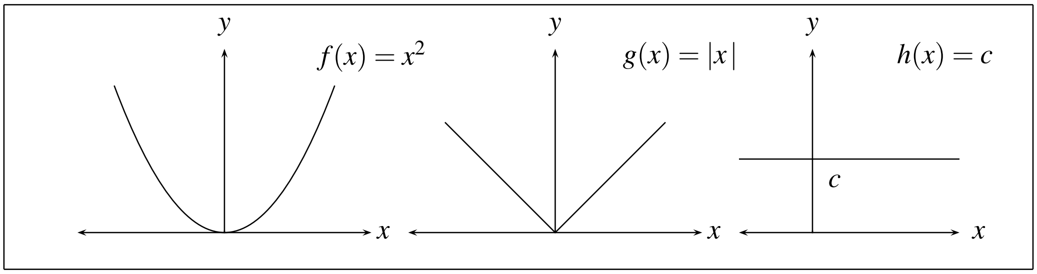


FIGURA N° 8.9

Ejemplo

$f(x) = x;$ $\quad g(x) = x^3$ $\quad$ son funciones impares
pues $\quad f(-x) = -x = -f(x)$ y
$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$

Observe en la figura 8.10 su simetría respecto al origen.

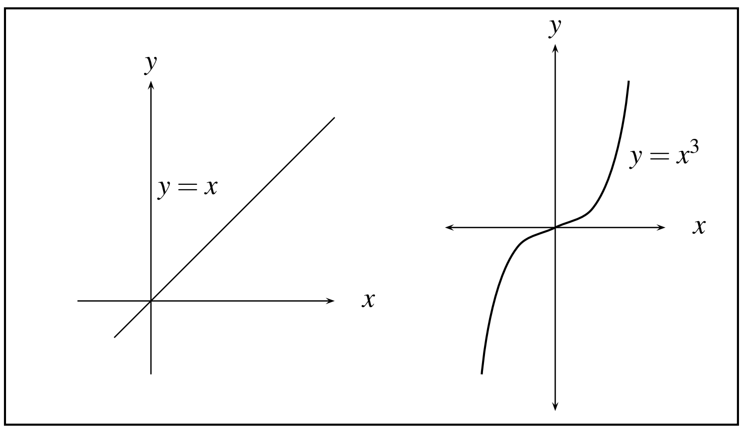


FIGURA N° 8.10

Por otra parte, observando las figuras 8.11.

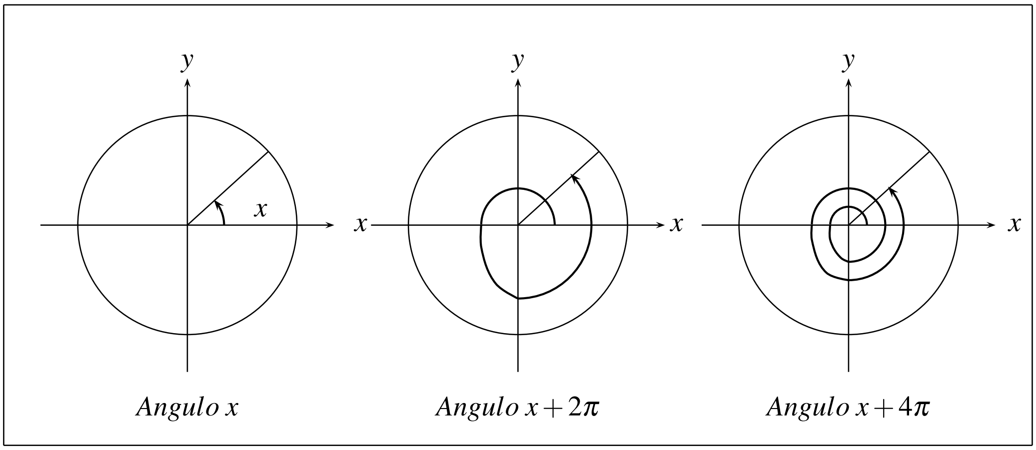


FIGURA N° 8.11

se puede apreciar que las coordenadas del punto de corte de la circunferencia unitaria con el lado final de los ángulos $x,\ x+2\pi,\ x+4\pi$ y en general $x+2n\pi,\ n\in N$ son las mismas, lo cual implica que:

$$Sen\,x = Sen\,(x+2\pi) = Sen(x+4\pi) = \ldots = Sen\,(x+2n\pi) \text{ y}$$

$$Cos\,x = Cos\,(x+2\pi) = Cos\,(x+4\pi) = \ldots = Cos\,(x+2n\pi) \text{ con } n\in Z$$

Todas las funciones que tienen una característica similar a ésta se conocen con el nombre de funciones periódicas, más concretamente:

Una función $f(x)$ se dice que es **Periódica**, si existe un número real $T>0$, tal que $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D_f$. Además cualquier número T que satisfaga esta condición se le llama Período de f y al menor de estos valores de $T>0$, se le llama período fundamental de $f(x)$.

La gráfica de una función periódica con período $T>0$ se caracteriza porque la parte de ella que aparece en cualquier intervalo de longitud T, por ejemplo $(\alpha,\alpha+T)$ se repite en el siguiente intervalo de longitud T, es decir, en $(\alpha+T,\alpha+2T)$ y en el siguiente $(\alpha+2T,\alpha+3T)$ y así sucesivamente.

Ejemplo

La función $y = Sen\,x$ tiene como período $2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ \ldots,2n\pi,\ n\in N$ y como período fundamental 2π. Por tanto la parte de la gráfica correspondiente al intervalo $[0,2\pi]$ se repite en los intervalos $[2\pi,4\pi],\ [4\pi,6\pi],\ \ldots$ etc y $[-2\pi,0],\ [-4\pi,-2\pi],\ \ldots$ etc.

Con esta característica, y teniendo en cuenta que además es una función impar, que su dominio es R y su recorrido $[-1,1]$ y hallando valores en forma similar a como se hizo en los ejemplos anteriores, se puede trazar su gráfica. (Figura 8.12).

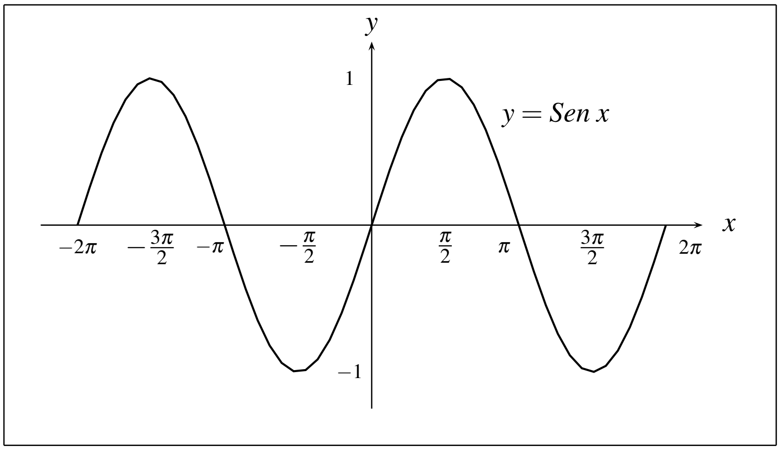


FIGURA N° 8.12

Observe que $Sen\,x = 0$ si $x = n\pi$ para todo $n \in Z$

Ejemplo

En forma análoga, la función $y = Cos\,x$ resulta ser periódica con período $2\pi,\ 4\pi,\ \ldots,\ 2n\pi$ con $n \in N$ y período fundamental 2π y su gráfico se puede apreciar en la figura 8.13. (Observe por su simetría, que esta función es par).

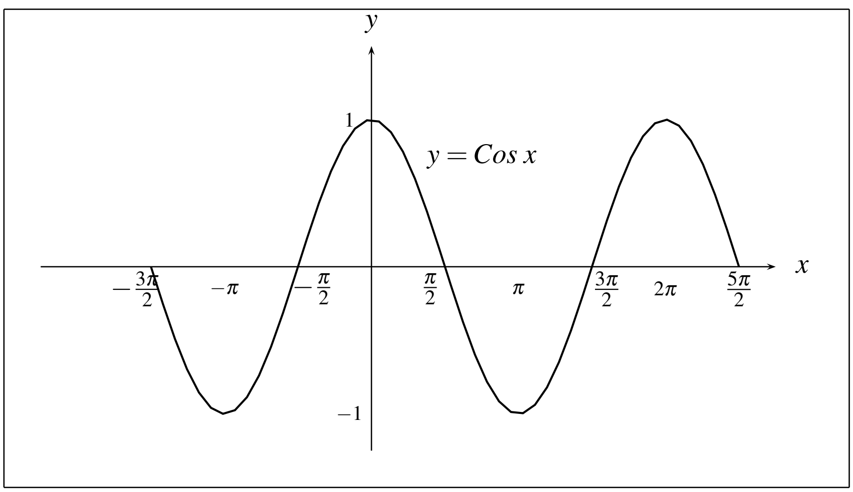


FIGURA N° 8.13

Observe que $Cos\,x = 0$ si $x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ para todo $n \in Z$

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [2n, 2n+1], \quad n \in Z \\ -1 & \text{si } x \in [2n-1, 2n], \quad n \in Z \end{cases}$$

Es una función periódica con período $T = 2$ (Figura 8.14).

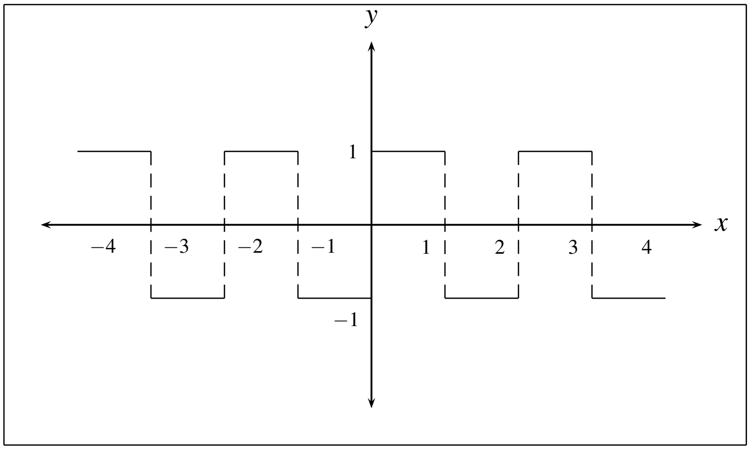


FIGURA N° 8.14

A partir de las funciones *Sen x* y *Cos x* se definirán otras cuatro funciones trigonométricas de gran interés, las cuales se presentarán, junto con algunas características fundamentales que se deducen de las propiedades dadas para las funciones seno y coseno, y con sus gráficas. Se espera que el lector demuestre estas características y justifique sus gráficas.

8.2.1. Función Tangente

$$f(x) = Tan\,x = \frac{Sen\,x}{Cos\,x}$$
$$D_f = R - \left\{ \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi,\ \ n \in Z \right\}$$

pues los puntos donde $Cos\,x = 0$ no pertenecen al dominio de la tangente, y esos puntos como se vio son de la forma $\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$

$$R_f = R$$

pues observe que cuando x esta proxima a $\frac{\pi}{2}$, $Cos\,x$ esta proxima a cero y $\frac{Sen\,x}{Cos\,x}$ sera grande positivo o muy grande negativo.

Función impar, pues $Tan\,(-x) = \frac{Sen\,(-x)}{Cos\,(-x)} = -\frac{Sen\,x}{Cos\,x} = -Tan\,x$

Función periódica de período fundamental π, es decir, $Tan\,(x+\pi) = Tan\,x$, pues $Sen\,(x+\pi) = -Sen\,x$ y $Cos\,(x+\pi) = -Cos\,x$ entonces $Tan\,(x+\pi) = \frac{Sen\,(x+\pi)}{Cos\,(x+\pi)} = \frac{-Sen\,x}{-Cos\,x} = \frac{Sen\,x}{Cos} = Tan\,x$ lo cual se puede apreciar en la figura 8.15.

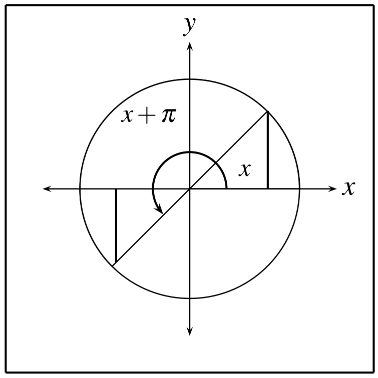


FIGURA N° 8.15

Para una mejor comprensión de la gráfica de la función tangente, figura 8.16, complétese la siguiente tabla

x	0	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$	$\pm 3\pi/4$	$\pm 3\pi/2$	$\pm 7\pi/4$	$\pm 2\pi$
$Tan\,x$									

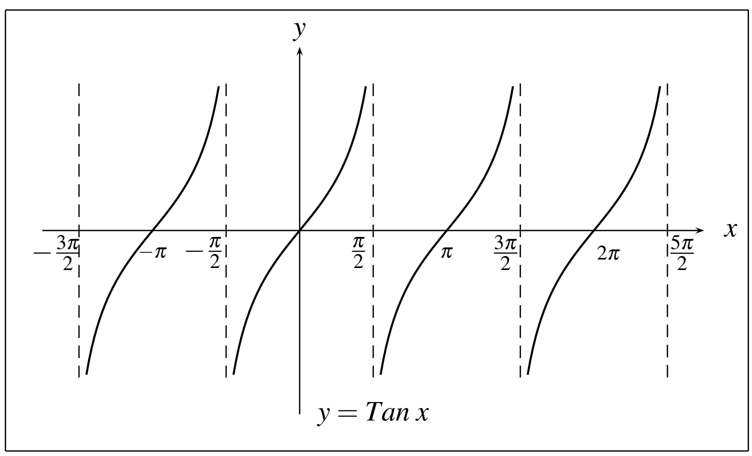


FIGURA N° 8.16

8.2.2. Función Cotangente

$$f(x) = Cot\ x = \frac{Cos\ x}{Sen\ x}$$

Con análisis similares a los desarrollados con la tangente se tiene que:

$$D_f = R - \{n\pi \mid n \in Z\}$$

$$R_f = R$$

Función impar.

Función periódica de período fundamental $T = \pi$.

Para una mejor comprensión de la gráfica de la función cotangente figura 8.17. complétese la siguiente tabla

x	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$	$\pm 3\pi/4$	$\pm 3\pi/2$	$\pm 7\pi/2$	$\pm 2\pi$
$Cot\, x$									

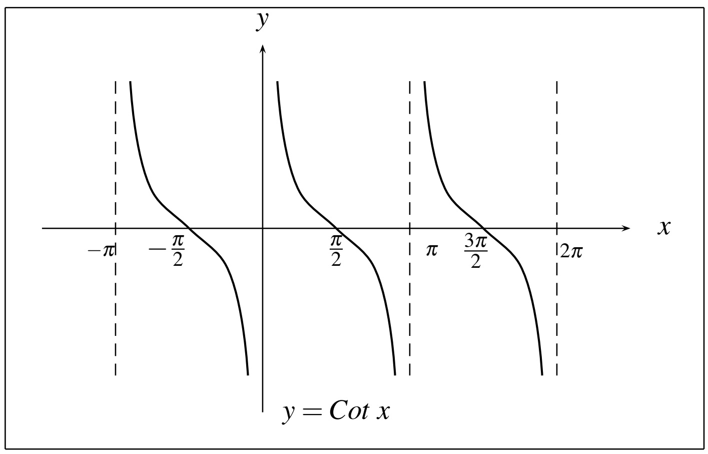


FIGURA N° 8.17

8.2.3. Función Secante

$$f(x) = Sec\, x = \frac{1}{Cos\, x}$$
$$D_f = R - \left\{ \left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi, \;\; n \in Z \right\}$$
$$R_f = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +8)$$

Función par.

Función periódica de período fundamental $T = 2\pi$.

Para una mejor comprensión de la gráfica de la función secante figura 8.18. complétese la siguiente tabla.

x	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/2$	$\pm 3\pi/4$	$\pm\pi$	$\ldots$	$\pm 2\pi$
$Sec\,x$								

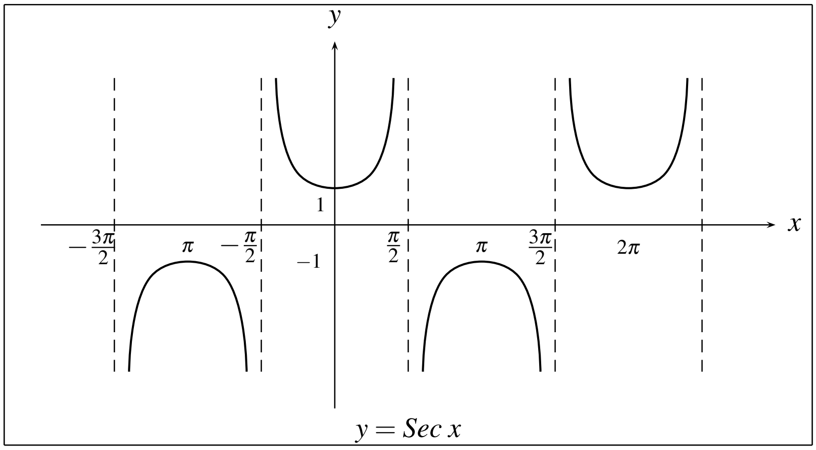


FIGURA N° 8.18

8.2.4. Función Cosecante

$$f(x) = Csc\,x = \frac{1}{Sen\,x}$$
$$D_f = R - \{n\pi \mid n \in Z\}$$
$$R_f = (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +8)$$

Función impar.

Función periódica de período fundamental $T = 2\pi$.

Para una mejor comprensión de la gráfica de la función cosecante figura 8.19. complétese la siguiente tabla.

x	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$	$\ldots$	$\pm 2\pi$
$Csc\,x$							

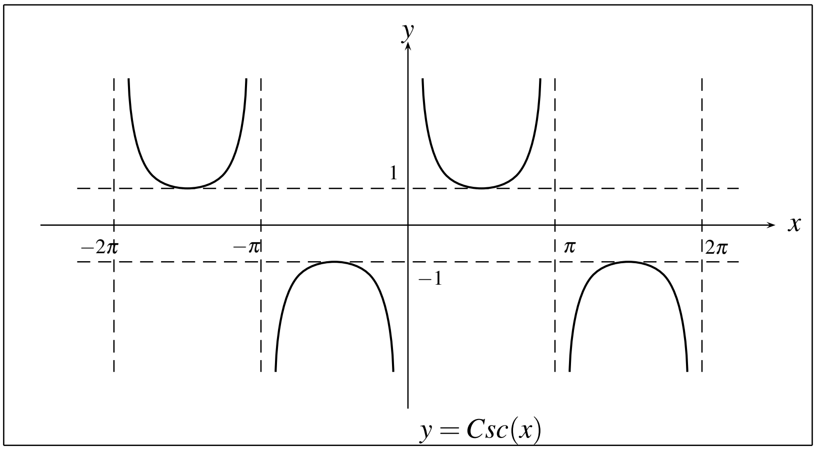


FIGURA N° 8.19

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de todas las funciones trigonométricas en los siguientes ángulos:

$$\pm\, 150^\circ,\ \pm\, 600^\circ,\ \pm\, 300^\circ,\ \pm\, 540^\circ,\ \pm\, 450^\circ,\ \pm\, 900^\circ,\ \pm\, 810^\circ$$

$$\pm\, 10\pi/3,\ \pm\, 7\pi,\ \pm\, 20\pi/3,\ \pm\, 10\pi,\ \pm\, 45\pi,\ \pm\, 16\pi,\ (radianes).$$

2. Usando calculadora, encontrar el valor de:

$$Sen\ 200,\ Sen\ 200^\circ,\ Sen\ 1,\ Sen\ 1^\circ,\ Cos\,3,\ Cos\,3^\circ,\ Cos\,(-3450).$$

$$Sen\ (8750),\ Sec(2120^\circ),\ Sec(2120),\ Tan\,(350),\ Cot(\pm 2520),$$

3. Encuentre midiendo sobre un gráfico el equivalente en radianes de seno y coseno de:

   a) 100^{o}

   b) -25^{o}

   c) 205^{o}

   d) -110^{o}

4. A partir de sus definiciones determine el signo de todas las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.

5. Recuerde que de las definiciones de las funciones seno y coseno se dedujo que de acuerdo con la figura 8.20.

$$Cos\,x = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} \qquad \text{y} \qquad Sen\,x = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

   Demuestre resultados análogos para las demás funciones trigonométricas.

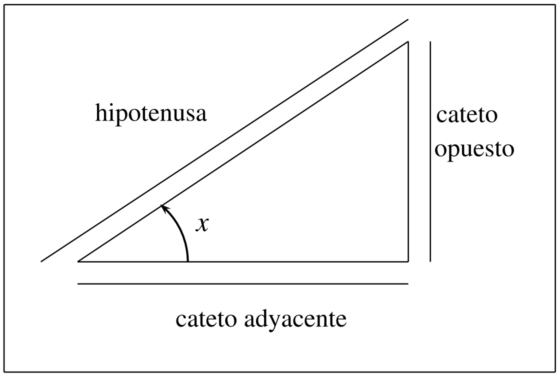


FIGURA N° 8.20

6. Con los mismos triángulos utilizados para hallar Sen , Cos de 30º , 45º y 60º y con los resultados del ejercicio anterior halle Tan, Cot, Sec y Csc de estos ángulos

7. *a*) Demostrar que las funciones $f(x) = Cos\ Mx$ y $g(x) = Sen\ Mx$, tienen período $T = \dfrac{2\pi}{M}$

   b) Halle el periodo de:

   i. $f(x) = Sen\ \ 2\pi x$
   ii. $f(x) = Cos\ \ \pi x$
   iii. $f(x) = Tan\ \dfrac{\pi x}{3}$
   iv. $f(x) = Cos\ \ 32x$
   v. $f(x) = Sen\ \ \dfrac{x}{T}$

8. Trazar el gráfico de las funciones:

   a) $f(x) = Sen\ 2x$
   b) $g(x) = Sen\ \left(\dfrac{x}{2}\right)$
   c) $h(x) = Cos\ 3x$
   d) $j(x) = Cos\ \left(\dfrac{2x}{3}\right)$
   e) $l(x) = Tan\ \left(\dfrac{x}{3}\right)$
   f) $k(x) = Sec\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

9. Cuál es el período fundamental para las funciones:

   a) $f(x) = Tan\ (ax)$?
   b) $g(x) = Cot\ (bx)$?
   c) $q(x) = Sec\ (bx)$?

8.3. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

De la definición de las funciones $Sen\, x$ y $Cos\;\; x$, puesto que el punto $(Cos\;\; x\,,\; Sen\;\; x)$ está sobre la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$, debe satisfacer esta ecuación; resultado que representa la identidad fundamental:

1. $Sen^{\,2}x\, +\, Cos^{\,2}x\, =\, 1$

   entendiendo por identidad trigonométrica una igualdad entre expresiones trigonométricas que se cumple para todo ángulo (en grados o en radianes) que se encuentre en el dominio de todas las funciones que intervengan en ella.

   A partir de esta identidad, dividiendo entre $Sen^{\,2}x$ y $Cos^{\,2}x$, se obtienen respectivamente las siguientes dos identidades:

2. $Cot^{\,2}x\, +\, 1\, =\, Csc^{\,2}x$
3. $1\, +\, Tan^{\,2}\, x\, =\, Sec^{\,2}x$

En las figuras 8.21 se puede apreciar que:

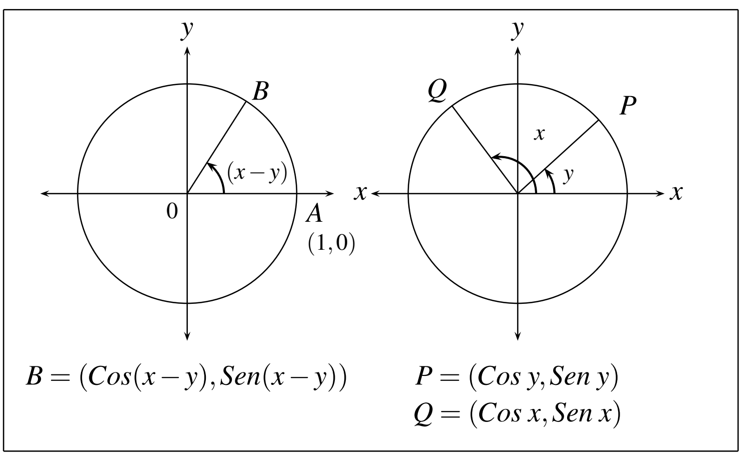


FIGURA N° 8.21

El triángulo OAB es semejante al triángulo 0PQ, pues es simplemente una rotación de éste, por tanto:

$$d(P\,,\,Q) = d(A\,,\,B)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow [d(P,Q)]^2 = [d(A,B)]^2 \\
&\Rightarrow (Cos\,x - Cos\,y)^2 + (Sen\,x - Sen\,y)^2 = [Cos\,(x-y) - 1]^2 + [Sen\,(x-y) - 0]^2 \\
&\Rightarrow Cos^2x - 2Cos\,x Cos\,y + Cos^2y + Sen^2x - 2Sen\,x\,Sen\,y + Sen^2y = \\
&\qquad = Cos^2(x-y) - 2Cos\,(x-y) + 1 + Sen^2(x-y) \\
&\Rightarrow 2 - 2Cos\,x\,Cos\,y - 2Sen\,x\,Sen\,y = 2 - 2Cos\,(x-y) \\
&\Rightarrow Cos\,(x-y) = Cos\,x\,Cos\,y + Sen\,x\,Sen\,y
\end{aligned}
$$

y así:

4. $Cos\,(x-y) = Cos\,x\,Cos\,y + Sen\,x\,Sen\,y$

   A partir de esta identidad se pueden demostrar las siguientes identidades:

5. $Cos\,(x-\pi/2) = Sen\,x$

6. $Sen\,(x-\pi/2) = -Cos\,x$

   En efecto:

$$
\begin{aligned}
Sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= Cos\left(x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(\text{Propiedad 5 tomando } x - \frac{\pi}{2} \text{ en lugar de } x\right) \\
&= Cos\,(x-\pi) = Cos\,x\,Cos\,\pi + Sen\,x\,Sen\,\pi = -Cos\,x
\end{aligned}
$$

7. $Sen\,x\,(x-y) = Sen\,x\,Cos\,y - Cos\,x\,Sen\,y$

   De la propiedad 5 se sabe:

$$Sen\,(x-y) = Cos\left(x - y - \frac{\pi}{2}\right)$$

   luego

$$
\begin{aligned}
Sen\,(x-y) = Cos\left((x-y) - \frac{\pi}{2}\right) &= Cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - y\right) \\
&= Cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) Cos\,y + Sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) Sen\,y \\
&= Sen\,x\,Cos\,y - Cos\,x\,Sen\,y
\end{aligned}
$$

8. $Cos\,(x+y) = Cos\,x\,Cos\,y - Sen\,x\,Sen\,y$

   En efecto:

$$
\begin{aligned}
Cos\,(x+y) = Cos\,(x-(-y)) &= Cos\,x\,Cos\,(-y) + Sen\,x\,Sen\,(-y) \\
&= Cos\,x\,Cos\,y - Sen\,x\,Sen\,y
\end{aligned}
$$

9. $Sen\ (x+y) = Sen\ x\, Cos\ y + Sen\ y\, Cos\ x$

Su demostración es análoga a la de la identidad (8) partiendo de la identidad (7).

10. $Cos\ 2x = Cos\ ^2x - Sen\ ^2x.$

Para su demostración basta con hacer $x = y$ en la identidad (8)

11. $Sen\ 2x = 2\ Sen\ \ x\, Cos\ x.$

Demostración análoga a (10.)

12. $Cos^2x = \dfrac{1+Cos\ 2x}{2}$

En efecto:

$$\frac{1+Cos\ 2x}{2} = \frac{1+(Cos\ ^2x - Sen\ ^2x)}{2} = \frac{(1-Sen\ ^2x)+Cos\ ^2x}{2} = \frac{Cos\ ^2x + Cos\ ^2x}{2} = Cos\ ^2x$$

13. $Sen\ ^2x = \dfrac{1-Cos\ 2x}{2}.$

Demostración análoga a la de la identidad (12)

14. $Cos\ ^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+Cos\ x}{2}.$

Para su demostración basta sustituir x por $x/2$ en la identidad (12)

15. $Sen\ ^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-Cos\ x}{2}.$

Demostración análoga a (14)

16. $Cos\ x\, Cos\ y = \dfrac{1}{2}\big(Cos\ (x+y) + Cos\ (x-y)\big)$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}Cos\ (x+y) + \frac{1}{2}Cos\ (x-y)\\
&= \frac{1}{2}\big(Cos\ x\, Cos\ y - Sen\ x\, Sen\ y\big) + \frac{1}{2}\big(Cos\ x\, Cos\ y + Sen\ x\, Sen\ y\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(Cos\ x\, Cos\ y - Sen\ x\, Sen\ y + Cos\ x\, Cos\ y + Sen\ x\, Sen\ y\big) = Cos\ x\, Cos\ y
\end{aligned}$$

17. $Sen\ xCos\ y = \dfrac{1}{2}\big(Sen\ (x+y) + Sen\ (x-y)\big).$

Demostración análoga a (16)

18. $Sen\,x Sen\,y = \frac{1}{2}\big(Cos\,(x-y) - Cos\,(x+y)\big).$

Demostración análoga a (16)

19. $Sen\,x + Sen\,y = 2\,Sen\left(\frac{x+y}{2}\right)Cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$

En efecto:

$$Sen\,\big(A+B\big) + Sen\,\big(A-B\big) = 2\,Sen\,A\,Sen\,B \quad \text{(Propiedad 17).}$$

$$\text{Sea} \quad x = A+B, \quad y = A-B,$$
$$\text{entonces} \quad \frac{x+y}{2} = A \quad \text{y} \quad \frac{x-y}{2} = B, \quad \text{y así}$$
$$Sen\,x + Sen\,y = 2\,Sen\left(\frac{x+y}{2}\right)Cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

20. $Sen\,x - Sen\,y = 2Cos\left(\frac{x+y}{2}\right)Sen\left(\frac{x-y}{2}\right).$

Demostración análoga a (19)

21. $Cos\,x + Cos\,y = 2Cos\left(\frac{x+y}{2}\right)Cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$

Demostración análoga a (19)

22. $Cos\,x - Cos\,y = 2Sen\left(\frac{x+y}{2}\right)Sen\left(\frac{y-x}{2}\right).$

Demostración análoga a (19)

23. $Tan\,(x+y) = \dfrac{Tan\,x + Tan\,y}{1 - Tan\,x\,Tan\,y}$

En efecto:

$$Tan\,(x+y) = \frac{Sen\,(x+y)}{Cos\,(x+y)} = \frac{Sen\,x\,Cos\,y + Cos\,x\,Sen\,y}{Cos\,x\,Cos\,y - Sen\,x\,Sen\,y} = \frac{\dfrac{Sen\,x Cos\,y + Cos\,x Sen\,y}{Cos\,x Cos\,y}}{1 - \dfrac{Sen\,x Sen\,y}{Cos\,x Cos\,y}}$$
$$= \frac{Tan\,x + Tan\,y}{1 - Tan\,x Tan\,y}$$

24. $Tan\,(x-y) = \dfrac{Tan\,x - Tan\,y}{1 + Tan\,x\,Tan\,y}.$

Demostración análoga a (23)

25. $Cot(x+y) = \dfrac{Cot x \, Cot y - 1}{Cot y + Cot x}$.

    Demostración análoga a (23)

26. $Tan\ 2x = \dfrac{2\ Tan\ x}{1 - Tan^{\,2} x}$.

    Para su demostración haga $x = y$ en (23)

27. $Cot 2x = \dfrac{Cot^2 x\ - 1}{2\, Cot x}$.

    Demostración análoga a (26)

Usando las identidades anteriores es posible demostrar otras identidades menos conocidas.

Ejemplo

$Tan\ x + Tan\ y = \dfrac{Sen\ (x+y)}{Cos\ x\, Cos\ y}$

En efecto:

$$Tan\ x + Tan\ y = \frac{Sen\ x}{Cos\ x} + \frac{Sen\ y}{Cos\ y} = \frac{Sen\ x\, Cos\ y + Cos\ x\, Sen\ y}{Cos\ x\, Cos\ y} = \frac{Sen\ (x+y)}{Cos\ x\, Cos\ y}$$

Análogamente se pueden demostrar las identidades:

$$Tan\ x - Tan\ y = \frac{Sen\ (x-y)}{Cos\ x\, Cos\ y}$$
$$Cot x\ \pm\ Cot y = \frac{Sen\ (y\ \pm\ x)}{Sen\ x\, Sen\ y}$$

Ejemplo

$$Sen\ 3x = 3\ Sen\ x - 4\ Sen^{\,3} x$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Sen\ 3x &= Sen\ (x+2x) \\ &= Sen\ x\, Cos\ 2x + Cos\ x\, Sen\ 2x \\ &= Sen\ x\big(Cos^{\,2} x - Sen^{\,2} x\big) + 2Cos\ x\, Cos\ x\, Sen\ x \\ &= Sen\ x(1 - 2\, Sen^2\ x) + 2\, Sen\ x(1 - Sen^2\ x) \\ &= Sen\ x - 2\ Sen^{\,3} x + 2\ Sen\ x - 2\ Sen^{\,3} x \\ &= 3\ Sen\ x - 4\ Sen^{\,3} x \end{aligned}$$

Ejemplo

$$Cos^{\,4}x - Sen^{\,4}x = 2\,Cos^{\,2}x - 1$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Cos^{\,4}x - Sen^{\,4}x &= \left(Cos^{\,2}x - Sen^{\,2}x\right)\left(Cos^{\,2}x + Sen^{\,2}x\right) \\ &= Cos^{\,2}x - Sen^{\,2}x = Cos^{\,2}x - \left(1 - Cos^{\,2}x\right) \\ &= 2Cos^{\,2}x - 1 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Deducir identidades para las funciones trigonométricas en forma analítica y geométrica de los ángulos:

   a) $90^\circ \pm x$
   b) $180^\circ \pm x$
   c) $270^\circ \pm x$
   d) $360^\circ \pm x$

2. Verificar las siguientes igualdades:

   a) Si $Tan\,x = 1/2$, $\quad Tan\,y = 1/3$, $\quad x,\ y$ ángulos agudos, entonces $Tan(x+y) = 1$
   b) $Tan\ 15^{o} = 2 - \sqrt{3}$
   c) Si $Sen\ \ x = 2/3$, $\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $Sen\ \ 2x = (4/9)\sqrt{5}$
   d) Si $Sen\ \ x = 3/4$, $\ 0 < x < 90^{o}$ entonces $Cos\ \ 2x = -1/8$
   e) $Tan(\pi/8) = \frac{2\,Tan(\pi/16)}{1 - Tan^2(\pi/16)}$
   f) Si $Tan\,x/2 = 2$, entonces $Sen\ \ x = 4/5$
   g) $Sen\ \ 40^{o} + Sen\ \ 50^{o} = \sqrt{2}\,Cos\ \ 5^{o}$
   h) $Sen\ \ 75^{o} - Sen\ \ 15^{o} = \sqrt{2}/2$
   i) $Tan\ \ 75^{o} - Tan\ 15^{o} = 2\sqrt{3}$
   j) $Sen\ \ 15^{o} = (\sqrt{2}/4)(\sqrt{3} - 1)$
   k) $Sen\ \ 40^{o}\ Cos\ \ 30^{o} = 1/2(Sen\ \ 70^{o} + Sen\ \ 10^{o})$

3. Demuestre las siguientes identidades:

   a) $\dfrac{Sen\ \ 4x + Sen\ \ 2x}{Cos\ \ 4x + Cos\ \ 2x} = Tan\,3x$
   b) $\dfrac{Sen\ \ x - Sen\ \ y}{Sen\ \ x + Sen\ \ y} = \dfrac{Tan(\frac{x-y}{2})}{Tan(\frac{x+y}{2})}$
   c) $1 + Cos\ \ 2x + Cos\ \ 4x + Cos\ \ 6x = 4\,Cos\,x\,Cos\,2x\,Cos\,3x$

d) $2\,Csc\,x = \dfrac{Sen\ x}{1+Cos\ x} + \dfrac{1+Cos\ x}{Sen\ x}$

e) $\dfrac{Sec\,x - Csc\,x}{Sec\,x + Csc\,x} = \dfrac{Tan\,x-1}{Tan\,x+1}$

f) $Cos^2\,x\,Sen^4\,x = 1/32(2-Cos\ 2x - 2\,Cos\ 4x + Cos\ 6x)$

g) $\dfrac{Cos\ x + Sen\ x}{Cos\ x - Sen\ x} = Tan\,2x + Sec\,2x$

h) $Cos^4\,x = 3/8 + (1/2)Cos\ 2x + (1/8)Cos\ 4x$

i) $Sen\,(x+y)\,Cos\ y - Cos\,(x+y)\,Sen\ y = Sen\ x$

j) $Cos^2\,x\,Sen^2\,x = 1/8(1-Cos\ 4x)$

k) $\dfrac{1+Sen\ x}{Cos\ x} + \dfrac{Cos\ x}{1+Sen\ x} = 2\,Sec\,x$

l) $\dfrac{Sen^2\,x + 2Sen\ x + 1}{Cos^2\,x} = \dfrac{1+Sen\ x}{1-Sen\ x}$

m) $Tan\,x\,Sen\ x + Cos\ x = Sec\,x$

n) $\dfrac{Sec^4\,x - 1}{Tan^2\,x} = 2 + Tan^2\,x$

8.4. FUNCIONES INVERSAS

Para el estudio que se hará de funciones trigonométricas inversas y en general de funciones inversas, es necesario inicialmente distinguir un tipo particular de funciones: las llamadas *Funciones Inyectivas.* Entre las funciones, hay algunas en las cuales, para dos o más valores de x en su dominio, se le asocia un mismo valor de su recorrido, por ejemplo para $f(x) = x^2$, a los números3 y -3 se les asocia por medio de f el mismo número (9), y existen otras para las cuales valores diferentes de x en el dominio de f, siempre tienen imágenes diferentes, estas últimas funciones se llaman ***funciones inyectivas*** ó uno a uno, y su gráfica, para el caso de reales en reales, se caracteriza porque cualquier recta horizontal que la corte lo hace en un solo punto.

Resumiendo:

Definición

Una función f se dice inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejemplo

i. Las funciones $f(x) = |x|$; $g(x) = x^2$; $h(x) = Sen\,x$ no son inyectivas; pues por ejemplo:

$$f(2) = f(-2) = 2$$
$$g(3) = g(-3) = 9$$
$$h(\pi) = h(2\pi) = 0$$

observando sus gráficas se puede apreciar que existen rectas horizontales que les cortan en mas de un punto.

ii. Las funciones $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 4x$; $h(x) = Tan\,x$ con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ y

$$l(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Son funciones inyectivas (con sus gráficas se puede justificar esta afirmación).

Suponga que en la ecuación $f(x) = b$ se pretende despejar x. Observe que si existe una función g, tal que $g(f(x)) = x \ \forall x \in D_f$ y tal que b esté en el dominio de g, entonces al aplicar esta función a la ecuación, se obtiene: $g(f(x)) = g(b)$, es decir, $x = g(b)$, logrando así, despejar x.

Dos interrogantes surgen al analizar este problema. ¿Qué se debe exigir a f para que exista esta función g?. Dada f,cómo se construye esta función g?.

Para resolver el primer interrogante, observe que si la función f no fuese inyectiva, entonces existirían por lo menos dos valores x_1, $x_2 \in D_f$ con su misma imagen, llamémosla c, entonces $f(x_1) = c$ y $f(x_2) = c$. Si existiera la función g con la propiedad descrita atrás, es decir, $g(f(x)) = x$ para todo $x \in D_f$, entonces $x_1 = g(f(x_1)) = g(c)$ y $x_2 = g(f(x_2)) = g(c)$, lo que significaría que c por medio de g tendría dos imágenes diferentes x_1 y x_2, por tanto g no sería una función. Esto implica que necesariamente para que exista la función g, se debe exigir que f sea una función inyectiva.

Para responder el segundo interrogante, obsérvese primero que, puesto que g se va a calcular a los dos lados de la ecuación $f(x) = b$, entonces debe estar definida en el recorrido de f, pues $b \in R_f$, por tanto $D_g = R_f$. Ahora, ¿Qué es $g(b)$?. Puesto que $b \in R_f$ y f es inyectiva, existe un único a para el cual $f(a) = b$, y ese a precisamente define a $g(b)$: $g(b) = a$. En la figura 8.22 se ilustra este resultado mediante un diagrama:

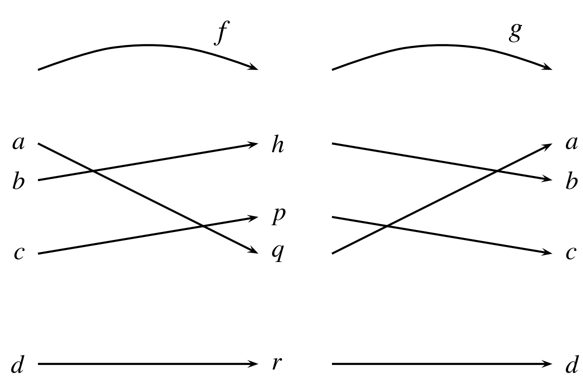


FIGURA N° 8.22

$$f(a) = q; \quad g(q) = a; \quad f(g(q)) = f(a) = q; \quad g(f(a)) = g(q) = a$$

$$f(b) = h; \quad g(h) = b; \quad f(g(h)) = f(b) = h; \quad g(f(b)) = g(h) = b$$
$$f(c) = p; \quad g(p) = c; \quad f(g(p)) = f(c) = p; \quad g(f(c)) = g(p) = c$$
$$f(d) = r; \quad g(r) = d; \quad f(g(r)) = f(d) = r; \quad g(f(d)) = g(r) = d$$

A la función g construida de esta forma se le llama la ***función inversa*** de f y se nota por f^{-1}. Más exactamente:

Definición

Dada una función inyectiva f, se llama ***la inversa de f*** a una función notada f^{-1} con $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$, tal que

$$f^{-1}(f(x)) = x \forall x \in D_f \qquad \text{y} \qquad f\left(f^{-1}(x)\right) = x \forall x \in D_{f^{-1}}$$

Ejemplo

Sea $f(x) = 3x$, como f es inyectiva , entonces existe $f^{-1}(x)$, y ésta satisface que:
$x = f\left(f^{-1}(x)\right) = 3f^{-1}(x)$, y de aquí se tiene que, $f^{-1}(x) = x/3$. (Figura 8.23).

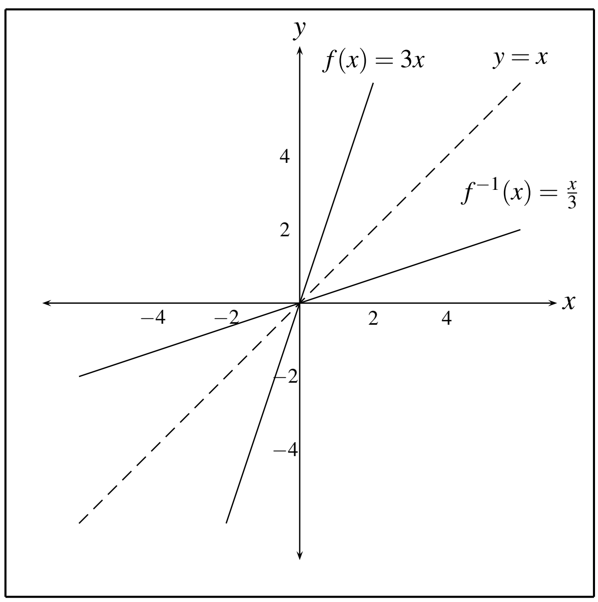


FIGURA N° 8.23

Observe que si se hubiese dado la ecuación $f(x) = 6$, es decir, $3x = 6$, y se aplicara a ambos lados de ésta la función f^{-1}, se tendría $f^{-1}(3x) = f^{-1}(6)$; entonces $f^{-1}(3x) = \dfrac{3x}{3} = f^{-1}(6) = \dfrac{6}{3}$ y así $3x = 6$, o $x = 2$ lo que ilustra, como se dijo anteriormente, que la función $f^{-1}(x)$ sirve para despejar x en una ecuación de la forma $f(x) = b$.

De la figura 8.23 se puede observar que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x$ y de su inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ son simétricas respecto a la recta $y = x$, relación que siempre se da entre las gráficas de una función y su inversa.

Ejemplo

Sea $y = 2x + 5$ como f es inyectiva existe $f^{-1}(x)$, por tanto:

$$
\begin{aligned}
x &= f\left(f^{-1}(x)\right) \\
&= 2f^{-1}(x) + 5 = x \\
2f^{-1}(x) &= \frac{x-5}{2} \\
f^{-1}(x) &= \frac{x-5}{2} \\
D_f^{-1} &= \mathbb{R} \\
R_f^{-1} &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$ con $x > 0$, como f es inyectiva existe $f^{-1}(x)$, por tanto:

$x = f\left(f^{-1}(x)\right) = \left[f^{-1}(x)\right]^2$ entonces $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$ (puesto que $R_{f^{-1}} = D_f = [0, +\infty)$ se descarta el signo $-$).

Sus gráficas se pueden apreciar en la Figura 8.24.

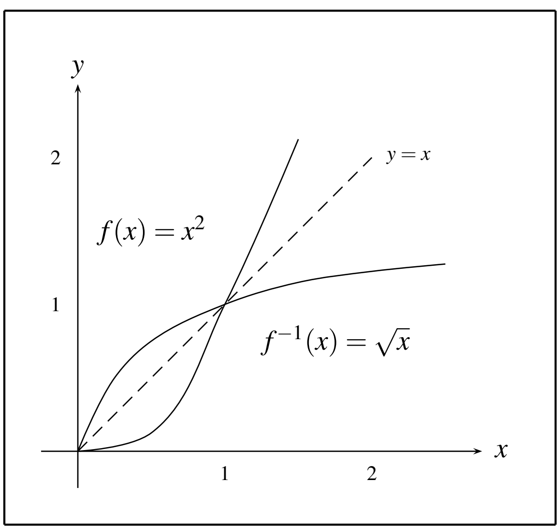


FIGURA N° 8.24

Ejemplo

Sea $f\,(x) = x^2 - 1$ con $x \leq -1$. Así $D_f = (-\infty, -1] = R_{f^{-1}}$. Como f es inyectiva , existe $f^{-1}\,(x)$ tal que $x = f\left(f^{-1}\,(x)\right) = \left[f^{-1}\,(x)\right]^2 - 1$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]^2 = x + 1$ y así $f^{-1}\,(x) = -\sqrt{x+1}$, donde el signo $-$aparece debido a que $R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, -1]$, o sea que $f^{-1}\,(x)$ siempre es negativo. Además, aunque dentro de los números reales f^{-1} tiene sentido para $x + 1 \geq 0$, es decir para $x \geq -1$, no se toma $[-1, +\infty)$ como su dominio, puesto que D_{f-1} debe ser igual a R_f y éste es igual a $[0, +\infty)$ ya que la x está restringida a $(-\infty, -1]$. Así: $D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty)$. (Figura 8.25).

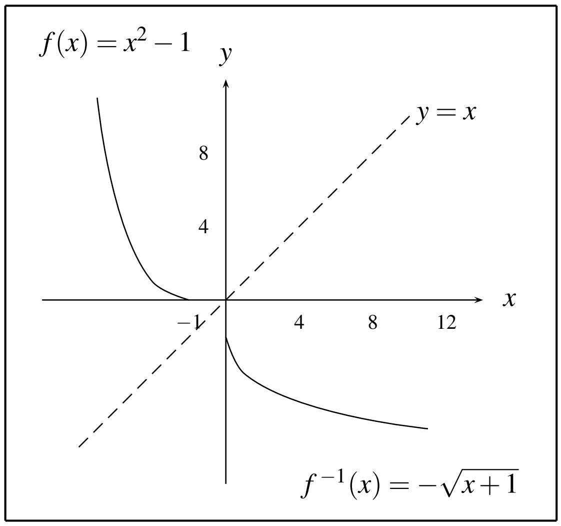


FIGURA N° 8.25

EJERCICIOS

1. Para las funciones siguientes:

   i. $f\,(x) = \sqrt{x}$
   ii. $f\,(x) = x^3$
   iii. $f\,(x) = 2x + 5$
   iv. $f\,(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, si $x < -2$
   v. $f\,(x) = x^2 - 4$, si $x < 0$

   a) Determinar si son o no inyectivas
   b) Halle la inversa cuando exista y verifique que $\left(f_0 f^{-1}\right)(x) = \left(f_0^{-1} f\right)(x) = x$
   c) Encuentre sus dominios y recorridos
   d) Trace sus gráficas

2. Las relaciones siguientes no son inyectivas. Restringiendo sus dominios encuentre funciones inyectivas. Halle sus inversas en estos dominios y trace sus gráficas.

   a) $y^2 = x^2$ *b*) $x^2 - y^2 = 4$ *c*) $x = |y|$
   d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ *e*) $y^2 = x - 1$ *f*) $|y| = x^2 - 1$

3. Justificar el cuadro siguiente.

Función	Restricción Dom de f	Recorrido de f	Dominio de f^{-1}	Recorrido de f^{-1}	Inversa
$f(x)=x^2$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
$f(x)=x^2$	$(-\infty,0]$	$[0,\infty]$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0]$	$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$
$f(x)=\sqrt{1-x^2}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$
$f(x)=+\sqrt{1-x^2}$	$[-1,0]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[-1,0]$	$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x^2}$
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$[0,+\infty)$	$(0,1]$	$(0,1]$	$[0,+\infty)$	$f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$
$f(x)=2x+1$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$	$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$

4. Llenar los espacios en blanco.

Función	Restricción Dom de f	Recorrido de f	Dominio de f^{-1}	Recorrido de f^{-1}	Inversa
$f(x)=(x+1)^2$	$[-1,+\infty)$				$f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$
$f(x)=x^5$					$f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$
$f(x)=x^6$					
$f(x)=3x-2$					

8.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

8.5.1. Inversa de Sen x

Como es conocido, la función $y = Sen\, x$ no es inyectiva, por tanto no tiene sentido hablar de su función inversa, sin embargo, puesto que en la práctica es frecuente tener que despejar x en ecuaciones de la forma $Sen\, x = b$, se hace necesario definir una inversa para $Sen\, x$, la cual no está definida para todo $x \in R$, sino solamente para una porción en la cual esta función sea inyectiva. De todas las porciones en donde esto se tiene, se acostumbra a tomar $x \in \left[-\pi/2\, ,\, \pi/2\right]$ (Figura 8.26).

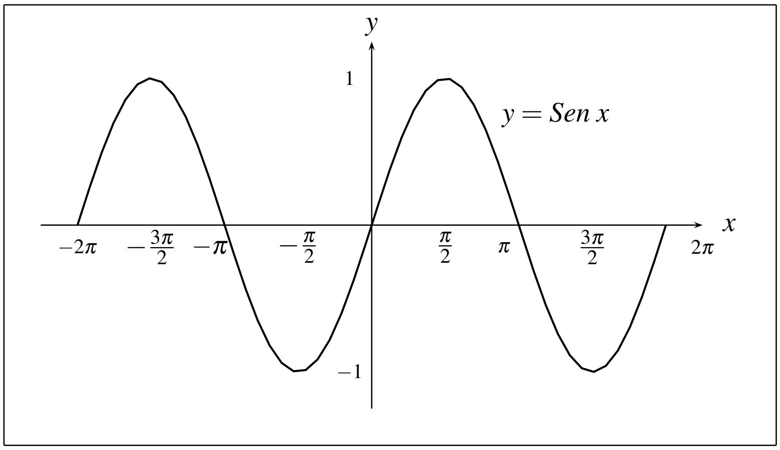


FIGURA N° 8.26

De la definición de función inversa se tiene que la función $Sen\,x$ con $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ tiene inversa $g\,(x)$, con $D_g = [-1\,,\,1]$ y $R_g = \left[-\pi/2\,,\,\pi/2\right]$ y tal que $g\,(Sen\,x) = x$ y $Sen\,(\,g\,(x)) = x$, la cual se nota por: $g\,(x) = ArcSen\,x$ ó $g\,(x) = Sen^{-1}x$; es decir, si:

$$y = ArcSen\;\; x,$$

aplicando a ambos lados la función *Sen* queda

$$Sen\;\; y = Sen\,(ArcSen\,x) = x$$

y recíprocamente si se da

$$x = Sen\,y$$

aplicando a ambos la dos la función *ArcSen* queda

$$ArcSen\,x = ArcSen\,(Sen\,y) = y$$

lo que permite concluir que:

$$y = ArcSen\,x \;\; \textbf{equivalente a} \;\; x = Sen\,y$$

así $Sen\,(ArcSen\,x) = x$ para $x \in [-1\,,\,1]$ y $ArcSen\,(Sen\,x) = x$ para $x \in \left[-\pi/2\,,\,\pi/2\right]$

Teniendo en cuenta la simetría respecto a la recta $y = x$, de una función y su inversa, de la figura 8.26 se tiene que $y = ArcSen\,x$ está representada gráficamente por (Figura 8.27).

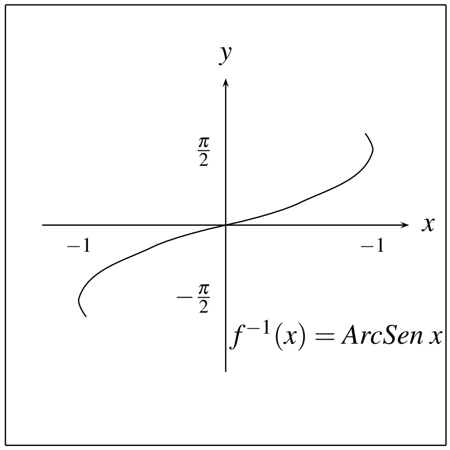


FIGURA N° 8.27

Recuerde que la función $ArcSen\, x$ no es la inversa de la función $Sen\, x$, sino de una parte de ella, la parte que corresponde a $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejemplos:

1. $ArcSen\left(\sqrt{2}\big/2\right) = \pi/4$, porque $Sen\,(\pi/4) = \sqrt{2}\big/2$
2. $ArcSen\,(-1) = -(\pi/2)$, porque $Sen\,(-\pi/2) = -1$
3. $ArcSen\,(Sen\,(\pi/4)) = \pi/4$
4. $ArcSen\,(Sen 2\pi) = ArcSen\,(Sen\, 0) = 0$, es decir, $ArcSen\,(Sen\, 2\pi)$ es el número en el intervalo $[-\pi/2\,,\, \pi/2]$ para el cual el seno toma el mismo valor que el $Sen\, 2\pi$, o sea 0.
5. $ArcSen\,(Sen\,(2\pi/3)) = ArcSen\,(Sen\,(\pi/3)) = \pi/3$
6. $Sen\left(ArcSen\left(\sqrt{2}\big/2\right)\right) = Sen\,(\pi/4) = \sqrt{2}\big/2$
7. $Sen\,(ArcSen\,(1/2)) = 1/2$
8. $Sen\,(ArcSen\, 4)$ no existe, pues $4 \notin [-1\,, 1]$.

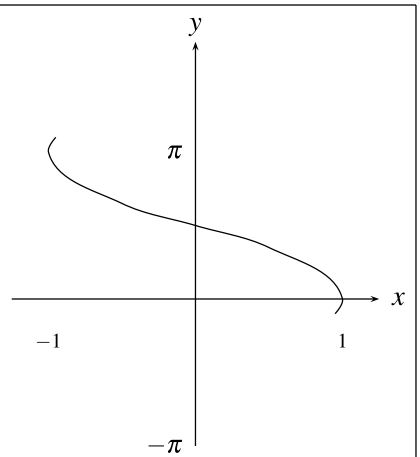
En forma análoga, puesto que las funciones $Cos\, x$, $Tan\, x$, $Cot\, x$, $Sec\, x$ y $Csc\, x$ no son inyectivas, tampoco se puede pensar en una inversa para cada una de ellas, pero en una forma similar a como se hizo con la función $y = Sen\, x$ se puede tomar una porción de ellas (restricción del dominio) de tal forma que estas funciones así restringidas sean inyectivas y por tanto tengan sus respectivas inversas en estos nuevos dominios.

A continuación se mostrarán las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas y sus inversas correspondientes.

8.5.2. Inversa de Cos x

En el caso de la función $Cos\,x$ para construir una inversa se acostumbra a tomar la parte inyectiva de $Cos\,x$ que corresponde al intervalo $[0,\pi]$ así:
Sea $f\,(x) = Cos\,x$ con $x \in [0\,,\pi]$. Puesto que $R_f, = [-1\,,1]$ entonces se define $f^{-1}\,(x) = ArcCos\,x = Cos^{-1}x$ como la función, con $D_{f^{-1}} = [-1\,,1]$ y $R_{f^{-1}} = [0\,,\pi]$, que satisface:

$$y = ArcCos\,x \quad \textbf{es equivalente a} \quad x = Cos\,y$$



$f^{-1}(x) = ArcCos\,x$

FIGURA N° 8.28

De la definición se puede concluir que

$Cos\,(ArcCos\,x) = x$ con $x \in [-1\,,1]$ y $ArcCos\,(Cos\,x) = x$ con $x \in [0\,,\pi]$.

8.5.3. Inversa de Tan x

Para el caso de la tangente se acostumbrara a tomar la rama que corresponde al intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ así:

Si $f\,(x) = Tan\,x$ con $x \in \left(-\pi/2\,,\pi/2\right)$, entonces $D_f = \left(-\pi/2,\pi/2\right)$, $R_f = R$, por tanto se define $f^{-1}\,(x) = ArcTan\,x = Tan^{-1}x$ como la función, con $D_{f^{-1}} = R$ y $R_{f^{-1}} = \left(-\pi/2\,,\pi/2\right)$, tal que:

$$y = ArcTan\,x \quad \textbf{equivalente a} \quad x = Tan\,y \quad \text{(figura 8.29)}$$

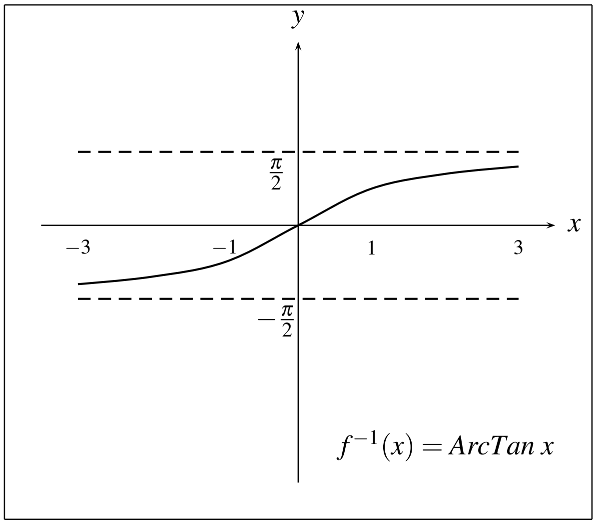


FIGURA N° 8.29

De la definición se concluye que

$Tan\,(ArcTan\, x) = x$ si $x \in R$ y $ArcTan\,(Tan\, x) = x$ si $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

8.5.4. Inversa de Cot x

Aquí se toma la parte inyectiva de $Cot\, x$ para $x \in [0, \pi]$ así:
Sea $f\,(x) = Cot\, x$ con $x \in (0\,, \pi)$, entonces $D_f = (0\,, \pi)$ y $R_f = R$, por tanto se define $f^{-1}\,(x) = ArcCot\, x = Cot^{-1}x$ como la función con $D_{f^{-1}} = R$ y $R_{f^{-1}} = (0\,, \pi)$, tal que:

$y = ArcCot\, x$ **equivalente a** $x = Cot\, y$ figura 8.30

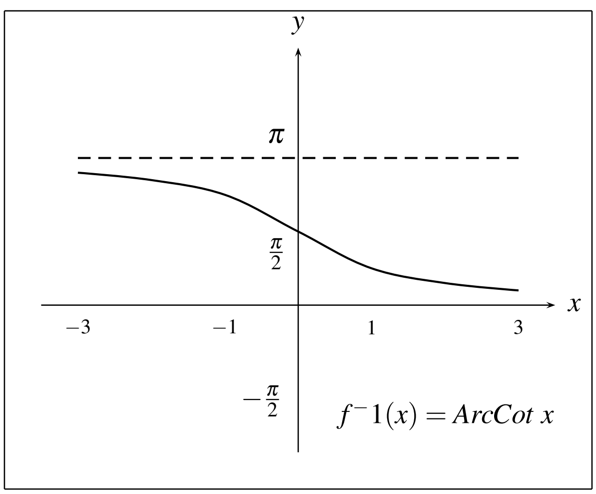


FIGURA N° 8.30

De esta definición se concluye que:

$Cot\ (ArcCot\ x) = x$ si $x \in R$ y $ArcCot\ (Cot\ x) = x$ con $x \in (0\,,\pi)$.

8.5.5. Inversa Sec x

Aquí se toma la parte inyectiva de $Sec\,x$ para $x \in (0,\pi)$ sin incluir $\frac{\pi}{2}$ donde la $Sec\,x$ no esta definida así:
Sea $f\ (x) = Sec\,x$ con $x \in \left[0\ ,\ \pi/2\right) \cup \left(\pi/2\,,\ \pi\right]$, entonces $D_f = \left[0\,,\pi/2\right) \cup \left(\pi/2\,,\pi\right]$ y $R_f = (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$, por tanto se define $f^{-1}\ (x) = ArcSec\,x = Sec^{-1}x$, como la función con $D_{f^{-1}} = (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$ y $R_{f^{-1}} = \left[0\,,\pi/2\right) \cup \left(\pi/2\,,\pi\right]$, que satisface

$$y = ArcSec\,x \quad \textbf{equivalente a} \quad x = Sec\,y$$

(Figura 8.31).
De esta definición se deduce que:

$ArcSec\ (Sec\,x) = x$ si $x \in \left[0\,,\pi/2\right) \cup \left(\pi/2\,,\pi\right]$ y
$Sec\ (ArcSec\,x) = x$ si $x \in (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$.

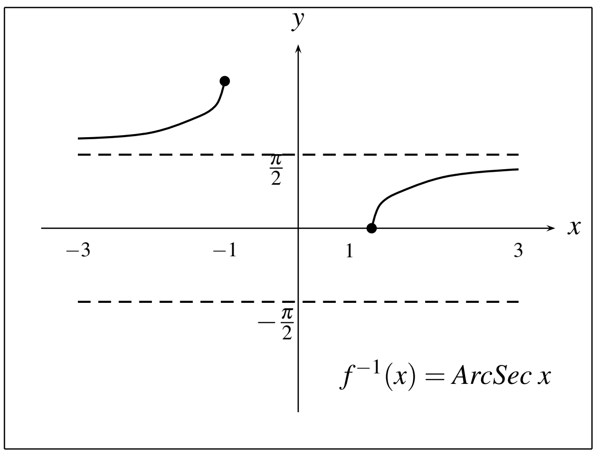


FIGURA N° 8.31

8.5.6. Inversa de Csc x

Aquí se toma el pedazo de $Csc\,x$ para $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sin incluir el 0 donde no esta definido así:
Sea $f\ (x) = Csc\,x$ con $x \in \left[-\pi/2\,,0\right) \cup \left(0\,,\pi/2\right]$, entonces $D_f = \left[-\pi/2\,,0\right) \cup \left(0\,,\pi/2\right]$ y $R_f = (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$, por tanto se define $f^{-1}\ (x) = ArcCsc\,x = Csc^{-1}x$, como una función con dominio $D_{f^{-1}} = (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$ y $R_{f^{-1}} = \left[-\pi/2\,,0\right) \cup \left(0\,,\pi/2\right]$ que satisface

$$y = ArcCsc\,x \quad \textbf{equivalente a} \quad x = Csc\,y$$

(Figura 8.32)
De la definición anterior se concluye que:

$ArcCsc\ (Csc\,x) = x$ con $x \in \left[-\pi/2\,,0\right) \cup \left(0\,,\pi/2\right]$ y
$Csc\ (ArcCsc\,x) = x$ con $x \in (-\infty\,,-1] \cup [1\,,+\infty)$

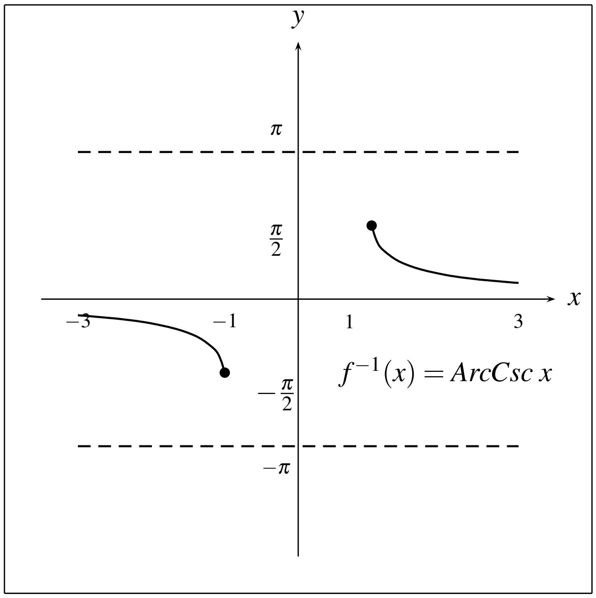


FIGURA N° 8.32

Ejemplos

1. $ArcCos\,(-1) = \pi$ porque $Cos\,\pi = -1$
2. $ArcTan\,(-1) = -\left(\pi/4\right)$ porque $Tan\left(-\pi/4\right) = -1$
3. $Cos\left(ArcCos\,\left(1/3\right)\right) = 1/3$
4. $Tan\left(ArcTan\,\left(1/3\right)\right) = 1/3$
5. $Cot\left(ArcCot\,\left(1/3\right)\right) = 1/3$
6. $Sec\left(ArcSec\,\left(1/3\right)\right)$ no tiene sentido, pues $1/3 \notin (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
7. $ArcCos\left(Cos\,\left(3\pi/4\right)\right) = 3\pi/4$
8. $ArcTan\left(Tan\,\left(3\pi/4\right)\right) = ArcTan\left(Tan\,\left(-\pi/4\right)\right) = -\pi/4$
9. $ArcCsc\left(-\sqrt{2}\right) = -3\pi/4$
10. Calcular el valor de:

    a) $Cos\left(ArcSen\,\left(3/5\right)\right)$
    Sea $x = ArcSen\,\left(3/5\right)$ entonces $Sen\,x = 3/5$, con x en el primer cuadrante. Pues $ArcSen\;x$ es la inversa del $Sen\,x$ en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ es decir, entre el 1º y 4º cuadrante (Figura 8.33)

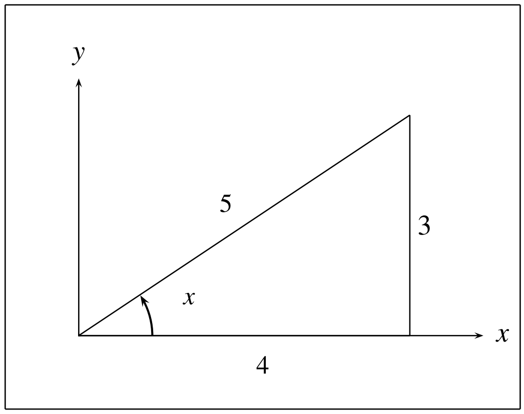


FIGURA N° 8.33

luego de la figura se tiene que:

$$Cos\left(ArcSen\left(3/5\right)\right) = Cos\,x = 4/5$$

b) $Sen\left(ArcCos\left(-2/3\right)\right)$
Sea $x = ArcCos\left(-2/3\right)$ entonces $Cos\,x = -2/3$ con x en el segundo cuadrante. Pues $ArcCos\,x$ es la inversa del coseno solo entre 0 y π, es decir, solo el 1º y 2º cuadrante. (Figura 8.34)

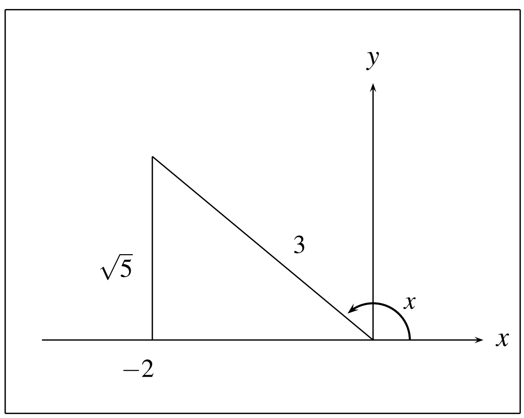


FIGURA N° 8.34

de la figura se tiene que:

$$Sen\left(ArcCos\left(-2/3\right)\right) = Sen\,x = \sqrt{5}\Big/3$$

c) $Tan\left(ArcSen\left(-3/4\right)\right)$
Sea $x = ArcSen\left(-3/4\right)$, entonces $Sen\,x = -3/4$ con x en el cuarto cuadrante, pues $arc\ Sen\ \ x$ es la inversa de $Sen\ \ x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir, en el 1º y 4º cuadrante (Figura 8.35).

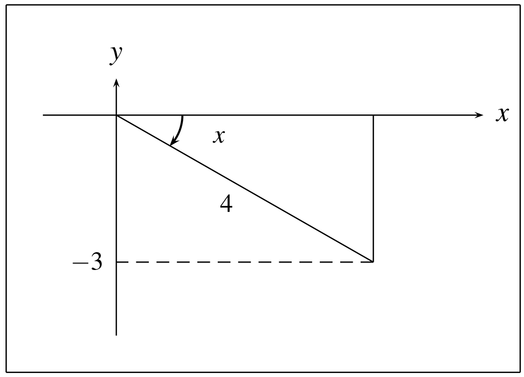


FIGURA N° 8.35

de la figura se tiene que:

$$Tan\left(ArcSen\left(-3/4\right)\right) = Tan x = \frac{-3}{\sqrt{7}}$$

11. Hallar el valor de $Cos\left(ArcTan\left(15/8\right) - ArcSen\left(7/25\right)\right)$.

    Sea $x = ArcTan\,(15/8)$ entonces $Tan x = 15/8$ y sea $y = ArcSen\,\frac{7}{25}$ entonces $Sen\ y = \frac{7}{25}$ (Figura 8.36).

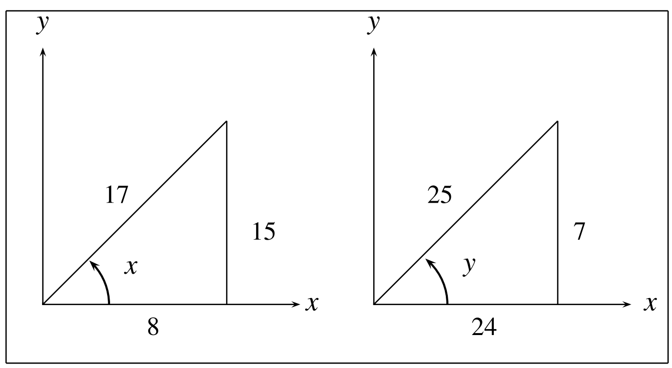


FIGURA N° 8.36

$$Cos\left(ArcTan\left(15/8\right) - ArcSen\left(7/25\right)\right) = Cos\,(x-y) = Cos\,x\,Cos\,y + Sen\,x\,Sen\,y$$
$$= \left(8/17\right)\left(24/25\right) + \left(15/17\right)\left(7/25\right) = 257/425$$

De acuerdo a las figuras 8.36

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

   a) $ArcTan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

b) $ArcSec\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$

c) $ArcCsc\,(-2) = -\frac{5\pi}{6}$

d) $ArcSen\left(Tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$

e) $ArcCos\left(Tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \pi$

f) $ArcCot\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

g) $ArcSen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - ArcSen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12}$

h) $ArcCos\,(0) + ArcTan\,(-1) = ArcTan\,(1)$

i) $2ArcTan\left(\frac{1}{2}\right) = ArcTan\left(\frac{4}{3}\right)$

j) $ArcTan\left(\frac{1}{2}\right) + ArcTan\left(\frac{1}{5}\right) + ArcTan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

k) $ArcTan\left(Cot\left(230^0\right)\right) = 40^0$

l) $Sen\left(2ArcSen\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

m) $ArcSen\left(Cos\left(-105^0\right)\right) = -15^0$

n) $Cos\left(ArcTan\left(-\frac{4}{3}\right) + ArcSen\left(\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{63}{65}$

ñ) $Tan\left(2ArcSen\left(\frac{4}{5}\right) + ArcCos\left(\frac{12}{13}\right)\right) = -\frac{253}{204}$

o) $ArcSen\left(Sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2}$

p) $Sen\,(ArcSen\,(4)) = 4$

2. Demuestre las siguientes identidades, las cuales son necesarias para el cálculo de $ArcCotx$, $ArcSecx$ y $ArcCsc\,x$ por medio de calculadoras manuales, ya que en general estas no tienen como calcular directamente estas funciones:

   a) $ArcCotx = ArcTan\left(1/x\right)$

   b) $ArcCotx = \frac{\pi}{2} - ArcTanx$

   c) $ArcSecx = ArcCos\left(1/x\right)$

   d) $ArcCscx = ArcSen\left(1/x\right)$

8.6. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una expresión como $Sen^2x + Cos^2x = 1$, puesto que es una identidad, se satisface para todo valor de x. Pero en general para expresiones como por ejemplo $Sen\,x = 1$ ó $Sen^2x + Cos\,x = 1/2$, habrá valores de x que la satisfacen y otros que no. Hallar en estas expresiones los valores de x que la satisfacen, es lo que se conoce como resolver la ecuación trigonométrica o hallar su conjunto solución. Para resolver completamente las ecuaciones trigonométricas es necesario conocer los resultados de los siguientes 3 ejemplos fundamentales.

Ejemplo fundamental 1

Hallar la solución de la ecuación $Sen\,x = b$.

Inicialmente se considera que, aplicando a los dos lados de esta ecuación la función $ArcSen\,x$, se tiene:

$ArcSen\,(Sen\,x) = ArcSen\,b$ entonces $x = ArcSen\,b$.

Pero recordando que $y = ArcSen\,x$ es la inversa de $Sen\,x$, pero solamente cuando $x \in \left[-\pi/2\,,\,\pi/2\right]$, entonces este valor de x hallado, $x = ArcSen\,b$, pertenece a este intervalo. Pero es claro que considerando toda la función $Sen\,x$ y debido a su periocidad, este no es el único valor de x que satisface la ecuación $Sen\,x = b$, sino que existen infinitos. los cuales están dados por:

$$x = \begin{cases} 2n\pi \;+\; ArcSen\,b \\ 2n\pi \;+\; (\pi - ArcSen\,b) \end{cases} = \begin{cases} 2n\pi \;+\; ArcSen\,b \\ (2n+1)\;\pi - ArcSen\,b \end{cases} \qquad si \;\; n \in Z$$

como se visualizan en las gráficas de las figuras 8.37

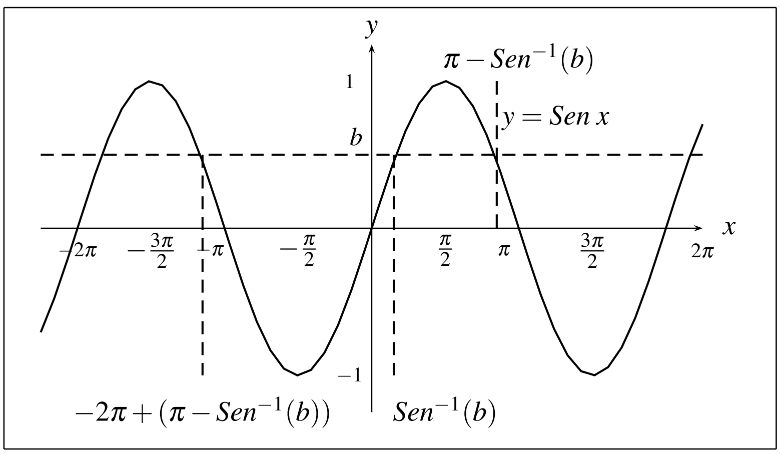


FIGURA N° 8.37

Con análisis similares al anterior se pueden hallar las soluciones de las ecuaciones $Cos\,x = a$, $Tan\,x = a$, $Sec\,x = a$, $Cot\,x = a$ y $Cscx = a$ así:

Ejemplo fundamental 2

Solucionar $Cos\,x = a$

Si $x \in [0\,,\pi]$; $ArcCos\,(Cos\,x) = ArcCos\,(a)$, entonces $x = ArcCos\,(a)$.
Pero la solución de $Cos\,x = a$, para todo $x \in R$ está dada de acuerdo a la figura 8.38 por:

$$x = \begin{cases} 2n\pi \,+\, Cos^{-1}\,(a) \\ 2n\pi \,-\, Cos^{-1}\,(a) \end{cases} \quad \text{con } n \in Z$$

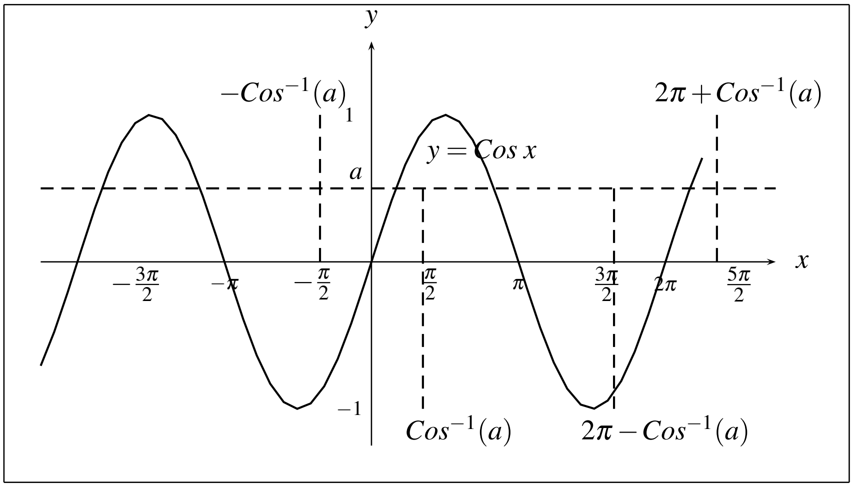


FIGURA N° 8.38

Ejemplo fundamental 3

Solucionar $Tan\, x = a$

Si $x \in \left(-\pi/2\, ,\, \pi/2\right)$; $ArcTan\,(Tan\, x) = ArcTan\,(a)$; entonces $x = ArcTan\,(a)$.
Pero basados en la figura 8.39 la solución de $Tanx = a$, para x en todo su dominio está dada por:

$$x = n\pi + ArcTan\,(a) \quad n \in Z$$

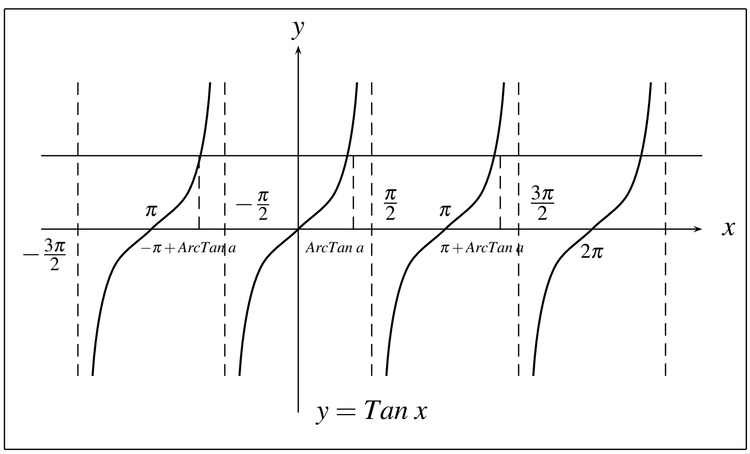


FIGURA N° 8.39

En forma análoga se pueden solucionar ecuaciones similares con las otras funciones trigonométricas.

En términos generales para resolver una ecuación trigonométrica se debe tratar de factorizar la expresión por medio de algebra e identidades a productos de factores de la forma

$$(m\, Sen\;\; x - a)\, ,\; (n\, Cos\;\; x - b)\, ,\; (l\; tan\, x - c)$$

y todo la expresión igual a cero. De esta forma la solución se toma cuando cada factor sea igual a cero, lo cual nos lleva a resolver ecuaciones de las presentadas en los ejemplos fundamentales.

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} 4\,Cos\,x\,Sen\,x + 2\,Sen\,x - 2\,Cos\,x - 1 &= 0 \quad \text{en} \quad [0\,,2\,\pi]\,. \\ 4Cos\,x\,Sen\,x + 2\,Sen\,x - 2Cos\,x - 1 &= 2\,Sen\,x\,(2Cos\,x + 1) - (2Cos\,x + 1) \\ (2Cos\,x + 1)\,(2Sen\,x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

si y sólo si

$$2\,Cos\,x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2\,Sen\,x - 1 = 0.$$

Si

$$2\,Cos\,x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; Cos\,x = -1/2,$$

y puesto que $ArcCos\left(-1/2\right) = 120^{o}$, entonces $x = 120^{o}$ ó $x = 360^{o} - 120^{o} = 240^{o}$, es decir, $x = 2\pi/3$ ó $x = 4\pi/3$, pues se pide la solución en el intervalo $[0,2\pi]$

Si

$$2\,Sen\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; Sen\,x = 1/2 \;\Rightarrow\; x = 30^{o}x = 120^{o},$$

es decir, $x = \pi/6$ ó $x = 5\pi/6$

y así la solución de la ecuación en $[0\,,2\,\pi]$ es la reunion de las soluciones halladas, es decir:

$$\left\{\frac{\pi}{6}\,,\;\frac{5\,\pi}{6}\,,\;\frac{2\,\pi}{3}\,,\;\frac{4\pi}{3}\right\}$$

Si no se hubiese pedido que se den soluciones solo en el intervalo $[0,2\pi]$ entonces la solución general sería:

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi\,,\,\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\,,\,\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\,,\,\frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right\}\text{con } n \in Z$$

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} Sen\,2x \,+\, Sen\,x &= 0 \\ 2\,Sen\,x\,Cos\,x \,+\, Sen\,x &= 0 \\ Sen\,x\,(2\,Cos\,x \,+\, 1) &= 0 \\ Sen\,x \,=\, 0 \quad \text{ó} \quad 2\,Cos\,x \,+\, 1 &= 0 \\ Sen\,x \,=\, 0 \quad \text{ó} \quad Cos\,x &= -\frac{1}{2}, \quad \text{entonces} \end{aligned}$$

$$x = n\pi; \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\text{ó} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}$$
$$\text{ó} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}$$

luego la solución general es:

$$\left\{ n\pi, \ \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \ \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad | \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ejemplo

Hallar el conjunto solución de la ecuación

$$\begin{aligned} & Cos^4x - Sen^4x = 1 \\ & Cos^4x - Sen^4x = \left(Cos^2x + Sen^2x\right)\left(Cos^2x - Sen^2x\right) = 1 \\ \Rightarrow \ & Cos^2x - Sen^2x = 1 \\ & \quad \Rightarrow \ Cos\,2x = 1 \end{aligned}$$

$$2x = \left\{ \begin{array}{l} 2n\pi + Arc\,Cos\,1 \\ 2n\pi - Arc\,Cos\,1 \end{array} \right. = 2n\pi \text{ con } n \in Z$$

entonces $x = n\pi$ en $n \in Z$

Ejemplo

Solucionar $\quad Sen\,x = \sqrt{3}Cos\,x - 1$

Si elevamos al cuadrado los dos lados de la ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} Sen^2x &= 3Cos^2x - 2\sqrt{3}Cos\,x + 1 \\ 1 - Cos^2x &= 3Cos^2x - 2\sqrt{3}Cos\,x + 1 \\ 4Cos^2x - 2\sqrt{3}Cos\,x &= 0 \\ 2Cos\,x\left(2Cos\,x - \sqrt{3}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \ Cos\,x &= 0 \quad \text{ó} \\ 2Cos\,x - \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

i. Si $Cos\,x = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2}$

ii. Si $2Cos\,x - \sqrt{3} = 0 \ \Rightarrow \ Cos\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ó $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$.

Puesto que los dos miembros de la ecuación original fueron elevados al cuadrado, en este conjunto solución pueden aparecer soluciones "extrañas", por tanto es necesario verificar en esta ecuación cuáles de los elementos del conjunto hallado son efectivamente soluciones de la ecuación inicial. Reemplazando allí, se puede observar que para $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \ldots$ y para $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, con $n \in Z$, no satisfacen la ecuación, por lo tanto la solución de la ecuación está dada por

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \ \frac{3\pi}{2} + 2n\pi. \quad con \quad n \in Z \right\}$$

Ejemplo

Solucionar la ecuación

$$\sqrt{2}Sen^2x + Cos\,x = 0$$

Si

$$\sqrt{2}\left(1 - Cos^2x\right) + Cos\,x = 0$$
$$\sqrt{2}Cos^2x - Cos\,x - \sqrt{2} = 0$$
$$Cos\,x = \frac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$
$$Cos\,x = \frac{1+3}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ó}$$
$$Cos\,x = \frac{1-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ahora si $Cos\,x = 2\big/\sqrt{2} = \sqrt{2}$, como $\sqrt{2} > 1$ entonces en este caso no hay solución, y si $Cos\,x = -1\big/\sqrt{2} \ \Rightarrow \ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$. con $n \in Z$.

EJERCICIOS

1. Hallar el conjunto solución de las ecuaciones:

   a) $Sen\,3x = \sqrt{2}\big/2$

   b) $Sen\,3x = 0$

   c) $Tan\,2x = -\sqrt{3}$

   d) $Cot\,(2x-1) = -1/\sqrt{3}$

   e) $2Sen^2 2x - 1 = 0$

   f) $3Sen\,x = 2Cos^2x$

   g) $Sen\,2x = Cos\,2x$

   h) $Sen\,2x\,Cos\,x + Cos\,2x\,Sen\,x = 0$

   i) $Sen\,5x - Sen\,3x - Sen\,x = 0$

   j) $Cos\,x - \sqrt{3}Sen\,x = 1$

   k) $2Cos\,x = 1 - Sen\,x$

   l) $Sen\,xCos\,x = 0$

m) $Sec x - 1 = Tan x$

n) $2 Tan x - Sen\, x - Tan x = 0$

ñ) $Sen^4 x - 2 Sen^2 x - 1 = 2 Sen\, x - Cos^2 x$

o) $6 Tan x + 12 Cot x = 5\sqrt{3}\, Sec x$

p) $\left(1 - Sen^4 x\right)\left(1 + Tan^2 x\right) = 5/3$

q) $\dfrac{1 + Tan\, x}{1 - Tan\, x} = 1 + Sen\, 2x$

r) $Sen^4 x + Cos^4 x = 5/8$

s) $Cos\, x = 4$

2. Analizar los cuadros siguientes paso a paso, e ilustrarlos con ejemplos (en todos los casos $n \in Z$).

a)

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$Sen\, x = b$	No hay soluciones	$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$	$ArcSen\ b + 2n\pi$ y $2n\pi + (\pi - ArcSen\, b)$	$\frac{\pi}{2} + 2n\pi$	No hay soluciones

b)

	$b < -1$	$b = -1$	$-1 < b < 1$	$b = 1$	$b > 1$
$Cos\ x = b$	No hay solución	$(2n+1)\pi$	$ArcCos\ b + 2n\pi$ y $2n\pi - ArcCos\, b$	$2n\pi$	No hay solución

c)

$-\infty < b < +\infty$	
$Tan\, x = b$	$x = ArcTan\, b + n\pi$

d)

$-\infty < b < +\infty$	
$Cot\ x = b$	$x = ArcCot\ b + n\pi$

e)

	$b < -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$	$b > \frac{\pi}{2}$
$ArcSen\, x = b$	No hay solución	$Sen\, b$	No hay solución

f)

	$b < 0$	$0 \leq b \leq \pi$	$b > \pi$
$ArcCos\, x = b$	No hay solución	$x = Cos\, b$	No hay solución

g)		$b \leq -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$	$b \geq \frac{\pi}{2}$
	$ArcTan\, x = b$	No hay solución	$x = Tan\, b$	No hay solución

h)		$b \leq 0$	$0 < b < \pi$	$b \geq \pi$
	$ArcCot\, x = b$	No hay solución	$x = Cot\, b$	No hay solución

8.7. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEJOS

8.7.1. Representación trigonométrica y teorema de De Moivre

Un número complejo $z = a + bi$, se puede representar también en forma trigonométrica o polar por medio de dos números reales. El primero de estos números indica la distancia del punto (a,b) al origen de coordenadas de R^2, el cual corresponde al ***valor absoluto o módulo del número complejo z*** que se simboliza con ***r***, y como se vio en el capítulo III y en la figura 8.40, se puede expresar por:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El segundo número real de esta representación es la medida θ , en radianes, del ángulo que forma el segmento de recta que va del punto (a,b) al origen de coordenadas y la parte positiva del eje ***x.*** En la Figura 8.39 también se muestra éste ángulo. A ese número θ se le llama ***argumento del número complejo z*** y se simboliza con ***Arg (z),*** y como se puede apreciar en la misma gráfica se calcula por la expresión:

$$Arg\,(z) = \begin{cases} arctan\,(b/a) & si\ a > 0\ \ y\ \ b \geq 0 \\ \pi + arctan\,(b/a) & si\ a < 0 \\ 2\pi + arctan\,(b/a) & si\ a > 0\ \ y\ \ b < 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, entonces $\theta = \pi/2$ para $b > 0$ y $\theta = 3\pi/2$ para $b < 0$. Si $a = b = 0$, θ no está definido.

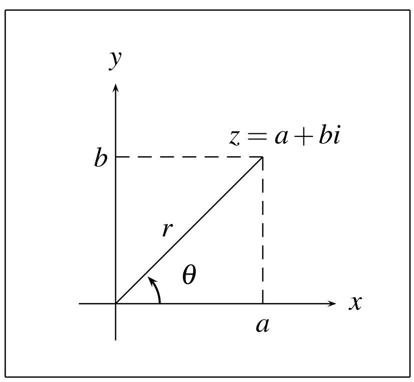


FIGURA N° 8.40

Determinados ya los dos números reales r y θ, de ésta misma Figura se deduce que:

$$a = r\, Cos\ \ \theta \text{ y } b = r\, Sen\ \ \theta$$

y por consiguiente

$$z = a + b\,i = r\,Cos\;\;\theta + r\,Sen\;\;\theta\,i = r\,(\,Cos\;\;\theta + i\,Sen\;\;\theta\,)$$

es decir,

$$z = r\,(\,Cos\;\;\theta + i\,Sen\;\;\theta\,).$$

Esta última expresión de z en términos de r y θ es la representación trigonométrica del número complejo z, que se simboliza también por:

$$z = r\,Cis\,\theta.$$

Como la representación rectangular de un número complejo $z = a + b\,i$, es única, se podría pensar que la representación trigonométrica también lo es ; pero esto no es así, ya que como se muestra en la Figura 8.41, $Cos\,(\,\theta\,\pm 2\pi\,) = Cos\,\theta$ y $Sen\,(\,\theta\,\pm 2\pi\,) = Sen\,\theta$**,** con lo cual θ, $\theta + 2\,\pi$, y θ - 2 π son tres argumentos diferentes del mismo número complejo z. Por el carácter periódico del seno y el coseno un número complejo z podrá tener infinitas representaciones trigonométricas. En algunas aplicaciones se requiere trabajar con una sola representación trigonométrica de z, para lo cual se escoge θ con la condición $0 \leq \theta\;\; < 2\,\pi$, llamado ***argumento principal de z.***

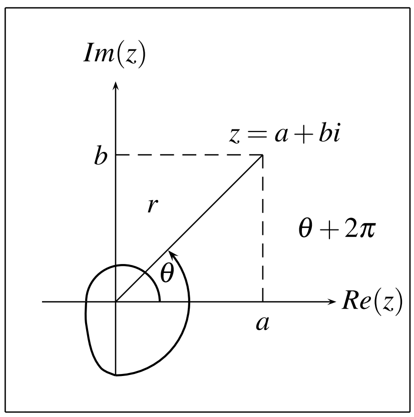


FIGURA N° 8.41

Ejemplo

Tres representaciones trigonométricas del número complejo $z = 1 + i$, son:

$$z = \sqrt{2}(Cos\;\tfrac{\pi}{4} + i\,Sen\;\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,Cis\,\tfrac{\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2}(Cos\;\tfrac{9\pi}{4} + i\,Sen\;\tfrac{9\pi}{4}) = \sqrt{2}\,Cis\,\tfrac{9\pi}{4}$$
$$z = \sqrt{2}(Cos\;\tfrac{-7\pi}{4} + i\,Sen\;\tfrac{-7\pi}{4}) = \sqrt{2}\,Cis\,\tfrac{-7\pi}{4}$$

El Argumento principal de $z = 1 + i$ es π / 4**.**

Esta representación en forma polar o trigonométrica se utiliza frecuentemente con el fin de simplificar cálculos, ya que como se verá, utilizando identidades trigonométricas adecuadas, se facilitan algunas operaciones entre números complejos.

1. Si
$$z = rCos\theta + irSen\theta \ \ y \ \ w = \rho Cos\mu + i\rho Sen\mu$$
son dos números complejos en forma polar, entonces
$$\begin{aligned} z.w &= (rCos\theta + irSen\theta)\,(\rho Cos\mu + i\rho Sen\mu) \\ &= r\rho Cos\theta Cos\mu + ir\rho Cos\theta Sen\mu + ir\rho Sen\theta Cos\mu + i^2 r\rho Sen\theta Sen\mu \\ &= r\rho\,(Cos\theta Cos\mu - Sen\theta Sen\mu) + ir\rho\,(Cos\theta Sen\mu + Sen\theta Cos\mu) \\ &= r\rho\,[Cos\,(\theta+\mu) + iSen\,(\theta+\mu)] \end{aligned}$$
luego
$$zw = r\rho\,[Cos\,(\theta+\mu) + iSen\,(\theta+\mu)]$$
Observe que del anterior resultado se deduce la igualdad:
$$|zw| = |z|\,|w|.$$

2. Generalizando 1, para el producto de n números complejos iguales se puede demostrar, utilizando inducción matemática, el llamado ***Teorema de De Moivre***:
Si $z = rCos\theta + irSen\theta$, entonces para todo $n \in N$ se tiene
$$z^n = r^n\,[Cosn\theta + iSenn\theta]$$

3. Si $z = rCos\theta + irSen\theta$ y $w = \rho Cos\mu + i\rho Sen\mu$ entonces
$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{rCos\theta + irSen\theta}{\rho Cos\mu + i\rho Sen\mu} = \frac{r}{\rho}\,\frac{(Cos\theta + iSen\theta)\,(Cos\mu - iSen\mu)}{(Cos\mu + iSen\mu)\,(Cos\mu - iSen\mu)} \\ &= \frac{r}{\rho}\,\frac{(Cos\theta Cos\mu - iCos\theta Sen\mu + iSen\theta Cos\mu + Sen\theta Sen\mu)}{Cos^2\mu + Sen^2\mu} \\ &= \frac{r}{\rho}\,[(Cos\theta Cos\mu + Sen\theta Sen\mu) + i\,(Cos\mu Sen\theta - Cos\theta Sen\mu)] \\ &= \frac{r}{\rho}\,(Cos\,(\theta-\mu) + iSen\,(\theta-\mu)) \end{aligned}$$
luego:
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\,(Cos\,(\theta-\mu) + iSen\,(\theta-\mu))$$

Ejemplo

1. Si
$$z = -1 + i = x + iy = rCos\theta + irSen\theta,$$
entonces:
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
y
$$Tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

y así

$$\theta = \frac{3\pi}{4},$$

pues z se encuentra en el 2^0 cuadrante. (Figura 8.42). Por tanto:

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(Cos\,\frac{3\pi}{4} + i\,Sen\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

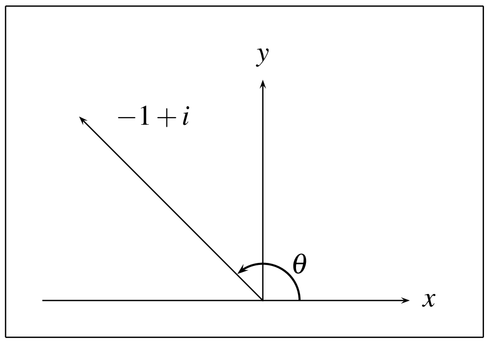


FIGURA N° 8.42

2. Si

$$z = 1 - i\sqrt{3} = x + i\,y,$$

entonces

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$Tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3},$$

por tanto

$$\theta = 300^{\circ},$$

pues el punto

$$z = 1 - i\sqrt{3}$$

se encuentra en el 4^o cuadrante. (Figura 8.43). Luego,

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2(Cos\,300 + i\,Sen\,300)$$

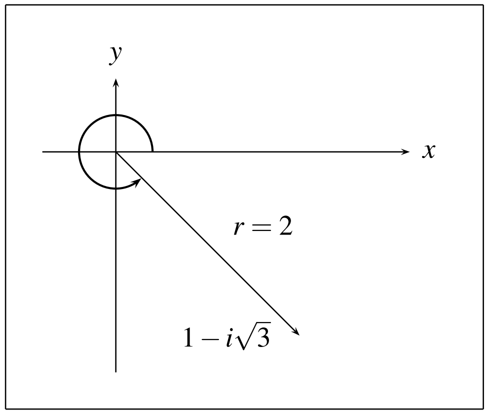


FIGURA N° 8.43

3. Hallar

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}$$

$$-1+i\sqrt{3} = x+iy,$$

por tanto

$$r = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

y

$$Tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3},$$

entonces

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

pues el punto

$$-1+i\sqrt{3}$$

se encuentra en el 2^o cuadrante, luego

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(Cos\,\frac{2\pi}{3}+i\,Sen\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

y así:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10} = 2^{10}\left(Cos\,\frac{20\pi}{3}+i\,Sen\,\frac{20\pi}{3}\right) = -512+886.8\,i$$

4. Calcular

$$(1+i)^{10}$$

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \left(\sqrt{2}\,(Cos\,45^{o} + i\,Sen\,45^{o})\right)^{10} \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{10}(Cos\,450^{o} + i\,Sen 450^{o}) \\ &= 32\,(Cos\,(360^{o} + 90^{o}) + i\,Sen\,(360^{o} + 90^{o})) \\ &= 32\,(Cos\,90^{o} + i\,Sen 90^{o}) = 32\,i\end{aligned}$$

Por tanto

$$(1+i)^{10} = 32i$$

5. Efectuar la operación

$$-2\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + i\right)$$

$$\begin{aligned}&= 2\,(Cos\,180^{o} + i\,Sen\,180^{o})\,(2)\,(Cos\,120^{o} + i\,Sen\,120^{o})\,(2)\,(Cos\,30^{o} + iSen 30^{o}) \\ &= 4\left(Cos\,300^{0} + i\,Sen\,300^{o}\right)\,2\,(Cos\,30^{o} + i\,Sen\,30^{o}) \\ &= 8\,(Cos\,330^{o} + i\,Sen\,330^{o}) \\ &= 8\,(Cos\,30^{o} - iSen\,30^{o}) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 4\sqrt{3} - 4\,i\end{aligned}$$

luego:

$$-2(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 4\sqrt{3} - 4i$$

6. Efectuar la operación

$$\frac{4 - 4\,i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} + 2\,i}$$

$$\begin{aligned}\frac{4 - 4\,i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} + 2\,i} &= \frac{8}{4}\,\frac{(Cos\,300^{o} + i\,Sen\,300^{o})}{(Cos\,150^{o} + i\,Sen\,150^{o})} \\ &= 2\,(Cos\,(300^{o} - 150^{o}) + i\,Sen\,(300^{o} - 150^{o})) \\ &= 2\,(Cos\,150^{o} + i\,Sen\,150^{o}) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i\end{aligned}$$

luego:

$$\frac{4 - 4\,i\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} + 2\,i} = -\sqrt{3} + i$$

8.7.2. Raíces de números complejos

Dado un número complejo $z = x + iy$, se dice que el número complejo $w = \mu + iv$, es una raíz n-ésima del número complejo z, si $w^{n} = z$.

Si $z = x + iy = rCos\theta + irSen\theta$ es un número complejo dado, y $w = u + iv = \rho\,Cos\mu + i\rho\,Sen\mu$ es una raíz n-ésima de z. ¿Cómo se representa el número complejo w en términos de r y θ?.

Para ello:

$$w^n = z \Leftrightarrow (\rho\ (Cos\mu + i\,Sen\mu))^n = r\,(Cos\theta + i\,Sen\theta)$$

$$\Leftrightarrow \rho^n\,(Cosn\mu + i\,Senn\mu) = r\,(Cos\theta + i\,Sen\theta) = r\,(Cos\,(\theta + 2k\pi) + i\,Sen\,(\theta + 2k\pi))$$

$\Leftrightarrow \rho^n = r \Leftrightarrow \rho = r^{1/n}$ y $Cosn\mu = Cos\,(\theta + 2k\pi)$ y $Sen\,(n\mu) = Sen\,(\theta + 2k\pi)$
entonces $n\mu = \theta + 2k\pi \ \ \forall k \in Z$, es decir, $\mu = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, luego para cada entero k el número complejo:

$$w_k = r^{1/n}\left(Cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,Sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

es raíz n-ésima de $z = x + iy$; pero es posible demostrar que entre estos valores solamente hay n diferentes: para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, llamémoslos $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ y que para cualquier otro valor de k, el número complejo w_k coincide con alguno de estos, es decir, un número complejo $z$tiene exactamente n raíces diferentes.

Ejemplo

Hallar las raíces cuadradas de $z = 1 - i$
Como

$$1 - i = \sqrt{2}\,(Cos\,315^{o} + i\,Sen\,315^{o})$$

$$(1 - i)^{1/2} = 2^{1/4}\left(Cos\left(\frac{315^{o} + 2k\,180^{o}}{2}\right) + i\,Sen\left(\frac{315^{o} + 2k\,180^{o}}{2}\right)\right)$$

para $k = 0$ y $k = 1$, es decir; las raíces cuadradas de $(1 - i)$ son:

$$w_0 = 2^{1/4}\left(Cos\,\frac{315^{o}}{2} + i\,Sen\,\frac{315^{o}}{2}\right)$$

$$w_1 = 2^{1/4}\left(Cos\left(\frac{315^{o} + 360^{o}}{2}\right) + i\,Sen\left(\frac{315^{o} + 360^{o}}{2}\right)\right)$$

Ejemplo

Hallar las raíces cuartas del número complejo $z = -8 - 8\sqrt{3}i$

$$\text{como} \quad \left(-8 - 8\sqrt{3}\,i\right) = 16\,(Cos\,240^{o} + i\,Sen\,240^{o}) \quad \text{entonces}$$

$$\left(-8 - 8\sqrt{3}\,i\right)^{1/4} = 16^{1/4}\left(Cos\left(\frac{240^{o} + k\,360^{o}}{4}\right) + i\,Sen\left(\frac{240^{o} + k\,360^{o}}{4}\right)\right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.
entonces, las raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$ son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(Cos\,\frac{240^o}{4} + i\,Sen\,\frac{240^o}{4}\right) = 2\,(Cos\,60^o + i\,Sen\,60^o)\\
&= 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}\\
w_1 &= 2\left(Cos\left(\frac{240^o + 360^o}{4}\right) + i\,Sen\left(\frac{240^o + 360^o}{4}\right)\right) = 2\,(Cos\,150^o + i\,Sen\,150^o)\\
&= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} + i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= 2\left(Cos\left(\frac{240^o + 720^o}{4}\right) + i\,Sen\left(\frac{240^o + 720^o}{4}\right)\right) = 2\,(Cos\,240^o + i\,Sen\,240^o)\\
&= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}\\
w_3 &= 2\left(Cos\left(\frac{240^o + 1080^o}{4}\right) + i\,Sen\left(\frac{240^o + 1080^o}{4}\right)\right) = 2\,(Cos\,330^o + i\,Sen\,330^o)\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar las raíces cuartas de $z = 1$
Como

$$1 = 1\,(Cos\,0 + i\,Sen\,0)$$

entonces

$$1^{1/4} = Cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\,Sen\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

por tanto, las raíces cuartas de 1 son:

$$\begin{aligned}
w_0 &= Cos\,0 + i\,Sen 0 = 1\\
w_1 &= Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\\
w_2 &= Cos\pi + i\,Sen\pi = -1\\
w_3 &= Cos\left(\frac{2\,\pi}{2}\right) + i\,Sen\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -i
\end{aligned}$$

observe que estas raíces son los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

EJERCICIOS

1. Escribir los siguientes números complejos en la forma polar.

   a) $-3-3i$ *b*) $3+3i$
   c) $-3+3i$ *d*) $3-3i$
   e) $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ *f*) i
   g) $1-i\sqrt{3}$

2. Efectuar las operaciones indicadas en forma polar.

   a) $\dfrac{\left(3-3i\sqrt{3}\right)\left(-2-2i\sqrt{3}\right)}{\left(i\left(1-i\right)\left(1+i\right)\right)}$ *b*) $\dfrac{-2}{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}$
   c) $\dfrac{-4\sqrt{3}-4i}{\left(\sqrt{3}-i\right)(2)\,i}$ *d*) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{4}$
   e) $\left(i\left(1-i\right)\right)^{10}$ *f*) $\dfrac{(1+i)^{6}\left(\sqrt{3}-i\right)^{3}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{8}}$

3. Dar la forma rectangular de los siguientes números complejos:

   a) $2\left(Cos\,60^{o}+i\,Sen\,60^{o}\right)$
   b) $4\left(Cos\,120^{o}+i\,Sen\,120^{o}\right)$
   c) $4\left(Cos\,120^{o}-i\,Sen\,120^{o}\right)$
   d) $\dfrac{8\left(Cos\,300^{o}+i\,Sen\,300^{o}\right)}{2\left(Cos\,150^{o}+i\,Sen\,150^{o}\right)}$
   e) $\dfrac{32\left(Cos\,60^{o}+i\,Sen\,60^{o}\right)\left(\sqrt{2}\left(Cos\,45^{o}+i\,Sen\,45^{o}\right)\right)}{\left(Cos\,90^{o}+i\,Sen\,90^{o}\right)\left(5\left(Cos\,270^{o}+i\,Sen\,270^{o}\right)\right)}$

4. *a*) Hallar las raíces terceras y quintas de 1 ¿Son vértices de algún polígono?.
   b) Hallar las raíces cúbicas de $z=\sqrt{3}-i$
   c) Hallar las raíces cuartas de $z=-1+i$
   d) Hallar las raíces cuadradas de i
   e) Hallar las raíces cúbicas de $z=-8i$ y $z=27i$.

8.8. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resulta útil en algunas aplicaciones de la trigonometría, lo que se conoce con el nombre de solución de triángulos, que consiste en determinar las magnitudes de los ángulos internos y las longitudes de los lados de un triángulo cualquiera dado, conociendo inicialmente algunos de estos datos. Para ellos es necesario conocer dos teoremas fundamentales: *Teorema del Seno, y Teorema del Coseno.*

8.8.1. Teorema del Seno

Sean A, B, C los ángulos y a, b, c los correspondientes lados opuestos en un triángulo. (Figura 8.44). Entonces

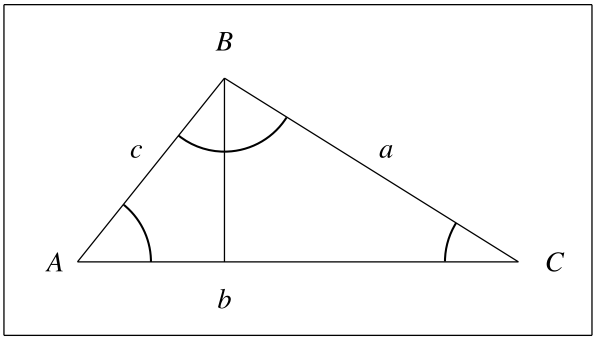


FIGURA N° 8.44

$$\frac{SenA}{a} = \frac{Sen\,B}{b} = \frac{Sen\,C}{c}.$$

Para su demostración considérese la figura 8.45.

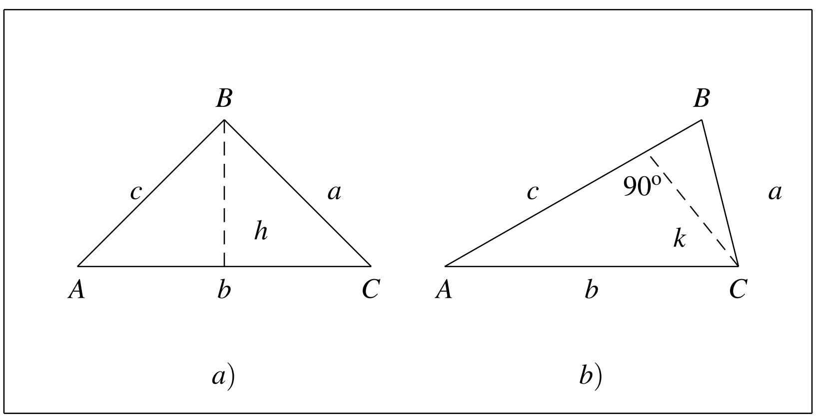


FIGURA N° 8.45

De la figura 8.45 (a) se tiene:

$$Sen\,A = \frac{h}{c} \quad entonces \quad h = c\,Sen\,A$$

$$Sen\,C = \frac{h}{a} \quad entonces \quad h = a\,Sen\,C$$

Por tanto

$$c\,Sen\,A = a\,Sen\,C,$$

es decir

$$\frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,C}{c}$$

y de la figura 8.45 (b) se tiene:

$$Sen\,A = \frac{k}{b} \quad entonces \quad k = b\,Sen\,A$$

$$Sen\,B = \frac{k}{a} \quad entonces \quad k = a\,Sen\,B$$

Por tanto

$$b\,Sen\,A = a\,Sen\,B,\ es\ decir:$$

$$\frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,B}{b}$$

y así

$$\frac{Sen\,A}{a} = \frac{Sen\,B}{b} = \frac{Sen\,C}{c}$$

Ejemplo

Hallar el valor de a en la figura 8.46:

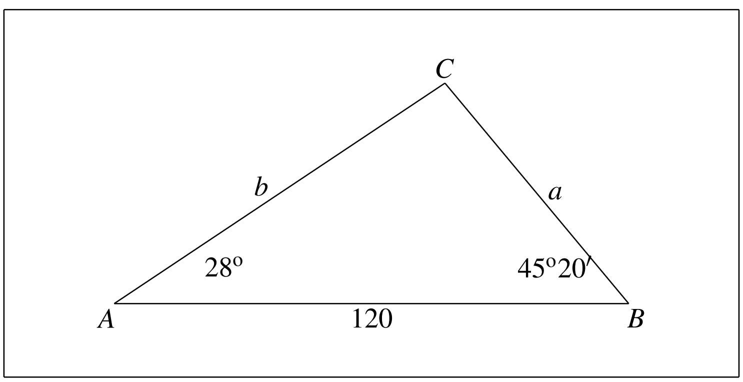


FIGURA N° 8.46

$$A+B+C = 180^o \Rightarrow C = 180^o - (A+B) = 180^o - \left(28^o + 45^o\,20'\right) = 106^o\,40'$$

entonces de $\dfrac{Sen\,A}{a} = \dfrac{Sen\,C}{c}$ se tiene que

$$a = \frac{cSen\,A}{Sen\,C} = \frac{120^o\ Sen\,28^o}{Sen\,(106^\circ\,20')} =?$$

Ejemplo

Considere el triángulo que se observa en la figura 8.47.

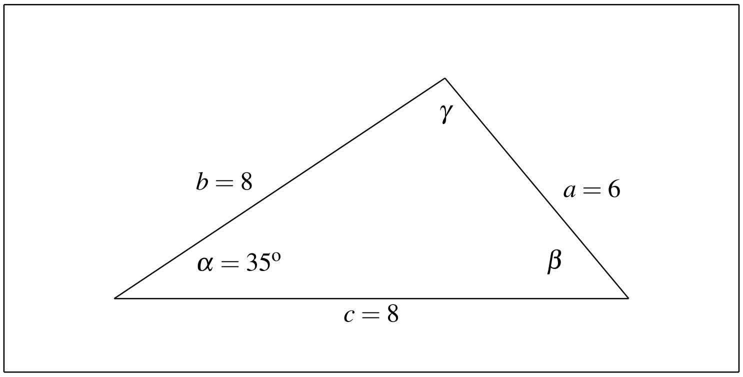


FIGURA N° 8.47

$$\text{Como:}\quad \frac{Sen\,\alpha}{a}=\frac{Sen\,\beta}{b}$$

entonces $Sen\,\beta=\dfrac{b\,Sen\,\alpha}{a}=\dfrac{8\,Sen\,35^o}{6}=0.76$

$$\text{luego}\quad Sen\,\beta=0.76$$

$$\text{entonces}\quad \beta=arc\ Sen\,0.76=49.9^o$$

$$\text{ó}\quad \beta=180^o-49.9^o=130.1^o$$

como $\alpha+\beta<180^o$ para los dos casos, entonces los dos sirven.

Para $\beta_1=49.9^o$, $\gamma_1=95.1^o$; para $\beta_2=130.1^o$, $\gamma_2=14.9^o$.

Ahora, $\dfrac{Sen\,\gamma}{c}=\dfrac{Sen\,\alpha}{a}$, entonces

$$c=\frac{a\,Sen\,\gamma}{Sen\,\alpha},\quad \text{entonces}$$

$$c_1=\frac{6\,Sen\,95.1^o}{Sen\,35^o}=10.42\quad \text{y}$$

$$c_2=\frac{6\,Sen\,14.9^o}{Sen\,35^o}=2.69$$

luego el ejemplo permite dos soluciones como se aprecia en la figura 8.48:

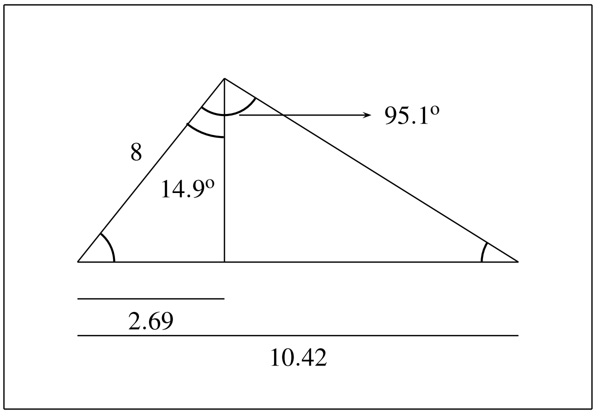


FIGURA N° 8.48

Ejemplo

Considere el triángulo que se observa en la figura 8.49:

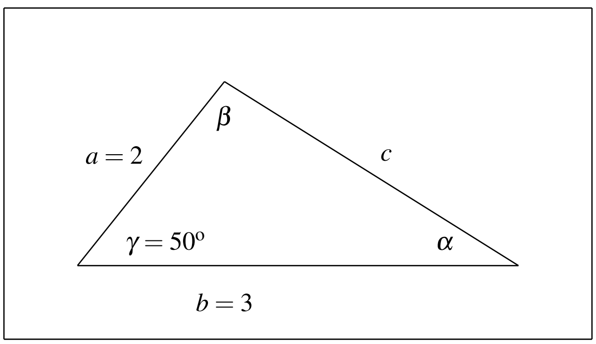


FIGURA N° 8.49

como $\dfrac{Sen\ \alpha}{a} = \dfrac{Sen\ \gamma}{c}$, entonces $Sen\ \alpha = \dfrac{a}{c} Sen\ \gamma = \dfrac{2}{3} Sen\ 50 = 1.53$

Absurdo, luego en este caso el problema no tiene solución.

8.8.2. Teorema del Coseno

Sean A, B, C, los ángulos y a, b, c los correspondientes lados opuestos de un triángulo. (Figura 8.50) entonces

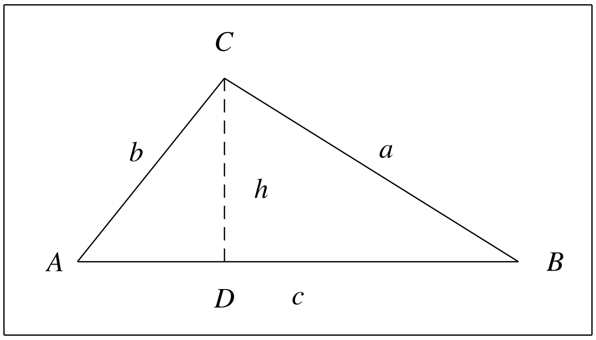


FIGURA N° 8.50

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\,A$

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\,B$

3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\,C$

Demostración

De la figura 8.50 $\quad h = aSen\,B\,,\ \overline{BD} = aCos\,B$ entonces $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = c - aCos\,B$ por tanto

$$b^2 = h^2 + \left(\overline{AD}\right)^2 = h^2 + (c - aCos\,B)^2 = a^2\,Sen^2B + c^2 - 2acCos\,B + a^2Cos^2B$$

$= a^2\left(Sen^2B + Cos^2B\right) + c^2 - 2acCos\,B = a^2 + c^2 - 2acCos\,B$ entonces

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\,B.$$

Las partes ii) y iii) se demuestran en forma análoga.

Ejemplo

En la figura 8.51 se aprecia un triángulo cuyos lados miden $a = 9.23,\ b = 5.04 \quad c = 10.6$, halle el ángulo A.

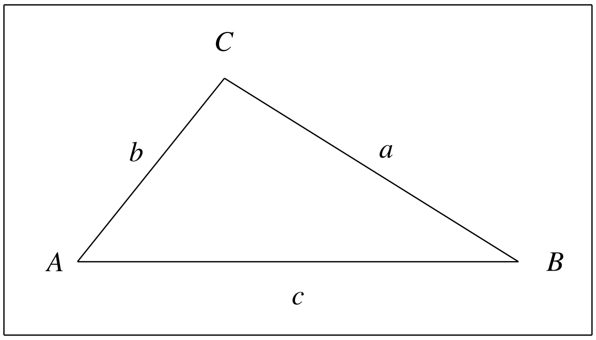


FIGURA N° 8.51

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\,A \;\Rightarrow\; Cos\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5.04)^2 + (10.6)^2 - (9.23)^2}{2\,(5.04)\,(10.6)}$$

$$A = Cos^{-1}\left(\frac{(5.04)^2 + (10.6)^2 - (9.23)^2}{2\,(5.04)\,(10.6)}\right) = 60.5^{o}$$

EJERCICIOS

Los problemas del 1 al 4 se refieren a la figura siguiente:

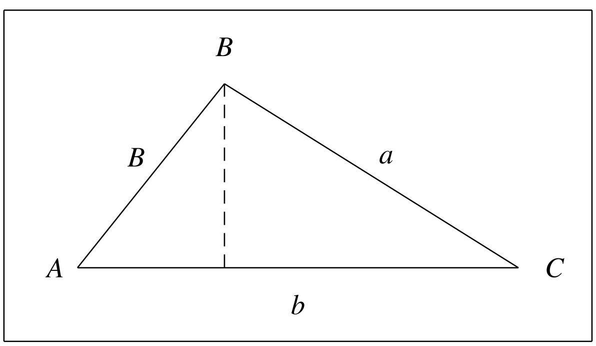


FIGURA N° 8.52

1. Si $A = 50^{o}\,40'$, $b = 7.03\,mts$, $c = 7.00\,mts$, halle el lado a.
2. $a = 4\,mts$, $b = 10\,mts$, $c = 9\,mts$, halle los ángulos A, B, C.
3. Si $b = 125\,mts$, $A = 41.6^{o}$, $C = 95^{\circ}$, halle el ángulo B.

4. Si $A = 26^{o}$, $a = 10mts$, $b = 18mts$, halle el ángulo B.

5. Si $C = 90^{o}$ demuestre utilizando el teorema del coseno que $a^2 + b^2 = c^2$.

6. En el triángulo de la figura siguiente

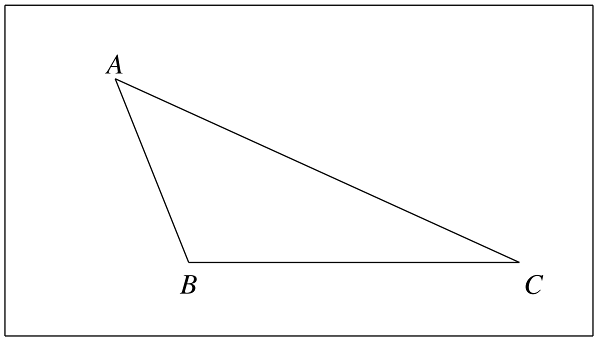


FIGURA N° 8.53

Se tiene que $a = 322mts$, $c = 212mts$ y $B = 110^{o}50'$, halle el valor de b, el ángulo A y el ángulo C.

Capítulo 9

FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

9.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dado un número $a > 0$, para la definición de la función $f(x) = a^x$, con x en $\mathbb{R}$ se tendrán en cuenta las propiedades de exponentes y radicales vistos en el capítulo1.

De allí recuérdese que:

1. Si $x \in N$ entonces $a^x = \underbrace{a \ldots a}_{x\ veces}$ y goza de las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} &a) \quad a^x a^y = a^{x+y} \\ &b) \quad (ab)^x = a^x b^x \\ &c) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad b \neq 0 \\ &d) \quad (a^x)^y = a^{xy} \end{aligned}$$

2. $a^0 = 1, \quad$ si $a \neq 0$

3. $a^{1/x} = \sqrt[x]{a}, \quad$ para x par y $a > 0$
   $a^{1/x} = \sqrt[x]{a}, \quad$ si x es impar y $a \in R$

4. $a^{x/y} = \left(a^{1/y}\right)^x = (\sqrt[y]{a})^x, \quad a > 0$

   Luego se puede afirmar que $1, 2, 3$ y 4 definen a^x si x es racional no negativo, pues cualquier número racional $x \geq 0$ cae en una de estas situaciones y se puede verificar que satisface las propiedades a, b, c, d de 1.

   Además si para todo racional $x > 0$, se define $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, entonces se completa la definición de a^x para todo x racional.

5. Para definir rigurosamente $f(x) = a^x$ para x irracional es necesario conocer previamente conceptos de sucesiones convergentes, por tal razón no se tratará en el momento. Para su cálculo ténganse en cuenta que si x es un número irracional es posible aproximarlo tanto como se quiera por exceso o por defecto por un número racional, por ejemplo:

   $2^{\sqrt{2}} = 2^{1.414213562} \ldots 2^{1.4142}$, donde el símbolo $\approx$ indica aproximadamente igual, pero también $2^{\sqrt{2}}$ es aproximadamente igual a $2^{1.4143}$ ó $2^{1.414213}$

   Se puede verificar que esta función exponencial así definida $f(x) = a^x$, con $a > 0$, satisface las propiedades a, b, c, d de 1 también para x irracional, es decir, se satisfacen para todos los reales.

9.1.1. Características de las funciones exponenciales

Teniendo en cuenta que el dominio de $f(x) = a^x$ con $a > 0$, es el conjunto de los números reales, tomando algunos valores de x en R y calculando sus correspondientes valores de y para dos casos particulares de a: El primero $a = 2$ $(a > 1)$ y el segundo $a = 1/2$ $(0 < a < 1)$ se pueden construir las siguientes tablas:

x	-5	-2.5	$-\sqrt{2}$	-1	0	$1/2$	1	1.8	3	π	4
2^x	0.031	0.176	0.375	0.5	1	1.414	2	3.48	8	8.824	16

x	-5	-2.5	$-\sqrt{2}$	-1	0	$1/2$	1	1.8	3	π	4
$(1/2)^x$	32	5.656	2.665	2	1	0.707	0.5	0.287	0.125	0.113	0.062

Y plasmando estos valores en el plano xy y uniendo los puntos hallados por una curva suave se obtienen las correspondientes gráficas para $f(x) = 2^x$, y $g(x) = (1/2)^x$. (Figura 9.1).

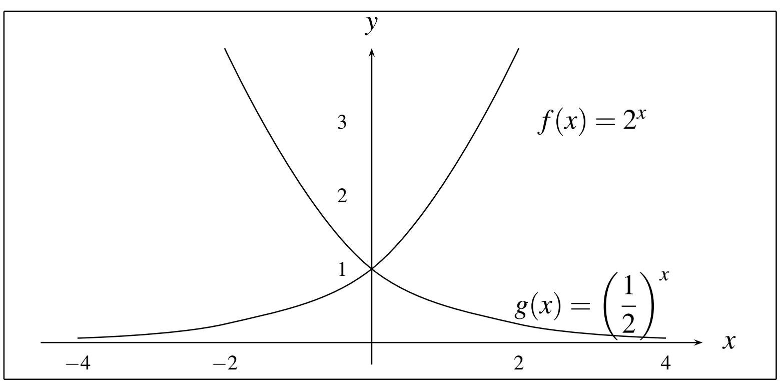
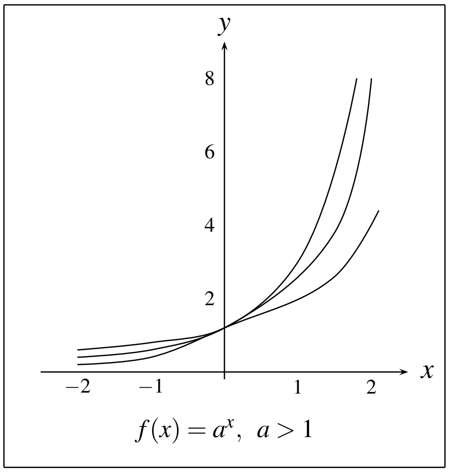


FIGURA N° 9.1

En general se puede apreciar que el gráfico de $f(x) = a^x$ para $a > 1$, se tienen características similares al de $f(x) = 2^x$, y el de $f(x) = a^x$ para todo $0 < a < 1$ tienen características similares al de $f(x) = (1/2)^x$. (Figura 9.2).



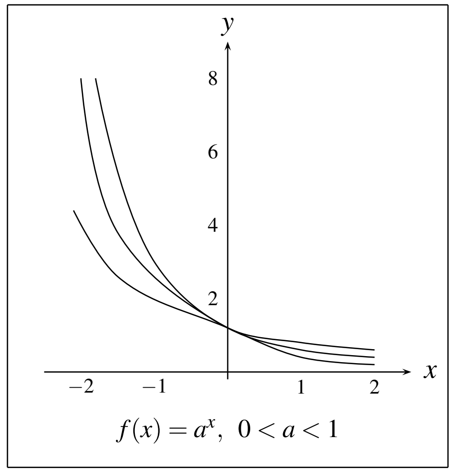


FIGURA N° 9.2

De estas gráficas se pueden intuir algunas de las propiedades de las funciones exponenciales, que se enunciarán a continuación, pero cuya demostración rigurosa requiere elementos de cálculo diferencial.

1. $a^0 = 1$, para $a > 0$
2. $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in R$ y $a > 0$
3. La gráfica de $f(x) = a^x$ para cualquier $a > 0$, no presenta interrupciones, es decir, su trazo es continuo
4. Si $x_1 > x_2 \Rightarrow \begin{cases} a^{x_1} > a^{x_2} & \text{si} \quad a < 1 \\ a^{x_1} < a^{x_2} & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

   ó dicho de otra forma, para $a > 1$ la función $f(x) = a^x$ es *creciente*, lo que significa gráficamente que a medida que la variable x toma valores cada vez más grandes, sus imágenes también toman valores cada vez más grandes, y para $0 < a < 1$ es *decreciente*, lo que significa que a medida que la variable x toma valores cada vez más grandes, sus imágenes toman valores cada vez más pequeños.
5. Para $a > 1$, la imagen de $f(x) = a^x$, puede ser tan grande como se quiera tomando a x suficientemente grande. (Cuando x se aleja a $+\infty$, sus imágenes $f(x)$ se alejan de $+\infty$) y tomando a x suficientemente pequeño $(x < 0)$ sus imágenes tienden a pegarse al eje x sin tocarlo. (Cuando x se aleja a $-\infty$ la gráfica de $f(x) = a^x$ se aproxima a cero).

Para el caso $0 < a < 1$ a medida que x se hace más grande sus imágenes se acercan a cero y para valores de x suficientemente pequeños $(x < 0)$ sus imágenes tomarán valores tan grandes como se quiera.

9.1.2. El número e

Considérese la expresión $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
dando algunos valores a n, y haciendo que estos valores sean cada vez más grandes, se tiene la siguiente tabla:

n	1	100	1000	100000	1000000	10000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.7048	2.7169	2.71826	2.71828	2.71828

de ella se puede apreciar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es cada vez grande a medida que n es mayor, pero nunca será mayor que 3. En realidad en un curso posterior se podrá demostrar que cuando n tiende a $+\infty$, esta expresión se aproxima a un numero irracional que se nota por e y tiene aproximadamente el valor de

$$e = 2.71828182\ldots$$

En la práctica la función exponencial a^x que tiene como base a este número e, es decir, $f(x) = e^x$ es la más utilizada, a tal punto que cuando se hace referencia a la función exponencial sin especificar su base, se debe entender que se trata de $f(x) = e^x$.

9.2. FUNCIÓN LOGARITMO

Puesto que la función $f(x) = a^x,\;\; a > 0,\;\; a \neq 1$ es inyectiva, entonces existe su inversa $f^{-1}(x)$, la cual se llama *función logaritmo* en base a y se nota‘por:

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

Obsérvese que para $a = 1,\;\; f(x) = a^1 = a$ que es constante, luego no es inyectiva, por tanto no tiene inversa, es decir, no se puede hallar el logaritmo en base 1 de x.

Esta función $\log_a x$ satisface por tanto que: su dominio es $(0,\infty)$ pues es el recorrido de $f(x) = a^x$ y su recorrido es R pues es el dominio de $f(x) = a^x$. Además $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$ y $\log_a a^x = x$ $\forall x \in R$ o sea que

$$y = a^x \text{ equivalente a } \log_a y = x$$

y sirve para despejar x en una ecuación de la forma $a^x = b$ ya que:

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a a^x = \log_a b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Recíprocamente, si se trata de despejar x en una ecuación de la forma, $\log_a x = b$ se hace utilizando la función exponencial en base a, pues $\log_a x = b \Leftrightarrow a^{\log_a x} = a^b$ equivale a decir $x = a^b$.

La función $y = \log_a x$ con $a = e$, es decir, la inversa de $g(x) = e^x$ se llama *Función logaritmo natural* y se nota por $f(x) = \ln(x)$, es decir, $\ln(x) = \log_e x$ y así

$$y = \ln(x) \quad \text{que equivale a} \quad x = e^y$$

En muchas ocasiones en el trabajo con logaritmos en base diferente de e, se prefiere hacer una transformación adecuada la cual se presenta mas adelante que nos permita trabajar con esta base, pues las calculadoras manuales en general solo calculan logaritmos naturales (base e o logaritmo en base 10).

Puesto que $f(x) = \log_a x$ es la inversa de $g(x) = a^x$, entonces sus gráficos deben ser simétricos respecto a la recta $y = x$. (Figura 9.3).

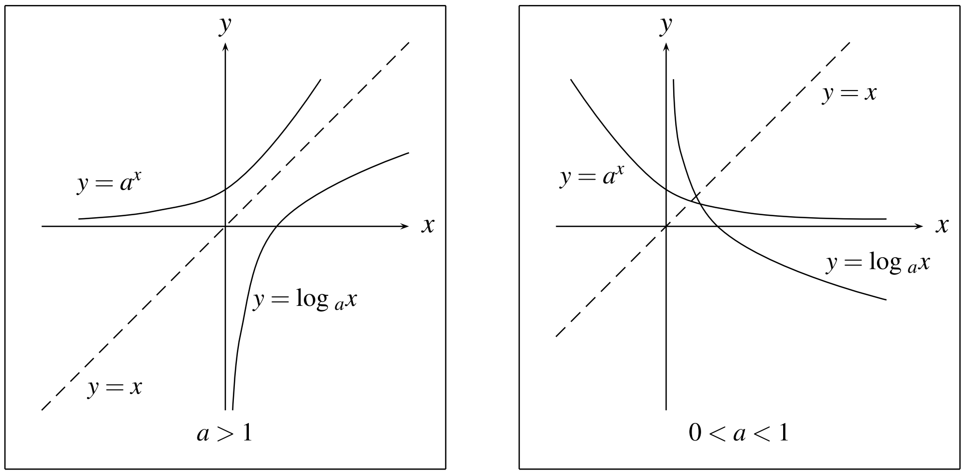


FIGURA N° 9.3

Ejemplo

1. Si $x = 2^5 \Rightarrow \log_2 x = \log_2 2^5 = 5$.
2. Si $\log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4$.
3. Si $\log_{1/2} x = -3 \Rightarrow x = (1/2)^{-3}$.
4. Si $x = 8^{-2} \Rightarrow \log_8 x = \log_8 8^{-2} = -2$.
5. $2^{\log_2 -5}$ no tiene sentido pues (-5) no esta en el dominio de ningún logaritmo.
6. $\log_5 5^3 = 3$.
7. $3^{\log_3 2} = 2$.

9.2.1. Propiedades

De las gráficas de la función logaritmo se pueden deducir las siguientes propiedades:

1. $\log_a 1 = 0 \quad$ para todo $\quad a \neq 1$.
2. El dominio de la función logaritmo en base a es $(0, \infty)$ y su recorrido es todo R.
3. Si $\quad a > 1, \quad f(x) = \log_a x \quad$ es una función creciente y si $\quad 0 < a < 1 \quad$ es decreciente.

4. Si $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a ∞ y tiende a $-\infty$ cuando x tiende a cero, es decir $x = 0$ es una asíntota vertical de $f(x) = \log_a x$.
   Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ tiende a $-\infty$ cuando x y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a cero, es decir $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \log_a x$.

Otras propiedades

1ª Propiedad

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \text{si } x > 0 \quad \text{y} \quad y > 0$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\text{Sea} \quad z &= \log_a x + \log_a y \\
\Rightarrow a^z &= a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a x} = xy; \\
\text{es decir} \quad a^z &= xy \\
\text{por tanto} \quad \log_a a^z &= \log_a xy \\
\text{entonces} \quad z &= \log_a xy, \\
\text{y así} \quad \log_a xy &= \log_a x + \log_a y.
\end{aligned}$$

Ejemplo

1. $\log_3 (125) = \log_3 (5)(5)(5) = \log_3 5 + \log_3 5 + \log_3 5$
2. $\log_2 4 + \log_2 20 + \log_2 10 = \log_2 (4)(20)(10) = \log_2 800$

Ejemplo

Hallar el valor de x tal que:

$$\log_{10} x = \log_{10} 5 + \log_{10} 4 + \log_{10} 5$$

$$\begin{aligned}
\log_{10} x &= \log_{10} 5 + \log_{10} 4 + \log_{10} 5 \\
&= \log_{10} (5)(4)(5) = \log_{10} 100 \\
&= \log_{10} 10^2, \quad \text{es decir}
\end{aligned}$$

$$\log_{10} x = 2, \quad \text{por tanto}$$

$$x = 10^2$$

NOTA

El logaritmo en base 10, se nota por $\log x$, es decir

$$\log_{10} x = \log x$$

2ª Propiedad

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad y > 0$$

Demostración

Similar a la anterior.

Ejemplo

1. $\log\ \frac{15}{5} = \log\ 15 - \log\ 5$
2. $\log\ 2 - \log\ 4 - \log\ 3 + \log\ 24$

$$\begin{aligned} &= \log\ 2 + \log\ 24 - \log\ 4 - \log\ 3 \\ &= \log\ 2 + \log\ 24 - (\log\ 4 + \log\ 3) \\ &= \log\ 2 * 24 - \log\ 4 * 3 \\ &= \log\ 48 - \log\ 12 = \log\ 4 \end{aligned}$$

3. $\log\ \frac{abc}{xy} = \log\ abc - \log\ xy$
   $\log\ a + \log\ b + \log\ c - \log\ x - \log\ y$

3ª Propiedad

$$\log_a x^\alpha = \alpha\ \log_a x$$

Demostración

$x = a^y$ (es decir $y = \log_a x$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x^\alpha = a^{\alpha y} \quad \Rightarrow \quad \log_a x^\alpha \quad = \quad \log_a a^{\alpha y} \\ &\Rightarrow \quad \log_a x^\alpha = \alpha y \quad \log_a a \\ &\Rightarrow \quad \log_a x^\alpha = \alpha\ \log_a x \\ &\Rightarrow \quad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \end{aligned}$$

4ª Propiedad

$$\log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a x$$

Demostración

Se parte de que:

$$(a^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}\log_a x} = a^{\alpha \log_a x} = a^{\log_a x^a} = x^a$$

tomando logaritmo en base a^{β} en esta igualdad, se obtiene:

$$\frac{\alpha}{\beta}\ \log_a x = \log_{a^{\beta}}\ x^{\alpha}$$

Ejemplo

1. $\log_2 2^5 = \frac{5}{1}\log_2 2 = 5$

2. $\log_{\sqrt{2}} 64 = \log_{2^{1/2}} 2^6 = (6/(1/2))\log_2 2 = 12$

3.

$$\begin{aligned}\log_9 6 = \log_{3^2} 6 = \log_{3^2} (2)(3) &= \log_{3^2} 2 + \log_{3^2} 3 \\ = \frac{1}{2}\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_3 3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 2\end{aligned}$$

5ª Propiedad

$$a^x = b^{x \log_b a}$$

Demostración

$$b^{x \log_b a} = b^{\log_b a^x} = a^x$$

Esta propiedad permite pasar una función exponencial en una base dada, a cualquier otra base. En particular

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ejemplos

1. $2^x = 3^{x \log_3 2}$

2. $5^x = 2^{x \log_2 5}$

3. Pasar 3^x a base 5 $\quad 3^x = 5^{x \log_5 3}$

4. Pasar 6^x a base e $\quad 6^x = e^{x \ln 6}$

6ª Propiedad

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{es decir,} \quad \log_b x = (\log_a x)(\log_b a)$$

esto indica como pasar un logaritmo en base a a un logaritmo en base b

Demostración

Se parte de que:

$$b^{(\log_a x)(\log_b a)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = (a)^{\log_a x} = x$$

y tomando logaritmo en base b a los dos lados se tiene:

$$\log_b b^{\log_a x \log_b a} = (\log_a x)(\log_b a) = \log_b x\,; \quad \text{es decir}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

como se dijo, esta propiedad permite cambiar de base en los logaritmos y en particular es importante el cambio de cualquier base a la base e pues, por ejemplo en las calculadoras manuales sólo figuran ln y log y no logaritmos en otras bases, por tanto para calcular $\log_a x$ se debe considerar:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \;\text{ ó }\; \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Ejemplo

1. $\log_2 x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \dfrac{\log x}{\log 2}$

2. $\log_3 x = \dfrac{\log_e x}{\log_e 3} = \dfrac{\ln x}{\ln 3}$

3. $\log_5 7 = \dfrac{\log_7 7}{\log_7 5} = \dfrac{1}{\log_7 5}$

7ª Propiedad

$$\log_a x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad x = y, \quad x > 0,\; y > 0$$

Demostración

A partir de la propiedad de la función exponencial.

Ejemplo

1. $\log_3 x = \log_3 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

2. Si $x = 7 \quad \Rightarrow \quad \log_2 x = \log_2 7$

9.2.2. Ecuaciones con logaritmos

1. Hallar x tal que $2^x = 5^x$
   Tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} \ln 2^x &= \ln 5^x \\ \Rightarrow x \ln 2 &= x \ln 5 \\ \Rightarrow x(\ln 5 - \ln 2) &= 0 \\ \Rightarrow x \ln(5/2) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

2. Hallar x tal que $3^x = 27$
   Tomando logaritmo en base 3 en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} &\log_3 3^x = \log_3 27 \\ &\quad \Rightarrow x = \log_3 3^3 \\ &\quad \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

3. Hallar x tal que $\log(x-15) + \log x = 2$
   En primer lugar $x > 0$ y $x - 15 > 0$, es decir, $x > 15$ (¿Por qué?)

$$\begin{aligned} \log(x-15) + \log x &= 2 \\ \log(x-15)x &= 2 \\ (x-15)x &= 10^2 \quad \text{entonces} \\ x^2 - 15x - 100 &= 0 \quad \text{entonces} \\ (x-20)(x+5) &= 0\,, \quad \text{por tanto} \\ x = 20 \quad &\text{ó} \quad x = -5 \end{aligned}$$

   Volviendo al inicio se tiene que los valores de x deben ser mayores que 15 y en este caso solo 20 satisface esta condición y entonces 20 es la solución del problema

4. Hallar x tal que $\log_2 x + \log_{1/2} x + \log_4 x + \log_{\sqrt{2}} x = 15/2$.

Pasamos todos los logaritmos a base 2 así:

$$\log_{1/2} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x$$
$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{2^{1/2}} x = \frac{1}{1/2} \log_2 x = 2 \log_2 x$$
$$\log_4 x = \log_{2^2} x = 1/2 \log_2 x \quad \text{de esta forma:}$$

$$\log_2 x - \log_2 x + (1/2) \log_2 x + 2 \log_2 x = (5/2) \log_2 x \quad \text{entonces}$$
$$5/2 \log_2 x = 15/2$$
$$\text{entonces} \quad \log_2 x = 3 \quad \text{y así} \quad x = 2^3 = 8$$

que es solución de la ecuación, ya que se encuentra en el intervalo $(0,\infty)$ que es el dominio de $\log_a x$ y satisface la ecuación.

5. Solucionar la ecuación $\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x}$

es decir $\quad \sqrt{\log x} = \frac{1}{2} \log x$

$$\log x \geq 0 \quad \text{y} \quad x > 0 \Rightarrow x \geq 1$$

elevando al cuadrado ambos términos de la ecuación se tiene:

$$\log x = \frac{1}{4} \log^2 x \quad \text{entonces}$$
$$\log x - \frac{1}{4} \log^2 x = 0 \Rightarrow (\log x) \left(1 - \frac{1}{4} \log x\right) = 0$$
$$\Rightarrow \log x = 0 \quad \text{ó} \quad 1 - \frac{1}{4} \log x = 0$$
$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{ó} \quad 1 = \frac{1}{4} \log x \Leftrightarrow \log x = 4 \Leftrightarrow x = 10^4$$

así que $x = 1$ ó $x = 10^4$ satisfacen la ecuación, pues los dos son mayores o iguales que 1 como se exige al comienzo.

6. Solucionar la ecuación $\log_x 2 = 3$
pasando $\log_x 2$ a base 2 se tiene:

$$\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x} \quad \text{entonces}$$
$$\log_2 x = 3 \quad \text{equivale}$$
$$\frac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \log_2 x \Rightarrow x = 2^{1/3}$$

7. Solucionar la ecuación $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad \log_4(\log_3(\log_2 x)) &= 0 \Rightarrow \\ \log_3(\log_2 x) &= 1 \Rightarrow \\ \log_2 x &= 3 \\ \text{por tanto} \quad x &= 2^3 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Escribir las siguientes igualdades en forma logarítmica:

   a) $2^5 = 32$ *b*) $10^3 = 1000$

   c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$ *d*) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

2. Escribir las siguientes igualdades en forma exponencial:

   a) $\log_2 64 = 6$ *b*) $\log_3 81 = 4$

   c) $\log_5 125 = 3$ *d*) $\log\ 0.01 = -2$

3. Usando la definición de logaritmo, hallar x tal que:

   a) $x = \log_3 27$ *b*) $x = \log_2 16$

   c) $x = \log_2 0.125$ *d*) $\log_5 x = 0$

   e) $\log_4 x = 2/3$ *f*) $\log_8 x = -2$

   g) $\log\ x = -0.02$

4. Para qué bases

   a) $\log_a 36 = 2$ *b*) $\log_b 36 = 1$

   c) $\log_c 27 = 3/2$ *d*) $\log_d 2 = 0.5$

5. ¿Cuáles de los siguientes pares de números es mayor?

   a) $\log_5 32;\ \ \log_2 5$ *b*) $\log_5 14;\ \ \log_7 18$

   c) $\log_{1/2}\sqrt{3};\ \ \log_{1/3}\sqrt{2}$ *d*) $\log_5 32;\ \ \log_{32} 5$

6. Hallar el valor numérico de:

   a) $\log_3(\log_8(\log_2 16))$

   b) $\log_2 \sqrt[3]{16} + \log_8 \sqrt[4]{2} - \log_3(27\sqrt{3}) - \log_5(\sqrt{5\sqrt{5}})$

7. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a) $5^x = 125$

   b) $\log_2(x-5) = 3$

   c) $\log\,(x-3) = 3$

   d) $\ln\,(x-3) = 3$

   e) $\log\,x = 2\log\,3 + 3\log\,5$

   f) $\log\,x = 3\log\,2 - 2\log\,3 + \log\,5$

   g) $\log_{1/2}(x+1) - \log_{1/2}(x-3) = 1$

   h) $\log_2(x+4) = 4$

   i) $\log_3 \log_8 \log_2(x+5) = -1 + \log_3 2$

   j) $x^{\log\,x} = 100x$

   k) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

   l) $\sqrt{x^{\log\,\sqrt{x}}} = 10$

   m) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \log_x 8$

   n) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$

   ñ) $x + \log\,(1 + 2^x) = x\log\,5 + \log\,6$

   o) $\log\,\sqrt{1+x} + 3\log\,\sqrt{1-x} = \log\,\sqrt{1-x^2} + 2$

   p) $\log^{-1} x = 2 + \log\,x^{-1}$

   q) $\dfrac{1}{5-\log\,x} + \dfrac{2}{1+\log\,x} = 1$

9.3. ALGUNAS DESIGUALDADES

1. Si $a > 1$, $\quad 0 < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2$

   Demostración

   Como $0 < x_1 < x_2$, existen $\log_a x_1$ y $\log_a x_2$, y así

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 = a^{\log_a x_1} < x_2 = a^{\log_a x_2} \\ &\Leftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2} \\ &\Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \end{aligned}$$

   pues para $a > 1$, $\;f(x) = a^x$ es creciente.

Ejemplos

a) $2^2 < 2^4 \Rightarrow \log_2 2^2 < \log_2 2^4$ pues $a = 2 > 1$

b) $3 < 27 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 27$ pues $a = 3 > 1$

c) Si $x < 2^3$ y $x > 0 \Rightarrow \log_2 x < \log_2 8 \Rightarrow \log_2 x < 3$

d) Si $\log_5 x < 2 \Rightarrow 0 < x < 5^2$

e) Si $3^x > 7 \Rightarrow \log_3 3^x > \log_3 7 \Rightarrow x > \log_3 7$

f) Si $x > \log_2 3 \Rightarrow 2^x > 3$

g) Si $\log_2 x > 4 \Rightarrow x > 2^4$

h) Si $x > 3^6 \Rightarrow \log_3 x > 6$

2. Si $0 < a < 1;\ \ 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Demostración:

Análoga a la demostración de 1.

Ejemplos

a) $\dfrac{1}{16} < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \log_{1/2}\left(\dfrac{1}{16}\right) > \log_{1/2}\left(\dfrac{1}{4}\right)$, pues $a = 1/2 < 1$

b) $\log_{2/3}\left(\dfrac{8}{27}\right) > \log_{2/3}\dfrac{9}{27} \Rightarrow \dfrac{8}{27} < \dfrac{9}{27}$, pues $a = 2/3 < 1$

c) Si $\log_{1/2} x < 3 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} x} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

d) Si $x > \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow \log_{1/3} x < \log_{1/3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow \log_{1/3} x < 5$

e) Si $\log_{1/3} x > 4 \Rightarrow 0 < x < \left(\dfrac{1}{3}\right)^4$

f) Si $\log_{1/2} x > 2 \Rightarrow 0 < x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

Otros ejemplos

1. Solucionar $\log_3(2x-5) < 2$
   $a = 3 > 0;\ \ 2x-5 > 0$, es decir $x > \frac{5}{2}$ para que $\log_3(2x-5)$ tenga sentido.
   $\log_3(2x-5) < 2 \quad \Rightarrow \quad 2x-5 < 3^2 \quad \Rightarrow \quad 2x < 9+5 = 14 \qquad \Rightarrow x < 7$,
   y como x debe ser mayor que $5/2$ entonces el conjunto solución es $(5/2, 7)$.

2. Hallar el conjunto solución de: $\log_3|2x-5| > 2$, pues $|2x-5| \geq 0$ en esta desigualdad x puede tomar cualquier valor real $x \neq 5/2$, luego si
   $\log_3|2x-5| > 2 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| > 3^2 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| > 9$ y la solución de esta desigualdad es:

$\lvert 2x-5 \rvert$	$5x-2$	$2x-5$
	$5/2$	
$\log_3 \lvert 2x-5 \rvert > 2$	$5x-2>9$ (I)	$2x-5>9$ (II)

i. Si $x \leq 5/2 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| = 5-2x > 9 \quad \Leftrightarrow \quad 5-9 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad -4 > 2x$ $\Leftrightarrow \quad x < -2$
luego la solución en i) es $(-\infty,-2) \cap (-\infty,5/2] = (-\infty,-2)$.

ii. Si $x \geq 5/2 \quad \Rightarrow \quad |2x-5| = 2x-5 > 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 14 \quad \Leftrightarrow \quad x > 7$
luego la solución en ii) es $(7,+\infty) \cap [5/2,+\infty) = (7,+\infty)$ así la solución total es $(-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$.

3. Hallar el conjunto solución de $\log_x(x+6) < 2$, como $x+6$ debe ser mayor que 0, entonces $x > -6$.

   a) Si $x > 1$

   $$\begin{aligned} \log_x(x+6) < 2 &\Leftrightarrow (x+6) < x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty) \end{aligned}$$

   por tanto para este caso la solución es:
   $[(-\infty,-2) \cup (3,+\infty)] \cap (1,+\infty) \cap (-6,+\infty) = (3,+\infty)$

   b) Si $0 < x < 1$,

   $$\begin{aligned} \log_x(x+6) < 2 &\Rightarrow (x+6) > x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x+2 < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (-2,3) \end{aligned}$$

   y así la solución para este caso es: $(-2,3) \cap (0,1) \cap (-6,+\infty) = (0,1)$
   luego la solución total es: $(3,+\infty) \cup (0,1)$

EJERCICIOS

1. Hallar x tal que:

   a) $\sqrt{5^x} = 1/125$

   b) $3^{x+1} + 3^x = 36$

  c) $2^{2x+2} = (9)(2^x) - 2$
  d) $4^{\sqrt{9-x}} - (6)(2^{\sqrt{9-x}}) + 8 < 0$

2. Halle el conjunto solución de:
   a) $5^{2x+1} \leq 5^{3x-2}$
   b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$
   c) $10^{5x-2} = 348$
   d) $x^{x^2-7x+12} = 1$
   e) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

3. Cuáles de las afirmaciones siguientes son válidas:
   a) Si $x > 2 \Rightarrow 3^x > 3^2$
   b) Si $x > 2 \Rightarrow (\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^2$
   c) Si $x < 5 \Rightarrow a^x < a^5$ para $a > 0$
   d) Si $x > -2 \Rightarrow a^x > a^{-2}$ para todo $a > 0$
   e) La función $f(x) = 2^x$ es inyectiva y par.
   f) La función $f(x) = \frac{1}{2^x}$ es creciente e impar.
   g) La función $f(x) = 3^x$ tiene recorrido $(0, +\infty)$.
   h) Si $a^x < a^y \Rightarrow x < y$ para $a > 0$, $x, y \in R$

4. Justificar que para los valores de a y b asignados, las desigualdades dadas tienen las soluciones que aparecen en los cuadros:

	$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$
$a^x > b \quad (a > 1)$	$(\log_a b, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$a^x < b \quad (a > 1)$	$(-\infty, \log_a b)$	No hay solución	No hay solución
$a^x > b \quad (0 < a < 1)$	$(-\infty, \log_a b)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$a^x < b \quad (0 < a < 1)$	$(\log_a b, +\infty)$	No hay solución	No hay solución

	$-\infty < b < +\infty$
$\log_a x > b \quad (a > 1)$	$(a^b, +\infty)$
$\log_a x < b \quad (a > 1)$	$(0, a^b)$
$\log_a x > b \quad (0 < a < 1)$	$(0, a^b)$
$\log_a x < b \quad (0 < a < 1)$	$(a^b, +\infty)$

5. Resolver las siguientes desigualdades:

   a) $\log_3 x > 5$
   b) $\log_2(x-5) < 3$
   c) $\log_2(x^2-x-6) < 0$
   d) $\log_2(x^2-x-6) > 0$
   e) $\log_x(x-2) < 2$
   f) $\log_x(x^2-2x) > 1$
   g) $\log_2\left|\dfrac{3x-5}{x-1}\right| < 2$
   h) $\log_2\left(\dfrac{3x-5}{x-1}\right) < 4$
   i) $\log_{1/2}\left|\dfrac{x-1}{x-3}\right| < 2$
   j) $\log_2(3x+2)-\log_2(1-2x) > 2$
   k) $\log_3(1-\sqrt{x+1}) < 2$
   l) $\log_2(|x-2|-1) > 1$
   m) $\log_8(x^2-4x+3) > Tan\,\dfrac{\pi}{4}$

6. ¿Cuáles de las desigualdades siguientes tienen las mismas soluciones?.

   a) $\log_3 x^2 > 0$ y $2\log_3 x > 0$
   b) $\log_3 x^2 > 0$ y $2\log_3 |x| > 0$
   c) $\log_3 x^2 > 0$ y $2\log_3(-x) > 0$
   d) $\log_2(x+7)+\log_2(x-8) > 0$ y $\log_2(x+7)(x-8) > 0$
   e) $\log_{\sqrt{x}}(x-1)(x+1) > 0$ y $x > 0$ y $(x-1)(x+1) > 0$
   f) $\log\, x^2 > 0$ y $\log\, x+\log\, x > 0$
   g) $\log_{11}(x-1)(x+1) < 0$ y $(x-1)(x+1) > 0$
   h) $\log\, x^4 > 0$ y $4\log\, x > 0$

9.4. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

A partir de la función exponencial se construyen unas funciones que tienen un comportamiento muy similar al de las funciones trigonométricas; son las llamadas *Funciones Hiperbólicas*, definidas de la forma:

Seno hiperbólico de x:

$$Senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Observe que: (ejercicio)

Su dominio es $(-\infty, +\infty)$ y su recorrido es $(-\infty, +\infty)$.
Es una función inyectiva.
Es una función impar.

Coseno hiperbólico de x:

$$Cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Observe que: (ejercicio)

Su dominio es $(-\infty, +\infty)$ y su recorrido es $[1, +\infty)$.
No es una función inyectiva.
Es una función par.

Tangente hiperbólica de x:

$$Tanh\, x = \frac{Senh\, x}{Cosh\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Observe que: (ejercicio)

Su dominio es $(-\infty, +\infty)$ y su recorrido es $(-1, 1)$.
Es una función inyectiva.
Es una función impar.
De la misma forma se pueden definir:

Cotangente hiperbólica de x:

$$Coth\, x = \frac{Cosh\, x}{Senh\, x}$$

Secante hiperbólica de x:

$$Sech\, x = \frac{1}{Cosh\, x}$$

Cosecante hiperbólica de x:

$$Csch\, x = \frac{1}{Senh\, x}$$

El nombre de hiperbólicas se origina en el hecho de que así como las funciones trigonométricas $Cos\, x$ y $Sen\, x$ se definen como las coordenadas de los puntos sobre una circunferencia unitaria, las funciones $Cosh\, x$ y $Senh\, x$ corresponden a las coordenadas de los puntos C y K (figura 9.4.) de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, siendo $Cosh\, x$ la abscisa y $Senh\, x$ la ordenada y x es el área del sector OCK. (Parte sombreada de la figura 9.4.).

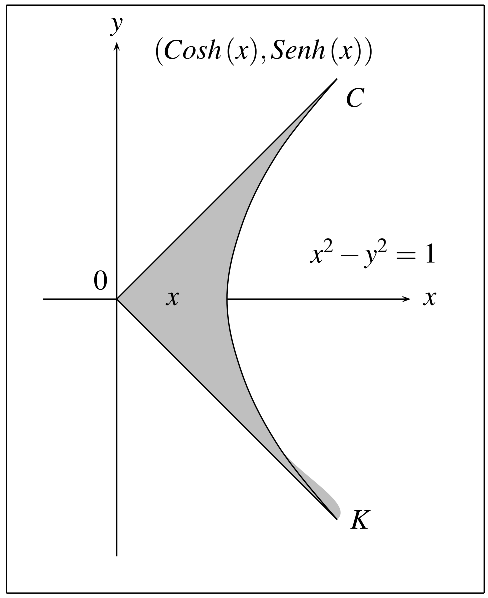


FIGURA N° 9.4

De las definiciones de las funciones hiperbólicas y haciendo una tabulación se obtienen las correspondientes gráficas de $Senh\,x, Cosh\,x, Tanh\,x$, las cuales aparecen en la figura 9.5. Además aparecen sus correspondientes inversas, obtenidas después de haber restringido su dominio para el caso del $Cosh\,x$ que no es inyectiva. (Figura 9.6).

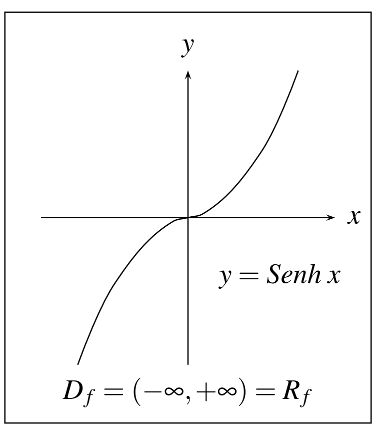


FIGURA Nº 9.5 (a)

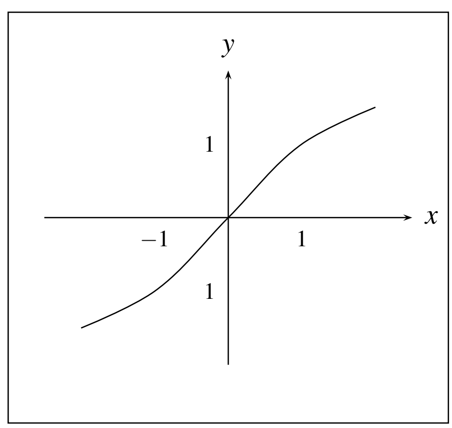


FIGURA Nº 9.6 (a)

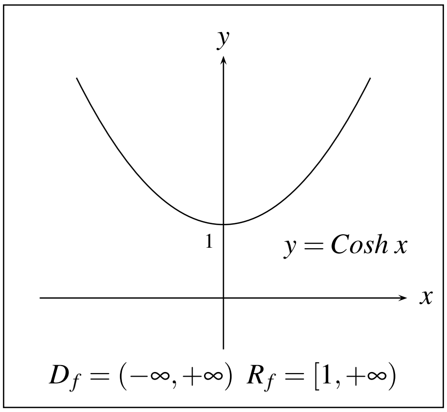


FIGURA Nº 9.5 (b)

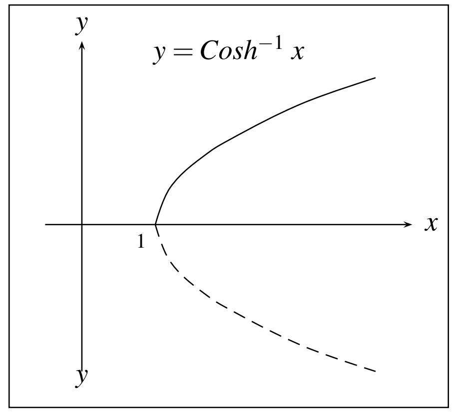


FIGURA Nº 9.6 (b)

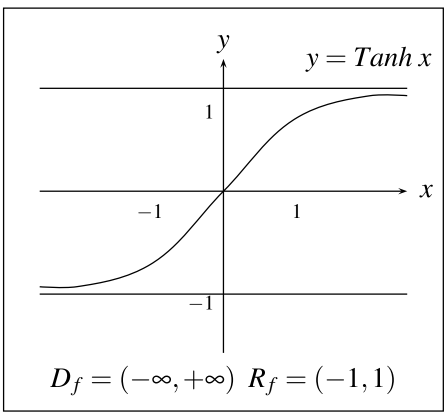


FIGURA Nº 9.5 (c)

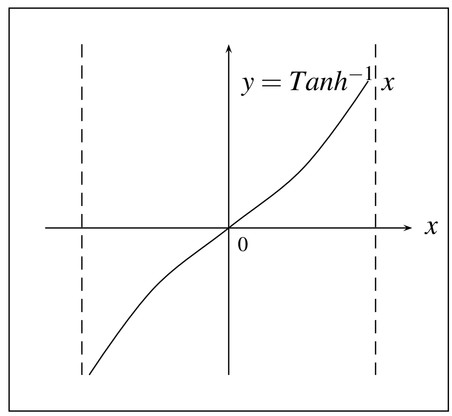


FIGURA Nº 9.6 (c)

Así como en las funciones trigonométricas se considera una identidad fundamental $Sen^2\,x + Cos^2\,x = 1$ y a partir de ella se deducen otras, en las funciones hiperbólicas sucede una situación análoga y la identidad fundamental aquí es:

$$Cosh^2\,x - Senh^2\,x = 1$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Cosh^2\,x - Senh^2\,x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

De manera similar se pueden demostrar las siguientes identidades:

1. $1 - Tanh^2\,x = Sech^2\,x$
2. $Coth^2\,x - 1 = Csch^2\,x$
3. $Cosh\,x + Senh\,x = e^x$

4. $Cosh\,x - Senh\,x = e^{-x}$
5. $Senh\,(-x) = -Senh\,x$
6. $Cosh\,(-x) = Cosh\,x$
7. $Senh\,(x \pm y) = Senh\,x Cosh\,y \pm Senh\,y Cosh\,x$
8. $Cosh\,(x \pm y) = Cosh\,x Cosh\,y \pm Senh\,y Senh\,x$
9. $Tanh\,(x \pm y) = \dfrac{Tanh\,x \pm Tanh\,y}{1 \pm Tanh\,x Tanh\,y}$
10. $Senh\,2x = 2Senh\,x Cosh\,x$
11. $Cosh\,2x = Cosh^2\,x + Senh^2\,x$
12. $Senh^2\,x = \dfrac{Cosh\,2x - 1}{2}$
13. $Cosh^2\,x = \dfrac{Cosh\,2x + 1}{2}$
14. $Senh\,x + Senh\,y = 2Senh\left(\dfrac{x+y}{2}\right) Cosh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
15. $Senh\,x - Senh\,y = 2Cosh\left(\dfrac{x+y}{2}\right) Senh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
16. $Cosh\,x + Cosh\,y = 2Cosh\left(\dfrac{x+y}{2}\right) Cosh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
17. $Cosh\,x - Cosh\,y = 2Senh\left(\dfrac{x+y}{2}\right) Senh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
18. $Senh\,x Senh\,y = \dfrac{1}{2}\left\{Cosh\,(x+y) - Cosh\,(x-y)\right\}$
19. $Cosh\,x Cosh\,y = \dfrac{1}{2}\left\{Cosh\,(x+y) + Cosh\,(x-y)\right\}$
20. $Senh\,x Cosh\,y = \dfrac{1}{2}\left\{Senh\,(x+y) + Senh\,(x-y)\right\}$

9.5. FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Como se sabe la función $f(x) = Senh\,x$ es inyectiva por tanto tiene inversa, la cual se nota por

$$f^{-1}(x) = Senh^{-1}\,x$$

Esta función se puede representar mediante logaritmos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y &= Senh^{-1}\,x \quad \text{equivale} \\ x &= Senh\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ \Rightarrow 2x &= e^y - e^{-y} \\ \Rightarrow 2x &= \frac{e^{2y}-1}{e^y} \\ \Rightarrow e^{2y} - 2x\,e^y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

(Observe que esta ecuación se puede tratar como una cuadrática donde la variable es e^y y $-2x$ es un coeficiente de e^y) visto así:

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1} \\ \Rightarrow e^y &= x + \sqrt{x^2+1} \quad (\text{pues} \quad \sqrt{x^2+1} > x \quad \text{y} \quad e^y > 0) \\ \Rightarrow y &= \ln\,(x + \sqrt{x^2+1}) \end{aligned}$$

y así:

$$Sen^{-1}\,x = \ln\,(x + \sqrt{x^2+1})$$

En forma similar se pueden definir las inversas para las demás funciones hiperbólicas, teniendo cuidado en la restricción de sus dominios. Además todas se pueden representar mediante expresiones logarítmicas, así:

$$\begin{aligned} Cosh^{-1}\,x &= \ln\,(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{si} \quad x \geq 1 \\ Tanh^{-1}\,x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{si} \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Capítulo 10

LÍMITES Y CONTINUIDAD

10.1. CONCEPTOS INTUITIVOS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

Suponga que se tiene una función $y = f\ (x)$ de reales en reales con dominio D. Sea $a \in R$; saber cuál es el comportamiento de la función en a es muy sencillo, simplemente calcule f en a y observe que solamente pueden suceder dos cosas: o existe un número real $f\ (a)$, o sea $a \in D_f$ o no existe $f\ (a)$, lo cual indica que $a \notin D_f$. Pero saber cuál es el comportamiento de la función muy cerca de a sin referirnos a un punto específico y sin referirnos a a, es un problema bastante delicado pero de gran importancia, ya que conociendo este comportamiento se tiene una amplia información sobre la gráfica de la función cerca de a, información que no se puede tener si solamente se conoce la función en el punto.

Inicialmente se presentarán diversas situaciones en las cuales se mostrará, a partir de las gráficas de unas funciones, qué sucede con las imágenes de una variable x a medida que esta variable se acerca a un punto fijo a, sin llegar a ser a, pero acercándosele tanto como se quiera.

Ejemplo 1

Considere la función $f\ (x) = x^2$ (figuras 10.1) y tome $a = 2$.

Conocer el comportamiento de la función en $x = 2$, es simplemente calcular $f\ (2)$, que en este caso es $f\ (2) = 2^2 = 4$ ó sea $2 \in D_f$.

Pero para conocer el comportamiento de la función cuando la variable x se está acercando a 2, es preciso apreciar que:

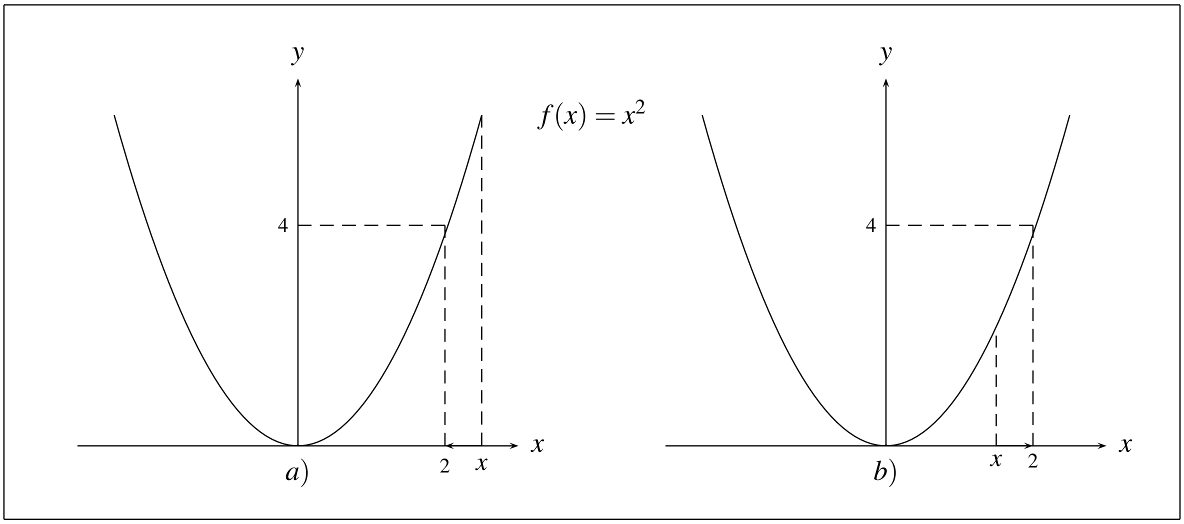


FIGURA N° 10.1

1. En la figura 10.1 (a), a medida que x se acerca a 2 por su derecha, sus imágenes se van acercando a 4, lo que se suele expresar diciendo, que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la derecha es 4 y se nota por: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$
2. En forma análoga de la figura 10.1 (b) a medida que x se acerca a 2 por su izquierda, sus imágenes se van acercando a 4, en este caso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por su izquierda es 4 y se nota por: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$

Observe que en este caso la gráfica de la función no presenta ningún agujero, ni interrupción en $x = 2$ (lo que significa que la función es continua en $x = 2$) y también que la función tiende al mismo valor cuando x se acerca a 2 tanto por la derecha como por la izquierda y además que ese valor común de esos límites laterales coincide con el valor de f en 2, $f(2)$. Estas situaciones no siempre se presentan en la gráfica de una función, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x+3 & si \;\; x \leq 1 \\ 2-x & si \;\; x > 1 \end{cases}$

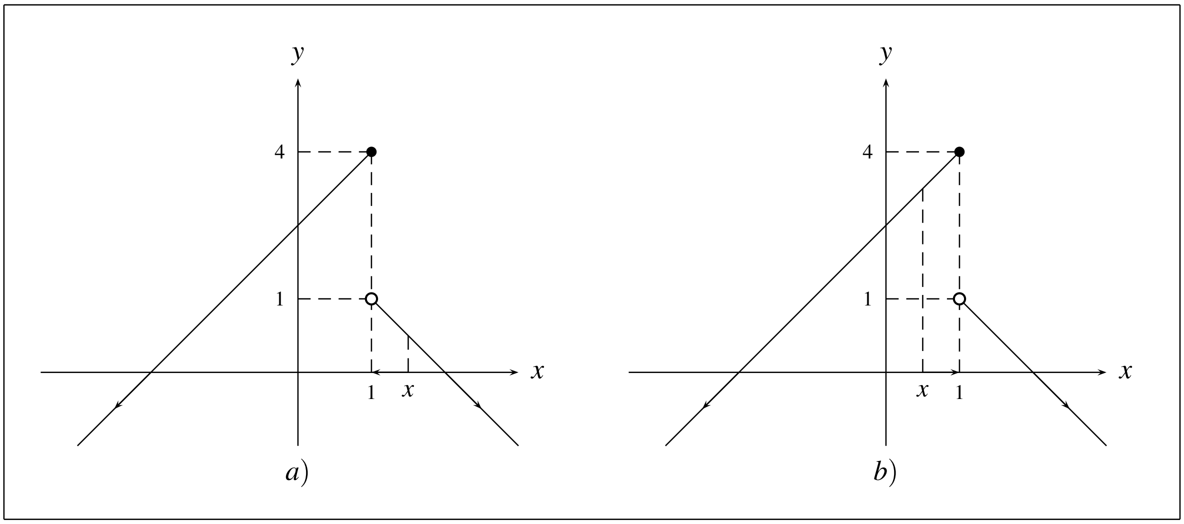


FIGURA N° 10.2

De la figura 10.2 (a), se tiene que cuando x se acerca a 1 por la derecha $f(x)$ se acerca a 1, lo cual se nota por, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, pero cuando x se acerca a 1 por la izquierda (figura 10.2 (b)) $f(x)$ se acerca a 4, que se nota como: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 4$

Esto muestra que no necesariamente los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ deben ser iguales. Aquí a diferencia del ejemplo 1, la gráfica si presenta una interrupción en el punto $x = 1$ (lo que significa que la función es discontinua en $x = 1$). Esta característica de la gráfica está determinada por el comportamiento de la función cerca de $x = 1$, tanto a derecha como a izquierda y no por el comportamiento de la función en $x = 1$, pues si solamente tenemos en cuenta este aspecto, lo único que podríamos afirmar es que $f(1) = 4$ y por tanto $x = 1 \in D_f$.

En los ejemplos anteriores el punto $x = a$, era un punto en el dominio de la función, hecho que no es necesario para conocer el comportamiento de la función cerca de a, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

Observe que $f(2)$ no existe, ya que al calcular $f(2)$ habría que dividir por cero, lo cual no es posible en los números reales, o sea $2 \notin D_f$, lo que significa que para la abscisa $x = 2$, no existe punto en la gráfica de la función. Ahora en el caso en que sea $x \neq 2$ se puede dividir entre $x - 2$, puesto que $x - 2$ no es cero, por tanto:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = x + 2,$$

o sea que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ cuando x es diferente de 2, es la misma de $y = x + 2$, por consiguiente la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es la de esta recta $y = x + 2$, con un agujero en $x = 2$

(Figura 10.3).

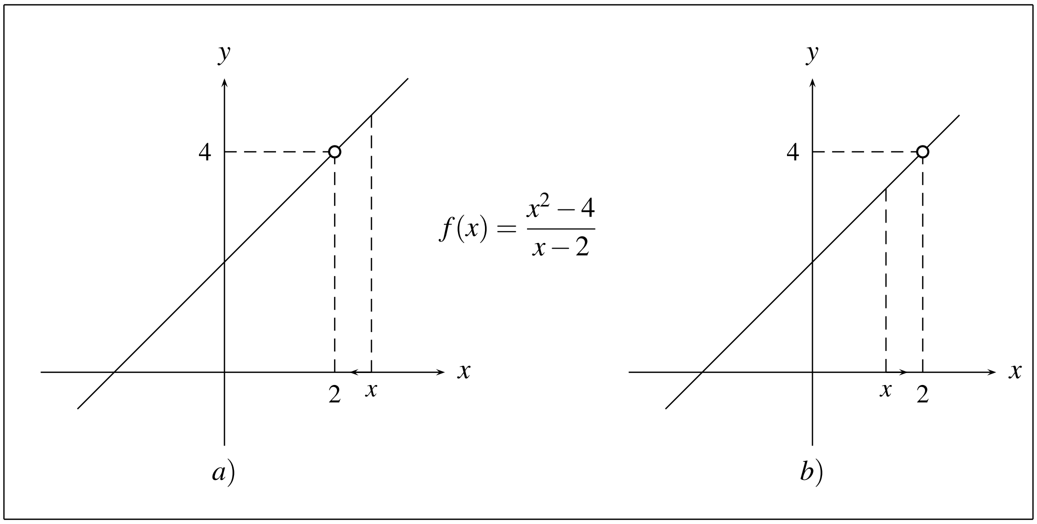


FIGURA N° 10.3

De la figura 10.3 (a), se puede apreciar que $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ y de la figura 10.3 (b) que $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Aquí en ningún momento se tuvo en cuenta que la función no estaba definida en $x = 2$, pero es preciso aclarar que en los dos ejemplos anteriores, cuando se hizo referencia a los límites, tampoco influyó en nada el que la función estuviera definida en a, lo que significa que en el cálculo de límites, cuando x tiende a a, no incide el hecho de que a pertenezca o no al dominio de la función, pero si influye parcialmente para afirmar si la gráfica es continua o no en ese punto, pues observe que aquí no lo es, ya que se presenta un agujero.

Cuando se dice que el hecho de que $a \in D_f$, influye parcialmente para afirmar si la función es continua en a, se trata de decir que para que f sea continua en a es necesario que $a \in D_f$ como se ilustró en este ejemplo, pero no es suficiente, como se ilustrará a continuación.

Ejemplo

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 7 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

La diferencia de esta función, con la del ejemplo anterior radica en que aquí se ha definido en una forma especial la función en $x = 2$ $(f(2) = 7)$ o sea que $2 \in D_f$, su gráfica es muy similar a la anterior excepto que el punto (2,7) pertenece a la gráfica de la función (figura 10.4).

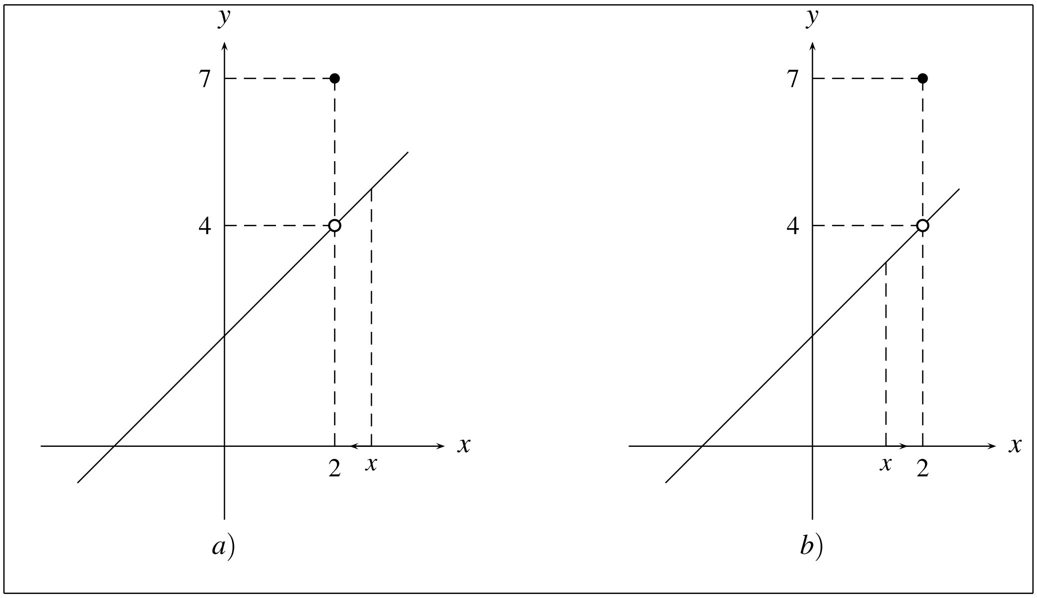


FIGURA N° 10.4

En este caso $\lim\limits_{x \to 2^+} f\,(x) = 4$ (Figura 10.4 (a)) y $\lim\limits_{x \to 2^-} f\,(x) = 4$ (Figura 10.4 (b)), además existe $f\,(2)$, pero la gráfica de la función no es continua, pues presenta una interrupción en $x = 2$, observe que aquí los límites laterales son iguales pero su valor no coincide con $f(2)$.

Del segundo ejemplo se puede observar que si los límites por la derecha y por la izquierda en un punto a son diferentes, la función no puede ser continua en este punto y del tercer ejemplo, que si la función no está definida en $x = a$ tampoco puede ser continua en $x = a$.

En el presente ejemplo los límites laterales en a son iguales, la función está definida en $a = 2$ $(f\,(a) = 7)$; y f no es continua en a. Pero si se observa la gráfica de esta función, se ve que si en lugar del punto (2,7) en ella se hubiera tenido el punto $(2\,,4) = (2\,, f\,(2))$, éste rellenaría el agujero que aparece en la gráfica y la función sería continua, es decir, que adicionalmente a las dos condiciones dadas anteriormente se debe añadir una tercera para garantizar la continuidad de la función en el punto: Los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto.

Cuando se dice que un número A tiende a un número B, lo que realmente se está afirmando, es que A se está "pegando" a B, es decir, que la distancia entre A y B está tendiendo a cero o sea, se está acercando a cero, y como la distancia entre dos numeros reales A y B es $|A - B|$, entonces este hecho se nota por la expresión $|A - B| \to 0$.

Con esta notación, y teniendo en cuenta las ideas intuitivas que se trabajaron en los ejemplos anteriores, se darán las siguientes definiciones que no son completamente rigurosas, pero que permiten trabajar estos conceptos adecuadamente.

10.2. DEFINICIONES DE LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es un número real L, y se nota por
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
si y sólo si f está definida en un intervalo de la forma $(a, a+\delta)$, con $\delta > 0$, y $|f(x) - L| \to 0$ cuando $|x-a| \to 0$ para $x > a$.

2. Se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a "a" por la izquierda es un número real L, y se nota por
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
si y sólo si $f(x)$ está definida en un intervalo de la forma $(a-\delta, a)$, con $\delta > 0$ y $|f(x) - L| \to 0$ cuando $|x-a| \to 0$ para $x < a$.

3. Se dice que el límite de una función f cuando x tiende "a", es un número real L, y se nota por
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
si y sólo si f está definida en un conjunto de la forma $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ para algún δ mayor que 0 y $|f(x) - L| \to 0$ cuando $|x-a| \to 0$.

   Esta definición de límite equivale a afirmar que existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y que además
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

4. Una función $f(x)$ se dice que es continua en $x = a$ si y sólo si satisface las siguientes condiciones:

   a) $a \in D_f$ (existe $f(a)$).
   b) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$
   c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 1

Demostrar que
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1,$$
es equivalente a demostrar que $|f(x) - L| \to 0$ cuando $|x-a| \to 0$,
es decir, $\left|\frac{|x-2|}{x-2} - 1\right| \to 0$ si $|x-2| \to 0$ con $x > 2$.

Para ello observe que:
$$|f(x) - L| = \left|\frac{|x-2|}{x-2} - 1\right| = \left|\frac{|x-2| - (x-2)}{x-2}\right|$$

ahora puesto que $x > 2$ entonces $|x - 2| = x - 2$ por lo tanto

$$|f(x) - L| = \left|\frac{|x-2| - (x-2)}{x-2}\right| = \left|\frac{x-2-x+2}{x-2}\right| = \frac{0}{|x-2|} = 0$$

para cualquier $x \neq 2$. Observe este resultado con la gráfica de la función.

Ejemplo 2

Demostrar que

$$\lim_{x \to a^+} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad \text{si} \quad a > 0,$$

es equivalente a demostrar que $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0$ con $x > a$.

Para ello:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to a.$$

Pues cuando $x \to a$

$$|x - a| \to 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{x} + \sqrt{a} \to \sqrt{a} + \sqrt{a} \neq 0,$$

observe este resultado con la gráfica de la función.

Ejemplo 3

Demostrar que

$$\lim_{x \to -2^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{3}$$

es equivalente a demostrar que $\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{3}\right| \to 0$
cuando $x \to -2^-$.
Para ello:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{3}\right| &= \left|\frac{\left(\sqrt{1-x} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}}\right| \\
&= \frac{|1-x-3|}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{|-x-2|}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}} \to 0 \quad \text{cuando } x \to -2^-,
\end{aligned}$$

Pues cuando $x \to -2^-$

$$|-x-2| \to 0 \text{ y } \sqrt{1-x} + \sqrt{3} \text{ tiende a } \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \neq 0,$$

observe este resultado en la gráfica de la función.

Ejemplo 4

Demostrar que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

es equivalente a demostrar que $\left| \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| \to 0$ cuando $|x - 2| \to 0$.

Para ello:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| &= \left| \frac{(x-2)\ (x+2)}{x - 2} - 4 \right| \\ &= |x + 2 - 4| \\ &= |x - 2| \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to 2. \end{aligned}$$

observe que en el desarrollo de este ejemplo no hubo necesidad de distinguir los casos $x > 2$ (límite por la derecha) y $x < 2$ (límite por la izquierda), luego aquí se esta haciendo referencia es al $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ que incluye los 2 casos.

Ejemplo 5

En el ejemplo anterior se mostró que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, pero observe que aquí $x = 2$, no pertenece al dominio de la función, es decir no existe $f\ (2)$, por tanto la función no puede ser continua en $x = 2$, ya que no satisface la primera condición de continuidad en este punto. Observe este resultado con la gráfica de la función.

Ejemplo 6

Sea $f\ (x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 8 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

En forma similar al ejemplo anterior, se muestra que $\lim\limits_{x \to 2} f\ (x) = 4$, pero aquí $x = 2$ si pertenece al dominio de la función $f\ (x)$, pues $f\ (2) = 8$, pero como $f\ (2)$ es diferente al valor del $\lim\limits_{x \to 2} f\ (x)$ entonces no se satisface la tercera condición de continuidad, por tanto f no es continua en $x = 2$.

Ejemplo 7

En el primer ejemplo se demostró que $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = 1$, en forma análoga se puede demostrar que $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} = -1$. Puesto que los dos límites laterales son diferentes entonces no existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$, por tanto no satisface la segunda condición de continuidad; luego esta función no es continua en $x = 2$. Observe este resultado con la gráfica de la función.

Ejemplo 8

Observe que $\lim_{x \to 2} x^2$ existe y es igual a 4, pues

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left|x^2 - 4\right| \\ &= |(x+2)\,(x-2)| \\ &= |x+2|\,|x-2| \to 0 \quad \text{cuando} \quad |x-2| \to 0\,, \end{aligned}$$

pues $|x+2| \to 4$ y $|x-2| \to 0$ cuando $x \to 2$.

Además $f(2) = 2^2 = 4$, existe, y su valor coincide con el valor del límite, por tanto $f(x) = x^2$ es continua en $x = 2$.

Definición

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a,b) si y sólo si f es continua en cada punto del intervalo.

Ejemplo 9

La función $f(x) = x^2$ es continua en cualquier intervalo abierto (c,d), pues en forma análoga al ejemplo anterior se puede demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para cada $a \in (c\,,d)$.

Definición

Una función $f(x)$ se dice continua en un intervalo cerrado $[a\,,b]$ si y sólo si:

1. f es continua en el intervalo abierto (a,b) y
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejemplo 10

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en el intervalo cerrado $[1\,,5]$, como se puede deducir de los ejercicios vistos anteriormente.

Ejemplo 11

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x \leq 5 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Es evidente que $f$es continua en $(0\,,5)$, además $\lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$, pero
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) = 2$ luego f no es continua en el intervalo cerrado $[0\,,5]$.

EJERCICIOS

I. Trazar las gráficas de las funciones siguientes y apoyado en ellas hallar los límites indicados.

1. $f(x) = x^3$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 5 \\ 2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$
4. $f(x) = \dfrac{3-x}{|x-3|}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
6. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 5 \\ -x+10 & \text{si } x > 5 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
7. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

II. Determinar si las funciones dadas en el numeral I son continuas o no. Dé un intervalo cerrado donde cada una de ellas sea continua.

III. Defina continuidad de una función en los intervalos $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, +\infty)$ y dé ejemplos.

IV. Determinar si las funciones siguientes son continuas en el intervalo dado.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-8}{x-2}$; en $[-2, 2]$
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $[-5, 4)$
3. $f(x) = x^2 + x$ en $[2, 10)$
4. $f(x) = [x-1]$ (parte entera) en $[-5, 6)$
5. $f(x) = \sqrt{x-4}$ en $[4, +\infty)$
6. $f(x) = x^4$ en $(-\infty, +\infty)$

V. Hallar los valores de m y n tal que la función dada sea continua

1. $f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x > 4 \\ x^2 & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x < 3 \\ n & \text{si } x = 3 \\ -2x+9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} mx+1 & \text{si } x \leq 3 \\ 2-mx & \text{si } x > 3 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ mx+n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

10.3. LIMITES INFINITOS Y LIMITES AL INFINITO

Siguiendo el mismo esquema utilizado para introducir los conceptos de límites y continuidad, se estudiarán intuitivamente a través de unos ejemplos los casos en los cuales cuando x se acerca a un número real a por la derecha o izquierda, $f(x)$ se aleja hacia arriba $(f(x) \to +\infty)$ o se aleja hacia abajo $(f(x) \to -\infty)$ y también se estudiará en forma intuitiva el comportamiento de la función $f(x)$ cuando en lugar de acercarse x a un número real a, se aleja sobre el eje x hacia la derecha $(x \to +\infty)$ o se aleja sobre el mismo eje hacia la izquierda $(x \to -\infty)$.

Ejemplo

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

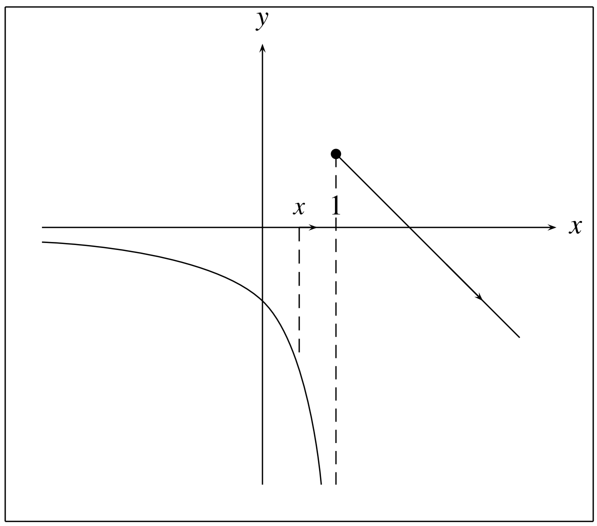


FIGURA N° 10.5

En su gráfica (Figura 10.5) se puede apreciar que a medida que x se acerca a 1 por la izquierda $(x \to 1^-)$, sus imágenes se van alejando cada vez más hacia abajo sin ninguna cota, lo que se representa con la expresión:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

En forma análoga, de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(figura 10.6) se puede visualizar el sentido de la expresión

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

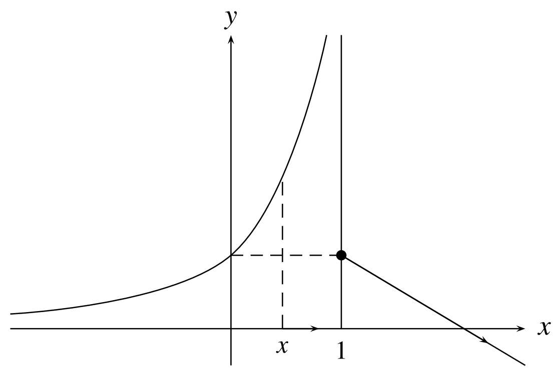


FIGURA N° 10.6

De la misma forma se puede ilustrar el significado de:

a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ *b*) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *d*) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

con las gráficas de

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *b*) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *d*) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Ejemplo

De la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (figura 10.7) se puede apreciar que a medida que x se hace más grande, su imagen estará cada vez más próxima a cero, confundiéndose con cero cuando x tiende a más infinito, esta situación se describe afirmando que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es cero y se nota por:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

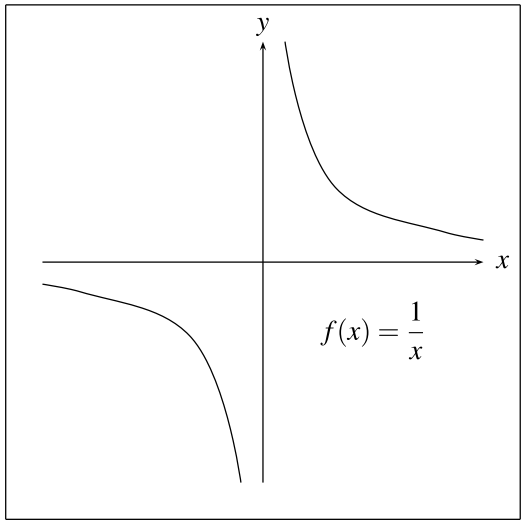


FIGURA N° 10.7

En forma análoga en la misma figura 10.7 se puede apreciar que a medida que x se aleja hacia la izquierda, su imagen estará cada vez más cerca de 0, confundiéndose con cero cuando x tiende a menos infinito, hecho que se notará por:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Ejemplo

De la gráfica de $f(x) = 2x$ (figura 10.8)

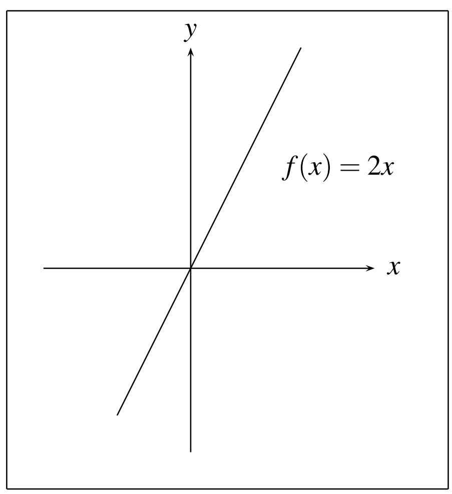


FIGURA N° 10.8

se puede deducir que las imágenes de $f(x)$ pueden estar tan arriba como se quiera tomando a x suficientemente grande, situación que se suele describir afirmando que el límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ es más infinito y se nota por

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Análogamente en este ejemplo se puede apreciar que si x tiende a $-\infty$ (a la izquierda) $f(x)$ tiende a $-\infty$ (abajo).

A partir de los conceptos intuitivos que se han desarrollado en esta sección se definirán los mismos en forma rigurosa. Se espera que el lector interprete estas definiciones a través del concepto adquirido.

Definición

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ equivale a decir que para cualquier $M > 0$ dado, existe un $\delta > 0$ tal que si $a < x < a + \delta$ entonces $f(x) > M$.

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (figura 10.9)

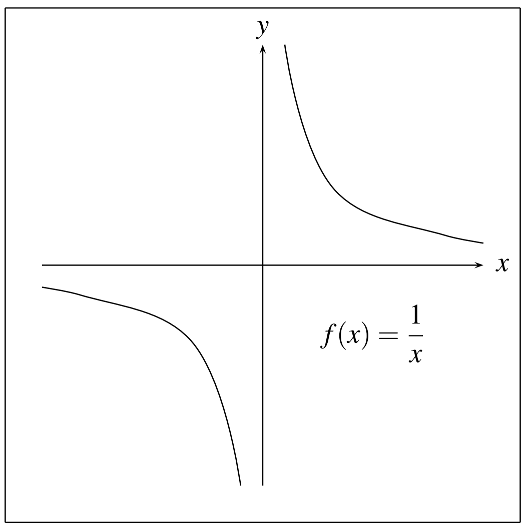


FIGURA N° 10.9

Demostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

equivale a verificar que dado $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x} > M.$$

Para hallar este δ, observe que
$1/x > \mathrm{M} \Rightarrow 1/\mathrm{M} > x$ pues $x > 0$ y $M > 0$ y así $\delta = 1/\mathrm{M}$.

Así si $0 < x < \delta = 1/\mathrm{M} \Rightarrow x < 1/\mathrm{M} \Rightarrow 1/x > \mathrm{M}$ es decir, $f(x) > \mathrm{M}$.

Definición

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, equivale a decir, que para cualquier número $\mathrm{M} > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que si $a - \delta < x < a$ entonces $f(x) < -\mathrm{M}$

Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ (figura 10.10)

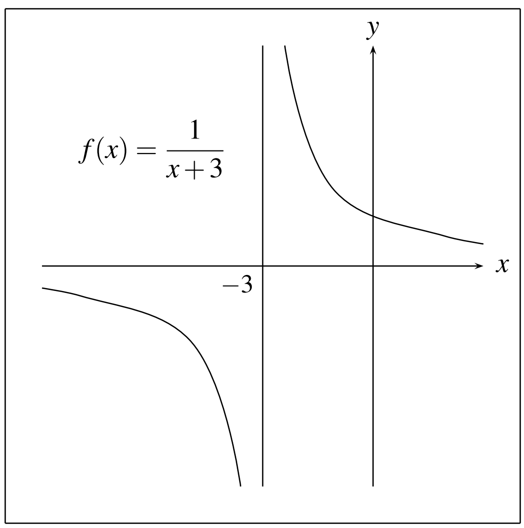


FIGURA N° 10.10

Demostrar que

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty,$$

equivale a verificar que dado $\mathrm{M} > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $-3 - \delta < x < -3$ entonces $\dfrac{1}{x+3} < -M$.

Para hallar este δ (que depende de M), observe que si $\dfrac{1}{x+3} < -M$ entonces

$$\mathrm{M} + \frac{1}{x+3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Mx + 3M + 1}{x+3} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$Mx + 3M + 1 > 0 \qquad (\text{Pues como } x < -3 \text{ entonces } x + 3 < 0)$$

$$\mathrm{M}x > -1 - 3\mathrm{M} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{-1-3M}{M} = -\frac{1}{M} - 3$$

$$= -3 - \frac{1}{M} \quad \left(\delta = \frac{1}{M}\right)$$

Así, si $-3 - \delta = -3 - \dfrac{1}{M}$

$$= \frac{-3M - 1}{M} < x < -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3M-1}{M} < x \quad \Rightarrow$$

$$-3M - 1 < Mx \quad \Rightarrow \quad M(x+3) > -1$$

y como $x < -3$, es decir $x+3 < 0 \Rightarrow M < -\dfrac{1}{x+3}$ es decir $\dfrac{1}{x+3} < -M$.

En forma análoga se definen, y se pueden ilustrar con ejemplos similares los conceptos siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

En todos los cuatro casos anteriores, la función $f(x)$ en las cercanías de a se aleja hacia arriba o hacia abajo pegándose a la recta $x = a$. En cualquier situación de éstas, se dice que la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical*** de $f(x)$.

Definición

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ equivale a decir, que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\mathrm{N} > 0$ tal que si $x > \mathrm{N}$ entonces $|f(x) - a| < \varepsilon$, es decir, si $x > \mathrm{N}$ entonces la distancia entre $f(x)$ y a es menor que el número $\varepsilon > 0$ dado.

Ejemplo

Demostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ equivale a verificar que para un $\varepsilon > 0$ dado, existe un $\mathrm{N} > 0$ tal que si $x > \mathrm{N}$ entonces $\left|1/x^2 - 0\right| < \varepsilon$.

Para hallar este N (que depende de ε) observe que:

$$\begin{aligned} 1/x^2 - 0 < \varepsilon \;&\Leftrightarrow\; 1/x^2 < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow\; 1/\varepsilon < x^2 \\ &\Leftrightarrow\; 1/\sqrt{\varepsilon} < |x| \\ &\Leftrightarrow\; x > 1/\sqrt{\varepsilon} = \mathrm{N} = \mathrm{N} \quad \text{(Pues } |x| = x \quad \text{por qué?).} \end{aligned}$$

Así, si $x > \mathrm{N} \Rightarrow x > 1/\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow 1/x^2 < \varepsilon \Rightarrow \left|1/x^2 - 0\right| < \varepsilon$.

Análogamente se puede definir e ilustrar el concepto de:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

En los dos casos anteriores la función $f(x)$ se aleja hacia la derecha o izquierda pegándose a la recta $y = a$. Si adicionalmente a esto se tiene que a partir de un punto x_1, la curva no corta a la recta, se dice que la recta $y = a$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de la función $f(x)$.

Ejemplo

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ (figura 10.11)

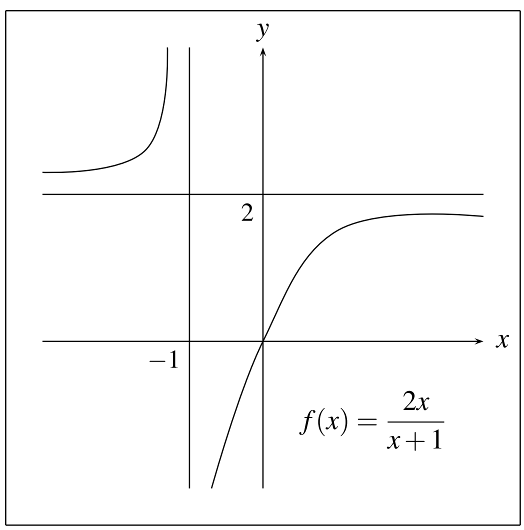


FIGURA N° 10.11

Definición

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ equivale a decir, que para cualquier $\mathrm{M} > 0$, existe $\mathrm{N} > 0$, tal que si $x > \mathrm{N}$, entonces $f(x) > \mathrm{M}$.

Ejemplo

Demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$, equivale a verificar que dado M >0 cualquiera, existe N >0 tal que si $x>$ N entonces $x^2+1>$ M.

Para hallar este N (que depende de M), observe que:

$$x^2+1>\mathrm{M} \;\Leftrightarrow\; x^2>\mathrm{M}-1 \;\Leftrightarrow\; |x|^2>\mathrm{M}-1 \;\Leftrightarrow\; |x|>\sqrt{(\mathrm{M}-1)} \;\Leftrightarrow\; x>\sqrt{(\mathrm{M}-1)}=N \quad (\text{Pues } x>0)$$

Así,mirando el proceso en el sentido inverso se tiene que si $x>$ N entonces $x^2+1>$ M.

En forma similar se pueden definir e ilustrar los conceptos:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

con las gráficas de las funciones

a) $f(x)=2x^2$

b) $f(x)=x^4+8$

c) $f(x)=-x^2$ respectivamente

EJERCICIOS

1. Analizando las gráficas de las funciones dadas, hallar los límites que se indican:

   a) $f(x)=Sen\,x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$

   b) $f(x)=\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

   c) $f(x)=-x^3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

   d) $f(x)=2^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

   e) $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

2. En cada literal bosqueje la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones dadas.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=10$

   d) $\lim\limits_{x\to3} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to5} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to4} f(x)=6$

3. Demostrar

   a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$; *b*) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x-1} = -\infty$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{x^4} = -\infty$; *e*) $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x^3} = -\infty$; *f*) $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$

   g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$; *h*) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 + 2 = -\infty$; *i*) $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^2 + 6 = -\infty$

   j) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^6 = +\infty$; *k*) $\lim\limits_{x\to -\infty} -3x + 5 = +\infty$

4. *a*) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener una función? ¿Cuántas verticales?

   b) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener $f(x)$? ¿Cuántas verticales?

   c) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener $f(x)$?

   d) Si $D_f = R$ y $f(x)$ es continua¿cuántas asíntotas horizontales y cuántas verticales puede tener $f(x)$?.

   e) Si $D_f = (3, 20)$ y f es continua ¿cuántas asíntotas horizontales y cuántas verticales puede tener $f(x)$?

5. En las gráficas que aparecen a continuación determine asíntotas horizontales y verticales y analice su continuidad.

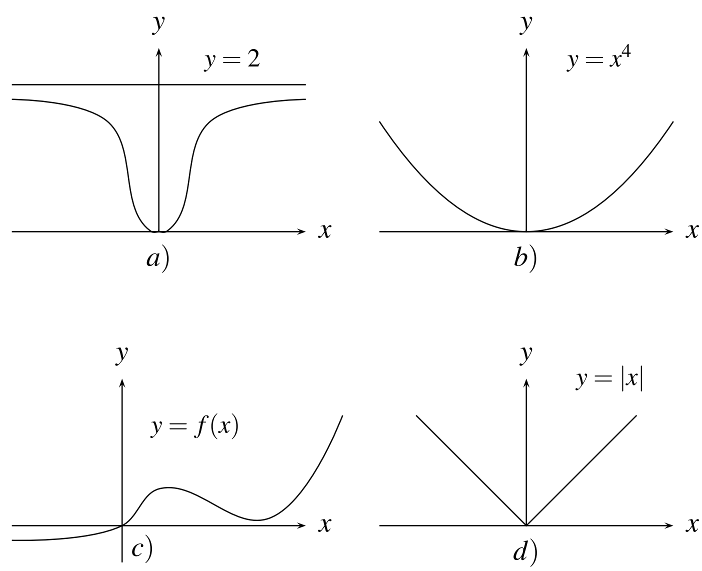


FIGURA N° 10.12

6. Halle asíntotas horizontales y verticales y bosqueje la gráfica si:

   a) $f(x) = \dfrac{8x - 2x^2}{x^2 - 9}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ *d*) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(2x-3)}$

10.4. PROPIEDADES Y CÁLCULO DE ALGUNOS LÍMITES

El cálculo de límites de funciones utilizando las definiciones, presenta dos problemas, uno de ellos es que se debe conocer cuál es el posible valor del límite y no existe ningún método práctico que nos indique cual es ese valor y el otro, que así se conozca ese valor, la demostración de que éste es o no el valor buscado utilizando la definición adecuada, es bastante engorroso.

Afortunadamente a partir de propiedades de los límites que se desprenden de sus definiciones se pueden calcular estos en forma más o menos sencilla utilizándolas adecuadamente.
Se presentan estas propiedades junto con ejemplos que ilustran su utilidad.

Propiedad 1

El límite de una función $f(x)$ en un punto, cuando existe, es único.

Demostración

Supóngase que en $x = a$ el límite de $f(x)$ no es único, es decir, supóngase que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. Se verá que $A = B$.
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ entonces $|f(x) - A| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0$.
Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$ entonces $|f(x) - B| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0$.
Ahora: $|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B|$
$= |f(x) - A| + |f(x) - B| \to 0 + 0 = 0 \quad \text{cuando} \quad |x - a| \to 0.$
Así, $0 \leq |A - B| \to 0$. Pero como A y B son números fijos entonces $A - B = 0$ por tanto $A = B$.

Propiedad 2

La función constante $f(x) = k$ es continua.
En efecto:
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ya que $|f(x) - f(a)| = |k - k| = 0$,
lo que implica que $|f(x) - f(a)| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0$.

Propiedad 3

La función idéntica es continua.
Es decir $\lim\limits_{x\to a} x = a$, pues $|f(x) - f(a)| = |x - a| \to 0$
ya que como $x \to a$ entonces $|x - a| \to 0$

Propiedad 4

Si la expresión lim, donde aparezca en esta propiedad, representa una sola de las siguientes situaciones:

$$\lim_{x\to a^+}, \qquad \lim_{x\to a^-}, \qquad \lim_{x\to a}, \qquad \lim_{x\to +\infty}, \qquad \lim_{x\to -\infty}$$

Entonces

Si $\lim f(x) = A$ y $\lim g(x) = B$ con A y B números reales

a) $\lim f(x) \pm g(x) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

b) $\lim (f(x) \, . \, g(x)) = \lim f(x) \, . \lim g(x) = A \, . \, B$

c) $\lim \big(f(x)/g(x)\big) = \lim f(x)/\lim g(x) = A/B,$ si $B \neq 0.$

Demostración

Se demostrará a) a manera de ilustración, las otras se hacen en forma análoga.
De las hipótesis se tiene que:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, es decir, $|f(x) - A| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0$ y
$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, es decir $|g(x) - B| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0,$
se verá que $|f(x) + g(x) - (A + B)| \to 0$ cuando $|x - a| \to 0.$
En efecto: $|f(x) + g(x) - (A + B)| =$
$|(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| \to 0 + 0 = 0$ cuando $|x - a| \to 0.$

Propiedad 5

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en un punto a entonces $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \, . \, g(x)$ son continuas en a, y si $g(a) \neq 0$ entonces $f(x)/g(x)$ es continua en a.

Demostración

Se desprende inmediatamente de la propiedad anterior, y la definición de continuidad.

Ejemplos

1. Como $f(x) = k$ es continua en a y $g(x) = x$ es continua en a, entonces $h(x) = f(x) \, . \, g(x) = kx$ es continua en a, así que $\lim\limits_{x \to a} kx = ka$

2. Como $f(x) = x$ es continua en a, entonces $g(x) = x^2$ es continua en a, y en forma análoga $x^3, x^4, \ldots x^{100}, \ldots$ son continuas en a para cualquier $a \in R$, así que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$;
   $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3, \ldots \lim\limits_{x \to a} x^{100} = a^{100}$

3. En general $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $n \in N$ es continua en a para todo $a$en R, así por ejemplo si $a = 5$: $\lim\limits_{x \to 5}(1 + 2x + 2x^2 + x^3) = 1 + 2(5) + 2(5)^2 + 125 = 11 + 50 + 125 = 186$

4. Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios:
   $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$ si $q(a) \neq 0$, entonces por ejemplo para $a = 2$ se tiene:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 9} = \frac{2^2 - 2 + 4}{2^2 + 9} = \frac{6}{13}$$

5. Anteriormente se vio que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$, esto indica que la función $\sqrt{x}$ es continua en todo $a > 0$.

También se puede demostrar que en general $\sqrt[n]{x}$ es continua en a, para todo $a > 0$ si n es par y para todo a si n es impar.

Propiedad 6

Si $f(x)$ es continua en a y $g(x)$ es continua en $f(a)$ entonces $g(f(x))$ es continua en a es decir, $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right) = g(f(a))$.

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 3)} = \sqrt{4 + 4 + 3} = \sqrt{11}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 3}\right]^4 = \left[\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 3}\right]^4 = \left[\dfrac{23}{6}\right]^4$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 + \sqrt{x^3}\right)^{3/4} = \left(\lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 + \sqrt{x^3}\right)\right)^{3/4} = \left(12 + \sqrt{8}\right)^{3/4}$

Propiedad 7

Con el mismo significado dado a $\lim f(x)$ en la propiedad 4:

Si $\lim f(x) = L$ y $\lim g(x) = L$ y $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ (Para todo x cerca de a, o en más o menos infinito según sea el caso) entonces $\lim h(x) = L$.

Este resultado conocido con el nombre de *Teorema del emparedado* se puede visualizar con la ilustración siguiente, en la cual lim se interpretará como $\lim\limits_{x \to a}$ (Figura 10.13).

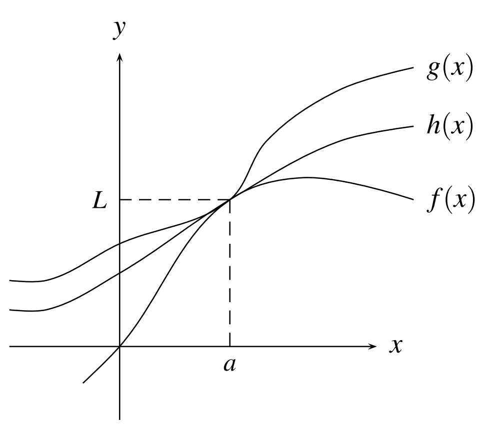


FIGURA N° 10.13

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Sen^3\sqrt{x^2+1}}{x} = 0$$

En efecto:

Puesto que $-1 \leq Sen^3\sqrt{x^2+1} \leq 1$, y como $x>0, \frac{1}{x}>0$ entonces $-\frac{1}{x} \leq \frac{Sen^3\sqrt{x^2+1}}{x} \leq \frac{1}{x}$ y como $-1/x$ y $1/x$ tienden a 0 cuando $x\to+\infty$ entonces $\frac{Sen^3\sqrt{x^2+1}}{x}$ también tiende a 0 cuando $x\to+\infty$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} x^2\, Sen\frac{1}{x} = 0$$

En efecto

$0 \leq \left|x^2 Sen\,1/x - 0\right| = x^2\left|Sen\,1/x\right| \leq x^2$ y como $g(x)=0$ y $h(x)=x^2$ tienden a 0 cuando $x\to 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} x^2 Sen\,1/x$ también tiende a 0 cuando $x\to 0$.

Ejemplo

Si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

En efecto:

Se sabe que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, y como $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} -|f(x)| = 0$, se concluye por el teorema del emparedado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Si se quiere calcular un límite de la forma $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ y $g(x)$ continuas, pero tal que $g(a)=0$, entonces no es posible calcular el límite simplemente reemplazando la x por la a. En estos casos se pueden presentar dos situaciones que requieren tratamientos diferentes: La primera, que se tratará inmediatamente, es cuando $f(a)$ también es igual a 0, y la segunda, que se tratará posteriormente, es cuando $f(a)$ es diferente de 0.

PRIMERA SITUACIÓN

En la primera situación se procede inicialmente a realizar operaciones algebraicas correctamente, hasta conseguir que el reemplazo de x por a en el denominador no lo anule. Estas operaciones se realizan siempre teniendo en cuenta que $x\neq a$.

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

Si se reemplaza x por 5, el numerador y denominador se anulan, más sin embargo:

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x-5)\ (x+5)}{x-5} = x + 5\,, \text{ pues } x \neq 5\,, \text{ luego}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} x + 5 = 10$$

Ejemplo

Hallar $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$. Observe que en este caso h es la que se comporta como variable y x es fijo.

Aquí $\displaystyle\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$ pues $h \neq 0$, luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \text{ entonces}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

Ejemplo

Hallar $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$

$$\frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} = \frac{\left(\sqrt{3+h} - \sqrt{3}\right)\ \left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}{h\ \left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} = \frac{3 + h - 3}{h\ \left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{h}{h\ \left(\sqrt{3+h} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \text{ pues } h \neq 0\,, \text{ entonces}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ejemplo

Hallar $\displaystyle\lim_{x \to 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27}$

$$\frac{x^{1/3} - 3}{x - 27} = \frac{\left(x^{1/3} - 3\right)\ \left(x^{2/3} + 3x^{1/3} + 9\right)}{(x - 27)\ \left(x^{2/3} + 3x^{1/3} + 9\right)}$$

(para utilizar el resultado $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ con $a = x^{1/3}$ y $b = 3$)

$$= \frac{(x-27)}{(x-27)} \frac{1}{\left(x^{2/3}+3x^{1/3}+9\right)} = \frac{1}{x^{2/3}+3x^{1/3}+9} \text{ pues } x \neq 27, \text{ luego}$$

$$\lim_{x\to 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27} = \lim_{x\to 27} \frac{1}{x^{2/3}+3x^{1/3}+9} = \frac{1}{9+9+9} = \frac{1}{27} \text{ luego}$$
$$\lim_{x\to 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27} = \frac{1}{27}$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+3)} = \frac{x+2}{x^2+2x+3} \text{ pues } x \neq 1, \text{ luego}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ luego}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{1}{2}$$

SEGUNDA SITUACIÓN

En el caso en que al calcular $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se tenga que $g(a) = 0$, pero $f(a) \neq 0$, con $f(a)$ real; la función $f(x)/g(x)$ tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$ cuando x tiende a a, según que $f(a)$ sea positivo o negativo, y que $g(x)$ tienda a 0 por valores positivos o negativos, de la forma siguiente:
Si $f(a) > 0$ y $g(x) \to 0$ por valores positivos, entonces $f(x)/g(x) \to +\infty$
Si $f(a) > 0$ y $g(x) \to 0$ por valores negativos, entonces $f(x)/g(x) \to -\infty$
Si $f(a) < 0$ y $g(x) \to 0$ por valores positivos, entonces $f(x)/g(x) \to -\infty$
Si $f(a) < 0$ y $g(x) \to 0$ por valores negativos, entonces $f(x)/g(x) \to +\infty$
Resultados análogos se tienen si se calculan límites laterales.

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x+3}{4-x^2}$

$4-x^2 > 0$ si y solo si $x^2 < 4$ o sea si $|x| < 2$, es decir si $x \in (-2,2)$ y lógicamente $4-x^2 < 0$ si $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ por tanto si x se acerca a 2 por la izquierda $4-x^2 > 0$ es decir $4-x^2 \to 0$ por valores positivos y si x se acerca a 2 por la derecha $4-x^2 < 0$, o sea $4-x^2 \to 0$ por valores negativos. Además como $5x+3 \to 13 > 0$ cuando x tiende a 2, entonces aplicando el resultado que se acaba de plantear se tiene

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{5x+3}{4-x^2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{5x+3}{4-x^2} = +\infty$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-8}{x-3}$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-8}{x-3}$

Como $x-8 \to -5 < 0$ cuando $x \to 3$ y razonando como en el ejemplo anterior $x-3 \to 0$ por valores positivos si $x \to 3^+$ y $x-3 \to 0$ por valores negativos si $x \to 3^-$ entonces

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-8}{x-3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x-8}{x-3} = +\infty$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x-8}{(x-1)^2}$

Como $x^3+3x-8 \to -4 < 0$ cuando $x \to 1$ y $(x-1)^2 \to 0$ por valores positivos cuando $x \to 1$, bien sea por la derecha o por la izquierda, entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x-8}{(x-1)^2} = -\infty$$

Los resultados anteriores se utilizan también en el cálculo de límites cuando $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$ en funciones de la forma $f(x)/g(x)$, después de realizar algunos cambios en esta función.

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+x^2+3}{x^2+x}$

Dividiendo entre x^4, que es el termino que tiene la mayor potencia a la que esta elevada x, el numerador y denominador, la expresión se convierte en:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = +\infty, \text{ pues}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4} = 1 > 0$ y $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3} \to 0$ por valores positivos, cuando $x \to +\infty$, pues cuando $x \to +\infty$ es positivo

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{5/2}+x^{3/2}+1}{2x^{5/2}+x^{1/2}+2}$

Si se divide numerador y denominador entre $x^{5/2}$, que es el término que tiene la mayor potencia a la que esta elevada x, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}+1}{2x^{5/2}+x^{1/2}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{5/2}}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^{5/2}}} = \frac{1}{2} \text{ luego}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}+x^{3/2}+1}{2x^{5/2}+x^{1/2}+2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt[3]{x^4}+x^{1/2}+3}{7x^3+x^{3/2}+x}$

Si se divide numerador y denominador entre x^3 se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt[3]{x^4}+x^{1/2}+3}{7x^3+x^{3/2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^{2/3}}+\frac{1}{x^{5/2}}+\frac{3}{x^3}}{7+\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{7} = 0 \text{ luego}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt[3]{x^4}+x^{1/2}+3}{7x^3+x^{3/2}+x} = 0$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right) \frac{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}-\sqrt{x} = 0$$

pues luego $\sqrt{(x+4)}+\sqrt{x} \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, ya que suma de funciones que tiendan a $+\infty$, tienden a $+\infty$ y suma de funciones que tiendan a $-\infty$, tienden a $-\infty$.

En el ejemplo anterior ocurre que el límite es de la forma $(+\infty)-(+\infty)$ y da cero, pero esto no siempre ocurre, como se ilustrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x^2\right)$

Este límite también es de la forma $(+\infty)-(+\infty)$ pero:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1}-x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^4-x^2}{x^2+1} = -\infty$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -3 \;\; (|x| = -x, \text{ ya que } \;\; x < 0 \text{ pues } x \text{ tiende a } -\infty)$$

10.5. LÍMITES DE FUNCIONES TRASCENDENTES

10.5.1. Continuidad de las funciones trigonométricas

A. Para demostrar la continuidad de la $f(x) = Sen\,x$ es necesario primero demostrar la desigualdad $|Sen\,x| \leq |x|$ para todo x real

En efecto: Considerando inicialmente el caso $0 < x < \pi/2$ y comparando el área del sector circular determinado por el ángulo x y el área del triángulo con base 1 y altura $Sen\,x$ como se aprecia en la figura 10.14 , se tiene que:

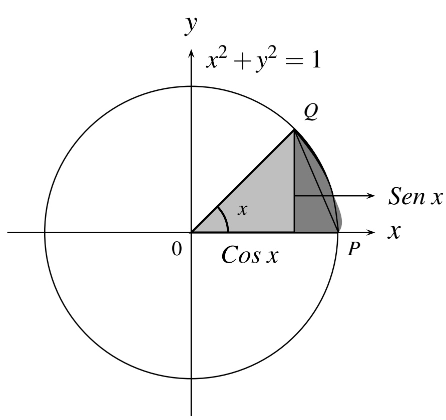


FIGURA N° 10.14

Area $\triangle\ 0PQ \leq$ Area del sector circular $0PQ$
es decir,

$$1. \quad \frac{Senx}{2} \leq \frac{x}{2}, \quad \text{entonces} \quad Sen\,x \leq x.$$

Considerando que la función $Sen\,x$ es impar, se puede verificar que $|Sen\,x| \leq |x|$ para $-\pi/2 < x < 0$, y considerando el comportamiento del $Sen\,x$ en otro intervalo se puede mostrar que en general $|Sen\,x| \leq |x|$ para todo x.

B. La función $f(x) = Sen\, x$ es continua en $x = a$ para todo $a \in R$.

Para ver ello, basta con mostrar que $\lim\limits_{x \to a} Sen x = Sen a$, es decir, de acuerdo a la definición, hay que demostrar que $|Sen x - Sen a| \to 0$ cuando $x \to a$.

En efecto:

$$\begin{aligned} 0 \leq |Sen x - Sen a| &= \left| 2 Cos \left(\frac{x+a}{2} \right) Sen \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \\ &= 2 \left| Cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \left| Sen \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \leq (2)\,(1) \left| Sen \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \leq 2\, \frac{|x-a|}{2} \\ &= |x-a| \end{aligned}$$

es decir $0 \leq |Sen x - Sen a| \leq |x-a|$ y tomando $h(x) = |x-a|$ y $g(x) = 0$ que tienden a cero cuando $x \to a$, entonces $|Sen x - Sen a| \to 0$ cuando $x \to a$, luego $f(x) = Sen x$ es continua en $x = a$ pues $\lim\limits_{x \to a} Sen\, x = Sen\, a$

Ejemplo

$f(x) = Cos x$ es continua para todo $a \in R$. Para mostrarlo se representa $Cos\, x$ como:

$Cos x = Sen\left((\pi/2) - x\right)$, y puesto que tanto la función $Sen\, x$ como la función $\pi/2 - x$ son continuas, entonces la compuesta $Sen(\pi/2 - x) = Cos x$ es continua, o de otra forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} Cos x &= \lim_{x \to a} Sen \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = Sen \left(\lim_{x \to a} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \text{ (por ser } Sen\, x \text{ continua)} \\ &= Sen \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \text{ (por ser } (\pi/2 - x) \text{ continua)} = Cos\, a \end{aligned}$$

Ejemplo

La función $Tanx = \dfrac{Senx}{Cosx}$ es continua en $R - \left\{ (2n+1)\, \pi/2 \mid n \in Z \right\}$

Pues $Sen\, x$ y $Cos\, x$ son continuas en todo R y $Cosx = 0$ para todos los x de la forma $(2n+1)\, \pi/2$ para $n \in Z$.

¿Dónde son continuas las funciones $Cotx$, $Secx$ y $Csc\, x$?.

Ejemplo

La función $Sen \left(\sqrt{x^2 + 3x} \right) + Tan \left(\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+6}} \right) + Sec \left(\dfrac{1}{x} \right)$
es continua en $x = 3$ pues

$$\lim_{x \to 3} \left[Sen \left(\sqrt{x^2 + 3x} \right) + Tan \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x+6}} \right) + Sec \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= Sen\left(\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+3x}\right) + Tan\left(\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{\sqrt{x+6}}\right) + Sec\left(\lim_{x\to 3}\frac{1}{x}\right)\\
&= Sen\left(\sqrt{18}\right) + Tan\left(\frac{10}{3}\right) + Sec\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la continuidad en $x = 3$ de todas las funciones que componen la expresión

10.5.2. Límite trigonométrico básico

$$\lim_{x\to 0}\frac{Senx}{x} = 1$$

El cálculo de este límite requiere una ilustración geométrica basada en las definiciones de ángulos en radianes y de funciones trigonométricas por medio del círculo unitario.

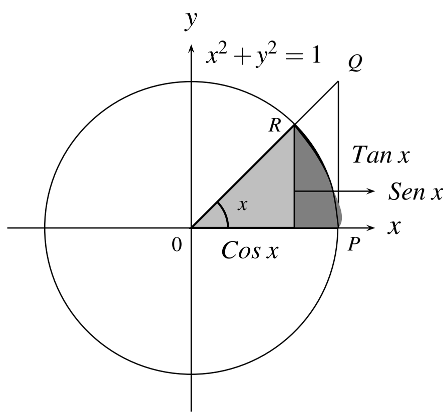


FIGURA N° 10.15

Se considerará solamente el caso $0 < x < \pi/2$

De la figura 10.15 se puede concluir que:

Area del triángulo $ORS \leq$ área sector circular $OPR \leq$ área del triángulo OPQ

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{Cos\,x\,Sen\,x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{Tan\,x}{2}\\
&\Rightarrow Cos\,x\,Sen\,x \leq x \leq Tan\,x
\end{aligned}$$

(dividiendo entre $Sen\ \ x > 0$, pues $0 < x < \pi/2$)

$$\Rightarrow Cos\,x \leq \frac{x}{Sen\,x} \leq \frac{1}{Cos\,x}$$

y puesto que en la última desigualdad las tres expresiones son mayores que cero, tomando sus recíprocos se tiene que:

$$\frac{1}{Cos\,x} \geq \frac{Sen\,x}{x} \geq Cos\,x$$

Y por la continuidad de la función $Cos\, x$, se tiene que cuando $x \to 0^+$
$Cos\, x \to 1$ y $1 \big/ Cos x \to 1$; por tanto aplicando el teorema del emparedado se concluye que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{Sen\, x}{x} = 1$$

Usando el hecho de que la función $Sen\, x$ es impar se considera el caso $-\pi/2 < x < 0 \ \ (0 < -x < \pi/2)$ obteniendo como resultado

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{Sen\, x}{x} = 1$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\, \alpha x}{x} = \alpha$$

En efecto: Haciendo $\mu = \alpha x$, cuando $x \to 0$, $\alpha x \to 0$, es decir, $\mu \to 0$ y así, inicialmente se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\ \alpha x}{\alpha x} = \lim_{\mu \to 0} \frac{Sen\, \mu}{\mu} = 1$$

y utilizando este resultado entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen \alpha x}{x} = \lim_{x \to 0} \alpha \frac{Sen\, \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \to 0} \frac{Sen\, \alpha x}{\alpha x} = \alpha \,.1 = \alpha$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - Cos\, x}{x} &= 0 \\
\lim_{x \to 0} \frac{1 - Cos\, x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - Cos\, x)\ (1 + Cos\, x)}{x\ (1 + Cos\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - Cos^2 x}{x\ (1 + Cos\, x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{Sen^2 x}{x\ (1 + Cos\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\, x \cdot Sen\, x}{x\ (1 + Cos\, x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{Sen\, x}{x} .\ \lim_{x \to 0} Sen\, x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + Cos\, x} \\
&= (1)\ (0) \left(\frac{1}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2Cos\, x}{\pi - 3x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Haciendo el cambio de variable $\mu = x - \pi/3 \ \ (x = \mu + \pi/3)$ se puede apreciar que cuando

$x \to \pi/3$, entonces $\mu \to 0$ y así:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2Cos\,x}{\pi-3x} &= \lim_{\mu\to 0} \frac{1-2Cos\left(\frac{\pi}{3}+\mu\right)}{\pi-3\left(\frac{\pi}{3}+\mu\right)} \\
&= \lim_{\mu\to 0} \frac{1-2\left[Cos\frac{\pi}{3}\,Cos\,\mu - Sen\frac{\pi}{3}\,Sen\,\mu\right]}{-3\mu} \\
&= \lim_{\mu\to 0} \frac{1-(2)\left(1/2\right)\,Cos\,\mu + 2\left(\sqrt{3}/2\right)\,Sen\,\mu}{-3\,\mu} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}\frac{1-Cos\,\mu}{\mu} - \frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}\frac{\sqrt{3}\,Sen\,\mu}{\mu} = 0-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

10.5.3. Funciones Exponenciales y Logarítmicas (continuación)

Para $a>0$, definiendo $a^0 = 1$, $a^n = a\,.\,a\ldots a\ (n-veces)$, $a^{-n} = 1/a^n$, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ queda definida para cada $a>0$ una función $f\,(x) = a^x$, para todo x racional.

A partir de estas definiciones se demuestran propiedades para esta función de variable racional tales como: $a^p > 0.$ para toda a, $a^{p+q} = a^p\,a^q.$ $a^{pq} = (a^p)^q.$ a^x creciente para $a>1$ y decreciente para

$0<a<1$. Y puesto que es inyectiva existe su inversa para cada "a", ésta se conoce como logaritmo en base "a", por tanto

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

y esta función, como inversa de la exponencial, posee propiedades como:

$$\begin{aligned}
\log_a 1 &= 0; \\
\log_a a &= 1 \\
\log_a (uv) &= \log_a u + \log_a v \\
\log_a (u/v) &= \log_a u - \log_a v \\
\log_a u^p &= p\,\log_a u
\end{aligned}$$

$\log_a x$ creciente para $a>1$ y decreciente para $0<a<1$

$\log_a x$ inyectiva para todo $a>0$ $a \neq 1$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ y $a^x = b^{x\,\log_b a}$

El problema es que hasta aquí ni las funciones exponenciales, ni las logarítmicas están definidas en tramos continuos de la recta real, pues hasta ahora las hemos definido para $x\in Q$ y no para $x\in R$ razón por la cual inicialmente se ampliará la definición de $f\,(x) = a^x$ para cada $a>0$, a todos los x reales, para lo cual solo falta definir, a^x para x irracional. Para ello recuerde que un número cuya representación decimal es finita, es un número racional, pues automáticamente esta representación es periódica, ya que se supone que a su derecha van infinitos ceros.

Sea x un número irracional con representación decimal (no periódica) $x = a\,.\,a_1\,a_2\,a_3\ldots$ donde los a_i son dígitos.

Observe que para cada k, con $a_k \neq 9$ se tiene que:

$p_k = a.a_1 a_2 \ldots a_k < x < a.a_1 a_2 \ldots (a_k + 1) = q_k$ donde $a_k + 1$ ocupa la posición del a_k y los p_k y q_k son racionales.

Además entre más grande sea k, p_k y q_k difieren menos de x. Así se han construido dos sucesiones de números racionales $(p_k)_{k \in N}$, $(q_k)_{k \in N}$ tales que:

$\lim\limits_{k \to \infty} p_k = x$ y $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = x$

Es decir, todo número irracional se puede representar como límite de una sucesión de números racionales (por exceso y por defecto).

Ahora como para cualquier $a > 0$, y cualquier $q \in Q$, a^q está definido, entonces si x es un número irracional, con $x = \lim\limits_{n \to \infty} q_n$ entonces se define

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{q_n}$$

Queda definida para cada $a > 0$, la función $f(x) = a^x$, con $x \in R$, y las propiedades consideradas para el caso $x \in Q$ se cumplen también para $x \in R$, y puesto que es inyectiva con dominio R y recorrido R^+, entonces tiene inversa con dominio R^+ y recorrido R, y así para cada $a > 0$ queda definida la función logaritmo para todo $x \in R^+$, función que satisface también las propiedades enunciadas para el caso restringido.

Especial interés presenta en matemáticas el estudio de las funciones exponencial y logarítmica en base e donde e es un número definido como el límite de la sucesión

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se puede demostrar que para cualquier valor de n la expresión $\left(1 + 1/n\right)^n$ es mayor que 2 y menor que 3 y que la sucesión es creciente, pero crece en forma lenta, así por ejemplo para $n = 1000$, $\left(1 + 1/n\right)^n$ es igual a 2.7169, para $n = 10.000$ es igual a 2.71826, para $n = 1.000.000$ es 2.71828, para $n = 10.000.000$ es 2.718281. También se puede demostrar que el número límite de esta sucesión es irracional y es aproximadamente igual a:

$$e = 2.718281...$$

El logaritmo en base e, o sea la inversa de la función $f(x) = e^x$ se llama logaritmo natural y se nota por ln :

$$\ln x = \log_e x$$

Con esta definición de e, la función exponencial en base e: e^x se puede representar como:

$$e^x = \left(\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

este último paso haciendo $k = nx$, pues si $n \to +\infty \Rightarrow k \to +\infty$ (para $x > 0$) y $1/n = x/k$

NOTA

En forma más general se puede definir el número e como

$$e = \lim_{x \to a} \left(1 + g(x)\right)^{1/g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{ó}$$

$$e = \lim_{x \to a} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

10.5.4. Continuidad de la Función Exponencial y Logarítmica

1. Inicialmente se demostrará que la función $f(x) = e^x$ es continua en 0, es decir, $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ lo que significa que $|e^x - 1| \to 0$ cuando $x \to 0$.

   Se tratará solamente, el límite por la derecha, o sea se considerará $x > 0$, lo cual implica que, por ser creciente la función, $e^x > e^0 = 1$, y así $|e^x - 1| = e^x - 1$.

   Para ello se requiere primero demostrar la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para todo $x > 0$

   $$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

   aplicando el teorema del binomio a $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ se tiene

   $$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + n\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} n(n-1)\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots\right) \geq \lim_{n \to +\infty} \left(1 + n\,\frac{x}{n}\right) = 1 + x$$

   luego $(1 + x) \leq e^x$ para $x > 0$.

   Para demostrar que $e^x - 1 \to 0$ cuando$x \to 0$ se mostrará que $e^x - 1 > 0$, puede ser tan pequeño como se quiera, acercando suficientemente x a cero. Para ello sea $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se quiera. Tome $x = \ln(1 + \varepsilon)$. Observe que, puesto que $1 + \varepsilon \leq e^{\varepsilon} \Rightarrow$ $x = \ln(1 + \varepsilon) \leq \ln(e^{\varepsilon}) = \varepsilon$ (por ser e^xcreciente) y así cuando $\varepsilon \to 0$, $x \to 0$ (pues $0 < x < \varepsilon$) y además

   $$e^x - 1 = e^{\ln(1+\varepsilon)} - 1 = 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

   es decir $e^x - 1$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, para valores de x tales que $x \to 0$.

2. $f(x)$ es continua en todo $b \in R$, es decir $\lim_{x \to b} e^x = e^b$ o sea

   $\left|e^x - e^b\right| \to 0$ si $x \to b$, ya que $\left|e^x - e^b\right| = \left|e^b\left(e^{x-b} - 1\right)\right| = e^b\left|e^{x-b} - 1\right| \to 0$

   si $x \to b$, pues haciendo $u = x - b$, si $x \to b$, $u \to 0$ y así:

   $\left|e^b\left(e^{x-b} - 1\right)\right| = e^b\,|(e^u - 1)| \to 0$ (si $u \to 0$).

3. $f(x) = a^x$ es continua para todo $a > 0$.

   En efecto: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ y puesto que $x \ln a$ es continua (constante por x) y la exponencial en base e es continua, entonces $a^x = e^{x \ln a}$, que es la compuesta de estas dos, también es continua.

4. $f(x) = \log_a x$ es continua para todo $x \in R$, es decir, $\lim\limits_{x \to b} \log_a x = \log_a b$ ó $|\log_a x - \log_a b| \to 0$ si $x \to b$ y además $|\log_a x - \log_b x| = \log_a \dfrac{x}{b}$ ó $\left|\log_a \dfrac{x}{b}\right| \to 0$ si $x \to b$.

Para ver esto, sea $y = \log_a x/b \Rightarrow a^y = x/b$, y si $x \to b \Rightarrow x/b \to 1$

$$\Rightarrow a^y \to 1 \Rightarrow y \to 0 \Rightarrow \log_a (x/b) \to 0.$$

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x \to 2} e^{5x+4} = e^{(5)(2)+4} = e^{14}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} e^{3x+3} = e^3$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \log_3 (2x+5) = \log_3 9$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \ln (x+10) = \ln 10$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \ln \left(x^2 + 5x + 1\right) = \ln (1+5+1) = \ln 7$

10.5.5. Límites básicos para funciones exponencial y logarítmica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1+ax)}{x} = a \quad \text{y}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1+ax)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln (1+ax)^{1/x} = \ln \left(\lim_{x \to 0} (1+ax)^{1/x} \right) = \ln (e^a) = a$$

(por la continuidad del logaritmo y la nota al final de 10.5.3). Luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$$

Ahora haciendo el cambio de variable $\mu = e^x - 1$ $(x = \ln(\mu + 1))$ se puede apreciar que cuando $x \to 0$ entonces $\mu \to e^0 - 1 = 0$, (por la continuidad de la función exponencial), luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{\mu \to 0} \frac{\mu}{\ln(\mu + 1)} = \lim_{\mu \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln (1+\mu)}{\mu}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

   puesto que $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{\left(e^{x\ln a} - 1\right)}{x} = \dfrac{\left(e^{x\ln a} - 1\right)}{x\ln a}\ \ln a$

   entonces

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{x\ln a} - 1\right)}{x\ln a}\ \ln a = 1\,.\ln a = \ln a$ (haciendo $\mu = x \ln a$), luego

   $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a\,(1+bx)}{x} = \dfrac{b}{\ln a}$

   haciendo el cambio de base se tiene que

   $\log_a\,(1+bx) = \dfrac{\ln\,(1+bx)}{\ln\, a}$ y entonces

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a\,(1+bx)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(1+bx)}{x\,\ln a} = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(1+bx)}{x} = \frac{b}{\ln a}$$

   luego

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a\,(1+bx)}{x} = \frac{b}{\ln a}$$

3. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e}$

   haciendo $\mu = x - e$ cuando $x \to e$, $\mu \to 0$ y así:

   $$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \lim_{\mu\to 0} \frac{\ln\,(\mu + e) - \ln e}{\mu}$$

   $$= \lim_{\mu\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{u+e}{e}\right)}{\mu} = \lim_{\mu\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{e}\,\mu\right)}{\mu} = \frac{1}{e}$$

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - Cos x}{x^2}$

   Ya que

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{\mu\to 0} \frac{e^{\mu} - 1}{\mu} = 1 \qquad \left(\mu = x^2\right) \qquad \text{y}$$

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - Cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - Cos^2 x}{x^2\,(1 + Cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{Sen^2 x}{x^2\,(1 + Cos x)}$$

   $$= \lim_{x\to 0} \frac{Sen\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{Sen\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + Cos\, x} = (1)\,(1)\,\left(1/2\right) = 1/2$$

entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ \frac{e^{x^2}-Cos\,x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\ \frac{e^{x^2}-1+1-Cos\,x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\ \frac{1-Cos\,x}{x^2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{luego}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{e^{x^2}-Cos\,x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

10.5.6. Límites de exponenciales generalizadas

$$\lim_{x\to a}\ f\,(x)^{g\,(x)}$$

en los casos en que tenga sentido, para calcular límites de este tipo, se utiliza la propiedad de cambio de base en exponencial: $a^b = e^{b\,\ln a}$, para $a = f\,(x) > 0$ y para $b = g\,(x)$, es decir, $f\,(x)^{g\,(x)} = e^{g\,(x)\,\ln f\,(x)}$ y también se utiliza la continuidad de la función exponencial.

Ejemplo

Si $\lim_{x\to a}\ f\,(x) = A > 0$ y $\lim_{x\to a}\ g\,(x) = B$ entonces

$$\lim_{x\to a}\ f\,(x)^{g\,(x)} = \lim_{x\to a}\ e^{g\,(x)\,\ln f\,(x)} = e^{\lim_{x\to a} g\,(x)\,\ln f\,(x)} = e^{B\,\ln A} = A^B$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 1}\ \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \frac{1}{4}$$

pues $\lim_{x\to 1}\ \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\ \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ y $\lim_{x\to 1}\ x+1 = 2$

luego aplicando el resultado del ejemplo anterior se tiene que:

$$\lim_{x\to 1}\ \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{luego}$$

$$\lim_{x\to 1}\ \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0^+}\ (1+Sen\,x)^{1/x} = e$$

En efecto:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + Senx)^{1/x} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(1+Senx)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+Senx)}{x}} = e^1 = e$$

ya que multiplicando y dividiendo el limite a calcular entre $Sen\, x$ se tiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + Sen\, x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{Senx}{x} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\,(1 + Senx)}{Senx} = (1)\,(1) = 1$$

luego

$$\lim_{x \to 0'^+} (1 + Senx)^{1/x} = e$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e$$

ya que:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x \left(\frac{1}{\ln x}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x}} = e^1 = e$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} = \left(\frac{x^2 + 5}{x + 1}\right)^x = +\infty$$

como $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 5}{x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x + 1}\right)^x = +\infty$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 3}{2x + 5}\right)^{x^2} = 0$$

ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3}{2x + 3} = \dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ y además $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$ si $0 < a < 1$ observe su gráfica

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2.\frac{-3x}{-3}\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)} = e^{-6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-3/x\right)}{-\left(3/x\right)}}$$

$$= e^{-6} \quad \text{(haciendo } \mu = 3/x\text{)}, \quad \text{por tanto}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}(Cos\,x)^{\frac{1}{Sen\,x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(Cos\,x)^{\frac{1}{Sen\,x}} = \lim_{x\to 0}(1+Cos\,x-1)^{\frac{1}{Sen\,x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+(Cos\,x-1))^{\frac{1}{Cos\,x-1}\frac{Cos\,x-1}{1}\frac{1}{Sen\,x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1+(Cosx-1))^{\frac{1}{Cosx-1}}\right)^{\frac{Cosx-1}{Senx}} = e^{0} = 1$$

puesto que

$$\lim_{x\to 0}(1+(Cos\,x-1))^{\frac{1}{Cos\,x-1}} = e \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to>0}\frac{Cos\,x-1}{Sen\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{Cos\,x-1}{x}}{\frac{Sen\,x}{x}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{por tanto}$$

$$\lim_{x\to 0}(Cos\,x)^{\frac{1}{Sen\,x}} = 1$$

EJERCICIOS

I. Sea $\dfrac{f\,(x)}{g\,(x)} = \dfrac{ax^n + \ldots + a_0}{bx^m + \ldots + b_0}$

demuestre e ilustre con ejemplos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \begin{cases} a/b & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad n < m \\ +\infty \quad -\infty & \text{si} \quad n > m \end{cases}$$

II. Las siguientes afirmaciones son todas verdaderas, ilustrarlas con ejemplos

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f\,(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g\,(x) = c \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f\,(x) + g\,(x) = +\infty$

b) Si $\lim\limits_{x \to a} f\,(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g\,(x) = c \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f\,(x) + g\,(x) = -\infty$

c) Si $\lim\limits_{x \to a} f\,(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g\,(x) = c\,, \quad c \neq 0$ entonces:

i. Si $c > 0\,, \ \lim\limits_{x \to a} f\,(x)\, g\,(x) = +\infty$

ii. Si $c < 0\,, \ \lim\limits_{x \to a} f\,(x)\, g\,(x) = -\infty$

d) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g\,(x) = c \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x)\,.\,g\,(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } c > 0 \\ -\infty \text{ si } c < 0 \end{cases}$$

e) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g\,(x) = c \neq 0$ entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x)\,.\,g\,(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } c > 0 \\ +\infty \text{ si } c < 0 \end{cases}$$

f) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g\,(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f\,(x)\, g\,(x) = +\infty$

III. Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

2. $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

4. $\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y}$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$

6. $\lim_{x\to a} \frac{x^{1/m} - a^{1/m}}{x - a}$

7. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

8. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

9. $\lim_{x\to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

10. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3} \right)$

11. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

12. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

13. $\lim_{h\to 0} \frac{Sen\,(x+h) - Sen\,x}{h}$

14. $\lim_{x\to a} \frac{Cosx - Cosa}{x - a}$

15. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{Senx - Cosx}{1 - Tanx}$

16. $\lim_{x\to 1} (1-x)\, Tan\, \frac{\pi x}{2}$

17. $\lim_{x\to 0} Cot\, 2x Cot\, (\pi/2 - x)$

18. $\lim_{x\to \pi} \frac{1 - Sen\,(x/2)}{\pi - x}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{Cos\,mx - Cos\,nx}{x^2}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{Tanx - Senx}{x^3}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{Arc\,Senx}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \frac{Arc\,Tan\,2x}{Sen\,3x}$

23. $\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{Sen\,\pi x}$

24. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{Cosx}}{x^2}$

25. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{Sen\,\alpha x - Sen\,\beta x}$

26. $\lim_{x\to \infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right)$

27. $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x| + |4x - 1| + |x + 4|}{x}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{Senh\,x}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{Cosh\,x - 1}{x^2}$

30. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

31. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$

32. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

33. $\lim_{x\to +\infty} \left(Sen\,\sqrt{x+1} - Sen\,\sqrt{x} \right)$

34. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x + Senx}{x + Cosx}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{Sen 2x} - e^{Senx}}{x}$

36. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\dfrac{x+1}{x}}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

38. $\lim\limits_{x\to +\infty} x + \sqrt[3]{1-x^3}$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{Senx}$

IV. Demostrar que:

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x = 1$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = e^6$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + Tan \sqrt[2]{x}\right)^{1/2x} = \sqrt{e}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{Senx}{x} = 0$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{Senx}{x}\right)^{\dfrac{Senx}{x - Senx}} = \dfrac{1}{e}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (Cosx)^{1/x^2} = 1/\sqrt{e}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} xSen\left(1/x\right) = 0$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,Sen\left(1/x\right) = 1$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} x/2 + Senx = +\infty$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - 300Cosx = +\infty$

V. En cuáles de los casos que a continuación se dan, se puede determinar

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

sin más información sobre las funciones.

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 7$

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1; \qquad \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

VI. Se pueden concluir las afirmaciones siguientes? Justificar sus respuestas.

a) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty} f(x)\, g(x) = 0$

b) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

c) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Capítulo 11

DERIVADAS

Si bien es cierto que a partir del concepto de límite se ha podido obtener información sobre el comportamiento de una función en un punto y en una vecindad de él, esta información resulta incompleta si se pretende indagar algo más sobre la curva en dicha vecindad, por ejemplo si se requiere saber cuál es su índice de variación, si ésta sube o baja, si es cóncava o convexa, dónde presenta puntos extremos, entre otros. Éstos aspectos se pueden estudiar a partir del conocimiento de un límite especial llamado la derivada de una función. Este concepto se convierte en una valiosa herramienta para describir fenómenos y para analizar resultados que se presentan a través de ecuaciones que representan curvas, siendo imprescindible en casi todo trabajo de matemática aplicada.

11.1. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA

11.1.1. Velocidad Instantánea:

Suponga que una partícula se desplaza a lo largo de una recta con una velocidad que no es constante, es decir, que varía con el tiempo. Sea $S\,(t)$ la posición de la partícula t segundos después de haber iniciado el movimiento. En el tiempo t_0 la partícula se encuentra en el punto$S\,(t_0)$ sobre la recta, y en el tiempo $t_0 + h$ con $h \in R$, se encuentra en el punto $S\,(t_0 + h)$. (Figura 11.1).

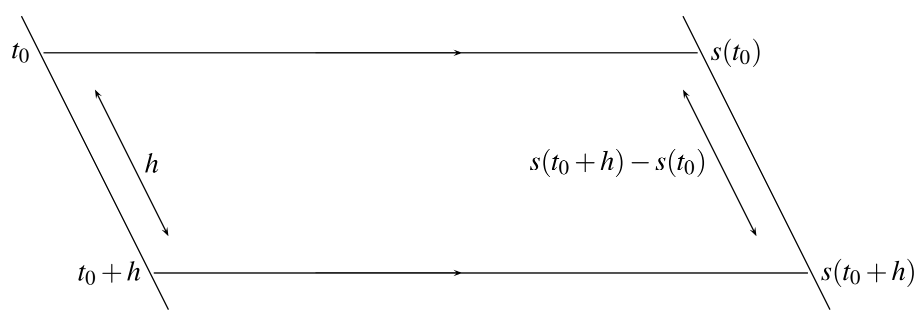


FIGURA N° 11.1

Como la velocidad no es constante entonces en los puntos comprendidos entre $S\,(t_0)$ y $S\,(t_0 + h)$ la partícula va a diferentes velocidades. Recordando que cuando la velocidad es constante, ésta es igual al espacio recorrido dividido entre el tiempo que demora la partícula al recorrerlo, al tomar el espacio $S\ (t_0+h)\ -\ S\ (t_0)$ y dividirlo entre el tiempo que demora la partícula en recorrerlo: $(t_0+h)\ -\ t_0 = h$: se obtiene no la velocidad con que la partícula recorre este tramo, pues ésta no es constante, sino la velocidad media que lleva la partícula cuando lo recorre, por tanto

$$Velocidad\ media = \frac{S\ (t_0+h)\ -\ S\ (t_0)}{h}$$

Ahora la pregunta es: A qué velocidad pasó la partícula en el tiempo t_0?, o dicho de otra forma, cuál es la velocidad instantánea en el punto $S\ (t_0)$?.

Aún cuando la velocidad en el instante t_0 es constante, no es posible aplicar la fórmula de velocidad constante para calcularla, pues no se dispone de un tramo de espacio (pues se calcula en un punto) ni de un intervalo de tiempo (pues se calcula en un instante dado). Esta situación se puede obviar considerando el tramo de espacio $S\ (t_0+h)\ -\ S\ (t_0)$ y el tiempo h que se demora en recorrerlo. Así el cociente $\frac{S\ (t_0+h)-S(t_0)}{h}$, aunque representa la velocidad media en ese intervalo de tiempo, a medida que h se haga más pequeño, el punto $S\ (t_0)$ y $S\ (t_0+h)$ estarán más cercanos y esta velocidad media se aproximará cada vez más a la velocidad instantánea buscada, llegando a ser exactamente ella, en el caso ideal en que $h \to 0$, es decir:

$$Velocidad\ instantánea\ en\ el\ tiempo t_0\ =\ \lim_{h\to 0} \frac{S\ (t_0+h)\ -\ S\ (t_0)}{h}$$

11.1.2. Pendiente de la recta tangente a una curva en un punto

Se parte de la idea intuitiva que se tiene de lo que significa recta tangente a una curva en un punto y lo que significa recta secante a una curva. (Figura 11.2)

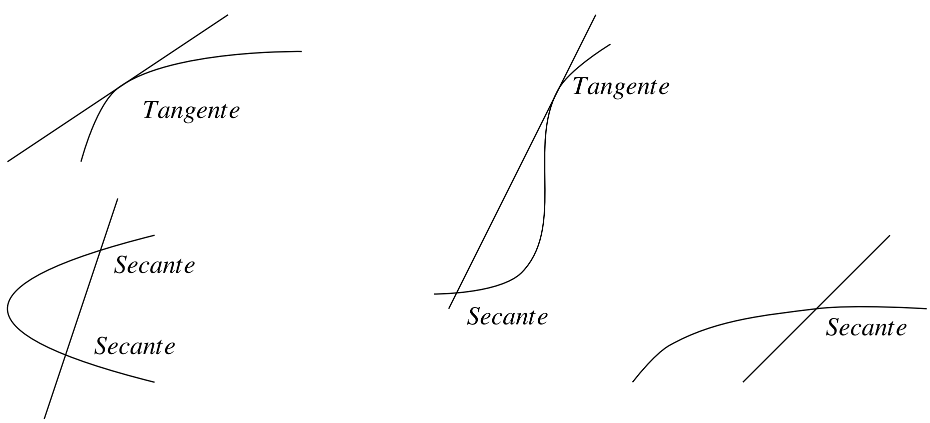


FIGURA N° 11.2

Ahora sea $y = f\ (x)$ una función y $P_0\ =\ (x_0\, , f\ (x_0))$ y $P_1\ =\ (x_0+h\, , f\ (x_0+h))$ dos puntos sobre la curva que representa $f\ (x)$. Considere la recta M secante a esta curva en los puntos P_0 y P_1 (Figura 11.3).

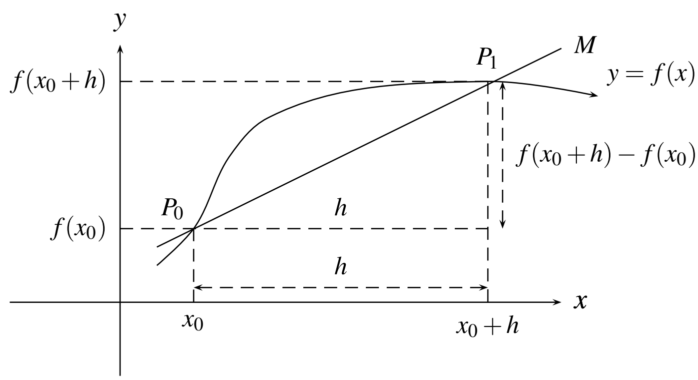


FIGURA N° 11.3

Como se tienen dos puntos sobre la recta, se puede calcular su pendiente (diferencia de ordenadas sobre diferencia de abscisas):

$$M = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

De la misma forma se puede calcular la pendiente de cualquier recta secante, si ésta corta la curva en dos puntos. La situación problemática para hallar la pendiente de una recta se presenta cuando solamente se conoce un punto de ella, pues no es posible hallarla de esta forma. Este es el caso que se pretende trabajar, es decir hallar la pendiente de la recta L tangente a esa curva en el punto P_0.

Para resolver este problema considérense las rectas secantes $L_1, L_2, L_3 \ldots$ que pasan por los puntos $P_1 = (x_0+h_1, f(x_0+h_1))$, $P_2 = (x_0+h_2, f(x_0+h_2))$, $P_3 = (x_0+h_3, f(x_0+h_3))$, ... respectivamente y que además pasan por el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, siendo h_i un número muy cercano a cero para todo i, el cual estará más próximo a cero a medida que el subíndice i sea más grande (Figura 11.4).

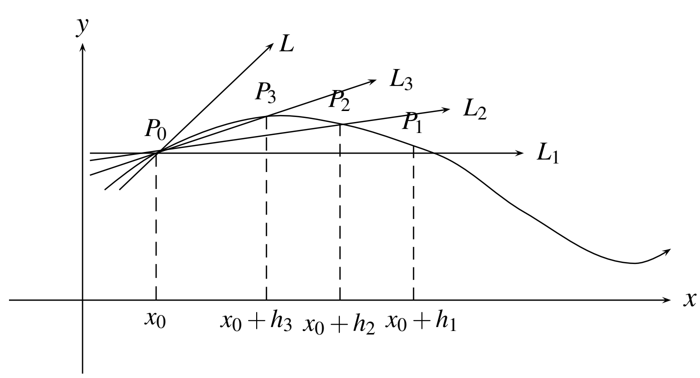


FIGURA N° 11.4

Observe de la figura 11.4 que a medida que h_i se acerca más a cero, el punto $(x_0+h_i, f(x_0+h_i))$ se acerca más al punto P_0 y la recta L_i tiende a confundirse con la recta tangente L, coincidiendo con ella en el caso ideal cuando $h \to 0$, es decir,

$$\textit{Pendiente de la recta Tangente en } P_0 = \lim_{h\to 0} \textit{ pendiente } L_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo

Un objeto recorre $S(t) = t^2 + 2$ metros en los primeros t segundos.

a) Cuánto espacio recorre entre $t = 2$ y $t = 2.1$ segundos?

b) Cuál es su velocidad media en este intervalo de tiempo?

c) Cuál es su velocidad media entre $t = 2$ y $t = 4$ segundos?

d) Cuál es la velocidad en $t = 3$ segundos? En $t = 4$ segundos?

e) En qué instante la velocidad es cero?

Del numeral 11.1.1 se tiene que:

a) Entre $t = 2$ y $t = 2.1$ segundos, el objeto recorre

$$\begin{aligned} S(2.1) - S(2) &= (2.1)^2 + 2 - (4+2) \\ &= (2.1)^2 + 2 - 6 = (2.1)^2 - 4 = 4.41 - 4 = 0.41\, mts \end{aligned}$$

b) La velocidad media entre $t = 2$ y $t = 2.1$ es:

$$\begin{aligned} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h} &= \frac{S(2.1) - S(2)}{0.1} \\ &= \frac{(4.41+2) - (4+2)}{0.1} = \frac{0.41}{0.1} = 4.1\, mts/seg \end{aligned}$$

c) La velocidad media entre $t = 2$ y $t = 4$ es:

$$\frac{S(4) - S(2)}{2} = \frac{18-6}{2} = \frac{12}{2} = 6 mts/seg$$

d) La velocidad en el instante t_0 es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}$$

luego en $t = 3$ segundos se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{S(3+h) - S(3)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 + 2 - (9+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 2 - 11}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 6 + h = 6 mts/seg \end{aligned}$$

En $t = 4$ segundos, la velocidad es:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{S(4+h) - S(4)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2+2-(16+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16+8h+h^2+2-18}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(8+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 8+h = 8\,mts/seg\end{aligned}$$

e) Velocidad en un instante t

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2+2-(t^2+2)}{h} \\ &\lim_{h\to 0} \frac{t^2+2th+h^2+2-t^2-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2th+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2t+h)}{h} \\ &\lim_{h\to 0} 2t+h = 2t\end{aligned}$$

luego la velocidad es 0 si $2t = 0$, es decir, $t = 0$ segundos.

Ejemplo

Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 6 m/seg. Si el sentido positivo de la distancia, desde el punto de partida es hacia arriba, el espacio recorrido es: $S(t) = -3t^2 + 6t$, siendo S la distancia recorrida por la pelota desde el punto de partida después de t segundos. Hallar:

a) La velocidad de la pelota transcurridos 2 segundos

b) El tiempo que tarda la pelota en alcanzar el punto más alto

c) La altura máxima que alcanza la pelota

d) El tiempo que tarda la pelota en llegar al piso

e) La velocidad de la pelota al llegar al piso.

Teniendo en cuenta que el movimiento sigue siendo rectilíneo entonces:

a) La velocidad de la pelota en $t = 2\,seg$ es:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{S(2+h) - S(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-3(2+h)^2+6(2+h)-((-3)(4)+12)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3(4+4h+h^2)+12+6h+12-12}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-12h-3h^2+6h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -6-3h = -6\,mts/seg\end{aligned}$$

b) La pelota alcanza el punto más alto cuando su velocidad es cero, es decir

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3(t+h)^2+6(t+h)+3t^2-6t}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-3(t^2+2th+h^2)+6t+6h+3t^2-6t}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-3t^2-6th-3h^2+6h+3t^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-6th-3h^2+6h}{h} = \lim_{h\to 0} -6t-3h+6 = -6t+6
\end{aligned}$$

luego $-6t+6=0 \Leftrightarrow 6=6t \Leftrightarrow t=1\,seg$, y así la velocidad es cero transcurrido 1 segundo.

c) La altura máxima de la pelota ocurre cuando $t = 1\,seg.$, es decir,

$S(1) = -3+6 = 3\,m.$, y así la altura máxima alcanzada por la pelota es de 3 metros.

d) La pelota llega al piso cuando $S = 0$, o sea, cuando $-3t^2+6t = 0$, es decir,

$t(-3t+6) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ó $6 = 3t$, y así, $t = 2\,seg.$, luego la pelota llega al piso al cabo de 2 segundos.

e) Según lo calculado en *b*), la velocidad de la pelota en el instante t es: $-6t+6$, luego la velocidad de la pelota cuando llega al piso es $-6(2)+6 = -6\,mts/seg$

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = \sqrt{10-x}$ en el punto $(1,3)$. Del numeral 11.1.2 se tiene que la pendiente de la recta tangente en $(1,3)$ es:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{10-(1+h)}-\sqrt{9}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9-h}-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9-h}-3}{h}\,\frac{\sqrt{9-h}+3}{\sqrt{9-h}+3}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(9-h)-9}{h\left(\sqrt{9-h}+3\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{9-h}+3} = \frac{-1}{6}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la pendiente de la curva $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el punto $(2, 1/3)$

En la forma análoga al ejemplo anterior se tiene que:

Pendiente de la recta tangente a la curva $f\,(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en el punto $(2\,,\,1/3)$ es:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f\,(2+h)\,-\,f\,(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2+h+1}-\dfrac{1}{3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3-(h+3)}{3\,(h+3)\,h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3\,(h+3)} \;=\; -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

11.2. DEFINICIÓN DE DERIVADA

Los problemas tratados en 11.1.1 y 11.1.2 llevaron a resultados análogos en su presentación: el incremento de una función $S\,(t_0+h)\,-\,S\,(t_0)$ para el problema 11.1.1 y $f\,(x_0+h)\,-\,f\,(x_0)$ para el problema 11.1.2, dividido entre el incremento de la variable (h) y haciendo que éste tienda a cero. Los límites de cocientes de este mismo tipo aparecen también en muchos problemas relacionados con diferentes áreas del conocimiento como la física, matemática, economía, etc., razón por la cual se justifica un estudio detallado de ellos que es precisamente lo que se conoce con el nombre de *derivadas de funciones*.

Definiciones

1. Sea $y = f\,(x)$ una función y sea a un punto en el dominio de $f\,(x)$, si existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\,(a+h)\,-\,f\,(a)}{h}$$

entonces al valor numérico de éste, se llama la ***derivada de f en el punto a*** y se nota por

$$f\,'(a) \quad \text{ó} \quad \frac{d}{dx}\,f\,(a) \quad \text{ó} \quad \left.\frac{df}{dx}\,(x)\right|_a$$

2. Dada una función $y = f\,(x)$ se llama ***función derivada de*** $f\,(x)$**,** o simplemente la ***derivada de*** $f\,(x)$**,** a otra función, notada por $f\,'\,(x)$ ó $\dfrac{df}{dx}$ definida como:

$$f\,'\,(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f\,(x+h)\,-\,f\,(x)}{h}$$

en los puntos x del dominio de f donde exista este límite.

NOTAS:

a) Note que la definición 1 . es una definición local, que corresponde a la derivada de la función en un punto, y su resultado es un número real, y la definición 2 . corresponde a una definición global, que es la derivada de una función (ya no es un punto específico) y su resultado es una función.

b) En la definición 1 . si se hace $x = a + h$, es evidente que cuando $h \to 0$, x tiende a a y además $h = x - a$, luego la derivada de f en el punto $x = a$ se puede también definir como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

expresión muy usada por algunos autores y que a veces conviene usar

Ejemplo

Hallar la derivada de $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto $x = 2$

$$\begin{aligned} f'(a) = f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 + x + 1\right) - (4 + 2 + 1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 3 = 5 \end{aligned}$$

Desde el punto de vista del problema 11.1.2, este resultado indica que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 + x + 1$ en el punto $(2, 7)$ es 5.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 + x + 1$

Observe que aquí no se especifica ningún punto, luego lo que se pide es hallar la función derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$, es decir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) + 1 - \left(x^2 + x + 1\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1 - x^2 - x - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h + 1 = 2x + 1 \end{aligned}$$

entonces la derivada de $f(x) = x^2 + x + 1$ es la función $f'(x) = 2x + 1$. Con este resultado, si se quiere por ejemplo calcular la derivada de $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto $x = 7$, es decir, $f'(7)$, se tiene que $f'(7) = 2(7) + 1 = 15$. Si es por ejemplo en el punto $x = 2$, se tiene $f'(2) = 2(2) + 1 = 5$ (compare con el ejemplo anterior).

Ejemplo

Sea $f(x) = |x|$, hallar $f'(0)$, si existe

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

ahora como

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

entonces $f'(0)$ no existe, pues $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$ no existe, ya que los límites laterales son diferentes, por tanto $f(x)=|x|$ no es derivable en $x=0$.

Si se analiza gráficamente la función (fig. 11.5), se observa que en el punto $x=0$, se presenta un "pico", al cual se le podrían asociar infinitas rectas que se pudieran ver como tangentes con diferentes pendientes.

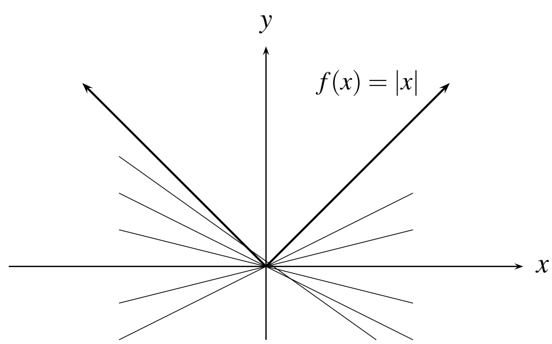


FIGURA N° 11.5

Ejemplo

Halle, si existe, la derivada de $f(x)=\sqrt[3]{x}$ en $x=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{h}\right)^2}=+\infty$$

es decir, el $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ no existe y por tanto $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no es derivable en $x=0$. (Figura 11.6)

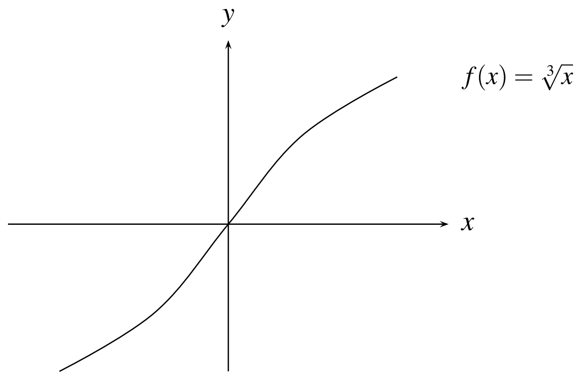


FIGURA N° 11.6

Como se puede apreciar en la figura 11.6, la recta "tangente" a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $(0, 0)$ (vista como límites de rectas secantes) tiene pendiente infinita (que no es un número).

Ejemplo

Hallar la derivada de

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Si $x < 1$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

b) Si $x > 1$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$, el cual no existe ya que los límites laterales son diferentes, pues

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1+h+1-2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0^-} 0 = 0, \quad \text{así:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \text{no existe} & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

NOTA:

En los puntos donde no hay derivada no siempre se presentan situaciones análogas a las de $|x|$, (picos) o a las de $\sqrt[3]{x}$ (tangentes verticales), sino que puede suceder también que la función no sea continua en esos puntos como se puede concluir del siguiente resultado:

Teorema

Si $y = f(x)$ es una función derivable en $x = a$ entonces f es continua en este punto.

Demostración:

Por hipótesis f es derivable en $x = a$, entonces el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in R$$

para ver que f es continua en $x = a$, basta ver que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{es decir, que} \quad \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$$

en efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} x - a = f'(a)(0) = 0 \end{aligned}$$

Del tercer ejemplo se puede concluir que el recíproco de este teorema no siempre es cierto, pues allí $f(x)$ es continua en “cero” pero no es derivable en “cero”.

Gráficamente, si una función no es derivable en un punto $x = a$, entonces en este punto se puede presentar un salto o hueco (discontinuidad), o un pico (tercer ejemplo) o la recta tangente en ese punto tiene pendiente infinita (cuarto ejemplo). La existencia, garantiza en ese punto suavidad de la curva y pendiente numérica de la recta tangente en ese punto.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 30 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es derivable en $x = 0$, pues f no es continua en este punto, observe que esta función es derivable en cualquier otro punto.

EJERCICIOS

1. Si una piedra se arroja desde el piso hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial de $10 mts/seg$, y si $s(t) = -5t^2 + 10t$, donde $s(t)$ es la distancia recorrida por la piedra desde el punto de partida a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Hallar:

   a) La velocidad media de la piedra durante el intervalo de tiempo $3/4 \leq t \leq 5/4$

   b) La velocidad instantánea de la piedra a los $3/4$ de segundo.
   c) Cuánto tiempo tardará para llegar al punto más elevado?
   d) Cuál es la altura máxima que alcanzará la piedra?
   e) Cuál es la velocidad de la piedra cuando llega al piso?

2. Un objeto recorre $t^3 + t + 2$ metros en los primeros t segundos.
   a) Cuánto recorre entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos?
   b) Cuál es su velocidad media en ese intervalo?
   c) Cuál es su velocidad en $t = 4$ segundos?.

3. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^3 + 3$ en el punto $(1, 2)$.

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 + 1$ que pasa por el origen.

5. Hallar sobre la gráfica de $y = x^2 + 2x + 5$ el punto donde la recta tangente es paralela a $y = x - 1$.

6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 - x^2$ en el punto $(0, 1)$.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 4)$ y es normal a la curva $y = x^2$.

8. Halle la ecuación de la recta que tiene pendiente $-2/9$ y que es tangente a la parábola $x^2 + 4y = 20$.

9. Usando la definición de derivada, halle las derivadas de las funciones:
   a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, y calcule $f'(0)$ y $f'(1)$
   b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, y calcule $f'(2)$ y $f'(0)$
   c) $f(x) = 2x^2 + 3x$, y calcule $f'(4)$ y $f'(1/2)$
   d) $f(x) = x^n \;\; n \in N$
   e) $f(x) = x^{1/n}$

10. Responda las siguientes preguntas:
    a) Es $f(x) = \sqrt{|x|}$ derivable en $x = 0$?
    b) Es $f(x) = |x|(x - 2)$ derivable en $x = 0$?
    c) Es $f(x) = |x|\,|x - 1|$ derivable en $x = 0$? en $x = 1$?
    d) Es $f(x) = \left|4 - x^2\right|$ derivable en $x = 0$? $x = 1$? $x = -1$?

11. El límite dado es una derivada. De qué función y en qué punto?
    a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{2(5+h)^3 - 2\left(5^3\right)}{h}$
    b) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + x - 30}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{Cos\,(x+h) - Cos\,x}{h}$

12. Hallar los valores de a y b tales que $f'(2)$ exista si:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

13. Hallar los valores de a y b tal que $f'(1)$ exista si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax+b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

14. Suponer que $f'(a)$ existe y con un cambio de variable adecuado, justificar si son verdaderas o no las afirmaciones siguientes:

a) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

b) $f'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+2t) - f(a)}{t}$

c) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^2(a+h) - f^2(a)}{h}$

d) $f'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+2t) - f(a+t)}{t}$

e) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$

11.3. PROPIEDADES Y CÁLCULO DE DERIVADAS

Hasta ahora para calcular la derivada de una función es necesario calcular un límite, lo cual no siempre resulta inmediato. Afortunadamente, algunas propiedades de la derivada, que se tratarán a continuación, facilitarán este cálculo, sin necesidad de recurrir, en la mayoría de los casos, al uso de límites. Las expresiones y resultados que aparecen en estas propiedades se supone que son válidas donde ellas tengan sentido en el campo de los números reales.

Propiedad 1. Derivada de una constante

Si $f(x) = k$ (constante) entonces $f'(x) = 0$

En efecto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = 5$ entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = \sqrt{\pi}$ entonces $f'(x) = 0$

Propiedad 2. Derivada de la función idéntica

Si $f(x) = x$ entonces $f'(x) = 1$

En efecto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Propiedad 3. Derivada de una suma

La derivada de una suma de funciones es la suma de sus derivadas, es decir,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Ejemplo

Si $f(x) = a + x$ entonces $f'(x) = 0 + 1 = 1$.

Propiedad 4. Derivada de una diferencia

La derivada de diferencia de funciones es la diferencia de sus derivadas, es decir,

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Éste es un caso particular de la propiedad anterior.

Propiedad 5. Derivada de un producto

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)+f(x)\,g(x+h)-f(x)\,g(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,(g(x+h)-g(x))}{h}+\frac{g(x+h)\,(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)\,g'(x)+g(x)\,f'(x)
\end{aligned}$$

NOTA:

Como un caso particular, si $g(x)=k$, entonces $(kf)'(x)=kf'(x)$

Ejemplo

Si $f(x)=a+bx+2$ entonces $f'(x)=0+b+0=b$

Ejemplo

Si $f(x)=x^2$ entonces $f'(x)=1\,.x+x\,.1=2x$

Ejemplo

Si $f(x)=5+4x+8x^2$ entonces $f'(x)=4+16x$

Propiedad 6. Derivada de la recíproca de una función

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\,g(x)} = -g'(x)\,\frac{1}{g(x)\,g(x)}\\
&= \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$ entonces $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Ejemplo

Sea $f\,(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ entonces $f\,'(x) = \dfrac{-\,(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$

Propiedad 7. Derivada de un cociente

$$\left[\frac{f\,(x)}{g\,(x)}\right]' = \frac{g\,(x)\,f\,'(x) - f\,(x)\,g\,'(x)}{[g\,(x)]^2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\left[\frac{f\,(x)}{g\,(x)}\right]' &= \left[\left(\frac{1}{g\,(x)}\right)(f\,(x))\right]' = \frac{1}{g\,(x)}f\,'(x) + \left[\frac{1}{g\,(x)}\right]' f\,(x)\\ &= \frac{f\,'(x)}{g\,(x)} + f\,(x)\left[-\frac{g\,'(x)}{[g\,(x)]^2}\right] = \frac{f\,'(x)}{g\,(x)} - \frac{f\,(x)\,g\,'(x)}{[g\,(x)]^2} = \frac{g\,(x)\,f\,'(x) - f\,(x)\,g\,'(x)}{[g\,(x)]^2}\end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar $f\,'(x)$ si $f\,(x) = \dfrac{3-2x}{3+2x}$

$$\begin{aligned}f\,'(x) &= \frac{(3+2x)\,(3-2x)' - (3-2x)\,(3+2x)'}{(3+2x)^2}\\ &= \frac{(3+2x)\,(-2) - (3-2x)\,(2)}{(3+2x)^2}\\ &= -\,\frac{12}{(3+2x)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo

Si $f\,(x) = \dfrac{4x^7 - 28x^3 + \sqrt{2}\,x}{x^3 - 6x^2 + 22}$ entonces

$$\begin{aligned}f\,'(x) &= \frac{\left(x^3-6x^2+22\right)\left(4x^7-28x^3+\sqrt{2}x\right)' - \left(4x^7-28x^3+\sqrt{2}x\right)\left(x^3-6x^2+22\right)'}{(x^3-6x^2+22)^2}\\ &= \frac{\left(x^3-6x^2+22\right)\left(28x^6-84x^2+\sqrt{2}\right) - \left(4x^7-28x^3+\sqrt{2}x\right)\left(3x^2-12x\right)}{(x^3-6x^2+22)^2}\end{aligned}$$

Propiedad 8. Derivada de función potencial (1)

Si $f(x) = x^n$ con $n \in N$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + (1/2)n(n-1)\, h^2 x^{n-2} + \ldots + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nhx^{n-1} + (1/2)n(n-1)\, h^2 x^{n-2} + \ldots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + (1/2)\, n\,(n-1)\, hx^{n-2} + \ldots + h^{n-1}\right)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + (1/2)\, n\,(n-1)\, hx^{n-2} + \ldots + h^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $f(x) = 4x^{100}$ entonces $f'(x) = \left(4x^{100}\right)' = 4\left(x^{100}\right)' = 4\,(100)\,x^{99} = 400x^{99}$

Ejemplo

Si $f(x) = \dfrac{x^2+2}{3-x^2}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(3-x^2\right)\left(x^2+2\right)' - \left(3-x^2\right)'\left(x^2+2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(3-x^2\right)(2x) - (-2x)\left(x^2+2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{10x}{\left(3-x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Propiedad 9. Derivada de función potencial (2)

Si $f(x) = x^{-n}$ con $n \in N$ entonces $f'(x) = -nx^{-n-1}$
En efecto:

$$f'(x) = \left(x^{-n}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

NOTA:

Las propiedades 1. 8. y 9. se pueden resumir en:

Propiedad $9'$

Si $f(x) = x^p$ entonces $f'(x) = px^{p-1}$ si $p \in Z$

Ejemplos

1. Si $f(x) = 2x^{-5}$ entonces $f'(x) = \left(2x^{-5}\right)' = 2\left(x^{-5}\right)' = -10x^{-6}$

2. Si $f(x) = \dfrac{x^{-3}+x^{5}}{4+5x^{-2}}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(4+5x^{-2}\right)\left(x^{3}+x^{5}\right)' - \left(x^{-3}+x^{5}\right)\left(4+5x^{-2}\right)'}{\left(4+5x^{-2}\right)^{2}} \\ &= \frac{\left(4+5x^{-2}\right)\left(-3x^{-4}+5x^{4}\right) - \left(x^{-3}+x^{5}\right)\left(-10x^{-3}\right)}{\left(4+5x^{-2}\right)^{2}} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \dfrac{4x^{2}+8x^{4}}{8x^{10}+2}$, hallar $f'(x)$ y $f'(3)$.

2. Si $f(x) = \dfrac{1/x - 3/x^{2}}{3+x^{-2}+4x^{3}}$, hallar $f'(x)$ y $f'(2)$.

3. Si $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1+4/x^{2}}{2+5/x}$, hallar $f'(x)$ y $f'(1)$.

4. Si $f(x) = Cos\,3 + e^{4} + \dfrac{2\ln 7}{x-1/x}$, hallar $f'(x)$ y $f'(5)$.

5. Si $f(x) = \pi + \dfrac{4x+\sqrt{3x^{2}}}{x^{3}+e^{3}+x^{-2}/e}$, hallar $f'(x)$ y $f'(e)$.

Propiedad 10. Derivada de función compuesta (La regla de la cadena)

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x)$, donde se entiende que $f'(g(x))$ es la derivada de f calculada en $g(x)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} [f(g(x))]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad (*) \\ &= f'(g(x))\, g'(x) \end{aligned}$$

El primer limite del renglon $(*)$ Se justifica haciendo $k = g(x+h) - g(x)$, entonces si $h \to 0,\ k \to 0$ y

$$g(x+h) = g(x) + k.$$

NOTA:

Si $y = f(g(x))$ entonces $\dfrac{dy}{dx} = f'(g(x))\, g'(x) = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$.

Ejemplos

1. Sea $y(x) = \left(x^4 + x^2 + 1\right)^3$, entonces $y'(x) = 3\left(x^4 + x^2 + 1\right)^2 \left(4x^3 + 2x\right)$

   o si $y(x) = \left(x^4 + x^2 + 1\right)^3$, haciendo $y = u^3$ y $u = x^4 + x^2 + 1$ entonces

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\left(4x^3 + 2x\right) = 3\left(x^4 + x^2 + 1\right)^2\left(4x^3 + 2x\right)$$

2. Sea $y(x) = \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$ entonces $y'(x) = 4\left[\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right]^3 \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)'$

   $$= 4\left[\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right]^3 \left[\frac{\left(2x^3 + 1\right)3x^2 - \left(x^3 - 1\right)6x^2}{\left(2x^3 + 1\right)^2}\right] = \frac{36x^2\left(x^3 - 1\right)^3}{\left(2x^3 + 1\right)^5}$$

   o también:

   $y(x) = u^4$; donde $u = \dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}$ y así

   $$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3\left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)'$$

   $$= 4\left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^3 \left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)' = \frac{36x^2\left(x^3 - 1\right)^3}{\left(2x^3 + 1\right)^5}$$

3. Sea $y(x) = \left(x^3 + x + 1\right)^4 \left(2x^3 - x + 1\right)^8$ entonces

   $$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\left(x^3 + x + 1\right)^4\right)' \left(2x^3 - x + 1\right)^8 + \left(x^3 + x + 1\right)^4 \left(\left(2x^3 - x + 1\right)^8\right)' \\ &= 4\left(x^3 + x + 1\right)^3\left(3x^2 + 1\right)\left(2x^3 - x + 1\right)^8 \\ &+ \left(x^3 + x + 1\right)^4 8\left(2x^3 - x + 1\right)^7\left(6x^2 - 1\right) \end{aligned}$$

4. Sea $y(x) = \dfrac{\left(x^3 + 2x\right)^{-5} + (2x+2)^4}{\left(x^3 + 2\right)^2}$ entonces

   $$y'(x) = \frac{\left(x^3 + 2\right)^2\left[\left(x^3 + 2x\right)^{-5} + (2x+2)^4\right]' - \left[\left(x^3 + 2x\right)^{-5} + (2x+2)^4\right]\left[\left(x^3 + 2\right)^2\right]'}{\left[\left(x^3 + 2\right)^2\right]^2} =$$

$$\frac{\left(x^3+2\right)^2\left[-5\left(x^3+2x\right)^{-6}\left(3x^2+2\right)+4\left(2x+2\right)^3(2)\right]-\left[\left(x^3+2x\right)^{-5}+\left(2x+2\right)^4\right]2\left(x^3+2\right)^1\left(3x^2\right)}{\left(x^3+2\right)^4}$$

Propiedad 11. Derivada de función potencial (3)

Si $f(x) = x^{1/n},\ n \in Z$ entonces $f'(x) = (1/n)\, x^{(1/n)-1}$

Para demostrar esta propiedad se toma:

$x = x^{n/n} = \left(x^{1/n}\right)^n$ y así $1 = \dfrac{dx}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right)^n = \dfrac{d}{dx}\left(g\left(h(x)\right)\right)$, con

$g(x) = x^n$ y $h(x) = x^{1/n}$ por lo tanto

$g\left(h(x)\right) = g\left(x^{1/n}\right) = \left(x^{1/n}\right)^n$ entonces

$$\begin{aligned} 1 &= g'\left(h(x)\right) h'(x) = n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) &= \frac{1}{nx^{1-1/n}} = (1/n)\, x^{(1/n)-1} \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. Sea $y(x) = \sqrt{x^3+x+1}$ entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^3+x+1\right)^{(1/2)-1}\left(x^3+x+1\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(x^3+x+1\right)^{-1/2}\left(3x^2+1\right) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{si } u = x^3+x+1. \end{aligned}$$

2. Sea $y(x) = \sqrt{1+u}$, con $u = \sqrt{x}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u)^{-1/2}\frac{1}{2}(x)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3. Sea $y(x) = \sqrt{u}$, con $u = v(3-2v)$, $v = x^2$ entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\left((3-2v)-2v\right)2x = \frac{1}{2\sqrt{u}}(3-4v)\,2x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{v(3-2v)}}(3-4v)\,2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2\left(3-2x^2\right)}}\left(3-4x^2\right)2x. \end{aligned}$$

Propiedad 12. Derivada del Seno

Si $f(x) = Sen\, x$ entonces $f'(x) = Cos\, x$

En efecto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Sen\,(x+h) - Sen\,x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{Sen\,x\,Cosh + Senh\,Cos\,x - Sen\,x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-Sen\,x\,(1-Cosh) + Senh\,Cos\,x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -Sen\,x \frac{(1-Cosh)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(Senh)}{h} Cos\,x \\
&= (-Sen\,x)\,(0) + (1)\,Cos\,x = Cos\,x
\end{aligned}$$

Ejemplos

1. $f(x) = Sen\left(x^4+1\right) = Sen\,(u\,(x))$, con $u\,(x) = x^4+1$ entonces

   $f'(x) = h'(u\,(x))\,.\,u'(x) = Cos\,(u\,(x))\,.\,u'(x) = \left[Cos\left(x^4+1\right)\right] 4x^3$ si $h\,(x) = Sen\,x$

2. Si $f(x) = Sen^3(x) = (Sen\,x)^3 = u^3$, con $u = Sen\,x$ entonces como $f(x) = h(u(x))$ con $h(x) = x^3, u(x) = Sen\,x$, entonces
   $f'(x) = h'(u(x))u'(x) = 3(Sen\,x)^2 Cos\,x = 3\,Sen^2x\,Cos\,x$

3. Si $y\,(x) = Sen^4\left(x^2+x^{-3}+1\right)^2 = u^4$, con $u = Sen\,t$, $t = v^2$ y $v = x^2+x^{-3}+1$

   entonces:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dv}\frac{dv}{dx} = 4u^3\,(Cos\,t)\,(2v)\left(2x-3x^{-4}\right) \\
&= 4\,(Sen\,t)^3\,(Cos\,t)\;2v\left(2x-3x^{-4}\right) = 4\left(Sen\,v^2\right)^3\left[Cos\,v^2\right] 2v\left(2x-3x^4\right) \\
&= 4\left(Sen\left(x^2+x+1\right)^2\right)^3 Cos\left(x^2+x+1\right)^2\; 2\left(x^2+x^{-3}+1\right)\left(2x-3x^{-4}\right)
\end{aligned}$$

Propiedad 13. Derivada del Coseno

Si $f(x) = Cos\,x$ entonces $f'(x) = -Sen\,x$

En efecto:

$f(x) = Cos\,x = Sen\left(x+\pi/2\right)$ entonces $f'(x) = Cos\left(x+\pi/2\right) = -Sen\,x$

Ejemplo

Si $f(x) = Cos\left(Sen\left(x^2+1\right)^4\right)^3 = Cos\left(Sen\,u^4\right)^3 = Cos\,(Sen\,t)^3 = Cos\,v^3 = Cos\,z = h,$
Es decir, $f(x) = h\,(z\,(v\,(t\,(u\,(x)))))$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(z(v(t(u(x))))) \,.\, z'(v(t(u(x)))) \,.\, v'(t(u(x))) \,.\, t'(u(x)) \,.\, u'(x) \,.\, 1 \\ &= -Sen\left(Sen\left(x^2+1\right)^4\right)^3 .3\left(Sen\left(x^2+1\right)^4\right)^2 .Cos\left(x^2+1\right)^4 .4\left(x^2+1\right)^3 .2x.1 \\ &= \left(\frac{df}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dt}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \end{aligned}$$

Propiedad 14. Derivada de la Tangente

Si $f(x) = Tan\,x$ entonces $f'(x) = Sec^2 x$

En efecto:

$$f(x) = Tan\,x = \frac{Sen\,x}{Cos\,x} \text{ entonces}$$

$$f'(x) = \frac{(Cos\,x)(Cos\,x) - (Sen\,x)(-Sen\,x)}{Cos^2 x} = \frac{Cos^2 x + Sen^2 x}{Cos^2 x} = \frac{1}{Cos^2 x} = Sec^2 x.$$

Propiedad 15. Derivada de otras funciones trigonométricas

Usando la derivada del cociente se puede demostrar que:

Si $f(x) = Cotan\,x$ entonces $f'(x) = -Csc^2 x$
Si $f(x) = Sec\,x$ entonces $f'(x) = Sec\,x \cdot Tan\,x$
Si $f(x) = Csc\,x$ entonces $f'(x) = -Csc\,x \cdot Cotan\,x.$

Ejemplos

1. Sea $y(x) = Tan\left(Sen^2 x\right) = h(u(g(x)))$, con $u = t^2$, $t = Sen\,x = g(x)$ y $h(x) = Tan\,x$, entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= h'(u(g(x))) \cdot u'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= Sec^2(u(g(x))) \cdot 2t \cdot Cos\,x = \left[Sec^2\left(Sen^2 x\right)\right](2Sen\,x)(Cos\,x) \\ &= \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) \end{aligned}$$

2. Si $y(x) = \dfrac{Tan^{2/3}\left(\sqrt{2x+1}\right)}{Cos(3x+2)}$, entonces

$$\begin{aligned} y'(x) = &\frac{Cos(3x+2)\left[2/3\,Tan^{1/3}\sqrt{2x+1}\,Sec^2\sqrt{2x+1}\,(1/2)(2x+1)^{-1/2}2\right]}{[Cos(3x+2)]^2} \\ &- \frac{\left[\left(Tan^{2/3}\sqrt{2x+1}\right)(-Sen(3x+2))\,3\right]}{[Cos(3x+2)]^2} \end{aligned}$$

3. Si $y\,(x) = \left(Sec\left(Sen\,\dfrac{1}{x^{2/3}}\right)\right) Sen\,(ax+b)$ entonces

$$y\,'(x) = \left[Sec\left(Sen\,x^{-2/3}\right) Tan\left(Sen\,x^{-2/3}\right) Cos\,x^{-2/3}\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3}\right)\right]$$

$$Sen\,(ax+b) + Sec\left(Sen\,x^{-2/3}\right) Cos\,(ax+b)\,a$$

Propiedad 16. Derivada de la función exponencial (1)

Si $f\,(x) = e^x$ entonces $f\,'(x) = e^x$
En efecto:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$
$$= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x 1 = e^x$$

En forma más general se tiene:

Propiedad 17. Derivada de la función exponencial (2)

Si $f\,(x) = a^x$ entonces $f\,'(x) = (\ln a)\cdot a^x$

En efecto:

$f\,(x) = a^x = e^{x\ln a}$ entonces $f\,(x) = e^{g\,(x)} = h\,(g\,(x))$ con $h(x) = e^x$ y así

$$f\,'(x) = h\,'(g\,(x))\cdot g\,'(x) = e^{x\ln a}\,\ln a = a^x\cdot\ln a.$$

Ejemplos

1. Si $f\,(x) = e^{5x} + 3^x + Cos\left(e^{2x+5} + x^2\right)$ entonces

$$f\,'(x) = 5e^{5x} + 3^x\cdot\ln 3 - Sen\left(e^{2x+5} + x^2\right)\cdot\left(2e^{2x+5} + 2x\right).$$

2. Si $f\,(x) = \dfrac{x^2 e^{3x}}{x\,Cos\,x}$ entonces

$$f\,'(x) = \frac{(x\,Cos\,x)\left[x^2 e^{3x}\right]' - x^2 e^{3x}\,(x\,Cos\,x)\,'}{(x\,Cos\,x)^2}$$
$$= \frac{(x\,Cos\,x)\left[x^2\left(3\,e^{3x}\right) + 2xe^{3x}\right] - x^2 e^{3x}\,(Cos\,x - x\,Sen)}{(x\,Cos\,x)^2}$$

3. Si $f(x) = 2^{Sen\,2x} + 3^{x^2+x} + x^{-3}$ entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(2^{Sen\,2x}\right)' + \left(3^{x^2+x}\right)' + \left(x^{-3}\right)' \\
&= \left(e^{(Sen\,2x)\ln 2}\right)' + \left[e^{\left(x^2+x\right)\ln 3}\right]' - 3x^{-4} \\
&= e^{(Sen\,2x)\ln 2} \cdot (\ln 2)\, 2Cos\, 2x + 3^{x^2+x} \cdot \ln 3\,(2x+1) - 3x^{-4} \\
&= 2^{Sen\,2x} \cdot 2\ln 2 Cos\, 2x + 3^{x^2+x} \ln 3\,(2x+1) - 3x^{-4}
\end{aligned}
$$

Propiedad 18. Derivada de la función logarítmica (1)

Si $f(x) = \ln x$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}h\right)}{h} = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

En forma más general se tiene:

Propiedad 19. Derivada de la función logarítmica (2)

Si $f(x) = \log_a x$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)\,x}$, pues

$$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{entonces} \quad f'(x) = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = \ln(4x+5)$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{(4x+5)} \cdot (4x+5)' = \dfrac{4}{4x+5}$

2. Si $f(x) = \log_3\left(e^{x^2+1} + 3\right) = \dfrac{\ln\left(e^{x^2+1} + 3\right)}{\ln 3}$ entonces

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln 3}\left[\frac{1}{e^{x^2+1} + 3}\right]\left(e^{x^2+1} + 3\right)' \\
&= \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{e^{x^2+1} + 3}\right)\left(e^{x^2+1} . 2x\right)
\end{aligned}
$$

3. Si $f(x) = \ln^3\left(Sen^2\left(\sqrt{x^2+4x}\right)\right)$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\ln^2\left(Sen^2\sqrt{x^2+4x}\right)\left[\ln\left(Sen^2\sqrt{x^2+4x}\right)\right]' \\ &= 3\ln^2\left(Sen^2\sqrt{x^2+4x}\right)\left(\frac{1}{Sen^2\sqrt{x^2+4x}}\right)\left(Sen^2\sqrt{x^2+4x}\right)' \\ &= 3\ln^2\left(Sen^2\sqrt{x^2+4x}\right)\left(\frac{1}{Sen^2\sqrt{x^2+4x}}\right) \\ &\quad \left(2Sen\left(\sqrt{x^2+4x}\right)\left(Cos\sqrt{x^2+4x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}}\right)(2x+4)\right) \end{aligned}$$

4. Si $f(x) = 2^{Tan\,x} + \log_7(Csc\,x)$ entonces

$$f'(x) = 2^{Tan\,x}.(\ln 2)\left(Sec^2 x\right) + \frac{1}{(\ln 7)(Csc\,x)}.(-Csc\,x Cotg\,x)$$

EJERCICIOS

Hallar la derivada de las funciones:

1. $f(x) = Cos(\log_6(3+4^x))$
2. $f(x) = \sqrt{4x+4^x+x^4}\ln 1/x$
3. $f(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{Sec\,x+4\ln x}}{e^x-e^{-x}}\right]$
4. $f(x) = Csc\left(3^{Tan\left(\sqrt{x Sen\,x}\right)}\right)$
5. $f(x) = 6^x + x^6 + 6^6 + \log_6 x + \log_x x + \log_6 6$
6. $f(x) = Sen^3 x + Sen\,x^3 + Sen^3 x^3 + Sen 2x + 2Sen\,x + 2Sen 2x$
7. $f(x) = \left(\ln\left(Sen\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)^{3/4}\right)Csc(1+e^x+6^x)$.

Propiedad 20. Derivada de la exponencial generalizada

Si $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ entonces

$$f'(x) = \left[g(x)^{h(x)}\right]\left[\frac{h(x)\cdot g'(x)}{g(x)} + h'(x).\ln(g(x))\right],$$

En efecto

$$\begin{aligned} f(x) &= [g(x)]^{h(x)} = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))} \quad \text{y por tanto} \\ f'(x) &= e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\left[\frac{h(x)}{g(x)}\cdot g'(x) + h'(x)\cdot\ln(g(x))\right] \\ &= [g(x)]^{h(x)}\left[\frac{h(x)\cdot g'(x)}{g(x)} + h'(x)\cdot\ln(g(x))\right] \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln x}\,(x\ln x)' \\ &= x^x\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = (Sen\,x)^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln Sen\,x}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{x}\ln Sen\,x}\left(\sqrt{x}\ln Sen\,x\right)' \\ &= (Sen\,x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln Sen\,x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{Sen\,x}\cdot Cos\,x\right) \end{aligned}$$

3. Sea $f(x) = \left(x^3+x\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln\left(x^3+x\right)}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(x+1)\ln\left(x^3+x\right)}\left[(x+1)\ln\left(x^3+x\right)\right]' \\ &= \left(x^3+x\right)^{x+1}\left(\ln\left(x^3+x\right) + (x+1)\cdot\frac{1}{x^3+x}\left(3x^2+1\right)\right) \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Hallar la derivada de las funciones:

1. $f(x) = x^{\ln x}$
2. $f(x) = (x^x)^x$
3. $f(x) = x^{3^x} + x^{3\ln x} + \left(Sec^2 x\right)^{e^x}$
4. $f(x) = \left(Sen\,x^{\sqrt{x}}\right)^{8x}$
5. $f(x) = x^{Sen^2 x + 2 + Sec^3 2x}$

Propiedad 21. Derivada de función potencial (4)

Si $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$ entonces $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ en efecto:
$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha\ln x}$ entonces

$$f'(x) = e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)' = x^{\alpha}\cdot\alpha\left(1/x\right) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Ejemplos

1. Si $f\,(x) = x^{\sqrt{3}}$ entonces $f\,'\,(x) = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}$
2. Si $f\,(x) = x^{\pi}$ entonces $f\,'\,(x) = \pi \cdot x^{\,\pi-1}$
3. Si $f\,(x) = (Cos\,x + \log_3 8)^{\pi}$ entonces
   $f\,'\,(x) = \pi\,(Cos\,x + \log_3 8)^{\pi-1} \cdot (-Sen\,x)$

Propiedad 22. Derivada de la función inversa

Si $f^{-1}\,(x)$ es la inversa de $f\,(x)$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{f\,'\,(f^{-1}(x))}$
En efecto; puesto que $f\left(f^{-1}\,(x)\right) = x$ entonces
$1 = \dfrac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}\,(x)\right)\right] = f\,'\left(f^{-1}\,(x)\right) \cdot \dfrac{d}{dx}\left(f^{-1}\,(x)\right)$ y así

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}\,(x)\right) = \frac{1}{f\,'\,(f^{-1}\,(x))}$$

Ejemplo

Sea $f\,(x) = 2x + 5$, entonces $f^{-1}\,(x) = \dfrac{x-5}{2}$ y

$$f\,'\,(x) = 2, \quad \left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{2}$$

En forma explícita, aplicando el resultado anterior se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}\,(x)\right) = \frac{1}{f\,'\left(\dfrac{x-5}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

para el caso de las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas esta propiedad no se aplica directamente sino que de ellas se deducen formulas para calcular sus derivadas.

Propiedad 23. Derivada del Arcoseno

Si $f^{-1}\,(x) = Arc\,Sen\,x$ entonces $\left[f^{-1}\,(x)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Como $f^{-1}\,(x) = ArcSen\,x$ es la inversa de $f\,(x) = Sen\,x$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$
entonces por la propiedad 20 y por $f\,'\,(x) = Cos\,x$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f^{-1}\,(x) &= \frac{d}{dx}\,(Arc\,Sen\,x) = \frac{1}{Cos\,(Arc\,Sen\,x)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-Sen^2\,(Arc\,Sen\,x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = ArcSen^2 2x$ entonces $f'(x) = 2(ArcSen2x) \cdot \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}$

2. Si $f(x) = ArcSen\left(x^2+3x\right)$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2+3x)^2}} \cdot (2x+3)$

3. Si $f(x) = e^{x^2+1} \cdot ArcSen(Cos\,x)$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^2+1}\right)'(ArcSen(Cos\,x)) + e^{x^2+1}(ArcSen(Cos\,x))' \\ &= e^{x^2+1} \cdot 2x(ArcSen(Cos\,x)) + e^{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-Cos^2x}} \cdot (-Sen\,x) \end{aligned}$$

Propiedad 24. Derivada de otras funciones trigonométricas inversas

En forma análoga a 23. se puede demostrar que:

a) Si $f^{-1}(x) = ArcCos\,x$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) Si $f^{-1}(x) = ArcTan\,x$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

c) Si $f^{-1}(x) = ArcCotgx$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

d) Si $f^{-1}(x) = ArcSec\,x$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

e) Si $f^{-1}(x) = ArcCsc\,x$ entonces $\left[f^{-1}(x)\right]' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Propiedad 25. Derivada del Seno hiperbólico

Si $f(x) = Senh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ entonces $f'(x) = Cosh\,x$ en efecto:

$$\frac{d}{dx}(Senh\,x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Cosh\,x$$

Ejemplos

1. Si $f(x) = Senh\left(4x^2+1\right)$ entonces

$$f'(x) = Cosh\left(4x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+1\right) = 8x\,Cosh\left(4x^2+1\right)$$

2. Si $f(x) = Senh(e^x + 2^x)$ entonces

$$f'(x) = [Cosh(e^x + 2^x)]\,(e^x + 2^x \ln 2)$$

3. Si $f(x) = Senh(Cos\,x)$ entonces

$$f'(x) = [Cosh(Cos\,x)] \cdot (-Sen\,x)$$

4. Si $f(x) = x^2\,Senh\,2x$ entonces

$$f'(x) = 2x\,Senh\,2x + x^2\,(Cosh\,2x) \cdot 2$$

5. Si $f(x) = ArcTan\left(x^2 + 2\right)$ entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 + 2)^2} \cdot 2x$$

Propiedad 26. Derivada de otras funciones hiperbólicas

Usando las definiciones:

$$Cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad Tanh\,x = \frac{Senh\,x}{Cosh\,x},$$
$$Coth\,x = \frac{Cosh\,x}{Senh\,x}, \qquad Sech\,x = \frac{1}{Cosh\,x},$$
$$Csch\,x = \frac{1}{Senh\,x}$$

se puede demostrar que:

a) $\dfrac{d}{dx}(Cosh\,x) = Senh\,x$

b) $\dfrac{d}{dx}(Tanh\,x) = Sech^2 x$

c) $\dfrac{d}{dx}(Coth\,x) = -Csch^2 x$

d) $\dfrac{d}{dx}(Sechx) = -\,Sech\,x \cdot Tanh\,x$

e) $\dfrac{d}{dx}(Csch\,x) = -Csch\,x \cdot Coth\,x$

Ejemplos

1. Si $f(x) = Cosh^3(3x + 1)$ entonces

$$f'(x) = 3Cosh^2(3x + 1)\,[Senh(3x + 1)]\,3$$

2. Si $f(x) = (Sech\,2x)\,Coth\left(x^2+1\right)$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= (Sech\,2x)'\,Cotgh\left(x^2+1\right) + Sech\,2x\left(Cotgh\left(x^2+1\right)\right)' \\ &= (-\,Sech\,2x\,Tanh\,2x)\,2Coth\left(x^2+1\right) + Sech\,2x\left(-Csch^2\left(x^2+1\right)\right)(2x) \end{aligned}$$

3. Si $f(x) = \dfrac{Tanh^2\,3x}{x\,Cosh\,x}$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x\,Cosh\,x)\left(Tanh^2\,3x\right)' - \left(Tanh^2\,3x\right)(x\,Cosh\,x)'}{(x\,Cosh\,x)^2} \\ &= \frac{(x\,Cosh\,x)(2Tanh\,3x)\left(Sech^2\,3x\right)3 - \left(Tanh^2\,3x\right)(Cosh\,x + x\,Senh\,x)}{(x\,Cosh\,x)^2} \end{aligned}$$

4. Si $f(x) = \left[Csch\left(x^3+1\right)\right] ArcCotg\left(\sqrt{x}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[Csch\left(x^3+1\right)\right]' ArcCot\left(\sqrt{x}\right) + Csch\left(x^3+1\right)\left(ArcCotg\sqrt{x}\right)' \\ &= \left[-Csch\left(x^3+1\right)Cotgh\left(x^3+1\right)\right]3x^2 ArcCotg\sqrt{x} + Csch\left(x^3+1\right)\left(\frac{-1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5. Si $f(x) = (Senh\,x)^{ArcTan\,x}$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= (Senh\,x)^{ArcTan\,x} = e^{ArcTan\,x\ln(Senh\,x)} \quad \text{y así} \\ f'(x) &= (Senh\,x)^{ArcTan\,x}\left(ArcTan\,x\ln(Senh\,x)\right)' \\ f'(x) &= (Senh\,x)^{ArcTan\,x}\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\ln Senh\,x\right) + (ArcTan\,x)\frac{1}{Senh\,x}Cosh\,x\right], \quad \text{luego} \\ f'(x) &= (Senh\,x)^{ArcTan\,x}\left[\frac{1}{1+x^2}\ln Senh\,x + ArcTan\,x\,Coth\,x\right] \end{aligned}$$

Propiedad 27. Derivada de funciones hiperbólicas inversas

Usando las definiciones de las funciones hiperbólicas inversas:

a) $Senh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

b) $Cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

c) $Tanh^{-1}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

d) $Cotgh^{-1}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

e) $Sech^{-1}x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

f) $Csch^{-1}x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

se puede demostrar que:

a) $\dfrac{d}{dx}\left(Senh^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(Cosh^{-1}x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(Tanh^{-1}x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

d) $\dfrac{d}{dx}\left(Cotgh^{-1}x\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

e) $\dfrac{d}{dx}\left(Sech^{-1}x\right) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

f) $\dfrac{d}{dx}\left(Csch^{-1}x\right) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Ejemplos

1. Si $f(x) = Cosh^{-1}e^x$ entonces

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-1}}\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}e^x$$

2. Si $f(x) = 2Tanh^{-1}\left(Tan\dfrac{x}{2}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{1}{1-Tan^2\left(x/2\right)}\frac{d}{dx}\left(Tan\left(x/2\right)\right) = \frac{2}{1-Tan^2\left(x/2\right)}\left(Sec^2\left(x/2\right)\right)\left(1/2\right) \\ &= \frac{Sec^2\left(x/2\right)}{1-Tan^2\left(x/2\right)} \end{aligned}$$

3. Si $f(x) = Cotgh^{-1}\left(1/x\right)$ entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(1/x\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1/x^2}{1-1/x^2} = \frac{-1}{x^2-1}$$

4. Si $f\,(x) = Sech^{-1}\,(Cos\,x + Sen\,x)$ entonces

$$\begin{aligned} f'\,(x) &= \frac{-1}{(Cos\,x + Sen\,x)\sqrt{1-(Cos\,x+Sen\,x)^2}}\,\frac{d}{dx}\,(Cos\,x + Sen\,x) \\ &= \frac{-1}{(Cos\,x + Sen\,x)\sqrt{1-(Cos\,x+Sen\,x)^2}}\,(-Sen\,x + Cos\,x) \end{aligned}$$

5. Si $f\,(x) = Tanh^{-1}\,(Sech\,(2x+2))$ entonces

$$\begin{aligned} f'\,(x) &= \frac{1}{1-(Sech\,(2x+2))^2}\,\frac{d}{dx}\,(Sech\,(2x+2)) \\ &= \frac{1}{1-[Sech\,(2x+2)]^2}\,(-Sech\,(2x+2)\,Tanh\,(2x+2))\,2 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Hallar la derivada de las funciones:

1. $f^{-1}\,(x)$ si $f\,(x) = x^2, \quad x > 1$
2. $f^{-1}\,(x)$ si $f\,(x) = 3x + 5$
3. $f\,(x) = x^{\sqrt{2}} + x^{2\pi} + (Sen\,x + 2)^{\sqrt{2}}$
4. $f\,(x) = (\ln x + Cos\,x + e^x)^{\sqrt{5}+1}$
5. $f\,(x) = \left(ArcSen^4 3x\right)(ArcCos\,(Cos 2x))$
6. $f\,(x) = [ArcTan\,(Sen\,x)]^{x+2}$
7. $f\,(x) = [ArcSec\,(Senh\,x)]\,ArcCos\,(Sech\,x)$
8. $f\,(x) = (ArcTan\,x)^{ArcCos\left(x^2\right)}$

11.4. DERIVADAS DE FUNCIONES EN FORMA PARAMÉTRICA

11.4.1. Parametrización de curvas en el plano

Dada una curva en el plano que representa o no una función, esta curva al ”estirarla” se convierte en un segmento de recta, estableciéndose así una correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento (elementos de un intervalo I) y los puntos de la curva (elementos de R^2), es decir, se puede construir una función $\alpha : I \to R^2$ tal que a cada número real t en I, le corresponda el punto $\alpha(t) = (x(t)), y(t))$ sobre la curva y así a medida que t recorre el intervalo I en un sentido, $\alpha(t)$ recorre la curva en determinado sentido, es decir, el recorrido de esta función representa los puntos de la curva y le da una orientación. Esta forma de representar curvas es lo que se conoce como *parametrización* (Figura 11.7).

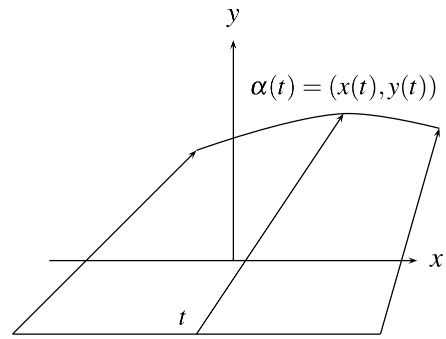


FIGURA N° 11.7

El intervalo I, llamado intervalo de parametrización, no debe ser necesariamente igual a la longitud de la curva. Para observar esto recuerde que dos segmentos de recta de diferente tamaño siempre se pueden poner en correspondencia uno a uno (Figura 11.8).

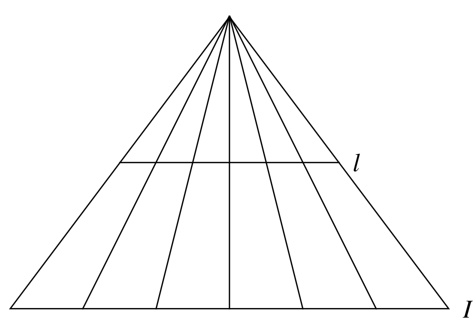


FIGURA N° 11.8

De este resultado se puede deducir que dada una curva, existirán infinitas parametrizaciones de la misma, pues al cambiar I, cambia la función $(x(t), y(t))$, por consiguiente existirán intervalos de cualquier tamaño equivalentes a I y por tanto equivalentes a la curva. (equivalentes en el sentido de que entre los dos conjuntos se puede establecer una correspondencia biunívoca).

Ejemplo 1

Si una curva representa una función $y = f(x)$ con dominio $[a,b]$, es evidente que a cada punto $t \in [a,b]$ le corresponde un punto sobre la curva, de coordenadas $(x,y) = (t, f(t))$, luego la parametrización aquí es inmediata, tomando $I = [a,b]$ $\quad x(t) = t \quad$ y $\quad y(t) = f(t) \quad$ con $\quad t \in I \quad$ (Figura 11.9).

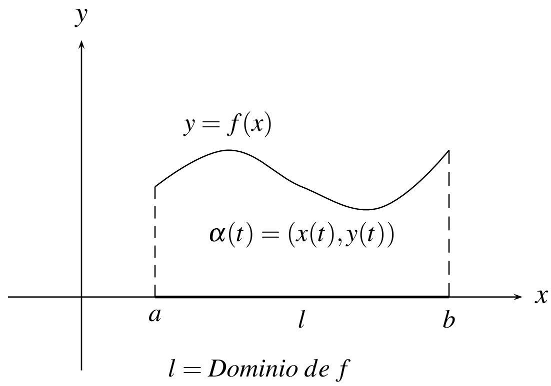


FIGURA N° 11.9

Así por ejemplo si $f(x) = x^2$ con $x \in [-1, 2]$, entonces una parametrización está dada por $\alpha(t) = (t, t^2)$ con $t \in [-1, 2]$.

Ejemplo 2

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que no representa una función, observe que la función $\alpha(t) = (a Cos\, t, b Sen\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ es un parametrización de ella; pues cualquier punto con abscisa $x(t) = a Cos\, t$ y ordenada $y(t) = b Sen\, t$ satisface la ecuación de la elipse ya que:

$$\frac{a^2 Cos^2\, t}{a^2} + \frac{b^2 Sen^2\, t}{b^2} = Cos^2\, t + Sen^2\, t = 1$$

a $t = 0$, le corresponde el punto $\alpha(0) = (a Cos\, 0, b Sen\, 0) = (a, 0)$ que será el punto de partida de la curva; a $t = \pi$, le corresponde el punto $\alpha(\pi) = (a Cos\, \pi, b Sen\, \pi) = (-a, 0)$, y a $t = 2\pi$, le corresponde el punto $\alpha(2\pi) = (a Cos\, 2\pi, b Sen\, 2\pi) = (a, 0)$, lo que indica que la elipse está orientada siguiendo el movimiento opuesto al de las manecillas del reloj. (Figura 11.10)

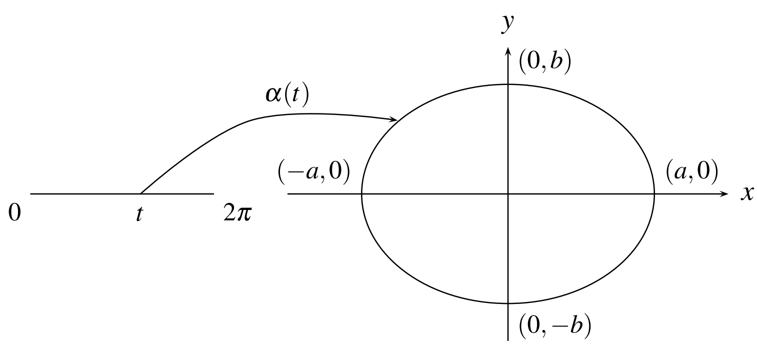


FIGURA N° 11.10

NOTA 1:

Puesto que cuando $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio a, entonces una parametrización de ésta, está dada por:

$$\alpha(t) = (a Cos\, t, a Sen\, t) \quad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi]$$

NOTA 2:

Observe que esta parametrización no es única, pues la función

$$\beta(t) = (a Cos\, 2\pi t, a Sen\, 2\pi\, t) \quad \text{con} \quad t \in [0, 1]$$

es otra parametrización para la circunferencia.

NOTA 3:

Si la elipse está trasladada, es decir, si su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

su parametrización más común es: $\alpha(t) = (h + a Cos\, t, k + b Sen\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
que corresponde a trasladar primero el centro de la elipse al origen y luego parametrizarla como se vio atrás.

Ejemplo

Para la recta $x = k$ (k constante) que no representa una función, una parametrización es:
$\alpha(t) = (k, t)$ con $t \in (-\infty, +\infty)$, la cual la orienta de abajo hacia arriba.

En general dada una curva no es sencillo hallar una parametrización de ella, pues en muchos casos depende de la forma como tal curva se construye. A continuación se dan unas curvas y sus parametrizaciones más usadas:

1. **Astroide.** Cuya ecuación cartesiana es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (Figura 11.11)

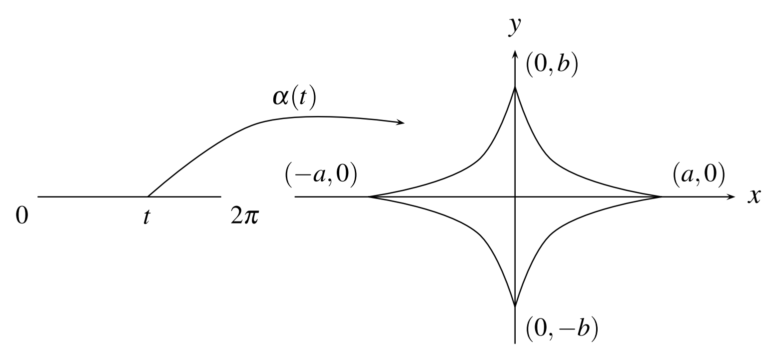


FIGURA N° 11.11

Una parametrización es $\alpha(t) = (aCos^3\, t, aSen^3\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

2. **Cicloide.** Que corresponde a la curva que describe un punto fijo sobre una circunferencia de radio a, al rodar esta circunferencia sobre una recta (Figura 11.12).

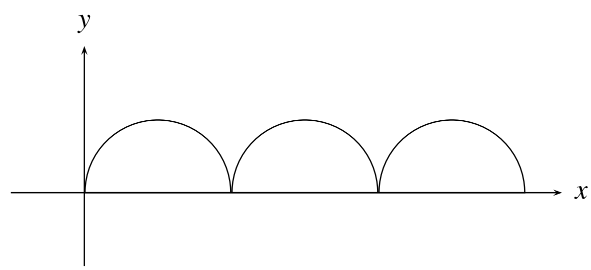


FIGURA N° 11.12

Tiene como ecuación paramétrica a: $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (a(t - Sen\, t), a(1 - Cos\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ si se considera solamente uno de los arcos, o $t \in [0, 4\pi]$ si se consideran dos etc.

11.4.2. Derivadas

Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ una parametrización de una curva C, entonces como $\alpha(t)$ es una función con dominio en R, se puede pensar en calcular su derivada de la forma usual, solamente que es preciso tener en cuenta que $\alpha(t+h), \alpha(t)$ no representan números reales sino elementos de R^2, los cuales sabemos sumar y multiplicar por un escalar, y además h aquí representa un escalar, de esta forma:

$$\begin{aligned}
\alpha\,'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\
&= (x\,'(t), y\,'(t))
\end{aligned}$$

Pero ¿Qué representa geométricamente el vector $\alpha = (x\,'(t), y\,'(t))$?

Suponga que esta parametrización orienta la curva como se indica en la Figura 11.13.

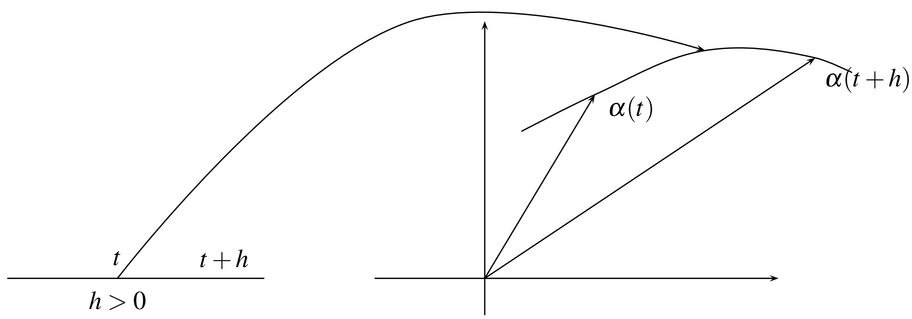


FIGURA N° 11.13

por tanto si $h>0$, el punto $\alpha(t+h)$ se aleja del punto $\alpha(t)$ sobre la curva en el sentido que indica la flecha.

$\alpha(t+h)-\alpha(t)$ representa el vector que va del punto $\alpha(t)$ al punto $\alpha(t+h)$ y puesto que h es un escalar $h>0$, para h fijo, $\dfrac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$ representa un vector paralelo a $\alpha(t+h)-\alpha(t)$ con el mismo sentido. Observe que a medida que h se haga más pequeño, el punto $\alpha(t+h)$ se va acercando al punto $\alpha(t)$ y el vector $\dfrac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$ va adoptando la posición de vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$; observe que la magnitud de ese vector no se va haciendo cero, puesto que el factor $\dfrac{1}{h}$ para h pequeño toma valores grandes.

Para el caso ideal en que h tienda a cero, el vector $\alpha'(t)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$ representa un vector tangente a la curva en el punto $\alpha(t)$ siguiendo la orientación de la curva. (haga el mismo análisis para $h<0$ y observe que no varía la orientación de $\alpha'(t)$).

Ejemplo

Si $\alpha(t)=(t,t^2)$ entonces $\alpha'(t)=(1,2t)$

Ejemplo

Si $\alpha(t)=(a(t-Sen\,t),a(1-Cos\,t))$ entonces $\alpha'(t)=(a(1-Cos\,t),a\,Sen\,t)$

Ejemplo

Si $\alpha(t)=(t,e^t)$ entonces $\alpha'(t)=(t,e^t)$

Dada una curva C con representación paramétrica $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, si se quiere calcular la pendiente de la recta tangente a esta curva en un punto (a,b), si esta curva representa una función $y=f(x)$ entonces esta pendiente está dada por $\dfrac{dy}{dx}$ evaluada en el punto $x=a$, pero si no lo es, este $\dfrac{dy}{dx}$ se puede calcular utilizando el hecho de que tanto x como y dependen de t y utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\,; \quad \left(\frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

y tanto $\dfrac{dy}{dt}$, como $\dfrac{dx}{dt}$ se pueden calcular en forma explícita.

Ejemplo

Hallar la pendiente de la recta tangente al cicloide $x = t - Sen\, t$, $y = 1 - Cos\, t$ en el punto $(\pi/2 - 1, 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Sen\, t}{1 - Cos\, t}$$

ahora el punto $(x, y) = (\pi/2 - 1, 1)$ corresponde a $t = \pi/2$, luego la pendiente en el punto $(\pi/2 - 1, 1)$ está dada por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/2} = \dfrac{Sen\,(\pi/2)}{1 - Cos\,(\pi/2)} = \dfrac{1}{1} = 1$

EJERCICIOS

I. Hallar la ecuación cartesiana de cada una de las siguientes curvas:

1. $x = Cos\,\theta$, $y = 4Sen^2\,\theta$
2. $x = t/2$, $y = 4 - t^2$
3. $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$
4. $x = 2\,Sen\, t$, $y = Cos\, 2t$
5. $x = at^2 - 5$, $y = 2t + 3$
6. $x = e^t$, $y = e^{-2t}$
7. $x = Sec\, t$, $y = Tan\, t$
8. $x = t^2$, $y = 2\ln\, t$, $t > 0$
9. $x = Sec\, t$, $y = Csc\, t$, $0 < t < \pi/2$
10. $x = \sqrt{t}$, $y = 5 - t$, $t > 0$
11. $x = Cos\, 2\theta$, $y = Sen\,\theta$
12. $x = t^2$, $y = t^4 + 3t^2 - 1$

II. Hallar una ecuación paramétrica de:

1. $y = -x^2$
2. $y = 1 - x^2$
3. El eje z
4. El segmento de recta que une $(2,3,4)$ con $(3,5,7)$
5. $y = -x^2 + 4$
6. $x + y = 4$
7. $x^2 - y^2 = 1$
8. $x^2 + 4y^2 = 9$
9. $x = 10$
10. El eje x
11. $(x-1)^2 + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 9$

III. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva:

1. $x=\sqrt{t}, \qquad y=t-\dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad$ en $\quad t=4$
2. $x=\dfrac{1}{t^2+1}, \qquad y=t^3, \quad$ en $\quad t=2$
3. $x=e^t, \qquad y=e^{3t}, \quad$ en $\quad t=\ln 2$
4. $x=4t^2-5, \qquad y=2t+3, \quad$ en $\quad t=1$

11.5. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

11.5.1. Aceleración de una partícula

Recuerde que dada una partícula que ocupa las posiciones $E(t)$ a lo largo de una recta en el instante t, con velocidad variable, la expresión $E^{'}(t)$ representa esta velocidad en cada instante t. Si se quiere ahora representar la aceleración en un instante t, inicialmente considere el caso de que ésta es constante o sea está dada por,

$$a(t)=\frac{Velocidad\ \ final-Velocidad\ \ inicial}{tiempo}$$

es decir,

$$a(t)=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

en un intervalo de tiempo $[t,t+h]$.

Ahora si en este intervalo de tiempo $[t,t+h]$ la aceleración varía, la expresión de arriba representa la aceleración media. Si se quiere calcular la aceleración en un instante específico t_0, entonces al hacer h muy pequeño, esta aceleración media se aproximará a la aceleración instantánea, siendo esta aproximación mejor a medida que h se haga más pequeño, y en el caso ideal en que h tienda a 0, se obtiene la aceleración instantánea en ese instante, es decir:

$$\begin{aligned} a(t_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(t_0+h)-v(t_0)}{h} \\ &= v'(t_0)=\frac{d}{dt}(v(t_0))=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(E(t_0))\right) \end{aligned}$$

expresión que se conoce como la segunda derivada de la función $E(t)$ en el punto t_0 y que a continuación se tratará en forma más general.

11.5.2. Definiciones

Dada una función $y=f(x)$, puesto que su derivada es también una función, se puede pensar en derivarla en aquellos puntos donde exista esa derivada. A esta nueva función resultante se le llama la *segunda derivada de la función* $f(x)$ y se nota:

$$f''(x) \quad \text{ó} \quad y'' \quad \text{ó} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

es decir

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

Ejemplos

1. Sea $f(x) = Sen\,(x^5+3x)$, halle $f''(x)$ y $f''(1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(Cos\,(x^5+3x)\big)\,(5x^4+3) \\ f''(x) &= \big(Cos\,(x^5+3x)\big)'\,(5x^4+3) + \big[Cos\,(x^5+3x)\big]\,(5x^4+3)' \\ &= \big(-Sen\,(x^5+3x)\big)\,(5x^4+3)(5x^4+3) + \big[Cos\,(x^5+3x)\big]\,(20x^3) \end{aligned}$$

por consiguiente $f''(1) = (-Sen\,(4))\,(64) + (Cos\,(4))\,(20)$

2. Sea $f(x)\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x>0 \\ -x^2, & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ hallar $f''(x)$. Qué es $f''(0)$?

   a) Si $x>0$ entonces $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$

   b) Si $x<0$ entonces $f'(x) = -2x$ y $f''(x) = -2$

   c) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h} = 0$ pues

   $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0 \quad \text{y}$$

   $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -h = 0 \quad \text{así:}$$

   $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -2x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

   d) Si $x>0$ entonces $f''(x) = 2$ y si $x<0, f''(x) = -2$ y

   $$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h} \quad \text{el cual no existe, pues}$$

   $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2 \ \text{y}$$

   $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -2 = -2 \ \text{así:}$$

   $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(h)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-}\frac{f'(h)}{h} \quad \text{por tanto:}$$

   $$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x>0 \\ \text{no existe} & \text{si } x=0 \\ -2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

3. Sea $f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^4 & \text{si } x<0 \end{cases}$ entonces

   análogamente como se desarrollo en el ejemplo anterior se tiene que

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -4x^3 & \text{si } x<0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f''(x)=\begin{cases} 12x^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -12x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

En forma análoga a como se definió la segunda derivada de $f(x)$, se puede definir la tercera derivada de $f(x)$ como la derivada de $f''(x)$, (y se nota por $f'''(x)$) ó $f^{(3)}(x)$), es decir, $f'''(x)=\dfrac{d}{dx}(f''(x))$, y así sucesivamente se pueden definir la cuarta, la quinta derivada etc.:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{d}{dx}(f^{(3)}(x)) \\ f^{(5)}(x) &= \frac{d^5 f}{dx^5} = \frac{d}{dx}(f^{(4)}(x)) \\ \ldots f^{(n)}(x) &= \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Si $f(x)=x^{10}+x^3+x+1$ entonces

   $$f'(x)=10x^9+3x^2+1\,,\quad f''(x)=90x^8+6x\,,\quad f^{(3)}(x)=720x^7+6\,;\quad f^{(4)}(x)=5040x^6$$

   y de aqui por ejemplo $f^{(4)}(-1)=5040(-1)^6=5040$

2. Hallar $f^{(n)}(x)$ si $f(x)=e^{ax}$

   $$f'(x)=a\,e^{ax}\,;\quad f''(x)=a\cdot a\cdot e^{ax}\,;\quad f'''(x)=a^2\cdot ae^{ax}=a^3\,e^{ax}\ldots f^{(n)}(x)=a^n\,e^{ax}$$

Ejemplo

Sea $f(x)=Sen\,(x)$, hallar $f^{(n)}(x)$

$f(x)=Sen\,x,\quad f'(x)=Cos\,x=Sen\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right),\quad f^{(2)}(x)=-Sen\,x=Sen\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right),$

$f^{(3)}(x)=-Cos\,x=Sen\left(3\cdot\dfrac{\pi}{2}+x\right),\ldots\quad f^{(n)}(x)=Sen\left(\dfrac{n.\pi}{2}+x\right)$

Ejemplo

Hallar la derivada n-ésima de $y(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\\
y''(x) &= f''(x)\cdot g(x) + f'(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g'(x) + f(x)\cdot g''(x)\\
&= f''(x)\cdot g(x) + 2f'(x)\cdot g'(x) + f(x)\cdot g''(x) \text{ (y derivando } y'' \text{ y simplificando se tiene que)}\\
y'''(x) &= f'''(x)\cdot g(x) + 3f''(x)\cdot g'(x) + 3f(x)\cdot g''(x) + f(x)\cdot g'''(x)
\end{aligned}
$$

si se continúa derivando se puede apreciar una analogía con el desarrollo de $(a+b)^n$, donde los exponentes en este caso representan el orden de la derivada y $f^{(0)}(x)$ representa la función $f(x)$, pues

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^1 = a+b = a^1b^0 + a^0b^1\\
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2b^0 + 2a^1b^1 + a^0b^3\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3
\end{aligned}
$$

por tanto usando la inducción matemática, en forma análoga como se demostró el teorema del binomio (apéndice):
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, se puede demostrar la llamada *formula de Leibnitz* para la derivada n-esima del producto de dos funciones

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Ejemplos

1. Si $y(x) = xe^x$, hallar $y^{(n)}(x)$

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= (xe^x)^{(n)} = (e^x x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^{(n-k)}(x^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^x)(x^{(k)})\\
&= \binom{n}{0}e^x x + \binom{n}{1}e^x 1
\end{aligned}
$$

pues las derivadas de x de orden superior a 1 son todas cero.

2. Si $y(x) = (1-x^2)\,Cos\,x$, hallar $y^{(n)}(x)$

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \big((1-x^2)Cos\,x\big)^{(n)} = \big(Cos\,x(1-x^2)\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x^2)^k\,(Cos\,x)^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x^2)^{(k)}Cos\left(x+\frac{(n-k)}{2}\pi\right) \\
&= \binom{n}{0}(1-x^2)^{(0)}Cos\left(x+\frac{(\pi n)}{2}\right)+\binom{n}{1}(1-x^2)^{(1)}Cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\
&+ \binom{n}{2}(1-x^2)^{(2)}Cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)+\binom{n}{3}(1-x^2)^{(3)}Cos\left(x+\frac{(n-3)\pi}{2}\right)+ \\
&\ldots+\binom{n}{n}(1-x^2)^{(n)}Cos\,(x+0) \\
&= \binom{n}{0}(1-x^2)Cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+\binom{n}{1}(-2x)Cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\
&+ \binom{n}{2}(-2)Cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

pues las derivadas de $1-x^2$ para $n \geq 3$ son cero.

EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = Sen^3\,x$, halle $f^{(4)}(x)$, $f^{(2)}(\pi)$

2. Sea $f(x) = e^{4x}$, halle $f^{(3)}(x)$

3. Halle $\dfrac{d^n}{dx^n}x^n$

4. Halle $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1-2x}\right)$

5. Si $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x>2 \\ 3 & si \quad x=2 \\ -x+2 & si \quad x<2 \end{cases}$ halle $f''(x)$

6. Si $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & si \quad x>0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ -x+2 & si \quad x<0 \end{cases}$ halle $f''(0)$, $f''(2)$, $f'''(5)$

11.6. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Toda ecuación en dos variables (x,y), se puede expresar de la forma $F(x,y) = 0$, por ejemplo $x^2+y^2+3=0$, $y-x^2=0$, $x^2+y^2-1=0$, $x-2=0$.

Gráficamente, cuando la solución no es vacía, los puntos (x,y) que satisfacen una ecuación de este tipo, representan un conjunto de puntos en el plano (una curva en R^2), los cuales definen una función o una relación no funcional, así por ejemplo, la ecuación $x^2+y^2+3=0$ no tiene solución y por tanto no representa ningún punto en el plano; la ecuación $y-x^2=0$, representa una parábola abierta hacia arriba que es la gráfica de una función; la ecuación $x^2+y^2-1=0$, representa una circunferencia con centro en el origen y radio 1, que no es función y la ecuación $x-2=0$, representa una recta vertical que tampoco es una función.

Cuando la expresión $F(x,y)=0$ representa una función, entonces a cada valor de x corresponde un único valor de y, es decir, "y" se puede expresar en la forma $y=f(x)$ y así $F(x,f(x))=0$ para todo $x\in D_f$ y en este caso se dice que la función $f(x)$ está *definida en forma explícita* o que $F(x,y)=0$ define explícitamente a la función $f(x)$.

Cuando la ecuación $F(x,y)=0$ representa en el plano una curva que no es una relación funcional es posible subdividir dicha curva en subcurvas que representen funciones, (no considerando si es del caso en la curva original los sectores de curvas completamente verticales), como se puede apreciar en la figura 11.14. en la cual la curva representa $F(x,y)=0$ que no es función, se subdivide en 7 funciones: $f_1\ldots f_7$

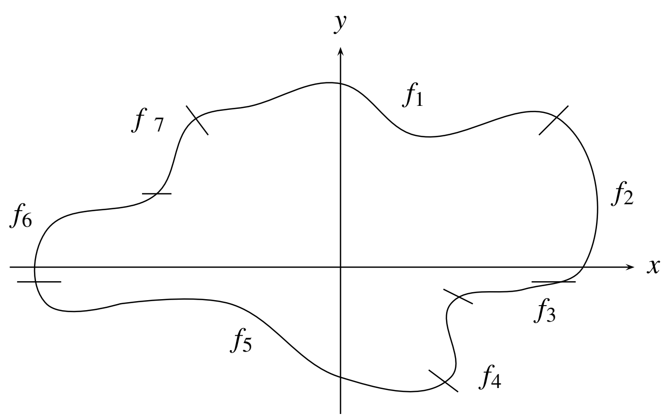


FIGURA N° 11.14

Es evidente que si algún punto (x,y) satisface la función $y=f_j(x)$ para algún $j,\ 1\leq j\leq 7$ entonces este punto satisface la ecuación $F(x,y)=0$; en casos como éstos se dice que las funciones $f_1\ldots f_7$ están *definidas implícitamente* por la ecuación $F(x,y)=0$, observe que no es sencillo hallar estas funciones $f_1\ldots f_7$ a partir de $F(x,y)=0$. Si la curva que representa $F(x,y)=0$ es suave (no tiene picos y es continua), dado un punto (a,b) sobre la curva, es posible hallar la recta tangente a ella en este punto, pero ¿cómo se halla la pendiente de esta recta?, si se supone que el punto está sobre el tramo correspondiente a la función $f_k(x)(k\ fijo)$, esta pendiente estaría dada por $f_k{}'(a)$, pero como en general no es posible hallar esta función $f_k(x)$, es necesario encontrar una forma de hallar esta pendiente a partir de la ecuación $F(x,y)=0$.
El método para ello consiste en encontrar una expresión para $\frac{dy}{dx}$ que depende de x y y de tal forma

que al reemplazar (x,y) en esta expresión por cualquier punto (a,b) que satisface la ecuación $F(x,y)=0$, el número resultante representa la pendiente de la recta tangente en ese punto. Para hallar la expresión $\frac{dy}{dx}$ es necesario tener en cuenta que para un punto x, y puede estar representado por más de una expresión $(y=f_i(x)$ para algún $i=1,2,\ldots,7)$, por tanto mientras no se especifique $f_k(x)$, y puede representar cualquiera de estas funciones y así derivando la expresión $F(x,y)=0$, respecto a x, considerando a y donde aparezca, como función de x, es posible despejar $\frac{dy}{dx}$ en términos de x y y. Al derivar $F(x,y)=0$ respecto a x, se aplicarán las propiedades de las derivadas que sean necesarias sin olvidar que y es función de x, así por ejemplo:

Si aparece el término x^2y, al derivarlo resulta: $x^2\dfrac{dy}{dx}+2xy$

Si aparece $Sen^3\, y^2$, al derivarlo resulta: $3\,Sen^2\, y^2.\, Cos\, y^2.\; 2y.\, \dfrac{dy}{dx}$

A este método de derivación se le conoce con el nombre de *derivación implícita.*

Ejemplos

1. La ecuación $x^2+y^2=4$ es de la forma $F(x,y)=0$ y define implícitamente las funciones $f_1(x)=\sqrt{4-x^2}$ y $f_2(x)=-\sqrt{4-x^2}$ que corresponden a la parte superior e inferior de la circunferencia con centro en el origen y radio 2.

   Observe que la ecuación $x^2+y^2=4$ cuya gráfica es la circunferencia completa, no representa una función.

   Suponga que se tiene un punto (a,b) sobre la circunferencia, diferente de $(2,0)$ y $(-2,0)$, y se desea hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, la cual evidentemente existe independientemente de si (a,b) pertenece al gráfico de $f_1(x)$ ó $f_2(x)$. Para hallarla se encuentra inicialmente $\dfrac{dy}{dx}$, donde con y estamos representando a $f_1(x)$ ó a $f_2(x)$. De acuerdo a lo expuesto anteriormente se tiene que:

   $$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}-0=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

   así el punto (a,b) pertenece a la gráfica $f_1(x)$ de entonces la pendiente buscada es:
   $-\dfrac{a}{b}$ que representa a $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\dfrac{-a}{f_1(a)}=\dfrac{-a}{\sqrt{4-a^2}}$
   y si el punto (a,b) pertenece a la gráfica de $f_2(x)$ entonces la pendiente buscada es:
   $-\dfrac{a}{b}$ que representa a $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\dfrac{-a}{f_2(a)}=\dfrac{-a}{-\sqrt{4-a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{4-a^2}}$ (Figura 11.15)
   Pero en general no es necesario conocer esas funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ pues dado cualquier punto (a,b) sobre la curva (diferente de (2,0) y (-2,0) donde las rectas tangentes son verticales), la pendiente de la recta tangente en ese punto esta dada por $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(a,b)}=-\left.\dfrac{x}{y}\right|_{(a,b)}=-\dfrac{a}{b}$

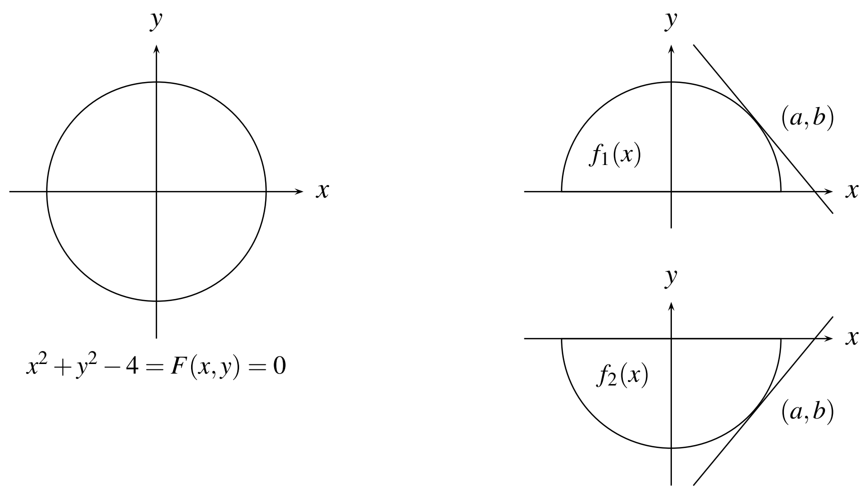


FIGURA N° 11.15

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$.
   La ecuación $\quad x^2e^y+x\,Sen\,y-4=0\quad$ define implícitamente a y como función de x.
   Para ello se deriva respecto a x la ecuación $F(x,y)=0$, es decir,

$$\begin{aligned}
2xe^y+x^2e^y\frac{dy}{dx}+Sen\,y+xCos\,y\frac{dy}{dx}-0=0\\
\left(x^2e^y+xCos\,y\right)\frac{dy}{dx}&=-\left(2xe^y+Sen\,y\right)\\
\frac{dy}{dx}&=-\frac{(2xe^y+Sen\,y)}{(x^2e^y+xCos\,y)}
\end{aligned}$$

3. La ecuación $\quad x^3+x^2y-x^2+3xy+3y^2-3y\quad$ define implícitamente a y como función de x, hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(2,-1)$.
   Para ello primero es preciso verificar que el punto $(2,-1)$ satisface esta ecuación como en efecto sucede.
   Ahora derivando esta ecuación respecto a x se tiene que:

$$\begin{aligned}
3x^2+2xy+x^2\frac{dy}{dx}-2x+3\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+6y\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}&=0\quad\text{entonces}\\
\left(3x^2+2xy-2x+3y\right)\left(x^2+3x+6y-3\right)\frac{dy}{dx}&=0\quad\text{entonces}\\
\frac{dy}{dx}&=-\frac{3x^2+2xy-2x+3y}{x^2+3x+6y-3}\quad\text{y así}\\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,-1)}&=\frac{12-4-4-3}{4+6-6-3}=-1
\end{aligned}$$

4. La ecuación $xy - Sen\,y - 5 = 0$ define implícitamente a y como función de x. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

   Primero se halla $\dfrac{dy}{dx}$

$$x\frac{dy}{dx} + y - Cos\,y\,\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

$$(x - Cos\,y)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{Cos\,y - x}$$

$$\text{ahora} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{Cos\,y - x}\right)$$

$$= \frac{(Cos\,y - x)\dfrac{dy}{dx} - y\left(-Sen\,y\,\dfrac{dy}{dx} - 1\right)}{(Cos\,y - x)^2} \quad \left(\text{reemplazando } \frac{dy}{dx} \text{ por } \frac{y}{Cos\,y - x}\right)$$

$$= \frac{(Cos\,y - x)\left[\dfrac{y}{Cos\,y - x}\right] + y\left[Sen\,y\left(\dfrac{y}{Cos\,y - x}\right) + 1\right]}{(Cos\,y - x)^2}$$

EJERCICIOS

I. Las ecuaciones siguientes definen a y como función de x, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

   1. $x^2 + 2xy + y^5 - x = 0$
   2. $x\,Cosh\,y + Arc\,Sen\,x + xy - 5 = 0$
   3. $x^2 + 2xy + xe^{y^2} - \ln\,x - y = 0$
   4. $y^{1/3} + x^{2/3} + \sqrt{Sen\,y} - 5 = 0$
   5. $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 0$

II. Hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en el punto indicado.

   1. $x^2 - 4y^2 = 9 \quad (5,2)$
   2. $x^2 - 4xy + y^2 + 3 = 0 \quad (2,1)$

III. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

   1. $x^2 + xy + 2y^2 = 28 \quad (-2,-3)$
   2. $9x^2 + 4y^2 = 72 \quad (2,3)$

11.7. LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

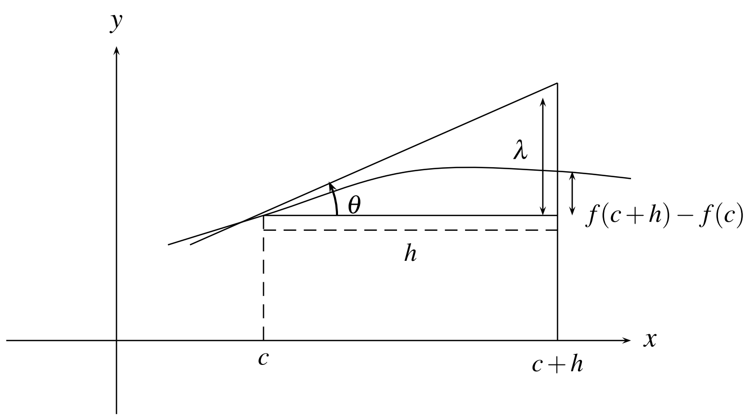
Sea $y = f(x)$, una función, tal que en $x = c$ existe:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

si en lugar de calcular el $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ se le da a h en la expresión, un valor fijo muy cercano a 0, es evidente que esto no representará a $f'(c)$, sino una buena aproximación de $f'(c)$, que mejorará más a medida que a h se le asignen valores más pequeños así:

$f'(c) \approx \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ para algún h pequeño, donde $\approx$ significa aproximadamente igual, y así $f'(c)h \approx f(c+h) - f(c)$;lo que indica que el incremento de la función: $f(c+h) - f(c)$ para un incremento pequeño de h de la variable cerca a c, se puede aproximar por $f^{'}(c)h$, expresión que se conoce con el nombre de la diferencial de la función en el punto c, para el incremento h.

Es evidente que a medida que h se hace más pequeño, la diferencial de f en c, con este incremento, se aproximará cada vez más al incremento de la función. En la figura 11.16 se puede apreciar gráficamente el significado de la diferencial.



$$Tan\ \theta = f'(c) = \frac{\lambda}{h} \Rightarrow \lambda = f'(c)h$$

FIGURA N° 11.16

Puesto que $f(c+h) - f(c) \approx f'(c)h$ entonces $f(c+h) \approx f'(c)h + f(c)$ lo que se puede representar como:

$$f(c+h) \approx f'(c)[(c+h) - c] + f(c)$$

El lado izquierdo de esta expresión representa la función calculada en un punto $c+h$ vecino de c, y teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto c está dada por $y = f^{'}(c)(x-c) + f(c)$ (ecuación de la recta con pendiente $f^{'}(c)$ que pasa por $(c, f(c))$) entonces el lado derecho de esta expresión representa la recta tangente calculada en el punto $(c+h)$, lo que indica que si una función es derivable en $x = c$, la función en cercanías de c se puede aproximar por la recta tangente a la curva en el punto c, lo que garantiza la suavidad de la curva en c.

La diferencial se puede usar para calcular aproximadamente el valor de una función en un punto, conociendo el valor de la misma función en un punto cercano a él, siempre que la función sea derivable en este último punto; dependiendo la precisión del resultado de lo cerca que se encuentren los dos puntos.

Ejemplo

Hallar aproximadamente el valor de $\sqrt[3]{27.08}$

Esto significa hallar $f(27+0.08)$, donde $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Se utiliza la aproximación del incremento de una función por medio de la diferencial:

$$f(x+h)\approx f'(x)h+f(x). \text{ Que para } h=0.08 \text{ y } x=27 \text{ es:}$$
$$f(27+0.08)\approx f'(27).(0.08)+f(27),$$

y puesto que $f(x)=\sqrt[3]{x}$ entonces

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \text{ y } f'(27)=\frac{1}{3}(27)^{-2/3}=\frac{1}{3}3^{-2}=\frac{1}{27},$$

además $f(27)=3$ por tanto:

$$\sqrt[3]{27.08}=\frac{1}{27}(0.08)+3\approx 3.0029629$$

Ejemplo

Use diferenciales para calcular el valor aproximado del aumento en el área de una pompa de jabón, cuando su radio aumenta de 2 a 2.01 metros.

El área de una pompa de jabón está dada por $f(r)=4\pi r^2$ (área de la esfera).

Se puede aproximar el cambio exacto $f(r+h)-f(r)$, mediante la diferencial $dA=f'(r)h$ siendo $r=2$ y $h=0.01$, donde, como $f'(r)=8\pi r$ entonces $f'(2)=16\pi$ y así:

$$f(2+0.01)-f(2)\approx dA=f'(2).(0.01)=(16\pi)(0.01)=0.16\pi\, m^2$$

EJERCICIOS

I. Estimar las siguientes expresiones usando diferencial.

a) $\sqrt[3]{1010}$

b) $\sqrt{125}$

c) $(26)^{2/3}$

II. Dada $y=x^2-x+1$, halle

a) Δy

b) dy

c) $\Delta y - dy$

III. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5.06 cms. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

IV. Una bola de hielo de 10 cms de radio, se derrite hasta que su radio adquiere el valor de 9.8 cms, hallar aproximadamente la disminución que experimenta.

a) Su volumen

b) Su superficie

Capítulo 12

APLICACIONES DE LA DERIVADA

12.1. LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE SUS GRÁFICAS

12.1.1. Algunas características de las gráficas de una función

Dada una función $y = f(x)$ de reales en reales, un primer intento que se puede hacer para construir su gráfica, es dar valores para x en D_f y hallar sus correspondientes valores para y, obteniendo así unos puntos que pertenecen a la gráfica; luego se unen estos puntos por pedazos de curvas suaves de los cuales no hay garantía ni de que sus puntos pertenezcan a la gráfica de $y = f(x)$, ni de que la forma de esta curva entre dos puntos corresponda a la forma de la curva $f(x)$. Es por ello que este método no resulta apropiado si se quiere tener una buena aproximación de la gráfica $y = f(x)$.

¿Qué características importantes se deben tener en cuenta en la construcción de una gráfica?

1. Evidentemente es necesario conocer su dominio y también los puntos donde la gráfica corta el eje x, es decir, las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

2. Puesto que dados dos puntos de la gráfica $y = f(x)$, éstos pueden unirse para formar un pedazo de la curva que sube, que baja o que sube y baja en este tramo, es necesario caracterizar los intervalos de la recta real donde la curva sube (función creciente) o donde la curva baja (función decreciente). En lenguaje técnico se entiende que una función $y = f(x)$ se dice *creciente* en un intervalo (a,b) si $f(s) > f(t)$ para todo $s > t$ en este intervalo y se dice *decreciente* en (a,b) si $f(s) < f(t)$ para todo $s > t$ en este intervalo (figura 12.1).

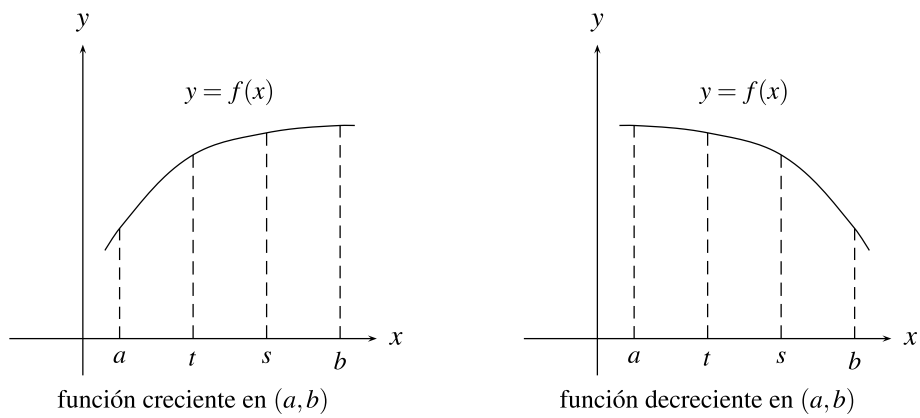


FIGURA N° 12.1

3. Dos puntos en la gráfica $y = f(x)$ podrían ser unidos por una arco de curva abierto hacia arriba (convexa) o abierta hacia abajo (cóncava) razón por la cual se deben caracterizar los intervalos donde se presenta una u otra situación. Mas precisamente se tiene que:

   Una función $y = f(x)$ se dice *convexa* en un intervalo (a,b) si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la curva en este intervalo, esta sobre la cueva entre estos dos puntos, y se dice *cóncava* en (a,b) si dicho segmento de recta esta bajo la curva de $y = f(x)$ entre estos dos puntos.(figura 12.2)

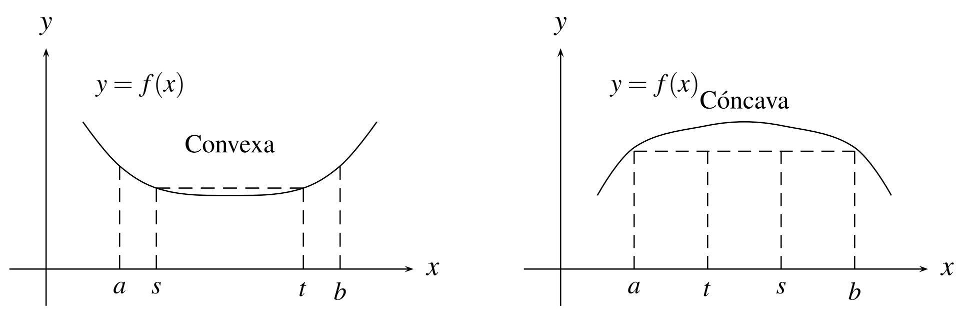


FIGURA N° 12.2

   Además de los puntos reales donde la función se anula hay otros puntos que es necesario identificar en la construcción del gráfico de $y = f(x)$.

4. El punto mas alto de la curva (máximo absoluto) y el punto más bajo de la curva (mínimo absoluto) cuando ellos existen, los cuales en términos de sus abscisas y ordenadas se definen por:

   Una función $y = f(x)$ se dice que presenta *máximo absoluto* en $x = a$ si $f(x) \leq f(a)$ para todo x en el dominio de f , al número real $f(a)$ se le llama valor *máximo absoluto* de la función.

En forma análoga si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en el dominio de f, se dice que la función f presenta un mínimo absoluto en $x = a$ y su valor es $f(a)$.

Frecuentemente es necesario hacer referencia a puntos sobre la curva que sin ser necesariamente máximos o mínimos absolutos estén mas altos o mas bajos que todos sus vecinos cercanos tanto a derecha como a izquierda. Mas rigurosamente se tiene:

Si $f(x) \leq f(a)$ para todo x en una vecindad de a (intervalo abierto de pequeña longitud con centro en a: $(a-\delta, a+\delta)$ para δ pequeño), se dice que f tiene un máximo relativo en $x = a$ y su valor es $f(a)$, y si $f(x) \geq f(a)$ para todo x en una vecindad de a, se dice que f tiene un mínimo relativo en $x = a$ y su valor es $f(a)$. (figura 12.3)

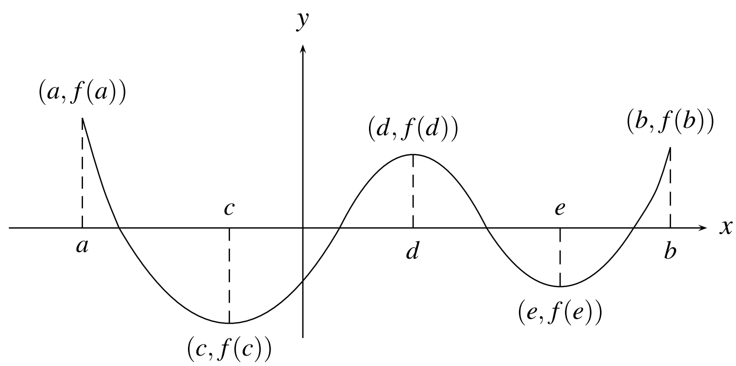


FIGURA N° 12.3

En la figura 12.3 se presentan:

máximo absoluto en $x = a$, con valor $f(a)$.
máximo relativo en $x = d$, con valor $f(d)$.
mínimo absoluto en $x = c$, con valor $f(c)$.
mínimo relativo en $x = c$, con valor $f(c)$ y en $x = e$, con valor $f(e)$.

5. También es importante identificar los puntos donde la curva cambia de convexa a cóncava y viceversa, es decir, los llamados *Puntos de Inflexión*. (Figura 12.4)

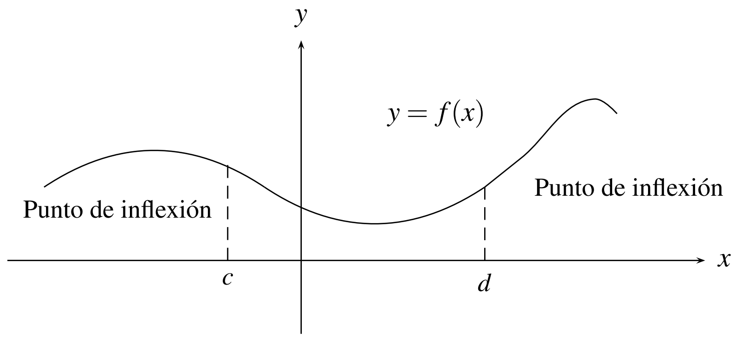


FIGURA N° 12.4

EJERCICIOS

1. En cada caso trace un bosquejo de las gráficas con las características dadas (si es posible).

   a) Que su máximo absoluto y su mínimo absoluto sean también máximos y mínimos relativos.

   b) Que tengan máximo y mínimo absoluto, pero no máximo y mínimo relativo.

   c) Que tenga máximos y mínimos relativos, pero no tenga máximo absoluto ni mínimo absoluto.

   d) Que sea creciente y tenga máximos relativos.

   e) Que sea decreciente y cóncava.

   f) Que tenga máximo relativo y no sea cóncava.

   g) Que reúna todas las definiciones dadas.

2. Para las siguientes funciones, cuyas gráficas son ampliamente conocidas, analícelas en el intervalo dado, e identifique los intervalos donde la función es creciente, decreciente, cóncava, convexa, sus máximos y sus mínimos absolutos y relativos y puntos de inflexion.

   a) $f(x) = x^2 \quad [-3,5]$ *b*) $f(x) = x^3 \quad (-10,20]$

   c) $f(x) = Sen\,x \quad [\pi/2, 2\pi]$ *d*) $f(x) = Tan\,x \quad (-\pi/2, \pi/2)$

   e) $f(x) = e^x \quad [-2,\infty)$ *f*) $f(x) = \ln\,x \quad (0,10)$

   g) $f(x) = |x| \quad [-1,4]$

12.1.2. Propiedades de funciones continuas en intervalos cerrados

Inicialmente se puede observar que de la definición de continuidad de una función en un intervalo cerrado $[a,b]$ se puede concluir los siguientes resultados; los cuales se ilustran gráficamente:

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$:

1. $f(x)$ tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en ese intervalo (figura 12.5)

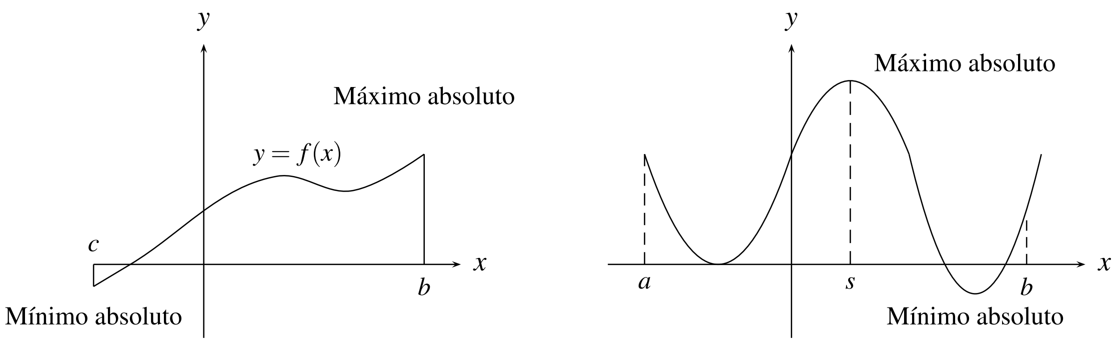


FIGURA N° 12.5

2. $f(x)$ toma todos los valores que hay entre el valor mínimo y el valor máximo (teorema del valor intermedio) (figura 12.6)

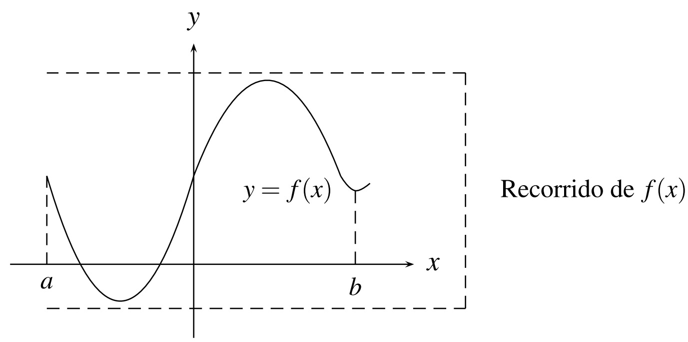


FIGURA N° 12.6

3. Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo existe un punto c en el intervalo (a,b) para el cual $f(c) = 0$ (figura 12.7)

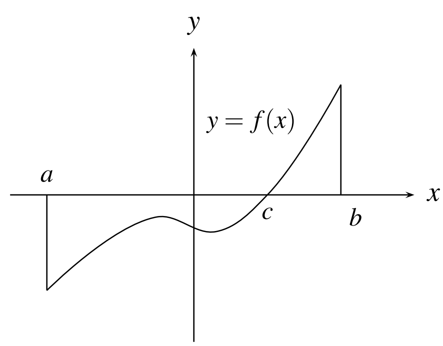


FIGURA N° 12.7

12.1.3. Puntos donde se pueden presentar máximos y mínimos

Los puntos donde se presentan máximos o mínimos relativos y en los cuales la función es derivable, se caracterizan por que allí su derivada es igual a cero, es decir, si en $c \in D_f$, se presenta máximo o mínimo relativo y f es derivable en $x = c$ entonces $f'(c) = 0$.

Evidentemente, si se supone por ejemplo que en $x = c$ se presenta un máximo relativo, entonces para h cercano a cero $f(c+h) < f(c)$ o sea $f(c+h) - f(c) < 0$, y puesto que f es derivable en c entonces:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \quad \text{puesto que} \quad h > 0 \quad \text{y}$$
$$f'(c) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

Pues $h < 0$ y por tanto como $0 \leq f'(c) \leq 0$, se concluye que $f'(c) = 0$

NOTAS

1. Si se considera la función $f(x) = x^3$, es evidente que $f'(x) = 3x^2$ se anula en $x = 0$, pero de su gráfico se puede apreciar que en este punto no se presenta ni máximo ni mínimo relativo, lo cual indica que la condición $f'(c) = 0$ es necesaria para que en $x = c$ se presente máximo o mínimo relativo cuando f es derivable en c, pero no es suficiente.

2. A todos los puntos $x \in D_f$, donde $f'(x) = 0$ se llaman *puntos críticos* de la función. (Observe que en estos puntos, según lo tratado anteriormente, pueden existir o no máximo o mínimo relativo).

3. No siempre que en $x = c$ se presentan máximo o mínimo relativo su derivada es cero, pues puede que allí ésta no exista (figura 12.8(a)), pero si f tiene derivada en este punto necesariamente debe ser cero (figura 12.8(b)).

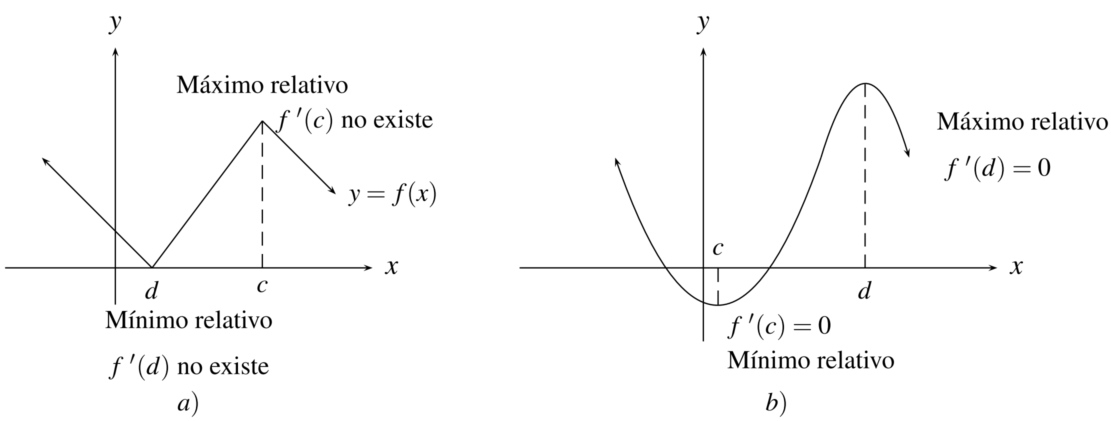


FIGURA N° 12.8

4. Según lo anterior, los máximos o mínimos relativos de una función se pueden presentar en: (figura 12.9)

   a) Donde $f'(x) = 0$ (puntos críticos).

   b) Donde $f(x)$ no sea continua.

c) Donde $f'(x)$ no exista.

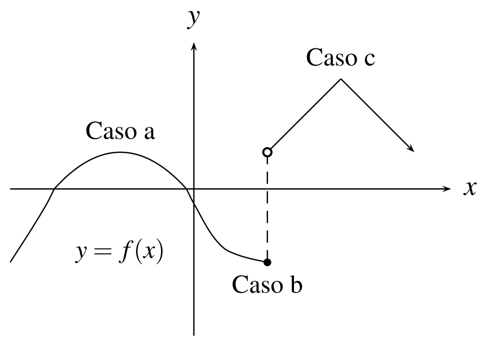


FIGURA N° 12.9

y los máximos y mínimos absolutos se pueden presentar en cualquiera de los casos a), b), c) anteriores o en los extremos del intervalo cerrado donde esta definida, si este es el caso (figura 12.10)

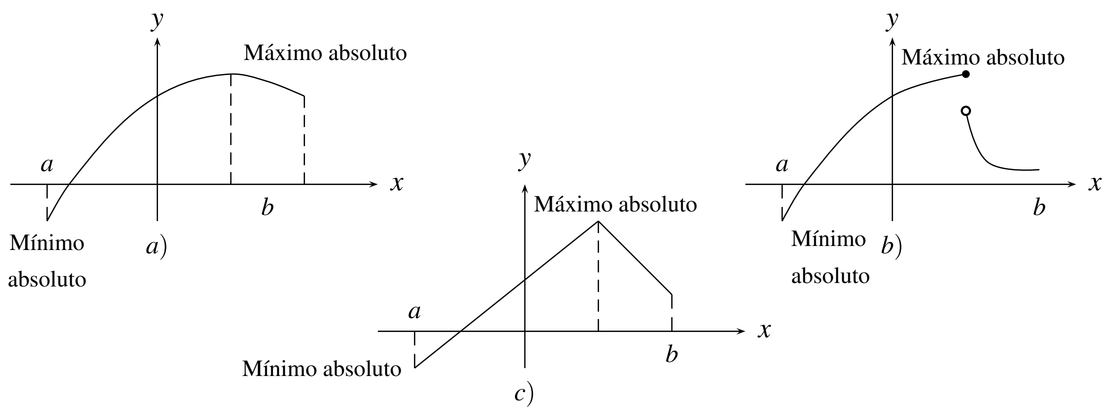


FIGURA N° 12.10

Hasta aquí ya se sabe como seleccionar los candidatos a puntos donde se presentan máximos o mínimos relativos o absolutos, pero es necesario establecer criterios para saber si en cada uno de estos puntos se presenta bien sea un máximo o un mínimo o ninguno de ellos.

Con el fin de presentar estos criterios es necesario determinar primero los intervalos donde la función es creciente o decreciente y donde es cóncava o convexa. Para ello se presenta inicialmente dos teoremas.

12.1.4. Propiedades de funciones derivables en intervalos cerrados

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$ (figura 12.11).

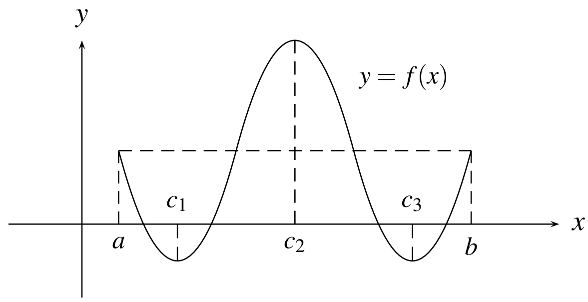


FIGURA N° 12.11

Demostración

Como f es continua en $[a,b]$ entonces f tiene un máximo y mínimo allí, si el máximo o el mínimo esta en $c \in (a,b)$ entonces en este punto $f'(c) = 0$ (pues seria máximo o mínimo relativo y derivable en este punto).

Ahora si en el punto a se presenta máximo y en b se presenta mínimo o viceversa entonces la función es constante, por tanto $f'(c) = 0$, para todo $c \in (a,b)$.

Teorema del Valor Medio

Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

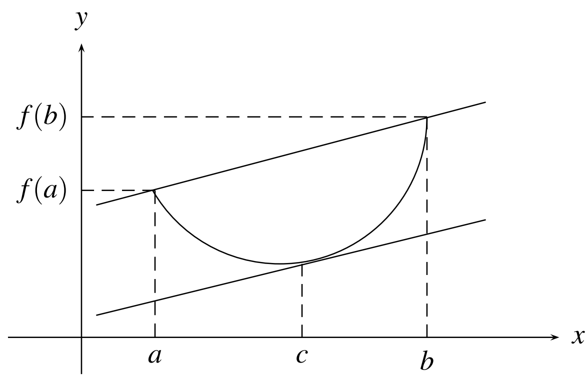


FIGURA N° 12.12

Demostración

La demostración consiste en aplicar el teorema de Rolle a la función
$D(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, la cual satisface la hipótesis de este teorema, pues $D(a) = D(b)$,

$D(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y por tanto existe $c \in (a,b)$ tal que $D'(c) = 0$, es decir,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \text{y asi} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

De la figura 12.12 se puede observar que el teorema del valor medio garantiza la existencia de la recta T, tangente a la curva y paralela a la recta L que une los puntos $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

Ejemplo

Considere un móvil que se desplaza desde un punto a hasta un punto b a lo largo de un segmento rectilíneo, ubicandose en el punto $s(t)$ en el instante t, con velocidad variable. Su velocidad promedio es entonces $\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$ y según el teorema del valor medio existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $s'(c) = \dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$; pero como $s'(c)$ representa la velocidad instantánea en el punto c, este resultado se puede interpretar afirmando que la velocidad instantánea coincide en algún instante con la velocidad promedio.

12.1.5. Criterio para determinar intervalos donde una función es creciente o decreciente

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es creciente en (a,b) y si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $f(x)$ es decreciente en (a,b) (figura 12.13)

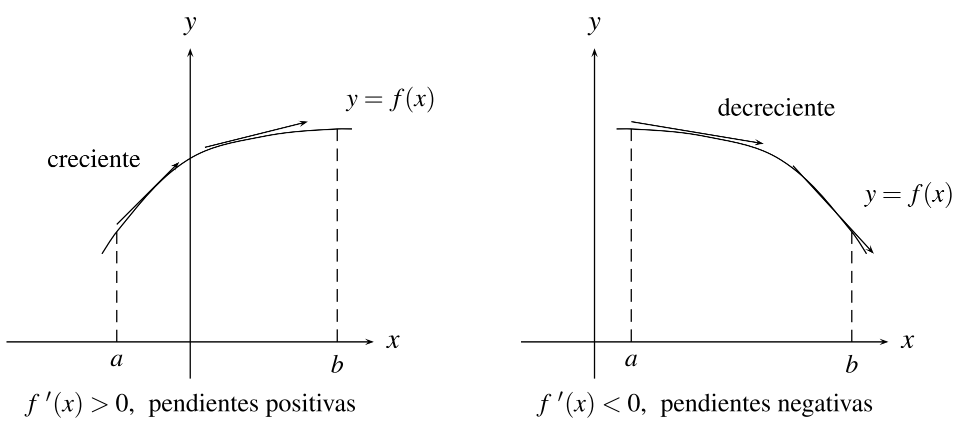


FIGURA N° 12.13

En efecto si se supone que $f'(x) > 0$, entonces $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ y si $h > 0$ entonces $f(x+h) - f(x) > 0$, lo que implica que f es creciente, pues $x + h > x$.

Análogamente se demuestra este resultado para $h < 0$.

Para el caso en el que $f'(x) < 0$ se procede en forma similar.

Ejemplo

Determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ es creciente y donde es decreciente.
Basta con hallar los valores de x que satisfacen las desigualdades $f\,'(x) > 0$ y allí la función f es creciente y los que satisfacen la desigualdad $f\,'(x) < 0$ y allí es decreciente:

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$$

a) $f\,'(x) = 3(x+2)(x-4) > 0$

$$\begin{array}{r|c|c|c}
(x+2) & - - - - - & + + + + + & + + + + + \\
(x-4) & - - - - - & - - - - - & + + + + + \\
\hline
\end{array}$$

$$+ \quad -2 \quad - \quad +4 \quad +$$

luego $\quad f\,'(x) > 0 \quad$ si $\quad x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

b) $f\,'(x) = 3(x+2)(x-4) < 0 \quad$ si $\quad x \in (-2, 4)$

Ejemplo

Determine los intervalos donde f es creciente y decreciente si $f(x) = e^x \, Cos\, x$

Basta con hallar los valores de x que satisfacen las desigualdades $f\,'(x) > 0 \quad$ y $\quad f\,'(x) < 0$.

$$f\,'(x) = e^x Cos\, x \, - \, e^x Sen\, x = e^x\,(Cos\, x - Sen\, x)$$

a) $e^x\,(Cos\, x - Sen\, x) > 0 \quad$ si $\quad (Cos\, x - Sen\, x) > 0, \quad$ pues $e^x > 0 \quad$ es decir, si $\quad Cos\, x > Sen\, x$, o sea si $\quad Tan\, x < 1 \Leftrightarrow x \in (p\pi - \pi/2, p\pi + \pi/4), \quad$ para todo $p \in Z$.

b) $e^x\,(Cos\, x - Sen\, x) < 0 \quad$ si $\quad Cos\, x > Sen\, x, \quad$ es decir, si
$Tan\, x > 1 \Leftrightarrow x \in (p\pi + \pi/4, p\pi + \pi/2,) \quad$ para todo $\quad p \in Z$

12.1.6. Criterio para determinar los intervalos donde la función f es cóncava o convexa

Sea $f(x)$ una función dos veces derivable en (a,b).

Si $f\,''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es convexa en (a,b) y si $f\,''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es cóncava en (a,b) (figura 12.14)

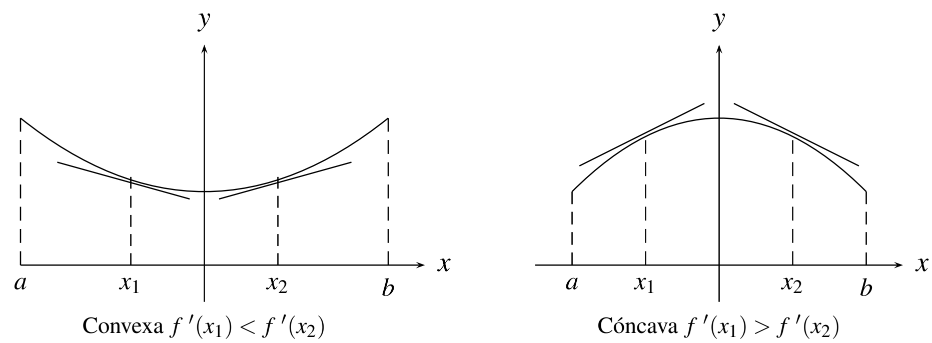


FIGURA N° 12.14

De la figura anterior se observa que cuando f es convexa entonces sus pendientes (f') son crecientes y cuando es cóncava sus pendientes (f') son decrecientes. Además observa que de acuerdo al resultado de 12.15, si $f''(x) > 0$ entonces $f'(x)$ es creciente y si $f''(x) < 0$, $f'(x)$ es decreciente.

NOTA:

Si $f'(c) = 0$ el punto c puede pertenecer a un intervalo donde la función es convexa, cóncava o c es un punto de inflexión (figura 12.15)

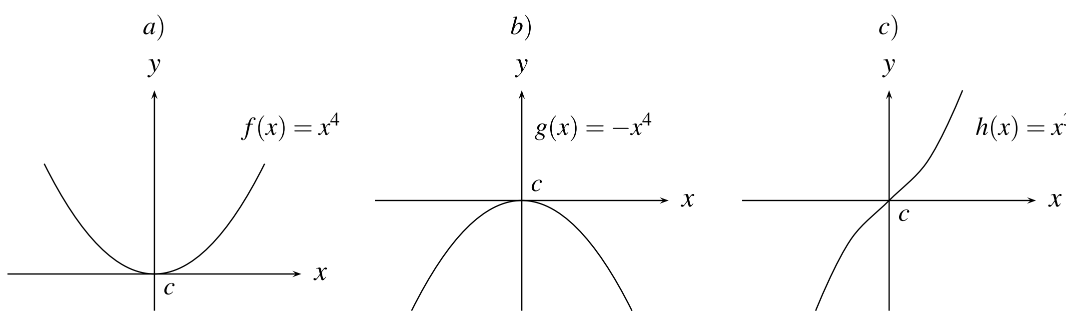


FIGURA N° 12.15

Observe de la figura anterior que $f''(0) = 0$, $g''(0) = 0$, $h''(0) = 0$, pero en $x = 0$, f es convexa, g es cóncava y para h el punto $(0,0)$ es un punto de inflexión.

Ejemplo

Hallar los intervalos donde la función $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$, es cóncava y donde es convexa.

Basta hallar $f''(x)$ y resolver para x las desigualdades $f''(x) > 0$ (para convexa) y $f''(x) < 0$ (para cóncava):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x}{(4+x^2)^2} \\ f''(x) &= -\frac{(4+x^2)^2 2 - 2x\big((4+x^2)2x\big)}{(4+x^2)^4} \\ &= -\frac{(4+x^2)\left[2(4+x^2)-8x^2\right]}{(4+x^2)^4} = \frac{8x^2-8-2x^2}{(4+x^2)^3} = \frac{6x^2-8}{(4+x^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a)\quad f''(x) = \frac{6x^2-8}{(4+x^2)^3} > 0 &\Leftrightarrow 6x^2-8>0 \quad \text{pues } (4+x^2)^3>0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 > 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 8/6 \\ &\Leftrightarrow |x| > \sqrt{4/3} \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{4/3}) \cup (\sqrt{4/3}, +\infty) \end{aligned}$$

$$b)\quad f''(x) = \frac{6x^2-8}{(4+x^2)^3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\sqrt{4/3}, \sqrt{4/3})$$

los puntos $(-\sqrt{4/3}, f(\sqrt{4/3}))$; $(\sqrt{4/3}, f(\sqrt{4/3}))$ son puntos de inflexión, pues allí hay cambios de concavidad.

Ejemplo

Como es conocido, de la gráfica de la función $f(x) = Sen\, x$ se tiene que los intervalos donde la función es convexa son $((2n+1)\pi, (2n+2)\pi),\ n \in Z$ y donde la función es cóncava $(2n\pi, (2n+1)\pi),\ n \in Z$, resultado que se puede obtener con su segunda derivada, pues:

$$\begin{aligned} f''(x) = -Sen\, x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad Sen\, x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in ((2n+1)\pi, (2n+2)\pi),\ n \in Z \\ f''(x) = -Sen\, x < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad Sen\, x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2n\pi, (2n+1)\pi),\ n \in Z \end{aligned}$$

y los puntos de inflexión son $(n\pi, f(n\pi))$.

12.1.7. Criterio de la primera derivada para determinar máximos y mínimos relativos

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), excepto posiblemente en $c \in (a,b)$ entonces:

a) Si $f'(x) > 0$ para $c-\delta < x < c$ para algún $\delta > 0$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$ y su valor es $f(c)$.

b) Si $f'(x) < 0$ para $c-\delta < x < c$ para algún $\delta > 0$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < c+\delta$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$ y su valor es $f(c)$.(figura 12.16)

En efecto:

Para el caso a. se verá que $f(c) \geq f(x)$ para $c-\delta < x < c+\delta$.

Si $x > c$ entonces $x \in (c, c+\delta)$ y por hipótesis $f'(x) < 0$, por tanto f es decreciente en $(c, c+\delta)$ y así $f(x) < f(c)$.

Si $x < c$ entonces $x \in (c-\delta, c)$ y por hipótesis $f'(x) > 0$, por tanto f es creciente en $(c-\delta, c)$ y así $f(x) < f(c)$.

Análogamente se demuestra la parte b..

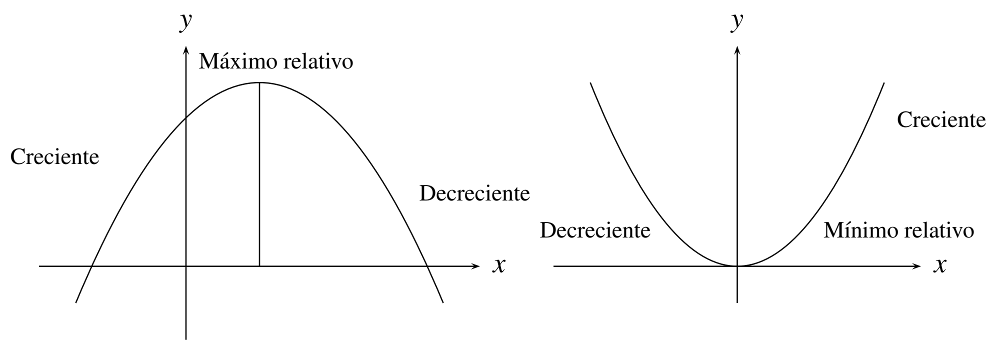


FIGURA N° 12.16

Ejemplo

Sea $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$

Como esta función es polinomial entonces es continua y derivable en cualquiera de sus puntos, luego sus máximos y mínimos solamente se podrán hallar en aquellos puntos x donde $f'(x) = 0$, es decir:

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2) = 4x(1-x)(1+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, 1, -1$$

$a)$ $f'(x) = 4x(1-x)(1+x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

$b)$ $f'(x) = 4x(1-x)(1+x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ pues

x	$-----$	$-----$	$+++++$	$+++++$
$(x+2)$	$+++++$	$+++++$	$+++++$	$-----$
$(x-4)$	$-----$	$+++++$	$+++++$	$+++++$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad + \quad 1 \quad -$

así que f tiene máximos relativos en $x = -1$ y $x = 1$ y sus correspondientes valores son $f(-1)$ y $f(1)$, ya que f es creciente en $(-\infty, -1)$ y decreciente en $(-1, 0)$; creciente en $(0, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$ y f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y su valor es $f(0) = 0$ ya que f es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, 1)$.

Ejemplo

Como $f(x) = |x-2|+5$ es continua para todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable es $x = 2$, (donde se presenta un pico), entonces sus valores máximos y mínimos relativos pueden estar o donde $f'(x) = 0$, o donde $f(x)$ no sea derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ \text{no existe} & x = 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$

luego el único punto donde posiblemente hay máximos o mínimos relativos es ed $x = 2$.

Como $f'(x) > 0$ para $x > 2$ y $f'(x) < 0$ para $x < 2$, entonces en $x = 2$ se presenta en mínimo relativo y su valor es $f(2) = 5$ (figura 12.17)

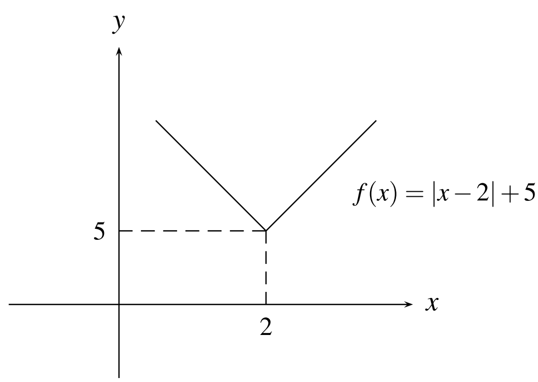


FIGURA N° 12.17

Ejemplo

Para la función cuya gráfica aparece en la figura 12.18

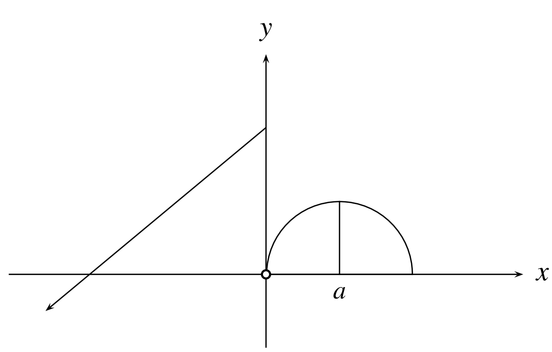


FIGURA N° 12.18

se puede concluir que f presenta un máximo relativo en $x = a$ (allí $f'(a) = 0$) y en $x = 0$, sin embargo f no es continua en $x = 0$.

12.1.8. Criterio de la segunda derivada para determinar máximos y mínimos relativos

Si $f(x)$ es dos veces derivable en un punto $x = c$ en el cual $f'(c) = 0$ entonces:

a) Si $f''(c) > 0$, en $x = c$ se presenta un mínimo relativo.

b) Si $f''(c) < 0$, en $x = c$ se presenta un máximo relativo.

c) Si $f''(c) = 0$, el criterio no decide, es decir, allí puede presentarse máximo o mínimo o ninguno de los dos.

Demostración

a) Como $f''(c) > 0$ entonces $f''(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{x - c} > 0$, por tanto:
Si $x > c,\ \ f'(x) > 0$ entonces f es creciente y si $x < c,\ \ f'(x) < 0$ entonces f es decreciente, y así por el criterio de la primera derivada, en $x = c$ se presenta un mínimo relativo.

En forma análoga se demuestra la parte *b*..

NOTA:

Como se puede apreciar, este criterio no se puede aplicar para aquellos casos en que el máximo o mínimo relativo se presente en puntos donde la función no es derivable, por lo que el criterio anterior resulta mas general.

Ejemplo

Utilizando este criterio, para hallar los valores máximos y mínimos relativos de $f(x) = -x^3 + x^2$, se procede a hallar los puntos donde $f'(x) = 0$, es decir,

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x+2) = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ó } \ x = 2/3$$

Ahora para cada uno de estos puntos se analiza el signo de la segunda derivada. Así puesto que $f''(x) = -6x+2$ entonces $f''(0) = 2 > 0$, lo que indica que en $x = 0$, se presenta un mínimo relativo y su valor es $f(0) = 0$ y puesto que $f''(2/3) = (-6)(2/3) + 2 = -2 < 0$ entonces en $x = 2/3$ se presenta un máximo relativo y su valor es $f(2/3) = -(2/3)^3 + (2/3)^2 = 4/27$.

Ejemplo

Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x) = x^{1/3}(8-x) = 8x^{1/3} - x^{4/3}$.

$$f'(x) = 8/3x^{-2/3} - 4/3x^{1/3} = (4/3)(2-x)x^{-2/3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f''(x) = -\frac{4}{9}\frac{(x+4)}{x^{5/3}}$$

$f''(2) = -\dfrac{4}{9}\dfrac{(2+4)}{2^{5/3}} < 0$, luego f tiene un máximo relativo en $x = 2$ y su valor es $f(2) = (6)(2^{1/3})$ (Por el criterio de la segunda derivada).

El punto $0 \in D_f$ pero en $x = 0$ f no es derivable, (observe que en $f'(x)$ aparece x en el denominador por tanto no se puede reemplazar por cero), entonces aquí no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada, luego hay que aplicar el criterio de la primera derivada así:
Resolviendo las desigualdades $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$ se tiene que:

$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{(2-x)}{x^{2/3}} > 0 \quad \text{si} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \quad \text{y}$$
$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{(2-x)}{x^{2/3}} < 0 \quad \text{en} \quad (2, +\infty),$$

así f no tiene máximos ni mínimos relativos en $x = 0$, pues tanto a derecha como a izquierda de cero la derivada es positiva.

EJERCICIOS

I. Hallar los intervalos donde f es creciente, decreciente, cóncava, convexa, puntos de inflexión, valores máximos y mínimos relativos si existen.

1. $f(x) = |9 - x^2|$
2. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$
3. $f(x) = x^2(4-x)^{1/2}$
4. $f(x) = \dfrac{3}{4+x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{1-x^2}$
6. $f(x) = |x| + |x-1| - x \quad \text{con } x \in [-20, 40]$
7. $f(x) = (1-x)^{2/3}(2+x)^{1/3} \quad \text{con} \quad x \in [-4, 10]$
8. $f(x) = 2Cos\, x - Cos\, 2x$
9. $f(x) = x + Sen\, x$
10. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$
11. $f(x) = x(x-2)(x-3) \quad \text{con} \quad x \in [-4, 10]$

II.

1. Hallar los valores de a, b, c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 6 en $x = 2$ y que la gráfica de f tenga intersección con el eje y igual a 4.
2. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, hallar a, b de manera que la gráfica de f tenga un punto de inflexión en $(1, 2)$.
3. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar a, b, c, d de manera que f tenga un extremo relativo (máximo o mínimo relativo) en $(0, 3)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1, -1)$.
4. hallar los valores de a, b, c tales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo de 7 en $x = 1$ y la gráfica pase por (2,-2).
5. Hallar a, b, c tales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga extremos relativos (máximo o mínimo) en $(1, 2)$ y en $(2, 3)$.
6. Hallar los valores de a, b tales que $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un extremo relativo en $(2, 3)$.

12.2. PROBLEMAS DE RECTAS TANGENTES Y RECTAS NORMALES

Se trata de resolver problemas geométricos relacionados con rectas tangentes y normales (perpendiculares a las rectas tangentes). Se aplicara el hecho de que la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$, como se vio en la introducción, se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ y por consiguiente $-\dfrac{1}{f(a)}$ como la pendiente de la recta normal a la curva en el mismo punto.

Ejemplo

Dado el punto $p = (2,1)$ y la curva representada por la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$; hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a esta curva que pasan por p.

En la figura 12.19 se pueden apreciar las rectas que se buscan.

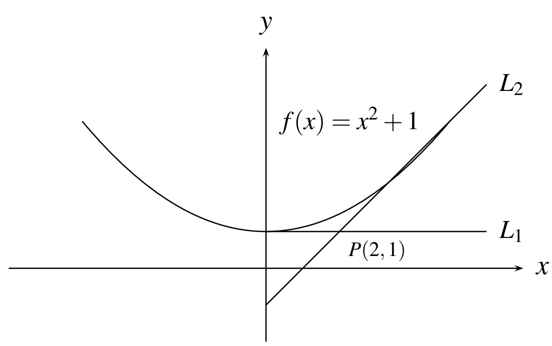


FIGURA N° 12.19

Suponga que el punto de tangencia de la recta L_1 ó L_2 es $(a, f(a))$, se trata inicialmente de determinar el valor o los valores de a. Para ello, recuerde que la pendiente de esta recta se puede hallar de dos formas:
Como $\dfrac{f(a)-1}{a-2} = \dfrac{a^2+1-1}{a-2} = \dfrac{a^2}{a-2}$ y como $f'(a) = 2a$, entonces $\dfrac{a^2}{a-2} = 2a$, así que, $a^2 = 2a(a-2)$, luego $2a^2 - a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a-4) = 0$ y así $a = 0$ ó $a = 4$, por tanto existen dos rectas tangentes a la curva que pasan por el punto $(2,1)$. Una con punto de tangencia $(0, f(0)) = (0,1)$ o sea con pendiente $f'(0) = 0$, cuya ecuación será $y - 1 = 0(x-0)$ y otra con punto de tangencia en $(4, f(4)) = (4,17)$ o sea con pendiente $f'(4) = 8$ con ecuación $y - 17 = 8(x-4)$

Ejemplo

Encontrar las ecuaciones de las rectas normales a la curva $y = 1/x$ y paralelas a la recta $y = 2x + 5$ (figura 12.20)

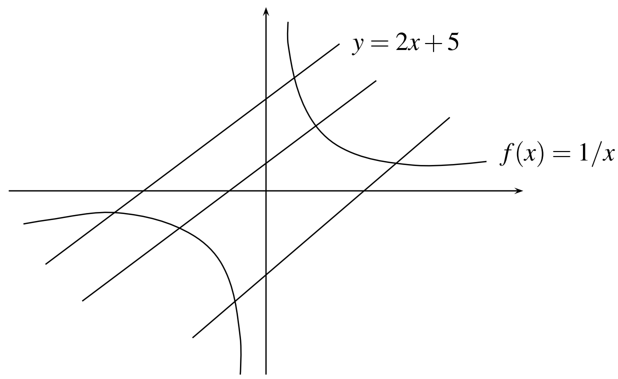


FIGURA N° 12.20

las rectas buscadas tiene por pendiente $-\dfrac{1}{f'(a)} = -\dfrac{1}{-1/a^2} = a^2$, donde $(a, f(a))$ representa el punto o los puntos sobre la curva en donde las rectas buscadas son perpendiculares a las rectas tangentes.

Por otro lado como la recta es paralela a $y = 2 + 5$, su pendiente debe ser igual a 2, y así
$a^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}$, por tanto las ecuaciones de las rectas normales son:

$y - f(\sqrt{2}) = 2(x - \sqrt{2}) \quad$ y $\quad y - f(-\sqrt{2}) = 2(x + \sqrt{2})$, es decir
$y - (1/\sqrt{2}) = 2(x - \sqrt{2}) \quad$ y $\quad y + (1/\sqrt{2}) = 2(x + \sqrt{2})$

12.3. PROBLEMAS DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Se trata de resolver problemas en los cuales interviene una función $s(t)$ que representa el espacio recorrido por un objeto en el tiempo t y por consiguiente, como se había visto anteriormente, $s'(t)$ y $s''(t)$ representan respectivamente la velocidad del objeto en ese mismo instante.

Ejemplo

Supóngase que se arroja una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de altura 160 mts de tal forma que en un instante t se encuentra a una altura $s(t) = -16t^2 + 64t + 160$ mts del piso, halle:

$a)$ El espacio recorrido entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos.

$b)$ Velocidad promedio en este intervalo de tiempo.

$c)$ La velocidad instantánea en $t = 3$ segundos.

$d)$ La aceleración instantánea en $t = 2$ segundos.

$e)$ ¿Cuándo alcanza su altura maxima y cual es?

$f)$ ¿Cuándo llega al piso y con que velocidad?

Solución

a) El espacio recorrido entre $t = 2$ y $t = 3$ segundos es:
$s(3) - s(2) = (-144 + 192 + 160) - (-64 + 128 + 160) = -16$. (¿Qué significa el signo menos?)

b) Velocidad promedio $= \dfrac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = -16\, m/seg$. (¿Qué significa el signo menos?)

c) Velocidad instantánea $= s\,'(t) = -32t + 64$, luego ésta en $t = 3$ *seg* es:
$s\,'(3) = -(32)(3) + 64 = -32\ \ m/seg$. (¿Qué significa el signo menos?)

d) Aceleración instantánea $= s\,''(t) = -32$, luego ésta en el instante $t = 2$ *seg* es $s\,''(2) = -32\ \ m/seg^2$ (¿Qué significa el signo menos?)

e) La altura maxima la alcanza cuando la velocidad es cero, es decir cuando
$s\,'(t) = -32t + 64 = 0$ o sea en $t = 2$ *seg* y ésta es:
$s(2) = -(16)(4) + (64)(2) + 160 = 224\, m$

f) La pelota llega al piso cuando $s(t) = 0$, es decir, cuando $-16t^2 + 64t + 160 = 0$ y esto ocurre cuando $t < 2 \pm \sqrt{14}$, por tanto la pelota llega al piso cuando $t = 2 + \sqrt{14}$ *seg* y la velocidad con la que llega es $s\,'(2 + \sqrt{14}) = -32(2 + \sqrt{14}) + 64 \approx -119.7\, m/seg$

12.4. PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO

Suponga que una cantidad está variando respecto al tiempo mediante una expresión $y = f(t)$, por ejemplo el volumen de una bomba al inflarla varía con el tiempo o el volumen de agua en un depósito con una llave abierta también es función del tiempo; surge así la pregunta ¿con qué velocidad están variando estas cantidades respecto al tiempo en un determinado instante?. Dicha velocidad está representada por $y\,'(t)$ lo cual se puede demostrar de la misma forma como se hizo con la velocidad de una partícula que recorre un espacio $s(t)$, y se llama Razón de Cambio de $y = f(t)$ en el instante t.

Además se pueden presentar algunos problemas en los cuales dos funciones que varían con el tiempo aparecen relacionadas mediante la ecuación. Es evidente que al derivar esta ecuación respecto al tiempo aparecen relacionadas mediante las razones de cambio de estas dos funciones.

Ejemplo

Una placa circular se dilata por el calor de manera que su radio aumenta a una razón de 2 *mts* cada segundo. ¿Con qué razón aumenta el area cuando su radio es de 4 *mts*?

Area del circulo de radio r : $A(r) = \pi r^2$; $\quad \dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

Razón de cambio del radio r : $r\,'(t) = \dfrac{dr}{dt} = 2\dfrac{m}{seg}$

Razón de cambio del área $A\,'(t) = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{dA}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt} = 2\pi r \dfrac{dr}{dt} = 4\pi r$

Razón de cambio del área cuando $r = 4$: $A\,'(4) = 4\pi(4) = 16\pi$

Ejemplo

Un punto P se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Cuando pasa por el punto $(3,4)$ su ordenada y disminuye a razón de 6 m/seg. ¿Cómo varía la abscisa x?

Para cada instante $t, x^2(t) + y^2(t) = 25$, derivando respecto a t se tiene que

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{es decir} \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

Sea t el instante en el cual el punto pasa por $(3,4)$, luego

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt} + (4)(-6) = 0 \quad \text{es decir,} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{24}{3} = 8\frac{mts}{seg}$$

Ejemplo

Un avion se dirige hacia el norte a 640 $km/hora$, pasando por cierta ciudad al medio día, un segundo avion se dirige hacia el este a 600 $km/hora$ y está exactamente sobre la misma ciudad 15 minutos mas tarde. Si los aviones vuelan a la misma altura ¿Con qué razón se separan a la 1:15 PM?

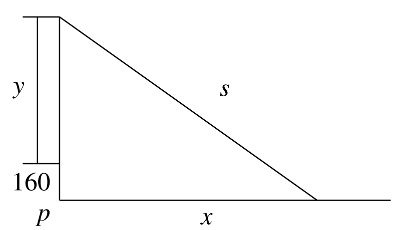


FIGURA N° 12.21

Sea t_0 el tiempo inicial a las 12:15, hora en que el segundo avion está sobre el pueblo P (figura 12.21). En este instante, el primer avion ha recorrido un espacio de $640/4 = 160$ km $(e = vt, \quad v = 640 \;\; km/hora, \quad t = 1/4 \;\; hora)$.

Sea y la distancia recorrida por este avion después de las 12:15, x la distancia recorrida por el segundo avion en éste tiempo y s la distancia que separa los dos aviones es este instante. Puesto que

$$\frac{dy}{dt} = 640\,\frac{km}{hora}; \quad \frac{dx}{dt} = 600\,\frac{km}{hora};$$

y $\quad s = \sqrt{x^2 + (y+160)^2} \quad$ y como $\quad t = 1\ hora \quad$ entonces

$y = 640/1 = 640\,km$ y $x = \dfrac{600km/h}{1\ hora} = 600\,km$ y con $s = \sqrt{(600)^2 + (640+160)^2} = 1000$, por tanto ya que $s^2 = x^2 + (y+160)^2$ se deduce que:

$$\begin{aligned}
2s\frac{ds}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2(y+160)\frac{fy}{dt} \\
&= 2(600)600 + 2(640+160)640 \\
\frac{ds}{dt} &= \frac{2(600)^2 + 2(640+160)640}{2s} \\
&= \frac{2(600)^2 + 2(640+160)640}{2(1000)} = 872\frac{km}{h}
\end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Una partícula se mueve a lo largo de la parabola $y = x^2$. ¿En qué punto de su recorrido están cambiando a la misma velocidad la abscisa y la ordenada de la partícula?

2. Sea A, D, C, r el área, el diámetro la longitud y el radio de un circulo respectivamente. En un instante determinado, $r = 6$, $\dfrac{dr}{dt} = 3\,\dfrac{m}{seg}$. Hallar la tasa de variación de A respecto a: r, D, C, y t.

3. Un punto se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{x^2+1}$, de tal forma que $\dfrac{dx}{dt} = 4$, halle $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$

4. Un cuadrado se expande con el tiempo. ¿Cómo se relacionan la razón de aumento del área del cuadrado con la razón de aumento de la longitud de su lado?

5. Las aristas de un cubo variable aumentan de 3 cms/seg. ¿Con qué variación aumenta el volumen del cubo cuando una arista tiene 10 cms de longitud?

12.5. PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La teoría que se dio sobre máximos y mínimos no solamente se utiliza en la construcción de gráficas, sino también para resolver ciertos problemas en los cuales es necesario maximizar o minimizar ciertas variable.

Para resolver estos problemas es necesario inicialmente trasladar el problema al lenguaje matemático, definiendo claramente cual es la función que se va a maximizar o minimizar y cuales son las dependencias entre las diferentes variables que aparezcan.

Ejemplo

Halle dos numeros positivos que sumados den 12, y tal que su producto sea máximo.

Sean x, y los dos numeros, la expresión que se va a maximizar es xy, pero como $x + y = 12$, es decir, $y = 12 - x$, entonces ella se puede representar como una función en la variable x, $f(x) = x(12-x)$

$0 \le x \le 12$ y así el problema se reduce a hallar el máximo absoluto de esta función, que de acuerdo a lo ya conocido se presenta donde $f'(x) = 0$ o en los extremos de $[0, 12]$.

Como $f(x) = x(12 - x) = 12x - x^2; \quad f'(x) = 12 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6,$
y como $f(6) = 6(12 - 6) = 36, \quad f(0) = 0, \quad f(12) = 0$
entonces su máximo valor se encuentra en $x = 6$ y su valor es 36, luego los numeros positivos pedidos son:
$x = 6$ y $y = 12 - 6 = 6$

Ejemplo

Hallar la altura del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 6 mts.

Solución

Sea x el radio del cono y y su altura (figura 12.22)

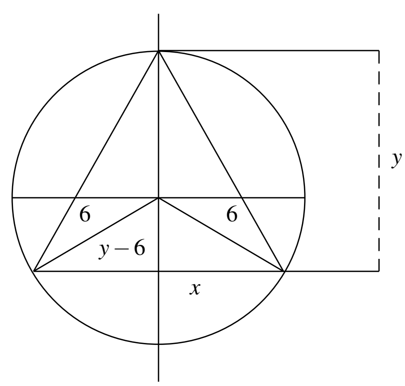


FIGURA N° 12.22

La función a maximizar es el volumen del cono, es decir, $v = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, pero por el teorema de Pitágoras, de la figura 12.22 se tiene que:

$x^2 = 6^2 - (y - 6)^2$, luego la función v se puede representar en términos de la variable y así:

$$\begin{aligned} v &= (1/3)\pi(x^2 y) = (1/3)\pi(36 - (y - 6)^2)y \\ &= 4\pi y^2 - (\pi/3)y^3 \quad 0 \le y \le 12 \end{aligned}$$

esta función es derivable en todo el intervalo $(0, 12)$, por tanto el valor máximo se puede representar donde $v'(y) = 0$ ó en $y = 0$ ó en $y = 12$.

Si $v'(y) = 0$ entonces $8\pi y - \pi y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad$ ó $\quad y = 8.$

Puesto que $v''(y) = 8\pi - 2\pi y$, entonces $v''(8) = 8\pi - 16\pi = -8\pi < 0$, luego en $y = 8$ se presenta un máximo relativo y como $v''(0) = 8\pi > 0$ hay un mínimo relativo en $y = 0$ y así el volumen máximo se presenta en $y = 8$, ya que

$$v(8) = 4\pi 8^2 - \frac{\pi}{3}8^3 = \pi 8^2\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{264\pi}{3} \text{ es mayor que } v(0) = 0 \text{ y } v(12) = 0$$

Ejemplo

Hallar dos puntos sobre $y = x^3$ cuyas abscisas difieren en 2, de tal forma que la recta que los une tenga pendiente minima.

Sean $(x,y),(a,b)$ dos puntos sobre la gráfica de $y = x^3$, como se pide que las abscisas difieran en 2 entonces $a - x = 2$, luego $a = x+2$ y como $b = a^3 \quad \Rightarrow \quad b = (x+2)^3$ ya si la pendiente de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$m = \frac{b-y}{a-x} = \frac{b-y}{2} = \frac{(x+2)^3 - x^3}{2} \quad \text{y por tanto:}$$

$$m'(x) = (3/2)\left[(x+2)^2 - x^2\right] = (3/2)(4x+4) = 0 \quad \text{y}$$

$$m'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{3}{2}(4x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow\; x = -1$$

$m''(x) = 6$, así que $m''(-1) = 6 > 0$, luego en $x = -1$, se presenta un mínimo, y así los puntos buscados son:
$(-1,(-1)^3) = (-1,-1)$ y $(-1+2,(-1+2)^3) = (1,1)$

EJERCICIOS

1. Hallar la mínima distancia del punto $(3,3)$ a la recta $x - y = 1$
2. Un trozo de alambre de 10 *mts* de longitud se corta en dos partes. Una parte será doblada en forma de triángulo equilátero, y la otra parte en forma de cuadrado. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de sus áreas sea:?
   a) Maxima
   b) Minima
3. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen que puede ser inscrito en un cono de radio 3 *mts* y altura 15 *mts*
4. Hallar la linea recta que pasa por $(8,18)$ con intersecciones con los ejes coordenados positivos, tales que la suma de ellas sea minima.
5. ¿Cuál es el mayor perímetro de un rectángulo que puede inscribirse en un semicírculo de radio 3?
6. ¿Cuál es la forma del rectángulo con perímetro P fijo, que encierra la mayor área?

7. Halle las dimensiones del rectángulo de área maxima que puede ser inscrito en la elipse: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

8. Demostrar que la minima distancia del punto (x_0,y_0) a la recta $Ax+By+C=0$ es $\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

9. Hallar el radio del cilindro de superficie lateral maxima que puede ser inscrito en un esfera de radio R.

12.6. REGLA DE L'HOPITAL

Observando las funciones $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$; $y=\dfrac{2(x-1)}{x-1}$; $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^4}$; se puede apreciar que cuando $x\to 1$, estas funciones tienden a 0,2 y $+\infty$ respectivamente, pero además si se reemplaza directamente x por 1 en cada una de estas expresiones, todas ellas son de la forma $\dfrac{0}{0}$. Con esto se trata de ilustrar que al calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, sabiendo que es de la forma $\dfrac{0}{0}$ su resultado puede ser un número real cualquiera o $\pm\infty$. A expresiones de este tipo y de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ se llaman *formas indeterminadas*. Límites de este tipo aparecen con cierta frecuencia en algunos problemas de aplicación, y sus cálculos en algunas ocasiones se pueden realizar con determinados cambios de variable o métodos artificiosos como cuando se calcularon atrás $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sen\,x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Pero existe un método mas general que nos permite calcular muchos limites de este tipo, que es la llamada *regla de L'Hopital*:

Supóngase que lim representa uno de los limites:

$\lim\limits_{x\to c}$; $\lim\limits_{x\to c^+}$; $\lim\limits_{x\to c^-}$; $\lim\limits_{x\to +\infty}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}$; y supóngase además que $\lim f(x)=0$ y $\lim g(x)=0$ (ó $\lim f(x)=\pm\infty$, y $\lim g(x)=\pm\infty$)

Si

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}=\left\{\begin{array}{c}\text{número L}\\ +\infty\\ -\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f(x)}{g(x)}$$

NOTA 1

Recuérdese que antes de aplicar la regla de L'Hopital, debe cerciorarse que sea una indetermination de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, pues de lo contrario no es aplicable.

NOTA 2

Obsérvese que al aplicar la regla de L'Hopital a ala expresión $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no se calcula la derivada del cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, sino que se divide la derivada de $f(x)$ entre la derivada de $g(x)$.

NOTA 3

Si al aplicar la regla de L'Hopital a $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$, la expresión $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ sigue siendo de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hopital a esta expresión, y si persiste la indeterminación de este tipo se puede aplicar las veces que sea necesario hasta hallar el límite

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen\,x}{x}$

Obsérvese que es de la forma $\dfrac{0}{0}$. Derivando numerador y denominador se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{Cos\,x}{1} = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\,(Sen\,x)}{\ln\,(Tan\,x)}$

Obsérvese que es de la forma $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, por tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\,(Sen\,x)}{\ln\,(Tan\,x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln\,(Sen\,x))'}{(\ln\,(Tan\,x))'} = \lim_{x\to 0^+} Cos^2\,x = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen\,x - x}{x^3}$

Obsérvese que es de la forma $\dfrac{0}{0}$, por tanto:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen\,x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Cos\,x - 1}{3x^2}$, que también es de la forma $\dfrac{0}{0}$, luego aplicando nuevamente la regla de L'Hopital se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{Cos\,x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{Sen\,x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{4\,Tan\,x}{1+Sec\,x}$

Es de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ luego

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\,Tan\,x}{1+Sec\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\,Sec^2\,x}{Sec\,x\,Tan\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4}{Sen\,x} = 4$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3+1}$

Es de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ luego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

Ejemplo

En el cálculo del $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x}$, que es de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, al aplicar la regla de L'Hopital se tiene: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ que es de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, luego aplicando nuevamente al regla de L'Hopital se tiene:
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}$, es decir se regresa al límite original, lo que permite concluir que la regla de L'Hopital aunque es aplicable no conduce a ningún resultado, por tanto el límite debe calcularse por otro método.(¿Cuál?)

Hay otros tipos de límite que no siendo de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ se pueden llevar a esta forma.

Es el caso de límites indeterminados de la forma:

1. $\lim f(x)\cdot g(x)$ donde $f(x)\to 0$ y $g(x)\to\pm\infty$, que se puede representar como $\lim \dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ ó $\lim \dfrac{f(x)}{1/g(x)}$, en los cuales es aplicable la regal de L'Hopital.

2. $\lim f(x)^{g(x)}$, cuando $f(x)\to 1$ y $g(x)\to\infty$, en este caso el límite se representa como: $\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln(f(x))}$ y el límite de este exponente es de la forma tratada en 1.

3. $\lim(f(x)-g(x))$, cuando $f(x)\to+\infty$ y $g(x)\to+\infty$, en este caso se busca a través de manipulaciones algebraicas llevarlo a una forma donde sea aplicable la regal de L'Hopital

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$

El límite es de la forma $0(-\infty)$ y se llevara a la forma $\dfrac{-\infty}{\infty}$ así:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} (1-Tan\, x)Sec\, 2x$

El límite es de la forma $0(+\infty)$ y se llevara a la forma $\dfrac{0}{0}$ así:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} (1-Tan\, x)Sec\, 2x = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{(1-Tan\, x)}{Cos\, 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{-Sec^2\, x)}{-2\,Sen\, 2x} = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} x\, Sen\dfrac{1}{x}$

El límite es de la forma $0(+\infty)$ y

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{Sen\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\dfrac{1}{x^2}Cos\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} Cos\frac{1}{x} = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

El límite es de la forma $1^{+\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}} \quad e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x}} = e^1 = e$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

El límite es de la forma $1^{+\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x}} = e^1 = e$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

El límite es de la forma $(+\infty)^0$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$

El límite es de la forma 0^0, entonces

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\Big/-1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}-x} = e^0 = 1$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{Sen\,x}\right)$

El límite es de la forma $(+\infty)-(-\infty)$, por lo tanto

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{Sen\,x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{Sen\,x-x}{x\,Sen\,x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{Cos\,x-1}{Sen\,x+x\,Cos\,x}\right) =$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-Sen\,x}{2\,Cos\,x-x\,Sen\,x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

Ejemplo

Hallar $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln\,x}\right)$

El límite es de la forma $(+\infty)-(-\infty)$, entonces

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln\,x}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x\ln\,x-x+1}{(x-1)\ln\,x}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x\ln\,x}{x-1+x\ln\,x}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1+\ln\,x}{2+\ln\,x}\right) = \frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

I. Hallar el valor de los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Sen\,x}{e^x-e^{-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+Cos\,x}{x-Cos\,x}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\,x}{e^x}$

7. $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{Cot\,x}$

8. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^4-256}{x-4}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8^x-2^x}{4x}$

10. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+3x)^{\frac{1}{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to0}x^{Sen\,x}$

12. $\lim\limits_{x\to1}\ln\,x(\ln\,(x-1))$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$

14. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\,x-1}{x-e}$

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Sen^{-1}\,x}{e^{2x}-1}$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{Cosh\,x-1}{1-Cos\,x}$

17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{Tan\,x}$

18. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{Cos\frac{\pi}{2}x}$

II. Hallar el valor de c tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4$

III. Hallar el valor de n tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right)^x=9$

IV. Ilustre con ejemplos situaciones del tipo:

$0(-\infty)$	$0(+\infty)$	$(+\infty)-(+\infty)$	$\dfrac{-\infty}{+\infty}$
$\dfrac{+\infty}{-\infty}$	$\dfrac{-\infty}{-\infty}$	$(+\infty)+(-\infty)$	$(-\infty)-(-\infty)$
0^0	$(\pm\infty)^0$	$1^{+\infty}$	$\dfrac{0}{\pm\infty}$
$0^{+\infty}$	$(+\infty)^\infty$	$(+\infty)(+\infty)$	$(+\infty)-(-\infty)$
$(-\infty)+(-\infty)$	$(-\infty)(+\infty)$	$\dfrac{+\infty}{c}$	$\dfrac{c}{+\infty}$

Apéndice A

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Una característica importante de los números naturales, es el llamado principio de inducción matemática, que afirma que:

si una proposición cualquiera se satisface para el numero natural 1 ya además siempre que se satisfaga para el número natural k, se satisface para el número natural $k+1$; entonces el conjunto de los números que satisface esta propiedad es el conjunto de los números naturales.

Esta propiedad se puede utilizar para demostrar que determinadas proposiciones se cumplen para todos los números naturales o para todos los números naturales a partir de un número natural fijo n_0.

El principio de inducción matemática se puede ilustrar de las forma siguiente: Imagínese que una persona desea subir todos los escalones de una escalera infinita; si a esta persona se le garantiza dos cosas: Primero, que la dejan subir al escalón número uno y segundo, que siempre que se encuentre en el escalón k, la dejan subir al escalón $k+1$, es evidente que esa persona podrá subir todos los escalones. Obsérvese que si una de las dos condiciones no se da, entonces no se puede garantizar que la persona recorra todos los escalones.

Un error frecuente que se comete cuando se pide demostrar que determinada propiedad es válida para todos los números naturales, es verificar que ésta se cumple para el 1 el 2,etc., hasta un número fijo. Con esto se garantiza realmente sólo que la propiedad se cumpla para el número 1,2, hasta ese número fijo, pero no para todos los números naturales como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Se quiere demostrar la validez de la proposición: Para todo número natural n, n^2-n+41 es un número primo.

Se verifica para $n = 1$; $1 - 1 + 41 = 41$ es un número primo.
para $n = 2$; $4 - 2 + 41 = 43$ es un número primo.

$\vdots$

para $n = 40$; $40^2 - 40 + 41 = 1601$ es un número primo.
pero para $n = 41$; $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ no es un número primo.

Con lo anterior se muestra que si con los resultados, de los primeros 40 casos o menos (que siempre dan primos), se hubiese sacado la conclusión de que la proposición es válida para todos los números naturales, se hubiese cometido un error.

Algunas fórmulas de uso frecuente, se pueden demostrar utilizando el principio de inducción matemática como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo

Demostrar que para todo número natural n, se verifica que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i. Se verifica que la propiedad se cumple para $n = 1$. Haciendo $n = 1$ en los dos lados de la ecuación se tiene:
$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

ii. Se supone que la proposición se cumple para $n = k$, es decir, se supone que $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, que es la llamada hipótesis de inducción.

iii. Asumiendo que la hipótesis de inducción es cierta, se demostrara que la proposición se cumple para $n = k + 1$, es decir, que:
$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$
En efecto:
$1 + 2 + 3 \ldots + k + (k+1) = (1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k+1)$
$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

De lo anterior se concluye que la proposición es válida para todo número natural.

Ejemplo

Demostrar que para todo número natural n, se verifica que:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n=\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad \text{para} \quad r\neq 1$$

i. Se verifica que la propiedad se cumple para $n=1$, pues $a+ar=a(1+r)=\dfrac{a(1-r^2)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{1+1})}{1-r}$ que coincide con el lado derecho de la expresión a demostrar para $n=1$

ii. Se supone que la proposición se cumple para $n=k$, es decir, que:
$a+ar+\ldots+ar^k=\dfrac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$ (hipótesis de inducción).

iii. Usando la hipótesis de inducción se demostrará que la proposición se cumple para $n=(k+1)$, es decir, que:
$a+ar+ar^2+\ldots+ar^k+ar^{k+1}=\dfrac{a(1-r^{k+2})}{1-r}$
En efecto:
$a+ar+ar^2+\ldots+ar^k+ar^{k+1}=(a+ar+ar^2+\ldots+ar^k)+ar^{k+1}$
$=\dfrac{a(1-r^{k+1})}{1-r}+ar^{k+1}=\dfrac{a(1-r^{k+1})+ar^{k+1}(1-r)}{1-r}$
$=\dfrac{a(1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{k+2})}{1-r}$
De lo anterior se concluye que la proposición es válida para todo número natural.

Como se puede apreciar en el ejemplo 1, cumpliéndose la primera condición, pero no la segunda, se llega a resultados erróneos. En el ejemplo siguiente se ilustrará como se llega a resultados erróneos, si se satisface la segunda condición, pero no se satisface la primera, es decir, siempre es necesario verificar que se satisfagan las dos condiciones.

Ejemplo

Para todo número natural n, $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$.

Se supone que es cierto para $n=k$, es decir:

$1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{8}(2k+1)^2$, y se verifica que es cierto para $n=k+1$, es decir, que:
$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2=\frac{1}{8}(2k+3)^2$.

En efecto:
$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=\frac{1}{8}(2k+1)^2+k+1$
$=\frac{1}{8}(2k+1)^2+\frac{1}{8}(8k+8)^2=\frac{1}{8}(4k^2+4k+1+8k+8)=\frac{1}{8}(4k^2+12k+9)$.
$=\frac{1}{8}(2k+3)^2$.

Es decir la segunda condición se cumple, pero obsérvese que no se cumple para $k=1$, ni tampoco para los otros valores de k, por ejemplo:

$k=3$; $\quad 1+2+3=6$; pero $\dfrac{1}{8}((2)(3)+1)^2=\dfrac{49}{8}$, en forma análoga se puede verificar que no se cumple para otros valores de k.

Ejemplo

El teorema del binomio $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ se puede demostrar rigurosamente usando la inducción matemática.

i. Para $n=1$;

$$(a+b)^1=\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}a^{1-i}b^i=\binom{1}{0}ab^0+\binom{1}{1}a^0b=a+b$$

ii. Se supone cierto para $n=k$; es decir $(a+b)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$ y se demostrara que es válida para $n=(k+1)$, es decir que:

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k=(a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i\\
&= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i\\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^{i+1}\\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i+\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^{k-(i-1)}b^i\\
&= \binom{k}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}b^i+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^{k+1-i}b^i+\binom{k}{k}b^{k+1}\\
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]a^{k+1-i}b^i+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k+1}{0}a^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}\\
&= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i
\end{aligned}$$

luego queda demostrado el teorema para todo número natural.

EJERCICIOS

Demostrar que para todo número natural n, se cumple que:

1. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$
   Indicación Recuerde que $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
3. $(ab)^n=a^nb^n$ con a,b número reales.
4. $4^{2n}-1$ es divisible por 5.
5. $2^n\geq n$

RESPUESTAS A ALGUNOS EJERCICIOS

CAPÍTULO 1

SECCIÓN 1.2.8 (PÁGINA 16)

1. *a*) 3 *b*) $\dfrac{17}{6}$ *c*) 4 *d*) $\dfrac{-23}{12}$
   e) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ *f*) $\dfrac{7}{2}$ *g*) $\dfrac{-38}{73}$

4. *a*) F *b*) V
6. i, ii
8. *a*) $a+3b$ *b*) $y-3x$ *c*) $2x^2+4xy+3y^2$ *d*) $2y-z$
   e) $3a+b+c$

(PÁGINA 20)

1. F
2. i. 5 ii. $9x^4y^2$ iii. $a^{\frac{77}{20}}\, b^{\frac{29}{20}}$ iv. $5\sqrt[3]{5}$
   v. $x^7y^2z^3$ vi. $2^5 3^7$
3. i. $4x^4-2$ ii. $x^{-5}-y^3$ iii. $2y^3+x^3y^3+2x^{-4}y^{-1}+\dfrac{1}{xy}$ iv. $2^4 3^6$
   v. $-1+\sqrt{10}-\sqrt{15}$ vi. $12\sqrt{7}$ vii. $5\sqrt{2}-20\sqrt{5}$ viii. 1
   ix. $\dfrac{c-d}{(a+b)^3}$ x. $\sqrt[3]{4}$ xi. $2\sqrt{a-b}$ xii. $a^{\frac{11}{12}}$
   xiii. a xiv. x^2+2

SECCIÓN 1.4.1 (PÁGINA 25)

1. $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{4}$
2. $a^{2m}-b^{2n}$
3. $x^2-(y+1)^2$
4. $2^{2x}-3^{2x}$
5. x^8-y^8
6. $4y^{\frac{4}{5}}-9x^4$
7. $9a^6+12a^3b^4+4b^8$
8. $5+2\sqrt{6}$
9. $27a^{3x}+54a^{2x}b^2+36a^xb^4+8b^6$
10. $2-3\sqrt[3]{4}\sqrt[4]{3}+3\sqrt[3]{2}\sqrt{3}-\sqrt[4]{27}$
11. $23\sqrt{2}+21\sqrt{3}-38-12\sqrt{6}$
12. $54\sqrt{2}-270\sqrt[3]{3}+225\sqrt{2}\sqrt[3]{9}-375$
13. $8a^3b^3c^3-12\sqrt{abc}a^2b^2c^2+6a^2b^2c^2-\sqrt{(abc)^3}$
14. 1
15. 4^4-2^2
16. $1+a^3$
17. $27a^3-125b^3$

SECCIÓN 1.4.2 (PÁGINA 28)

1. $(x+1)(x^2-x+1)(x-y)$
2. $(x-1)(x+1)(x-y)$
3. $(2x+y)(3x-y)$
4. $(1-2x^2)(a^2-b^3)$
5. $(a+4)(a+5)$
6. $(a-4)(a-3)$
7. $(a-3)^2$
8. $(3x-2)(2x+1)$
9. $(2x+3y)(3x-y)$
10. $(m^2+n^2+mn)(m^2+n^2-mn)$
11. $(5-2x)(4x+3)$
12. $(x^3+2)(x-1)(x^2+x+1)$
13. $(\sqrt[3]{x}+2)(2\sqrt[3]{x}+1)$
14. $(2a^n-b)(2a^n+b)$
15. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
16. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$
17. $(m^2+n^2-a)(m^2+n^2+a)$
18. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
19. $(xy^2-6y^4)(x^2y^4+6xy^6+36y^8)$
20. $2(3m^2-18m+28)$
21. $(5a+2b)^3$
22. $(3-x)^3$
23. $3x^2+2y^3$

SECCIÓN 1.4.3 (PÁGINA 31)

1. i. $\dfrac{\sqrt[6]{5^5}}{5}$ ii. $\dfrac{2\sqrt{12}+15\sqrt{2}+2\sqrt{18}+15\sqrt{3}+4\sqrt{30}+30\sqrt{5}}{-201}$

   iii. $\sqrt[3]{3}+1$ iv. $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$

   v. $\dfrac{4+6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{-46}$ vi. $\dfrac{5\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{163}$

   vii. $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{2x}$ viii. $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

2. i. El factor racionalizante es $(x+h)^{\frac{4}{3}}+(x+h)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}$

   ii. El factor racionalizante es $\sqrt{(x+h)^3}+\sqrt{x^3}$

   iii. El factor racionalizante es $x-\sqrt{x+1}$

SECCIÓN 1.4.4 (PÁGINA 34)

1. 0
2. $\dfrac{x+2}{2x-3}$
3. $\dfrac{1}{m}$
4. $a^{3x}-a^3$
5. $a^{4m}-81$
6. $\dfrac{(2x+y)^2}{3x-y}$
7. $\dfrac{x^2-3}{x(x+1)}$
8. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
9. 1
10. 1
11. 1
12. $-\dfrac{1}{a}$
13. $\dfrac{2a^2-2a+1}{1-2a}$
14. $\dfrac{m-n-x}{m}$
15. $\dfrac{a^2+ab+ac}{a-b-c}$
16. $\dfrac{1}{2}$
17. $\dfrac{3x-4}{3x+5}$

CAPÍTULO 2

SECCIÓN 2.1.2 (PÁGINA 49)

1. $[3,5]$
2. $(-4,0)\cup(2,+\infty)$
3. $[5,+\infty)$
4. $(-\infty,2)$
5. $(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty)$
6. $(-\infty,7)$
7. $(-2-2\sqrt{3},-2)\cup(1,-2+2\sqrt{3})$

8. $\left(-38,-\frac{178}{21}\right)$ 9. $[3,+\infty)$ 10. $(4,6)$ 11. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

SECCIÓN 2.2 (PÁGINA 63)

1. $3,-\frac{5}{3}$
2. $\frac{11}{2}$
3. No tiene solución
4. $\left[\frac{9}{2},\frac{15}{2}\right]$
5. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$
6. $(-\infty,+\infty)$
7. No tiene solución
8. $\pm 3,\pm 5$
9. $\left[\frac{29}{8},4\right)\cup\left(4,\frac{9}{2}\right]$
10. $\left(-\infty,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(2,\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},2\right)$
11. $\left[\frac{1}{9},1\right]$
12. $\left(-\infty,\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2},+\infty,\right)$
13. $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$
14. $(-\infty,-4)\cup(-4,-1)\cup(0,2]\cup[3,+\infty)$
15. $(-\infty,+\infty)$
16. $[9,21]\cup[-29,-9]$

18. *a*) V *b*) F *c*) F *d*) F

CAPÍTULO 3

SECCIÓN 3.2.4 (PÁGINA 84)

1. *a*) -4 *b*) $-4+7i$ *c*) $\frac{1}{65}-\frac{8i}{65}$ *d*) $\frac{-7}{325}+\frac{4i}{325}$

2. *a*) $\frac{9}{5}+\frac{3i}{5}$ *b*) -2^{50} *c*) $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$
d) $-\frac{1}{2}-3i$ *e*) $\frac{1}{221}+\frac{21}{221}$ *f*) $-\frac{2}{13}+\frac{3i}{13}$

3. *a*)$(1,3),(-1,-3)$ *b*) $(1,0)$ *c*) $\left(\frac{3}{34},\frac{-5}{34}\right)$
d) $\left(\frac{-4}{13},\frac{7}{13}\right)$ *e*) $(-1,2)$

4. *a*) $\sqrt{65}$ *b*) 10 *c*) 1 *d*) $\frac{1}{5}$
   e) $\frac{1}{5}$ *f*) 13 *g*) 3 *h*) $\frac{1}{3}$
   i) $\sqrt{10}$
5. *a*) $(x-3)^2+y^2=16$ *b*) $x^2+(y-3)^2=16$ *c*) $x=-1$
   d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ *e*) $x^2+(y-1)^2=1$ *f*) $x=1$
   g) $y=0$ *h*) $xy=2$ *i*) $x=2$
6. *a*) $1\leq x^2+y^2\leq 9$ *b*) $1\leq x^2+(y-2)^2\leq 25$ *c*) $(x+1)^2+y^2\geq 9$
   d) $x^2+(y-1)^2>1$ *e*) $xy>\frac{1}{2}$ *f*) $x^2-y^2>1$
7. *a*) V *b*) V *c*) V *d*) V

CAPÍTULO 4

SECCIÓN 4.2 (PÁGINA 94)

1. *a*) $\frac{145}{12}$ *b*) 26 *d*) -14.707
2. *a*) $\sum_{k=1}^{100} k^4$ *b*) $\sum_{k=1}^{51} 2k-1$ *c*) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$
   d) $\sum_{k=1}^{80} \frac{k}{k+1}$ *e*) $\sum_{k=1}^{n} (2+5k)$ *f*) $\sum_{k=1}^{520} 2k$
3. *a*) Falsa *b*) Verdadera *c*) Falsa
   d) Verdadera *e*) Verdadera
4. *a*) n^2 *b*) $\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$ *c*) $\frac{1-(-2/3)^{n+1}}{1+2/3}$
   d) $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *e*) $(81)^2-7^2$ *f*) $\frac{1}{(300)^2}-\frac{1}{6^2}$
   g) $\frac{n^3}{3}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}$
5. *a*) Si *b*) Si *c*) Si
   d) No *e*) No

6. $a)$ $a_k = 5k+5$; 100

   $b)$ $a_k = Sen(2^{k+1})$; $Sen\, 2^{29} - Sen\, 2$

   $c)$ $a_k = (2k-1)^3; 29^3 - 3^3$

   $d)$ $a_k = k^2+4k+2; 10402-2 = 10400$

   $e)$ $a_k = 2$

SECCIÓN 4.4 (PÁGINA 99)

1. $10!$
2. 162
3. $a)$ F $\quad b)$ F $\quad c)$ F
4. $\{2,3\},\ \{2,5\}\ \{3,5\}$
6. $\binom{15}{7}$
7. $\binom{5}{0}$; $\binom{5}{1}$; $\binom{5}{2}$; $\binom{5}{3}$; $\binom{5}{4}$; $\binom{5}{5}$, 2^5
8. 17
9. 9

SECCIÓN 4.5 (PÁGINA 101)

1. $a)$ $2\sqrt{2}a^3b^3 + 6\sqrt{3}a^4b^4 + 9\sqrt{2}a^5b^5 + 3\sqrt{3}a^6b^6$

2. El cuarto término es $\binom{8}{3}x^2y^{-2}$; el término independiente es $\binom{8}{4}$

   y el coeficiente de $x^{-2}y^2$ es $\binom{8}{6}$

3. El coeficientes de x^{18} es $\binom{15}{4}3^4$; el término independiente es $\binom{15}{10}3^{10}$,

   el noveno término es $\binom{15}{8}3^8x^6$

4. $\binom{7}{3}$

5. El coeficiente de x^6es $\binom{9}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

6. $a)$ 2^{20} $\quad b)$ 0 $\quad c)$ 8^{500}

7. $\binom{10}{4}$

CAPÍTULO 5

SECCIÓN 5.1 (PÁGINA 116)

1. *a*) $y = \frac{2x}{3} + \frac{2}{3}$ *b*) $y = 2$ *c*) $y = 4x - 16$

2. *a*) i. $y = 2x - 3$ ii. $y = 2 - \frac{x}{2}$
   b) i. $x = 2$ ii. $y = 5$
   c) i. $y = 0$ ii. $x = -1$

3. *a*) No *b*) No *c*) No

4. *a*) El punto de intersección de las medianas es $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y sus ecuaciones

   $y = 2x; \quad y = \frac{2}{-5}(x-2) \quad y = \frac{2}{7}(x+2);$

   b) El punto de intersección de las mediatrices es $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y sus ecuaciones

   $y = 1 + \frac{1}{2} + \left(x - \frac{3}{2}\right); \quad y = 1 - \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad$ y $\quad x = 0$

   c) El punto de intersección de las alturas es $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y sus ecuaciones

   $x = 1; \quad y = -\frac{3}{2}(x-2); \quad y = \frac{1}{2}(x-2)$

   d) Son colineales

5. $\frac{7}{5}$ 6. $\frac{4}{\sqrt{2}}$

7. *a*) $a = -2$ *b*) $a = \pm 3$ *c*) $a = \frac{5}{3}$, $a = 1$

16. Ecuaciones de los lados, $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$; $y = \frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$

    y ecuación de la diagonal $y = \frac{7}{3}x - 11$

SECCIÓN 5.2 (PÁGINA 123)

1. $(x-4)^2+y^2=25$
2. $x^2+(y-5)^2=25$
3. $x^2+(y-5)^2=25$
10. $(x-4)^2+(y-6)^2=8; \quad (2,4),(6,8)$
11. $x^2+y^2=2$

13. *a*) Si   *b*) No   *c*) Si   *d*) Si   *e*) No   *f*) No   *g*) No

14. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
15. $(x-2)^2+(y-4)^2=10$
16. $5y-2x-19=0$
17. $(-2,-2),(-1,5)$

SECCIÓN 5.3 (PÁGINA 133)

1. *a*) Vértice $=(0,0)$; foco $=\left(\frac{1}{2},0\right)$, $d=-\frac{1}{2}=x$ *b*) $(0,0),\left(-\frac{1}{4},0\right), d=\frac{1}{4}=x$

   c) $(0,0),\left(0,\frac{1}{16}\right), d=-\frac{1}{16}=y$ *d*) $(0,0),\left(0,-\frac{1}{12}\right), d=y=\frac{1}{12}$

2. *a*) $12x=y^2$ *b*) $-20x=y^2$

   c) $16y=x^2$ *d*) $-\frac{4}{3}y=x^2$

3. $x=3y^2$

5. *i*) $(h,k), x=h$; $(h,k+p)$; $y=k-p$

   ii) $(h,k), y=k$; $(h+p,k)$; $x=h-p$

6. $-28(y+3)=(x-2)^2$
7. $(-2,4),(-1,4)$; $x=-3$
8. *a*) $\left(-2,\frac{-5}{8}\right),\left(-2,\frac{-5}{8}+\frac{1}{3}\right), \quad y=\frac{-5}{8}-\frac{1}{3}$
9. No, por ejemplo si $A=0,B,C,D$ diferentes de cero.
10. $y=0$
11. $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

SECCIÓN 5.4 (PÁGINA 143)

1. *a*) $(\pm 3,0),(0,\pm 2)$; $(\pm\sqrt{5},0)$ *b*) $(\pm 4,0),(0,\pm 6)$; $(0,\pm\sqrt{20})$

   c) $(0,\pm 1),(\pm 1/2,0)$; $\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *d*) $(\pm 2,0),(0,\pm 1)$; $(\pm\sqrt{3},0)$

2. *a*) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$ *b*) $\dfrac{x^2}{21}+\dfrac{y^2}{25}=1$

   c) $\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ *d*) $\dfrac{8x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}=1$

   e) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

3. $(h,k),\left(h+\sqrt{a^2-b^2},k\right),\left(h-\sqrt{a^2-b^2},k\right)$, $(h,k+b),(h,k-b),(h+a,k)(h-a,k)$

4. i. *a*) $(1+\sqrt{40},5)$; $(1-\sqrt{40},5)$ *b*) $(8,5),(-6,5),(1,8),(1,2)$ *c*) $14,6$

   ii. *a*) $(-2,1+\sqrt{7})$; $(-2,1-\sqrt{7})$ *b*) $(-2,5),\ (-2,-3),\ (-5,1),\ (1,1)$ *c*) $8,6$

5. *a*) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-6)^2}{25}=1$ *b*) $(x-2)^2+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$

6. No, por ejemplo $B=0; D, C, F$ diferentes de cero

SECCIÓN 5.5 (PÁGINA 153)

1. *a*) $(\pm 4,0);(\pm 5,0)$; $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ *b*)$(0,\pm 4),(0,\pm 5)$; $y=\pm\dfrac{4}{3}x$

   c) $(\pm\sqrt{2},0),(\pm 6,0)$; $y=\pm\sqrt{2}x$ *d*) $(\pm\sqrt{10},0),(\pm\sqrt{20},0)$; $y=\pm x$

   e) $\left(0,\pm\dfrac{1}{2}\right),\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$; $y=\pm\dfrac{3}{2}x$

2. *a*) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ *b*) $y^2-\dfrac{x^2}{8}=1$ *c*) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$

3. *a*) $(h+\sqrt{a^2+b^2},k),(h-\sqrt{a^2+b^2},k)$; $(h+a,k),(h-a,k)$; $\dfrac{x-h}{a}=\pm\dfrac{(y-k)}{b}$

   b) $(h,k+\sqrt{a^2+b^2}),(h,k-\sqrt{a^2+b^2})$; $(h,k+a),(h,k-a)$; $\dfrac{y-k}{a}=\pm\dfrac{(h-h)}{b}$

4. *a*) $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$ *b*) $(y-4)^2-\dfrac{(x-2)^2}{4}=1$

   c) $\dfrac{(y-3)^2}{4}-\dfrac{(x-1)^2}{21}=1$ *d*) $(y-4)^2-\dfrac{(x-5)^2}{15}=1$

5. *a*) $(-2,4),(-2,0)$; $(-2,2+\sqrt{8}),(-2,2-\sqrt{8})$; $y-2=\pm(y-1/2)$

   b) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ $y-\dfrac{1}{2}=\pm(x+2)$

   c) $(4,3),(0,3)$; $(2+\sqrt{5},3),(2-\sqrt{5},3)$; $y-3=\pm\dfrac{(x-2)}{2}$

CAPÍTULO 6

SECCIÓN 6.1 (PÁGINA 166)

2. *a*) $\sqrt{23}$ *b*) $\sqrt{6x^2+3}$ *c*) $\sqrt{2ax^3+2b+3}$ *d*) $\dfrac{\sqrt{2x+2h+3}-\sqrt{2x+3}}{h}$

   e) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2h+3}$ *f*) $\sqrt{-2x+3}$

3. *a*) No *b*) Si *c*) Si *d*) No *e*) Si *f*) Si *g*) Si

   h) No *i*) Si *j*) No *k*) Si *l*) Si *m*) Si

4. *a*) Relación No funcional $D_R=[-4,4]$; $R_R=[-2,2]$

   b) Si es función $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R_f$ *c*) Relación No funcional

   d) Si es función $D_f=\left[0,\dfrac{5\pi}{2}\right]$, $R_f=[-1,1]$

   e) Si es función $D_f=R$; $R_f=(-\infty,1]\cup\{2\}$

   f) No es función $D_R=\{2\}$; $R_R=R$

5. *a*) $(-\infty,0]$ *b*) $\{0\}$ *c*) $(-2,1]$ *d*) $(-2,1]$ *e*) $(0,1]\cup(-\infty,-1]$

   f) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ *g*) $(-\infty,+\infty)$ *h*) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ *i*) $(-\infty,+\infty]$

SECCIÓN 6.2 (PÁGINA 171)

1. *a*) $\sqrt{2+h}$ *b*) $7-2h$ *c*) $\sqrt{x+h}+2x+2h+1$ *d*) $\sqrt{5}+11$

   e) $|x|$ *f*) $\sqrt{x}-2x-1$ *g*) $\dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$ *h*) $\sqrt{x}(2x+1)$

   i) $[0,+\infty),[0,+\infty),[0,+\infty)$; $[0,+\infty)$

2. *a*) $\sqrt{1-h}+4-2h$ *b*) $\sqrt{x^2-1}-2x^2$ *c*) $\sqrt{x}(2x+2)$ *d*) $2a^4$

   e) $2(a^2-1)$ *f*) $\sqrt{x}(2x+2)$ *g*) $\dfrac{\sqrt{1-3h}}{4-6h}$ *h*) $[1,+\infty),[1,+\infty)$

3. *a)* $(-\infty,0)\cup(0,+\infty),(-\infty,0)\cup(0,+\infty),(-\infty,1]$ *b)* $(-\infty,0)\cup(0,1],(-\infty,0)\cup(0,1],(-\infty,0)\cup(0,1)$

   c) No existe, $\sqrt{3}-\dfrac{1}{4}$

SECCIÓN 6.3 (PÁGINA 175)

1. *a)* $\dfrac{1}{1+\left[(1+x^2)^2\right]^{-1}}$ *b)* $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ *c)* $\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}\right)^2}$

2. $\dfrac{\dfrac{x+3}{1-x^2}+3}{1-\left(\dfrac{x+3}{1-x^2}\right)^2}$; $\dfrac{Sen\sqrt{\frac{2}{x}}+3}{1-\left(Sen\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)^2}$; $Sen\left(\sqrt{\dfrac{2}{2/x}}\right)$;

   $Sen\left(Sen\left(\dfrac{\sqrt{\frac{2}{x}}+3}{1-\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2}\right)\right)$; $\dfrac{\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{2/x}}}+3}{1-\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2/x}}}\right)^2}$

3. a
4. *a)* V *b)* F *c)* F *d)* F
5. Ninguna
6. No existen
7. $(g_o f)(x)=\sqrt{1-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$; $x=0$ $(f_o g)(x)=\sqrt{\sqrt{1-x^2}+1}$; $[-1,1]$

   $(f_o h)(x)=\sqrt{x+3}+1$; $[-3,+\infty)$ $(g_o h)(x)=\sqrt{1-(x+3)^2}$; $[-4,-2]$
8. i. $s(r(p(x)))$ ii. $q(s(r(x)))$ iii. $r(p(s(x)))$ iv. $p(q(x))$

CAPÍTULO 7

SECCIÓN 7.6 (PÁGINA 185)

1. *a)* $x=-8$ de multiplicidad 3, $x=6$ de multiplicidad 2; grado 5.

   b) $x=\pm i$ de multiplicidad 4, $x=2$ de multiplicidad 8; grado 16

   c) $x=\pm 3i$ de multiplicidad 8, $x=3$ de multiplicidad 3, $x=0$ de multiplicidad 4; grado 23.

2. *a*) $p(x) = (x+4)^2(x+1)$ *b*) $p(x) = (x-3)^2(x+2)$
   c) $p(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ *d*) $(x-(4-5i))(x-(4+5i))(2x-1)$
3. $x = 3-i,\ x = 3+i,\ x = -1$ 5. $p(1) = 1-1 = 0$. Si 6. $p(3) = 27-6+1 \neq 0$. No
7. *a*) $p(-2) = 4$ *b*) $p(5) = -25$ *c*) $p(i) = 0$
8. *a*) $Q(x) = 4x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 18x + 4;\ R = -12$ *b*) $Q(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 2;\ R = 0$
   c) $21 - 8i$
9. $p(x) = (2x^2+3x+3)(2x-3)+14;$ Si, $\begin{array}{rrrr|l} 4 & 0 & -3 & 5 & \underline{3/2} \\ & 6 & 9 & 9 & \\ \hline 4 & 6 & 6 & 14 & \end{array}$

   entonces $4x^3 - 3x + 5 = (4x^2+6x+6)(x-3/2)+14$
10. *a*) $\{0,1,-2,3\}$ *b*) $(-\infty,-2] \cup [0,1] \cup [3,+\infty);$
    c) $\{0\}$ *d*) $\{0,1,-2,3\}$
11. $f(x) = x^5 - x = x(x^4-1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$
    a) $\{0,\pm 1,\pm i\}$ *b*) $[-1,0] \cup [1,\infty);\ (-\infty,-1) \cup (0,1)$
    c) $\{0\}$ *d*) $\{0,1,-1\}$
12. $b = -4$ 13. $a = 16,\ b = 41,\ c = 26$ 14. $a = -5,\ b = 6$

SECCIÓN 7.7 (PÁGINA 190)

1. *a*) $\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ *b*) $\left(x - 3 - \sqrt{8}\right)\left(x - 3 + \sqrt{8}\right)$
   c) $\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)$ *d*) $3\left(x - \frac{5}{6} + \frac{i\sqrt{23}}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6} - \frac{i\sqrt{23}}{6}\right)$
2. *a*) $\left(\frac{5}{6}, -\frac{25}{12}\right)$ Mínimo *b*) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ Máximo
   c) $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{41}{16}\right)$ Mínimo *d*) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ Mínimo
3. *a*) $\left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ *b*) $\left(-\infty, -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[-\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$
   c) $\left[0, \frac{1}{4}\right)$

SECCIÓN 7.8 (PÁGINA 192)

1. $a)$ $\Re$ $b)$ $\Re$ $c)$ $\Re - \left\{0, \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2}\right\}$

SECCIÓN 7.9 (PÁGINA 199)

II. 1. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

2. $1 - \dfrac{16/3}{x^2+4} + \dfrac{1/3}{x^2+1}$

3. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{6}{(2x+1)^2} + \dfrac{12}{(2x+1)^3}$

4. $\dfrac{1/2}{(x-1)^2} + \dfrac{1/2}{(x+1)^2}$

5. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

6. $\dfrac{-2-2x}{(x^2+2x+2)^2} + \dfrac{1}{x^2+2x+2}$

7. $\dfrac{1/4}{x-1} - \dfrac{1/4}{x+1} - \dfrac{1/2}{x^2+1}$

8. $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}x}{x^2+1-\sqrt{2}x}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2+\sqrt{2}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$

CAPÍTULO 8

SECCIÓN 8.2 (PÁGINA 217)

1. Para 150^o

$Sen\,(150) = Sen\,(30) = 1/2;$ $\quad Sen\,(-150) = -Sen\,(150) = -1/2$

$Cos\,(150) = -Cos\,(30) = -\sqrt{3}/2;$ $\quad Cos\,(-150) = Cos\,(150) = -\sqrt{3}/2$

$Tan\,(150) = \dfrac{Sen\,(150)}{Cos\,(150)} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3};$ $\quad Tan\,(-150) = -Tan\,(150) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$Cot\,(150) = \dfrac{Cos\,(150)}{Sen\,(150)} = -\sqrt{3};$ $\quad Cot\,(-150) = -Cot\,(150) = \sqrt{3}$

$Sec\,(150) = \dfrac{1}{Cos\,(150)} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}};$ $\quad Sec\,(-150) = Sec\,(150) = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

$Csc\,(150) = \dfrac{1}{Sen\,(150)} = 2;$ $\quad Csc\,(-150) = -Csc\,(150) = -2$

Para 600^{o}

$Sen\,(600) = Sen\,(240+360) = Sen\,(240) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $Sen\,(-600) = -Sen\,(240) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$Cos\,(600) = Cos\,(240) = -1/2$; $Cos\,(-600) = Cos\,(600) = Cos\,(240) = -1/2$

$Tan\,(600) = \dfrac{Sen\,(240)}{Cos\,(240)} = \sqrt{3}$; $Tan\,(-600) = -Tan\,(600) = -\sqrt{3}$

$Cot\,(600) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $Cot\,(-600) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$Sec\,(600) = \dfrac{1}{Cos\,(600)} = \dfrac{1}{Cos\,(240)} = -2$; $Sec\,(-600) = Sec\,(-600) = -2$

$Csc\,(600) = \dfrac{1}{Sen\,(600)} = \dfrac{1}{Sen\,(240)} = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$; $Csc\,(-600) = -Csc\,(600) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

7. $Cos\,M\left(x+\dfrac{2\pi}{M}\right) = Cos\,(Mx+2\pi) = Cos\,Mx$; $Sen\,M\left(x+\dfrac{2\pi}{M}\right) = Sen\,(Mx+2\pi) = Sen\,Mx$

9. $a)$ $\dfrac{\pi}{a}$ $b)$ $\dfrac{\pi}{b}$ $c)$ $\dfrac{2\pi}{b}$

SECCIÓN 8.3 (PÁGINA 224)

1. $Sen\,(90+x) = Cos\,x$; $Sen\,(90-x) = Cos\,x$

   $Cos\,(90+x) = -Sen\,x$; $Cos\,(90-x) = Sen\,x$

   $Tan\,(90+x) = -Cot\,x$

SECCIÓN 8.4 (PÁGINA 230)

1. i. $a)$ Es inyectiva $b)$ $f^{-1}(x) = x^2$ $c)$ $D_f = [0,+\infty) = R_{f^{-1}}$; $R_f = [0,+\infty) = D_{f^{-1}}$

   ii. $a)$ Es inyectiva $b)$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ $c)$ $D_f = R_{f^{-1}} = \Re$; $R_f = D_{f^{-1}} = \Re$

   iii. $a)$ Es inyectiva $b)$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ $c)$ $D_f = R_{f^{-1}} = \Re$; $R_f = D_{f^{-1}} = \Re$

iv. $a)$ Es inyectiva $b)$ $f^{-1}(x) = -\sqrt{x^2+4}$; $x \geq 0$ $c)$ $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty,-2)$; $R_f = D_{f^{-1}} = (0,+\infty)$

v. $a)$ Es inyectiva $c)$ $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty,0)$; $R_f = D_{f^{-1}} = (-4,+\infty)$

2. *a*) $y = x;\ x \geq 0;$ $f^{-1}(x) = x;\quad D_f = [0,+\infty) = R_f = D_{f^{-1}} = R_{f^{-1}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2-4};\ x \geq 2;$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2+4};\quad D_f = [2,+\infty) = R_{f^{-1}};\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

c) $y = x;\ x \geq 0;$ $f^{-1}(x) = x;\quad D_f = [0,+\infty) = R_{f^{-1}};\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

d) $f(x) = \dfrac{4}{3}\sqrt{9-x^2};\ 0 \leq x \leq 3;$ $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2};\quad D_f = [0,3] = R_{f^{-1}};\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,4]$

e) $f(x) = \sqrt{x-1};$ $f^{-1}(x) = x^2+1;\quad D_f = [1,+\infty) = R_{f^{-1}};\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

f) $f(x) = x^2-1;$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1};\quad D_f = [1,+\infty) = R_{f^{-1}};\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$

SECCIÓN 8.5 (PÁGINA 240)

1. *a*) V *b*) V *c*) V *d*) V *e*) V *f*) V
g) V *h*) v *i*) V *j*) V *k*) V *l*) V
m) V *n*) V ñ) F *o*) F *p*) F

SECCIÓN 8.6 (PÁGINA 246)

1.

a) $x = \dfrac{\frac{\pi}{4}+2n\pi}{3}$ ó $x = \dfrac{ArcSen\,(\sqrt{2}/2)}{3} + \dfrac{2n\pi}{3};\quad x = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2n\pi}{3};\quad x = \dfrac{2n\pi + \pi - ArcSen\,(\sqrt{2}/2)}{3}$

b) $x = \dfrac{n\pi}{3}$ ó $x = \dfrac{(2n\pi + (\pi - ArcSen\,(0)))}{3};\quad x = \dfrac{2n\pi + ArcSen\,(0)}{3}$

c) $x = \dfrac{ArcTan\,(-\sqrt{3}) + n\pi}{2}$ ó $x = \dfrac{-\frac{\pi}{3}+n\pi}{2}$

d) $x = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{1}{2}$ ó $2x - 1 = ArcCot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + n\pi$

e) $2x = 2n\pi + ArcSen\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ó $2x = 2n\pi + \Big(\pi - ArcSen\,(\sqrt{2}/2)\Big)$

$2x = 2n\pi + ArcSen\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ó $2x = 2n\pi + \Big(\pi - ArcSen\,(-\sqrt{2}/2)\Big)$

f) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi = ArcSen\,(1/2) + 2n\pi$ ó $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi = (\pi - ArcSen\,(1/2)) + 2n\pi$

g) $2x = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ ó $2x = \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi$

h) $\{3x = n\pi\}$ ó $\left\{\begin{array}{l} 3x = 2n\pi + ArcSen\,(0) \\ 3x = 2n\pi + (\pi - ArcSen\,(0)) \end{array}\right\}$

$i)\quad x = n\pi \quad$ ó $\quad x = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} \\ \\ \frac{5\pi}{12} + \frac{n\pi}{2} \end{array} \right\} \quad$ ó $\quad \left\{ \begin{array}{ll} x = n\pi; & 4x = ArcCos\,(1/2) + 2n\pi \\ & 4x = 2n\pi - ArcCos\,(1/2) \end{array} \right\}$

$j)\quad \begin{array}{l} x = 2n\pi + ArCos\,(1) \\ x = 2n\pi - ArcCos\,(1) \end{array} \quad$ ó $\quad 2n\pi; \quad x = \dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi = 2n\pi - ArCos\,(-1/2)$

$k)\quad \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi = 2n\pi + ArcSen\,(1); \quad \begin{array}{l} 2n\pi + ArcSen\,(-6/10) \\ 2n\pi + (\pi - ArcSen\,(-6/10)) \end{array}; \quad 2n\pi + ArcSen\,(1)$

$l)\quad x = \dfrac{n\pi}{2} \qquad m)\quad x = 2n\pi \qquad n)\quad x = n\pi$

ñ) $\quad n\pi; \quad \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi \qquad o)\quad \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi; \quad \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$

$p)\quad \left\{ \begin{array}{ll} 2n\pi + ArcSen\,(\sqrt{2/3}); & 2n\pi + (\pi - ArcSen\,(\sqrt{2/3}) \\ 2n\pi + ArcSen\,(-\sqrt{2/3}); & 2n\pi + (\pi - ArcSen\,(-\sqrt{2/3}) \end{array} \right\}$

$q)\quad n\pi; \quad -\dfrac{\pi}{4} + n\pi$

$r)\quad \begin{array}{l} Cos\,2x = 1/2 \\ Cos\,2x = -1/2 \end{array}; \quad \begin{array}{l} Cos^2 x = 1/4 \\ Cos^2 x = 3/4 \end{array} \quad \{\pi/6,\ \pi/3,\ \pi - \pi/3,\ \pi + \pi/3\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2n\pi + ArcCos\,(1/2); & 2n\pi - ArcCos\,(1/2) \\ 2n\pi + ArcCos\,(-1/2); & 2n\pi - ArcCos\,(-1/2) \\ 2n\pi + ArcCos\,(\sqrt{3}/2); & 2n\pi - ArcCos\,(\sqrt{3}/2) \\ 2n\pi + ArcCos\,(-\sqrt{3}/2); & n\pi - ArcCos\,(-\sqrt{3}/2) \end{array} \right\}$$

$s)$ No tiene solución

SECCIÓN 8.7 (PÁGINA 256)

1. $a)\quad \sqrt{18}\left(Cos\,\dfrac{5\pi}{4} + i\,Sen\,\dfrac{5\pi}{4}\right) \quad b)\quad \sqrt{18}\left(Cos\,\dfrac{\pi}{4} + i\,Sen\,\dfrac{\pi}{4}\right) \quad c)\quad \sqrt{18}\left(Cos\,\dfrac{3\pi}{4} + i\,Sen\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

   $d)\quad \sqrt{18}\left(Cos\,\dfrac{7\pi}{4} + i\,Sen\,\dfrac{7\pi}{4}\right) \quad f)\quad 1\left(Cos\,\dfrac{\pi}{2} + i\,Sen\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. $a)\quad 12\left(Cos\,\dfrac{\pi}{2} + i\,Sen\,\dfrac{\pi}{2}\right) \quad b)\quad \dfrac{1}{2}\,(Cos\,0 + i\,Sen\,0) \quad c)\quad (Cos\,(-210) + i\,Sen\,(-210))$

   $d)\quad 2^4\,(Cos\,(240) + i\,Sen(240)) \quad e)\quad 2^5\,(Cos\,(90) + i\,Sen\,(90)) \quad f)\quad \dfrac{1}{4}\,(Cos\,(780) + i\,Sen\,(780))$

3. $a)\quad 1 + i\,\sqrt{3} \qquad b)\quad -2 + i\,2\sqrt{3} \qquad c)\quad -2i\,\sqrt{3}$

   $d)\quad -2\sqrt{3} + 2i \qquad e)\quad \dfrac{32\sqrt{2}}{5}\,(Cos\,(-255) + i\,Sen\,(-255))$

4. $a)$ $W_k = Cos\,\dfrac{2k\pi}{3} + i\;Sen\,\dfrac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2;\qquad W_k = Cos\,\dfrac{2k\pi}{3} + i\;Sen\,\dfrac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2,3,4$

$b)$ $W_k = 2^{1/3}\left[Cos\,\dfrac{330+2k(180)}{3} + i\;Sen\,\dfrac{330+2k(180)}{3}\right] \quad k=0,1,2$

$c)$ $W_k = \left(\sqrt{2}\right)^{1/4}\left[Cos\,\dfrac{135+2k(180)}{4} + i\;Sen\,\dfrac{135+2k(180)}{4}\right] \quad k=0,1,2,3$

$d)$ $W_k = \left[Cos\,\dfrac{90+2k(180)}{2} + i\;Sen\,\dfrac{90+2k(180)}{2}\right] \quad k=0,1$

$e)$ $W_k = 8^{1/3}\left[Cos\,\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k(180)}{3} + i\;Sen\,\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k(180)}{3}\right] \quad k=0,1,2$

$W_k = 27^{1/3}\left[Cos\,\dfrac{90+2k(180)}{3} + i\;Sen\,\dfrac{90+2k(180)}{3}\right] \quad k=0,1,2$

CAPÍTULO 9

SECCIÓN 9.2 (PÁGINA 276)

1. $a)$ $5=\log_2 32$ $\quad b)$ $3=\log 1000$ $\quad c)$ $4=\log_{1/3}\dfrac{1}{81}$ $\quad d)$ $2=\log_{1/4}\dfrac{1}{16}$
2. $a)$ $64=2^6$ $\quad b)$ $81=3^4$ $\quad c)$ $125=5^3$ $\quad d)$ $0.01=10^{-2}$
3. $a)$ 3 $\quad b)$ 4 $\quad c)$ -3 $\quad d)$ 1
   $e)$ $16^{1/3}$ $\quad f)$ $\dfrac{1}{64}$ $\quad g)$ $10^{-0.02}$
4. $a)$ 6 $\quad b)$ 36 $\quad c)$ 9 $\quad d)$ 4
5. $a)$ $\log_2 5$ $\quad b)$ $\log_5 14$ $\quad c)$ $\log_{1/3}\sqrt{2}$
6. $a)$ $\log_3 2-1$ $\quad b)$ $-\dfrac{17}{6}$
7. $a)$ $x=3$ $\quad b)$ 13 $\quad c)$ 1003 $\quad d)$ e^3+3
   $e)$ $1125=9\cdot 125$ $\quad f)$ $\dfrac{40}{9}$ $\quad g)$ No tiene solución $\quad h)$ 12
   $i)$ 11 $\quad j)$ $100,\ \dfrac{1}{10}$ $\quad k)$ $1,\ 2$ $\quad l)$ $100,\ \dfrac{1}{100}$
   $m)$ $2^{(\pm 6/5)}$ $\quad n)$ $16,\ \dfrac{1}{2}$ $\quad$ ñ) 1 $\quad p)$ 10
   $q)$ $100,\ 1000$

SECCIÓN 9.3 (PÁGINA 280)

1. *a*) -6 *b*) 2 *c*) $-2\,,\,1$ *d*) $(5\,,8)$
2. *a*) $[3,+\infty)$ *b*) $(-\infty,-4]$ *c*) $\dfrac{\log 348+2}{5}$ *d*) $4,3,1$ *e*) 1
3. *a*) V *b*) V *c*) F *d*) F *e*) F
   f) F *g*) V *h*) F

5. *a*) $x>3^5$ *b*) $(5,13)$
   c) $\{(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)\}\cap\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\right\}$
   d) $\left\{\left(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2},+\infty\right)\right\}\cap\{(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)\}$ *e*) $(2,+\infty)$

   f) $(3,+\infty)$ *g*)$(-\infty,-1)\cup(9/7,+\infty)$
   h) $(-\infty,11/13)\cup(5/3,+\infty)$ *i*) $(-\infty,1/3)\cup(7/5,3)\cup(3,+\infty)$
   j) $\left(\frac{2}{11},\frac{1}{2}\right)$ *k*) $[-1,0)$
   l) $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ *m*) $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

CAPÍTULO 10

SECCIÓN 10.2 (PÁGINA 296)

I. 1. $8,27,0$ 2. $\sqrt{2},2,\sqrt{3}$ 3. $2,$No existe, No existe
   4. $-1,1,-1$ 5. $2,8/2$ 6. No existe$,3,2$
   7. $5,9$

II. 1. Si $[a,b]$ cualquiera 2. Continua en $[-1,+\infty)$ 3. Continua en $(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$
   4. Continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ 5. Continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 6. Continua en $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$
   7. Continua en $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

Cualquier intervalo cerrado que este contenido en el intervalo dado

III. f es continua en $[a,b)$ si f es continua en (a,b) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

1. $f(x)=\sqrt{x}$; Continua en $[0,+\infty)$ 2. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; Continua en $[-1,1]$

IV. 1. No 2. No 3. Si 4. No 5. Si 6. Si

V. 1. $m=4$ 2. $m=1\,,\ n=3$ 3. $m=\dfrac{1}{6}$ 4. $m=2\,,\ n=-1$

SECCIÓN 10.3 (PÁGINA 305)

1. *a*) No existe, No existe, 0 *b*) $+\infty\,,\ -\infty\,,\ \ln 4$
   c) $-\infty\,,\ +\infty\,,\ -8$ *d*) $+\infty\,,\ 0\,,\ 8$
   e) $0\,,\ +\infty\,,\ 1$
4. *a*) Máximo 2, Muchas (finitas) *b*) Máximo 1, Muchas (finitas)
   c) Ninguna *d*) Máximo 2, Ninguna
   e) Ninguna, Ninguna
5. *a*) Horizontales $y=2$; Verticales ninguna *b*) Ninguna
   c) Ninguna *d*) Ninguna
6. *a*) Horizontales $y=-2$; Verticales $x=\pm 3$ *b*) Horizontales $y=1$; Verticales $x=\pm 2$
   c) Horizontales $y=\pm 1$; Verticales Ninguna *d*) Horizontales $y=1/2$; Verticales $x=5\,,\ x=3/2$

SECCIÓN 10.5 (PÁGINA 328)

II. *a*) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}+2=+\infty;\qquad \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty;\qquad \lim_{x\to 0^+} 2=2$

b) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}+3=-\infty;\qquad \lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty;\qquad \lim_{x\to 1^-} 3=3$

d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot x^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty} g(x)f(x)=+\infty;\qquad c=1>0$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{-(x-1)^3}{(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)}\cdot(x-1)^2=-\infty;\qquad c=-1$

f) $\lim_{x\to\infty} xe^x=+\infty;\qquad \lim_{x\to\infty} x=+\infty;\qquad \lim_{x\to\infty} e^x=+\infty$

$III.$

1) $3x^2$	2) $\dfrac{a-1}{3a^2}$	3) 1	4) ny^{n-1}	5) $\dfrac{m}{n}$
6) $\dfrac{a^{1/m}}{ma}$	7) 1	8) -2	9) $\dfrac{-1}{56}$	10) 1
11) $\dfrac{3}{2}$	12) $\dfrac{21}{5}$	13) $Cosx$	14) $-Sena$	15) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$
16) $\dfrac{2}{\pi}$	17) $\dfrac{1}{2}$	18) 0	19) $\dfrac{1}{2}\left(n^2-m^2\right)$	20) $--$

21) 1	22) $\dfrac{1}{4}$	23) $\dfrac{2}{\pi}$	24) $\dfrac{1}{4}$	25) 1
26) 1	27) 6	28) 1	29) $\dfrac{1}{2}$	30) $a-b$
31) 2	32) $+\infty$	33) 0	34) 1	35) 1
36) 1	37) 1	38) 0	39) 2	

$V.$ $a)$ Si $b)$ Si $c)$ No $d)$ No $e)$ No $f)$ No $g)$ No $h)$ No

$VI.$ $a)$ No $b)$ No $c)$ No

CAPÍTULO 11

SECCIÓN 11.2 (PÁGINA 344)

1. *a*) $\dfrac{s(5/4)-s(3/4)}{1/2}$ *b*) $-10\left(\dfrac{3}{4}\right)+10$ *c*) $t=1\ \ seg$
   d) 5 *e*) $t=2\,;\ -10$
2. *a*) $s(3)-s(2)$ *b*) $\dfrac{s(3)-s(2)}{3-2}$ *c*) $s\,'(4)$
3. $m=6$
4. $y=\pm 2x$
5. $(-1/2, 17/4)$
6. $y=1$
7. $y-4=-\dfrac{1}{4}(x-2)$
8. $y-\dfrac{1604}{324}=-\dfrac{2}{9}\left(x-\dfrac{4}{9}\right)$
9. *a*) $f'(0)=1\,;\ f\,'(1)=1/4$ *b*) $f\,'(2)=1/4\,;\ f\,'(0)=1/2\sqrt{2}$
   c) $f\,'(4)=19\,;\ f\,'(1/2)=5$ *d*) $f\,'(x)=nx^{n-1}$ *e*) $f\,'(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
10. *a*) No *b*) No *c*) No
    d) Sí
11. *a*) $f(x)=2x^3\,;\ x=5$ *b*) $f(x)=x^2+2x\,;\ x=3$ *c*) $f(x)=x^2\,;\ x=2$
    d) $f(x)=x^3+x\,;\ x=3$ *e*) $f(x)=Cos\,x$
12. $a=8\,;\ b=-9$
13. *a* y *b* No existen
14. *a*) Verdadera *b*) Falsa *c*) Falsa
    d) Verdadera *e*) Verdadera

SECCIÓN 11.3 (PÁGINA 351)

1. $f\,'(x)=\dfrac{\left(8x^{10}+2\right)\left(8x+32x^3\right)-\left(4x^2+8x^4\right)80x^9}{\left(8x^{10}+2\right)^2}$, $f\,'(3)$ Reemplazar x por 3 en la expresión anterior
2. $f\,'(x)=\dfrac{\left(3+x^{-2}+4x^3\right)\left(-1/x^2+6/x^3\right)-\left(1/x-3/x^2\right)\left(-2x^{-3}+12x^2\right)}{\left(3+x^{-2}+4x^3\right)^2}$
3. $f\,'(x)=\dfrac{\left(2+5x^{-1}\right)\left(-8x^3\right)-\left(1+4x^{-2}\right)\left(-5x^{-2}\right)}{\left(2+5x^{-1}\right)^2}-\dfrac{3}{x^2}$

4. $f'(x) = \dfrac{-2\ln 7\left(1+x^{-2}\right)}{(x-1/x)^2}$

5. $f'(x) = \dfrac{\left(x^3+e^3+x^{-2}/e\right)\left(4+\sqrt{3}\right) - \left(4x+\sqrt{3x^2}\right)\left(3x^2-2x^{-3}/e\right)}{(x^3+e^3+x^{-2}/e)^2}$

SECCIÓN 11.3 (PÁGINA 358)

1. $f'(x) = -Sen\ (\log_6(3+4^x))\ \dfrac{4^x \ln 4}{\ln 6\,(3+4^x)}$

2. $f'(x) = \dfrac{4+4^x\ln 4+4x^3}{2\sqrt{4x+4^x+x^4}}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{4x+4^x+x^4}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

3. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(Sec\,x\,Tan\,x+4/x)}{(Sec\,x+4\ln x)} - \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)$

4. $f'(x) = -Csc\left(3^{Tan\sqrt{xSen\,x}}\right)Cot\left(3^{Tan\sqrt{xSen\,x}}\right)\left(3^{Tan\sqrt{xSen\,x}}\right)'$ ahora $\left(3^{Tan\sqrt{xSen\,x}}\right)'$

$= 3^{Tan\sqrt{xSen\,x}}\ln 3\,Sec^2\left(\sqrt{xSen\,x}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{xSen\,x}}(Sen\,x+xCos\,x)$

5. $f'(x) = 6^x\ln 6+6x^5+\dfrac{1}{x\ln 6}$

6. $f'(x) = 3Sen^2\,xCos\,x+\left(Cos\,x^3\right)\left(3x^2\right)+2Cos\,2x+2Cos\,x+4Cos\,2x$

7. $f'(x) = \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{Cos\ (1+x^{-1})\left(-x^{-2}\right)}{Sen\ (1+x^{-1})}\right]Csc\,(1+e^x+6^x) + \left(\dfrac{3}{4}\ln\left(Sen\ \left(1+x^{-1}\right)\right)\right)$

$(-Csc\ (1+e^x+6^x))\,Ctg\,(1+e^x+6^x)\,(e^x+6^x\ln 6)$

SECCIÓN 11.3 (PÁGINA 365)

1. $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{3}$

3. $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}+2\pi x^{2\pi-1}+\sqrt{2}\,(Sen\,x+2)^{\sqrt{2}-1}Cos\,x$

4. $f'(x) = \left(\sqrt{5}+1\right)(\ln x+Cos\,x+e^x)^{\sqrt{5}}(1/x-Sen\,x+e^x)$

5. $f'(x) = 4ArcSen^3\,3x\dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}ArcCos\,(Cos\,2x)+\left(ArcCos^4\,3x\right)\left(\dfrac{2Sen\,2x}{\sqrt{1-(Cos\,2x)^2}}\right)$

6. $f'(x) = (ArcTan\ (Sen\ x))^{x+2}\left[\ln(ArcTan\ (Sen\ x)) + (x+2)\dfrac{1}{ArcTan\ (Sen\ x)}\cdot\dfrac{1}{(1+Sen^2\ x)}Cos\ x\right]$

7. $f'(x) = \dfrac{-Cosh\ x}{|\sinh x|\sqrt{-1+\sinh^2 x}}\cdot \arccos(\sinh x) + ArcSec\ (Senh\ x)\dfrac{(Sech\ x\ Tanh\ x)}{\sqrt{1-Sech^2\ x}}$

8. $f'(x) = (ArcTan\ x)^{ArcCos\left(x^2\right)}\cdot\left[\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}\ln(ArcTan\ x) + ArcCos\ x^2\cdot\dfrac{1}{ArcTan\ x}\cdot\dfrac{1}{(1+x^2)}\right]$

SECCIÓN 11.4 (PÁGINA 372)

I.

1. $y = 4\left(1-x^2\right)$	2. $y = 4-4x^2$	3. $y = 1+(x-2)^2$	4. $y = 1-x^2/2$
5. $\dfrac{x+5}{a} = \dfrac{(y-3)^2}{4}$	6. $y = x^{-2}$	7. $x-1 = y$	8. $x = e^y$
9. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 1$	10. $x = \sqrt{5-y}$	11. $x = 1-2y^2$	12. $y = x^2+3x-1$

II.

1. $x = t;\ y = -t^2$	2. $x = t;\ y = 1-t^2$	3. $x = 0;\ y = 0;\ z = t$
4. $\alpha(t) = (2,3,4) + t((3,5,7)-(2,3,4))$	$0 \le t \le 1$	5. $x = t;\ y = -t^2+4$
6. $x = t;\ y = 4-t$	7. $x = Cosh\ t;\ y = Senh\ t$	8. $x = 3Cos\ t;\ \dfrac{2y}{3} = Sen\ t$
9. $x = 10;\ y = t$	10. $x = t;\ y = 0$	11. $\dfrac{x-1}{3} = Cos\ t;\ \dfrac{y-3}{2\cdot 3} = Cos\ t$

III.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	2. $-6\cdot 25$	3. 12	4. $\dfrac{1}{4}$

SECCIÓN 11.5 (PÁGINA 376)

2. 4^3e^{4x} 3. $f^{(n)}(x) = n!$ 4. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1-2x}\right) = \dfrac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}$

5. $f''(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & x>2 \\ \text{No} \ \exists & x=2 \\ 0 & x<2 \end{array}\right\}$

6. $f''(x) = \left\{\begin{array}{cc} 2 & x>0 \\ \text{No} \ \exists & x=0 \\ 0 & x<0 \end{array}\right\}$ $\quad f'''(x) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & x>0 \\ \text{No} \ \exists & x=0 \\ 0 & x<0 \end{array}\right\}$

$f''(0)$ No existe; $f''(2) = 2$; $f'''(5) = 0$

SECCIÓN 11.6 (PÁGINA 381)

I.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+2y-1}{2x+5y^4}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Cosh\, y + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + y}{x\,Senh\, y + x}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+2y+e^{y^2}-1/x}{2x+2xye^{y^2}-1}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3} + \frac{1}{2\sqrt{Sen\, y}}Cos\, y}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2-3y^2}{3y^2-6xy}$

II.

1. $\dfrac{-36}{83}$

III.

1. $\dfrac{7}{34}$

2. $\dfrac{36}{24}$

SECCIÓN 11.7 (PÁGINA 383)

I. *a*) $\dfrac{1}{30}+10$ *b*) $\dfrac{2}{11}+11$ *c*) $\dfrac{1}{243}(-53)+9$

II. *a*) $\Delta y = (2x-1)h + h^2$ *b*) $dy = (2x-1)dx$

III. *a*) $2\pi(5)(0.06)$

IV. *a*) -80π

CAPÍTULO 12

SECCIÓN 12.1 (PÁGINA 388)

1. *a*) $f(x) = Sen\,x$ *b*) $f(x) = x\,,\ 0 \leq x \leq 10$ *c*) $f(x) = x(x-1)(x-2)$
   d) No

2. *a*) Mínimo absoluto en $x = 0$, con valor $f(0) = 0$; y relativo en $x = 5$.
   Máximo absoluto con valor $f(5) = 25$; Es convexa en $(-3,5]$; decreciente en $(-3,0)$ y creciente en $(0,5)$. No tiene puntos de inflexion
   b) Creciente, tiene máximo en $x = 20$; Cóncava $(-10,0)$ y es convexa en $(0,20]$; punto de inflexion $(0,0)$
   c) En $x = \pi/2$, tiene máximo absoluto o relativo con valor $f(\pi/2) = 1$; en $x = 3\pi/2$, tiene mínimo absoluto o relativo con valor $f(3\pi/2) = -1$, en $x = -\pi/2$, tiene mínimo absoluto con valor $f(-\pi/2) = -1$, Convexa en $(-\pi/2,0)$; $(\pi,2\pi)$ Cóncava $(0,\pi)$ .Puntos de inflexion $(0,0)$; $(\pi,0)$
   d) f es creciente, no tiene extremos, es cóncava en $(-\pi/2,0)$ y convexa en $(0,\pi/2)$, puntos de inflexion $(0,0)$
   e) f es creciente, tiene mínimo absoluto en $x = -2$ y con valor $f(-2) = e^{-2}$; convexa, no tiene puntos inflexion
   f) f es creciente, no tiene extremos, es cóncava en $(0,+\infty)$, no tiene puntos de inflexion
   g) Tiene mínimo absoluto en $x = 0$ y con valor $f(0) = 0$ y tiene máximo absoluto en $x = 4$ y con valor $f(4) = 4$, decreciente en $(-1,0)$ y creciente en $(0,4)$

SECCIÓN 12.1 (PÁGINA 400)

I.

1. Mínimo absoluto en $x = \pm 3$; $f(\pm 3) = 0$, Máximo relativo en $x = 0$; $f(0) = 9$ Decreciente en $(-\infty,-3)$; $(0,3)$, Creciente en $(-3,0)$; $(3,+\infty)$ Convexa en $(-\infty,-3)$; $(3,+\infty)$ Cóncava en $(-3,3)$
9. Creciente en $(-\infty,+\infty)$, No tiene extremos, Puntos de inflexion en $n\pi$, Convexa en $(2n-1)\pi < x < 2n\pi$, Cóncava $2n\pi < x < (2n+1)\pi$
10. Decreciente en $(-\infty,-\sqrt{2})$; $(0,\sqrt{2})$, Creciente en $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},+\infty)$
    Mínimo absoluto en $x = \pm\sqrt{2}$; $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 2^{1/3}(-6)$ Máximo relativo en $x = 0$; $f(0) = 0$ Convexa en $(-\infty,0)$; $(0,+\infty)$

II.

1. $a=-1/2;\ b=2;\ c=4$
2. $a=-1;\ b=3$
3. $a=2;\ b=-6;\ c=0;\ d=3$
4. $a=-9;\ b=18;\ c=-2$
6. $a=-3;\ b=7$

SECCIÓN 12.4 (PÁGINA 405)

1. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$
2 $A=\pi r^2;\ \frac{dA}{dr}=2\pi r;\ \frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$
3. $\frac{12}{\sqrt{10}}$
4. $\frac{dA}{dt}=2L\frac{dL}{dt}$
5. 900

SECCIÓN 12.5 (PÁGINA 408)

1. $x=7/2;\ y=5/2;\ d=1$
3. $r=2;\ h=5$
4. $y=-\frac{9}{5}(x-18)$
6. $x=\frac{p}{4}=y$
7. $2\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}$
9. $r=\frac{R\sqrt{2}}{2};\ h=\frac{R\sqrt{2}}{2}$

SECCIÓN 12.6 (PÁGINA 413)

I. 1. $1/2$ 2. 3 3. 0 4. 1 5. e^4
6. 0 7. e 8. 4^4 9. $\frac{\ln 2}{2}$ 10. e^4
11. 1 12. 0 13. 0 14. $\frac{1}{e}$ 15. $\frac{1}{2}$
16. 1 17. 1 18. No existe

II. $\ln 2$

III. $n=\frac{2}{\ln 9}=\frac{1}{\ln 3}$

BIBLIOGRAFIA

BRITTON, Jack R. *Matemáticas Universitarias.* Editorial Continental 1981.

HOSTETLER, Robert. *Precalculus.* Heath and Company Lexington. Massachusett 1985.

KALNIN, R. A. *Algebra y Funciones Elementales.* Editorial Mir 1978.

LEHMANN, Charles. *Algebra.* Editorial LImusa 1983.

PENNEY, David E. EDWARDS, C.H. *Cálculo y Geometría Analítica.* Prentice – Hall Iberoamericana S.A. Segunda Edición 1990.

PETERSON, John C. *Matemáticas Básicas Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica.* Editorial Continental S.A. Primera Edición 1998.

SPIVAK, Michael. *Calculus.* Editorial Recerté, S.A. Barcelona 1975.

SWOKOWSKI, Earl. *Algebra y Trigonometría.* Editorial Iberoamericana. Segunda Edición 1993.

SWOKOWSKI, Earl. *Calculo con Geometría Analítica.* Editorial Iberoamericana. Tercera Edición 1995.

ZILL, Dennis. *Algebra y Trigonometría.* Mc Graw - Hill. Segunda Edición 1999.

Impreso en el Centro de Publicaciones
de la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

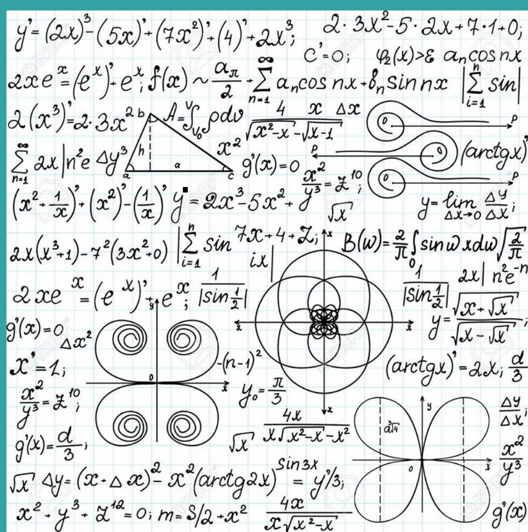
Colección

Libros de Matemática

en PDF

Esta colección no es más que una recopilación, sin ánimo de lucro y distribuida solo con fines educativos, de diferentes obras autoeditadas y apuntes docentes elaborados por Universidades, Institutos y Escuelas Técnicas, que generalmente ponen al alcance de sus estudiantes, sobre diferentes temas de matemáticas, física, ingeniería y ciencias afines, ahora reunidas bajo el sello del grupo "Libros de Matemática en PDF".

Libros de Matemática en PDF



Solo con fines educativos